



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

FERNANDO SÔNEGO DE TOLEDO

Identidades Polinomiais em Álgebras com Derivação

Campinas

2024

Fernando Sônego de Toledo

Identidades Polinomiais em Álgebras com Derivação

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Fernando Sônego de Toledo e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

T575i Toledo, Fernando Sônego de, 1996-
Identidades polinomiais em álgebras com derivação / Fernando Sônego de Toledo. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Identidade polinomial. 2. Polinômios diferenciais. 3. Álgebras com derivação. 4. L-álgebras. 5. Matrizes triangulares superiores. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Polynomial identities in algebras with derivation

Palavras-chave em inglês:

Polynomial identity

Differential polynomials

Algebras with derivation

L-algebras

Upper triangular matrices

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]

Carla Rizzo

Dimas José Gonçalves

Rafael Bezerra dos Santos

Felipe Yukihide Yasumura

Data de defesa: 06-08-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-0685-3437>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/7557063995437697>

**Tese de Doutorado defendida em 06 de agosto de 2024 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). CARLA RIZZO

Prof(a). Dr(a). DIMAS JOSÉ GONÇALVES

Prof(a). Dr(a). RAFAEL BEZERRA DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). FELIPE YUKIHIDE YASUMURA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é dedicado ao meus ancestrais;
aqueles que vieram antes de mim e abriram os caminhos
para que eu chegasse onde cheguei.*

Agradecimentos

Agradecer é uma tarefa de muita seriedade. Não pelo ato em si, que acredito se tornar mais leve quanto maior for a prática, mas pela responsabilidade em lembrar de cada um que foi significativo nesse processo de formação científica, profissional e também pessoal. É uma ação de valorização da condição social e coletiva do ser humano, de reconhecimento daqueles que, na sua subjetividade, dispuseram energia na construção daquilo que sou hoje.

Como já adiantei em minha dedicatória, meu agradecimento só tem um início possível: meus antepassados paternos e maternos.

Aos meus avós Elisiário e Zilda Maria que sempre me incentivaram demonstrando o orgulho em ter um neto que seria um matemático. À minha avó Aurea, que não tive a oportunidade de conhecer pois teve uma passagem breve por aqui, mas que hoje dá nome à antiga escola rural em Duplo Céu, distrito de Palestina, que ela lecionava.

Aos meus avós Pascoal e Ligia Telma que me ensinaram o que realmente é necessário para um bem viver: simplicidade e comunhão com a natureza. Amor, cuidado, carinho, respeito a todas pessoas, fossem familiares, agregados, amigos.

Um agradecimento indispensável ao meu pai, Alfredo, meu professor dos conhecimentos práticos e portador de uma mente criativa e engenhosa, e à minha mãe, Ana Claudia, mulher exemplar, com uma disposição incessante para cuidar de quatro filhos e ainda retomar seus estudos em um curso supletivo até a obtenção de um grau de mestre em direito. Além de ser grato à vocês por me darem a vida, também agradeço pelo que me permitiram fazer dela!

Em nome da Tia Bete e Tio Clóvis, professores de matemática apaixonados, tanto por ela quanto a partir dela, saúdo e agradeço a todos meus familiares. Além destes, também não estaria aqui e nem seria quem sou se não fossem os preciosos amigos que fui colecionando nesse caminho.

Em Matão conheci os primeiros amigos que me ensinariam que há família ainda que não se compartilhe o mesmo sangue. Em nome de alguns, cada qual relacionado a um recorte histórico da minha vida, espero representar todos sem causar desapontamentos. Minha incomensurável gratidão em nome de Gabriel Silva, Felipe Corrêa, João Francisco Coelho, Leonardo Georgete e Henrique Cadioli, pela eterna amizade que levaremos!

Já em São Carlos, fui presenteado com mais desses familiares não consaguíneos. Àqueles que dividiram morada comigo durante a graduação agradeço em nome do companheiro de todos nós, Deidson Velloso. Pessoa exemplar, que representa o quão

valiosa foi essa experiência de compartilharmos todos nós o mesmo espaço, tempo e, consequentemente, a vida.

Agradeço imensamente à Joice e Kerlon, compadres, amigos de roça, irmãos de propósito. O cuidado e a companhia de vocês foi imprescindível para que eu chegasse até aqui!

Em virtude da pandemia de COVID-19, passei somente três anos residindo em Campinas, dois deles durante meu mestrado e um no primeiro ano do doutorado em 2020. Ainda assim foi suficiente para fazer bons amigos que dividiram em muito as alegrias e dores de ser um pós graduando em matemática.

Cássia, Kauê, Pedro, entre tantos que trouxeram leveza aos dias, meu muito obrigado! Um agradecimento especial vai ao camarada Paulo Lupatini. Amigo matemático que me acompanha desde a graduação na UFSCar até os dias atuais no doutorado. Nossa história guarda vários causos engraçados mas parece que foi na minha casa, por conta de uma lousa com rabiscos de Teoria dos Conjuntos e um desenho do conjunto de Cantor na parede, que Paulo foi convertido do curso de estatística para o bacharelado em matemática. Minha sincera gratidão pela nossa amizade!

Chegando ao fim dessa crônica quase linear não posso deixar de explicitar minha gratidão a todos professores que me formaram nesse caminho e agradeço a partir dos seguintes nomes: Prof. Ms. Marcelo Mana e Prof. Dr. Huyrá Estevão, que me iniciaram no mundo da pesquisa científica ainda no ensino médio. Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo que não só me orientou mas me ensinou o caminho para a pós-graduação. Prof. Dr. Lucio Centrone que me recebeu muito bem em Campinas ainda durante meu curso de verão em álgebra linear avançada e abriu as portas do IMECC para mim.

Ao Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov um agradecimento imenso e distinto! Desde sua coorientação no final do meu mestrado até hoje, na conclusão deste doutorado, me surpreendo tanto pela sua competência em entender minhas dúvidas e sempre sugerir bons caminhos mas também pela sua humanidade em lidar e aconselhar sobre questões pessoais de seus alunos. Muito obrigado mesmo!

Por último e nada menos importante, visto que é urgente a valorização do ensino superior no Brasil e consequentemente de seus agentes graduandos, pós-graduandos, professores e técnicos administrativos, meu agradecimento ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) que financiou integralmente uma bolsa de doutorado (processo nº 141412/2020-8) durante minha formação.

Resumo

Os resultados presentes nessa tese estão situados na teoria de identidades diferenciais em álgebras com derivação, ou álgebras associativas que são ao mesmo tempo L -módulos, sobre corpos de característica zero. Foram estudadas as identidades diferenciais de $\mathcal{U}_m$, a álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem m , em que $m \geq 3$, sob ação de uma álgebra de Lie L gerada pelas derivações internas induzidas pelos elementos e_{11} , e_{mm} e e_{1m} , que em todo caso é isomorfa à álgebra de Lie $\mathfrak{t}_2$ formada pelas matrizes triangulares superiores de ordem 2.

Dentre os principais resultados, foi exibido um conjunto gerador para o T_L -ideal de identidades de $\mathcal{U}_m$ e foi encontrada a decomposição em S_n -módulos irredutíveis dos polinômios diferenciais multilineares próprios quocientados por $T_L(\mathcal{U}_m)$. Isso permitiu ainda o cálculo da n -ésima codimensão diferencial e do PI-expoente diferencial para o caso particular de $\mathcal{U}_3$.

Palavras-chave: identidades polinomiais; polinômios diferenciais; álgebras com derivação; L -álgebras; matrizes triangulares superiores.

Abstract

The results presented in this thesis are situated in the theory of differential identities in algebras with derivation, or associative algebras that are at the same time L -modules, over fields of characteristic zero. Were studied in this work the differential identities of $\mathcal{U}_m$, the algebra of upper triangular matrices of order m , where $m \geq 3$, under the action of a Lie algebra L generated by the inner derivations induced by the elements e_{11} , e_{mm} , and e_{1m} , which in all cases is isomorphic to the Lie algebra $\mathfrak{t}_2$ formed by the upper triangular matrices of order 2.

Among the main results, a generating set for the T_L -ideal of identities of $\mathcal{U}_m$ was exhibited and the decomposition into irreducible S_n -modules of the proper multilinear differential polynomials quotiented by $T_L(\mathcal{U}_m)$ was found. This also allowed the calculation of the n -th differential codimension and the differential PI-exponent for the particular case of $\mathcal{U}_3$.

Keywords: polynomial identities; differential polynomials; algebras with derivation; L -algebras; upper triangular matrices.

Lista de abreviaturas e siglas

<i>e.g.</i>	<i>exempli grata</i> ou por exemplo
<i>i.e.</i>	<i>id est</i> ou isto é
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
nsc	normal standard commutator
nssc	normal semistandard commutator
osc	ordinary standard commutator
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

Lista de símbolos

$M_m(F)$	Álgebra associativa formada pelas matrizes de ordem m com entradas no corpo F
UT_m	Álgebra associativa formada pelas matrizes triangulares superiores
$F\langle X \rangle$	Álgebra associativa livre
$F\langle X^L \rangle$	Álgebra com derivação livre
$\mathcal{U}_m$	Álgebra com derivação formada por matrizes triangulares superiores
$\mathfrak{t}_m$	Álgebra de Lie formada por matrizes triangulares superiores
$\langle S \rangle_{\text{Lie}}$	Álgebra de Lie gerada por S
$A^{(-)}$	Álgebra de Lie que, como espaço vetorial, coincide com uma álgebra associativa A e cujo comutador é definido a partir do produto de A .
$\mathcal{B}$	Conjunto de todos produtos de nsc's, incluindo os nsc's como produtos envolvendo um único termo
$\mathcal{B}_k$	Conjunto formado por produtos de k nsc's
$\text{Hom}_L(A)$	Conjunto dos L -homomorfismos entre L -álgebras A e B
$\text{End}_L(A)$	Conjunto dos L -endomorfismos de uma L -álgebra A
P^L	Espaço vetorial dos polinômios diferenciais multilineares
P_n^L	Espaço vetorial dos polinômios diferenciais multilineares em n variáveis
Γ^L	Espaço vetorial dos polinômios diferenciais multilineares próprios
Γ_n^L	Espaço vetorial dos polinômios diferenciais multilineares próprios em n variáveis
$\Gamma_{n,k}^L$	Espaço vetorial dos polinômios diferenciais multilineares próprios em n variáveis formados por produtos de k nsc's
P	Espaço vetorial dos polinômios multilineares
P_n	Espaço vetorial dos polinômios multilineares em n variáveis
Γ_n	Espaço vetorial dos polinômios multilineares próprios em n variáveis

B	Espaço vetorial dos polinômios próprios
B_n	Espaço vetorial dos polinômios próprios em n variáveis
$\langle S \rangle_{EV}$	Espaço vetorial gerado por S
B^L	L -álgebra dos polinômios diferenciais próprios
∞	Infinito
s_d	Identidade standard de grau d
B_X^L	L -álgebra dos polinômios diferenciais próprios e variáveis puramente diferenciais
$\mathbf{I}_m$	Matriz identidade de ordem $m \times m$
$c_n(A)$	n -ésima codimensão de A
$c_n^L(A)$	n -ésima codimensão diferencial de A
$\gamma_n^L(A)$	n -ésima codimensão diferencial própria de A
$\gamma_n(A)$	n -ésima codimensão própria de A
$\exp(A)$	PI-expoente de A
$\exp^L(A)$	PI-expoente diferencial de A
$T_L(A)$	T_L -ideal de identidades diferenciais de uma L -álgebra A
$T(A)$	T -ideal de identidades ordinárias de uma álgebra associativa A
$\langle S \rangle_T$	T -ideal gerado por S
$\langle S \rangle_{T_L}$	T_L -ideal gerado por S

Sumário

Introdução	14
1 Conceitos Preliminares	18
1.1 Convenções	18
1.2 Representações de S_n	19
1.3 Polinômios e PI-Álgebras	27
1.4 Derivações e Álgebras com Derivação	34
1.5 Identidades em Álgebras com Derivação	39
2 Variedade diferencial gerada por $\mathcal{U}_m$	44
2.1 $\mathcal{U}_m$ e Algumas Identidades Diferenciais	44
2.2 Um Conjunto Gerador para $T_L(\mathcal{U}_m)$	49
2.3 Estrutura de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_m)$ como S_n -módulo	61
REFERÊNCIAS	72

Introdução

Como dito por Yu. P. Razmyslov em (Razmyslov, 1994) as identidades representam um instrumento algébrico muito útil para distinguir diferentes classes de objetos. E sua utilidade assume uma grande generalidade uma vez que os objetos em estudo podem ser considerados com diferentes estruturas como grupos, anéis, álgebras associativas entre tantas outras classes de álgebras (graduadas, de Lie, de Jordan, etc).

De certo modo as identidades satisfeitas por uma classe de objetos traduzem determinadas relações satisfeitas globalmente ou até mais localmente com respeito aos objetos em questão. Por exemplo, uma identidade polinomial satisfeita por uma álgebra associativa A representa uma relação satisfeita por todos elementos de A enquanto uma identidade graduada de A , supondo que A possua uma graduação não trivial por um grupo G , representa uma relação satisfeita por determinadas componentes A_h 's de $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$.

Deixando a generalidade dos objetos um pouco de lado para tratar especificamente de identidades polinomiais em álgebras associativas, um início possível dessa teoria é marcado pelo artigo (Dehn, 1922) em que o autor buscava traduzir os teoremas de intersecção do Plano Desarguiano (em homenagem à *Girard Desargues*) a partir de relações polinomiais que a álgebra com divisão D em questão deveria satisfazer.

Muito se desenvolveu a partir daí, tanto no estudo das classes de álgebras que satisfazem um determinado conjunto de identidades, as chamadas variedades de álgebras, assim como em casos de álgebras concretas.

Tratando-se deste último caso, em (Wagner, 1937) Wagner mostrou que $M_2(F)$ satisfaz a identidade $[[x_1, x_2]^2, x_3] = 0$, hoje conhecida como identidade de Hall. Bem mais tarde, em 1973, Razmyslov apresentou uma base finita para o T -ideal de identidades de $M_2(F)$ quando F é um corpo de característica 0 (Razmyslov, 1973). Nem 10 anos depois, Drensky mostrou a existência de uma base minimal para este mesmo T -ideal (Drensky, 1981) formado somente por duas identidades, a de Hall e a identidade standard $s_4 = 0$.

Não demorou portanto para se perceber a dificuldade em encontrar identidades polinomiais em álgebras concretas, quanto mais descrever uma base para o T -ideal de identidades dessa álgebra. Isso se evidencia até hoje uma vez que o problema de descrever uma base para as identidades polinomiais só possui resposta fechada para poucos casos além da álgebra de Grassmann (Latyshev, 1963), (Krakowski; Regev, 1973), da álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem $m \geq 2$ (Mal'tsev, 1971) e obviamente de $M_2(F)$.

De certo modo, todos esses problemas estão vinculados à um outro de ordem maior, o chamado Problema de Specht. Em 1950, no artigo (Specht, 1950), o autor

conjecturou que todo T -ideal deveria ser finitamente gerado. Em outras palavras Specht reformulou a tese do Teorema da Base de Hilbert para o contexto de PI-Álgebras, assim como fez B. H. Neumann para grupos (Neumann, 1937).

Essa conjectura teve sua primeira demonstração sobre corpos de característica zero, apresentada por Kemer em (Kemer, 1987). Para uma exposição mais completa sobre essa conjectura, os diferentes contextos em que ela já foi formulada e respondida, recomenda-se a leitura de (Belov-Kanel; Rowen; Vishne, 2012).

No que se refere à investigação das variedades de álgebras, mais importante do que exemplos concretos talvez seja a influência das identidades na álgebra associativa livre $F\langle X \rangle$. Uma variedade $\mathcal{V}(I)$ gerada por um conjunto $I \subseteq F\langle X \rangle$ (equivalentemente pelo T -ideal gerado por I) é definida como a classe das F -álgebras associativas que satisfazem as identidades $f = 0, \forall f \in I$.

Um teorema de Birkhoff (Birkhoff, 1935) mostrou que uma classe de álgebras $\mathcal{C}$ é uma variedade se e somente se é essa classe é fechada ao se considerar subálgebras, imagens homomórficas e produtos cartesianos. Além disso, o quociente de $F\langle X \rangle$ pelo T -ideal que gera a variedade fornece a chamada álgebra relativamente livre de $\mathcal{V}(I)$, o exemplo de álgebra mais representativa dentro dessa variedade.

É bem sabido que sobre corpos de característica zero é possível aplicar o processo de multilinearização para garantir que o T -ideal de identidades de uma álgebra A é suficientemente gerado pelas identidades multilineares de A . Nesse contexto surgem os tais invariantes numéricos associados a uma variedade $\mathcal{V}$. Define-se a n -ésima codimensão de $\mathcal{V}$ como

$$c_n(\mathcal{V}) := \dim \frac{P_n}{P_n \cap \langle I \rangle_T},$$

em que P_n é o espaço dos polinômios multilineares de grau n e $\langle I \rangle_T$ é o T -ideal gerado pelo conjunto I das identidades satisfeitas por $\mathcal{V}$. E o PI-expoente de $\mathcal{V}$ é

$$\text{Exp}(\mathcal{V}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n},$$

quando esse limite existir. Desta maneira pode-se definir o crescimento de uma variedade com base no crescimento da sequência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Obviamente esses conceitos podem ser associados a uma álgebra A ou a um T -ideal J considerando as variedades definidas por A ou por J , respectivamente.

Em 1972, Regev provou que se A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$ então

$$c_n(A) \leq (d-1)^{2n} \quad (\text{Regev, 1972}).$$

Quase 20 anos depois, Kemer mostrou que, na verdade, $c_n(A)$ ou é limitado por um polinômio ou então cresce exponencialmente (Kemer, 1991). Já com relação ao PI-expoente,

Giambruno e Zaicev provaram, em meados dos anos 2000, uma conjectura de Amitsur que afirmava que $\text{Exp}(A)$ é sempre um número inteiro não negativo (Giambruno; Zaicev, 1998), (Giambruno; Zaicev, 1999).

Um resultado de Kemer em (Kemer, 1979) deixa explícito a importância desses invariantes numéricos na classificação de variedades. Foi mostrado que uma variedade $\mathcal{V}$ possui crescimento polinomial se e só se $\mathcal{V}$ não contém a variedade gerada por UT_2 nem a variedade gerada pela álgebra de Grassmann E .

Curvando essa crônica um pouco para o contexto específico de variedades de álgebras com derivação, que é o ambiente de investigação dessa tese, ainda nos anos 70, Kharchenko publica dois artigos (Kharchenko, 1978), (Kharchenko, 1979) fundamentais para o estabelecimento da teoria de identidades diferenciais em álgebras com derivação. Mais tarde, esses trabalhos seriam organizados e incluídos no contexto maior de identidades generalizadas a partir do livro (Beidar; Martindale; Mikhalev, 1996) e restrito às identidades diferenciais e identidades com automorfismos na monografia (Kharchenko, 1991).

Porém o contexto de H -identidades, ou identidades em álgebras sob ação de uma álgebra de Hopf H , forneceu uma generalização suficientemente adequada para diversos tipos de identidades, dentre estes as identidades diferenciais. Com os trabalhos (Berele, 1996) e (Gordienko, 2013a), (Gordienko, 2013b), (Gordienko; Kochetov, 2014) sobre H -identidades, o ambiente da PI -teoria ordinária foi traduzido para esse novo contexto. Em particular, foram introduzidas as técnicas para o estudo quantitativo das identidades diferenciais, como a n -ésima codimensão diferencial c_n^L , o n -ésimo cocaracter diferencial ξ_n^L e o PI -expoente diferencial Exp^L . Outra consequência foi a demonstração de um análogo à conjectura de Amitsur sobre o PI -expoente para o contexto diferencial.

Nos últimos anos uma série de artigos tratando de casos concretos de álgebras com derivação forneceram mais materialidade para esses resultados. Em 2017 um artigo de Giambruno e Rizzo estudou as identidades diferenciais de UT_2 sob ação de $\text{Der}(UT_2)$ e mostrou que, diferentemente do caso ordinário, a variedade diferencial gerada por UT_2 não possui crescimento quase polinomial apesar dos expoentes ainda coincidirem (Giambruno; Rizzo, 2019).

No ano seguinte, Rizzo estudou a variedade diferencial $\mathcal{V}^L(G)$ gerada pela álgebra de Grassmann de dimensão infinita G sob ação de uma álgebra de Lie abeliana $L = \langle \delta_i : 1 \leq i \leq t \rangle_{Lie}$, onde $t \geq 1$ e cada δ_i é uma derivação interna (Rizzo, 2020). Nesse caso, o T_L -ideal das identidades diferenciais continua sendo gerado pela identidade ordinária (como T_L -ideal!) e assim como em (Giambruno; Rizzo, 2019), em discrepância com o caso ordinário, $\mathcal{V}^L(G)$ não possui crescimento quase polinomial.

Na sequência, Di Vincenzo e Nardoza em (Di Vincenzo; Nardoza, 2021) determinaram um conjunto gerador para o T_L -ideal de identidades diferenciais $T_L(UT_m)$,

em que L é a álgebra de Lie metabeliana de dimensão dois. Além disso, foi determinada a estrutura de S_n -módulo dos espaços formados pelos polinômios multilineares próprios (módulo identidades) e calculadas $c_n^L(UT_m)$ para $m \in \{2, 3\}$.

Foi inspirado principalmente nesse último artigo que esse trabalho começou. A partir de uma investigação de como as derivações internas agiam nas matrizes de UT_m , se destacou uma simetria que havia entre as derivações $\text{ad}(e_{11})$ e $\text{ad}(e_{mm})$. Curiosamente, para todo $m \geq 2$, $L = \langle \text{ad}(e_{11}), \text{ad}(e_{mm}), \text{ad}(e_{1m}) \rangle_{Lie}$ é isomorfa à $\mathfrak{t}_2$. E daí em diante o que se sucedeu se encontra nas próximas páginas do presente trabalho. Em resumo, conseguimos estender a esse caso aquilo que foi obtido pelos autores em (Di Vincenzo; Nardoza, 2021).

Não poderia deixar de mencionar alguns artigos publicados há pouco tempo e que acabei por ler já no período de conclusão da tese. O artigo (Nardoza, 2023) estudou o caso de UT_3 sob ação de $\text{Der}(UT_3)$ e muito bem destacou uma identidade comum às nossas investigações e que só ocorre no caso particular em que $m = 3$. Além desse, o artigo (Brox; Rizzo, 2024) estudou $M_m(F)$ sob ação de $\text{Der}(M_m(F))$, fornecendo resultados completos quanto a um conjunto gerador das identidades diferenciais e também em relação ao crescimento de $\mathcal{V}^L(M_m(F))$.

1 Conceitos Preliminares

1.1 Convenções

Antes de discorrer sobre resultados matemáticos, é importante estabelecer o contexto padrão, ou aquele comum à maioria das proposições e teoremas que serão apresentados nesta tese.

Geralmente F denotará um corpo cuja característica é zero e toda estrutura algébrica que tenha um corpo base será considerada sobre F . O termo “álgebra” irá se referir sempre a uma F -álgebra associativa com unidade e será comumente denotada por A .

$X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ denotará um conjunto enumerável de variáveis (equivalentemente, letras do alfabeto X) e $F\langle X \rangle$ representará a álgebra de polinômios não comutativos nas variáveis X , que na maioria das vezes será o exemplo concreto de álgebra associativa livre considerado. Podemos "visualizar" $F\langle X \rangle$ como sendo o espaço vetorial cuja base é formada pelos monômios não comutativos em X (as palavras no alfabeto X), e com multiplicação entre dois monômios dada pela justaposição. Usando as leis distributivas, estendemos esta multiplicação aos elementos de $F\langle X \rangle$, isto é, aos polinômios. Como de costume, P_n denotará o espaço dos polinômios multilineares de grau n , nas variáveis $x_1, \dots, x_n$. Esse é o chamado *contexto ordinário* desta tese.

Por outro lado, como esse trabalho trata de identidades em álgebras com derivação (ou L -álgebras), há também um outro contexto caracterizado como *diferencial*. Como uma álgebra com derivação é uma álgebra que também é um L -módulo, com $L \subseteq \text{Der}(A)$ uma álgebra de Lie, será comum denotar uma álgebra com derivação simplesmente por A porém explicitando o contexto para não haver dúvidas do que se trata. Como há uma equivalência em considerar ações de L ou de $U(L)$, onde $U(L)$ é a álgebra universal envelopante de L , A será vista como $U(L)$ -módulo por ser mais conveniente.

Além disso, $X^L = \{x_i^d : i \in \mathbb{N}, d \in U(L)\}$ denotará um conjunto enumerável de variáveis (ou letras) diferenciais enquanto $F\langle X^L \rangle$ será a álgebra de polinômios diferenciais nas variáveis X^L . Como é de se esperar, $F\langle X^L \rangle$ também satisfaz uma propriedade universal na classe das álgebras com derivação e por isso será considerada uma álgebra livre com derivação.

Neste novo alfabeto é evidente que há um conjunto formado pelos polinômios diferenciais multilineares de grau n , que será denotado por P_n^L . Assim como no caso ordinário, em característica zero este conjunto também corresponde a uma base para o espaço vetorial dos elementos multilineares na álgebra livre com derivação. De novo o

processo de linearização (polarização) é invertível e o inverso é a chamada simetrização (restituição), pois a característica de F é 0. Logo os elementos multilineares contidos num ideal de identidades determinam unicamente este ideal.

Vale destacar que tanto a nomenclatura “ L -álgebra” quanto “álgebra com derivação” serão utilizadas, isto pois a primeira permite distinguir quem é a álgebra L que age em A enquanto a outra destaca a natureza dos elementos dessa álgebra L , que é formada por derivações da álgebra A . Portanto a escolha em utilizar um nome ou outro se dará pela necessidade de destacar um desses aspectos, podendo ser também por mera brevidade de escrita.

Em resumo, o *contexto padrão* se trata portanto da união desses dois contextos, ordinário e diferencial. É evidente que ambos não se resumem somente aos objetos destacados acima porém o restante (*e.g.*, variedade ordinária e diferencial, n -ésima codimensão ordinária e diferencial, etc) pode ser definido no decorrer deste texto.

1.2 Representações de S_n

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos e resultados da teoria de representações dos grupos simétrico, S_n , e geral linear, $GL_m(F)$. A discussão feita a seguir tem como referência o livro (Drensky, 2000) e se faz necessária para que o conteúdo dessa tese seja o mais autocontido possível. Omitiremos as demonstrações das afirmações, essas podem ser encontradas em (Drensky, 2000).

Se G é um grupo, FG denotará a álgebra de grupo de G , ou seja, FG é um espaço vetorial com base formada pelos elementos de G e o produto de dois elementos desta base é dado pelo produto em G .

Dado um espaço vetorial W , $GL(W)$ denotará o *grupo geral linear de W* , ou seja, o grupo das transformações lineares invertíveis de W . Se $\dim W = m < \infty$ e for fixada uma base $\{w_1, \dots, w_m\}$ de W , é óbvio que este grupo pode ser identificado com o grupo das matrizes $m \times m$ invertíveis com entradas em F . Além disso, nesse caso, $GL(W)$ poderá ser denotado simplesmente por GL_m ou $GL_m(F)$.

Definição 1.2.1. Sejam G um grupo e W um espaço vetorial sobre F .

- (i) Um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow GL(W)$ será chamado uma *representação de G em W* . Com isso, W tem uma estrutura de G -módulo à esquerda com a ação de G sobre W dada por:

$$g \cdot w = \phi(g)w, g \in G, w \in W.$$

Ou seja, a aplicação $\cdot : G \times W \rightarrow W$, cuja imagem $\cdot(g, w)$ é denotada por $g \cdot w$, satisfaz as propriedades $(g_1 g_2) \cdot w = g_1 \cdot (g_2 \cdot w)$ e $1 \cdot w = w$, com $1, g_1, g_2 \in G$ e

$w \in W$. A dimensão de W sobre F será chamada de *grau da representação* ϕ , cuja notação será $\deg \phi$.

- (ii) A representação ϕ e o G -módulo correspondente, W , serão ditos *irredutíveis* se W não possui G -submódulos próprios. ϕ e W serão *completamente redutíveis* se W for uma soma direta de G -módulos irredutíveis.
- (iii) A representação regular de G corresponde à álgebra de grupo FG considerada como um G -módulo à esquerda. A ação de G em FG será dada por

$$g \cdot \left(\sum_{h \in G} a_h h \right) = \sum_{h \in G} a_h (gh), \quad g \in G, a_h \in F, h \in G.$$

Um olhar atento ao último item permite constatar que os G -submódulos (à esquerda) de FG coincidem com os ideais à esquerda de FG . Não só isso mas a tarefa de descrever os G -submódulos irredutíveis coincide com a de descrever os ideais minimais à esquerda de FG . O próximo teorema é válido para qualquer corpo F tal que a característica de F não divide a ordem de G . (Como consideramos corpos de característica 0, isso é automaticamente satisfeito.)

Teorema 1.2.1 (Maschke). *Todas representações de dimensão finita de um grupo finito G são completamente redutíveis. Se F é algebricamente fechado, a álgebra de grupo FG é isomorfa à soma direta*

$$M_{d_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{d_r}(F),$$

onde cada $M_{d_i}(F)$ é uma álgebra de matrizes de ordem d_i com entradas em F .

Teorema 1.2.2. *Se G é um grupo finito, então*

- (i) *Toda representação irredutível de G é equivalente à uma subrepresentação da representação regular de G , ou seja, todo G -módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de FG .*
- (ii) *Se F é algebricamente fechado, o número de representações irredutíveis não isomorfas, ϕ_i , de G coincide com o número de classes de conjugação de G .*

Na sequência será explorado um pouco da teoria de partições inteiras de um número natural n . Como este trabalho se trata de uma tese em álgebra, não cabe aqui resultados puramente analíticos ou combinatórios da Teoria de Partições, como a descrição do caráter assintótico da função partição.

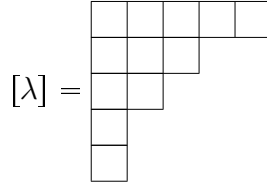
Ao invés disso, serão destacados resultados de teor mais estrutural sobre as partições como aqueles que fornecem ferramentas de combinatória relacionados com problemas algébricos, *e.g.* a descrição das representações irredutíveis de S_n .

Definição 1.2.2. Seja $n \geq 1$ um número inteiro. Uma *partição* λ de n , denotada por $\lambda \vdash n$, é uma sequência finita de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tais que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$ e $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Os inteiros λ_i são chamados as *partes de* λ . Duas partições λ e $\bar{\lambda}$ são idênticas sempre que elas diferirem por uma sequência de zeros.

O *diagrama de Young* $[\lambda]$ de λ pode ser definido como o conjunto dos pontos ou nós $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $1 \leq j \leq \lambda_i$, para $i \in \{1, \dots, k\}$.

Graficamente, os diagramas são representados substituindo os pontos por quadrados, adotando a convenção que a primeira coordenada, i , aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada, j , aumenta da esquerda para a direita. Exatamente como é ordenado o crescimento das linhas e colunas de uma matriz.

A i -ésima linha contém λ_i quadrados. Por exemplo, a partição $\lambda = (5, 3, 2, 1, 1) \vdash 12$ é representada pelo diagrama abaixo.



Para simplificar a escrita de uma partição que contém partes iguais, quando for conveniente será utilizada uma notação exponencial, combinando as partes iguais em uma só e representando a quantidade de partes iguais no expoente. Por exemplo, a partição $\lambda = (7, 7, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 1) \vdash 31$ pode ser escrita como $\lambda = (7^2, 4, 3^3, 2, 1^2)$.

Definição 1.2.3. Se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ é uma partição, denote por λ'_j o comprimento da j -ésima coluna de $[\lambda]$. A partição $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_t)$, com $t = \lambda_k$ e seu diagrama $[\lambda']$ são ditas *conjugadas* respectivamente a λ e $[\lambda]$.

Definição 1.2.4. Para uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, a λ -tabela, T_λ , de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, com $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$, é definido como o diagrama $[\lambda]$ com quadrados preenchidos por α_1 números 1, α_2 números 2, $\dots$, α_m números m . Nos livros clássicos T_λ é comumente chamado de λ -tableau.

A tabela T_λ é dita *semistandard* se suas entradas crescem da esquerda para a direita, com possíveis repetições, nas linhas e crescem estritamente de cima para baixo nas colunas. T_λ é dita *standard* se é semistandard de conteúdo $(1, \dots, 1)$. Ou seja, se cada inteiro de 1 a n aparece exatamente uma vez na tabela e as entradas crescem de cima para baixo e da esquerda para a direita.

Definição 1.2.5. Para uma partição λ de n , o grupo simétrico, S_n age em uma λ -tabela T_λ de conteúdo $(1, \dots, 1)$ permutando o número preenchido em cada quadrado de T_λ . Mais precisamente, dado $\sigma \in S_n$, se a entrada (i, j) de T_λ contém o inteiro k , a entrada (i, j) da tabela σT_λ contém $\sigma(k)$.

Para $\sigma \in S_n$, preenchendo o diagrama $[\lambda]$ com os elementos $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(\lambda_1)$ na primeira linha, depois com $\sigma(\lambda_1 + 1), \sigma(\lambda_1 + 2), \dots, \sigma(\lambda_1 + \lambda_2)$ na segunda linha e preenchendo as demais linhas dessa mesma maneira, obtém-se uma tabela de conteúdo $(1, \dots, 1)$, que será denotada por T_σ . Na verdade não é difícil ver que toda tabela de conteúdo $(1, \dots, 1)$ pode ser obtida dessa forma, para algum $\sigma \in S_n$.

Proposição 1.2.1.

(i) O conjunto P_n dos polinômios multilineares em n variáveis, sob ação de S_n dada por

$$\sigma \left(\sum \alpha_i x_{i_1} \dots x_{i_n} \right) = \sum \alpha_i x_{\sigma(i_1)} \dots x_{\sigma(i_n)}, \quad \sigma \in S_n, \quad \alpha_i \in F, \quad x_{i_1} \dots x_{i_n} \in P_n.$$

é um S_n -módulo isomorfo ao módulo regular (à esquerda) FS_n de S_n .

(ii) Se U é um T -ideal de $F\langle X \rangle$ então $U \cap P_n$ é um submódulo de P_n .

Definição 1.2.6. Seja n um inteiro positivo e λ uma partição de n . Para cada tabela T_σ , $\sigma \in S_n$, obtida de λ , o *estabilizador das linhas* $R(T_\sigma)$ de T_σ é definido como o subgrupo de S_n que fixa o conjunto das entradas de cada linha de T_σ . Analogamente, define-se o *estabilizador de colunas* $C(T_\sigma)$.

O *simetrizador de Young* de T_σ , denotado por $e(T_\sigma)$, é o elemento da álgebra de grupo de S_n , denotada também por FS_n , dado por

$$e(T_\sigma) = \sum_{\rho \in R(T_\sigma)} \sum_{\eta \in C(T_\sigma)} (-1)^\eta \rho \eta.$$

Além disso, para cada $f \in F\langle X \rangle$ define-se por f_{T_σ} o elemento

$$f_{T_\sigma} = e(T_\sigma) \cdot f.$$

Em razão da identificação entre G -submódulos e ideais à esquerda de FG já explicitada, o teorema seguinte fornece uma descrição das representações irredutíveis do grupo simétrico S_n .

Teorema 1.2.3. *Seja n um inteiro positivo. Para uma partição $\lambda \vdash n$ e uma λ -tabela, T_σ , temos*

(i) *A menos de constante multiplicativa, $e(T_\sigma)$ é igual a um idempotente minimal da álgebra de grupo FS_n e gera um ideal minimal à esquerda de FS_n .*

(ii) *Se μ é outra partição de n e T_μ é uma μ -tabela, então os S_n -módulos $FS_n \cdot e(T_\lambda)$ e $FS_n \cdot e(T_\mu)$ são isomorfos se, e somente se, $\lambda = \mu$.*

(iii) *Todo S_n -módulo irredutível é isomorfo a $FS_n \cdot e(T_\lambda)$, para alguma partição $\lambda \vdash n$.*

Definição 1.2.7. Para cada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, o S_n -módulo irredutível $FS_n \cdot e(T_\lambda)$ será denotado ou por $[[\lambda]]$ ou por $[[\lambda_1, \dots, \lambda_k]]$ quando houver a necessidade de se explicitar quem são as partes de λ .

Este módulo é comumente conhecido como *módulo de Specht associado a λ* apesar do nome mais natural ser simplesmente *S_n -módulo irredutível associado a λ* . É óbvio que, não havendo dúvida da partição considerada, pode-se omitir o complemento a qualquer um dos nomes reservados a esse módulo.

Teorema 1.2.4.

(i) *Seja $\lambda \vdash n$. Então a dimensão d_λ do S_n -módulo irredutível $[[\lambda]]$ é igual à quantidade de λ -tabelas standard.*

(ii) *(The Hook formula)*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod (\lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1)},$$

com o produto percorrendo todos quadrados $(i, j) \in [\lambda]$.

Ou seja, uma maneira de se obter o grau de uma representação irredutível de S_n associada a uma partição λ é calcular a quantidade de λ -tabelas standard. Isso reduz um problema algébrico em outro de natureza combinatória e a fórmula do gancho (do inglês, *the hook formula*) é uma resposta para esse último.

Reservando um pouco a teoria de representações de S_n , na sequência se inicia uma breve exposição de resultados sobre as representações do grupo geral linear GL_m .

Definição 1.2.8. Seja $\phi : GL_m \longrightarrow GL_s$ uma representação de dimensão finita de GL_m , para algum s . A representação ϕ é dita *polinomial* se as entradas $(\phi(g))_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, s\}$, da matriz $\phi(g)$ são polinômios das entradas a_{kl} , $k, l \in \{1, \dots, m\}$ de g , para todo $g \in GL_m$. A representação ϕ é *homogênea* de grau d se os polinômios $(\phi(g))_{ij}$ são polinômios homogêneos de grau d .

Como é de se esperar, um GL_m -módulo W é dito polinomial se a representação correspondente é polinomial. Do mesmo modo são definidos os módulos polinomiais homogêneos.

Fixando um F -espaço vetorial V_m e uma base $\{x_1, \dots, x_m\}$, considere a ação canônica de GL_m em V_m . Além disso, considere também

$$F\langle V_m \rangle = F\langle x_1, \dots, x_m \rangle$$

a álgebra associativa livre de posto m .

Pode ser definida em $F\langle V_m \rangle$ uma ação de GL_m como uma extensão da ação de GL_m em V_m . Em outras palavras, a ação é diagonal:

$$g(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = g(x_{i_1}) \dots g(x_{i_n}), \quad g \in GL_m, \quad x_{i_1} \dots x_{i_n} \in F\langle V_m \rangle.$$

Proposição 1.2.2.

- (i) $F\langle V_m \rangle$ é um GL_m -módulo que se decompõe na soma direta de seus submódulos $(F\langle V_m \rangle)^{(n)}$, para $n \in \{1, 2, \dots\}$, onde $(F\langle V_m \rangle)^{(n)}$ é a componente homogênea de grau n de $F\langle V_m \rangle$.
- (ii) Para todo T -ideal U de $F\langle V_m \rangle$, os espaços vetoriais $F\langle V_m \rangle \cap U$ e $(F\langle V_m \rangle)^{(n)} \cap U$ são submódulos de $F\langle V_m \rangle$.
- (iii) Todo submódulo W de $F\langle V_m \rangle$ é a soma direta de suas componentes homogêneas $W \cap (F\langle V_m \rangle)^{(n)}$.

Teorema 1.2.5.

- (i) Toda representação polinomial de GL_m é uma soma direta de subrepresentações polinomiais homogêneas irredutíveis.
- (ii) Todo GL_m -módulo polinomial homogêneo irredutível de grau $n \geq 0$ é isomorfo a um submódulo de $(F\langle V_m \rangle)^{(n)}$.

As representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau n de GL_m são descritas em termos de partições de n em não mais que m partes e seus respectivos diagramas de Young.

Teorema 1.2.6. *As representações polinomiais homogêneas irredutíveis duas a duas não isomorfas de GL_m de grau $n \geq 0$ estão em correspondência biunívoca com as partições $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de n , com $m \leq n$.*

Em virtude desse resultado, tanto $W_m(\lambda)$ quanto $W_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ serão notações reservadas para o GL_m -módulo irredutível associado a λ .

Teorema 1.2.7.

- (i) Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ uma partição de n , com $m \leq n$. Então $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de $(F\langle V_m \rangle)^{(n)}$. Este último se decompõe como

$$(F\langle V_m \rangle)^{(n)} \cong \sum d_\lambda W_m(\lambda),$$

onde d_λ é a dimensão do S_n -módulo $[[\lambda]]$ e a soma é tomada sobre todas as partições de n em não mais que m partes.

- (ii) Como subespaço de $(F\langle V_m \rangle)^{(n)}$, o espaço vetorial $W_m(\lambda)$ é multihomogêneo. A dimensão da componente homogênea $W_m^{(n_1, \dots, n_m)}$ é igual ao número de λ -tabelas semistandard de conteúdo $(n_1, \dots, n_m)$, com $n_1 + \dots + n_m = n$.

Definição 1.2.9. O GL_n -submódulo de $F\langle X \rangle$ gerado por f_{T_σ} será denotado por $M(T_\sigma, f)$. Além disso, $\overline{f_{T_\sigma}}$ denotará a *simetrização* de f_{T_σ} , ou seja, o polinômio obtido de f_{T_σ} identificando todas as variáveis que aparecem na mesma linha com uma única variável.

Um fato interessante e importante é que a linearização de $\overline{f_{T_\sigma}}$ é sempre um múltiplo escalar de f_{T_σ} .

Considere agora a seguinte ação à direita de S_n em $F(\langle V_m \rangle)^{(n)}$:

$$(x_{i_1} \dots x_{i_n})\sigma^{-1} = x_{i_{\sigma(1)}} \dots x_{i_{\sigma(n)}}.$$

Com essa ação, $(F\langle V_m \rangle)^{(n)}$ se torna um S_n -módulo à direita. Chamamos a atenção do leitor que a ação à esquerda de S_n sobre os polinômios multilineares é dada por permutações das variáveis, e a ação à direita acima definida, consiste em trocar as posições das variáveis.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e $q_1, \dots, q_{\lambda_1}$ os comprimentos das colunas do diagrama $[\lambda]$. Com isso pode-se definir $s_\lambda = s_\lambda(x_1, \dots, x_q)$, com $q = q_1$, como sendo o polinômio

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_q) = \prod_{j=1}^k s_{q_j}(x_1, \dots, x_{q_j}),$$

em que $s_p(x_1, \dots, x_p)$ representa o polinômio standard de grau p .

Teorema 1.2.8. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes. Então*

- (i) *O polinômio $s_\lambda(x_1, \dots, x_q)$ gera um GL_m -submódulo irredutível de $(F\langle V_m \rangle)^{(n)}$ isomorfo a $W_m(\lambda)$.*
- (ii) *Todo $W_m(\lambda) \subseteq (F\langle V_m \rangle)^{(n)}$ é gerado por um elemento não nulo da forma*

$$w_\lambda(x_1, \dots, x_q) = s_\lambda(x_1, \dots, x_q) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \right), \quad \alpha_\sigma \in F.$$

Tal elemento é chamado vetor de peso máximo de $W_m(\lambda)$. Ele é único a menos de constante multiplicativa e está contido no espaço unidimensional dos elementos multi-homogêneos de grau $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ em $W_m(\lambda)$.

O próximo resultado mostra uma relação estreita entre a teoria das representações do grupo simétrico, S_n , e a do grupo geral linear, GL_n .

Proposição 1.2.3. *Sejam $m \geq n$, $\lambda \vdash n$ e $W_m(\lambda) \subseteq F\langle V_m \rangle$. O conjunto $M = W_m(\lambda) \cap P_n$ de todos os elementos multilineares de $W_m(\lambda)$ é um S_n -submódulo de P_n isomorfo a $[[\lambda]]$. Além disso, qualquer submódulo $[[\lambda]]$ de P_n pode ser obtido desta maneira.*

Para ser fiel à máxima continência possível desse texto, resta somente tratar da redutibilidade completa do produto tensorial de dois GL_m -módulos polinomiais irredutíveis W_1 e W_2 . Uma resposta para essa questão é dada pela *Littlewood-Richardson rule*.

Porém, para aplicação em alguns resultados que serão apresentados na tese, é suficiente uma versão simplificada dessa regra, a *Young rule*. Trata-se de um teorema que considera os casos particulares quando um dos módulos é isomorfo à $W_m(1^n)$ ou $W_m(n)$.

Teorema 1.2.9 (The Young Rule). *O produto tensorial de um GL_m -módulo irredutível $W_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ por $W_m(q)$ ou por $W_m(1^q)$ ($q \leq m$, nesse último caso) possui uma decomposição em GL_m -módulos irredutíveis da seguinte maneira:*

$$W_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \otimes W_m(q) \cong \bigoplus W_m(\lambda_1 + p_1, \dots, \lambda_m + p_m),$$

com a soma percorrendo o conjunto das m -uplas $(p_1, \dots, p_m)$ de inteiros não negativos tais que $p_1 + \dots + p_m = q$ e $\lambda_i + p_i \leq \lambda_{i-1}$ quando $i \in \{2, \dots, m\}$;

$$W_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \otimes W_m(1^q) \cong \bigoplus W_m(\lambda_1 + q_1, \dots, \lambda_m + q_m),$$

com a soma percorrendo o conjunto das m -uplas $(q_1, \dots, q_m) \in \{0, 1\}^m$ tais que $q_1 + \dots + q_m = q$ e $\lambda_i + q_i \leq \lambda_{i-1} + q_{i-1}$ quando $i \in \{2, \dots, m\}$.

No contexto de diagramas de Young, um diagrama $[\mu]$ associado a uma componente irredutível de $W_m(\lambda) \otimes W_m(q)$ só pode ser obtido adicionando-se q quadrados em $[\lambda]$ de modo que dois novos quadrados nunca são adicionados em uma mesma coluna. No caso de $W_m(\lambda) \otimes W_m(1^q)$, o diagrama $[\mu]$ só pode ser obtido de $[\lambda]$ se dois novos quadrados nunca forem adicionados em uma mesma linha de $[\lambda]$.

Para destacar um caso ainda mais particular, quando $q = 1$ esse resultado é conhecido como *branching rule*.

Definição 1.2.10. Para cada $1 \leq k \leq n$ defina

$$\Lambda_{n,k}^{\tau\epsilon} = \left\{ (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k : l_2, \dots, l_{k-1} \geq 2, l_1, l_k \geq 1, \sum_{i=1}^k l_i = n \right\}.$$

$$\Lambda_{n,k}^{\tau} = \left\{ (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k : l_2, \dots, l_k \geq 2, l_1 \geq 1, \sum_{i=1}^k l_i = n \right\}.$$

$$\Lambda_{n,k}^{\epsilon} = \left\{ (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k : l_1, \dots, l_{k-1} \geq 2, l_k \geq 1, \sum_{i=1}^k l_i = n \right\}.$$

$$\Lambda_{n,k}^1 = \left\{ (l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k : l_1, \dots, l_k \geq 2, \sum_{i=1}^k l_i = n \right\}.$$

Considere nesses conjuntos a ordem lexicográfica à direita, que é dada por

$$(l_1, \dots, l_k) < (s_1, \dots, s_k) \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } l_j = s_j, \forall j \geq i, \text{ mas } l_i < s_i.$$

Esses conjuntos ordenados representam partições de n em exatamente k partes satisfazendo as condições de cada conjunto. Eles serão úteis para mensurar, de certo modo, a L -álgebra relativamente livre da variedade diferencial gerada por $\mathcal{U}_m$, a álgebra de matrizes triangulares superiores $m \times m$ sob ação de uma álgebra de Lie $L \cong \mathfrak{t}_2$. Em momento oportuno eles serão rememorados.

1.3 Polinômios e PI-Álgebras

Definição 1.3.1. Um polinômio $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dito uma identidade polinomial (ou simplesmente uma identidade) da álgebra A se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$.

Neste caso, se f é não nulo, costuma-se dizer que A é uma PI-álgebra e que A satisfaz a identidade $f \equiv 0$.

Observando que uma avaliação $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ do polinômio f em elementos de A é, na verdade, a aplicação de uma função $X \rightarrow A$ em f , é possível ainda definir o conceito de identidade de um modo equivalente.

Todo homomorfismo de álgebra $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow A$ é definido por sua imagem em X . Por outro lado, pela propriedade universal de $F\langle X \rangle$, toda função $X \rightarrow A$ define de maneira única um homomorfismo de $F\langle X \rangle$ em A . Consequentemente vale que

$$f \equiv 0 \iff f \in \bigcap_{\varphi} \text{Ker } \varphi,$$

com φ percorrendo todos homomorfismos de álgebras $F\langle X \rangle \rightarrow A$.

O conjunto $T(A)$, também denotado por $Id(A)$, formado pelas identidades satisfeitas por A é um ideal de $F\langle X \rangle$ e possui a propriedade de ser invariante por endomorfismos de $F\langle X \rangle$. Aos ideais que satisfazem essa propriedade será reservado o nome de *T-ideal*.

A seguir serão exibidos alguns exemplos concretos de PI-álgebras.

Exemplo 1.3.1 (Álgebras de dimensão finita, veja por exemplo (Brešar, 2014)). *Seja A uma F -álgebra de dimensão n . Então A satisfaz a identidade $s_{n+1} \equiv 0$, em que,*

$$s_{n+1} = s_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n+1)}.$$

Mais ainda, sabe-se que toda álgebra A desse tipo satisfaz qualquer polinômio multilinear que possua uma quantidade de variáveis alternantes maior que $\dim A$.

Particularmente s_d é um polinômio alternante em todas suas d variáveis. Por sua relevância na teoria de PI-álgebras, s_d é chamado de *polinômio standard de grau d* .

Exemplo 1.3.2 (Álgebra de matrizes). *Seja $M_m(F)$ a álgebra associativa cujos elementos são matrizes de ordem $m \times m$ com entradas no corpo F . Então $M_m(F)$ satisfaz $s_{2m} \equiv 0$ e essa é a identidade de menor grau satisfeita por $M_m(F)$.*

Como $\dim M_m(F) = m^2$, é evidente, a partir do primeiro exemplo, que $M_m(F)$ é uma PI-álgebra. O que o resultado anterior destaca é a existência de uma identidade de grau mínimo, a saber s_{2m} . Esse resultado é conhecido como Teorema de Amitsur-Levitzki em razão da primeira demonstração ter sido apresentada no artigo (Amitsur; Levitzki, 1950) escrito por ambos matemáticos. Com o passar dos anos, diferentes provas foram sendo apresentadas, incluindo uma que utiliza Teoria de Grafos para representar produtos de matrizes unitárias a partir de caminhos em grafos eulerianos (Swan, 1963) (Swan, 1969).

Uma discussão mais detalhada sobre esse teorema e suas demonstrações pode ser encontrada em (Drensky, 2000), assim como referências àquele que busca uma pesquisa mais aprofundada.

A seguir serão apresentados outros exemplos concretos de PI-álgebras. Embora sejam resultados cuja verificação é mais fácil, vale destacar que a bibliografia supracitada também é referência para suas demonstrações.

Exemplo 1.3.3 (Álgebra de matrizes triangulares superiores). *Considere UT_m a subálgebra de $M_m(F)$ formada por matrizes triangulares superiores. Então UT_m satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-1}, x_{2m}] \equiv 0,$$

em que $[x_i, x_j] = x_i x_j - x_j x_i$.

Exemplo 1.3.4 (Álgebra de Grassmann). *Sejam $V = \langle e_i : i \in \mathbb{N} \rangle_{EV}$ e G a álgebra de Grassmann de V , isto é, a álgebra associativa cujos elementos são palavras envolvendo $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ sob a relação de anticomutatividade $e_i e_j = -e_j e_i$, $i, j \in \mathbb{N}$. O conjunto*

$$\{1, e_{i_1} \cdots e_{i_n} : i_1 < \cdots < i_n, n \in \mathbb{N}\}$$

é uma base de G . É possível definir uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação $G = G_0 \oplus G_1$ a qual

$$G_0 = \langle 1, e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} : i_1 < \cdots < i_{2k}, k \in \mathbb{N} \rangle_{EV}$$

e

$$G_1 = \langle e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} : i_1 < \cdots < i_{2k+1}, k \in \mathbb{N} \rangle_{EV}.$$

Ou seja, G_0 representa o centro de G formado pelos elementos de comprimento par e G_1 o conjunto dos elementos de comprimento ímpar.

Denotando por $[x_1, x_2, x_3] := [[x_1, x_2], x_3]$, com poucas contas é possível verificar que

$$[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$$

é uma identidade de G . Basta notar que a avaliação de $[x_1, x_2]$ em quaisquer elementos de G resulta em um elemento central, ou seja, para todo homomorfismo $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow G$ tem-se

$$\varphi([x_1, x_2]) \in G_0.$$

Neste ponto é natural o questionamento se é possível estabelecer uma correspondência entre T-ideais e PI-álgebras.

Apesar de toda PI-álgebra A ter associado o T-ideal $T(A)$, nota-se que um mesmo T-ideal pode ter mais de uma PI-álgebra associada. Por exemplo, o T-ideal $I = \langle [x, y] \rangle_T$ de $F\langle X \rangle$ gerado pelo comutador pode ser associado a quaisquer duas (ou mais) F -álgebras comutativas e não nilpotentes. Também é fácil ver que A e $A \oplus A$ satisfazem as mesmas identidades, para qualquer álgebra associativa A .

Formalidades a parte, de fato há PI-álgebras que melhor representam um T-ideal I , como $F\langle X \rangle / I$ que assume certa propriedade universal na classe das álgebras A tais que $I \subseteq T(A)$. Mais precisamente, toda avaliação $X \rightarrow A$ pode ser estendida de modo único a uma aplicação $\bar{\varphi} : F\langle X \rangle / I \rightarrow A$ a partir da propriedade universal da álgebra associativa livre $F\langle X \rangle$ e do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} F\langle X \rangle & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{\varphi} \\ & F\langle X \rangle / I & \end{array}$$

Para corrigir essa disfunção na tentativa de obter uma correspondência biunívoca entre T-ideais e PI-álgebras, define-se o conceito de variedade.

Definição 1.3.2. Considere o conjunto não vazio $S \subseteq F\langle X \rangle$. A variedade determinada por S é denotada por $\mathcal{V}(S)$ e definida como a classe das álgebras A que satisfazem as identidades $f \equiv 0$ tais que $f \in S$, i.e., álgebras tais que $S \subseteq T(A)$.

É óbvio que ao T-ideal I gerado por S está associada de modo único a variedade determinada por S , o que justifica a notação $\mathcal{V}(I)$ para esta variedade. Também é concebível uma variedade ser gerada por uma álgebra A definindo-a como $\mathcal{V}(A) := \mathcal{V}(T(A))$.

Vale ressaltar que a álgebra $F\langle X \rangle/I$ está em $\mathcal{V}(I)$ e $T(F\langle X \rangle/I) = I$. Motivado por isso, à $F\langle X \rangle/I$ será reservado o nome de *álgebra relativamente livre* da variedade $\mathcal{V}(I)$.

Se tratando de corpos de característica 0, é natural que o estudo dos polinômios se restrinja à polinômios multilineares.

A fim de entender os efeitos que as identidades multilineares de uma álgebra A surtem nesses polinômios, considera-se o conjunto $P_n \cap T(A)$ das identidades multilineares de grau n de A . Este é um submódulo do S_n -módulo P_n . Além disso, seja

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$$

que, conseqüentemente, é também um S_n -módulo. Essa estrutura em $P_n(A)$ permitirá uma análise quantitativa e até assintótica sobre as identidades multilineares de A .

Definição 1.3.3. Seja A uma PI-álgebra. A n -ésima codimensão de A é denotada e definida por $c_n(A) := \dim P_n(A)$. Já o PI-expoente de A é definido como

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

quando esse limite existir. O n -ésimo cocaracter de A nada mais é que o caracter da representação de S_n associada ao módulo $P_n(A)$.

Na verdade é um fato que, em característica zero, $\exp(A)$ existe para toda PI-álgebra A e é um inteiro não negativo. Essa era uma conjectura de Amitsur que foi comprovada em (Giambruno; Zaicev, 1999).

A motivação para estudar o S_n -módulo quociente, e não as identidades multilineares, é que os T-ideais costumam ser “muito grandes”. O conhecido teorema de Regev estabelece que se A é uma PI álgebra que satisfaz alguma identidade de grau d , então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$ para todo n . Como a função exponencial tem crescimento muito mais lento que o fatorial ($\dim P_n = n!$), é possível concluir que para n muito grande, “quase todo” P_n será composto por identidades, e o estudo de $P_n \cap T(A)$ será “mais difícil” que o do módulo quociente.

Ao se tratar da variedade gerada por A serão estendidos os conceitos de codimensão e expoente de A para $\mathcal{V}(A)$. De modo geral será dito que uma variedade $\mathcal{V}$ possui *crescimento polinomial* quando a sequência de suas codimensões $(c_n(\mathcal{V}))_{n \in \mathbb{N}}$ possuir crescimento polinomial. $\mathcal{V}$ será uma variedade de *crescimento quase polinomial* se toda subvariedade própria de $\mathcal{V}$ possuir crescimento polinomial mas $\mathcal{V}$ não possuir.

Um resultado de Kemer apresentado no artigo (Kemer, 1979) ressalta a importância da codimensão e do PI-expoente como ferramentas úteis para a caracterização de variedades.

Teorema 1.3.1. *Uma variedade $\mathcal{V}$ possui crescimento polinomial se e somente se $\mathcal{V}$ não contém a álgebra de Grassmann de dimensão infinita G e nem a álgebra de matrizes triangulares superiores UT_2 .*

Como é sabido que $\exp(G) = \exp(UT_2) = 2$, segue o corolário

Corolário 1.3.1. *Se o crescimento de $\mathcal{V}$ é de ordem maior que polinomial então*

$$\exp(\mathcal{V}) \geq 2.$$

A seguir será definido um tipo diferente de polinômios, aqueles chamados *próprios*. A importância desses polinômios ficará evidente conforme alguns resultados da teoria de identidades polinômiais próprias forem apresentados. Em especial, destaca-se o fato de que sobre um corpo infinito F , as identidades ordinárias de uma PI-álgebra com unidade A seguem de suas identidades próprias.

Ao leitor interessado, as demonstrações omitidas nos próximos resultados também podem ser encontradas em (Drensky, 2000).

Definição 1.3.4. Um polinômio $f \in F\langle X \rangle$ é chamado de polinômio próprio no caso de f ser uma combinação linear de produtos de comutadores, *i.e.*,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum \alpha_{i_1, \dots, j_1} [x_{i_1}, \dots, x_{i_p}] \cdots [x_{j_1}, \dots, x_{j_q}], \alpha_{i_1, \dots, j_1} \in F.$$

Recorde aqui que o comutador (ou colchete) em qualquer álgebra associativa é dado por $[a, b] = ab - ba$. Os comutadores de comprimento maior que 2, sem colchetes internos, serão assumidos normados à esquerda. Em outras palavras, $[a, b, c] = [[a, b], c]$ e assim por diante. O conjunto de todos polinômios próprios de $F\langle X \rangle$ será denotado por B . Já o subconjunto dos polinômios próprios em n variáveis será denotado por B_n . Denote o conjunto dos polinômios multilineares próprios de grau n assim:

$$\Gamma_n = P_n \cap B, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Todos esses conjuntos são, na verdade, F -subespaços de $F\langle X \rangle$. Em paralelo ao que é feito no caso multilinear, considere o homomorfismo canônico

$$\pi : F\langle X \rangle \rightarrow \frac{F\langle X \rangle}{T(A)}$$

e denote por $B(A)$ e $B_n(A)$ as imagens dos homomorfismos obtidos pelas restrições $\pi|_B$ e $\pi|_{B_n}$, respectivamente. Há ainda uma última convenção a ser feita. Daqui em diante X será um conjunto ordenado da seguinte forma: $x_i \leq x_j$ se $i \leq j$. Estenda essa ordem para uma base do espaço vetorial da álgebra de Lie livre $L(X)$ gerada por X da seguinte

maneira. Suponha que esta base contenha o conjunto X e os elementos restantes são comutadores normados à esquerda, e suponha que

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_p}] < [x_{j_1}, \dots, x_{j_q}] \quad \text{quando} \quad p < q.$$

No caso de comutadores de mesmo comprimento, *i.e.*, $p = q$, a desigualdade acima significa que existe $k < p$ tal que $i_l = j_l$ para todo $l < k$ mas $i_k < j_k$. Segue pelo bem conhecido teorema de Poincaré, Birkhoff e Witt (que providencia uma base para a álgebra universal envolvente a partir de uma base ordenada da respectiva álgebra de Lie), e pelo teorema de Witt (que diz que a álgebra associativa livre é a universal envolvente da álgebra livre de Lie), que:

Proposição 1.3.1. (i) Uma base para o espaço $F\langle X \rangle$ é dada pelos polinômios

$$x_1^{a_1} \cdots x_q^{a_q} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]^c,$$

em que $a_1, \dots, a_q, b, \dots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \cdots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_p}]$ são comutadores da base ordenada de $L(X)$ descrita acima. Além disso, o subconjunto de tais polinômios que satisfazem $a_1 = \cdots = a_q = 0$ é uma base para o espaço B dos polinômios próprios.

(ii) Se A é uma PI-álgebra com unidade sobre um corpo infinito F então o T -ideal $T(A)$ formado pelas identidades ordinárias de A é consequência de $T(A) \cap B$. Mais ainda, se $\text{char } F = 0$ então $T(A)$ é consequência de $T(A) \cap \Gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Como este trabalho se restringe às F -álgebras associativas com unidade em que $\text{char } F = 0$, é suficiente investigar as identidades multilineares próprias.

Teorema 1.3.2. O espaço Γ_n possui uma base descrita pelo conjunto dos polinômios

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \cdots [x_{j_1}, \dots, x_{j_l}]$$

tais que

- (i) f é multilinear em todas suas variáveis;
- (ii) cada comutador $[x_{p_1}, \dots, x_{p_s}]$ é um comutador normado à esquerda de comprimento ≥ 2 satisfazendo $p_1 > p_2, \dots, p_s$;
- (iii) comutadores mais curtos precedem os mais longos, *i.e.*, $k \leq \dots \leq l$;
- (iv) se dois comutadores consecutivos têm o mesmo comprimento, *e.g.*

$$f = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \cdots [x_{p_1}, \dots, x_{p_s}] [x_{q_1}, \dots, x_{q_s}] \cdots [x_{j_1}, \dots, x_{j_l}],$$

então $p_1 < q_1$.

Daqui em diante será denotado por $\Gamma_n(A)$ o espaço vetorial

$$\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap T(A)}.$$

Assim como em P_n , Γ_n pode ser visto como um S_n -módulo com a ação definida pela permutação dos índices das variáveis. O mesmo vale para $\Gamma_n \cap T(A)$. Com isso também será possível fazer um estudo quantitativo das identidades próprias a partir de $\dim \Gamma_n(A)$.

Definição 1.3.5. Seja A uma PI-álgebra com unidade sobre um corpo de característica 0. A n -ésima codimensão própria de A é definida por

$$\gamma_n(A) = \dim \Gamma_n(A), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

O próximo resultado é uma consequência da proposição 1.3.1.

Teorema 1.3.3. *Seja A uma PI-álgebra com unidade sobre um corpo infinito F .*

(i) *Seja*

$$\{w_j(x_1, \dots, x_k) : j \in \mathbb{N}\}$$

uma base para o espaço $B_k(A)$. Então a álgebra relativamente livre de posto k

$$F_k(A) = \frac{F\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle}{F\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \cap T(A)}$$

possui uma base dada por

$$\{x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} w_j(x_1, \dots, x_k) : a_i \geq 0, j \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *Se*

$$\{u_{ij}(x_1, \dots, x_k) : j \in \{1, \dots, \gamma_k(A)\}\}$$

é uma base para o espaço $\Gamma_k(A)$ formado pelos polinômios multilineares próprios de grau k em $F(A)$ então $P_n(A)$ possui uma base formada por todos polinômios multilineares da forma

$$x_{p_1} \cdots x_{p_{n-k}} u_{ij}(x_{q_1}, \dots, x_{q_k}), \quad j \in \{1, \dots, \gamma_k(A)\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

em que $p_1 < \dots < p_{n-k}$ e $q_1 < \dots < q_k$.

Corolário 1.3.2. *Existe uma relação entre a n -ésima codimensão de A e a n -ésima codimensão própria de A dada por*

$$c_n(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k(A), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Além do contexto de álgebras associativas, é possível generalizar o conceito de identidade polinomial para outras classes de álgebras, como álgebras de Lie, álgebras de Jordan, álgebras de Hopf, entre tantos outros contextos algébricos existentes.

É óbvio que uma boa generalização requer um ambiente bem comportado, onde - ao menos - as definições e ferramentas do contexto associativo (por vezes chamado *ordinário*) podem ser reformuladas. Para minimamente exemplificar: em um contexto de álgebras de Lie é necessário que a álgebra livre, geralmente representada por um anel de polinômios em variáveis não comutativas, seja também uma álgebra de Lie.

Entretanto reformular não é mais uma grande preocupação. Já há estabelecida uma teoria de *identidades generalizadas* em anéis que fundamenta muitas dessas generalizações. Uma referência clássica ao tema é o livro (Beidar; Martindale; Mikhalev, 1996).

Para dar materialidade à discussão serão apresentados alguns exemplos de identidades em outros sistemas algébricos.

Exemplo 1.3.5. *Seja $\mathfrak{t}_m$ a álgebra de Lie formada pelas matrizes triangulares superiores de ordem m com entradas no corpo F . Então $\mathfrak{t}_m$ satisfaz a identidade*

$$[[x_1, x_2], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}]] \equiv 0.$$

Exemplo 1.3.6. *Denote por $\mathfrak{G}$ a álgebra de Grassmann vista como álgebra de Lie, ou seja, $\mathfrak{G} = G^{(-)}$. Então $\mathfrak{G}$ satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2, x_3] \equiv 0.$$

1.4 Derivações e Álgebras com Derivação

Definição 1.4.1. Uma transformação linear $d \in \text{End}(A)$ é uma derivação da álgebra A quando

$$d(a_1 a_2) = d(a_1) a_2 + a_1 d(a_2), \quad a_1, a_2 \in A. \quad (1.1)$$

O conjunto das derivações de A é na verdade um subespaço de $\text{End}(A)$ e será denotado por $\text{Der}(A)$.

É fácil ver que $\text{Der}(A)$ munido do comutador $[\cdot, \cdot]$ é uma álgebra de Lie. Uma derivação $d \in \text{Der}(A)$ que satisfizer, para algum $b \in A$,

$$d(a) = [a, b], \quad \forall a \in A,$$

receberá o nome de derivação interna (induzida por b) e será denotada por $\text{ad}(b)$. Com poucas contas é possível ver que $\text{ad}(b)$ é de fato uma derivação, para todo $b \in A$.

Será visto adiante que essa estrutura em $\text{Der}(A)$ desempenhará um papel importante na construção dos chamados polinômios diferenciais. Por simplicidade, será utilizada a notação superescrita à direita a^d ao invés de $d(a)$ para uma derivação avaliada em um elemento arbitrário. Em outras palavras, (1.1) pode ser reescrito como

$$(a_1 a_2)^d = a_1^d a_2 + a_1 a_2^d.$$

Exemplo 1. *Seja $d : F[x] \rightarrow F[x]$ a derivada de polinômios em uma variável,*

$$d := \frac{d}{dx}.$$

Se $f, g \in F[x]$ são polinômios na variável x , temos que $(fg)' = f'g + fg'$. Então,

$$(fg)^d = f^d g + fg^d \implies d \in \text{Der}(F[x]).$$

Um resultado clássico da teoria de álgebras de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ caracteriza a álgebra de Lie das derivações $\text{Der}(\mathfrak{g})$.

Teorema 1.4.1. *Toda derivação de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$ é interna.*

Uma consequência do teorema de Skolem e Noether mostra que se R é uma álgebra central e simples, de dimensão finita, então toda derivação de R é interna. Este resultado foi generalizado no artigo (Coelho; Polcino Milies, 1993) que classifica derivações em álgebras de matrizes triangulares superiores e que também motiva as investigações desse trabalho.

Teorema 1.4.2. *Seja R uma álgebra central, simples e de dimensão finita. Toda derivação de $UT_m(R)$ é uma derivação interna.*

Definição 1.4.2. *Seja $L \subseteq \text{Der}(A)$ uma subálgebra de Lie da álgebra de derivações de A . É possível definir uma ação de L em A dada por*

$$a \cdot d = a^d, \quad d \in L, a \in A.$$

Para uma álgebra A com tal estrutura de L -módulo serão reservados os nomes de álgebra com derivação ou L -álgebra.

Exemplo 1.4.1. *Seja $G = G_0 \oplus G_1$ a álgebra de Grassmann de dimensão infinita (exemplo 1.3.4) apresentada em sua $\mathbb{Z}_2$ -graduação. Define-se o suporte de um elemento $g = e_{i_1} \cdots e_{i_n} \in G$ como o conjunto $\text{Supp}\{g\} = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$. Agora é possível construir a álgebra de derivações: sejam $g_1, \dots, g_t \in G_1$ de modo que*

$$\text{Supp}\{g_i\} \cap \text{Supp}\{g_j\} = \emptyset$$

quando $i \neq j$. Neste caso, as derivações são definidas como

$$\delta_i = 2^{-1} \text{ad}(g_i), \quad i \in \{1, \dots, t\}.$$

Como $[\delta_i, \delta_j](g) = 0$ para todo $g \in G$ (a álgebra G satisfaz a identidade $[x, y, z] = 0$), o subespaço $L = \langle \delta_1, \dots, \delta_t \rangle_{EV}$ de $\text{Der}(G)$ pode ser visto como uma álgebra de Lie abeliana de dimensão t .

Em suma, G munida da ação de L é uma álgebra com derivação a qual costuma-se denotar por $\tilde{G}$ (Rizzo, 2020).

Exemplo 1.4.2. Considere em UT_m a base $\{e_{ij} : i \leq j\}$ formada por suas matrizes elementares, que têm 1 na posição (i, j) e 0 nas demais posições. Definindo $\delta = \text{ad}(e_{1m})$ e $\epsilon = \text{ad}(e_{mm})$ se verifica facilmente que $[\delta, \epsilon] = \delta$, ou seja, $L = \langle \delta, \epsilon \rangle_{Lie}$ é a álgebra de Lie metabeliana de dimensão 2. Munindo UT_m com a ação de L define-se uma estrutura de álgebra com derivação em UT_m .

É óbvio que uma mesma álgebra A pode ser munida com diferentes estruturas de L -álgebra, a variar com a escolha da álgebra de Lie $L \subseteq \text{Der}(A)$. A título de exemplo, se no caso anterior for considerada a álgebra $L = \langle \tau, \epsilon, \delta \rangle_{Lie}$ com $\tau = \text{ad}(e_{11})$, obtém-se em UT_m uma outra estrutura de L -álgebra que, de algum modo, contém informações sobre a primeira.

Para essa escolha de L , a álgebra UT_m como L -álgebra será denotada por $\mathcal{U}_m$ e será o objeto central da investigação contida neste trabalho. Um fato interessante é que $L = \langle \tau, \epsilon, \delta \rangle_{Lie}$ é isomorfa à $\mathfrak{t}_2$, a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores de ordem 2, sempre que $m \geq 2$.

Outra L -álgebra importante é a álgebra de polinômios diferenciais $F\langle X^L \rangle$, que fundamenta a construção das identidades nesse novo contexto. Sua construção se desenhará a seguir.

Denote por $U(L)$ a álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie L . O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) permite trabalhar de maneira equivalente com $U(L)$ -módulos ao invés de L -módulos. Isso tem uma vantagem computacional uma vez que se retira a necessidade de lidar com comutadores nos expoentes.

A maneira mais objetiva de se construir a L -álgebra de polinômios diferenciais $F\langle X^L \rangle$ é a seguinte: considere um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e construa o F -espaço vetorial $FX \otimes U(L)$, onde FX é o F -espaço que tem X como base. Então $F\langle X^L \rangle$ pode ser vista como a álgebra tensorial $T(FX \otimes U(L))$.

Porém tal construção ainda carece de informações para que, por exemplo, possam ser construídos os polinômios explicitamente. Para isso, considere $\mathcal{L}$ uma base ordenada de L . Pelo Teorema PBW, o conjunto $\mathcal{W}$ das palavras semistandard, *i.e.*, $w = h_1 h_2 \cdots h_n$ satisfazendo $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $h_i \in \mathcal{L}$, é uma base de $U(L)$.

Com essas observações, os geradores de $F\langle X^L \rangle$ são os geradores livres $x_i \otimes w$, em que $x_i \in X$ e w é um elemento da base de $U(L)$. Estes serão denotados por x_i^w e por vezes serão chamados de *variáveis* ou *letras diferenciais*. Neste caso, X^L denotará o conjunto de todas variáveis diferenciais.

Note que como $1 \in U(L)$, toda letra (*ordinária*, em distinção à definição anterior) no alfabeto X pode ser vista como uma variável diferencial, o que motiva a notação x_i para as variáveis diferenciais x_i^1 . Dessa forma se identifica X em X^L e, consequentemente, $F\langle X \rangle$ em $F\langle X^L \rangle$. Uma variável x_i^w será *puramente diferencial* quando $w \neq 1$. Neste caso, x_i^w também é chamada uma w -variável diferencial ou simplesmente uma w -variável.

Os elementos de $F\langle X^L \rangle$, que são as combinações lineares de palavras formadas pelas letras diferenciais, serão chamados de *polinômios diferenciais*. Além disso, $F\langle X^L \rangle$ pode ser vista como $U(L)$ -módulo munido da ação

$$(x_{j_1}^{h_{i_1}} \cdots x_{j_n}^{h_{i_n}}) \cdot h = x_{j_1}^{h_{i_1}h} \cdots x_{j_n}^{h_{i_n}h} + \cdots + x_{j_1}^{h_{i_1}} \cdots x_{j_n}^{h_{i_n}h}, \quad h \in U(L).$$

Desse modo $F\langle X^L \rangle$ pode ser vista como uma álgebra com derivação e a essa L -álgebra será reservado o nome de *álgebra livre com derivação* ou simplesmente L -álgebra livre. O nome se deve obviamente ao fato de $F\langle X^L \rangle$ ser um objeto livre na classe das L -álgebras, ou seja, $F\langle X^L \rangle$ é uma L -álgebra que goza da propriedade de que em toda L -álgebra A , qualquer avaliação $X \rightarrow A$ se estende de modo único a um homomorfismo de álgebras $F\langle X^L \rangle \rightarrow A$ que também é um homomorfismo de L -módulos (equivalentemente $U(L)$ -módulos).

Em virtude da propriedade antes descrita e almejando também por uma redação mais sucinta, este momento se mostra oportuno para a seguinte definição.

Definição 1.4.3. Sejam A e B duas L -álgebras. Uma aplicação $\phi : A \rightarrow B$ será chamada de homomorfismo de álgebras com derivação (ou de L -homomorfismo) se ϕ for um homomorfismo de álgebras que também é um homomorfismo de L -módulos.

O conjunto formado por todos L -homomorfismos entre A e B será denotado por $\text{Hom}_L(A, B)$. Quando $A = B$ a notação se torna $\text{End}_L(A)$, que representa o conjunto de todos L -endomorfismos de A .

Assim estabelecemos os principais conceitos para este trabalho, a saber, álgebras com derivação e polinômios diferenciais. Há ainda uma redução aos polinômios multilineares próprios que facilitará a investigação das identidades diferenciais em característica zero.

Considere o espaço dos polinômios diferenciais multilineares de grau n

$$P_n^L = \left\langle x_{\sigma(1)}^{w_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{w_n} : w_i \in \mathcal{W}, \sigma \in S_n \right\rangle_{EV}.$$

É óbvio que P_n^L é um S_n -módulo com a ação definida como em 1.2.1. Além disso, considere B^L a subálgebra de $F\langle X^L \rangle$ gerada pelos comutadores

$$[z_{i_1}, \dots, z_{i_k}], \quad z_{i_j} \in X^L, \quad k \geq 2.$$

Os elementos de B^L são chamados *polinômios diferenciais próprios* ou *L-polinômios próprios*. Observa-se aqui que para não sobrecarregar a notação, serão omitidas, quando isso não causar equívoco, os índices superiores (as “potências”) nas variáveis que indicam as derivações.

Assim como no caso ordinário (Teorema 1.3.3), há uma intrínseca relação entre $F\langle X^L \rangle$ e B^L : se $\mathfrak{L}$ é a álgebra de Lie livre gerada por X^L então $\mathfrak{L}' = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ também é uma álgebra de Lie livre e $\mathfrak{L}$ é gerada por X^L módulo $\mathfrak{L}'$. Mais ainda, o Teorema de Witt garante que $F\langle X^L \rangle$ coincide com $U(\mathfrak{L})$ enquanto B^L coincide com $U(\mathfrak{L}')$

Já o corolário 2.16, (ii), em (Bahturin, 2021) garante que, fixada uma ordem linear em X^L de modo que as variáveis ordinárias precedam as variáveis diferenciais, uma base para $\mathfrak{L}'$ pode ser formada pelos *comutadores semistandard*

$$[z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}] \quad \text{tais que} \quad z_{i_1} > z_{i_2} \leq z_{i_3} \leq \dots \leq z_{i_k}. \quad (1.2)$$

Além disso, acrescentando X^L ao conjunto desses elementos obtém-se uma base para $\mathfrak{L}$. Para usar o Teorema PBW novamente, considere nessa base uma ordenação em que X^L precede os comutadores. Então $F\langle X^L \rangle$ possui uma base dada pelos polinômios wb , em que w é um monômio semistandard no alfabeto X^L enquanto b é uma sequência semistandard de elementos da base de $\mathfrak{L}'$.

É possível reduzir ainda mais a investigação. Para isso, considere B_X^L a subálgebra de $F\langle X^L \rangle$ gerada pelas variáveis puramente diferenciais juntamente dos comutadores no alfabeto X^L .

Um comutador semistandard $[z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}]$ é *normal* se possuir no máximo uma variável puramente diferencial, sendo z_{i_1} essa variável, caso possua. As variáveis puramente diferenciais serão consideradas *comutadores normais semistandard* (nssc) de comprimento 1. Para diferenciar, quando um comutador semistandard não possuir variáveis puramente diferenciais, este será chamado de *ossc* (do inglês *ordinary semistandard commutator*).

A proposição 7 de (Di Vincenzo; Nardozza, 2010) garante que os nssc's formam uma base para B_X^L . Mais ainda, como em característica zero é suficiente considerar polinômios multilineares próprios, ou seja, aqueles em

$$\Gamma_n^L = P_n^L \cap B_X^L,$$

os *comutadores normais standard* (nsc) - cuja desigualdade em (1.2) é estrita - também são suficientes para formar uma base de Γ_n^L . Logo denote por $\mathcal{B}$ o conjunto de todos produtos

de nsc's e particione este conjunto conforme a quantidade de comutadores multiplicados, isto é, $\mathcal{B} = \cup_{k \geq 0} \mathcal{B}_k$ em que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 &= \{1_F\} \\ \mathcal{B}_1 &= \{x^w : x \in X, w \in U(L) \setminus \{1\}\} \\ \mathcal{B}_k &= \{c_1 \cdots c_k : c_i \text{ é um nsc}, k \geq 2\}\end{aligned}$$

Por fim, denote por $\Gamma_{n,k}^L = P_n^L \cap \mathcal{B}_k$ o conjunto dos polinômios diferenciais multilineares próprios em n variáveis que são formados por produtos de k nsc's. Além disso, seja $\Gamma^L = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n^L$. Será visto na próxima seção que $T_L(A)$ é gerado como T_L -ideal pela sua parte multilinear própria, *i.e.*, $\Gamma^L \cap T_L(A)$

1.5 Identidades em Álgebras com Derivação

Definição 1.5.1. Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F\langle X^L \rangle$ um polinômio diferencial não nulo. Ele é uma identidade diferencial de uma L -álgebra A se

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad \forall a_i \in A.$$

Nesse caso, será dito que A é uma PI-álgebra com derivação e que A satisfaz a identidade $f \equiv 0$.

Como já observado, os polinômios ordinários, *i.e.*, os elementos de $F\langle X \rangle$, são também polinômios diferenciais. Entretanto, mesmo quando um polinômio ordinário for uma identidade diferencial de uma L -álgebra A , tais identidades serão distinguidas como *identidades ordinárias*.

Além disso, a propriedade universal da álgebra livre com derivação permite uma formulação equivalente para $f \equiv 0$ ser uma identidade diferencial de A . De modo análogo ao caso ordinário, A satisfaz a identidade $f \equiv 0$ se e somente se $f \in \text{Ker}(\phi)$ para todo homomorfismo de L -álgebras $\phi : F\langle X^L \rangle \rightarrow A$.

O conjunto de todas identidades diferenciais de A é um T_L -ideal, *i.e.*, um ideal de $F\langle X^L \rangle$ que possui a propriedade de ser invariante por L -endomorfismos de $F\langle X^L \rangle$. Para este T_L -ideal será reservada a notação $T_L(A)$.

Definição 1.5.2. Seja $f \in F\langle X^L \rangle$. O suporte de f é o subconjunto $\text{Supp}\{f\}$ de X que representa as variáveis, de modo ordinário, que estão envolvidas na expressão de f . Ou seja, $\text{Supp}\{f\}$ não carrega a derivação que pode ocasionalmente estar presente em uma variável de f . Por exemplo,

$$\text{Supp}\{x_1 x_2^{h_1} x_3^{h_2}\} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad h_i \in L.$$

Lema 1.5.1. $T_L(A)$ é gerado por $\Gamma^L \cap T_L(A)$ como T_L -ideal.

Demonstração: Considere

$$J = \langle \Gamma^L \cap T_L(A) \rangle_{T_L}.$$

Obviamente $J \subseteq T_L(A)$ pois J é gerado por um subconjunto de $T_L(A)$. Para concluir a demonstração é suficiente mostrar que $T_L(A) \subseteq J$. Nesse sentido, como foi convencionado que A é sempre uma álgebra sobre um corpo de característica zero, vale que $P^L \cap T_L(A)$ gera $T_L(A)$, em que $P^L = \cup_{n \in \mathbb{N}} P_n^L$. Portanto é suficiente mostrar que

$$\langle P^L \cap T_L(A) \rangle_{T_L} \subseteq J.$$

Para isso suponha que $T_L(A) \neq J$ e considere

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} : f \in P_k^L \cap T_L(A) \text{ com } f \notin J\}.$$

Ou seja, existe um polinômio não nulo $f \in P_n^L \cap T_L(A)$ tal que $f \notin J$. Em vista da discussão feita no final da última seção, tal f pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma wg_w , em que w é um monômio standard enquanto g_w é um produto de nsc's, ambos satisfazendo

$$\text{Supp}\{w\} \cup \text{Supp}\{g_w\} = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{e} \quad \text{Supp}\{w\} \cap \text{Supp}\{g_w\} = \emptyset.$$

Primeiramente, é possível escrever f como duas somas, a primeira envolvendo termos $\alpha_w w g_w$, $\alpha_w \in F$, com w satisfazendo $x_1 \in \text{Supp}\{w\}$ e a última o caso contrário quando $x_1 \notin \text{Supp}\{w\}$, ou seja, $x_1 \in \text{Supp}\{g_w\}$. Vale lembrar que $x_1 < \dots, x_n < x_1^\alpha$ para todo $\alpha \neq 1$. Logo, se x_1^α é uma variável puramente diferencial presente no monômio wg_w então $x_1 \in \text{Supp}\{g_w\}$, seja como um nsc de comprimento 1 ou mesmo aparecendo em um nsc de comprimento maior que 1. Com isso, obtém-se a seguinte expressão

$$f = \sum_{x_1 \in \text{Supp}\{w\}} \alpha_w x_1 w' g_w + \sum_{x_1 \notin \text{Supp}\{w\}} \alpha_u u g_u$$

em que w' e u são monômios standard que não possuem x_1 em seus suportes além de que $w = x_1 w'$.

Considere $\varphi \in \text{End}_L(F\langle X^L \rangle)$ o L -endomorfismo que fixa todas variáveis diferentes de x_1 e envia $x_1 \mapsto 1_F$. Então $\varphi(f) \in T_L(A)$ pois este ideal é invariante por L -endomorfismos de $F\langle X^L \rangle$. Além disso, $\varphi(x_1^{h_1}) = 0$ se $h_1 \neq 1$ e, de modo geral, $\varphi(g_u) = 0$ pois $x_1 \in \text{Supp}\{g_u\}$. Logo

$$\varphi(f) = \sum \alpha_w w' g_w$$

é um polinômio multilinear de grau $n - 1$. Pela escolha de minimalidade no grau de f segue que $\varphi(f) \in J$. Em particular,

$$\sum \alpha_w x_1 w' g_w = x_1 \left(\sum_w \alpha_w w' g_w \right) \in J.$$

Portanto ao quocientar por J , o polinômio f se resume à expressão $\sum \alpha_u u g_u$, podendo ter seus termos distinguidos naqueles em que $x_1^{h_1}$ aparece em g_u como um nsc de comprimento 1 ou como variável de um nsc de comprimento maior que 1 compõe a expressão de g_u .

Em outras palavras, foram eliminados da expressão de f todos monômios em que $x_1^{h_1}$ é uma variável ordinária que não aparece em um nsc. Fazendo o mesmo com as variáveis x_2, x_3 até x_n será obtido que f é equivalente a um polinômio multilinear e próprio em $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

De fato, considerando agora x_2 , o quociente de f por J pode ser escrito como duas somas, exatamente como antes mas com x_2 no lugar de x_1 .

$$f = \sum_{x_2 \in \text{Supp}\{u\}} \alpha_u x_1 u' g_u + \sum_{x_2 \notin \text{Supp}\{v\}} \alpha_v v g_v.$$

O mesmo argumento da construção de φ , agora com $x_2 \mapsto 1_F$, garante que f módulo J é equivalente a um polinômio multilinear e próprio em $\{x_1, x_2\}$. No limite esse processo leva a

$$f \equiv \sum \alpha_g g \pmod{J},$$

em que cada monômio g é um produto de nsc's de tamanho maior ou igual a 1. Em outras palavras,

$$f \equiv 0 \pmod{J},$$

isto é, $f \in J$, o que é uma contradição com a hipótese assumida. Portanto $T_L(A) = J$. #

Seguindo na mesma direção, serão reformulados para esse contexto “diferencial” os conceitos de variedade, cocaracter e as ferramentas para um estudo quantitativo de identidades, a saber a codimensão e o PI-expoente.

Definição 1.5.3. Seja $S \subseteq F\langle X^L \rangle$ um conjunto não vazio de polinômios diferenciais. Será dado o nome de variedade diferencial determinada por S à classe das L -álgebras que satisfazem as identidades $f \equiv 0$ tais que $f \in S$. Além disso, tal variedade será denotada por $\mathcal{V}^L(S)$.

Assim como no caso ordinário, uma variedade pode ser determinada por um T_L -ideal ou por uma álgebra com derivação A , sendo que neste último caso define-se a variedade diferencial determinada por A como $\mathcal{V}^L(A) = \mathcal{V}^L(T_L(A))$.

Indo agora a caminho da definição dos invariantes numéricos de uma variedade $\mathcal{V}^L(A)$, observe que $P_n^L \cap T_L(A)$ é também um S_n -módulo uma vez que um polinômio diferencial multilinear não deixa de ser uma identidade ao se permutar suas variáveis. Com isso, define-se o S_n -módulo

$$P_n^L(A) = \frac{P_n^L}{P_n^L \cap T_L(A)}.$$

Ao caracter da representação de S_n associada a esse módulo será reservado o nome de *n-ésimo cocaracter diferencial* (ou *n-ésimo L-cocaracter*) de A , que é geralmente denotado por $\chi_n^L(A)$. A *n-ésima codimensão diferencial* de A é definida como

$$c_n^L(A) = \dim \frac{P_n^L}{P_n^L \cap T_L(A)}.$$

É evidente que para toda álgebra com derivação A e todo $n \geq 1$ tem-se $c_n(A) \leq c_n^L(A)$. Isso se baseia somente no fato de que todo polinômio ordinário é também um polinômio diferencial. Em particular, todo polinômio multilinear que for uma identidade ordinária é também uma identidade diferencial. Indo além, define-se o *PI-expoente diferencial* de A como

$$\exp^L(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^L(A)}$$

quando esse limite existir. De fato, assim como no caso ordinário esse limite sempre existe. Foi provado em (Gordienko, 2013a) um análogo a conjectura de Amitsur no contexto mais geral de álgebras associativas sobre ação de uma álgebra de Hopf H .

Obviamente é possível estender tais conceitos para variedades diferenciais e, exatamente como no caso ordinário, estudar o crescimento assintótico das variedades buscando classificá-lo dentre algum tipo de crescimento (polinomial, quase-polinomial, etc).

Aqui uma observação se faz necessária: quando não houver dúvida de contexto, será omitida a palavra “diferencial” ao se referir a qualquer um desses conceitos. Desse modo se evitam repetições cansativas à leitura do presente trabalho.

Para substanciar a discussão acerca de identidades em álgebras com derivação serão apresentados dois exemplos. O primeiro envolve a álgebra de Grassmann $\tilde{G}$ do exemplo 1.4.1 e foi explorado em (Rizzo, 2020).

Denotando por $[x]$ a parte inteira de um número real x , o resultado central do artigo (Rizzo, 2020) pode ser descrito como

Teorema 1.5.1. *Sejam F um corpo infinito de característica $p \neq 2$ e $\tilde{G}$ a L -álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre F em que $L = \langle \delta_1, \dots, \delta_t \rangle_{Lie}$. Então*

- $T_L(\tilde{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_{T_L}$.
- $c_n^L(\tilde{G}) = 2^t 2^{n-1} - \sum_{j=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \sum_{i=2j}^t \binom{t}{i} \binom{n}{i-2j}$.

Já o segundo exemplo foi explorado no artigo (Di Vincenzo; Nardoza, 2021) e trata da L -álgebra de matrizes triangulares superiores construída no exemplo 1.4.2. Dentre os resultados apresentados pelos autores, destacam-se aqueles que descrevem um conjunto

gerador para o T_L -ideal $T_L(UT_m)$ e que decompõe o cocaracter diferencial dessa L -álgebra em cocaracteres associados aos S_n -submódulos irredutíveis. De modo mais detalhado:

Teorema 1.5.2. $T_L(UT_m)$ é gerado como T_L -ideal pelo conjunto formado pelos polinômios

$$x^{\epsilon^2} - x^\epsilon, \quad x^{\delta^2}, \quad x^{\delta\epsilon} - x^\delta, \quad x^{\epsilon\delta}$$

$$x^\delta[x_1, x_2], \quad [x_1, x_2]x^\delta, \quad [x_1, x_2]^\delta, \quad x^\epsilon[x_1, x_2],$$

$$[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m], \quad [x_1, y_1] \cdots [x_{m-1}, y_{m-1}]x^\epsilon,$$

$$[x_1, y_1] \cdots [x_{m-2}, y_{m-2}] ([x_{m-1}, y_{m-1}]^\epsilon - [x_{m-1}, y_{m-1}])$$

Teorema 1.5.3. Para todo $n \geq 2$ vale que

$$\begin{aligned} \Gamma_n^L(UT_m) \cong & 2 \cdot [[n]] \oplus 2 \cdot \left(\bigoplus_{k=1}^{m-2} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_k - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-1} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{m-1} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{k-1} - 1, 1]] \otimes [l_k] \right)^{S_n}. \end{aligned}$$

2 Variedade diferencial gerada por $\mathcal{U}_m$

2.1 $\mathcal{U}_m$ e Algumas Identidades Diferenciais

Descrever a álgebra de Lie das derivações L que agirá em UT_m é crucial, isso porque é L quem determina a estrutura dos polinômios diferenciais de $F\langle X^L \rangle$. Nesse sentido, considere

$$\begin{aligned}\tau &:= \text{ad}(e_{11}), \\ \epsilon &:= \text{ad}(e_{mm}), \\ \delta &:= \text{ad}(e_{1m}),\end{aligned}$$

as derivações internas induzidas por e_{11} , e_{mm} e e_{1m} , respectivamente.

Seja L a subálgebra de Lie de $\text{End}(UT_m)$ gerada por $\{\tau, \epsilon, \delta\}$. É óbvio que L é isomorfa a $\mathfrak{t}_2$ como álgebra de Lie, basta considerar $L \rightarrow \mathfrak{t}_2$ dada por $\tau \mapsto e_{11}$, $\epsilon \mapsto e_{12}$, $\delta \mapsto e_{22}$. Se for considerada a ordenação $\tau < \epsilon < \delta$ na base de L , o teorema PBW garante que

$$\{1, \tau^{n_1} \epsilon^{n_2} \delta^{n_3} : n_i \in \mathbb{N}\}$$

é uma base da álgebra universal envolvente $U(L)$.

Portanto, ao invés de trabalhar com a ação de uma álgebra de Lie, equivalentemente é possível considerar uma ação da álgebra associativa $U(L)$. Como já foi ressaltado na seção anterior, a vantagem disso é principalmente por motivos computacionais, simplificando a descrição das *identidades estruturais* (Nardoza, 2023).

Com isso será denotada por $\mathcal{U}_m$ a álgebra com derivação em que $A = UT_m$ e $L = \langle \tau, \epsilon, \delta \rangle_{Lie}$. Apesar de nomear $\mathcal{U}_m$ também por L -álgebra reforça-se que a ação considerada em $\mathcal{U}_m$ será a ação de $U(L)$.

A lista a seguir é composta por operadores que agem (com ação à direita) em $\mathcal{U}_m$ como o operador nulo. A maneira mais imediata (e natural) de verificar isso é avaliando em uma matriz arbitrária de U_m .

$$\begin{array}{lll}\delta^2 = 0 & \epsilon^2 - \epsilon = 0 & \tau^2 + \tau = 0 \\ \epsilon\delta = 0 & \tau\delta = 0 & \epsilon\tau - \tau\epsilon = 0 \\ \delta\epsilon - \delta = 0 & \delta\tau + \delta = 0 & \end{array}$$

Em outras palavras, os operadores do lado esquerdo das igualdades pertencem ao núcleo da ação de $U(L)$ em $\mathcal{U}_m$. Como as derivações são transformações lineares, essas igualdades

implicam diretamente nas seguintes identidades diferenciais de $\mathcal{U}_m$:

$$\begin{array}{lll} x^{\delta^2} \equiv 0 & x^{\epsilon^2} - x^\epsilon \equiv 0 & x^{\tau^2} + x^\tau \equiv 0 \\ x^{\epsilon\delta} \equiv 0 & x^{\tau\delta} \equiv 0 & x^{\epsilon\tau} - x^{\tau\epsilon} \equiv 0 \\ x^{\delta\epsilon} - x^\delta \equiv 0 & x^{\delta\tau} + x^\delta \equiv 0 & \end{array}$$

Essas são as chamadas *identidades diferenciais estruturais* de $\mathcal{U}_m$.

Consequentemente, módulo $T_L(\mathcal{U}_m)$, há apenas quatro variáveis diferenciais: $x^\tau, x^\epsilon, x^\delta$ e $x^{\tau\epsilon}$. É possível proceder da mesma forma feita em (Di Vincenzo; Nardoza, 2021), *Lemma 3.2*, obtendo novas identidades diferenciais em duas variáveis como consequência das identidades de grau 1:

$$x_1^\delta x_2^\delta \equiv 0 \quad x_1^\epsilon x_2^\epsilon \equiv 0 \quad x_1^\epsilon x_2^\delta \equiv x_1^\delta x_2^\epsilon \equiv 0$$

Para elucidar melhor esse procedimento serão verificadas novas identidades de grau 2 que são consequências das identidades estruturais.

Lema 2.1.1. *Os seguintes polinômios diferenciais estão em $T_L(\mathcal{U}_m)$:*

- $x_1^\alpha x_2^\alpha$, com $\alpha \in \{\tau, \tau\epsilon\}$
- $x_1^{\tau\epsilon} x_2^\beta$ e $x_1^\beta x_2^{\tau\epsilon}$, com $\beta \in \{\tau, \epsilon, \delta\}$
- $x_1^\tau x_2^\delta$ e $x_1^\delta x_2^\tau$

Além disso, todos eles são consequências das identidades estruturais de $\mathcal{U}_m$.

Demonstração: Para os cálculos abaixo, considere sempre o quociente por $T_L(\mathcal{U}_m)$. A partir dessa convenção, será cometido um pequeno abuso de notação ao usar a igualdade no lugar do símbolo de congruência.

Usando somente do fato de que τ é uma derivação e que $x^{\tau^2} + x^\tau \in T_L(\mathcal{U}_m)$ segue que

$$0 = (x_1 x_2)^{\tau^2} + (x_1 x_2)^\tau = (x_1^{\tau^2} x_2 + 2x_1^\tau x_2^\tau + x_1 x_2^{\tau^2}) + (x_1^\tau x_2 + x_1 x_2^\tau).$$

A mesma identidade estrutural aplicada em $x_1^{\tau^2}$ e $x_2^{\tau^2}$ implica

$$2x_1^\tau x_2^\tau = 0.$$

Logo $x_1^\tau x_2^\tau = 0$ é uma identidade diferencial de $\mathcal{U}_m$ que é consequência da identidade estrutural $x^{\tau^2} + x^\tau = 0$, uma vez que $\text{char } F = 0$.

Agora é possível aplicar o L -endomorfismo induzido por $x_i \mapsto x_i^\epsilon$, $i \in \{1, 2\}$, na identidade anterior para ver que

$$x_1^{\tau\epsilon} x_2^{\tau\epsilon} = 0 \tag{2.1}$$

também é uma identidade de $\mathcal{U}_m$. Neste caso, como “ser consequência” é uma propriedade transitiva, (2.1) é consequência das identidades estruturais $x^{\tau^2} + x^\tau = 0$ e $x^{\tau\epsilon} - x^{\epsilon\tau} = 0$.

Por outro lado, fazendo $x_i \mapsto x_i^\epsilon$ e $x_j \mapsto x_j$, com $i \neq j$, são obtidas as identidades

$$x_1^{\tau\epsilon} x_2^\tau = 0, \quad x_1^\tau x_2^{\tau\epsilon} = 0.$$

É evidente que se for considerada a identidade $x_1^\epsilon x_2^\epsilon = 0$ juntamente com os L -endomorfismos induzidos por $x_i \mapsto x_i^\tau$ e $x_j \mapsto x_j$, com $i \neq j$, obtém-se

$$x_1^{\tau\epsilon} x_2^\epsilon = 0, \quad x_1^\epsilon x_2^{\tau\epsilon} = 0.$$

Para concluir o caso dos polinômios envolvendo $\tau\epsilon$, aplique nas últimas duas identidades, de modo conveniente, os L -endomorfismos induzidos por $x_i \mapsto x_i^\delta$ e $x_j \mapsto x_j$, com $i \neq j$, para obter

$$x_1^{\tau\epsilon} x_2^\delta = 0, \quad x_1^\delta x_2^{\tau\epsilon} = 0.$$

Por fim,

$$0 = (x_1 x_2)^{\tau\delta} = (x_1^\tau x_2 + x_1 x_2^\tau)^\delta = x_1^{\tau\delta} x_2 + x_1^\tau x_2^\delta + x_1^\delta x_2^\tau + x_1 x_2^{\tau\delta} = x_1^\tau x_2^\delta + x_1^\delta x_2^\tau$$

. Fazendo $x_i \mapsto x_i^\tau$ e $x_j \mapsto x_j$, com $i \neq j$, segue que

$$x_1^\tau x_2^\delta = 0, \quad x_1^\delta x_2^\tau = 0,$$

são identidades diferenciais de $\mathcal{U}_m$. #

Vale ressaltar que não são todas identidades de grau 2 que são consequências das identidades estruturais. Para ver isso o método tradicional de avaliar polinômios em matrizes arbitrárias de $\mathcal{U}_m$ é sugestivo.

Considere portanto $X = (x_{ij}) \in \mathcal{U}_m$. Então

$$X^\tau = - \sum_{j=2}^m x_{1j} e_{1j}, \quad X^\epsilon = \sum_{i=1}^{m-1} x_{im} e_{im}.$$

Logo, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{U}_m$, é evidente que

$$X^\epsilon Y^\tau = 0$$

i.e., o polinômio diferencial

$$x_1^\epsilon x_2^\tau = 0$$

é uma identidade diferencial de $\mathcal{U}_m$.

Aproveitando as avaliações explícitas das variáveis diferenciais em matrizes, vale destacar mais alguns fatos: o primeiro é que $x_1^\tau x_2^\epsilon = 0$ não é uma identidade de $\mathcal{U}_m$ uma vez que

$$X^\tau Y^\epsilon = - \left(\sum_{j=2}^{m-1} x_{1j} y_{jm} \right) e_{1m}.$$

O outro é com relação à distinção que há entre x^δ e $x^{\tau\epsilon}$. Veja que $X^{\tau\epsilon} = -x_{1m}e_{1m}$ enquanto $X^\delta = (x_{11} - x_{mm})e_{1m}$.

Todas as identidades acima em duas variáveis garantem que - modulo $T_L(\mathcal{U}_m)$ - polinômios diferenciais não nulos nunca terão duas variáveis concatenadas sendo ambas variáveis diferenciais, exceto no caso $x_1^\tau x_2^\epsilon$.

Na sequência serão apresentadas outras identidades diferenciais. Algumas delas já foram mostradas em (Di Vincenzo; Nardozza, 2021) e é por isso que suas demonstrações serão omitidas aqui. Uma vez que a álgebra associativa envolvida é a mesma e a álgebra de Lie $\langle \epsilon, \delta \rangle_{Lie}$ que age em UT_m em (Di Vincenzo; Nardozza, 2021) é uma subálgebra de Lie de $L = \langle \tau, \epsilon, \delta \rangle_{Lie}$, as identidades de (Di Vincenzo; Nardozza, 2021) são identidades também nesse caso.

Abaixo está uma lista de identidades diferenciais de UT_m que estão contidas dentre os geradores do T_L -ideal de identidades em (Di Vincenzo; Nardozza, 2021).

$$x^\delta[x_1, x_2] \equiv [x_1, x_2]x^\delta \equiv 0, \quad [x_1, x_2]^\delta \equiv 0, \quad x^\epsilon[x_1, x_2] \equiv 0$$

$$[x_1, y_1] \cdots [x_{m-1}, y_{m-1}]x^\epsilon \equiv 0,$$

$$[x_1, y_1] \cdots [x_{m-2}, y_{m-2}]([x_{m-1}, y_{m-1}]^\epsilon - [x_{m-1}, y_{m-1}]) \equiv 0. \quad (\triangle)$$

Como foi destacado, todas essas identidades estão também em $T_L(\mathcal{U}_m)$. Além dessas,

Teorema 2.1.1. *Os seguintes polinômios diferenciais estão em $T_L(\mathcal{U}_m)$:*

$$[x_1, x_2]x^\tau \quad (2.2)$$

$$x^\tau[x_1, y_1] \cdots [x_{m-1}, y_{m-1}] \quad (2.3)$$

$$([x_1, y_1]^\tau + [x_1, y_1])[x_2, y_2] \cdots [x_{m-1}, y_{m-1}] \quad (\diamond)$$

$$[x_1, x_2]x^{\tau\epsilon} \quad (2.4)$$

$$x^{\tau\epsilon}[x_1, x_2] \quad (2.5)$$

Demonstração: Para o primeiro polinômio diferencial, observe que sob qualquer substituição $h : X \rightarrow \mathcal{U}_m$, os termos de (2.2) assumem a seguinte forma:

$$[x_1, x_2] \xrightarrow{h} \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } x^\tau \xrightarrow{h} \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

em que $*$ representa as únicas entradas não nulas possíveis de $h(x^\tau)$. Portanto, é óbvio que (2.2) é uma identidade diferencial de $\mathcal{U}_m$. Já (2.3) é uma consequência direta da identidade ordinária de $\mathcal{U}_m$ uma vez que x^τ é um comutador.

Agora, se $c_i = [x_i, y_i]$, $1 \leq i \leq m-1$, o polinômio diferencial ($\diamond$) pode ser visto como $(c_1^\tau + c_1)c_2 \cdots c_{m-1}$. Se $h : X \rightarrow \mathcal{U}_m$ é uma substituição tal que $h(c_2 \cdots c_{m-1}) \neq 0$, então

$$h(c_2 \cdots c_{m-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $h(c_1)$ e $h(c_1^\tau)$ contribuirão para $h((c_1^\tau + c_1)c_2 \cdots c_{m-1})$ apenas com suas entradas $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 2)$. Como estas entradas de $h(c_1)$ coincidem com as de $-h(c_1^\tau)$ segue que

$$h((c_1^\tau + c_1)c_2 \cdots c_{m-1}) = 0, \text{ para toda substituição } h.$$

(2.4) e (2.5) podem ser verificadas assim como foi feito com (2.2) uma vez que

$$x^{\tau\epsilon} \xrightarrow{h} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

#

Por fim há mais uma identidade que constituirá o conjunto gerador de $T_L(\mathcal{U}_m)$. Ela é uma generalização para matrizes de ordem maior de uma identidade que surge no caso $m = 3$. Esse caso particular foi descrito em (Nardoza, 2023) e lá vale a identidade diferencial

$$[x_1, x_2]^{\tau\epsilon} + [x_1, x_2]^\tau - [x_1, x_2]^\epsilon + [x_1, x_2] \equiv 0. \quad (2.6)$$

Verificar essa identidade não é uma tarefa hercúlea. Basta notar que por se tratar de uma soma de comutadores, qualquer substituição $h : X \rightarrow \mathcal{U}_3$ em cada comutador estará retornando uma matriz que pode ser identificada em UT_2 , uma vez que a diagonal principal foi anulada.

Depois disso, é suficiente notar que $h([x_1, x_2]^\tau)$ “reconstrói” as entradas $(1, 2)$ e $(1, 3)$ de $h([x_1, x_2])$, assim como $h([x_1, x_2]^\epsilon)$ faz com as entradas $(1, 3)$ e $(2, 3)$ de $h([x_1, x_2])$. Por fim, a entrada $(1, 3)$, que foi somada duas vezes, é corrigida por $h([x, y]^{\tau\epsilon})$ que reconstrói somente a entrada $(1, 3)$ de $h([x_1, x_2])$.

De modo geral quando $m \geq 4$ e $h : X \rightarrow \mathcal{U}_m$ é uma substituição, é possível identificar $h([x_1, y_1] \cdots [x_{m-2}, y_{m-2}])$ com uma matriz de UT_2 da mesma maneira. Os

mesmos argumentos garantem que

$$\begin{aligned} & ([x_1, y_1] \cdots [x_{m-2}, y_{m-2}])^{\tau\epsilon} + ([x_1, y_1] \cdots [x_{m-2}, y_{m-2}])^\tau \\ & - ([x_1, y_1] \cdots [x_{m-2}, y_{m-2}])^\epsilon + [x_1, y_1] \cdots [x_{m-2}, y_{m-2}] \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

é uma identidade diferencial de $\mathcal{U}_m$.

Seja $\mathcal{I} \subseteq F\langle X^L \rangle$ o conjunto formado por todos polinômios diferenciais que apareceram nas identidades diferenciais de $\mathcal{U}_m$ apresentadas até agora, com exceção dos polinômios $(\triangle)$, $(\diamond)$ e, dentre as identidades de grau 2, incluí-se em $\mathcal{I}$ somente o polinômio $x_1^\epsilon x_2^\tau$. Além disso, será denotado por I o T_L -ideal gerado por $\mathcal{I}$.

Neste momento a razão dessa exceção é quase óbvia: será mostrado que $\mathcal{I}$ é um conjunto gerador para o T_L -ideal das identidades diferenciais de $\mathcal{U}_m$. Como $x_1^\epsilon x_2^\tau \equiv 0$ é a única identidade de grau 2 que não é consequência das identidades estruturais, é necessário considerá-la dentre os geradores. No caso dos polinômios $(\triangle)$ e $(\diamond)$, será visto que eles não são necessários para gerar $T_L(\mathcal{U}_m)$ devido à identidade (2.7).

2.2 Um Conjunto Gerador para $T_L(\mathcal{U}_m)$

Nessa seção será mostrado que $\mathcal{I}$ é um conjunto gerador para o T_L -ideal $T_L(\mathcal{U}_m)$. De início serão apresentados uma série de resultados que reduzem as possibilidades de expressões para os polinômios diferenciais multilineares próprios módulo I . Desse modo se garantirá um conjunto gerador $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ para o espaço vetorial formado por estes polinômios. Em um segundo momento, será mostrado que, na verdade, esse conjunto é uma base para o espaço dos polinômios módulo $T_L(\mathcal{U}_m)$. Com isso, conclui-se que $I = T_L(\mathcal{U}_m)$ e consequentemente $\mathcal{I}$ é um conjunto gerador de $T_L(\mathcal{U}_m)$.

Os resultados que aparecem aqui sem demonstração podem ser consultados em (Di Vincenzo; Nardoza, 2021).

Lema 2.2.1. *Se u é um nsc envolvendo uma δ -variável então $uc \equiv cu \equiv 0 \pmod{I}$, para todo nsc c .*

Lema 2.2.2. *Seja $u \in \Gamma_{n,1}^L$ um polinômio envolvendo uma δ -variável. Então*

$$u \equiv [x_n^\delta, x_1, \dots, x_{n-1}] \pmod{I}.$$

Foi destacado há pouco que, quando avaliado em matrizes de $\mathcal{U}_m$, $x^{\tau\epsilon}$ se assemelha à x^δ . É de se esperar portanto que também haja certa semelhança em polinômios diferenciais envolvendo essas variáveis diferenciais. Isto se evidencia nos próximos resultados.

Lema 2.2.3. *Se u é um nsc envolvendo uma $\tau\epsilon$ -variável então $uc \equiv cu \equiv 0 \pmod{I}$, para todo nsc c .*

Demonstração: Se $u = x^{\tau\epsilon}$ então

$$uy^\epsilon \equiv uy^\delta \equiv uy^\tau \equiv uy^{\tau\epsilon} \equiv 0 \pmod{I}.$$

Analogamente, para todo $s \geq 1$, e todo $\alpha \in \{1, \delta, \tau, \epsilon, \tau\epsilon\}$,

$$u[y^\alpha, y_1, \dots, y_s] \equiv 0 \pmod{I}$$

pois $u[x_1, x_2] \in I$ e nessa identidade pode-se aplicar um L -endomorfismo dado por $x_1 \mapsto [y^\alpha, y_1, \dots, y_{s-1}]$, $x_2 \mapsto y_s$.

Seja $u = [x^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_r]$. O caso $r = 0$ acabou de ser verificado. Suponha portanto que $[x^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{r-1}]c \in I$, para qualquer nsc c e defina $u' = [x^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{r-1}]$. A partir disso,

$$uc = [u', x_r]c = u'x_rc - x_ru'c,$$

e por hipótese de indução

$$uc \equiv u'x_rc \pmod{I}.$$

Mas $x_rc = cx_r - [c, x_r]$. Portanto

$$uc \equiv u'cx_r - u'[c, x_r] \equiv 0 \pmod{I}, \forall c \text{ nsc}.$$

É óbvio que argumentos análogos (com sua devida simetria) garantem também que $cu \equiv 0 \pmod{I}$. #

Assim como acontece com polinômios diferenciais que envolvam uma δ -variável, se $u \in \Gamma_{n,k}^L$ envolve uma $\tau\epsilon$ -variável e $u \notin I$, então $k = 1$.

Lema 2.2.4. *Considere $u \in \Gamma_{n,1}^L$ um polinômio envolvendo uma $\tau\epsilon$ -variável. Então $u \equiv [x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{n-1}] \pmod{I}$, para algum $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Demonstração: Sejam $1 \leq j \leq n$ e $u = [x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n]$. Então

$$[x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_n] = [[[x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{n-2}], x_{n-1}], x_n].$$

Olhando para $[\cdot, x_n]$ como uma derivação, segue que

$$\begin{aligned} u &= [x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_n] \\ &= [[[x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{n-2}], x_n], x_{n-1}] + \underbrace{[[x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{n-2}], [x_{n-1}, x_n]]}_{\in I} \\ &\equiv [x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}] \pmod{I} \end{aligned}$$

Portanto, módulo as identidades de I , as variáveis ordinárias podem ser reordenadas de modo crescente. Para finalizar, observe também que é possível trocar a

$\tau\epsilon$ -variável de posição.

$$\begin{aligned} [[x_1, \dots, x_{j-2}], x_{j-1}], x_j^{\tau\epsilon}] &= [x_1, \dots, x_{j-2}], x_j^{\tau\epsilon}], x_{j-1}] + \underbrace{[[x_1, \dots, x_{j-2}], [x_{j-1}, x_j^{\tau\epsilon}]]}_{\in I} \\ &\equiv [x_1, \dots, x_{j-2}, x_j^{\tau\epsilon}, x_{j-1}] \pmod{I}. \end{aligned}$$

#

Continuando com a redução dos polinômios módulo identidades, serão apresentados ainda mais alguns resultados.

Lema 2.2.5. *Seja u um nsc envolvendo uma ϵ -variável. Então $uc \equiv 0 \pmod{I}$, para todo nsc c .*

Lema 2.2.6. *Se u é um nsc envolvendo uma τ -variável então $cu \equiv 0 \pmod{I}$, para todo nsc c .*

Demonstração: Considere $u = z^\tau$. No caso em que $c = y^\alpha$, com $\alpha \in \{\delta, \tau, \epsilon, \tau\epsilon\}$, é evidente que

$$cu \equiv 0 \pmod{I},$$

pois $y^\alpha z^\tau \in I$ para qualquer escolha de α . Mais ainda, se $c = [y^\alpha, y_1, \dots, y_s]$ é um nsc, fazendo $x_1 \mapsto [y^\alpha, y_1, \dots, y_{s-1}]$ e $x_2 \mapsto y_s$, segue de $[x_1, x_2]x^\tau \in I$ que

$$cu \equiv 0 \pmod{I}.$$

Suponha agora que $cv \equiv 0 \pmod{I}$ para todo nsc c , em que v é um nsc de comprimento menor que $s+1$ envolvendo uma τ -variável. Seja $u = [z^\tau, z_1, \dots, z_s]$ e $u' = [z^\tau, z_1, \dots, z_{s-1}]$. Então

$$u = [u', z_s] = u'z_s - z_s u' \implies cu \equiv cz_s u' \pmod{I}, \forall c \text{ nsc}.$$

Além disso, $cz_s = [c, z_s] + z_s c$, logo

$$cu \equiv [c, z_s]u' + z_s cu' \pmod{I}.$$

Pela hipótese de indução $cu' \equiv 0 \pmod{I}$, para todo nsc c . Consequentemente $cu \equiv 0 \pmod{I}$ e segue o resultado. #

Vale destacar que a prova desse teorema dá a idéia para o caso simétrico que foi omitido na demonstração do lema 2.2.3. Nesse ponto portanto o leitor pode verificar aquele caso simplesmente trocando a derivação τ por $\tau\epsilon$ na demonstração anterior.

Com os lemas apresentados até aqui é possível fazer uma redução na forma da identidade (2.7). Se α é uma derivação então

$$([x_1, y_1] \cdots [x_j, y_j])^\alpha = [x_1, y_1]^\alpha \cdots [x_j, y_j] + \cdots + [x_1, y_1] \cdots [x_j, y_j]^\alpha. \quad (2.8)$$

Do mesmo modo (a partir da identidade de Leibnitz), é possível distribuir a derivação dentro de cada comutador. Para derivações concretas, se $\alpha = \tau$ por exemplo, (2.8) se expressa como

$$[x_1, y_1]^\tau \cdots [x_j, y_j] \pmod{I}$$

em virtude do Lema 2.2.6. Analogamente, se $\alpha = \epsilon$, (2.8) se expressa como

$$[x_1, y_1] \cdots [x_j, y_j]^\epsilon \pmod{I}.$$

No caso particular em que $\alpha = \tau\epsilon$, α não é uma derivação mas é possível aplicar o que foi feito quando $\alpha = \tau$ e em seguida o que foi feito quando $\alpha = \epsilon$ obtendo a seguinte expressão para (2.8):

$$[x_1, y_1]^\tau [x_2, y_2] \cdots [x_{j-1}, y_{j-1}] [x_j, y_j]^\epsilon \pmod{I}.$$

Com essas observações segue que a identidade (2.7) se expressa como

$$\begin{aligned} & [x_1, y_1]^\tau [x_2, y_2] \cdots [x_{m-3}, y_{m-3}] [x_{m-2}, y_{m-2}]^\epsilon + \\ & + [x_1, y_1]^\tau [x_2, y_2] \cdots [x_{m-3}, y_{m-3}] [x_{m-2}, y_{m-2}] - \\ & - [x_1, y_1] [x_2, y_2] \cdots [x_{m-3}, y_{m-3}] [x_{m-2}, y_{m-2}]^\epsilon + \\ & + [x_1, y_1] [x_2, y_2] \cdots [x_{m-3}, y_{m-3}] [x_{m-2}, y_{m-2}] \end{aligned} \equiv 0 \pmod{I} \quad (2.9)$$

Ou seja, isolando o polinômio ordinário fica evidente que qualquer produto de $m - 2$ comutadores ordinários é equivalente a uma soma de polinômios diferenciais envolvendo uma τ -variáveis ou uma ϵ -variáveis (podendo envolver ambas simultaneamente).

As contas foram feitas para comutadores de comprimento 2 mas obviamente a idéia usada na demonstração dos lemas anteriores que transforma $[x_1, x_2]$ em $[y, y_1, \dots, y_s]$ a partir de $x_1 \mapsto [y, \dots, y_{s-1}]$, $x_2 \mapsto y_s$, pode ser usada para generalizar este resultado para comutadores de qualquer comprimento.

Com isso pode ser demonstrado o seguinte resultado.

Lema 2.2.7. *Seja $u \in \Gamma_{n,m-1}^L$ um polinômio envolvendo uma α -variável, com $\alpha \in \{1, \tau, \epsilon\}$. Então u é equivalente a uma soma de polinômios formados por $m - 1$ comutadores em que o primeiro comutador envolve uma τ -variável e o último envolve uma ϵ -variável.*

Demonstração: considere $u = c_1 \cdots c_{m-1}$ em que cada c_i é um nsc. Se $\alpha = 1$ então a identidade (2.9) pode ser aplicada tanto nos primeiros quanto nos últimos $m - 2$ comutadores. Na verdade esta identidade será aplicada desses dois modos e tanto faz por

qual escolha começar. Então, utilizando os lemas anteriores segue que

$$\begin{aligned}
 u &\equiv (c_1 \cdots c_{m-2}^\epsilon - c_1^\tau \cdots c_{m-2} - c_1^\tau \cdots c_{m-2}^\epsilon) c_{m-1} & (\text{mod } I) \\
 &\equiv -c_1^\tau c_2 \cdots c_{m-2} c_{m-1} & (\text{mod } I) \\
 &\equiv -c_1^\tau (c_2 \cdots c_{m-1}^\epsilon - c_2^\tau \cdots c_{m-1} - c_2^\tau \cdots c_{m-1}^\epsilon) & (\text{mod } I) \\
 &\equiv -c_1^\tau c_2 \cdots c_{m-2} c_{m-1}^\epsilon & (\text{mod } I)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\alpha = \tau$ a diferença é que necessariamente c_1 envolverá a τ -variável enquanto que no caso de $\alpha = \epsilon$ será c_{m-1} que envolverá a ϵ -variável. Em ambos casos as contas anteriores se simplificam pois quando $\alpha = \tau$ só será aplicada a identidade (2.9) nos últimos $m - 2$ comutadores e se $\alpha = \epsilon$ nos primeiros $m - 2$ comutadores. Com isso, segue o resultado. $\#$

Neste ponto se faz necessário introduzir algumas notações para prosseguir com a discussão. Para $k \leq m - 3$, denote por $\mathcal{P}_{n,k}^1(\mathcal{U}_m)$ o subconjunto de $\Gamma_{n,k}^L$ com elementos $c_1 \cdots c_k$, em que c_i é um osc para todo $1 \leq i \leq k$.

Para $k \leq m - 2$, seja $\mathcal{P}_{n,k}^\epsilon(\mathcal{U}_m)$ o subconjunto de $\Gamma_{n,k}^L$ de todos os produtos $c_1 \cdots c_k$, em que c_i é um osc para todo $1 \leq i < k$ e c_k é um nsc envolvendo uma ϵ -variável em sua primeira entrada. Considere também o subconjunto $\mathcal{P}_{n,k}^\tau(\mathcal{U}_m)$ formado por elementos $c_1 \cdots c_k$, em que c_i um osc para todo $1 < i \leq k$, e c_1 é um nsc envolvendo uma τ -variável em sua primeira entrada.

Além disso, defina

$$\mathcal{P}_n^\delta(\mathcal{U}_m) = \{[x_n^\delta, x_1, \dots, x_{n-1}]\} \subset \Gamma_{n,1}^L,$$

$$\mathcal{P}_{n,1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m) = \{[x_1^{\tau\epsilon}, x_2, \dots, x_n], [x_2^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_n], \dots, [x_n^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_{n-1}]\} \subset \Gamma_{n,1}^L.$$

Para tratar dos polinômios “mistos” que surgem, será denotado por $\mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$, com $2 \leq k \leq m - 1$, o subconjunto de $\Gamma_{n,k}^L$ com elementos $c_1 \cdots c_k$ nos quais c_1 envolve uma τ -variável, c_k envolve uma ϵ -variável, ambas em suas primeiras entradas, e c_i é um nsc ordinário quando $2 < i < k - 1$.

É importante notar que, módulo as identidades de I , termos como

$$u = [x_1^\alpha, \dots, x_r, y_1^\beta, \dots, y_s], \text{ com } \alpha, \beta \in \{\tau, \epsilon\}, \alpha \neq \beta, \text{ and } r + s = n,$$

pertencem ao espaço gerado por $\mathcal{P}_{n,2}^{\tau\epsilon}$. De fato, a depender das escolhas de α e β , u é igual a

$$[[x_1^\tau, \dots, x_r] y_1^\epsilon, y_2, \dots, y_s], \text{ quando } \alpha = \tau, \beta = \epsilon,$$

ou

$$- [y_1^\tau [x_1^\epsilon, \dots, x_r], y_2, \dots, y_s], \text{ quando } \alpha = \epsilon, \beta = \tau.$$

Junte a isso o fato de que toda álgebra associativa satisfaz

$$[x_1 x_2, x_3] = [x_1, x_3] x_2 + x_1 [x_2, x_3]$$

e a afirmação se verifica.

Para concluir esta extensa lista de definições sobre polinômios diferenciais e seus conjuntos, denote por

$$\mathcal{P}_n^\alpha(\mathcal{U}_m) = \bigcup_{k \leq m-1} \mathcal{P}_{n,k}^\alpha(\mathcal{U}_m), \quad \alpha \in \{1, \delta, \tau, \epsilon, \tau\epsilon\},$$

sendo $\mathcal{P}_{n,k}^\alpha(\mathcal{U}_m) = \emptyset$ quando este conjunto não tiver sido definido para o par (α, k) .

E para finalizar, $\Gamma_n^\alpha(\mathcal{U}_m)$ irá representar o F -subespaço gerado por $\mathcal{P}_n^\alpha(\mathcal{U}_m)$ no quociente de Γ_n^L por $T_L(\mathcal{U}_m)$. Por simplicidade os elementos de $\Gamma_n^\alpha(\mathcal{U}_m)$ serão chamados α -polinômios diferenciais.

Com essas subdivisões é possível dar a seguinte descrição para o conjunto

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m) = \mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^\delta(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$$

Toda discussão até aqui é na verdade a demonstração do teorema abaixo.

Teorema 2.2.1. $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ gera o espaço vetorial Γ_n^L módulo I .

Demonstração: Considere um polinômio $f \in \Gamma_n^L$. Então f pode ser escrito como uma combinação linear de nsc's $c_1 \cdots c_k$. Quocientando Γ_n^L por I , com base nos resultados acima segue que cada $c_1 \cdots c_k$ é equivalente ou a zero, no caso de $f \equiv 0$ ser uma identidade diferencial de $\mathcal{U}_m$ ou a uma combinação linear de polinômios de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$.

Em outras palavras, todo elemento de Γ_n^L , módulo I , é uma combinação linear de polinômios de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$. Consequentemente

$$\Gamma_n^L/I = \langle \mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m) \rangle_{EV}.$$

#

Como uma implicação direta, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.1. $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ gera $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_m)$.

Demonstração: É suficiente observar que $I \subseteq T_L(\mathcal{U}_m)$. Consequentemente,

$$\Gamma_n^L(\mathcal{U}_m) = \frac{\Gamma_n^L}{T_L(\mathcal{U}_m)} \subseteq \Gamma_n^L/I.$$

#

Em resumo, acaba de ser demonstrado que $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ é suficiente para gerar - módulo I - todos polinômios multilineares próprios de grau n , em particular módulo

o T_L -ideal de identidades de $\mathcal{U}_m$. Na sequência se iniciará a discussão para provar a independência linear de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ módulo $T_L(\mathcal{U}_m)$ e com isso terá sido provado um dos teoremas centrais da tese:

Teorema 2.2.2. $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ é uma base de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_m)$. Consequentemente $I = T_L(\mathcal{U}_m)$ e, em particular, $\mathcal{I}$ é um conjunto gerador para as identidades diferenciais de $\mathcal{U}_m$.

A demonstração desse resultado se reduzirá à demonstração do restante dos resultados desta seção.

Proposição 2.2.1. Para qualquer $n \geq 1$, o vetor $[x_n^\delta, x_1, \dots, x_{n-1}]$ é l.i. dos demais vetores de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$.

Demonstração: Suponha que

$$f = \sum_u a_u u + \sum_v a_v v + b[x_n^\delta, x_1, \dots, x_{n-1}] = 0,$$

com u percorrendo todos elementos de $\mathcal{P}_n^1 \cup \mathcal{P}_n^\epsilon$ e v percorrendo $\mathcal{P}_n^\tau \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}$. Como $e_{11}^\epsilon = e_{11}^\tau = 0$,

$$e_{11} \in \text{Ker}(\tau) \cap \text{Ker}(\epsilon) \cap \text{Ker}(\tau\epsilon).$$

Com isso, considerando a substituição $X \xrightarrow{\xi} \{e_{11}\}$ avaliada em f , obtém-se $\xi(f) = 0$ e

$$\xi(u) = 0, \forall u \in \mathcal{P}_n^1 \cup \mathcal{P}_n^\epsilon,$$

uma vez que $e_{11} \in \text{Ker}(\epsilon)$ e todo osc comuta quando avaliado por ξ . De modo similar,

$$\xi(v) = 0, \forall v \in \mathcal{P}_n^\tau \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}.$$

Apesar disso,

$$\xi([x_n^\delta, x_1, \dots, x_{n-1}]) \neq 0,$$

pois $e_{11}^\delta = e_{1m}$. Logo $b = 0$. #

Visando uma escrita mais simplificada, daqui em diante, ao ser dito que X é um subconjunto l.i. de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ significará que o conjunto X é linearmente independente dos demais elementos de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ que ainda não foram mostrados com essa propriedade.

Em outras palavras, o que está sendo feito é um processo de eliminação dos elementos de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$: o primeiro passo foi dado pela proposição anterior que eliminou $\omega = [x_n^\delta, x_1, \dots, x_{n-1}]$ de ser gerado por $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$. O próximo passo é verificar que um dado subconjunto X não pode ser gerado por $\mathcal{R} := \mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m) \setminus \{\omega\}$ e com isso elimina-se X de $\mathcal{R}$. Esse processo segue sucessivamente, eliminação por eliminação, findando quando $\mathcal{R}$ atinge o conjunto vazio. É o fim desse processo que garantirá que $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ é l.i.

Esta convenção tem o propósito de não ficar repetindo esta explicação a cada novo resultado que mostra tal propriedade para um subconjunto de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ mas também

para não induzir o leitor ao erro de pensar que foi mostrada a independência linear de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$ mostrando que os subconjuntos que particionam este primeiro conjunto são *l.i.* separadamente.

Feito esse apontamento é possível retornar a discussão dos resultados.

Proposição 2.2.2. $\mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_m)$ é um subconjunto *l.i.* de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$.

Demonstração: Considere K a subálgebra de $\mathcal{U}_m$ formada por matrizes com a primeira linha e a última coluna assumindo apenas valores zero. É fácil ver que $K \cong UT_{m-2}$ como F -álgebras. Para se convencer disto é suficiente escrever esta aplicação e verificar com contas simples que vale o isomorfismo. Com isso em mente, seja

$$f = \sum_{u \in \mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_m)} a_u u + \sum_{v \in \mathcal{R}} a_v v,$$

com $\mathcal{R} = \mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m) \setminus (\mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^\delta(\mathcal{U}_m))$.

Se $X \xrightarrow{\xi} K$ é uma substituição então $\xi(X) \in \text{Ker}(\tau) \cap \text{Ker}(\epsilon) \cap \text{Ker}(\tau\epsilon)$ pois K está nesses núcleos. Além disso, como consequência da identidade (ordinária) de UT_{m-2} , qualquer produto de mais de $m - 3$ comutadores se anula nesta substituição.

Em outras palavras, qualquer substituição em K se anula em $\mathcal{P}_n^\alpha(\mathcal{U}_m)$ com $\alpha \in \{\tau, \epsilon, \tau\epsilon\}$. Como resultado,

$$\xi(f) = \xi \left(\sum_{u \in \mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_{m-2})} a_u u \right) = 0$$

em que ξ é uma substituição arbitrária em $K \cong UT_{m-2}$, ou seja,

$$\sum_{u \in \mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_{m-2})} a_u u \equiv 0$$

é uma identidade polinomial ordinária de UT_{m-2} . Como é sabido (*e.g.* (Drensky, 2000)) $\mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_m)$ é uma base para $\Gamma_n(UT_{m-2})$, logo $a_u = 0, \forall u \in \mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_{m-2})$. #

Relembrando as notações estabelecidas em 1.2.10, para todo $k, n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $k \leq n$, considere para as próximas definições $\omega = c_1 \cdots c_k \in \mathcal{P}_{n,k}^\alpha(\mathcal{U}_m)$, $\alpha \in \{1, \tau, \epsilon, \delta, \tau\epsilon\}$.

Definição 2.2.1. A *estrutura* de ω é definida como a sequência $l(\omega) = (l(c_1), \dots, l(c_k))$ dos comprimentos dos comutadores envolvidos em ω . Em particular, se $\omega \in \mathcal{P}_{n,k}^\alpha(\mathcal{U}_m)$ então $l(\omega) \in \Lambda_{n,k}^\alpha$.

Definição 2.2.2. Se z_i é a variável na primeira posição do comutador c_i , então z_i será chamada a *letra principal* de c_i e todas outras serão as letras secundárias. A *palavra principal* de ω é a palavra $\|\omega\| := z_1 \cdots z_k$ obtida da concatenação das letras principais de c_1 até c_k respectivamente.

Existem maneiras simples de identificar matrizes de ordem menor de $\mathcal{U}_s$, com $s < m$, em $\mathcal{U}_m$: uma delas é escrever uma matriz $s \times s$ nas primeiras s linhas e colunas de uma matriz em $\mathcal{U}_m$. Mais precisamente, aplicar o homomorfismo $\mathcal{U}_s \xrightarrow{\iota_s} \mathcal{U}_m$ no qual $e_{ij} \mapsto e_{ij}$ para $1 \leq i \leq j \leq s$, e $e_{ij} \mapsto 0$ nos demais casos.

Outra maneira é identificar uma matriz $s \times s$ com as últimas s linhas e colunas de uma matriz em $\mathcal{U}_m$. Para isso, é aplicado o homomorfismo $\mathcal{U}_s \xrightarrow{\theta_s} \mathcal{U}_m$ tal que $e_{ij} \mapsto e_{m-s+i, m-s+j}$ para $1 \leq i \leq j \leq s$ e zero nos demais geradores.

Não é difícil ver que ι_s, θ_s , $s < m$, são monomorfismos de álgebra. Além disso, se $1 \leq s \leq m-1$,

$$\iota_s(\mathcal{U}_s) \subseteq \text{Ker}(\epsilon), \quad \theta_s(\mathcal{U}_s) \subseteq \text{Ker}(\tau).$$

Essas identificações serão importantes para construir algoritmos para eliminar polinômios diferenciais em $\mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$.

Definição 2.2.3. Para cada $1 \leq k \leq m-2$ e $\omega = c_1 \cdots c_k \in \mathcal{P}_{n,k}^\tau(\mathcal{U}_m)$, considere a substituição $\psi_\omega : X \rightarrow \iota_{k+1}(\mathcal{U}_{k+1}) \subset \mathcal{U}_m$ definida por

$$z_i \mapsto e_{i i+1}$$

$$\text{letras secundárias de } c_i \mapsto e_{i+1 i+1},$$

em que z_i é a letra principal de c_i , $i \leq k$. À ψ_ω será dado o nome de *substituição especial induzida por ω* . É importante notar que $\psi_\omega(\omega) = \lambda e_{1 k+1}$, com $\lambda \in F \setminus 0$.

Definição 2.2.4. Para cada $1 \leq k \leq m-2$ e $\omega = c_1 \cdots c_k \in \mathcal{P}_{n,k}^\epsilon(\mathcal{U}_m)$, considere a substituição $\phi_\omega : X \rightarrow \theta_{k+1}(\mathcal{U}_{k+1}) \subset \mathcal{U}_m$ definida por

$$z_i \mapsto \theta_{k+1}(e_{i i+1})$$

$$\text{letras secundárias de } c_i \mapsto \theta_{k+1}(e_{i+1 i+1}).$$

Essa substituição foi construída em (Di Vincenzo; Nardoza, 2021) e, como no artigo, será chamada de A_{k+1} -substituição induzida por ω .

Resta provar mais um lema técnico para finalmente estabelecer o algoritmo.

Lema 2.2.8. *Seja $\omega \in \mathcal{P}_{n,k}^\tau(\mathcal{U}_m)$, com $1 \leq k \leq m-2$, e ψ_ω a substituição especial induzida por ω . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. Para todo $u \in \mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ vale que $\psi_\omega(u) = 0$.
2. Para todo $h > k$, e $u \in \mathcal{P}_{n,h}^\tau(\mathcal{U}_m)$, vale que $\psi_\omega(u) = 0$.
3. Se $u \in \mathcal{P}_{n,k}^\tau(\mathcal{U}_m)$ e $\psi_\omega(u) \neq 0$ então $l(u) \geq l(\omega)$. Além disso, se $l(u) = l(\omega)$ então $u = \omega$.

Demonstração: 1. Como já observado, $\iota_s(\mathcal{U}_s) \subseteq \text{Ker}(\epsilon)$ se $s \leq m - 1$. Como $\text{Im}(\psi_\omega) \subseteq \iota_{k+1}(\mathcal{U}_{k+1})$ quando $1 \leq k \leq m - 2$, é evidente que qualquer nsc envolvendo uma ϵ -variável se anula na substituição ψ_ω . Com isso,

$$\psi_\omega(u) = 0, \forall u \in \mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{U}_m) \cup_{s \geq 2} \mathcal{P}_{n,s}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m).$$

Note entretanto que $\text{Ker}(\tau\epsilon) = \mathcal{U}_m \setminus \langle e_{1m} \rangle_{EV}$. Como consequência $\iota_s(\mathcal{U}_s) \subseteq \text{Ker}(\tau\epsilon)$ e $\psi_\omega(u) = 0$ também no caso em que $u \in \mathcal{P}_{n,1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$.

2. Isso é uma consequência direta de que qualquer produto de mais de k comutadores é uma identidade de $\mathcal{U}_{k+1}$.

3. Considere $u = d_1 \cdots d_k \in \mathcal{P}_{n,k}^\tau(\mathcal{U}_m)$ satisfazendo $\psi_\omega(u) \neq 0$. Em ψ_ω apenas k entre todas as n variáveis são substituídas por elementos fora da diagonal, mais especificamente, as variáveis denotadas por $z_1, \dots, z_k$. Como u é formado apenas por k comutadores, cada comutador d_i deve ter exatamente uma variável em $\{z_1, \dots, z_k\}$, caso contrário haverá um comutador d_l que se anula.

É importante ressaltar que qualquer permutação diferente da identidade anula o produto

$$e_{12} e_{23} \cdots e_{kk+1}.$$

Esse fato implica que, ao analisar a substituição $\psi_\omega(u)$, é possível afirmar sobre u que cada z_i deve aparecer exatamente no comutador d_i , para cada $1 \leq i \leq k$. Caso contrário $\psi_\omega(u) = 0$. As variáveis restantes, como já mencionado, são substituídas por elementos diagonais. Portanto, duas letras secundárias não podem preencher simultaneamente as duas primeiras posições de um comutador. Em resumo, para cada i , a variável z_i está na 1ª ou 2ª posição de d_i .

Suponha agora que uma letra secundária de c_k apareça em d_j , com $j < k$. Então $\psi_\omega(d_j) = 0$ pois $[e_{jj+1}, e_{k+1k+1}] = 0$. Mas $\psi_\omega(u) \neq 0$. Portanto, todas as letras secundárias de c_k devem estar em d_k e, consequentemente, $l(d_k) \geq l(c_k)$.

No caso de $l(d_k) = l(c_k)$, todas as variáveis de d_k coincidem com as de c_k . Em particular, elas têm o mesmo mínimo, que é a variável em sua 2ª posição. Assim, z_k preenche a 1ª posição de cada uma delas e a ordenação standard das variáveis em nsc's implica que $d_k = c_k$.

Se $k > 1$ e $l(d_{k-1}) = l(c_{k-1})$, a mesma situação descrita anteriormente ocorrerá: nenhuma letra secundária de c_{k-1} pode aparecer em d_j quando $j < k - 1$ sem que $\psi_\omega(d_j) = 0$. Consequentemente todas as variáveis de c_{k-1} devem estar em d_{k-1} e, em particular, elas têm a mesma variável mínima. Como antes, z_{k-1} está na primeira posição e, a variável mínima, na segunda posição. Em conclusão $d_{k-1} = c_{k-1}$.

Esses argumentos podem ser usados para tratar os demais comutadores. No último comutador, especialmente, temos uma pequena simplificação: z_1 é uma letra

diferencial envolvendo τ e é por isso que z_1 deve estar na primeira posição de c_1 e d_1 . Portanto, $l(d_1) = l(c_1)$ implica, da mesma forma, que $d_1 = c_1$.

Com isso, se $\psi_\omega(u) \neq 0$ e $l(u) = l(\omega)$ então $u = \omega$. #

Como mencionado, o último lema permite usar um algoritmo análogo ao utilizado em (Di Vincenzo; Nardoza, 2021). É possível eliminar um a um os τ -polinômios diferenciais de estrutura máxima que são *l.i.* com os demais, começando de $k = 1$ até $m - 2$. O passo inicial é eliminar o polinômio de estrutura máxima de $\mathcal{P}_{n,1}^\tau$, depois o próximo de estrutura máxima nesse mesmo conjunto até mostrar a independência linear de $\mathcal{P}_{n,1}^\tau$ completamente. Em seguida se repete o mesmo processo para $\mathcal{P}_{n,2}^\tau$ e assim sucessivamente até $\mathcal{P}_{n,m-2}^\tau$. Com o final desse processo, está provado que $\mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_m) = \cup_{k=1}^{m-2} \mathcal{P}_{n,k}^\tau(\mathcal{U}_m)$ é um subconjunto linearmente independente de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$.

Além disso, o algoritmo de (Di Vincenzo; Nardoza, 2021) também pode ser aplicado aqui para eliminar os ϵ -polinômios diferenciais.

Lema 2.2.9. *Seja $\omega \in \mathcal{P}_{n,k}^\epsilon(\mathcal{U}_m)$, $1 \leq k \leq m - 2$, e φ_ω a A_{k+1} -substituição induzida por ω . As seguintes afirmações valem:*

1. *Para todo $u \in \mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ tem-se $\varphi_\omega(u) = 0$.*
2. *Para todo $h > k$, e todo $u \in \mathcal{P}_{n,h}^\epsilon(\mathcal{U}_m)$, tem-se $\varphi_\omega(u) = 0$.*
3. *Se $u \in \mathcal{P}_{n,k}^\epsilon(\mathcal{U}_m)$ e $\varphi_\omega(u) \neq 0$ então $l(u) \geq l(\omega)$. Além disso, se $l(u) = l(\omega)$ então $u = \omega$.*

Antes de apresentar a prova, vale ressaltar o fato de que o item 1 garante que é possível provar a independência linear de $\mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{U}_m)$ sem ter provado que $\mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_m)$ é *l.i.*, usando o mesmo algoritmo com os itens 2 e 3.

Demonstração: 1. De forma simétrica ao lema anterior, já sabemos que $\theta_s(\mathcal{U}_s) \subseteq \text{Ker}(\tau)$, para todo $s \leq m - 1$. Consequentemente $\theta_s(\mathcal{U}_s) \subseteq \text{Ker}(\tau\epsilon)$. Como

$$\text{Im}(\varphi_\omega) \subseteq \theta_{k+1}(\mathcal{U}_{k+1}) \text{ se } 1 \leq k \leq m - 2,$$

segue que

$$\varphi_\omega(u) = 0, \forall u \in \mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_m) \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m).$$

A prova dos itens 2 e 3 pode ser consultada em (Di Vincenzo; Nardoza, 2021), *Lemma 4.6*. #

Portanto o algoritmo descrito anteriormente garante que $\mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{U}_m)$ é um subconjunto *l.i.* de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$.

Agora é necessário lidar com os polinômios “mistos”, ou seja, os polinômios de $\mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$. O primeiro passo será lidar com os polinômios diferenciais de $\mathcal{P}_{n,1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$.

Proposição 2.2.3. $\mathcal{P}_{n,1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ é um subconjunto l.i. de $\mathcal{P}_n(\mathcal{U}_m)$.

Demonstração: Para eliminar todos os polinômios de $\mathcal{P}_{n,1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$, é necessário, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, uma avaliação $\xi_i : X \rightarrow \mathcal{U}_m$ que envie

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto e_{1m} \\ x_j &\mapsto e_{mm} \text{ se } i \neq j \end{aligned}$$

Com isso,

$$\xi_i([x_j^{\tau\epsilon}, x_1, \dots, x_n]) = -\delta_{ij}e_{1m}.$$

Mais ainda, todo ω que é produto de comutadores satisfaz

$$\xi_i(\omega) = 0,$$

uma vez que ξ_i substitui somente uma variável por um elemento fora da diagonal. Portanto, considerando 0 como uma combinação linear de todos os elementos de $\mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ é possível eliminar os polinômios de $\mathcal{P}_{n,1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ um a um. $\#$

Resta lidar com $\cup_{k \geq 2} \mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$. Para isso será considerada uma nova substituição “especial”.

Definição 2.2.5. Para cada $2 \leq k \leq m-1$ e $\omega = c_1 \cdots c_k \in \mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$, seja $\eta_\omega : X \rightarrow \mathcal{U}_m$ a substituição que envia

$$\begin{aligned} z_i &\mapsto e_{i \ i+1} \\ \text{letras secundárias de } c_i &\mapsto e_{i+1 \ i+1}, \text{ quando } 1 \leq i \leq k-2, \\ z_{k-1} &\mapsto e_{k-1 \ m-1} \\ \text{letras secundárias de } c_{k-1} &\mapsto e_{m-1 \ m-1}, \\ z_k &\mapsto e_{m-1 \ m} \\ \text{letras secundárias de } c_k &\mapsto e_{mm}. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que $\eta_\omega(\omega) = \lambda e_{1m}$, com $\lambda \neq 0$.

Lema 2.2.10. Seja $\omega \in \mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$, $2 \leq k \leq m-1$, e η_ω a substituição induzida por ω conforme a definição anterior. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Para todo $h > k$ e $u \in \mathcal{P}_{n,h}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ vale que $\eta_\omega(u) = 0$.
2. Se $u \in \mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ e $\eta_\omega(u) \neq 0$ então $l(u) \geq l(\omega)$. Além disso, se $l(u) = l(\omega)$ então $u = \omega$.

Demonstração:

1. Seja $u = d_1 \cdots d_h \in \mathcal{P}_{n,h}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ com $h > k$. Como antes, η_ω substitui somente k variáveis por elementos fora da diagonal. Consequentemente existe $j \in \{1, \dots, h\}$ tal que d_j é formado somente por letras secundárias de $c_1, \dots, c_k$. Nesse caso $\eta_\omega(d_j) = 0$, i.e., d_j comuta e portanto $\eta_\omega(u) = 0$ sempre que $h > k$.

2. A prova desse item é exatamente a prova do item 3. do Lema 2.2.8, trocando somente ψ_ω por η_ω . #

Portanto, como feito com as outras substituições, é possível eliminar um a um os polinômios de $\cup_{k \geq 2} \mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ começando por $k = 2$ até $k = m - 1$. Desse modo se mostra a independência linear de $\cup_{k \geq 2} \mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}$ e consequentemente está concluída a demonstração do Teorema 2.2.2.

2.3 Estrutura de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_m)$ como S_n -módulo

Os próximos resultados já são bem conhecidos na teoria de identidades polinômiais ordinárias. Mais uma vez a bibliografia (Drensky, 2000) é uma referência para suas demonstrações (veja Theorem 12.5.6).

Lema 2.3.1. Para todo $m \geq 3$ e $n \geq 2$,

$$\Gamma_n(UT_m) \cong_{S_n} \Gamma_n(UT_{m-1}) \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-1} - 1, 1]]^{S_n}.$$

Corolário 2.3.1. Para todo $m, n \geq 2$,

$$\Gamma_n(UT_m) \cong_{S_n} \bigoplus_{k=1}^{m-1} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_k - 1, 1]]^{S_n}.$$

Como foi descrita uma base para $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_m)$ em termos dos conjuntos $\mathcal{P}_n^\alpha(\mathcal{U}_m)$ (Corolário 2.2.1), com $\alpha \in \{1, \tau, \epsilon, \delta, \tau\epsilon\}$, é suficiente descrever a estrutura em S_n -módulos irredutíveis dos espaços $\Gamma_n^\alpha(\mathcal{U}_m)$. É isso que será feito a seguir.

Lema 2.3.2. Para todo $m \geq 3$ e $n \geq 2$,

$$\Gamma_n^1(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} \Gamma_n(UT_{m-2}).$$

Demonstração: esse resultado é direto uma vez que $\mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_m)$ é uma base para esses dois F -espaços e a ação de S_n em ambos também coincide. #

Corolário 2.3.2. Para todo $m \geq 3$ e $n \geq 2$,

$$\Gamma_n^1(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} \bigoplus_{k=1}^{m-3} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_k - 1, 1]]^{S_n}.$$

#

O próximo resultado é uma consequência direta do Lema 2.2.2.

Lema 2.3.3. Para todo $m, n \geq 2$, $\Gamma_n^\delta(\mathcal{U}_m) \cong [[n]]$

Antes de seguir para a estrutura do restante dos polinômios diferenciais, se faz necessário estabelecer algumas notações. Para $\alpha \in \{\tau, \epsilon, \tau\epsilon\}$, será adotada a seguinte partição (de conjuntos)

$$\mathcal{P}_n^\alpha(\mathcal{U}_m) = \mathcal{P}_{n, \leq m-3}^\alpha(\mathcal{U}_m) \dot{\cup} \mathcal{P}_{n, m-2}^\alpha(\mathcal{U}_m) \dot{\cup} \mathcal{P}_{n, m-1}^\alpha(\mathcal{U}_m),$$

em que

$$\mathcal{P}_{n, \leq m-3}^\alpha(\mathcal{U}_m) = \bigcup_{k=1}^{m-3} \mathcal{P}_{n, k}^\alpha(\mathcal{U}_m).$$

Agora, se $\alpha \in \{1, \tau, \tau\epsilon\}$ e $l \in \Lambda_{n, k}^\alpha$, define-se para $k \in \{m-2, m-1\}$

$$\mathcal{P}_{n, k}^\alpha(\mathcal{U}_m, l) = \{\omega \in \mathcal{P}_{n, k}^\alpha(\mathcal{U}_m) : l(\omega) = l\}.$$

É evidente que

$$\mathcal{P}_{n, k}^\alpha(\mathcal{U}_m) = \bigcup_{l \in \Lambda_{n, k}^\alpha} \mathcal{P}_{n, k}^\alpha(\mathcal{U}_m, l).$$

Além disso, denote por

$$W_{\leq m-3}^\alpha(\mathcal{U}_m) = \langle \mathcal{P}_{n, \leq m-3}^\alpha(\mathcal{U}_m) \rangle_{EV}, \quad W_k^\alpha(\mathcal{U}_m) = \langle \mathcal{P}_{n, k}^\alpha(\mathcal{U}_m) \rangle_{EV}, \quad W_k^\alpha(l) = \langle \mathcal{P}_{n, k}^\alpha(\mathcal{U}_m, l) \rangle_{EV},$$

quando $l \in \Lambda_{n, k}^\alpha$. Não é difícil ver que

$$W_k^\alpha = \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, k}^\alpha} W_k^\alpha(l).$$

Estas definições foram feitas de maneira geral a fim de tornar o texto mais fluído mas vale lembrar que $\mathcal{P}_{n, m-1}^\alpha(\mathcal{U}_m) = \emptyset$ quando $\alpha \in \{\tau, \epsilon\}$. Simplificando e resumindo, a idéia é a seguinte: cada $\omega = c_1 \cdots c_k$ é um gerador de um “ S_n -módulo” $W_k^\alpha(l(\omega))$ para algum α específico. Como o espaço W_k^α foi decomposto em uma soma direta dos subespaços $W_k^\alpha(l(\omega))$ indexada pela estrutura dos polinômios, é possível determinar completamente a estrutura de W_k^α como S_n -módulo analisando somente suas componentes e, por fim, somando todas elas.

Vale lembrar que em todos esses resultados os espaços vetoriais de polinômios próprios estão sendo sempre considerados quocientados por $T_L(\mathcal{U}_m)$ e, para evitar repetições tediosas, isso não será mencionado novamente.

Lema 2.3.4. Para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3) &\cong_{S_n} [[n]] \oplus [[n-1, 1]] \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^1} ([l_1-1, 1] \otimes [[l_2-1, 1]])^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^\tau} ([l_1] \otimes [[l_2-1, 1]])^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^\epsilon} ([l_1-1, 1] \otimes [[l_2]])^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^{\tau\epsilon}} ([l_1] \otimes [[l_2]])^{S_n}. \end{aligned}$$

Demonstração: De início, note que como consequência da identidade ordinária de UT_3 , $\mathcal{P}_{n,k}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3) \subset T_L(\mathcal{U}_3)$ para $k \geq 3$. Com isso, é obtida a seguinte decomposição em F -subespaços

$$\Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3) = W_1^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3) \oplus W_2^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3).$$

Considere $\omega = c_1 c_2 \in \mathcal{P}_{n,2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$ um polinômio com estrutura $l(\omega) = (l_1, l_2) \in \Lambda_{n,2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$. Observe que $l(\omega) = l(\sigma \cdot \omega)$, para todo $\sigma \in S_n$. Logo $W_2^{\tau\epsilon}(l(\omega))$ é cíclico e gerado por qualquer elemento de $\mathcal{P}_{n,2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3, l)$ em que $l = l(\omega)$. Dito isso, considere L_i o conjunto formado pelos índices das variáveis de c_i , com $i \in \{1, 2\}$. Há alguns casos distintos para se observar:

1. $l_1 = l_2 = 1$,
2. $l_1 = 1$ e $l_2 > 1$,
3. $l_1 > 1$ e $l_2 = 1$,
4. $l_1, l_2 > 1$.

Para cada caso será definido um subgrupo H_ω de permutações em $L_1 \cup L_2$ associado à estrutura de ω . Este grupo será isomorfo a um subgrupo de S_n , uma vez que $\#L_1 + \#L_2 = n$.

Para o caso 1, define-se $H_\omega := S_{L_1} \times S_{L_2}$. Neste caso trivial, tem-se H_ω isomorfo ao subgrupo $S_1 \times S_1$ e portanto o espaço gerado pela órbita de ω em H_ω é um H_ω -módulo tal que

$$FH_\omega \omega \cong_{H_\omega} [[1]] \otimes [[1]].$$

No caso 2 define-se

$$H_\omega := S_{L_1} \times S_j \times S_{L_2 \setminus \{j\}}$$

em que j é o índice de $\|c_2\|$. Ou seja, H_ω é isomorfo à um subgrupo de S_n que fixa a variável de c_1 e a letra principal de c_2 . De fato a ação desse subgrupo em ω é trivial uma vez que a ordenação dos nsc's permite reorganizar as variáveis a partir da segunda posição de c_2 . Consequentemente ω gera um $S_1 \times S_1 \times S_{l_2-1}$ -módulo isomorfo à

$$[[1]] \otimes [[1]] \otimes [[l_2 - 1]].$$

Ao induzir em H_ω e aplicar a branching rule tem-se

$$\begin{aligned} FH_\omega \omega &\cong_{H_\omega} [[1]] \otimes ([[[1]] \otimes [[l_2 - 1]]])^{S_{L_2}} \\ &\cong_{H_\omega} [[1]] \otimes [[l_2]] \oplus [[1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]]. \end{aligned}$$

É evidente que o caso 3 é análogo ao caso anterior, o que resulta em

$$FH_\omega \omega \cong_{H_\omega} [[l_1]] \otimes [[1]] \oplus [[l_1 - 1, 1]] \otimes [[1]].$$

Para o caso 4 é suficiente unir as técnicas dos casos 2 e 3, ou seja, é necessário definir H_ω como antes porém fixando as letras principais $\|c_1\|$ e $\|c_2\|$. Neste caso obtém-se

$$FH_\omega\omega \cong_{H_\omega} ([1] \otimes [l_1 - 1])^{S_{L_1}} \otimes ([1] \otimes [l_2 - 1])^{S_{L_2}}.$$

Portanto será necessário usar a branching rule por duas vezes,

$$\begin{aligned} FH_\omega\bar{\omega} &\cong_{H_\omega} ([l_1 - 1, 1] \otimes [l_2 - 1, 1]) \\ &\oplus ([l_1] \otimes [l_2 - 1, 1]) \\ &\oplus ([l_1 - 1, 1] \otimes [l_2]) \\ &\oplus ([l_1] \otimes [l_2]). \end{aligned}$$

Em todos casos, denote por $(FH_\omega\omega)^{S_n}$ este módulo induzido em S_n . Uma vez que $\mathcal{P}_{n,2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3, l(\omega))$ está contido em $W_2^{\tau\epsilon}(l(\omega))$ e sempre vale que

$$\dim(FH_\omega\omega)^{S_n} = \#\mathcal{P}_{n,2}^{\tau}(\mathcal{U}_3, l(\omega)) = \dim W_2^{\tau\epsilon}(l(\omega))$$

segue que ambos S_n -módulos coincidem.

Agora basta considerar todas estruturas $l \in \Lambda_{n,2}^{\tau\epsilon}$ e somar as componentes de $W_2^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$ associadas a cada l para obter

$$\begin{aligned} W_2^{\tau\epsilon} &\cong_{S_n} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,2}^1} ([l_1 - 1, 1] \otimes [l_2 - 1, 1])^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,2}^\tau} ([l_1] \otimes [l_2 - 1, 1])^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,2}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1] \otimes [l_2])^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,2}^{\tau\epsilon}} ([l_1] \otimes [l_2])^{S_n} \end{aligned}$$

Um problema imediato é que $W_1^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$ não é um S_n -módulo. Isso porque ao permutar termos de um comutador podem ocorrer situações como

$$[x_2^\alpha, x_1, x_4, x_3] = [x_2^\alpha, x_1, x_3, x_4] + [x_2^\alpha, x_1][x_4, x_3] + [x_3, x_4][x_2^\alpha, x_1].$$

De modo geral, somente quando uma permutação age em um produto de $m-1$ comutadores é que esses produtos de dois comutadores que surgem podem ser descartados pela identidade ordinária de $\mathcal{U}_m$.

Um caminho para lidar com $W_1^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$ é observar que os cosets de seus elementos formam um S_n -submódulo de $\Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)/W_2^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$. Este S_n -submódulo será denotado por $\overline{W_1^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)}$. Nesse sentido, considere $\bar{\omega} \in \overline{W_1^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)}$.

Como antes é necessário fixar o índice j de $\|\bar{\omega}\|$. Ou seja, $H_{\bar{\omega}}$ é isomorfo à $S_j \times S_{\{1, \dots, \hat{j}, \dots, n\}}$ que age trivialmente em $\bar{\omega}$ devido à ordenação das variáveis em um nsc. Consequentemente a branching rule garante mais uma vez que

$$FH_{\bar{\omega}}\bar{\omega} \cong_{H_\omega} [n] \oplus [n-1, 1].$$

Portanto

$$W_1^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3) \cong_{S_n} [[n]] \oplus [[n-1, 1]].$$

#

Lema 2.3.5. Para todo $m \geq 4$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m) &\cong_{S_n} \Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_{m-1}) \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-1} - 1, 1]]^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\tau} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-1} - 1, 1]]^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1}]]^{S_n} \\ &\oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^{\tau\epsilon}} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1}]]^{S_n}. \end{aligned}$$

Demonstração: Essa demonstração nada mais é que uma generalização da anterior. De início, serão feitas as considerações convencionais: $W_{m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ é um S_n -módulo enquanto que, pelo que foi discutido na demonstração anterior, $W_{m-2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ não compartilha dessa propriedade. Entretanto considerando o quociente de $W_{\leq m-2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ por $W_{m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$, é possível considerar a seguinte decomposição em S_n -módulos:

$$\Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m) = \overline{W_{\leq m-2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)} \oplus W_{m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m).$$

Seja $\omega = c_1 \cdots c_{m-1} \in \mathcal{P}_{n,m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$, com $l(\omega) = (l_1, \dots, l_{m-1}) \in \Lambda_{n,m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$. Se L_i é o conjunto de índices envolvidos em c_i , será necessário separar os quatro casos possíveis para l_1 e l_{m-1} ao construir H_ω . Repetindo os mesmos argumentos do lema anterior, são obtidas as seguintes expressões para o H_ω -módulo $FH_\omega\omega$:

1. $l_1 = l_{m-1} = 1$:

$$[[1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[1]]$$

2. $l_1 = 1$ e $l_{m-1} > 1$:

$$[[1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes ([l_{m-1}]] \oplus [[l_{m-1} - 1, 1]])$$

3. $l_1 > 1$ e $l_{m-1} = 1$:

$$([l_1]] \oplus [[l_1 - 1, 1]]) \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[1]]$$

4. $l_1, l_{m-1} > 1$:

$$([l_1]] \oplus [[l_1 - 1, 1]]) \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes ([l_{m-1}]] \oplus [[l_{m-1} - 1, 1]])$$

Induzindo em S_n obtém-se exatamente $W_{m-1}^{\tau\epsilon}(l)$ com $l = l(\omega)$. Considerando todas estruturas $l \in \Lambda_{n,m-1}^{\tau\epsilon}$ e somando as componentes $W_{m-1}^{\tau\epsilon}(l)$ associadas, é possível recuperar a estrutura de $W_{m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$:

$$\begin{aligned} W_{m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} & \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1} - 1, 1]])^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\tau} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1} - 1, 1]])^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1}]])^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^{\tau\epsilon}} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1}]])^{S_n} \end{aligned}$$

Resta somente analisar a componente composta pelos $\tau\epsilon$ -polinômios formados como produtos de no máximo $m - 2$ nscs. Contudo observe que as ações de S_n respectivas a cada módulo, $\overline{W_{\leq m-2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)}$ e $\Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_{m-1})$, agem igualmente (em seus respectivos contextos). Além disso, $\mathcal{P}_{n,\leq m-2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m) = \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_{m-1})$, isto é, a base desses S_n -módulos coincidem. Consequentemente

$$\overline{W_{\leq m-2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)} \cong_{S_n} \Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_{m-1}).$$

Por fim, é suficiente unificar os resultados acima com a redutibilidade completa de $\Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ para obter

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} & \Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_{m-1}) \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-1} - 1, 1]])^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\tau} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-1} - 1, 1]])^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1}]])^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^{\tau\epsilon}} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-1}]])^{S_n}. \end{aligned}$$

#

Lema 2.3.6. Para todo $n \geq 2$,

$$\Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_3) \cong_{S_n} [[n]] \oplus [[n - 1, 1]].$$

Demonstração: Antes de tudo, observe que pela escolha feita para o espaço dos τ -polinômios, $W_1^\tau(\mathcal{U}_3)$ não é um S_n -módulo uma vez que permutações em seus elementos podem fornecer τ -polinômios envolvendo produto de dois comutadores e, módulo $T_L(\mathcal{U}_3)$, tais polinômios são equivalentes a uma combinação linear de elementos de $\mathcal{P}_{n,2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$, isto é, são equivalentes a elementos de $W_2^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$. Para resolver esse problema será utilizada a mesma técnica anterior, porém quocientando por $W_2^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$. Com isso $\Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_3)$ se torna um S_n -módulo composto somente pela componente $W_1^\tau(\mathcal{U}_3)$. Ou seja,

$$\Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_3) = \overline{W_1^\tau(\mathcal{U}_3)}.$$

Considere portanto $\bar{\omega} \in \overline{W_1^\tau(\mathcal{U}_3)}$. Nesse caso os argumentos usados no Lema 2.3.4 para tratar de $W_1^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$ podem ser repetidos para tratar desse caso. Constrói-se $H_{\bar{\omega}}$ exatamente como foi feito lá para se obter

$$\overline{W_1^\tau(\mathcal{U}_3)} \cong_{S_n} [[n]] \otimes [[n-1, 1]].$$

#

A demonstração do próximo resultado é análoga a do lema anterior, com exceção de algumas pequenas adaptações para lidar com situações originadas pelo crescimento na ordem das matrizes.

Lema 2.3.7. *Para todo $m \geq 4$ e $n \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} \Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_{m-1}) \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-2}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]]^{S_n} \\ \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-2}^\tau} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]]^{S_n}. \end{aligned}$$

Demonstração: Neste caso, considere a decomposição

$$\Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_m) = \overline{\overline{W_{\leq m-3}^\tau(\mathcal{U}_m)}} \oplus \overline{W_{m-2}^\tau(\mathcal{U}_m)},$$

em que a barra simples representa o quociente por $W_{m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$ enquanto que a barra dupla representa o quociente por $W_{m-2}^\tau(\mathcal{U}_m) \oplus W_{m-1}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_m)$. Desse modo essa descrição se torna uma decomposição em S_n -submódulos de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_m)$.

Agora resta aplicar as técnicas dos lemas anteriores. Considere inicialmente $\bar{\omega} \in \overline{W_{m-2}^\tau(\mathcal{U}_m)}$. É evidente que nesse caso também vale que $\overline{W_{m-2}^\tau(l(\omega))}$ é cíclico e portanto podemos fazer a mesma análise de antes sobre essas componentes. Com isso $FH_{\bar{\omega}}\bar{\omega}$ é um $H_{\bar{\omega}}$ -módulo isomorfo à

1. Se $l_1 = 1$:

$$[[1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]].$$

2. Se $l_1 > 1$:

$$([l_1]] \oplus [[l_1 - 1, 1]]) \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]].$$

Induzindo em S_n obtém-se, em cada caso, exatamente $\overline{W_{m-2}^\tau(l(\omega))}$. Agora é suficiente somar as componentes respectivas a cada estrutura $l \in \Lambda_{n,m-1}^\tau$ para obter

$$\begin{aligned} \overline{W_{m-2}^\tau(\mathcal{U}_m)} \cong_{S_n} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-2}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]]^{S_n} \\ \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-2}^\tau} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]]^{S_n}. \end{aligned}$$

Por fim, tratando da última componente $\overline{\overline{W_{\leq m-3}^\tau(\mathcal{U}_m)}}$, uma vez que

- a ação de S_n em $\overline{\overline{W_{\leq m-3}^\tau(\mathcal{U}_m)}}$ coincide com a ação de S_n em $\Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_{m-1})$ módulo $W_{m-2}^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_{m-1}) \cap T_L(\mathcal{U}_{m-1})$,
- $\mathcal{P}_{n, \leq m-3}^\tau(\mathcal{U}_m) = \mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_{m-1})$, que são bases para esses espaços,

é possível concluir que

$$\overline{\overline{W_{\leq m-3}^\tau(\mathcal{U}_m)}} \cong_{S_n} \Gamma_n^\tau(\mathcal{U}_{m-1}).$$

Consequentemente segue o resultado. #

Os próximos resultados podem ser demonstrados com argumentos idênticos aos anteriores. A única diferença é que no caso de um τ -polinômio foi analisado mais detalhadamente o primeiro nsc enquanto que no caso de ϵ -polinômios é suficiente fazer a mesma análise no último nsc, que carregará a variável diferencial envolvendo a derivação ϵ .

Esta idéia também pode ser visualizada nos lemas anteriores tratando dos $\tau\epsilon$ -polinômios. Por isso, para evitar repetições tediosa, serão omitidas as demonstrações dos lemas seguintes.

Lema 2.3.8. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\Gamma_n^\epsilon(\mathcal{U}_3) \cong_{S_n} [[n]] \oplus [[n-1, 1]].$$

Lema 2.3.9. *Para todo $m \geq 4$ e $n \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \Gamma_n^\epsilon(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} & \Gamma_n^\epsilon(\mathcal{U}_{m-1}) \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, m-2}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-2} - 1, 1]]^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, m-2}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [[l_{m-3} - 1, 1]] \otimes [[l_{m-2}]]^{S_n}. \end{aligned}$$

A partir dos resultados anteriores, é possível descrever, módulo identidades diferenciais de $\mathcal{U}_m$, a estrutura como S_n -módulo do espaço dos polinômios multilineares próprios. De início, considere o caso $m = 3$.

Teorema 2.3.1. *A estrutura de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_3)$ como S_n -módulo é dada por*

$$\begin{aligned} \Gamma_0^L(\mathcal{U}_3) & \cong F, \\ \Gamma_1^L(\mathcal{U}_3) & \cong_{S_1} 4 \cdot [[1]], \end{aligned}$$

E quando $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Gamma_n^L(\mathcal{U}_3) \cong_{S_n} & 4 \cdot [[n]] \oplus 3 \cdot [[n-1, 1]] \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]]^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes [[l_2]]^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^\tau} ([l_1]] \otimes [[l_2 - 1, 1]]^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n, 2}^{\tau\epsilon}} ([l_1]] \otimes [[l_2]]^{S_n}. \end{aligned}$$

Demonstração: Tratando-se de polinômios próprios é óbvio que, para todo $m \geq 3$,

$$\Gamma_0^L(\mathcal{U}_m) \cong F.$$

Já no espaço $\Gamma_1^L(\mathcal{U}_3)$ as possibilidades são maiores uma vez que variáveis puramente diferenciais são concebidas como nsc's de tamanho 1. Portanto

$$\Gamma_1^L(\mathcal{U}_3) = \bigoplus_{\alpha \in \{\tau, \epsilon, \delta, \tau\epsilon\}} Fx^\alpha$$

e o mesmo fato continua valendo para $m \geq 3$. Quando $n \geq 2$, o corolário 2.2.1 junto com a discussão da seção anterior garantem que

$$\mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_3) \cup \mathcal{P}_n^\delta(\mathcal{U}_3) \cup \mathcal{P}_n^\tau(\mathcal{U}_3) \cup \mathcal{P}_n^\epsilon(\mathcal{U}_3) \cup \mathcal{P}_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_3)$$

é uma base de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_3)$ como F -espaço vetorial. Portanto, para descrever $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_3)$ em S_n -submódulos irredutíveis é suficiente olhar para os lemas anteriores que tratam do caso $m = 3$.

Neste caso, vale destacar ainda que tanto a discussão da seção 2.2 quanto o Lema 2.3.2 evidenciam que $\mathcal{P}_n^1(\mathcal{U}_3) = \emptyset$. Ou seja, devido à identidade (2.6), há somente polinômios puramente diferenciais em $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_3)$.

#

Teorema 2.3.2. *Para todo $m \geq 4$ e $n \geq 2$,*

$$\begin{aligned} \Gamma_n^L(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} & \Gamma_n^L(\mathcal{U}_{m-1}) \oplus \left(\bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-3}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-3} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus 2 \left(\bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-2}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-2} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-1} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^2 \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-k}^\tau} ([l_1]] \otimes [l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-k} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^2 \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-k}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-k-1}, 1]] \otimes [l_{m-k}]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^{\tau\epsilon}} ([l_1]] \otimes [l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [l_{m-1}]] \right)^{S_n}. \end{aligned}$$

Demonstração: Esse resultado é consequência direta de todos resultados anteriores. #

Vale destacar que, em virtude de $\Gamma_n^{\tau\epsilon}(\mathcal{U}_k)$, com $k \leq 4$, não se encaixar na expressão geral fornecida pelo lema 2.3.5, surge no enunciado desse teorema uma restrição necessária em m . Entretanto, a estrutura de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_4)$ pode ser facilmente recuperada a partir dos lemas desta seção.

Corolário 2.3.3. Para todo $m \geq 4$ e $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Gamma_n^L(\mathcal{U}_m) \cong_{S_n} & 4 \cdot [[n]] \oplus 4 \cdot \left(\bigoplus_{k=1}^{m-3} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_k - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus 3 \cdot \left(\bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-2}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-2} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^1} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-1} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus 2 \left(\bigoplus_{k=2}^{m-2} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^\tau} ([l_1]] \otimes [l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_k - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\tau} ([l_1]] \otimes [l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-1} - 1, 1]] \right)^{S_n} \\ & \oplus 2 \left(\bigoplus_{k=2}^{m-2} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{k-1} - 1, 1]] \otimes [l_k]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{l \in \Lambda_{n,m-1}^\epsilon} ([l_1 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{m-2} - 1, 1]] \otimes [l_{m-1}]] \right)^{S_n} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{k=2}^{m-1} \bigoplus_{l \in \Lambda_{n,k}^{\tau\epsilon}} ([l_1]] \otimes [l_2 - 1, 1]] \otimes \cdots \otimes [l_{k-1} - 1, 1]] \otimes [l_k]] \right)^{S_n}. \end{aligned}$$

Demonstração: Obviamente basta unir ao teorema anterior as expressões de $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_3)$ e $\Gamma_n^L(\mathcal{U}_4) \setminus \Gamma_n^L(\mathcal{U}_3)$ fornecida nos lemas anteriores. #

Para finalizar, serão calculadas a n -ésima codimensão diferencial e o PI-exponente diferencial de $\mathcal{V}^L(\mathcal{U}_3)$. Em função do corolário 1.3.2 é suficiente calcular a n -ésima codimensão diferencial própria.

Teorema 2.3.3. Seja $\gamma_n^L = \dim \Gamma_n^L(\mathcal{U}_3)$. Então

$$\gamma_n^L = n(n-1)2^{n-2} + 3n + 1, \quad n \geq 0.$$

Demonstração: Esse resultado é uma consequência direta do Teorema 2.3.1. Basta somente calcular as dimensões de cada componente e somar. #

Corolário 2.3.4. A n -ésima codimensão diferencial de $\mathcal{U}_3$ é

$$c_n^L(\mathcal{U}_3) = n(n-1)3^{n-2} + (3n+2)2^{n-1}.$$

Demonstração: Pelo corolário 1.3.2,

$$\begin{aligned} c_n^L(\mathcal{U}_3) &= \binom{n}{0} \gamma_0^L + \binom{n}{1} \gamma_1^L + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \gamma_k^L \\ &= 1 + 4n + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1)2^{k-2} + 3 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Agora basta um pouco de esforço braçal, usando expressões do tipo $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, e as suas derivadas, e substituir depois x convenientemente por 1 ou 2, fazendo as devidas correções. Assim se calculam todas estas somas e se alcança a expressão de $c_n^L(\mathcal{U}_3)$ do enunciado. $\#$

Como consequência desses fatos, prova-se ainda que o PI-expoente diferencial de $\mathcal{U}_3$ coincide com seu PI-expoente ordinário.

Corolário 2.3.5. $\exp^L(\mathcal{U}_3) = 3$.

Como já dito, foi mostrado em ([Gordienko; Kochetov, 2014](#)) que o PI-expoente diferencial sempre existe. Não só isso, nesse mesmo trabalho foi garantido que

$$\exp^L(A) = \exp(A),$$

quando L é uma álgebra de Lie semissimples e de dimensão finita, sendo conjecturado que o resultado continuaria válido sem a hipótese de semissimplicidade.

De fato a conjectura é verdadeira. Este último resultado da tese reforça sua validade uma vez que a álgebra de Lie L considerada aqui é solúvel. Todavia uma prova já foi apresentada e pode ser consultada em ([Rizzo, 2023](#)).

Referências

- Amitsur, A. S.; Levitzki, J. Minimal identities for algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 1, n. 4, p. 449–463, 1950. Citado na página 28.
- Bahturin, Y. *Identical relations in Lie algebras*. [S.l.]: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021. v. 68. Citado na página 38.
- Beidar, K. J.; Martindale, W. S.; Mikhalev, A. A. *Rings with generalized identities*. 1. ed. [S.l.]: Marcel Dekker, 1996. (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 196). ISBN 0824793250. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 34.
- Belov-Kanel, A.; Rowen, L.; Vishne, U. Full exposition of Specht’s problem. *Serdica*, v. 38, p. 313–370, 08 2012. Citado na página 15.
- Berele, A. Cocharacter sequences for algebras with Hopf algebra actions. *Journal of Algebra*, v. 185, n. 3, p. 869–885, 1996. ISSN 0021-8693. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869396903543>. Citado na página 16.
- Birkhoff, G. On the structure of abstract algebras. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 31, n. 4, p. 433–454, 1935. Citado na página 15.
- Brešar, M. *Introduction to noncommutative algebra*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 27.
- Brox, J.; Rizzo, C. *Differential identities of matrix algebras*. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2403.09337>. Citado na página 17.
- Coelho, S. P.; Polcino Milies, C. Derivations of upper triangular matrix rings. *Linear Algebra and its Applications*, v. 187, p. 263–267, 1993. ISSN 0024-3795. Citado na página 35.
- Dehn, M. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlssysteme. *Mathematische Annalen*, v. 85, p. 184–194, 1922. Citado na página 14.
- Di Vincenzo, O. M.; Nardozza, V. On the $*$ -polynomial identities of a class of $*$ -minimal algebras. *Communications in Algebra*, Taylor & Francis, v. 38, n. 8, p. 3078–3093, 2010. Citado na página 38.
- _____. Differential polynomial identities of upper triangular matrices under the action of the two-dimensional metabelian Lie algebra. *Algebras and Representation Theory*, Springer, p. 1–23, 2021. Citado 8 vezes nas páginas 16, 17, 42, 45, 47, 49, 57 e 59.
- Drensky, V. *Free Algebras and PI-Algebras*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2000. (Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona). ISBN 9814021482. Citado 5 vezes nas páginas 19, 28, 31, 56 e 61.
- Drensky, V. S. A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. *Algebra i Logika*, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Acad. Sci., v. 20, n. 3, p. 282–290, 1981. Citado na página 14.

Giambruno, A.; Rizzo, C. Differential identities, 2×2 upper triangular matrices and varieties of almost polynomial growth. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Elsevier, v. 223, n. 4, p. 1710–1727, 2019. Citado na página 16.

Giambruno, A.; Zaicev, M. On codimension growth of finitely generated associative algebras. *Advances in Mathematics*, v. 140, n. 2, p. 145–155, 1998. ISSN 0001-8708. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870898917662>>. Citado na página 16.

_____. Exponential codimension growth of PI algebras: An exact estimate. *Advances in Mathematics*, v. 142, n. 2, p. 221–243, 1999. ISSN 0001-8708. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000187089891790X>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 30.

Gordienko, A. S. Amitsur's conjecture for associative algebras with a generalized Hopf action. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 217, n. 8, p. 1395–1411, 2013. ISSN 0022-4049. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404912003349>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 42.

_____. Asymptotics of H-identities for associative algebras with an H-invariant radical. *Journal of Algebra*, v. 393, p. 92–101, 2013. ISSN 0021-8693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869313003578>>. Citado na página 16.

Gordienko, A. S.; Kochetov, M. V. Derivations, gradings, actions of algebraic groups, and codimension growth of polynomial identities. *Algebras and Representation Theory*, v. 17, p. 539–563, 2014. ISSN 1572-9079. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10468-013-9409-z>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 71.

Kemer, A. Finite basis property of identities of associative algebras. *Algebra and Logic*, Springer, v. 26, n. 5, p. 362–397, 1987. Citado na página 15.

Kemer, A. R. Varieties of finite rank. In: *Proc. 15-th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsk*. [S.l.: s.n.], 1979. v. 2, p. 73. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 30.

_____. *Ideals of identities of associative algebras*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1991. Citado na página 15.

Kharchenko, V. K. Differential identities of prime rings. *Algebra and Logic*, Springer, v. 17, n. 2, p. 155–168, 1978. Citado na página 16.

_____. Differential identities of semiprime rings. *Algebra and Logic*, Springer, v. 18, n. 1, p. 58–80, 1979. Citado na página 16.

_____. *Automorphisms and derivations of associative rings*. 1. ed. [S.l.]: Kluwer, 1991. (Mathematics and its Applications). ISBN 0792313828; 9780792313823. Citado na página 16.

Krakowski, D.; Regev, A. The polynomial identities of the Grassman algebra. *Transactions of the American mathematical Society*, JSTOR, p. 429–438, 1973. Citado na página 14.

Latyshev, V. N. On the choice of basis in a T-ideal. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Acad. Sci., v. 4, n. 5, p. 1122–1127, 1963. Citado na página 14.

- Mal'tsev, Y. N. Basis for identities of the algebra of upper triangular matrices. *Algebra and Logic*, Springer, v. 10, n. 4, p. 242–247, 1971. Citado na página 14.
- Nardoza, V. Differential polynomial identities of upper triangular matrices of size three. *Linear Algebra and its Applications*, v. 663, p. 142–177, 2023. ISSN 0024-3795. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379523000071>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 44 e 48.
- Neumann, B. H. Identical relations in groups. *Mathematische Annalen*, v. 114, p. 506–525, 1937. Citado na página 15.
- Razmyslov, Y. P. The existence of a finite basis for the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic zero. *Algebra i Logika*, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Acad. Sci., v. 12, n. 1, p. 83–113, 1973. Citado na página 14.
- _____. *Identities of algebras and their representations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1994. Citado na página 14.
- Regev, A. Existence of identities in $A \otimes B$. *Israel Journal of Mathematics*, Springer, v. 11, p. 131–152, 1972. Citado na página 15.
- Rizzo, C. The Grassmann algebra and its differential identities. *Algebras and Representation Theory*, Springer, v. 23, n. 1, p. 125–134, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 16, 36 e 42.
- _____. Differential codimensions and exponential growth. *Linear Algebra and its Applications*, v. 675, p. 294–311, 2023. ISSN 0024-3795. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379523002525>>. Citado na página 71.
- Specht, W. Gesetze in Ringen. I. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 52, n. 1, p. 557–589, 1950. Citado na página 14.
- Swan, R. G. An application of graph theory to algebra. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 14, n. 3, p. 367–373, 1963. Citado na página 28.
- _____. Correction to “an application of graph theory to algebra”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 21, n. 2, p. 379–380, 1969. Citado na página 28.
- Wagner, W. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme. *Mathematische Annalen*, v. 113, p. 528–564, 1937. Citado na página 14.