

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LUCAS SANTOS CARDOZO DE SÁ

**O Método de Cálculo de Potência em Matrizes
de Leslie e o Sistema Fundamental de Fibonacci:
Uma Análise Comparativa**

Campinas

2024

Lucas Santos Cardozo de Sá

O Método de Cálculo de Potência em Matrizes de Leslie e o Sistema Fundamental de Fibonacci: Uma Análise Comparativa

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Uni-
versidade Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientadora: Elen Viviani Pereira Spreafico

Coorientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão
final da Tese defendida pelo aluno Lu-
cas Santos Cardozo de Sá e orientada
pela Profa. Dra. Elen Viviani Pereira
Spreafico.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Sa11m Sá, Lucas Santos Cardozo de, 1992-
O método de cálculo de potência em matrizes de Leslie e o sistema fundamental de Fibonacci : uma análise comparativa / Lucas Santos Cardozo de Sá. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Elen Viviani Pereira Spreafico.
Coorientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Matriz de Leslie. 2. Diagonalização de matrizes de Leslie. 3. Diferenças finitas. I. Spreafico, Elen Viviani Pereira, 1986-. II. Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de, 1962-. III. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: The power calculation method in Leslie matrices and the fundamental Fibonacci system : a comparative analysis

Palavras-chave em inglês:

Leslie matrix

Diagonalization of Leslie matrices

Finite differences

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Elen Viviani Pereira Spreafico [Orientador]

José Plínio de Oliveira Santos

Carlile Campos Lavor

Michael Macedo Diniz

Mustapha Rachidi

Data de defesa: 14-08-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-2936-5578>

- Currículo Lattes do autor: <https://lattes.cnpq.br/2090030943618434>

**Tese de Doutorado defendida em 14 de agosto de 2024 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO

Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof(a). Dr(a). CARLILE CAMPOS LAVOR

Prof(a). Dr(a). MICHAEL MACEDO DINIZ

Prof(a). Dr(a). MUSTAPHA RACHIDI

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço à Professora Doutora Elen Viviani Pereira Spreafico, minha orientadora e ao Professor Doutor Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira, meu coorientador, pelo suporte acadêmico, paciência e valiosas sugestões que enriqueceram este estudo. Sua orientação foi essencial para o meu crescimento profissional e acadêmico.

Agradeço também aos membros da banca examinadora, Professores Doutores Mustapha Rachidi, João Frederico da Costa Azevedo Meyer, José Plínio de Oliveira Santos, Michael Diniz e Carlile Campos Lavor pelas importantes contribuições, sugestões e críticas construtivas que enriqueceram este trabalho e ajudaram a aprimorar suas qualidades acadêmicas.

Por fim, expresso minha gratidão ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo número 140787/2020-8, pelo suporte financeiro, o que viabilizou a realização deste estudo.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta pesquisa, meu sincero agradecimento.

Resumo

Essa tese explora a análise computacional de matrizes de Leslie por meio da diagonalização de matrizes e do método das diferenças finitas. Dividida em quatro capítulos, a primeira seção estabelece as bases ao revisar conceitos-chave da diagonalização de matrizes e resolver recorrências no formato generalizado de Fibonacci. Os capítulos dois e três adentram as fundações teóricas para calcular as potências da matriz de Leslie e o caso assintótico usando diagonalização de matrizes e diferenças finitas, respectivamente. O quarto capítulo apresenta simulações comparativas entre os dois métodos, revelando que, nos quatro casos estudados, a diagonalização de matrizes consistentemente apresentou tempos de processamento menores do que o método das diferenças finitas. Apesar da eficiência computacional da diagonalização de matrizes, as diferenças finitas se mostraram eficazes em resolver casos específicos.

Palavras-chave: Matriz de Leslie. Diagonalização de matrizes de Leslie. Diferenças finitas.

Abstract

This thesis exploits the computational analysis of Leslie matrices through matrix diagonalization and the finite differences method. Divided into four chapters, the first section lays the groundwork by revisiting key concepts of matrix diagonalization and solving recurrences in the generalized Fibonacci format. Chapters two and three delve into the theoretical foundations for computing Leslie matrix powers and the asymptotic case using matrix diagonalization and finite differences, respectively. The fourth chapter presents comparative simulations between the two methods, revealing that, in the four studied cases, matrix diagonalization consistently exhibited shorter processing times than the finite differences method. Despite the computational efficiency of matrix diagonalization, finite differences proved effective in solving specific cases.

Keywords: Leslie Matrix. Diagonalization of Leslie Matrix. Finite differences.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comportamento da função $q(\lambda)$ para $\lambda > 0$	38
Figura 2 – Crescimento populacional - exemplo 1	49
Figura 3 – Proporção populacional ao longo do tempo.	57
Figura 4 – Simulação do cálculo \mathbb{L}^n com $r = 5$ e $n = 10$	65
Figura 5 – Distribuição da população de <i>muriquis</i> ao passar de quatro décadas . . .	67
Figura 6 – Distribuição da população de <i>baboons</i> ao passar de quatro décadas . . .	67
Figura 7 – Distribuição da população de <i>blues</i> ao passar de quatro décadas	68
Figura 8 – Distribuição da população de <i>chimpanzees</i> ao passar de quatro décadas	68
Figura 9 – Distribuição da população de <i>gorillas</i> ao passar de quatro décadas . . .	69
Figura 10 – Distribuição da população de <i>sifakas</i> ao passar de quatro décadas . . .	70
Figura 11 – Distribuição da população de <i>capuchins</i> ao passar de quatro décadas .	70
Figura 12 – Proporção de indivíduos ao longo do tempo.	74

Lista de tabelas

Tabela 1	– Valores obtidos através da aplicação do método de Newton-Raphson.	56
Tabela 2	– Tempo de processamento para o cálculo de \mathbb{L}^n	64
Tabela 3	– Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 = 1$	72
Tabela 4	– Dados estatísticos de acordo com a idade de uma população de ovelhas fêmeas - fonte: (CAUGHLEY, 1967)	73
Tabela 5	– Coeficientes de sobrevivência p e reprodução f	73
Tabela 6	– Comportamento assintótico da proporção de indivíduos por faixa etária.	74
Tabela 7	– Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 \neq 1$	75
Tabela 8	– Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 = 1$ e $d > 1$	75
Tabela 9	– Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 \neq 1$ e $d > 1$	76

Lista de Algoritmos

Algoritmo 1 – Cálculo da potência de uma matriz de Leslie através de sua matriz diagonal.	63
Algoritmo 2 – Cálculo da potência de uma matriz de Leslie através da equação de Fibonacci generalizada.	63
Algoritmo 3 – Cálculo do comportamento assintótico da potência de uma matriz de Leslie através de sua matriz diagonal.	81
Algoritmo 4 – Cálculo do comportamento assintótico da potência de uma matriz de Leslie através da equação de Fibonacci generalizada.	83

Lista de Códigos-fonte

Código-fonte 1 – Código utilizado para o cálculo de potência de matrizes de Leslie por distintos métodos	84
Código-fonte 2 – Código utilizado para o cálculo do comportamento assintótico de matrizes de Leslie através de sua matriz diagonal	88
Código-fonte 3 – Código utilizado para o cálculo do comportamento assintótico das matrizes de Leslie através das equações de Fibonacci generalizada	92

Sumário

	Introdução	14
1	CONCEITOS BÁSICOS	16
1.1	Diagonalização de matrizes e a Forma Canônica de Jordan	16
1.2	Equação de Recorrências	23
1.2.1	Recorrência linear homogênea de 1ª ordem com coeficientes constantes	23
1.2.2	Recorrência linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes	24
1.2.3	Recorrência linear de ordem superior com coeficientes constantes	29
2	MODELO DE LESLIE	32
2.1	Matriz diagonal associada com a matriz de Leslie	35
2.1.1	Comportamento assintótico	43
3	ESTUDO DO MODELO DE LESLIE ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS	46
3.1	Equação de Fibonacci generalizada	46
3.1.1	Comportamento assintótico	51
4	COMPARAÇÃO NUMÉRICA DE MÉTODOS: ABORDAGENS POR DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZ E PELA EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS	62
4.1	Simulação do cálculo de \mathbb{L}^n para $n \in \mathbb{N}$	62
4.2	Simulação do comportamento assintótico	71
4.2.1	Caso 1: $\lambda_1 = 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$	71
4.2.2	Caso 2: $\lambda_1 \neq 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$	72
4.2.3	Caso 3: $\lambda_1 = 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = d > 1$	75
4.2.4	Caso 4: $\lambda_1 \neq 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = d > 1$	76
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICE A – ALGORITMO UTILIZADO PARA DETERMINAR O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO ATRAVÉS DA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES	80

APÊNDICE B – ALGORITMO UTILIZADO PARA DETERMINAR O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DE FIBONACCI GENERALIZADA	82
APÊNDICE A – CÓDIGO EM OCTAVE DO CÁLCULO DA POTÊNCIA DE MATRIZES DE LESLIE POR DISTINTOS MÉTODOS	84
APÊNDICE B – CÓDIGO EM OCTAVE DO CÁLCULO DO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA POTÊNCIA DE UMA MATRIZ DE LESLIE ATRAVÉS DE SUA MATRIZ DIAGONAL	88
APÊNDICE C – CÓDIGO EM OCTAVE DO CÁLCULO DO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DA POTÊNCIA DE UMA MATRIZ DE LESLIE ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DE FIBONACCI GENERALIZADA . .	92

Introdução

Ao longo da história, a compreensão e modelagem das dinâmicas populacionais têm sido um desafio incessante, instigando a busca por ferramentas matemáticas capazes de capturar a complexidade desses sistemas. Nesse contexto, destaca-se o Modelo de Leslie, um modelo concebido por Patrick Leslie em 1945 ([LESLIE, 1945](#)), um demógrafo britânico cujo trabalho pioneiro revolucionou a forma como entendemos o crescimento populacional. Leslie propôs um sistema matricial para descrever o processo de reprodução e envelhecimento em populações, estabelecendo uma ponte entre a biologia e a álgebra linear. Essa abordagem inovadora proporcionou uma maneira sistemática de analisar e prever as mudanças na distribuição etária de uma população ao longo do tempo.

Para realizar essa análise, são considerados dois métodos. Empregando os princípios da álgebra linear, opta-se pelo método da diagonalização de matrizes mediante a decomposição de Jordan. Outra abordagem é o método das diferenças finitas, o qual é minuciosamente delineado nos artigos mencionados em ([BENTAHHER et al., 2021](#); [BENTAHHER; NAASSI; RACHIDI, 2017](#)). Este método, fundamentado nos conceitos de recorrência, particularmente nas recorrências generalizadas de Fibonacci, é empregado com o propósito de proporcionar uma solução direta e eficaz para o problema em questão.

O intuito fundamental deste trabalho é realizar uma comparação numérica entre esses dois métodos. Essa análise pode ser encontrada em ([ALOUJ; RACHIDI; WAHBI, 2021](#); [ALOUJ; RACHIDI, 2010](#)) para o método das diferenças finitas. Buscamos determinar as vantagens e desvantagens inerentes ao uso de cada abordagem, proporcionando uma análise criteriosa que contribua para a compreensão aprofundada do problema em estudo e oriente a escolha do método mais adequado em diferentes contextos.

Com o objetivo principal definido, a estrutura deste trabalho está organizada em capítulos, conforme descrito a seguir.

No Capítulo 1, apresentamos fórmulas e conceitos essenciais para uma compreensão mais aprofundada dos tópicos discutidos nos capítulos subsequentes. Este capítulo aborda equações de recorrência e as técnicas de diagonalização e fatoração de matrizes, incluindo a decomposição em matrizes de Jordan.

No Capítulo 2, iniciamos nossa exploração do problema do modelo populacional de Leslie. Começamos com uma visão geral do modelo populacional de Leslie e fornecemos as características gerais da matriz de Leslie associada com este modelo. Em seguida, exploramos a obtenção da potenciação da matriz de Leslie de forma direta e por meio da decomposição de matrizes usando autovalores e autovetores, o que inclui a decomposição de Jordan

No Capítulo 3, abordamos a potenciação da matriz de Leslie de uma perspectiva diferente. Neste capítulo, exploramos a obtenção da potência da matriz de Leslie por meio do uso de equações de recorrência. Ao fazer isso, investigamos uma abordagem alternativa para compreender o comportamento do modelo populacional de Leslie. Esta análise oferece uma visão abrangente das implicações das equações de recorrência na dinâmica do modelo, complementando os métodos apresentados nos capítulos anteriores.

No Capítulo 4, realizamos uma comparação completa dos métodos abordados nos capítulos anteriores. Este capítulo apresenta os resultados obtidos por meio de simulações que destacam a eficácia e as limitações de cada abordagem. Além disso, discutimos considerações importantes e exploramos possíveis estratégias para melhorar o desempenho e a eficiência na obtenção de resultados, especialmente em cenários específicos. Esta análise crítica oferece informações valiosas que contribuem para uma compreensão mais profunda do modelo de Leslie e das técnicas usadas em sua análise.

Por fim, as considerações finais são dadas seguidas dos anexos dos códigos desenvolvidos neste trabalho e a bibliografia utilizada.

1 Conceitos básicos

Nesta seção são apresentados os conceitos teóricos que serão utilizados nos capítulos seguintes no cálculo de potenciação de uma matriz de Leslie, atentando apenas ao essencial desses tópicos.

Para o estudo de diagonalização de matrizes e a forma canônica de Jordan é possível consultar (MEYER; STEWART, 2023) e (GOLUB; LOAN, 2013).

Para mais detalhes em relação aos métodos tradicionais de resolução de recorrências podem ser encontrados em (MORGADO; CARVALHO, 2015). Outras abordagens e aplicações são discutidas em (BENTAHER; RACHIDI, 2016) e (SÁ; SPREAFICO, 2020).

1.1 Diagonalização de matrizes e a Forma Canônica de Jordan

Sejam matrizes quadradas A e B , dizemos que A é semelhante a B se existe uma matriz M invertível tal que $A = M^{-1}BM$.

No intuito de calcular potências de matrizes é interessante trabalhar com matrizes diagonalizáveis, ou seja, matrizes que são semelhantes a matrizes diagonais. As matrizes diagonais são matrizes quadradas em que todas as entradas fora da diagonal principal são nulas, representada por $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, onde d_i , com $i = 1, \dots, n$, são as entradas da diagonal principal da matriz.

Note que se A é uma matriz semelhante a uma matriz diagonal D , representada por $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, então existe M invertível tal que $A = M^{-1}DM$, sendo assim:

$$A^k = (M^{-1}DM)^k = M^{-1}DM \cdot M^{-1}DM \cdot \dots \cdot M^{-1}DM \cdot M^{-1}DM = M^{-1}D^kM$$

É possível mostrar por indução que $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$ como apresentado a seguir.

Tomando $k = 1$, verifica-se que $D^1 = D = \text{diag}(d_1^1, \dots, d_n^1)$. Considere agora $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$, para algum $k > 1$, e defina a notação $\{e_1, \dots, e_n\}$ como a base canônica do \mathbb{R}^n , ou seja, e_i é o vetor que a i -ésima entrada é zero e as demais são nulas. Assim:

$$D^{k+1} = D^k \cdot D \Rightarrow D^{k+1} = \begin{bmatrix} d_1^k \cdot e_1^t \\ \vdots \\ d_n^k \cdot e_n^t \end{bmatrix} \cdot [d_1 \cdot e_1 \quad \dots \quad d_n \cdot e_n].$$

Como $e_i^t \cdot e_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$, então

$$D_{k+1} = \begin{bmatrix} d_1^k \cdot d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k \cdot d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \cdot d_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^{k+1} = \begin{bmatrix} d_1^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^{k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^{k+1} \end{bmatrix},$$

concluindo o resultado.

Dessa forma, no intuito de calcular a potência de uma matriz A^k , conhecendo as matrizes M e D tais que $A^k = M^{-1}D^kM$, basta realizar o produto matricial, já que a matriz D^k está bem definida como apresentado anteriormente e a obtenção da matriz invertível M .

Proposição 1. *Se os autovetores de uma matriz quadrada A de ordem n formam uma base de \mathbb{K}^n , onde \mathbb{K} é um corpo, então a matriz A é diagonalizável.*

Considere a base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{K}^n , formada pelos autovetores de A . Definindo a matriz $M = [v_1 \ \dots \ v_n]$, note que essa matriz é invertível, pois suas colunas são formadas por um conjunto de vetores linearmente independentes, pois formam uma base. Com isso,

$$M^{-1}AM = M^{-1}A[v_1 \ \dots \ v_n] = M^{-1}[Av_1 \ \dots \ Av_n]$$

Como v_k , com $k = 1, \dots, n$ são autovetores de A , então $Av_k = \lambda_k v_k$, assim:

$$M^{-1}AM = M^{-1}[\lambda_1 v_1 \ \dots \ \lambda_n v_n] = M^{-1}M \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

concluindo que A é diagonalizável.

Teorema 1. *Seja A uma matriz tal que todos seus autovalores são distintos, então A é diagonalizável.*

Considere o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de autovetores de A , vamos mostrar que esse conjunto é linearmente independente e, conseqüentemente, base do corpo \mathbb{K}^n . Permitindo concluir pela proposição 1 que A é diagonalizável.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

Aplicando a matriz A em ambos lados da equação:

$$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = A \cdot \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n = \mathbf{0}$$

Realizando esse processo $n - 1$ vezes, o seguinte sistema de equações é gerado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 \\ \alpha_2 v_2 \\ \vdots \\ \alpha_n v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Note que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde e

seu determinante, demonstrado em (BUCK; COLEY; ROBBINS, 1992), é dado por

$$\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0,$$

pois $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$, pois os autovalores de A são todos distintos. Como o determinante da matriz é diferente de zero, a matriz é invertível, assim:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 \\ \alpha_2 v_2 \\ \vdots \\ \alpha_n v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 \\ \alpha_2 v_2 \\ \vdots \\ \alpha_n v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Logo, $\alpha_k v_k = \mathbf{0}$, para $k = 1, \dots, n$, e como v_k é um autovalor, $v_k \neq \mathbf{0}$, concluindo que $\alpha_k = 0$, para $k = 1, \dots, n$ e, conseqüentemente, que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente, finalizando a demonstração.

Exemplo 1. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, determine as entradas da matriz A^n , para $n \in \mathbb{N}$.

Os autovalores de A são dados por:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} -1 - \lambda & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Aplicando o Teorema de Laplace para determinantes utilizando a primeira coluna da matriz, segue

$$(-1)^{1+1} \cdot (-1 - \lambda) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 2 & -2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

Note que a nova matriz que surge na equação é uma matriz triangular inferior e seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal, assim

$$\begin{aligned} (-1)^2 \cdot (-1 - \lambda) \cdot (1 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -1, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 3. \end{aligned}$$

O autoespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor $\lambda = -1$ é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 - (-1) & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 - (-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (-1) & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 - (-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e $x_1 \in \mathbb{R}$, assim:

$$V(\lambda = -1) = \{(x, 0, 0, 0); x \in \mathbb{R}\},$$

e conseqüentemente uma escolha particular de autovetor associado com o autovalor $\lambda = -1$ é dado por $v_1 = (1, 0, 0, 0)$.

De forma análoga, para $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear, o autoespaço gerado é dado por:

$$V(\lambda = 1) = \{(0, x, y, y - x); x, y \in \mathbb{R}\},$$

e os respectivos autovetores particulares são dados por $v_2 = (0, 1, 0, -1)$ e $v_3 = (0, 0, 1, 1)$.

Por fim, pelo mesmo procedimento determina-se o autoespaço associado com $\lambda = 3$:

$$V(\lambda = 3) = \{(x, 0, 0, x); x \in \mathbb{R}\},$$

e seu autovetor particular $v_4 = (1, 0, 0, 1)$.

Logo, é possível reescrever a matriz A como

$$A = M \cdot D \cdot M^{-1},$$

onde $D = \text{diag}(-1, 1, 1, 3)$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e M^{-1} é a matriz inversa de M .

Após calcular a matriz M^{-1} a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Consequentemente, a matriz A^n é calculada como segue:

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} + 3^n & (-1)^n - 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3^n - 1 & 1 - 3^n & 3^n \end{bmatrix}$$

O cálculo de potência de matrizes diagonalizáveis pode ser feito como apresentado, porém nem todas as matrizes são diagonalizáveis. Para essas matrizes é possível utilizar a decomposição através da forma canônica de Jordan, que generaliza o estudo das matrizes diagonalizáveis.

Um bloco de Jordan $J_s(\lambda)$ é a matriz de tamanho $s \times s$ definida por:

$$J_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Uma matriz J em que é possível escrever como uma matriz diagonal por blocos de Jordan é chamada de matriz de Jordan e apresenta a seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{s_1}(\lambda_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{s_2}(\lambda_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & J_{s_n}(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Teorema 2. *Toda matriz quadrada A é semelhante a uma matriz de Jordan J e J é única a menos de permutações de seus blocos.*

A demonstração do teorema e informações adicionais com respeito a decomposição de Jordan e assuntos de álgebra linear necessários para o entendimento da demonstração são encontradas em (STRANG, 1980).

Exemplo 2. *Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine P invertível e a matriz de Jordan J tal que $J = P^{-1}AP$.*

Determinando os autovalores de A :

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda) + 2(1 - \lambda) - (1 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda)(-1 + \lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

Determinando os autovetores de A associados com os autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, respectivamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1+L_2 \rightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Da primeira equação:

$$x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$$

Da segunda equação:

$$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_2$$

Logo, o autoespaço associado com o autovalor $\lambda = 0$ é dado por $V(\lambda = 0) = \{(-2x_2, x_2, -x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}$ e, conseqüentemente, um autovetor associado com este autovalor é o vetor $(2, -1, 1)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Da primeira equação:

$$x_2 = 0$$

Da segunda equação:

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1$$

Logo, o autoespaço associado com o autovalor $\lambda = 1$ é dado por $V(\lambda = 1) = \{(x_1, 0, x_1) | x_1 \in \mathbb{R}\}$ e, conseqüentemente, um autovetor associado com este autovalor é o vetor $(1, 0, 1)$.

Note que a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = 0$ é igual a dois, enquanto sua multiplicidade geométrica é igual a um (número de blocos de Jordan associado com esse autovalor), ou seja, a matriz não é diagonalizável.

Seja $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ tal que $J = P^{-1}AP$, onde J é a matriz de Jordan, então:

$$A[v_1 \ v_2 \ v_3] = [v_1 \ v_2 \ v_3]J \Rightarrow [Av_1 \ Av_2 \ Av_3] = [v_1 \ v_2 \ v_3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Av_1 = 0 \\ Av_2 = v_1 \\ Av_3 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (Av_1 - 0 \cdot I_3) = 0 \\ A^2v_2 = Av_1 \\ (Av_3 - 1 \cdot I_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (Av_1 - 0 \cdot I_3) = 0 \\ A^2v_2 = 0 \\ (Av_3 - 1 \cdot I_3) = 0 \end{cases}$$

Note que v_1 e v_3 são os autovetores associados com os autovalores $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, respectivamente, ou seja, $v_1 = (2, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$, sendo necessário determinar apenas v_2 .

$$A^2v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira equação:

$$-x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_3$$

Logo, o autoespaço associado $\{(2x_3, x_2, x_3) | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ e, conseqüentemente, os vetores associados são $(2, -1, 1)$ e $(0, 1, 0)$.

Com isso, é possível concluir que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} P,$$

onde $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Com isso, para matrizes A não diagonalizáveis é possível utilizar a forma de Jordan para o cálculo de A^n . É importante perceber que para $A = PJP^{-1}$, onde J é uma matriz de Jordan, ao avaliar a potência é obtido $A^n = PJ^nP^{-1}$, sendo assim necessário o cálculo de J^n . Esse cálculo pode ainda ser mais interessante do que o cálculo direto A^n , pois J é uma matriz esparsa, ou seja, muitas de suas entradas são nulas.

1.2 Equação de Recorrências

Uma sequência de números reais definida pela equação

$$v_{n+k} = f(n, v_{n+k-1}, v_{n+k-2}, \dots, v_n) + h(n) \quad (1.1)$$

onde f, h são funções reais e $n \in \mathbb{N}$, é chamada de sequência recorrente e a expressão (1.1) é conhecida como relação de recorrência.

As recorrências podem ser classificadas como homogêneas, quando $h(n) = 0$, ou não homogêneas caso contrário. Uma outra classificação para as recorrências é com respeito a sua linearidade, podendo ser lineares ou não lineares.

Uma recorrência é dita linear se a equação (1.1) apresenta a seguinte forma:

$$v_{n+k} = f_1(n)v_{n+k-1} + f_2(n)v_{n+k-2} + \dots + f_k(n)v_n + h(n) \quad (1.2)$$

Neste trabalho as recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes são abordadas, ou seja, as funções f_j são dadas por $f_1(n) = a_1, f_2(n) = a_2, \dots, f_k(n) = a_k$, com $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $h(n) = 0$, assim a equação (1.2) é reescrita como

$$v_{n+k} = a_1 \cdot v_{n+k-1} + a_2 \cdot v_{n+k-2} + \dots + a_k \cdot v_n \quad (1.3)$$

Neste trabalho, resolver uma recorrência consistirá em determinar uma fórmula fechada capaz de fornecer o termo v_n da sequência em função apenas da variável n .

As diferentes formas de resolver a Equação (1.3) são tratadas a seguir de acordo com a ordem k da relação de recorrência.

1.2.1 Recorrência linear homogênea de 1ª ordem com coeficientes constantes

As recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de 1ª ordem são dadas por:

$$v_{n+1} = a_1 \cdot v_n$$

Considere os valores dos termos da sequência para $n = 1, 2, \dots, N - 1$.

$$\begin{aligned} v_2 &= a_1 \cdot v_1 \\ v_3 &= a_1 \cdot v_2 \\ &\vdots \\ v_N &= a_1 \cdot v_{N-1} \end{aligned}$$

Realizando o produtório das equações, tem-se:

$$v_N = a_1^{N-1} \cdot v_1 \quad (1.4)$$

Essa relação pode ser verificada para $n \geq 2$ utilizando o princípio da indução finita. Note que para $n = 2$, a equação (1.4) é verificada, pois utilizando a definição da recorrência tem-se que $v_2 = a_1 \cdot v_1$.

Agora, supondo $v_n = a_1^{n-1} \cdot v_1$ verdadeira, é possível concluir a demonstração utilizando respectivamente a definição da recorrência e a hipótese de indução como segue:

$$v_{n+1} = a_1 \cdot v_n = a_1 \cdot (a_1^{n-1} \cdot v_1) = a_1^n \cdot v_1$$

Exemplo 3. *Determine a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica de razão $q = 2$ e primeiro termo $v_1 = 1$.*

Uma progressão geométrica é uma sequência recorrente em que o termo seguinte é obtido pelo produto entre o termo anterior v_n e a razão q , assim:

$$v_{n+1} = v_n \cdot q$$

Note que a recorrência que representa o termo geral de uma progressão geométrica é uma recorrência linear de primeira ordem com coeficiente constante, podendo assim ser solucionada através da Equação (1.4), logo a fórmula fechada para obter o termo geral dessa progressão geométrica é dada por:

$$v_n = 2^{n-1} \cdot 1 \Rightarrow v_n = 2^{n-1}$$

1.2.2 Recorrência linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes

As recorrências deste tipo apresentam a seguinte forma:

$$v_{n+2} = a_1 \cdot v_{n+1} + a_2 \cdot v_n \quad (1.5)$$

A equação (1.5) está associada com uma equação polinomial de segunda ordem conhecida como equação característica dada por:

$$\lambda^2 - a_1 \cdot \lambda - a_2 = 0$$

As raízes da equação característica são utilizados na obtenção da solução da Equação (1.5), podendo assim dividir o estudo deste problema nos casos $\Delta \neq 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$, onde Δ é o discriminante da equação de segundo grau associada.

Teorema 3 (Equação característica com $\Delta \neq 0$). *Sejam λ_1 e λ_2 as raízes da equação característica associada a recorrência (1.5), a solução da recorrência é dada por*

$$v_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n, \quad (1.6)$$

onde C_1 e C_2 são constantes obtidas de acordo com as condições de contorno da recorrência.

Para mostrar que (1.6) é de fato solução da recorrência (1.5), basta substituir os valores para verificar que a relação satisfaz a equação. Sendo assim:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot v_{n+1} + a_2 \cdot v_n &= a_1 \cdot (C_1 \cdot \lambda_1^{n+1} + C_2 \cdot \lambda_2^{n+1}) + a_2 \cdot (C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n) \\ &= C_1 \lambda_1^n \cdot (a_1 \lambda_1 + a_2) + C_2 \lambda_2^n \cdot (a_1 \lambda_2 + a_2) \\ &= C_1 \lambda_1^n \cdot (\lambda_1^2 - \lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2) + C_2 \lambda_2^n \cdot (\lambda_2^2 - \lambda_2^2 + a_1 \lambda_2 + a_2) \\ &= C_1 \lambda_1^{n+2} - C_1 \lambda_1^n \cdot \underbrace{(\lambda_1^2 - a_1 \lambda_1 - a_2)}_0 + C_2 \lambda_2^{n+2} \\ &\quad - C_2 \lambda_2^n \cdot \underbrace{(\lambda_2^2 - a_1 \lambda_2 - a_2)}_0 \\ &= C_1 \lambda_1^{n+2} + C_2 \lambda_2^{n+2} \\ &= v_{n+2} \end{aligned}$$

Por fim, dado uma solução y_n qualquer, basta mostrar que existem $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tais que $y_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$, ou seja, toda solução da equação (1.5) tal que $\Delta \neq 0$ é descrita pela equação (1.6).

Considere o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = y_1 \\ C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 = y_2 \end{cases}$$

Solucionando o sistema:

$$C_1 = \frac{\lambda_2^2 y_1 - \lambda_2 y_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_1^2 y_1}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)},$$

onde $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pois $\Delta \neq 0$.

Seja agora a sequência dada por $z_n = y_n - (C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n)$, onde C_1 e C_2 são as soluções do sistema linear anterior.

Note que z_n é solução da equação (1.5), pois

$$z_{n+2} - a_1 \cdot z_{n+1} - a_2 \cdot z_n =$$

$$y_{n+2} - (C_1\lambda_1^{n+2} + C_2\lambda_2^{n+2}) - a_1 \cdot y_{n+1} + a_1 \cdot (C_1\lambda_1^{n+1} + C_2\lambda_2^{n+1}) - a_2 \cdot y_n + a_2 \cdot (C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n) =$$

$$\underbrace{y_{n+2} - a_1 \cdot y_{n+1} - a_2 \cdot y_n}_0 - C_1\lambda_1^n \cdot \underbrace{(\lambda_1^2 - a_1\lambda_1 - a_2)}_0 - C_2\lambda_2^n \cdot \underbrace{(\lambda_2^2 - a_1\lambda_2 - a_2)}_0 = 0$$

Logo, $z_{n+2} = a_1 \cdot z_{n+1} + a_2 \cdot z_n$ e, conseqüentemente, $z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que $z_1 = y_1 - (C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2) = 0$ e $z_2 = y_2 - (C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2) = 0$ devido a forma que foi construído as constantes C_1 e C_2 . Assim,

$$z_n = 0 \Rightarrow y_n - (C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n) = 0 \Rightarrow y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

ou seja, se y_n é solução de (1.5) e $\Delta \neq 0$, então y_n pode ser escrita como (1.6), mostrando que toda solução apresenta essa forma.

Exemplo 4. Considerando a seqüência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ e $v_1 = 1$ e $v_2 = 3$, resolva a recorrência linear de ordem dois.

Note que a recorrência $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ é do tipo (1.5), logo tem como equação característica a equação polinomial de segunda ordem dada por:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Resolvendo a equação polinomial é encontrado como solução $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Sendo assim, de acordo com o teorema 3 a solução da recorrência é descrita pela equação (1.6), assim:

$$v_n = C_1 \cdot (1)^n + C_2 \cdot (2)^n \Rightarrow v_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$$

Como $v_1 = 1$ e $v_2 = 3$, então:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 2^1 = 1 \\ C_1 + C_2 \cdot 2^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -1 \quad \text{e} \quad C_2 = 1$$

Dessa forma, é possível concluir que a solução da recorrência $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ é dada pela equação:

$$v_n = 2^n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 4 (Equação característica com $\Delta = 0$). *Seja λ a raiz de multiplicidade dois da equação característica associada a recorrência (1.5), a solução da recorrência é dada por*

$$v_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot n\lambda^n, \quad (1.7)$$

onde C_1 e C_2 são constantes obtidas de acordo com as condições de contorno da recorrência.

De forma análoga ao Teorema 3, utilizando (1.7), segue:

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot v_{n+1} + a_2 \cdot v_n &= a_1 \cdot (C_1 \cdot \lambda^{n+1} + C_2 \cdot (n+1)\lambda^{n+1}) + a_2 \cdot (C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot n\lambda^n) \\
&= C_1 \lambda^n \cdot (a_1 \lambda + a_2) + C_2 \lambda^n \cdot (a_1 \cdot (n+1)\lambda + a_2 \cdot n) \\
&= C_1 \lambda^n \cdot (\lambda^2 - \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) + \\
&\quad C_2 \lambda^n \cdot ((n+2)\lambda^2 - (n+2)\lambda^2 \\
&\quad + a_1 \lambda \cdot (n+2) - a_1 \lambda + a_2 \cdot (n+2) - 2a_2) \\
&= C_1 \lambda^{n+2} - C_1 \lambda^n \cdot \underbrace{(\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2)}_0 + C_2 (n+2) \lambda^{n+2} \\
&\quad - C_2 \cdot (n+2) \lambda^n \cdot \underbrace{(\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2)}_0 - C_2 \lambda^n \cdot \underbrace{(a_1 \lambda + 2a_2)}_0 \\
&= C_1 \lambda^{n+2} + C_2 (n+2) \lambda^{n+2} \\
&= v_{n+2}
\end{aligned}$$

Note que $a_1 \lambda + 2a_2 = 0$, pois dado que $\Delta = 0$, ou seja, $a_1^2 - 4a_2 = 0$ e $\lambda = \frac{-a_1}{2}$, tem-se:

$$a_1 \lambda + 2a_2 = -\frac{a_1^2}{2} + 2a_2 = -\frac{1}{2}(a_1^2 - 4a_2) = 0$$

Por fim, dado uma solução y_n qualquer, basta mostrar que existem $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tais que $y_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot n\lambda^n$, ou seja, toda solução da equação (1.5) tal que $\Delta = 0$ é descrita pela equação (1.7).

Considere o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} C_1 \lambda + C_2 \lambda = y_1 \\ C_1 \lambda^2 + 2C_2 \lambda^2 = y_2 \end{cases}$$

Solucionando o sistema:

$$C_1 = \frac{2\lambda y_1 - y_2}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{y_2 - \lambda y_1}{\lambda^2}$$

Seja agora a sequência dada por $z_n = y_n - (C_1 \lambda^n + C_2 n \lambda^n)$, onde C_1 e C_2 são as soluções do sistema linear anterior.

Note que z_n é solução da equação (1.5), pois

$$\begin{aligned}
&z_{n+2} - a_1 \cdot z_{n+1} - a_2 \cdot z_n = \\
&y_{n+2} - (C_1 \lambda^{n+2} + C_2 (n+2) \lambda^{n+2}) - a_1 \cdot y_{n+1} + a_1 \cdot (C_1 \lambda^{n+1} + C_2 (n+1) \lambda^{n+1}) - a_2 \cdot y_n + a_2 \cdot (C_1 \lambda^n + C_2 n \lambda^n) = \\
&\underbrace{y_{n+2} - a_1 \cdot y_{n+1} - a_2 \cdot y_n}_0 - C_1 \lambda^n \cdot \underbrace{(\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2)}_0 - C_2 n \lambda^n \cdot \underbrace{(\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2)}_0 + C_2 \lambda^n \cdot \underbrace{(2\lambda^2 + a_1 \lambda)}_0 = 0,
\end{aligned}$$

pois como $\Delta = 0$, tem-se que $2\lambda^2 + a_1 \lambda = 2 \cdot \left(\frac{-a_1}{2}\right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{-a_1}{2}\right) = 0$.

Logo, $z_{n+2} = a_1 \cdot z_{n+1} + a_2 \cdot z_n$ e, conseqüentemente, $z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que $z_1 = y_1 - (C_1\lambda + C_2\lambda) = 0$ e $z_2 = y_2 - (C_1\lambda^2 + 2C_2\lambda^2) = 0$ devido a forma que foi construído as constantes C_1 e C_2 . Assim,

$$z_n = 0 \Rightarrow y_n - (C_1\lambda^n + C_2n\lambda^n) = 0 \Rightarrow y_n = C_1\lambda_1^n + C_2n\lambda_2^n,$$

ou seja, se y_n é solução de (1.5) e $\Delta = 0$, então y_n pode ser escrita como (1.7), mostrando que toda solução apresenta essa forma.

Exemplo 5. *Determine a família de funções obtidas ao solucionar a recorrência de segunda ordem $v_{n+2} = 8v_{n+1} - 16v_n$.*

Note que a recorrência $v_{n+2} = 8v_{n+1} - 16v_n$ apresenta a forma da equação (1.5), sendo assim seu polinômio característico é dado por:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

Como $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral dessa recorrência é descrita pelo teorema 4 através da equação (1.7):

$$v_n = C_1 \cdot 4^n + C_2 \cdot n4^n$$

Um caso particular para quando $\Delta \neq 0$ ocorre para $\Delta < 0$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Neste caso, para evitar trabalhar com números complexos é possível reescrever (1.6).

Como o polinômio característico é formado por coeficientes reais, as suas raízes quando complexas são dadas por:

$$\lambda_1 = a + bi \quad \lambda_2 = a - bi,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária.

Utilizando a fórmula de Moivre, para $\lambda = a + bi$, tem-se:

$$\lambda^n = \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \sen(n\theta)),$$

com $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o argumento θ é tal que $\cos(\theta) = \frac{a}{\rho}$ e $\sen(\theta) = \frac{b}{\rho}$.

Assim, a equação (1.6) pode ser reescrita como:

$$v_n = C_1\lambda^n + C_2\lambda^n$$

$$\Rightarrow v_n = C_1 \cdot (\rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \sen(n\theta))) + C_2 \cdot \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i \cdot \sen(n\theta))$$

$$\Rightarrow v_n = \rho^n \cdot ((C_1 + C_2) \cos(n\theta) + i \cdot (C_1 + C_2) \sen(n\theta))$$

Logo, a solução da equação (1.5) quando $\Delta < 0$ é dada por:

$$v_n = \rho^n \cdot (C'_1 \cos(n\theta) + C'_2 \sen(n\theta)) \quad (1.8)$$

Note que as constantes neste caso são diferentes das constantes originais, apresentando a relação $C'_1 = C_1 + C_2$ e $C'_2 = i \cdot (C_1 + C_2)$.

Dessa forma, ao utilizar a equação (1.8) é possível construir uma função que descreve a solução da recorrência sem necessidade de trabalhar com números complexos.

1.2.3 Recorrência linear de ordem superior com coeficientes constantes

Para recorrências de ordem dois ou mais o procedimento é similar, podendo ser generalizado nessa seção. Essas recorrências terão a forma da equação (1.3) para $k \geq 2$.

Para resolver esse tipo de recorrência, será utilizado o polinômio característico associado com a recorrência dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - \dots - a_{k+1}\lambda - a_k \quad (1.9)$$

A solução da recorrência será dada de acordo com as raízes do polinômio associado.

Teorema 5. *Seja $\lambda_1, \dots, \lambda_t$, com respectivas multiplicidades m_1, \dots, m_t , as raízes do polinômio característico associado a recorrência*

$$v_{n+k} = a_1v_{n+k-1} + a_2v_{n+k-2} + \dots + a_kv_n,$$

então a solução dessa recorrência é dada por:

$$v_n = C_{11}\lambda_1^n + \dots + C_{1m_1}n^{m_1-1}\lambda_1^n + \dots + C_{t1}\lambda_t^n + \dots + C_{tm_t}n^{m_t-1}\lambda_t^n, \quad (1.10)$$

onde C_{ij} são coeficientes a serem determinados de acordo com as condições iniciais da recorrência.

Demonstração

Para demonstrar esse teorema, considere primeiramente a seguinte afirmação.

Sejam $(v_1)_n, (v_2)_n, \dots, (v_p)_n$ soluções da recorrência (1.2), então $z_n = (v_1)_n + (v_2)_n + \dots + (v_p)_n$ também será.

Essa afirmação é verificada realizando indução em p .

Tomando $p = 2$ e definindo $z_n = (v_1)_n + (v_2)_n$, como $(v_1)_n, (v_2)_n$ são soluções, então:

$$(v_1)_{n+k} = a_1(v_1)_{n+k-1} + a_2(v_1)_{n+k-2} + \dots + a_k(v_1)_n$$

$$(v_2)_{n+k} = a_1(v_2)_{n+k-1} + a_2(v_2)_{n+k-2} + \dots + a_k(v_2)_n$$

Somando as duas equações:

$$(v_1)_{n+k} + (v_2)_{n+k} = a_1((v_1)_{n+k-1} + (v_2)_{n+k-1}) + a_2((v_1)_{n+k-2} + (v_2)_{n+k-2}) + \dots + a_k((v_1)_n + (v_2)_n)$$

$$\Rightarrow z_{n+k} = a_1 z_{n+k-1} + a_2 z_{n+k-2} + \dots + a_k z_n,$$

satisfazendo a afirmação para $p = 2$.

Considere a afirmação verdadeira para $p = t$, basta mostrar que isso implica que a afirmação também é verdadeira para $p = t + 1$.

Seja $z_n = (v_1)_n + (v_2)_n + \dots + (v_t)_n + (v_{t+1})_n$ e considere $y_n = (v_1)_n + (v_2)_n + \dots + (v_t)_n$, então $z_n = y_n + (v_{t+1})_n$. Como y_n é solução por hipótese de indução e $(v_{t+1})_n$ também é uma solução, assim:

$$y_{n+k} = a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \dots + a_k y_n$$

$$(v_{t+1})_{n+k} = a_1 (v_{t+1})_{n+k-1} + a_2 (v_{t+1})_{n+k-2} + \dots + a_k (v_{t+1})_n$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} y_{n+k} + (v_{t+1})_{n+k} &= a_1 (y_{n+k-1} + (v_{t+1})_{n+k-1}) + a_2 (y_{n+k-2} + (v_{t+1})_{n+k-2}) + \dots + a_k (y_n + (v_{t+1})_n) \\ \Rightarrow z_{n+k} &= a_1 z_{n+k-1} + a_2 z_{n+k-2} + \dots + a_k z_n, \end{aligned}$$

demonstrando a afirmação para todo $p \geq 2$.

Basta agora mostrar duas partes para concluir o teorema. A primeira parte consiste em mostrar que se λ_p é raiz de (1.9), então $z_n = k_p \lambda_p^n$ é solução de (1.2), o que é feito analogamente ao teorema 3. Em seguida é demonstrado que se λ_p tem multiplicidade m_p , então $z_n = k_{p1} \lambda_p^n + \dots + k_{pm_p} n^{m_p-1} \lambda_p^n$ é solução de (1.2) que é abordado de forma análoga ao teorema 4. Por fim concluímos que a solução é dada por (1.10), pois é a soma de soluções particulares, como garantido pela afirmação inicial.

Exemplo 6. Considerando a recorrência de ordem 3 dada por $v_{n+3} = -4v_{n+2} + 3v_{n+1} + 18v_n$, com $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, determine a solução dessa recorrência.

A recorrência $v_{n+3} = -4v_{n+2} + 3v_{n+1} + 18v_n$ é uma recorrência linear de ordem três com coeficientes constantes, sendo assim seu polinômio característico é dado por (1.9) e, conseqüentemente, sua equação característica pode ser escrita como segue:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 2$$

Utilizando o teorema 5 é possível escrever a solução da recorrência através da equação (1.10), obtendo:

$$v_n = C_{11} \cdot (-3)^n + C_{12} \cdot n(-3)^n + C_{21} \cdot 2^n$$

Como $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, então:

$$\begin{cases} -3C_{11} & - & 3C_{12} & + & 2C_{21} & = & 1 \\ 9C_{11} & + & 18C_{12} & + & 4C_{21} & = & 1 \\ -27C_{11} & - & 81C_{12} & + & 8C_{21} & = & 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear:

$$C_{11} = -\frac{47}{225} \quad C_{12} = \frac{4}{45} \quad C_{21} = \frac{8}{25}$$

Logo, a solução da recorrência é descrita pela função:

$$v_n = \left(\frac{4n}{45} - \frac{47}{225} \right) \cdot (-3)^n + \frac{8}{25} \cdot 2^n$$

2 Modelo de Leslie

Nesta seção, abordaremos o Modelo de Leslie, discutido pela primeira vez em (LESLIE, 1945), que é utilizado para estudar o crescimento populacional de uma determinada espécie. Esse modelo divide a população em faixas de idade e acompanha a quantidade de indivíduos ao longo do tempo. Ao contrário de modelos contínuos, o Modelo de Leslie trabalha com o tempo de forma discreta, permitindo a associação de uma sequência de vetores que descrevem as variações populacionais em cada faixa de idade.

Dessa forma, o modelo de Leslie é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} x_0(t+1) &= \sum_{k=0}^{r-1} f_k x_k(t), \\ x_{k+1}(t+1) &= p_k x_k(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Nessas equações, $x_k(t)$ representa o número de indivíduos na faixa etária k no tempo t . O termo $x_0(t+1)$ é determinado pela soma ponderada dos indivíduos em todas as faixas de idade k , de acordo com os coeficientes de fecundidade f_k . Por outro lado, $x_{k+1}(t+1)$ é obtido multiplicando o número de indivíduos na faixa etária k no tempo t pela probabilidade de sobrevivência p_k .

As constantes p_k representam as probabilidades de sobrevivência em cada faixa etária k , onde $p_k > 0$ para $k = 0, 1, \dots, r-2$. As taxas de fecundidade f_k são coeficientes não negativos que representam a taxa de reprodução em cada faixa etária k , com $f_j \geq 0$ para $j = 0, 1, \dots, r-1$.

O parâmetro r indica o número de faixas de idade em que a população foi dividida, permitindo uma análise mais detalhada da distribuição etária da população. O tempo é discretizado, o que significa que os valores de t representam intervalos de tempo discretos em vez de tempo contínuo.

Essas equações descrevem o comportamento do crescimento populacional ao longo do tempo, fornecendo um modelo matemático fundamental para estudar a dinâmica de populações em diferentes faixas etárias.

Considere o vetor $N(n) = (x_0(n), x_1(n), \dots, x_{r-1}(n))$, que descreve a distribuição da população em cada faixa etária no tempo $t = n$. Podemos reescrever o sistema de equações (2.1) na forma matricial $N(n+1) = \mathbb{L} \cdot N(n)$, onde \mathbb{L} é chamada de matriz de Leslie e possui a seguinte forma:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{r-2} & f_{r-1} \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{r-2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A matriz de Leslie \mathbb{L} é uma representação compacta das taxas de fecundidade f_k e probabilidades de sobrevivência p_k em cada faixa etária. A primeira linha da matriz contém os coeficientes de fecundidade f_k , que representam a taxa média de reprodução em cada faixa etária. As demais linhas consistem em vetores de probabilidade de sobrevivência p_k , onde o valor p_k é colocado na posição correspondente à faixa etária anterior.

Essa forma matricial simplifica o cálculo das populações em cada faixa etária em um determinado tempo t e permite prever o crescimento populacional ao longo do tempo. Multiplicando o vetor de população $N(n)$ pela matriz de Leslie \mathbb{L} , obtemos o vetor de população $N(n+1)$ para o próximo intervalo de tempo.

Essa representação matricial facilita a análise e a compreensão do modelo de Leslie, fornecendo uma estrutura clara para investigar o crescimento e a dinâmica populacional em diferentes faixas etárias.

A matriz de Leslie pode ser escrita de forma simplificada através da notação $\mathbb{L}([f_0, \dots, f_{r-1}], [p_0, \dots, p_{r-2}])$. Dessa forma, para $n = 1, 2, \dots, k$, tem-se:

$$\begin{aligned} N(1) &= \mathbb{L} \cdot N(0) \\ N(2) &= \mathbb{L} \cdot N(1) \\ &\vdots \\ N(k) &= \mathbb{L} \cdot N(k-1) \end{aligned}$$

Note que ao substituir o valor determinado para $N(1)$ na equação $N(2) = \mathbb{L} \cdot N(1)$ é possível obter a relação $N(2) = \mathbb{L}^2 \cdot N(0)$. Seguindo este processo recursivamente é possível escrever o k -ésimo termo $N(k)$ em termos de $N(0)$ como segue:

$$N(k) = \mathbb{L}^k \cdot N(0) \quad (2.3)$$

Esse resultado também pode ser obtido por indução, onde tomando $k = 1$ é obtido o resultado $N(1) = \mathbb{L} \cdot N(0)$ e partindo da relação $N(k+1) = \mathbb{L}^{k+1} \cdot N(0)$, basta utilizar o passo de indução (2.3), concluindo a demonstração como segue:

$$N(k+1) = \mathbb{L} \cdot N(k) \Rightarrow N(k+1) = \mathbb{L} \cdot \mathbb{L}^k \cdot N(0) \Rightarrow N(k+1) = \mathbb{L}^{k+1} \cdot N(0)$$

Logo, para determinar o comportamento populacional em qualquer tempo $k \in \mathbb{N}$ é suficiente conhecer a matriz \mathbb{L}^k e efetuar o produto entre esta matriz e o vetor que representa a população inicial $N(0)$.

Exemplo 7 (Modelo populacional). *Considere um modelo populacional tal que $N(0) = (5, 8, 3)$ e a matriz de Leslie é dada por $\mathbb{L} \left([0, 4, 2], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right] \right)$, determine o vetor que descreve a população quando $t = 4$.*

Utilizando a relação (2.3), o vetor populacional desejado é descrito por:

$$N(4) = \mathbb{L}^4 \cdot N(0)$$

Realizando a potenciação é possível obter a matriz \mathbb{L}^4 dada por:

$$\mathbb{L}^4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$N(4) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow N(4) = \begin{bmatrix} 37,5 \\ 38,625 \\ 1,75 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, é possível estimar o comportamento da população após passar o período de $t = 4$ da unidade estabelecida. Neste caso, ocorreria um aumento das faixas das duas populações mais jovens, enquanto a população na faixa mais velha iria diminuir como mostrado pelo vetor $N(4)$.

Com o exemplo anterior nota-se que a parte mais complexa deste problema consiste em determinar a matriz \mathbb{L}^k , pois o processo de multiplicação matricial é uma tarefa custosa.

Sendo assim, o foco deste estudo será o desenvolvimento de técnicas para calcular a potenciação de uma matriz de Leslie. Além da abordagem convencional de calcular a potência de uma matriz, serão discutidas duas formas adicionais. A primeira abordagem, tratada neste capítulo, é dada através da obtenção da matriz diagonal da matriz de Leslie por meio do cálculo de seus autovalores e autovetores. No capítulo seguinte a abordagem será baseada no uso de equações de diferenças, que envolvem equações de Fibonacci generalizadas.

2.1 Matriz diagonal associada com a matriz de Leslie

Considere uma matriz de Leslie contemplando duas faixas etárias tal que $\mathbb{L} = \mathbb{L}([f_0, f_1], [p_0])$, vamos mostrar que \mathbb{L} é diagonalizável. A matriz \mathbb{L} é dada por:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 \\ p_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores de L :

$$\det \begin{bmatrix} f_0 - \lambda & f_1 \\ p_0 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - f_0 \cdot \lambda - p_0 f_1 = 0$$

Assumindo que algum $f_i \neq 0$, note que o discriminante da equação $\Delta = f_0^2 + 4p_0 f_1 > 0$, pois f_0 ou f_1 deve ser maior que zero e $p_0 > 0$, podendo concluir que a equação possui duas soluções distintas, ou seja, os autovalores de \mathbb{L} são distintos e pelo Teorema 1 pode-se afirmar que \mathbb{L} é diagonalizável.

Analisando de forma similar uma matriz de Leslie contemplando três faixas etárias:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando o polinômio característico de L :

$$p_3(\lambda) = \det \begin{bmatrix} f_0 - \lambda & f_1 & f_2 \\ p_0 & -\lambda & 0 \\ 0 & p_1 & -\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow p_3(\lambda) = -\lambda^3 + f_0 \lambda^2 + p_0 f_1 \lambda + p_0 p_1 f_2$$

Analisando os resultados anteriores, vamos mostrar que é possível generalizar o polinômio característico de uma matriz de Leslie com r faixas etárias através do polinômio característico

$$p_r(\lambda) = \lambda^r - f_0 \lambda^{r-1} - p_0 f_1 \lambda^{r-2} - \dots - p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1}, \quad \text{se } r \text{ é par}, \quad (2.4)$$

$$p_r(\lambda) = -\lambda^r + f_0 \lambda^{r-1} + p_0 f_1 \lambda^{r-2} + \dots + p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1}, \quad \text{se } r \text{ é ímpar}. \quad (2.5)$$

Demonstrando por indução, temos que para $r = 2$ o polinômio característico obtido é $\lambda^2 - f_0 \cdot \lambda - p_0 f_1$, enquanto para $r = 3$ foi obtido $p_3(\lambda) = -\lambda^3 + f_0 \lambda^2 + p_0 f_1 \lambda + p_0 p_1 f_2$, logo as Equações (2.4) e (2.5) são verdadeiras.

Suponha agora $p_r(\lambda)$ vale para $r = k$, hipótese de indução, vamos mostrar que isso implica que as Equações (2.4) e (2.5) também são válidas para $r = k + 1$.

Considerando uma matriz de Leslie com $k + 1$ faixas etárias, temos:

$$p_{k+1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} f_0 - \lambda & f_1 & f_2 & \dots & f_{k-1} & f_k \\ p_0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{k-1} & -\lambda \end{bmatrix}$$

Utilizando o Teorema de Laplace para determinantes e escolhendo a última coluna da matriz:

$$p(\lambda) = f_k \cdot (-1)^{k+2} \begin{vmatrix} p_0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-2} & -\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{k-1} \end{vmatrix} + (-\lambda) \cdot (-1)^{2(k+1)} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} f_0 - \lambda & f_1 & \dots & f_{k-2} & f_{k-1} \\ p_0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_{k-2} & -\lambda \end{vmatrix}}_{\text{hipótese de indução: } p_k(\lambda)}$$

Como o determinante de uma matriz triangular é dado pelo produto de sua diagonal principal e utilizando a hipótese de indução, segue:

$$p_{k+1}(\lambda) = (-1)^{k+2} \cdot p_0 p_1 \dots p_{k-1} - \lambda \cdot p_k(\lambda)$$

Se k é ímpar, então utilizando (2.5) para o polinômio $p_k(\lambda)$, segue:

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\lambda) &= -p_0 p_1 \dots p_{k-1} f_k - \lambda \cdot p_k(\lambda) \\ \Rightarrow p_{k+1}(\lambda) &= \lambda^{k+1} - f_0 \lambda^k - p_0 f_1 \lambda^{k-1} - \dots - p_0 p_1 \dots p_{k-1} f_k \end{aligned}$$

Demonstrando que $p_r(\lambda) = \lambda^r - f_0 \lambda^{r-1} - \dots - p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}$, para $r \geq 2$ e par.

De forma análoga, se k é par, então utilizando (2.4):

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\lambda) &= p_0 p_1 \dots p_{k-1} f_k - \lambda \cdot p_k(\lambda) \\ \Rightarrow p_{k+1}(\lambda) &= -\lambda^{k+1} + f_0 \lambda^k + p_0 f_1 \lambda^{k-1} + \dots + p_0 p_1 \dots p_{k-1} f_k \end{aligned}$$

Demonstrando que $p_r(\lambda) = -\lambda^r + f_0 \lambda^{r-1} + \dots + p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}$, para $r \geq 3$ e ímpar.

Sendo conhecido o polinômio característico $p_r(\lambda)$, torna-se possível estudar as características das raízes desse polinômio através da equação característica $p_r(\lambda) = 0$, ou seja, $\lambda^r - f_0\lambda^{r-1} - \dots - p_0p_1\dots p_{r-2} = 0$. Note que a mesma equação pode ser utilizada para qualquer inteiro $r \geq 2$.

Dessa forma, vamos realizar o estudo através do polinômio $P_r(\lambda) = \lambda^r - f_0\lambda^{r-1} - \dots - p_0p_1\dots p_{r-2}f_{r-1}$ que terá as mesmas raízes de $p_r(\lambda)$. Assim, definiremos o polinômio característico para as matrizes de Leslie por:

$$P_r(\lambda) = \lambda^r - f_0\lambda^{r-1} - \dots - p_0p_1\dots p_{r-2}f_{r-1} \quad (2.6)$$

Note que $P_r(\lambda) = 0$ implica em $\lambda \neq 0$, pois $P_r(0) = p_0p_1\dots p_{r-2}f_{r-1} > 0$. Com isso,

$$\frac{P_r(\lambda)}{\lambda^r} = 1 - \left(\frac{f_0}{\lambda} + \dots + \frac{p_0p_1\dots p_{r-2}f_{r-1}}{\lambda^r} \right)$$

Definindo a função

$$q(\lambda) = \frac{f_0}{\lambda} + \frac{p_0f_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{p_0p_1\dots p_{r-2}f_{r-1}}{\lambda^r}, \quad (2.7)$$

então:

$$\frac{P_r(\lambda)}{\lambda^r} = 1 - q(\lambda) \Rightarrow P_r(\lambda) = (1 - q(\lambda)) \cdot \lambda^r$$

As raízes de P_r são dadas por:

$$P_r(\lambda) = 0 \Rightarrow (1 - q(\lambda)) \cdot \lambda^r = 0 \Rightarrow q(\lambda) = 1,$$

pois $\lambda \neq 0$.

Note que para $\lambda > 0$, a função q é uma função contínua e decrescente, pois

$$q'(\lambda) = - \left(\frac{f_0}{\lambda^2} + \frac{2p_0f_1}{\lambda^3} + \dots + \frac{rp_0p_1\dots p_{r-2}f_{r-1}}{\lambda^{r+1}} \right) < 0.$$

Veja também que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} q(\lambda) = +\infty$ e $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = 0$, podendo ser representada pelo gráfico 1:

Com isso é possível verificarmos que existe somente um valor $\lambda > 0$ que satisfaz a equação $q(\lambda) = 1$, mostrando que a matriz de Leslie admite um único autovalor positivo.

Agora, vamos analisar a multiplicidade dessa raiz através do seguinte resultado.

Lema 1. *A raiz λ de um polinômio p é simples se, e somente se, λ não é raiz de sua derivada.*

Seja p um polinômio qualquer com raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de multiplicidades n_1, \dots, n_k , respectivamente, então é possível escrever p em sua forma fatorada como

$$p(x) = a(x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k}$$

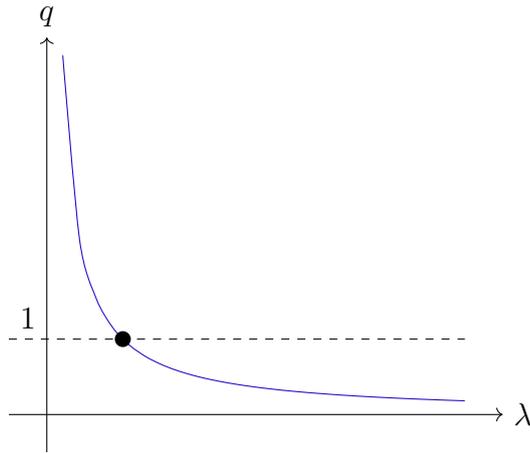


Figura 1 – Comportamento da função $q(\lambda)$ para $\lambda > 0$.

Derivando p com respeito a variável x ,

$$\begin{aligned}
 p'(x) = & \quad an_1(x - \lambda_1)^{n_1-1} \cdot (x - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k} + \\
 & \quad an_2(x - \lambda_1)^{n_1} \cdot (x - \lambda_2)^{n_2-1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k} + \\
 & \quad \dots \\
 & \quad an_k(x - \lambda_1)^{n_1} \cdot (x - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k-1}
 \end{aligned}$$

Seja $\lambda_1 = \lambda$ uma raiz simples, então $n_1 = 1$ e, conseqüentemente, a derivada de p pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 p'(x) = & \quad a(x - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k} + \\
 & \quad an_2(x - \lambda) \cdot (x - \lambda_2)^{n_2-1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k} + \\
 & \quad \dots \\
 & \quad an_k(x - \lambda) \cdot (x - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k-1} \\
 \Rightarrow p'(\lambda) = & \quad a(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \neq 0
 \end{aligned}$$

Considere agora que $\lambda_1 = \lambda$ é uma raiz com multiplicidade $n_1 > 1$ de p , assim:

$$\begin{aligned}
 p'(x) = & \quad an_1(x - \lambda)^{n_1-1} \cdot (x - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k} + \\
 & \quad an_2(x - \lambda)^{n_1} \cdot (x - \lambda_2)^{n_2-1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k} + \\
 & \quad \dots \\
 & \quad an_k(x - \lambda)^{n_1} \cdot (x - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k-1} \\
 \Rightarrow p'(\lambda) = & \quad 0
 \end{aligned}$$

Logo, se λ é raiz com multiplicidade $n_1 > 1$, então $p'(\lambda) = 0$, permitindo concluir pela contrapositiva que se $p'(\lambda) \neq 0$ e λ é raiz de p , então λ é raiz simples.

Para estudar a matriz de Leslie através de sua decomposição em termos de autovalores e autovetores o seguinte resultado é fundamental.

Lema 2. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores de uma matriz de Leslie com $\lambda_1 > 0$, então $|\lambda_k| \leq \lambda_1$ para qualquer $k \neq 1$.*

Como λ_1 é um autovalor de uma matriz de Leslie, então $q(\lambda_1) = 1$, onde a função q é dada por:

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \frac{f_0}{\lambda} + \frac{p_0 f_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{\lambda^r} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{f_0}{\lambda_1} + \frac{p_0 f_1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{\lambda_1^r} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tomando $\lambda_k \in \mathbb{C}$, com $k \neq 1$, então $\lambda_k = |\lambda_k| \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$, onde θ é o argumento do número complexo λ_k .

De forma análoga a realizada com o autovalor λ_1 juntamente com a função q é possível obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^{-1} + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^{-2} + \dots \\ &\quad + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^{-r} \end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot \left(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) \right) + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot \left(\cos(-2\theta) + i \operatorname{sen}(-2\theta) \right) + \dots \\ &\quad + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot \left(\cos(-r\theta) + i \operatorname{sen}(-r\theta) \right) \\ \Rightarrow 1 &= \frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot \cos(-\theta) + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot \cos(-2\theta) + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot \cos(-r\theta) + \\ &\quad i \left(\frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot \operatorname{sen}(-\theta) + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot \operatorname{sen}(-2\theta) + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot \operatorname{sen}(-r\theta) \right) \\ \Rightarrow \begin{cases} 1 &= \frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot \cos(-\theta) + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot \cos(-2\theta) + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot \cos(-r\theta) \\ 0 &= \frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot \operatorname{sen}(-\theta) + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot \operatorname{sen}(-2\theta) + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot \operatorname{sen}(-r\theta) \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade triangular na primeira equação:

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot \cos(-\theta) + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot \cos(-2\theta) + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot \cos(-r\theta) \right| \leq \\ &\frac{f_0}{|\lambda_k|} \cdot |\cos(-\theta)| + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} \cdot |\cos(-2\theta)| + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \cdot |\cos(-r\theta)| \leq \\ &\frac{f_0}{|\lambda_k|} + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{f_0}{|\lambda_k|} + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r}$$

Da equação (2.8), segue:

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{\lambda_1} + \frac{p_0 f_1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{\lambda_1^r} &\leq \frac{f_0}{|\lambda_k|} + \frac{p_0 f_1}{|\lambda_k|^2} + \dots + \frac{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}}{|\lambda_k|^r} \\ \Rightarrow f_0 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{|\lambda_k|} \right) + p_0 f_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{|\lambda_k|^2} \right) + \dots + p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} \left(\frac{1}{\lambda_1^r} - \frac{1}{|\lambda_k|^r} \right) &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{|\lambda_k|} &\leq 0 \Rightarrow |\lambda_k| \leq \lambda_1 \end{aligned}$$

Alguns resultados importantes relacionados com o estudo do comportamento assintótico de uma população pelo modelo de Leslie decorrem quando λ_1 é um autovalor dominante, ou seja, $\lambda_1 > |\lambda_k|$. Note que o teorema não garante a desigualdade estrita.

O resultado anterior e a afirmação que para uma matriz de Leslie existe um único autovalor positivo, fora sua multiplicidade, podem ser abordados através do Teorema de Perron-Frobenius tratado em (MEYER; STEWART, 2023).

Teorema 6. *Seja \mathbb{L} uma matriz de Leslie com um único autovalor positivo λ_1 , então esse autovalor tem multiplicidade um e o autovetor v_1 associado a ele pode ser escrito de forma que tenha todas suas entradas positivas.*

Como \mathbb{L} é uma matriz de Leslie, então seu polinômio característico é dado pela equação (2.6).

Note que $P'_r(\lambda_1) \neq 0$, logo como apresentado pelo lema 1 o autovalor λ_1 tem multiplicidade igual a um.

Seja agora v_1 o autovetor associado ao autovalor λ_1 , então:

$$\begin{aligned} (\mathbb{L} - \lambda_1 \cdot I_r)v_1 &= 0 \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} f_0 - \lambda_1 & f_1 & \dots & f_{r-2} & f_{r-1} \\ p_0 & -\lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{r-2} & -\lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ \vdots \\ u_{1r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear:

$$\begin{aligned} p_0 u_{11} - \lambda_1 u_{12} = 0 &\Rightarrow u_{12} = \frac{p_0 u_{11}}{\lambda_1} \\ p_1 u_{12} - \lambda_1 u_{13} = 0 &\Rightarrow u_{13} = \frac{p_1 u_{12}}{\lambda_1} \Rightarrow u_{13} = \frac{p_1 p_0 u_{11}}{\lambda_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ u_{1r} &= \frac{p_{r-2} \dots p_1 p_0 u_{11}}{\lambda_1^{r-1}} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (f_0 - \lambda_1)u_{11} + f_1 u_{12} + \dots + f_{n-1} u_{1r} &= (f_0 - \lambda_1)u_{11} + f_1 \frac{p_0 u_{11}}{\lambda_1} + \dots + f_{r-1} \frac{p_{r-2} \dots p_1 p_0 u_{11}}{\lambda_1^{r-1}} \\ &= \left(-\lambda_1 + \lambda_1 \left(\frac{f_0}{\lambda_1} + \frac{f_1 p_0 u_{11}}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{f_{r-1} p_{r-2} \dots p_1 p_0}{\lambda_1^r} \right) \right) u_{11} = (-\lambda_1 + \lambda_1 \cdot q(\lambda_1)) u_{11}, \end{aligned}$$

pela equação (2.7). E como λ_1 é raiz, temos que $q(\lambda_1) = 1$, assim:

$$(f_0 - \lambda_1)u_{11} + f_1 u_{12} + \dots + f_{r-1} u_{1r} = (-\lambda_1 + \lambda_1 \cdot 1)u_{11} = 0,$$

logo

$$u_1 = \left[u_{11} \quad \frac{p_0 u_{11}}{\lambda_1} \quad \frac{p_1 p_0 u_{11}}{\lambda_1^2} \quad \dots \quad \frac{p_{n-2} \dots p_1 p_0 u_{11}}{\lambda_1^{r-1}} \right]^t$$

Tomando $u_{11} = 1$ para escrever o autovetor representante u_1 , então:

$$u_1 = \left[1 \quad \frac{p_0}{\lambda_1} \quad \frac{p_1 p_0}{\lambda_1^2} \quad \dots \quad \frac{p_{r-2} \dots p_1 p_0}{\lambda_1^{r-1}} \right]^t$$

Como todos os termos que compõe o vetor são positivos é possível concluir que o autovetor u_1 pode ser escrito de forma que todas suas entradas sejam positivas, concluindo o teorema.

Exemplo 8. Dado a matriz de Leslie $\mathbb{L} \left(\left[\frac{1}{5}, \frac{13}{16}, \frac{3}{8} \right], \left[\frac{4}{5}, \frac{1}{2} \right] \right)$, utilizando a matriz diagonal de \mathbb{L} , calcule \mathbb{L}^n , para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando o polinômio característico da matriz de Leslie dada como definido em (2.6) é possível determinar os autovalores de \mathbb{L} através da seguinte equação:

$$\lambda^3 - \frac{1}{5}\lambda^2 - \frac{13}{20}\lambda - \frac{3}{20} = 0 \Rightarrow 20\lambda^3 - 4\lambda^2 - 13\lambda - 3 = 0$$

Note que $\lambda = 1$ é solução da equação, sendo possível reescrever a equação como:

$$(\lambda - 1) \cdot (20\lambda^2 + 16\lambda + 3) = 0,$$

permitindo obter as demais raízes $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = -\frac{3}{10}$.

Como os autovalores de \mathbb{L} são todos distintos, pelo teorema 1, é possível garantir que a matriz é diagonalizável.

Os autovetores associados a cada autovalor λ são dados por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \lambda & \frac{13}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{4}{5} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 1$, o sistema tem solução $(5t, 4t, 2t)$, com $t \in \mathbb{R}$, logo um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é dado por $v = (5, 4, 2)$.

De forma análoga, um autovetor associado ao autovalor $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = -\frac{3}{10}$ é dado respectivamente por $(5, -8, 8)$ e $(9, -24, 40)$.

Assim, é possível reescrever $\mathbb{L} = M^{-1} \cdot D \cdot M$, onde D é uma matriz diagonal composta pelos autovalores de \mathbb{L} e M é a matriz dos autovetores.

Calculando a inversa de M , a matriz \mathbb{L} é fatorada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 9 \\ 4 & -8 & -24 \\ 2 & 8 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{624} \cdot \begin{bmatrix} 64 & 64 & 24 \\ 104 & -91 & -78 \\ -24 & 15 & 30 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^n &= \frac{1}{624} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 9 \\ 4 & -8 & -24 \\ 2 & 8 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{10}\right)^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 64 & 64 & 24 \\ 104 & -91 & -78 \\ -24 & 15 & 30 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{624} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= -8 \cdot \left(-65 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{10}\right)^n \cdot 3^{n+3} - 40 \right), \\ a_{12} &= 5 \cdot \left(-91 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{10}\right)^n \cdot 3^{n+3} + 64 \right), \\ a_{13} &= 30 \cdot \left(-13 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{10}\right)^n \cdot 3^{n+2} + 4 \right), \\ a_{21} &= -2^{6-n} \cdot 5^{-n} \cdot (13 \cdot (-5)^n + (-1)^{n+1} \cdot 3^{n+2} - 2^{n+2} \cdot 5^n), \\ a_{22} &= 2^{3-n} \cdot 5^{-n} \cdot (91 \cdot (-5)^n - 5 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+2} + 2^{n+5} \cdot 5^n), \\ a_{23} &= 3 \cdot 2^{4-n} \cdot 5^{-n} \cdot (13 \cdot (-5)^n - 5 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n), \\ a_{31} &= 2^{6-n} \cdot 5^{-n} \cdot (13 \cdot (-5)^n - 5 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n), \\ a_{32} &= -2^{3-n} \cdot 5^{-n} \cdot (91 \cdot (-5)^n - 25 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+1} - 2^{n+4} \cdot 5^n), \\ a_{33} &= -48 \cdot 5^{-n} \cdot \left(13 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^n - 25 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n - 5^n \right). \end{aligned}$$

2.1.1 Comportamento assintótico

Considere uma matriz de Leslie \mathbb{L} diagonalizável com autovalores $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_r|$, com λ_1 sendo um autovalor dominante, então:

$$\mathbb{L} = M \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix} \cdot M^{-1},$$

onde M é a matriz de autovetores de \mathbb{L} .

No intuito de obter $N(n)$, utilizando (2.3) e a relação anterior para \mathbb{L} :

$$\begin{aligned} N(n) &= \left(M \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix} \cdot M^{-1} \right)^n \cdot N(0) \\ \Rightarrow N(n) &= M \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r^n \end{bmatrix} \cdot M^{-1} \cdot N(0) \\ \Rightarrow \frac{N(n)}{\lambda_1^n} &= M \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)^n \end{bmatrix} \cdot M^{-1} \cdot N(0) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N(n)}{\lambda_1^n} \right) &= M \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot M^{-1} \cdot N(0). \end{aligned}$$

Note que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^n = 0$, para $k \neq 1$, pois $\frac{\lambda_k}{\lambda_1} < 1$, como definido inicialmente.

Seja $M^{-1} \cdot N(0) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_r]^t$ e M a matriz de autovetores de \mathbb{L} , onde a primeira coluna é o autovetor v_1 associado com o autovalor λ_1 , então:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N(n)}{\lambda_1^n} \right) = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N(n)}{\lambda_1^n} \right) = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N(n)}{\lambda_1^n} \right) = c_1 v_1$$

Logo, para valores de n suficientemente grandes é possível determinar o comportamento assintótico de crescimento por:

$$N(n) \approx c_1 \lambda_1^n \cdot v_1$$

De acordo com o valor do autovalor $\lambda_1 > 0$, a população terá os seguintes comportamentos:

Se $0 < \lambda_1 < 1$, a população diminuirá;

Se $\lambda_1 = 1$, a população irá convergir para determinado valor;

Se $\lambda_1 > 1$, a população seguirá crescendo.

É importante reforçar que esse resultado é obtido para $\lambda_1 > |\lambda_k|$, com $k \neq 1$, porém o lema 2 apenas garante que $\lambda_1 \leq |\lambda_k|$. Uma matriz de Leslie pode apresentar $\lambda_1 = |\lambda_k|$, para $k \neq 1$, como apresentado no exemplo a seguir.

Exemplo 9. Considerando a matriz de Leslie definida por $\mathbb{L} \left([0, 0, 16], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right] \right)$, determine seus autovalores e analise o comportamento dessa matriz.

O polinômio característico dessa matriz é dada por (2.5):

$$p_3(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 16 \Rightarrow p_3(\lambda) = -\lambda^3 + 1$$

Com isso, os autovalores obtidos são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Note que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$. Nesse caso não é possível afirmar que a população irá convergir, como apresentado anteriormente no caso em que $\lambda_1 = 1$.

Nesse caso é possível verificar que o comportamento da matriz de Leslie irá se repetir, pois \mathbb{L} é uma matriz tal que $\mathbb{L}^3 = I_3$, apresentando a mesma quantia de indivíduos a cada três ciclos.

Teorema 7. Se duas entradas sucessivas f_k e f_{k+1} da primeira linha de uma matriz de Leslie são não nulas, então o autovalor positivo dessa matriz será dominante.

O teorema 7 é demonstrado e discutido com mais detalhes em (MESQUISTA, 2011). No caso em que $|\lambda_1| = 1$ e o teorema 7 não é satisfeito, a sequência apresentará $d = \text{mdc}\{j + 1, a_j > 0\}$ subsequências convergentes. Esse tópico é apresentado com mais detalhes no capítulo seguinte ao tratar da abordagem por equações de diferenças.

Exemplo 10. Considere a matriz de Leslie $\mathbb{L} \left([0, 0, 2, 1], \left[\frac{1}{2}, \frac{51}{64}, \frac{26}{51} \right] \right)$ e uma população inicial $x_0 = (100, 100, 100, 100)$, analise as características da matriz de Leslie e da população ao longo do tempo.

Note que $f_3, f_4 > 0$, logo pelo teorema 7 é possível afirmar que \mathbb{L} apresenta um autovalor dominante.

Calculando os autovalores da matriz de Leslie, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{3}{8} + i \cdot \frac{\sqrt{43}}{8}, \lambda_3 = -\frac{3}{8} - i \cdot \frac{\sqrt{43}}{8}, \lambda_4 = -\frac{1}{4}$, permitindo afirmar que a população ao longo do tempo irá convergir para um valor fixo de indivíduos. Sendo assim:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^n = M \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M^{-1},$$

onde $M = \begin{bmatrix} 4.92308 & 2.46154 & 1.96154 & 1 \\ 3.46154 - 1.00884i & -1.30769 - 1.51326i & -0.735577 + 1.60783i & 1 \\ 3.46154 + 1.00884i & -1.30769 + 1.51326i & -0.735577 - 1.60783i & 1 \\ -0.0769231 & 0.153846 & -0.490385 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de autovetores de \mathbb{L} . Assim:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^n = \begin{bmatrix} 0.312195 & 0.624390 & 0.783549 & 0.312195 \\ 0.156098 & 0.312195 & 0.391774 & 0.156098 \\ 0.124390 & 0.248780 & 0.312195 & 0.124390 \\ 0.063415 & 0.126829 & 0.159158 & 0.063415 \end{bmatrix}$$

E conseqüentemente, a população irá convergir para aproximadamente o vetor de coordenadas (203.33, 101.616, 80.976, 41.282).

Considere agora $\lambda_1 \neq 1$, ou seja, a população irá crescer indefinidamente se $\lambda_1 > 1$ ou tenderá a zero caso $0 < \lambda_1 < 1$. Nesses casos é possível estudar o comportamento da população proporcionalmente, determinando a que proporção a população irá tender.

3 Estudo do Modelo de Leslie através das equações de diferenças

3.1 Equação de Fibonacci generalizada

A equação de Fibonacci generalizada, também denominada recorrência linear com coeficientes constantes, é dada por:

$$v_{n+1} = a_0 v_n + \dots + a_{r-1} v_{n-r+1}, \quad (3.1)$$

com $n \geq r - 1$. As constantes a_0, \dots, a_{r-1} são os coeficientes desta recorrência de ordem r e v_0, \dots, v_{r-1} são as condições iniciais que determinam a unicidade da solução deste problema.

Note que de forma análoga a equação (2.3) é possível reescrever (3.1) na forma matricial:

$$\mathbb{V}_{n+1} = \mathbb{L}([a_0, \dots, a_{r-1}], [1, \dots, 1]) \cdot \mathbb{V}_n, \quad (3.2)$$

onde $\mathbb{V}_n = (v_n, \dots, v_{n-r+1})$ e \mathbb{L} é a matriz de Leslie como apresentado em (2.2).

Considerando a notação $\mathbb{A}[a_0, \dots, a_{r-1}] = \mathbb{L}([a_0, \dots, a_{r-1}], [1, \dots, 1])$, o intuito é determinar a matriz \mathbb{A}^n utilizando os conceitos das equações de recorrência e a partir disso determinar as entradas da matriz associada $L([a_0, \dots, a_{r-1}], [p_0, \dots, p_{r-2}])$.

Para isso, considera-se a família de sequências $\{v_n^{(s)}\}_{n \geq 0}$, com $0 \leq s \leq r - 1$, conhecida como sistema fundamental de Fibonacci e definida por:

$$\begin{cases} v_{n+1}^{(s)} = a_0 v_n^{(s)} + \dots + a_{r-1} v_{n-r+1}^{(s)} & , \quad \text{para } n \geq r - 1, \\ v_n^{(s)} = \delta_{s,n} & , \quad \text{para } 0 \leq n \leq r - 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\delta_{s,n}$ é o símbolo de Kronecker definido por $\delta_{s,n} = 0$ se $s \neq n$ e $\delta_{s,n} = 1$ se $s = n$.

Utilizando a notação empregada em (3.3), o artigo (BENTAHER; NAASSI; RACHIDI, 2017) mostra que a matriz \mathbb{A}^n é dada por:

$$\mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} v_{n+r-1}^{(r-1)} & \dots & v_{n+r-1}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^{(r-1)} & \dots & v_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Também é apresentado a relação entre as matrizes \mathbb{A} e \mathbb{L} através da matriz $\mathbb{H} = \text{diag}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$, onde

$$\omega_s = \prod_{k=s}^{r-2} p_k \quad \text{e} \quad \omega_{r-1} = 1, \quad \text{com } 0 \leq s \leq r-2 \quad (3.4)$$

pela relação $\mathbb{L} = \mathbb{H}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{H}$ e os coeficientes a_j apresentam a seguinte relação:

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = p_0 f_1, \quad a_2 = p_0 p_1 f_2, \quad \dots, \quad a_{r-1} = p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} \quad (3.5)$$

Com isso, obtendo \mathbb{A}^n é possível determinar as entradas da matriz \mathbb{L}^n como apresentado a seguir:

$$\mathbb{L}^n = \begin{pmatrix} v_{n+r-1}^{(r-1)} & \frac{\omega_1}{\omega_0} v_{n+r-1}^{(r-2)} & \frac{\omega_2}{\omega_0} v_{n+r-1}^{(r-3)} & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_0} v_{n+r-1}^{(0)} \\ \frac{\omega_0}{\omega_1} v_{n+r-2}^{(r-1)} & v_{n+r-2}^{(r-2)} & \frac{\omega_2}{\omega_1} v_{n+r-2}^{(r-3)} & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_1} v_{n+r-2}^{(0)} \\ \frac{\omega_0}{\omega_2} v_{n+r-3}^{(r-1)} & \frac{\omega_1}{\omega_2} v_{n+r-3}^{(r-2)} & v_{n+r-3}^{(r-3)} & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_2} v_{n+r-3}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_0}{\omega_{r-1}} v_n^{(r-1)} & \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} v_n^{(r-2)} & \frac{\omega_2}{\omega_{r-1}} v_n^{(r-3)} & \dots & v_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Exemplo 11 (Caso 2). *Considerando o problema apresentado no exemplo 7 e a formulação apresentada, determine o comportamento populacional esperado quando $t = 7$.*

Utilizando a equação apresentada em (3.6) para obter a matriz de Leslie associada com este problema, tem-se:

$$\mathbb{L}^7 = \begin{pmatrix} v_9^{(2)} & \frac{\omega_1}{\omega_0} v_9^{(1)} & \frac{\omega_2}{\omega_0} v_9^{(0)} \\ \frac{\omega_0}{\omega_1} v_8^{(2)} & v_8^{(1)} & \frac{\omega_2}{\omega_1} v_8^{(0)} \\ \frac{\omega_0}{\omega_2} v_7^{(2)} & \frac{\omega_1}{\omega_2} v_7^{(1)} & v_7^{(0)} \\ \omega_2 & \omega_2 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

Calculando os valores de ω_s , para $0 \leq s \leq 2$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= p_0 \cdot p_1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{8} \\ \omega_1 &= p_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{4} \\ \omega_2 &= 1 \end{aligned}$$

Através da relação (3.3), as seguintes recorrências são geradas:

$$v_{n+1}^{(0)} = 0 \cdot v_n^{(0)} + 4 \cdot v_{n-1}^{(0)} + 2 \cdot v_{n-2}^{(0)} \Rightarrow v_{n+1}^{(0)} = 4 \cdot v_{n-1}^{(0)} + 2 \cdot v_{n-2}^{(0)},$$

com $v_0^{(0)} = 1$ e $v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = 0$,

$$v_{n+1}^{(1)} = 0 \cdot v_n^{(1)} + 4 \cdot v_{n-1}^{(1)} + 2 \cdot v_{n-2}^{(1)} \Rightarrow v_{n+1}^{(1)} = 4 \cdot v_{n-1}^{(1)} + 2 \cdot v_{n-2}^{(1)},$$

com $v_1^{(1)} = 1$ e $v_0^{(1)} = v_2^{(1)} = 0$,

$$v_{n+1}^{(2)} = 0 \cdot v_n^{(2)} + 4 \cdot v_{n-1}^{(2)} + 2 \cdot v_{n-2}^{(2)} \Rightarrow v_{n+1}^{(2)} = 4 \cdot v_{n-1}^{(2)} + 2 \cdot v_{n-2}^{(2)},$$

com $v_2^{(2)} = 1$ e $v_0^{(2)} = v_1^{(2)} = 0$.

Para cada equação deseja-se obter os termos $v_7^{(s)}$, $v_8^{(s)}$ e $v_9^{(s)}$, com $s = 0, 1, 2$. Construindo cada sequência de forma recursiva:

$$v^{(0)} = \{1, 0, 0, 2, 0, 8, 4, 32, 32, 136, \dots\}$$

$$v^{(1)} = \{0, 1, 0, 4, 2, 16, 16, 68, 96, 304, \dots\}$$

$$v^{(2)} = \{0, 0, 1, 0, 4, 2, 16, 16, 68, 96, \dots\}$$

Logo, a matriz de Leslie procurada é dada por:

$$\mathbb{L}^7 = \begin{pmatrix} 96 & \frac{1}{4} \cdot 304 & \frac{1}{8} \cdot 136 \\ \frac{1}{8} \cdot 68 & 96 & \frac{1}{4} \cdot 32 \\ \frac{4}{1} \cdot 16 & \frac{1}{4} \cdot 68 & 32 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L}^7 = \begin{pmatrix} 96 & 608 & 1088 \\ 34 & 96 & 128 \\ 2 & 17 & 32 \end{pmatrix}$$

Com isso e utilizando a equação (2.3), conclui-se que para $t = 7$ a população terá o seguinte comportamento:

$$N(7) = \mathbb{L}^7 \cdot N(0) \Rightarrow N(7) = \begin{pmatrix} 96 & 608 & 1088 \\ 34 & 96 & 128 \\ 2 & 17 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow N(7) = \begin{pmatrix} 8608 \\ 1322 \\ 242 \end{pmatrix}$$

Note que para este exercício, onde foi utilizado $t = 7$, foi possível determinar os termos desejados de cada família de recorrência calculando todos os termos da sequência de forma recursiva, ou seja, obtendo um a um até chegar na posição dos termos desejados. Para valores grandes de t ou caso se tenha interesse no comportamento da população ao longo do tempo ao invés de apenas um tempo específico, esta tarefa pode se tornar inviável, sendo assim, outras maneiras de se abordar este problema através da equação (3.6) serão apresentadas.

Comparando os termos das sequências $v^{(0)}$ e $v^{(1)}$ com a sequência $v^{(2)}$ é possível perceber a seguinte relação:

$$v_{n+1}^{(0)} = 2 \cdot v_n^{(2)} \quad \text{e} \quad v_{n+1}^{(1)} = 4 \cdot v_n^{(2)} + 2 \cdot v_{n-1}^{(2)}$$

Essa relação pode ser generalizada pela equação (3.7).

$$v_n^{(j)} = a_{r-j-1}v_{n-1}^{(r-1)} + a_{r-j}v_{n-2}^{(r-1)} + \dots + a_{r-1}v_{n-j-1}^{(r-1)} \quad (3.7)$$

Sendo assim, é suficiente determinar apenas os termos da sequência $v^{(r-1)}$ e os demais termos necessários para gerar a matriz de Leslie de interesse podem ser obtidos em função dos termos dessa sequência.

Outra questão importante a ser respondida envolve o comportamento assintótico de uma determinada população. Em outras palavras, qual é a tendência de distribuição dos indivíduos em cada faixa etária após um período de tempo prolongado?

Para abordar esse problema, a análise gráfica da quantidade de indivíduos por faixa etária, conforme n varia, resultaria na seguinte curva:

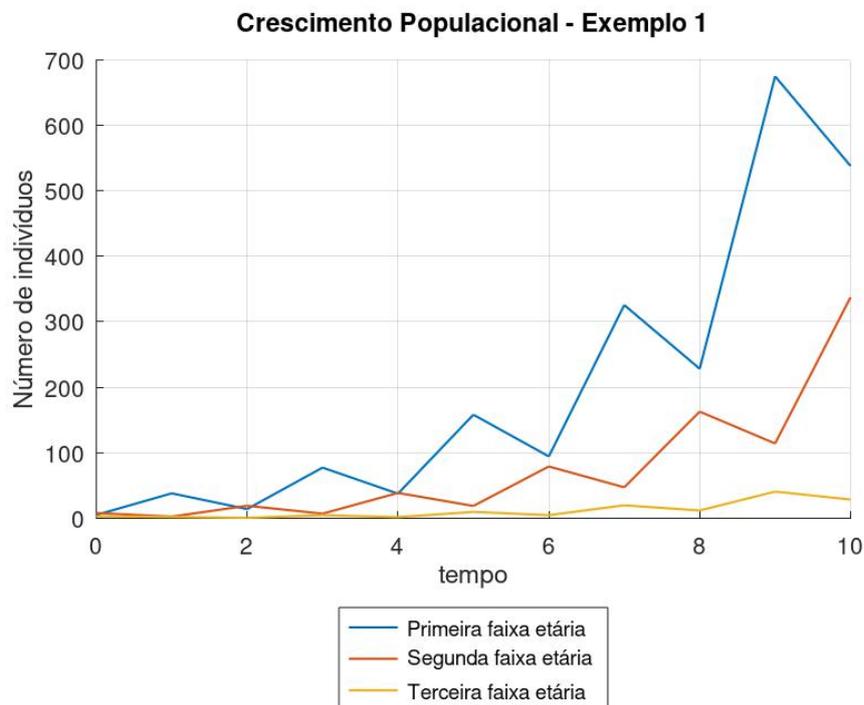


Figura 2 – Crescimento populacional - exemplo 1

O gráfico exibe o crescimento da população ao longo do tempo com base em um conjunto limitado de pontos. No entanto, é importante destacar que, ao analisar apenas alguns casos, torna-se difícil determinar com segurança se a tendência observada se manterá indefinidamente ou se a população tenderá a um valor assintótico. Para compreender melhor o comportamento assintótico de cada curva, a próxima seção se dedicará a apresentar

métodos para determinar o limite da população à medida que o tempo tende ao infinito, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} N(n)$.

Um resultado importante que pode ser obtido através da relação (3.6) é descrito no seguinte teorema.

Teorema 8. *Seja $\mathbb{L}([f_0, \dots, f_{r-1}], [p_0, \dots, p_{r-2}])$ uma matriz de Leslie de ordem r tal que $f_k = 0$, para $k = 0, 1, \dots, r-2$, então $\mathbb{L}^r = p_0 \cdot \dots \cdot p_{r-2} \cdot f_{r-1} \cdot I_r$, onde I_r é a matriz identidade de ordem r .*

Calculando os valores de ω_s , para $0 \leq s \leq r-1$, através da equação (3.4) obtém-se:

$$\omega_0 = p_0 p_1 \cdot \dots \cdot p_{r-2}$$

$$\omega_1 = p_1 \cdot \dots \cdot p_{r-2}$$

$$\vdots$$

$$\omega_{r-2} = p_{r-2}$$

$$\omega_{r-1} = 1$$

Através da relação (3.3) e (3.5), as seguintes recorrências são geradas:

$$v_{m+1}^{(0)} = f_0 \cdot v_m^{(0)} + p_0 f_1 \cdot v_{m-1}^{(0)} + p_0 p_1 f_2 \cdot v_{m-2}^{(0)} + \dots + p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} v_{m-r}^{(0)}$$

$$\Rightarrow v_{m+1}^{(0)} = p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} v_{m-r}^{(0)},$$

$$\text{com } v_0^{(0)} = 1 \text{ e } v_1^{(0)} = v_2^{(0)} = \dots = v_{r-1}^{(0)} = 0,$$

$$v_{m+1}^{(1)} = f_0 \cdot v_m^{(1)} + p_0 f_1 \cdot v_{m-1}^{(1)} + p_0 p_1 f_2 \cdot v_{m-2}^{(1)} + \dots + p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} v_{m-r}^{(1)}$$

$$\Rightarrow v_{m+1}^{(1)} = p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} v_{m-r}^{(1)},$$

$$\text{com } v_1^{(1)} = 1 \text{ e } v_0^{(1)} = v_2^{(1)} = \dots = v_{r-1}^{(1)} = 0,$$

$$\vdots$$

$$v_{m+1}^{(r-1)} = f_0 \cdot v_m^{(r-1)} + p_0 f_1 \cdot v_{m-1}^{(r-1)} + p_0 p_1 f_2 \cdot v_{m-2}^{(r-1)} + \dots + p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} v_{m-r}^{(r-1)}$$

$$\Rightarrow v_{m+1}^{(r-1)} = p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} v_{m-r}^{(r-1)},$$

$$\text{com } v_{r-1}^{(r-1)} = 1 \text{ e } v_1^{(r-1)} = v_2^{(r-1)} = \dots = v_{r-2}^{(r-1)} = 0.$$

Para cada equação deseja-se obter os termos $v_r^{(s)}, v_{r+1}^{(s)}, \dots, v_{2r-1}^{(s)}$, com $s = 0, 1, 2, \dots, r-1$. Construindo cada sequência de forma recursiva:

$$\begin{aligned}
 v^{(0)} &= \underbrace{\{1, 0, 0, \dots, 0\}}_{r\text{-termos}} \underbrace{\{p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}, 0, 0, \dots, 0\}}_{r\text{-termos}}, (p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1})^2, 0, \dots \\
 v^{(1)} &= \underbrace{\{0, 1, 0, \dots, 0\}}_{r\text{-termos}} \underbrace{\{0, p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}, 0, \dots, 0, 0\}}_{r\text{-termos}}, (p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1})^2, \dots \\
 &\quad \vdots \\
 v^{(r-1)} &= \underbrace{\{0, 0, 0, \dots, 1\}}_{r\text{-termos}} \underbrace{\{0, 0, 0, \dots, p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}\}}_{r\text{-termos}}, 0, 0, \dots
 \end{aligned}$$

Logo, a matriz de Leslie procurada é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}^r &= \begin{pmatrix} v_{r+r-1}^{(r-1)} & \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} v_{r+r-1}^{(r-2)} & \frac{\omega_2}{\omega_{r-1}} v_{r+r-1}^{(r-3)} & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_{r-1}} v_{r+r-1}^{(0)} \\ \frac{\omega_0}{\omega_{r-1}} v_{r+r-2}^{(r-1)} & v_{r+r-2}^{(r-2)} & \frac{\omega_2}{\omega_{r-1}} v_{r+r-2}^{(r-3)} & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_{r-1}} v_{r+r-2}^{(0)} \\ \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} v_{r+r-3}^{(r-1)} & \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} v_{r+r-3}^{(r-2)} & v_{r+r-3}^{(r-3)} & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_{r-1}} v_{r+r-3}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_0}{\omega_{r-1}} v_r^{(r-1)} & \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} v_r^{(r-2)} & \frac{\omega_2}{\omega_{r-1}} v_r^{(r-3)} & \dots & v_r^{(0)} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \mathbb{L}^r &= \begin{pmatrix} p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \mathbb{L}^r &= p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L}^r = p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1} \cdot I_r,
 \end{aligned}$$

onde I_r é a matriz identidade de ordem n , permitindo concluir a demonstração.

3.1.1 Comportamento assintótico

O comportamento assintótico de um modelo de Leslie pode ser separado nos seguintes casos. Considere a condição de Ostrowski ([OSTROWSKI, 1973](#)) dada por $\text{mdc}\{j+1, a_j > 0\} = 1$, com $0 \leq j \leq r-1$ e $a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1} = 1$, que é equivalente a dizer que o autovalor dominante é $\lambda_1 = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^n = \begin{bmatrix} \Pi(0) & \dots & \Pi(r-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi(0) & \dots & \Pi(r-1) \end{bmatrix},$$

onde as entradas $\Pi(s)$, com $0 \leq s \leq r-1$, são dadas por $\Pi(s) = \Pi(s, 1)$, sendo que

$$\Pi(k, \lambda_1) = \frac{\sum_{j=k}^{r-1} \frac{a_j}{\lambda_1^{j+1}}}{\sum_{j=0}^{r-1} (j+1) \frac{a_j}{\lambda_1^{j+1}}}, \quad (3.8)$$

assim as entradas da matriz são dadas por:

$$\Pi(s) = \frac{\sum_{j=s}^{r-1} a_j}{\sum_{j=0}^{r-1} (j+1)a_j}, \quad \text{com } 0 \leq s \leq r-1. \quad (3.9)$$

Dessa forma é possível determinar o comportamento assintótico da potenciação da matriz de Leslie:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^n = \begin{bmatrix} \Pi(0) & \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \Pi(1) & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_0} \cdot \Pi(r-1) \\ \frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot \Pi(0) & \Pi(1) & \dots & \frac{\omega_0}{\omega_{r-1}} \cdot \Pi(r-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_0}{\omega_{r-1}} \cdot \Pi(0) & \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} \cdot \Pi(1) & \dots & \Pi(r-1) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

Exemplo 12. Considerando a matriz de Leslie utilizada no exemplo 8 (Método da diagonalização), determine através da fórmula anterior o comportamento assintótico dessa matriz e depois compare com o resultado obtido anteriormente tomando $n \rightarrow \infty$.

A matriz de Leslie do problema é dada por $\mathbb{L} \left(\left[\frac{1}{5}, \frac{13}{16}, \frac{3}{8} \right], \left[\frac{4}{5}, \frac{1}{2} \right] \right)$ e as entradas da primeira linha da matriz companheira são dadas por (3.5), obtendo $a_0 = \frac{1}{5}$, $a_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{13}{16} = \frac{13}{20}$ e $a_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$.

Note que ambas condições do caso anterior são satisfeitas, ou seja, $\text{mdc}\{j+1, a_j > 0\} = \text{mdc}\{1, 2, 3\} = 1$ e $a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{5} + \frac{13}{20} + \frac{3}{20} = 1$.

Calculando os coeficientes $\Pi(j)$, com $j = 0, 1, 2$, de acordo com a equação (3.9):

$$\begin{aligned} \Pi(0) &= \frac{a_0 + a_1 + a_2}{1a_0 + 2a_1 + 3a_2} \Rightarrow \Pi(0) = \frac{20}{39} \\ \Pi(1) &= \frac{a_1 + a_2}{1a_0 + 2a_1 + 3a_2} \Rightarrow \Pi(1) = \frac{16}{39} \end{aligned}$$

$$\Pi(2) = \frac{a_2}{1a_0 + 2a_1 + 3a_2} \Rightarrow \Pi(2) = \frac{1}{13}$$

Os coeficientes ω_j , com $j = 0, 1, 2$, são dados pela equação (3.4), obtendo $\omega_0 = p_0 \cdot p_1 = \frac{2}{5}$, $\omega_1 = \frac{1}{2}$ e $\omega_2 = 1$.

Com isso, o comportamento assintótico da matriz de Leslie pode ser descrito pela equação (3.10) como segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}^n = \begin{bmatrix} \frac{20}{39} & \frac{20}{39} & \frac{5}{26} \\ \frac{39}{16} & \frac{39}{16} & \frac{26}{2} \\ \frac{39}{8} & \frac{39}{8} & \frac{13}{1} \\ \frac{39}{39} & \frac{39}{39} & \frac{13}{13} \end{bmatrix}$$

No exemplo 8, a seguinte matriz para descrever \mathbb{L}^n , com $n \in \mathbb{N}$ foi determinada:

$$\mathbb{L}^n = \frac{1}{624} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= -8 \cdot \left(-65 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{10} \right)^n \cdot 3^{n+3} - 40 \right), \\ a_{12} &= 5 \cdot \left(-91 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{10} \right)^n \cdot 3^{n+3} + 64 \right), \\ a_{13} &= 30 \cdot \left(-13 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{10} \right)^n \cdot 3^{n+2} + 4 \right), \\ a_{21} &= -2^{6-n} \cdot 5^{-n} \cdot (13 \cdot (-5)^n + (-1)^{n+1} \cdot 3^{n+2} - 2^{n+2} \cdot 5^n), \\ a_{22} &= 2^{3-n} \cdot 5^{-n} \cdot (91 \cdot (-5)^n - 5 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+2} + 2^{n+5} \cdot 5^n), \\ a_{23} &= 3 \cdot 2^{4-n} \cdot 5^{-n} \cdot (13 \cdot (-5)^n - 5 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n), \\ a_{31} &= 2^{6-n} \cdot 5^{-n} \cdot (13 \cdot (-5)^n - 5 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 5^n), \\ a_{32} &= -2^{3-n} \cdot 5^{-n} \cdot (91 \cdot (-5)^n - 25 \cdot (-1)^n \cdot 3^{n+1} - 2^{n+4} \cdot 5^n), \\ a_{33} &= -48 \cdot 5^{-n} \left(13 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right)^n - 25 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^n - 5^n \right). \end{aligned}$$

Determinando os coeficientes quando $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{11} = \lim_{n \rightarrow \infty} -8 \cdot \left(-65 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \right)^n}_0 + 27 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10} \right)^n}_0 - 40 \right) = 320$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{12} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \left(-91 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \right)^n}_0 + 27 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10} \right)^n}_0 + 64 \right) = 320$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{13} = \lim_{n \rightarrow \infty} 30 \cdot \left(-13 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \right)^n}_0 + 9 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10} \right)^n}_0 + 4 \right) = 120$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{21} &= \lim_{n \rightarrow \infty} -64 \cdot \left(13 \cdot \underbrace{\left(-\frac{5}{10}\right)^n}_0 - 9 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10}\right)^n}_0 - 4 \right) = 256 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{22} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \cdot \left(91 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_0 - 45 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10}\right)^n}_0 + 32 \right) = 256 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{23} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 48 \cdot \left(13 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_0 - 15 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10}\right)^n}_0 + 2 \right) = 96 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{31} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 64 \cdot \left(13 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_0 - 15 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10}\right)^n}_0 + 2 \right) = 128 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{32} &= \lim_{n \rightarrow \infty} -8 \cdot \left(91 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_0 - 75 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10}\right)^n}_0 - 16 \right) = 128 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{33} &= \lim_{n \rightarrow \infty} -48 \cdot \left(13 \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_0 - 25 \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{10}\right)^n}_0 - 1 \right) = 48 \end{aligned}$$

Com isso, a matriz \mathbb{L}^n , quando n tende ao infinito é dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}^n = \frac{1}{624} \cdot \begin{bmatrix} 320 & 320 & 120 \\ 256 & 256 & 96 \\ 128 & 128 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{39} & \frac{20}{39} & \frac{5}{26} \\ \frac{16}{39} & \frac{16}{39} & \frac{2}{13} \\ \frac{8}{39} & \frac{8}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Neste exemplo, determinar o comportamento assintótico de maneira analítica pelo uso das equações de diferenças se apresentou mais simples quando comparado com o método da diagonalização, onde é necessário determinar a potência da matriz de Leslie para $n \in \mathbb{N}$ e em seguida avaliar o limite dessa potência quando $n \rightarrow \infty$.

Considere agora que $\text{mdc}\{j+1, a_j > 0\} = 1$, mas $a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1} \neq 1$, ou seja, o autovalor dominante $\lambda_1 \neq 1$. Neste caso a matriz tenderá a zero, se $0 < \lambda_1 < 1$ ou seus coeficientes irão tender a infinito, se $\lambda_1 > 1$, assim o comportamento assintótico da matriz de Leslie já está descrito, sendo interessante determinar a proporção populacional, ou seja, é determinado a matriz de proporção Q tal que $\frac{Qx_0}{\|Qx_0\|_1}$ indica o comportamento assintótico da porcentagem da população por faixa etária, onde x_0 é o vetor que indica a distribuição inicial da população ao longo das faixas etárias.

Para isso, dividindo a equação (3.6) por λ_1^n , tem-se:

$$\frac{\mathbb{L}^n}{\lambda_1^n} = \begin{pmatrix} \frac{v_{n+r-1}^{(r-1)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_1 v_{n+r-1}^{(r-2)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_2 v_{n+r-1}^{(r-3)}}{\lambda_1^n} & \dots & \frac{\omega_{r-1} v_{n+r-1}^{(0)}}{\lambda_1^n} \\ \frac{\omega_0 v_{n+r-2}^{(r-1)}}{\lambda_1^n} & \frac{v_{n+r-2}^{(r-2)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_2 v_{n+r-2}^{(r-3)}}{\lambda_1^n} & \dots & \frac{\omega_{r-1} v_{n+r-2}^{(0)}}{\lambda_1^n} \\ \frac{\omega_1 v_{n+r-3}^{(r-1)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_1 v_{n+r-3}^{(r-2)}}{\lambda_1^n} & \frac{v_{n+r-3}^{(r-3)}}{\lambda_1^n} & \dots & \frac{\omega_{r-1} v_{n+r-3}^{(0)}}{\lambda_1^n} \\ \frac{\omega_2 v_{n+r-4}^{(r-1)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_2 v_{n+r-4}^{(r-2)}}{\lambda_1^n} & \frac{v_{n+r-4}^{(r-3)}}{\lambda_1^n} & \dots & \frac{\omega_{r-1} v_{n+r-4}^{(0)}}{\lambda_1^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_0 v_n^{(r-1)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_1 v_n^{(r-2)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_2 v_n^{(r-3)}}{\lambda_1^n} & \dots & \frac{v_n^{(0)}}{\lambda_1^n} \\ \frac{\omega_{r-1} v_{n+r-1}^{(r-1)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_{r-1} v_{n+r-1}^{(r-2)}}{\lambda_1^n} & \frac{\omega_{r-1} v_{n+r-1}^{(r-3)}}{\lambda_1^n} & \dots & \frac{v_{n+r-1}^{(0)}}{\lambda_1^n} \end{pmatrix}$$

Utilizando o resultado que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n^{(s)}}{\lambda_1^n} = \frac{v_{n+1}^{(s)}}{\lambda_1^{n+1}} = \dots = \frac{v_{n+r-1}^{(s)}}{\lambda_1^{n+r-1}} = \frac{\Pi(r-s-1; \lambda_1)}{\lambda_1^s}$, defini-se os coeficientes $L_{s; \lambda_1}$ por:

$$L_{s; \lambda_1} = \frac{\Pi(r-s-1; \lambda_1)}{\lambda_1^s}, \quad 0 \leq s \leq r-1, \quad (3.11)$$

sendo possível afirmar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{L}^n}{\lambda_1^n}$ converge para uma matriz Q tal que

$$Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{L}^n}{\lambda_1^n} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} L_{r-1; \lambda_1} & \lambda_1^{r-1} \frac{\omega_1}{\omega_0} L_{r-2; \lambda_1} & \lambda_1^{r-1} \frac{\omega_2}{\omega_0} L_{r-3; \lambda_1} & \dots & \lambda_1^{r-1} \frac{\omega_{r-1}}{\omega_0} L_{0; \lambda_1} \\ \lambda_1^{r-2} \frac{\omega_0}{\omega_1} L_{r-1; \lambda_1} & \lambda_1^{r-2} L_{r-2; \lambda_1} & \lambda_1^{r-2} \frac{\omega_2}{\omega_1} L_{r-3; \lambda_1} & \dots & \lambda_1^{r-2} \frac{\omega_{r-1}}{\omega_1} L_{0; \lambda_1} \\ \lambda_1^{r-3} \frac{\omega_0}{\omega_2} L_{r-1; \lambda_1} & \lambda_1^{r-3} \frac{\omega_1}{\omega_2} L_{r-2; \lambda_1} & \lambda_1^{r-3} L_{r-3; \lambda_1} & \dots & \lambda_1^{r-3} \frac{\omega_{r-1}}{\omega_2} L_{0; \lambda_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_0}{\omega_{r-1}} L_{r-1; \lambda_1} & \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} L_{r-2; \lambda_1} & \frac{\omega_2}{\omega_{r-1}} L_{r-3; \lambda_1} & \dots & L_{0; \lambda_1} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

O problema apresentado nos exemplos 7 e 11 busca visualizar o comportamento da população ao longo do tempo. Apesar de indicar um crescimento, não é possível afirmar qual será seu comportamento assintótico. Utilizando as relações descritas anteriormente é possível determinar esse comportamento.

O polinômio característico da matriz $\mathbb{L} \left([0, 4, 2], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right] \right)$ é dado pela equação (2.6) como segue:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1}{2} \cdot 4\lambda - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{1}{4}$$

Para determinar o comportamento assintótico da matriz é necessário determinar o autovalor dominante de \mathbb{L} dado pela raiz $\lambda > 0$ real de P . Utilizando o método de Newton-Raphson, explicado com mais detalhes em (AKRAM; ANN, 2015), com $\lambda_0 = 1$ como valor inicial:

Tabela 1 – Valores obtidos através da aplicação do método de Newton-Raphson.

n	λ_n	$P(\lambda_n)$	$P'(\lambda_n)$	$ \lambda_n - \lambda_{n-1} $
0	1	-1,25	1	—
1	2,25	6,6406	13,1875	1,25
2	1,7464	1,5836	7,1497	0,5036
3	1,5249	0,2461	4,9756	0,2215
4	1,4754	0,0109	4,5304	0,0495
5	1,4730	—	—	0,0024

Com isso, o autovalor dominante de L pode ser aproximado por $\lambda_1 = 1,4730 > 1$, concluindo que os coeficientes da matriz de Leslie e, conseqüentemente, a população descrita por essa matriz irá crescer indefinidamente. Nesse caso, através da equação (3.12) é possível obter a matriz de proporção Q tal que indicará a que proporção do total cada faixa etária irá se aproximar ao longo do tempo.

Calculando os coeficientes ω_s pela equação (3.4), $\omega_0 = \frac{1}{8}, \omega_1 = \frac{1}{4}, \omega_2 = 1$, e os coeficientes a_j pela equação (3.5), $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{4}$.

Calculando os coeficientes $\Pi(s, \lambda_1)$ pela equação (3.8):

$$\Pi(0, \lambda_1) = \frac{\frac{a_0}{\lambda_1^1} + \frac{a_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_2}{\lambda_1^3}}{\frac{a_0}{\lambda_1^1} + 2\frac{a_1}{\lambda_1^2} + 3\frac{a_2}{\lambda_1^3}} \Rightarrow \Pi(0, \lambda_1) = 0,4812$$

$$\Pi(1, \lambda_1) = \frac{\frac{a_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_2}{\lambda_1^3}}{\frac{a_0}{\lambda_1^1} + 2\frac{a_1}{\lambda_1^2} + 3\frac{a_2}{\lambda_1^3}} \Rightarrow \Pi(1, \lambda_1) = 0,4812$$

$$\Pi(2, \lambda_1) = \frac{\frac{a_2}{\lambda_1^3}}{\frac{a_0}{\lambda_1^1} + 2\frac{a_1}{\lambda_1^2} + 3\frac{a_2}{\lambda_1^3}} \Rightarrow \Pi(2, \lambda_1) = 0,0376$$

Com isso, os coeficientes $L_{s;\lambda_1}$ dados pela equação (3.11) são $L_{0;\lambda_1} = \frac{\Pi(2; \lambda_1)}{\lambda_1^0} = 0,0376, L_{1;\lambda_1} = \frac{\Pi(1; \lambda_1)}{\lambda_1^1} = 0,3267, L_{2;\lambda_1} = \frac{\Pi(0; \lambda_1)}{\lambda_1^2} = 0,2218$, e a matriz Q é determinada como segue:

$$Q = \begin{pmatrix} 1,4730^2 \cdot 0,2218 & 1,4730^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,3267 & 1,4730^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,0376 \\ 1,4730 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,2218 & 1,4730 \cdot 0,3267 & 1,4730 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,0376 \\ \frac{1}{8} \cdot 0,2218 & \frac{1}{4} \cdot 0,3267 & 0,0376 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0,4812 & 1,4177 & 0,6527 \\ 0,1634 & 0,4812 & 0,2215 \\ 0,0277 & 0,0817 & 0,0376 \end{pmatrix}$$

Utilizando a matriz Q e sabendo que a população inicial é dada pelo vetor $x_0 = (5, 8, 3)$, a proporção populacional por faixa etária irá tender para

$$\frac{Q \cdot x_0}{\|Q \cdot x_0\|_1} = \begin{pmatrix} 0,716 \\ 0,243 \\ 0,041 \end{pmatrix}$$

Logo, a população seguirá crescendo indefinidamente se aproximando da proporção em que 71,6% da população pertencerá a primeira faixa etária, 24,3% a segunda faixa etária e 4,1% a última faixa etária.

O gráfico mostrando o comportamento da porcentagem por faixa etária ao longo do tempo é apresentado a seguir:

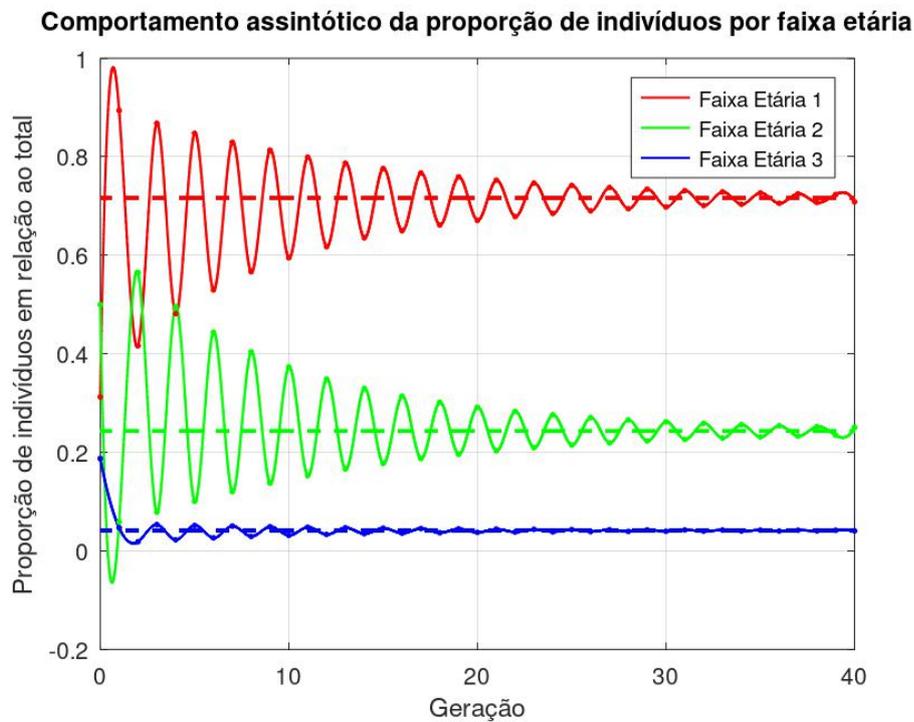


Figura 3 – Proporção populacional ao longo do tempo.

O outro caso consiste em determinar o comportamento assintótico do modelo de Leslie quando $\text{mdc}\{j + 1, a_j > 0\} = d \geq 2$, com $0 \leq j \leq r - 1$ e $\lambda_1 = 1$.

Nessas condições o limite da sequência $(\mathbb{L}^{nd+l})_{n \geq 0}$ para $l = 1, 2, \dots, d$ é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd+l} = \begin{bmatrix} q_l(0, 0) & \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot q_l(0, 1) & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_0} \cdot q_l(0, r-1) \\ \frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot q_l(1, 0) & q_l(1, 1) & \dots & \frac{\omega_{r-1}}{\omega_1} \cdot q_l(1, r-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_0}{\omega_{r-1}} \cdot q_l(r-1, 0) & \frac{\omega_1}{\omega_{r-1}} \cdot q_l(r-1, 1) & \dots & q_l(r-1, r-1) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

onde ω_i , com $0 \leq i \leq r-1$ é dado como apresentado na equação (3.4) e $q_l(i, j)$ é dado por

$$q_l(i, j) = \begin{cases} d \cdot \Pi(j), & \text{se } j \equiv i + l \pmod{d} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.14)$$

onde $\Pi(j)$ é descrito em (3.9).

Por fim, considerando $\text{mdc}\{j+1, a_j > 0\} = d \geq 2$ e $a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1} \neq 1$, a população irá crescer indefinidamente se $\lambda_1 > 1$ ou tenderá a zero se $0 < \lambda_1 < 1$, assim o comportamento da proporção entre faixas etárias da população pode ser calculado utilizando a matriz $Q_l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{L}^{nd+l}}{\lambda_1^{nd+l}}$ dada por:

$$Q_l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{L}^{nd+l}}{\lambda_1^{nd+l}} = \begin{bmatrix} q_l(0, 0) & \lambda_1 \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot q_l(0, 1) & \dots & \lambda_1^{r-1} \frac{\omega_{r-1}}{\omega_0} \cdot q_l(0, r-1) \\ \frac{\omega_0}{\lambda_1 \omega_1} \cdot q_l(1, 0) & q_l(1, 1) & \dots & \lambda_1^{r-2} \frac{\omega_{r-1}}{\omega_1} \cdot q_l(1, r-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_0}{\lambda_1^{r-1} \omega_{r-1}} \cdot q_l(r-1, 0) & \frac{\omega_1}{\lambda_1^{r-2} \omega_{r-1}} \cdot q_l(r-1, 1) & \dots & q_l(r-1, r-1) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

onde ω_i , com $0 \leq i \leq r-1$ é dado como apresentado na equação (3.4) e $q_l(i, j)$ é dado por

$$q_l(i, j) = \begin{cases} d \cdot \Pi(j, \lambda_1), & \text{se } j \equiv i + l \pmod{d} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.16)$$

onde $\Pi(j, \lambda_1)$ é descrito em (3.8).

Exemplo 13. Considere uma matriz de Leslie contendo quatro faixas etárias tais que $f_0 = f_1 = f_2 = 0$ e $f_3 > 0$. Determine o comportamento assintótico da matriz de Leslie em termo de seus parâmetros.

A matriz de Leslie é dada por $\mathbb{L}([0, 0, 0, f_3], [p_0, p_1, p_2])$ e seu polinômio característico é dado pela equação (2.6) como segue:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - p_0 p_1 p_2 f_3$$

Note que esse polinômio possui uma raiz real $\lambda_1 = (p_0 p_1 p_2 f_3)^{\frac{1}{4}} > 0$ e as demais complexas.

Se $\lambda_1 = 1$, então $p_0 p_1 p_2 f_3 = 1$ e é possível utilizar a equação (3.13) para resolver este problema, já que $\lambda_1 = 1$ e $d = \text{mdc}\{j+1, a_j > 0\} = 4$, pois $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ e $a_3 = p_0 p_1 p_2 f_3 = 1 > 0$.

Calculando os coeficientes ω_s pela equação (3.4), obtém-se $\omega_0 = p_0 p_1 p_2$, $\omega_1 = p_1 p_2$, $\omega_2 = p_2$ e $\omega_3 = 1$.

Calculando os coeficientes $\Pi(s)$ pela equação (3.9), $\Pi(0) = \Pi(1) = \Pi(2) = \Pi(3) = \frac{1}{4}$, permitindo calcular os coeficientes $q_4(i, j)$ pela equação (3.14) como segue:

$$\begin{aligned} q_4(0, 0) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, & q_4(0, 1) &= 0, & q_4(0, 2) &= 0, & q_4(0, 3) &= 0, \\ q_4(1, 0) &= 0, & q_4(1, 1) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, & q_4(1, 2) &= 0, & q_4(1, 3) &= 0, \\ q_4(2, 0) &= 0, & q_4(2, 1) &= 0, & q_4(2, 2) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, & q_4(2, 3) &= 0, \\ q_4(3, 0) &= 0, & q_4(3, 1) &= 0, & q_4(3, 2) &= 0, & q_4(3, 3) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

Assim, o comportamento da matriz quando $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+4}$ é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+3}$, basta multiplicar a matriz anterior por $\mathbb{L}, \mathbb{L}^2, \mathbb{L}^3$, respectivamente, obtendo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_2 f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 f_3 \\ p_0 p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{4n+3} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 p_2 f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 p_2 f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 p_1 f_3 \\ p_0 p_1 p_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, considere que $\lambda_1 \neq 1$, assim é necessário utilizar a equação (3.15) para resolver esse problema. Note que os valores dos coeficientes $\omega_s, a_s, d = \text{mdc}\{j+1, a_j > 0\}$ permanecem os mesmos do que o caso anterior, sendo necessário apenas se atentar que $a_3 = p_0 p_1 p_2 f_3 \neq 1$ e $\lambda_1 = (p_0 p_1 p_2 f_3)^{\frac{1}{4}} \neq 1$.

Calculando os coeficientes $\Pi(s, \lambda_1)$ pela equação (3.8), $\Pi(0, \lambda_1) = \Pi(1, \lambda_1) = \Pi(2, \lambda_1) = \Pi(3, \lambda_1) = \frac{1}{4}$, permitindo calcular os coeficientes $q_4(i, j)$ pela equação (3.16)

como segue:

$$\begin{aligned}
 q_4(0,0) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, & q_4(0,1) &= 0, & q_4(0,2) &= 0, & q_4(0,3) &= 0, \\
 q_4(1,0) &= 0, & q_4(1,1) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, & q_4(1,2) &= 0, & q_4(1,3) &= 0, \\
 q_4(2,0) &= 0, & q_4(2,1) &= 0, & q_4(2,2) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1, & q_4(2,3) &= 0, \\
 q_4(3,0) &= 0, & q_4(3,1) &= 0, & q_4(3,2) &= 0, & q_4(3,3) &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.
 \end{aligned}$$

Assim, o comportamento da matriz Q_4 que indica a proporcionalidade da população, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{L}^{4n+4}}{\lambda_1^{4n+4}}$, é dada por:

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar Q_1, Q_2, Q_3 , basta multiplicar a matriz anterior por $\mathbb{L}, \mathbb{L}^2, \mathbb{L}^3$, respectivamente, obtendo:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \\
 Q_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_2 f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 f_3 \\ p_0 p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 Q_3 &= \begin{pmatrix} 0 & p_1 p_2 f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 p_2 f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 p_1 f_3 \\ p_0 p_1 p_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Note que para uma matriz de Leslie qualquer da forma $\mathbb{L}([0, 0, 0, f_3], [p_0, p_1, p_2])$ ocorre que $\mathbb{L}^{4n} = I_4$ se $\lambda_1 = 1$ e $\frac{\mathbb{L}^{4n}}{\lambda_1^{4n}} = I_4$ se $\lambda_1 \neq 1$, onde I_4 é a matriz identidade de ordem quatro, ou seja, o comportamento da espécie ao longo do tempo segue o padrão $x_0, \mathbb{L}x_0, \mathbb{L}^2x_0, \mathbb{L}^3x_0$, onde x_0 é o vetor que descreve a quantia de seres inicialmente em cada faixa etária. De forma análoga, a proporção percentual é dada por $\frac{x_0}{\|x_0\|_1}, \frac{\mathbb{L}x_0}{\|\mathbb{L}x_0\|_1}, \frac{\mathbb{L}^2x_0}{\|\mathbb{L}^2x_0\|_1}, \frac{\mathbb{L}^3x_0}{\|\mathbb{L}^3x_0\|_1}$.

É importante lembrar que para $\lambda_1 \neq 1$, a população crescerá indefinidamente se $\lambda_1 > 1$ e decrescerá se aproximando de zero se $0 < \lambda_1 < 1$ seguindo a proporção descrita anteriormente.

O resultado obtido através desse exemplo pode ser generalizado pelo corolário do teorema 8 que trata de matrizes de Leslie do tipo $\mathbb{L}[(0, \dots, 0, f_{r-1}), (p_0, \dots, p_{r-2})]$ que é apresentado a seguir.

Corolário 1 (Teorema 8). *Se \mathbb{L} é uma matriz de Leslie de ordem r tal que $f_i = 0$ para $i = 0, 1, \dots, r-2$ e $f_{r-1} \neq 0$, então $\text{mdc}\{j+1, a_j > 0\} = r$ e a proporção assintótica de indivíduos é dada por:*

$$\frac{\mathbb{L}^l x_0}{\|\mathbb{L}^l x_0\|_1},$$

com $l = 0, 1, \dots, r-1$.

Note que $a_0 = a_1 = \dots = a_{r-2} = 0$ e $a_{r-1} = p_0 p_1 \dots p_{r-2} f_{r-1}$, logo $\text{mdc}\{j+1, a_j > 0\} = r$.

Pelo Teorema 8, é possível afirmar que $\mathbb{L}^r = p_0 \cdot \dots \cdot p_{r-2} \cdot f_{r-1} \cdot I_r$, então:

$$\mathbb{L}^{rn+l} = (\mathbb{L}^r)^n \cdot \mathbb{L}^l \Rightarrow \mathbb{L}^{rn+l} = \mathbb{L}^l \cdot (p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1} \cdot I_r)^n \Rightarrow \mathbb{L}^{rn+l} = \mathbb{L}^l \cdot (p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1})^n \cdot I_r,$$

para $l = 0, 1, \dots, r-1$.

Assim, o comportamento assintótico é dado por:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{L}^{rn+l} x_0}{\|\mathbb{L}^{rn+l} x_0\|_1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{L}^l \cdot (p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1})^n \cdot x_0}{\|\mathbb{L}^l \cdot (p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1})^n \cdot x_0\|_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1})^n \cdot \mathbb{L}^l \cdot x_0}{(p_0 \dots p_{r-2} f_{r-1})^n \cdot \|\mathbb{L}^l \cdot x_0\|_1} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{L}^{rn+l} x_0}{\|\mathbb{L}^{rn+l} x_0\|_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{L}^l \cdot x_0}{\|\mathbb{L}^l \cdot x_0\|_1} = \frac{\mathbb{L}^l x_0}{\|\mathbb{L}^l x_0\|_1}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

4 Comparação Numérica de Métodos: Abordagens por Diagonalização de matriz e pela equações de diferenças

Para implementar os métodos de diagonalização e equações de diferenças, o software Octave versão 8.4.0 foi escolhido devido a sua eficiência e facilidade em trabalhar com cálculos matriciais, disponibilidade de funções matemáticas relevantes e ser um software gratuito compatível ao MATLAB. As simulações em Octave foram realizadas em um notebook Lenovo Intel (R) Core (TM) i5-10210U com 4 cores de núcleo e sistema operacional Windows 11 versão 22H2. A escolha do software forneceu uma base sólida para a implementação e permitiu uma comparação eficaz entre as abordagens discutidas.

4.1 Simulação do cálculo de \mathbb{L}^n para $n \in \mathbb{N}$

Uma maneira direta de calcular a potência de uma matriz qualquer é utilizando a definição de potência, ou seja, para determinar \mathbb{L}^n , basta realizar o produto da matriz \mathbb{L} por ela mesma até se obter a potência desejada. Esse método será comparado com duas outras abordagens distintas, analisando as vantagens e desvantagens de cada uma em diferentes cenários.

O primeiro método, descrito pelo algoritmo 1, consiste em determinar a potência da matriz de Leslie utilizando a decomposição de Jordan desta matriz. Neste caso estaremos assumindo que a matriz é diagonalizável.

O segundo método utiliza-se das equações de diferenças (equação de Fibonacci generalizada) para determinar as entradas da matriz \mathbb{L}^n como apresentado a seguir no algoritmo 2.

No método que se utiliza da equação de Fibonacci generalizada, distintos métodos podem ser utilizados para determinar os coeficientes $v_i^{(j)}$.

Neste trabalho três abordagens são apresentadas para determinar os coeficientes $v_i^{(j)}$. O primeiro método consiste em determinar os coeficientes utilizando da própria recorrência, ou seja, calculando termo a termo. A segunda abordagem é dada resolvendo a recorrência, ou seja, determinando a função que descreve o comportamento da recorrência e determinando apenas os termos $v_i^{(j)}$ necessários para obter a matriz potência de Leslie. A última abordagem consiste em obter apenas uma família dos coeficientes $v_i^{(j)}$ e utilizando esses valores determinar as demais famílias, já que as famílias consistem em combinações

Algoritmo 1 – Cálculo da potência de uma matriz de Leslie através de sua matriz diagonal.

Dados: Taxas de reprodução f e sobrevivência p da espécie e expoente n

Resultado: Potência da matriz de Leslie \mathbb{L}^n

início

para $f \in \mathbb{R}^m, p \in \mathbb{R}^{m-1}$ e $n \in \mathbb{N}$ **faça**

Definir a matriz de Leslie \mathbb{L} tal que $\mathbb{L}_{1,i} = f_i$, com $i = 1, \dots, m$, $\mathbb{L}_{i+1,i} = p_i$, com $i = 1, \dots, m-1$, e as demais entradas são nulas.;

$\mathbb{L} \leftarrow$ matriz de Leslie $\mathbb{L}(f, p)$;

Calcular os autovalores da matriz de Leslie \mathbb{L} encontrando as raízes do polinômio característico dessa matriz.;

$D \leftarrow$ vetor de autovalores de \mathbb{L} ;

Prosseguir para determinar os autovetores associados aos autovalores previamente calculados, resolvendo a equação $(\mathbb{L} - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$ para cada autovalor λ .;

$M \leftarrow$ matriz de autovetores de \mathbb{L} ;

Calcular a matriz inversa da matriz de autovetores M .;

$N \leftarrow M^{-1}$;

Efetuar o cálculo da n -ésima potência de cada autovalor.;

$D^n \leftarrow \lambda_i^n$;

Construir uma matriz diagonal com as entradas provenientes das potências calculadas dos autovalores.;

$D^n \leftarrow \text{diag}(D_1^n, \dots, D_m^n)$;

Finalizar o cálculo da matriz de Leslie elevada à potência n utilizando a fórmula de diagonalização: $\mathbb{L}^n = M \cdot D^n \cdot N$, onde M representa a matriz de autovetores e N é a matriz inversa de M .;

$\mathbb{L}^n \leftarrow M \cdot D^n \cdot N$

fim

fim

Algoritmo 2 – Cálculo da potência de uma matriz de Leslie através da equação de Fibonacci generalizada.

Dados: Taxas de reprodução f e sobrevivência p da espécie e expoente n

Resultado: Potência da matriz de Leslie \mathbb{L}^n

início

para $f \in \mathbb{R}^m, p \in \mathbb{R}^{m-1}$ e $n \in \mathbb{N}$ **faça**

Definir a matriz de Leslie \mathbb{L} tal que $\mathbb{L}_{1,i} = f_i$, com $i = 1, \dots, m$, $\mathbb{L}_{i+1,i} = p_i$, com $i = 1, \dots, m-1$, e as demais entradas são nulas.;

$\mathbb{L} \leftarrow$ matriz de Leslie $\mathbb{L}(f, p)$;

Calcular os coeficientes da matriz companheira \mathbb{A} .;

$\mathbb{A}_i \leftarrow p_1 \cdot \dots \cdot p_{i-1} \cdot f_i$, com $\mathbb{A}_1 = f_1$ e $i = 2, \dots, m$;

Calcular coeficientes ω_i utilizados para determinar as entradas da matriz \mathbb{L}^n .;

$\omega_i \leftarrow p_i \cdot \dots \cdot p_{m-1}$, com $i = 1, \dots, m-1$ e $\omega_m = 1$;

Calcular os coeficientes $v_i^{(s)}$, com $i = n+r-1, \dots, v_n$ e $s = 0, 1, \dots, r-1$ dados pela recorrência (3.3). Diferentes abordagens são feitas para obtenção destes termos.;

$v_i^{(s)} \leftarrow$ coeficientes $v_i^{(s)}$, com $i = n+r-1, \dots, v_n$ e $s = 0, 1, \dots, r-1$ Finalizar o cálculo da matriz de Leslie elevada à potência n determinando suas entradas pela relação

$$(\mathbb{L}^n)_{i,j} = \frac{\omega_j}{\omega_i} v_{n+m-i}^{(m-j)}$$

$$(\mathbb{L}^n)_{i,j} \leftarrow \frac{\omega_j}{\omega_i} v_{n+m-i}^{(m-j)}$$

fim

fim

lineares entre si como apresentado em (ANIZ; RACHIDI, 2022). Esses métodos serão referenciados como RA1, RA2 e RA3, respectivamente.

Para esse estudo é analisado diferentes casos de matriz de Leslie, com valores gerados aleatoriamente, variando a ordem n da matriz e a potência t que está sendo elevada como pode ser visto na tabela 2.

Tabela 2 – Tempo de processamento para o cálculo de \mathbb{L}^n .

r	n	Simulação (segundos)				
		Forma direta	RA1	RA2	RA3	Diagonal
3	5	$1.0014 \cdot 10^{-5}$	$5.1856 \cdot 10^{-4}$	$1.3885 \cdot 10^{-3}$	$4.4560 \cdot 10^{-4}$	$6.0439 \cdot 10^{-5}$
	10	$1.0967 \cdot 10^{-5}$	$8.7512 \cdot 10^{-4}$	$1.3345 \cdot 10^{-3}$	$7.1847 \cdot 10^{-4}$	$5.3883 \cdot 10^{-5}$
	50	$1.3113 \cdot 10^{-5}$	$3.9464 \cdot 10^{-3}$	$1.3379 \cdot 10^{-3}$	$3.0919 \cdot 10^{-3}$	$6.0081 \cdot 10^{-5}$
5	5	$1.0967 \cdot 10^{-5}$	$1.1598 \cdot 10^{-3}$	$4.5094 \cdot 10^{-3}$	$9.0158 \cdot 10^{-4}$	$6.8903 \cdot 10^{-5}$
	10	$1.1921 \cdot 10^{-5}$	$2.0511 \cdot 10^{-3}$	$4.3194 \cdot 10^{-3}$	$1.5479 \cdot 10^{-3}$	$6.6996 \cdot 10^{-5}$
	50	$1.4067 \cdot 10^{-5}$	$9.6911 \cdot 10^{-3}$	$4.3640 \cdot 10^{-3}$	$6.9020 \cdot 10^{-3}$	$8.2493 \cdot 10^{-5}$
10	5	$1.2875 \cdot 10^{-5}$	$4.0996 \cdot 10^{-3}$	$1.6953 \cdot 10^{-1}$	$2.8830 \cdot 10^{-3}$	$1.2648 \cdot 10^{-4}$
	10	$1.9073 \cdot 10^{-5}$	$1.0949 \cdot 10^{-2}$	$2.4942 \cdot 10^{-1}$	$7.3301 \cdot 10^{-3}$	$1.7595 \cdot 10^{-4}$
	50	$1.9073 \cdot 10^{-5}$	$4.2047 \cdot 10^{-2}$	$1.9502 \cdot 10^{-1}$	$2.7878 \cdot 10^{-2}$	$1.5497 \cdot 10^{-4}$
20	5	$1.3828 \cdot 10^{-5}$	$1.5064 \cdot 10^{-2}$	3.6665	$9.8335 \cdot 10^{-3}$	$2.2650 \cdot 10^{-4}$
	10	$1.6093 \cdot 10^{-5}$	$2.8265 \cdot 10^{-2}$	3.5991	$1.7650 \cdot 10^{-2}$	$2.1601 \cdot 10^{-4}$
	50	$2.0504 \cdot 10^{-5}$	$1.3502 \cdot 10^{-1}$	3.6680	$8.3117 \cdot 10^{-2}$	$2.2638 \cdot 10^{-4}$
50	5	$5.6028 \cdot 10^{-5}$	$1.1976 \cdot 10^{-1}$	$2.4513 \cdot 10$	$8.0204 \cdot 10^{-2}$	$1.7340 \cdot 10^{-3}$
	10	$7.7963 \cdot 10^{-5}$	$1.9722 \cdot 10^{-1}$	$2.4776 \cdot 10$	$1.3175 \cdot 10^{-1}$	$1.6160 \cdot 10^{-3}$
	50	$9.1791 \cdot 10^{-5}$	$8.9644 \cdot 10^{-1}$	$2.4868 \cdot 10$	$5.4971 \cdot 10^{-1}$	$1.4720 \cdot 10^{-3}$
100	5	$1.1060 \cdot 10^{-4}$	1.2090	$6.0438 \cdot 10^2$	$6.9305 \cdot 10^{-1}$	$3.2881 \cdot 10^{-2}$
	10	$9.2983 \cdot 10^{-4}$	1.6457	$7.0271 \cdot 10^2$	$9.9044 \cdot 10^{-1}$	$2.4294 \cdot 10^{-2}$
	50	$2.0559 \cdot 10^{-3}$	9.4563	$7.5332 \cdot 10^2$	4.0480	$2.0163 \cdot 10^{-2}$

Os resultados obtidos, que exploram diferentes combinações de tamanhos de matriz ($r = 3, 5, 10, 20, 50$ e 100) e potências aplicadas ($n = 5, 10$ e 50), oferecem uma visão detalhada da eficiência computacional de cada método.

O tempo descrito na tabela consiste na mediana dos tempos gerados após simular cem vezes, pois é possível alterações abruptas nos tempos em cada simulação como visto no gráfico da simulação de \mathbb{L}^{10} , para uma matriz de Leslie de ordem cinco, como apresentado no gráfico 4.

Os principais resultados aferidos analisando os gráficos e os valores apresentados na tabela são descritos a seguir.

Método de Multiplicação Direta (MD): Este método demonstrou consistência em sua eficiência, exibindo baixo custo computacional em todos os cenários testados.

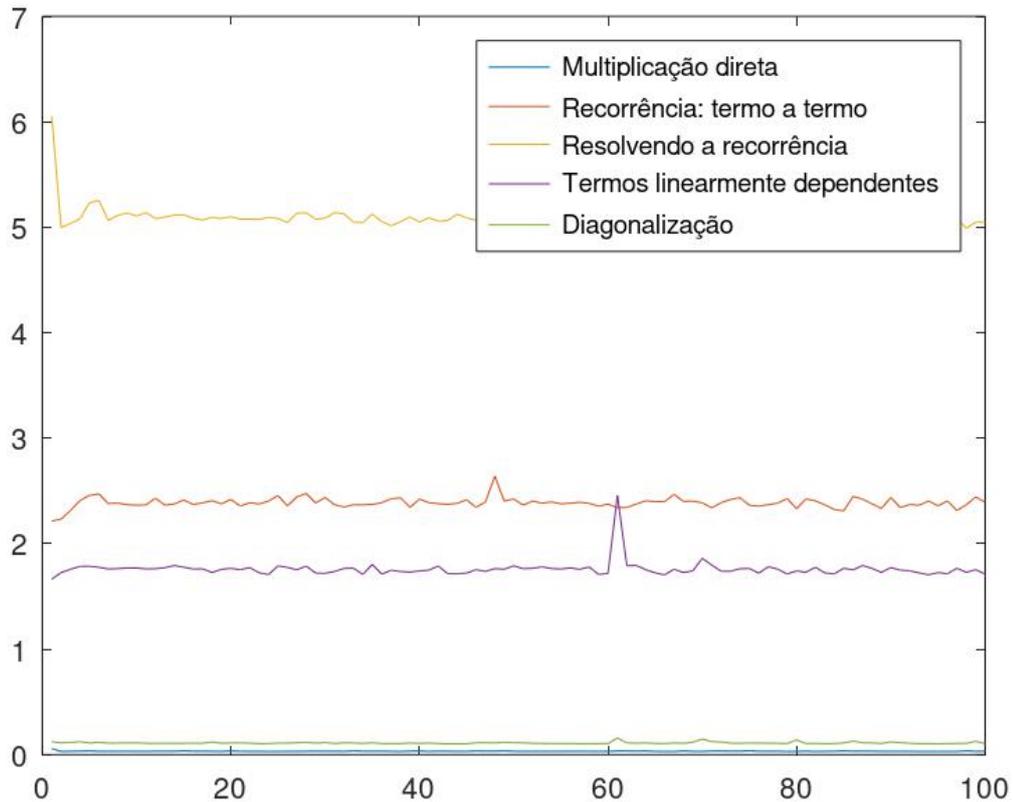


Figura 4 – Simulação do cálculo L^n com $r = 5$ e $n = 10$.

Abordagens de Recorrência (RA1, RA2 e RA3): Essas abordagens oferecem flexibilidade, mas sua eficiência varia dependendo das condições. Para potências mais baixas ($n = 5$ e $n = 10$), a ordem de eficiência foi $RA2 < RA3 < RA1$. Entretanto, para $n = 50$, as Abordagens RA2 e RA3 apresentaram resultados comparáveis, indicando um aumento acentuado no tempo de cálculo para RA3 com o aumento da ordem da matriz.

Método de Diagonalização de Matriz (DM): Esse método se mostrou uma opção intermediária em termos de eficiência computacional, fornecendo resultados sólidos.

Uma observação interessante é que, à medida que a ordem da matriz aumenta, o tempo de cálculo aumenta para todos os métodos. No entanto, o Método de Multiplicação Direta (MD) continua sendo uma escolha eficaz em todos os cenários. As Abordagens de Recorrência (RA) demonstram ser mais sensíveis ao aumento da ordem da matriz, especialmente a Abordagem 3 (RA3).

Com base nesses resultados, podemos concluir que o Método de Multiplicação Direta (MD) destaca-se como a opção mais eficiente e consistente, especialmente quando a potência desejada é relativamente baixa. O Método de Diagonalização de Matriz (DM) é uma escolha intermediária sólida em todos os casos.

Para ilustrar a aplicação dos métodos de resolução que utilizam a matriz de

Leslie, escolheu-se um estudo empírico significativo. Nesse contexto, foram utilizados os dados fornecidos pelo artigo (BRONIKOWSKI et al., 2016), que apresenta uma análise detalhada das tabelas de vida masculinas e femininas para sete espécies de primatas selvagens. Este artigo oferece uma base de dados rica e robusta, derivada do monitoramento contínuo de populações ao longo de pelo menos 29 anos. As espécies de primatas incluídas no estudo são o *sifaka* (*Propithecus verreauxi*) em Madagascar, o *muriqui* (*Brachyteles hypoxanthus*) no Brasil, o *capuchin* (*Cebus capucinus*) na Costa Rica, o *baboon* (*Papio cynocephalus*) e o *blue monkey* (*Cercopithecus mitis*) no Quênia, o *chimpanzee* (*Pan troglodytes*) na Tanzânia e o *gorilla* (*Gorilla beringei*) em Ruanda.

O artigo apresenta dados demográficos abrangentes, incluindo contagens censitárias de machos e fêmeas, sobrevivência específica por idade e estimativas de fertilidade específica para fêmeas. Utilizando intervalos de idade de um ano, os autores calcularam estimativas pontuais de sobrevivência específica por idade para ambos os sexos.

Com base nesses dados, a intenção é aplicar os algoritmos desenvolvidos e a matriz de Leslie, criada a partir das informações do artigo, para prever a distribuição futura das populações das espécies de primatas estudadas. Especificamente, o objetivo é projetar como estará a quantidade de indivíduos de cada espécie a cada dez anos, desde o início da coleta de dados até quarenta anos à frente.

Para realizar esta previsão, inicialmente, será feita a construção da matriz de Leslie. Para construir a matriz de Leslie utilizando os dados fornecidos no artigo, é necessário determinar dois componentes principais: a taxa de fecundidade f_i para cada faixa etária e a probabilidade de sobrevivência p_i de cada faixa etária. A taxa de fecundidade para cada faixa etária é obtida a partir do coeficiente fornecido no artigo, denotado como $m.x$ (fertilidade na idade x), sendo assim $f_i = m.x$, onde i representa os intervalos anuais de idade, ou seja, $i = 1$ relaciona as idades x tais que $0 \leq x < 1$, enquanto $i = 2$ estará relacionado com as idades x tais que $1 \leq x < 2$ e assim sucessivamente. O coeficiente $m.x$ representa a taxa de nascimentos por fêmea em cada faixa etária.

A probabilidade de sobrevivência para cada faixa etária é calculada utilizando a seguinte fórmula:

$$p_i = 1 - \frac{d.x + p.x}{N.x},$$

onde $d.x$ é o número de mortes durante o intervalo de idade x , o coeficiente $p.x$ é o número de desaparecimentos permanentes durante o intervalo de idade x e $N.x$ é o número de indivíduos no início do intervalo de idade x .

Em seguida, são aplicados os algoritmos de potenciação previamente descritos para estimar a distribuição populacional nas cinco próximas décadas. O comportamento da população de cada espécie será apresentado graficamente, fornecendo uma visão clara das tendências de crescimento ou declínio ao longo do tempo.

Os resultados obtidos por este método são ilustrados através de gráficos.

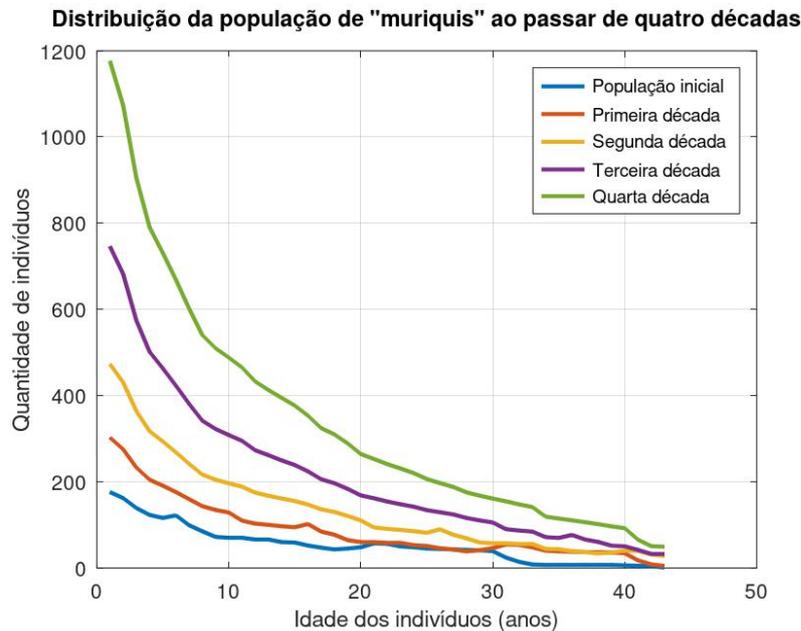


Figura 5 – Distribuição da população de *muriquis* ao passar de quatro décadas

Pelo gráfico 5, nota-se um crescimento da população de *muriquis* como um todo ao longo das décadas, apresentando o mesmo comportamento piramidal onde a maior parte da população está concentrada entre os indivíduos mais jovens. Percebe-se também que na primeira década, os indivíduos entre 20 e 30 anos de idade se mantêm aproximadamente na mesma quantidade, e de forma análoga esse comportamento ocorre com os indivíduos de 30 anos entre a primeira e segunda década.

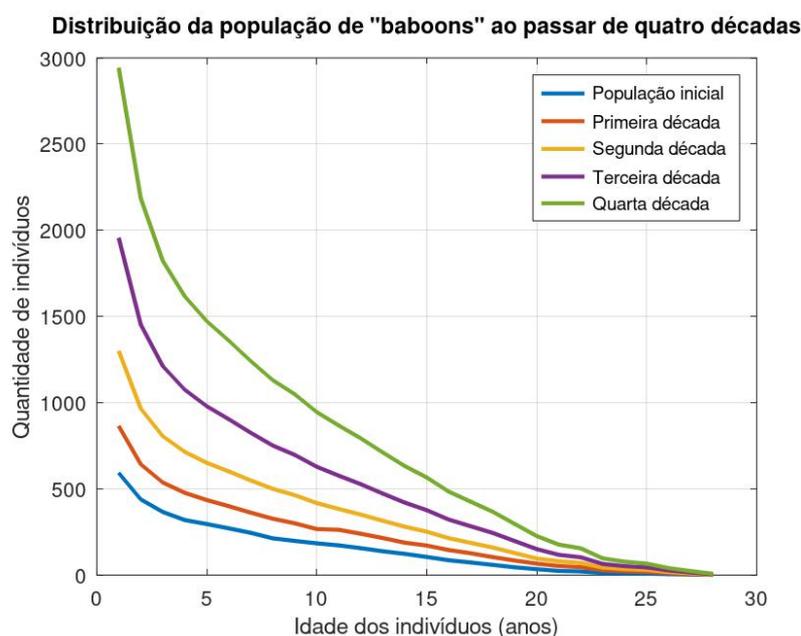


Figura 6 – Distribuição da população de *baboons* ao passar de quatro décadas

Agora, analisando a população de *baboons* através do gráfico 6, verifica-se um crescimento contínuo ao longo das décadas para os indivíduos até 25 anos, com os indivíduos a partir dessa idade se mantendo praticamente constantes.

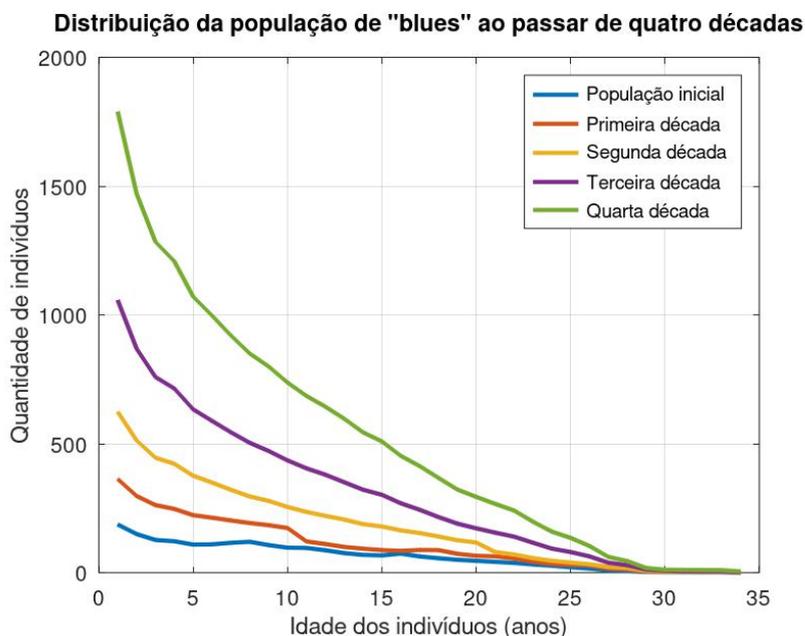


Figura 7 – Distribuição da população de *blues* ao passar de quatro décadas

O gráfico 7, que trata da estimativa do crescimento populacional dos *blues*, mostra um aumento expressivo na população mais jovem, enquanto a população mais velha apresenta uma tendência de estabilidade, se mantendo praticamente constante ao longo das décadas.

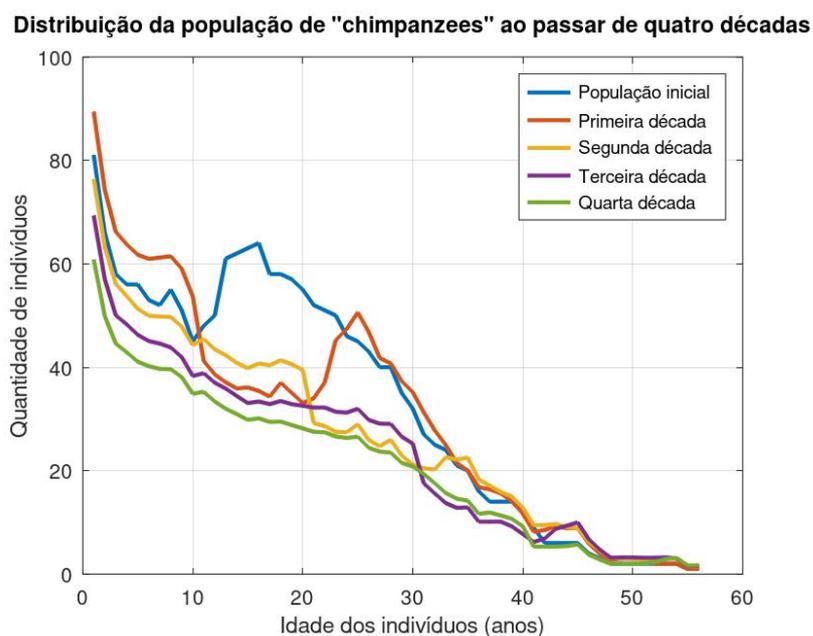


Figura 8 – Distribuição da população de *chimpanzees* ao passar de quatro décadas

A população de *chimpanzees*, diferente dos primatas anteriormente apresentados, mostra um comportamento distinto. Verifica-se pelo gráfico 8 que, após a primeira década, ocorre um leve aumento na quantidade de indivíduos mais jovens, porém os indivíduos entre 10 e 22 anos apresentam uma grande queda, com o resto da população se mantendo praticamente constante. Na década seguinte, a população apresenta uma pequena queda em quase todas as faixas etárias, resultado que se mostra contínuo ao longo das décadas seguintes. A estimativa dessa população chama atenção em dois quesitos: o primeiro é a constante queda da população dessa espécie, indicando uma tendência de extinção. O segundo aspecto é o comportamento distinto das espécies anteriormente estudadas, ressaltando a influência significativa dos dados iniciais no comportamento geral ao longo do tempo.

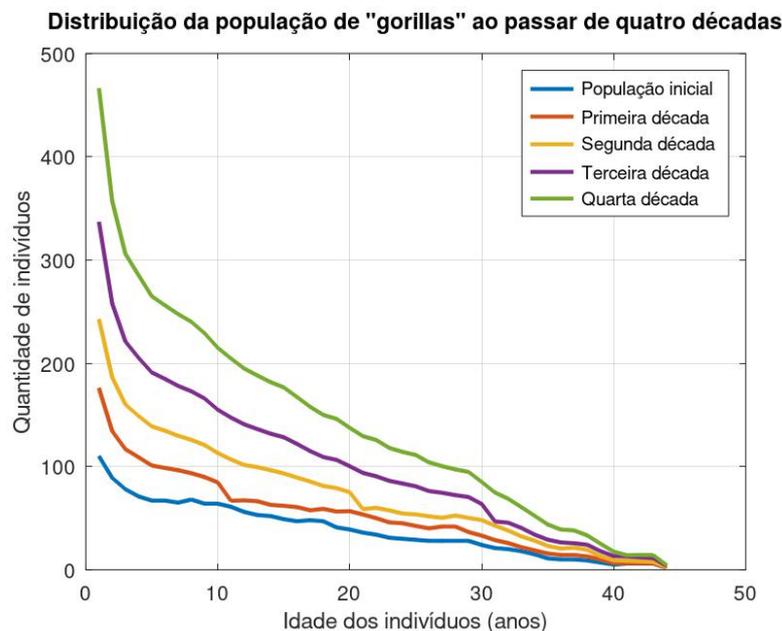


Figura 9 – Distribuição da população de *gorillas* ao passar de quatro décadas

Os dados mostrados no gráfico 9 revelam um comportamento da população de *gorillas* análogo ao apresentado no gráfico 6, que trata do estudo da população de *baboons*.

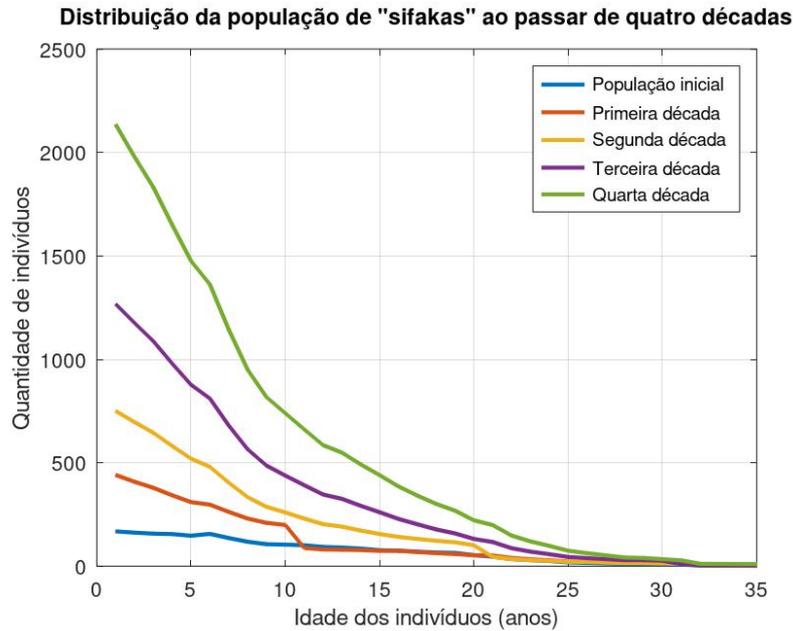


Figura 10 – Distribuição da população de *sifakas* ao passar de quatro décadas

Os *sifakas* representados no gráfico 10 apresentam na primeira década um crescimento apenas da população mais jovem até 10 anos. Nas décadas seguintes, a população apresenta um crescimento maior como um todo, mantendo-se praticamente constante apenas a população mais velha, acima de 25 anos.

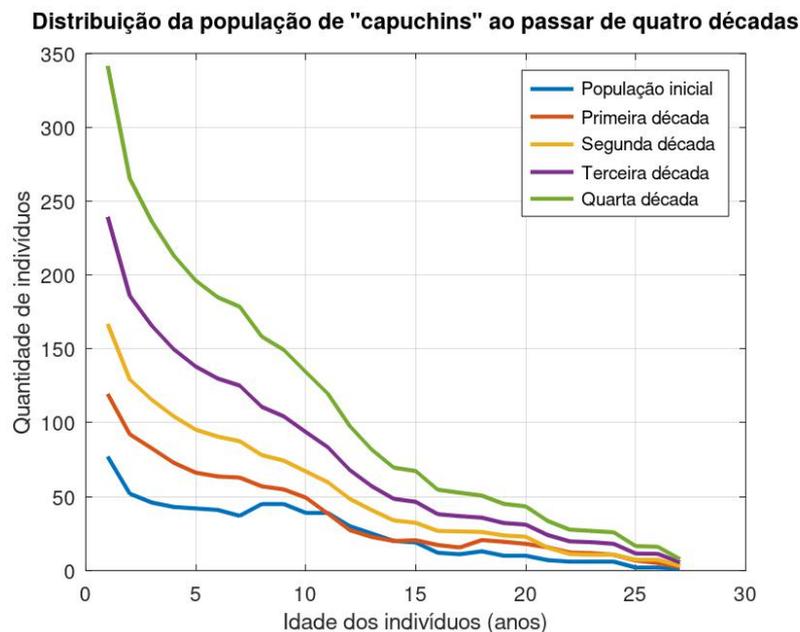


Figura 11 – Distribuição da população de *capuchins* ao passar de quatro décadas

Por fim, o gráfico 11 mostra o crescimento dos *capuchins*, que se apresenta semelhante ao discutido no gráfico 5, tratando da população de *muriquis*. Na primeira

década, a população se mantém praticamente constante para os indivíduos entre 10 e 15 anos, e na década seguinte, após os 20 anos.

Utilizando os dados fornecidos pelo artigo (BRONIKOWSKI et al., 2016), é possível prever o comportamento das populações de primatas, como realizado, e tomar medidas de acordo com as estimativas, caso seja necessário. Também é possível validar os resultados verificando ao longo dos anos quão verossímeis os valores obtidos se mostraram quando comparados com a realidade, e ajustar a matriz de Leslie para aprimorar futuras estimativas.

Os próximos algoritmos consistem em determinar o comportamento da matriz de leslie elevada a potências muito altas, ou seja, o comportamento assintótico da matriz representado por $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^n$. Neste caso multiplicar um número indeterminado de vezes a matriz por ela mesma não permite assegurar para que valor a matriz está convergindo, sendo nesse caso necessário utilizar novamente os algoritmos de decomposição através da matriz diagonal ou pela equação de diferenças.

4.2 Simulação do comportamento assintótico

No capítulo anterior, mostrou-se que o comportamento da matriz, quando elevada a uma potência tendendo ao infinito, convergirá apenas no caso em que o autovalor dominante seja $\lambda_1 = 1$. Caso $\lambda_1 > 1$ a população crescerá indefinidamente, enquanto se $0 < \lambda_1 < 1$ a população tenderá a zero, logo para esses casos é apresentado a matriz relacionada com a proporção da população, ou seja, a porcentagem relativa de cada faixa etária quando comparada com o todo.

Ao ser utilizado o método da decomposição da matriz \mathbb{L} em termos da matriz diagonal, o caso em que $\lambda_1 \neq 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$, a população irá se aproximar da proporção de acordo com o autovetor associado a λ_1 , não sendo necessário determinar a matriz de proporção. Para os demais casos, o algoritmo irá fornecer a matriz \mathbb{L}^n ou Q , sendo essa a matriz de proporção. O algoritmo 3 que trata desse caso pode ser encontrado no apêndice A.

Já o algoritmo 4, encontrado no apêndice B, se refere ao método que se utiliza das equações de diferenças e para todos os casos irá fornecer a matriz para qual \mathbb{L}^n converge ou a matriz de proporção.

4.2.1 Caso 1: $\lambda_1 = 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$

O primeiro caso a ser estudado consiste em comparar o tempo de processamento para determinar o comportamento assintótico da matriz de Leslie, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}^n$, no caso em que o autovalor dominante da matriz \mathbb{L} é dado por $\lambda_1 = 1$, o que implica que a

matriz \mathbb{L}^n converge.

Para realizar essa simulação foram avaliadas matrizes com dimensões n iguais a três, cinco, dez, vinte, cinquenta e mil, no intuito de verificar a consistência dos resultados para as mais diversas ordens, pelos métodos da diagonalização de matrizes e equação de diferenças. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 3.

Tabela 3 – Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 = 1$.

r	Método da diagonalização (segundos)	Método das diferenças finitas (segundos)
3	$1.7190 \cdot 10^{-4}$	$2.6298 \cdot 10^{-4}$
5	$2.5988 \cdot 10^{-4}$	$5.5599 \cdot 10^{-4}$
10	$5.6851 \cdot 10^{-4}$	$1.9649 \cdot 10^{-3}$
20	$1.5698 \cdot 10^{-3}$	$9.4429 \cdot 10^{-3}$
50	$7.6115 \cdot 10^{-3}$	$6.0812 \cdot 10^{-2}$
1000	$1.0570 \cdot 10$	$4.6155 \cdot 10$

A análise dos dados revela que, em todos os casos examinados, o Método da Diagonalização é mais eficaz em termos de tempo de processamento do que o Método das Equações de Diferenças. Esses resultados destacam a eficiência inerente ao Método da Diagonalização, sugerindo que ele é uma opção mais rápida para analisar o comportamento assintótico das matrizes de Leslie que apresentam como autovalor dominante $\lambda_1 = 1$.

Além disso, foi observado um padrão consistente de aumento no tempo de processamento para ambos os métodos à medida que a ordem da matriz aumenta. Vale ressaltar que o Método das Equações de Diferenças apresenta um crescimento mais expressivo no tempo, indicando uma maior complexidade computacional ao lidar com matrizes de ordens mais elevadas.

4.2.2 Caso 2: $\lambda_1 \neq 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$

Muitos casos práticos estudados e publicados como (ONOFRE, 2017; CODECO, 2018; SABETI, 2011; CAUGHLEY, 1967) se enquadram nessa situação específica. Um desses casos é tratado na sequência.

Considere os dados obtidos em (CAUGHLEY, 1967) em relação a uma espécie de ovelhas na Nova Zelândia.

Para construir a matriz de Leslie é necessário determinar a probabilidade do indivíduo passar para a faixa etária seguinte, sendo assim, dada a probabilidade do indivíduo sobreviver até a k -ésima faixa etária, com $k > 1$, a probabilidade de que ele sobreviva da $(k - 1)$ -ésima faixa para a seguinte é dada por:

$$p_k^* = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k-1} \cdot p_k \Rightarrow p_k = \frac{p_k^*}{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{k-1}}$$

Tabela 4 – Dados estatísticos de acordo com a idade de uma população de ovelhas fêmeas - fonte: (CAUGHLEY, 1967)

Idade em anos	Probabilidade de sobrevivência até a idade x	Número de nascimento de fêmeas vivas por faixa de idade x
x	p^*	f
0 - 1	0,845	0,000
1 - 2	0,824	0,045
2 - 3	0,795	0,391
3 - 4	0,755	0,472
4 - 5	0,699	0,484
5 - 6	0,626	0,546
6 - 7	0,532	0,543
7 - 8	0,418	0,502
8 - 9	0,289	0,468
9 - 10	0,162	0,459
10 - 11	0,060	0,433
11 - 12	0,000	0,421

Construindo uma sequência recorrente $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dos coeficientes p da matriz de Leslie, onde $p_1 = p_1^*$.

Calculando os valores de p_i , com $i = 1, \dots, 12$, os coeficientes da matriz de Leslie obtidos são apresentados na tabela 5.

Tabela 5 – Coeficientes de sobrevivência p e reprodução f .

Faixa etária em anos	p	f
0 - 1	0,845	0,000
1 - 2	0,975	0,045
2 - 3	0,965	0,391
3 - 4	0,950	0,472
4 - 5	0,926	0,484
5 - 6	0,895	0,546
6 - 7	0,850	0,543
7 - 8	0,786	0,502
8 - 9	0,691	0,468
9 - 10	0,561	0,459
10 - 11	0,370	0,433
11 - 12	0,000	0,421

Utilizando esses dados e os algoritmos 3 e 4 é possível determinar o comportamento assintótico como feito em (CODECO, 2018) e comparar o tempo de processamento de cada um desses algoritmos.

Através dos algoritmos é possível verificar que a população crescerá indefinidamente, ou seja, $\lambda_1 > 0$ e seu comportamento assintótico tenderá a proporção apresentada

na tabela 6, indicando a porcentagem de indivíduos de determinada faixa etária em relação ao total. Esses resultados também são verificados em (CODECO, 2018), auxiliando verificar a funcionalidade dos algoritmos utilizados.

Tabela 6 – Comportamento assintótico da proporção de indivíduos por faixa etária.

Faixa etária em anos	Taxa de sobreviventes
0 - 1	24,129%
1 - 2	17,344%
2 - 3	14,385%
3 - 4	11,808%
4 - 5	9,543%
5 - 6	7,517%
6 - 7	5,723%
7 - 8	4,138%
8 - 9	2,767%
9 - 10	1,626%
10 - 11	0,776%
11 - 12	0,244%

O comportamento proporcional da população converge para os valores apresentados na tabela anterior de acordo com o gráfico 12 apresentado a seguir.

Comportamento assintótico da proporção de indivíduos por faixa etária

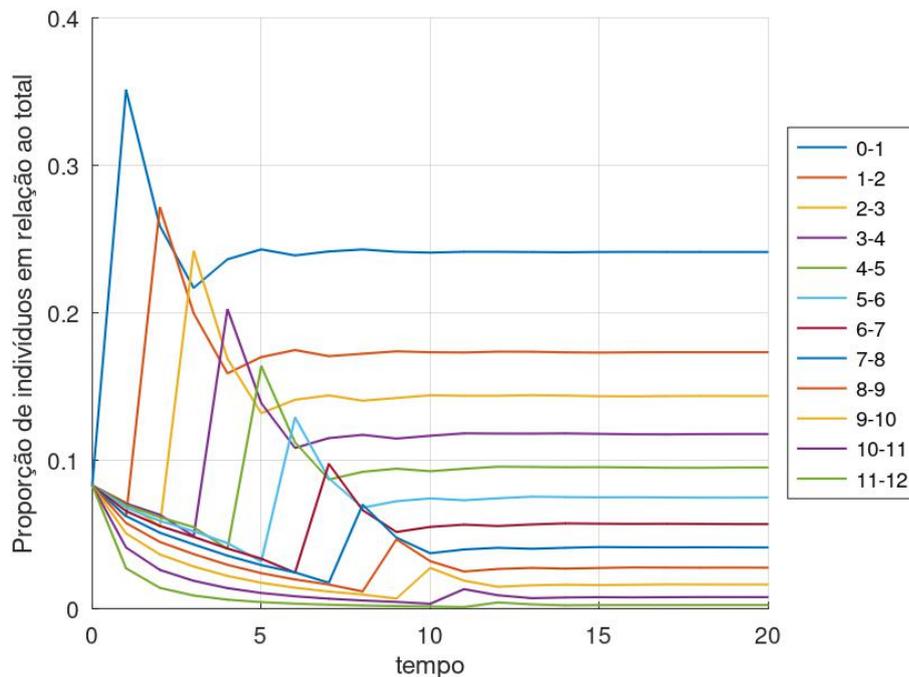


Figura 12 – Proporção de indivíduos ao longo do tempo.

De forma análoga ao caso em que $\lambda_1 = 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$, nesse caso onde $\lambda_1 \neq 1$ os métodos de diagonalização e das equações de diferenças também são comparados em relação ao seu tempo de processamento para verificar as vantagens e desvantagens de acordo com a ordem da matriz. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 7.

Tabela 7 – Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 \neq 1$.

r	Método da diagonalização (segundos)	Método das diferenças finitas (segundos)
3	$1.3781 \cdot 10^{-4}$	$3.2294 \cdot 10^{-4}$
5	$1.9503 \cdot 10^{-4}$	$6.7461 \cdot 10^{-4}$
10	$3.9458 \cdot 10^{-4}$	$2.2604 \cdot 10^{-3}$
20	$1.4662 \cdot 10^{-3}$	$6.0564 \cdot 10^{-3}$
50	$8.9988 \cdot 10^{-3}$	$7.1267 \cdot 10^{-2}$
1000	9.2742	$5.1521 \cdot 10$

Ao estender a análise para o caso em que $\lambda_1 \neq 1$, os resultados obtidos se apresentaram de maneira similar aqueles observados anteriormente, quando $\lambda_1 = 1$. Em ambos os cenários, o Método da Diagonalização demonstrou maior eficácia, superando o Método das Equações de Diferenças em termos de tempo de processamento.

Também é interessante notar que, à medida que a ordem da matriz aumenta, ambos os métodos exibem um padrão de crescimento no tempo de processamento. No entanto, no caso em que $\lambda_1 \neq 1$, o método da diagonalização apresenta um crescimento menos expressivo ainda, pois nesse caso é apenas necessário determinar o autovetor associado com λ_1 para determinar a proporção que a população irá atingir ao se avaliar seu comportamento assintótico.

4.2.3 Caso 3: $\lambda_1 = 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = d > 1$

O terceiro caso trata das matrizes de Leslie que tenham como autovalor dominante $\lambda_1 = 1$, de forma similar ao caso 1, porém com $d = \text{mdc}\{i, a_i > 0\} > 1$, levando a uma convergência de $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}^{nd+l}$, com $l = 0, 1, \dots, d - 1$.

Novamente é utilizado matrizes com dimensões n iguais a três, cinco e dez que satisfazem as condições desse caso. Os resultados gerados através das simulações são mostrados na tabela 8.

Tabela 8 – Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 = 1$ e $d > 1$.

r	Método da diagonalização (segundos)	Método das diferenças finitas (segundos)
3	$2.0599 \cdot 10^{-4}$	$4.1902 \cdot 10^{-4}$
5	$2.9993 \cdot 10^{-4}$	$8.9502 \cdot 10^{-4}$
10	$5.8508 \cdot 10^{-4}$	$3.1306 \cdot 10^{-3}$
20	$1.7897 \cdot 10^{-3}$	$9.5879 \cdot 10^{-3}$
50	$1.4815 \cdot 10^{-2}$	$1.0891 \cdot 10^{-1}$
1000	8.4571	$6.1039 \cdot 10$

Analisando os dados, mais uma vez é possível perceber que o método da

diagonalização se sobrepõe em relação ao método das equações de diferenças, apresentando um menor tempo de processamento para todas as ordens estudadas. Novamente apresentou um aumento de tempo de processamento de acordo com o aumento da ordem da matriz, sendo que o método das equações de diferenças apresentou um aumento mais expressivo novamente.

4.2.4 Caso 4: $\lambda_1 \neq 1$ e $\text{mdc}\{i, a_i > 0\} = d > 1$

Por fim, o quarto caso aborda as matrizes de Leslie com autovalor dominante $\lambda_1 \neq 1$ e $d = \text{mdc}\{i, a_i > 0\} > 1$, implicando que as matrizes $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}^{nd+l}$, com $l = 0, 1, \dots, d - 1$ não vão convergir, ou seja, vão crescer indefinidamente caso $\lambda_1 > 1$ ou vão tender a zero caso $0 < \lambda_1 < 1$. Nesse caso, de forma similar ao caso 2, busca-se determinar a proporção que cada faixa etária se aproxima em relação ao total da população ao longo do tempo. Os resultados das simulações obtidas nesse estudo são encontrados na tabela 9.

Tabela 9 – Tempo de processamento para o cálculo do comportamento assintótico da matriz \mathbb{L} com autovalor $\lambda_1 \neq 1$ e $d > 1$.

r	Método da diagonalização (segundos)	Método das diferenças finitas (segundos)
3	$1.7500 \cdot 10^{-4}$	$4.6110 \cdot 10^{-4}$
5	$2.7013 \cdot 10^{-4}$	$1.0159 \cdot 10^{-3}$
10	$5.3799 \cdot 10^{-4}$	$3.4444 \cdot 10^{-3}$
20	$1.6005 \cdot 10^{-3}$	$9.5001 \cdot 10^{-3}$
50	$1.4734 \cdot 10^{-2}$	$1.2092 \cdot 10^{-1}$
1000	9.2242	$7.7443 \cdot 10$

Novamente o método da diagonalização apresentou um menor tempo de processamento quando comparado ao método das equações de diferenças, se apresentando um método mais robusto para o cálculo do comportamento assintótico de matrizes de Leslie.

5 Considerações Finais

Esta tese teve foco em um estudo detalhado sobre a aplicação dos métodos de diagonalização de matrizes e equações de diferenças no contexto das matrizes de Leslie. No primeiro capítulo foi fornecida uma sólida base teórica, abordando os princípios fundamentais da diagonalização de matrizes e as formas de resolução de recorrências de Fibonacci generalizadas.

Os capítulos subsequentes se dedicaram a explorar a utilidade prática desses métodos, concentrando-se no cálculo das potências da matriz de Leslie e no estudo de seu comportamento assintótico. As simulações realizadas no Capítulo 4, comparando os métodos de diagonalização e equações de diferenças em diferentes cenários, revelaram que, embora o método da diagonalização tenha se destacado em eficiência computacional, o método das equações de diferenças oferece novas ferramentas na demonstração de casos específicos, como as matrizes de Leslie na forma $\mathbb{L}([0, 0, \dots, 0, f_{r-1}], [p_1, p_2, \dots, p_{r-2}])$.

É importante destacar a observação de que, para o caso finito, a multiplicação direta mostrou-se uma abordagem ainda mais eficaz. Este resultado sugere que, dependendo do contexto e dos objetivos da análise, diferentes métodos podem oferecer vantagens específicas.

A conclusão central desta pesquisa é que tanto a diagonalização de matrizes quanto as equações de diferenças são ferramentas valiosas na análise de matrizes de Leslie. Este trabalho contribuiu para o entendimento mais profundo desses métodos, abrindo portas para pesquisas futuras que explorem ainda mais suas aplicações e potenciais avanços em diversos contextos matemáticos e científicos.

Destaca-se como contribuição inovadora deste estudo um abrangente e minucioso estudo comparativo entre os métodos da diagonalização e das diferenças finitas para calcular a potenciação de matrizes de Leslie, bem como para investigar o comportamento assintótico resultante. Além disso, propomos e desenvolvemos uma solução fechada para uma classe específica de matrizes de Leslie, representadas pela forma $\mathbb{L}([0, 0, \dots, 0, f_{r-1}], [p_1, p_2, \dots, p_{r-2}])$.

Sugestões para trabalhos futuros incluem investigar diferentes abordagens numéricas para calcular autovalores e autovetores das matrizes de Leslie, como também analisar métodos numéricos mais eficientes ou técnicas de otimização para a resolução de recorrências de Fibonacci generalizadas. Além disso, da mesma forma que foi obtido um resultado fechado para a classe de matrizes de Leslie do tipo $\mathbb{L}([0, 0, \dots, 0, f_{r-1}], [p_1, p_2, \dots, p_{r-2}])$, é possível realizar um estudo procurando outras classes particulares de matrizes de Leslie que seja possível obter um resultado fechado através do método das diferenças.

Referências

- AKRAM, S.; ANN, Q. U. Newton Raphson method. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, v. 6, n. 7, p. 1748–1752, 2015. Citado na página 55.
- ALOUI, A.; RACHIDI, M. On the computational and numerical approaches for the powers of the doubly Lefkovich matrix by linear difference equations. *Journal of Mathematics and Computer Science (JMCS)*, p. 21, 2010. Citado na página 14.
- ALOUI, A.; RACHIDI, M.; WAHBI, B. E. On a numerical approach for the powers of the doubly Leslie and doubly companion matrices with applications. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, v. 16, n. 2, p. 613–638, 2021. Citado na página 14.
- ANIZ, C.; RACHIDI, M. Inverse of the generalized Vandermonde matrix via the fundamental system of linear difference equations. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science(IJAERS)*, v. 9, n. 6, p. 106–127, 2022. Citado na página 64.
- BENTAHER, R.; NAASSI, N.; ELKETTANI, Y.; RACHIDI, M. Another approach for Leslie model via linear difference equations. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, v. 24, n. 5, p. 1321—1345, 2021. Citado na página 14.
- BENTAHER, R.; NAASSI, N.; RACHIDI, M. On the Leslie matrices, Fibonacci sequences and population dynamics. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, v. 20, n. 2, p. 565–594, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 46.
- BENTAHER, R.; RACHIDI, M. Solving some generalized Vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the binet formula. *Applied Mathematics and Computation*, v. 290, p. 267–280, 2016. Citado na página 16.
- BRONIKOWSKI, A. M.; CORDS, M.; ALBERTS, S. C.; ALTMANN, J.; BROCKMAN, D. K.; FEDIGAN, L. M.; PUSEY, A.; STOINSKI, T.; STRIER, K. B.; MORRIS, W. F. Female and male life tables for seven wild primate species. *Scientific data*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 1, p. 1–8, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 71.
- BUCK, M. W.; COLEY, R. A.; ROBBINS, D. P. A generalized Vandermonde determinant. *Journal of Algebraic Combinatorics*, Springer, v. 1, p. 105–109, 1992. Citado na página 18.
- CAUGHLEY, G. Parameters for seasonally breeding populations. *Ecology*, v. 48, n. 5, p. 834–839, 1967. Citado 3 vezes nas páginas 9, 72 e 73.
- CODECO, P. D. F. *Modelo matricial de Leslie: estudo do crescimento populacional do Brasil e estados do Espírito Santo e Acre*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 72, 73 e 74.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix computations*. [S.l.]: JHU press, 2013. Citado na página 16.
- LESLIE, P. H. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika Trust*, v. 33, n. 3, p. 183–212, 1945. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 32.

- MESQUISTA, D. Matrizes de Leslie e valores próprios dominantes. *Revista Matemática Universitária*, v. 50, p. 67–71, 2011. Citado na página 44.
- MEYER, C. D.; STEWART, I. *Matrix analysis and applied linear algebra*. [S.l.]: SIAM, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 40.
- MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática discreta*. [S.l.]: SBM, 2015. Citado na página 16.
- ONOFRE, M. M. *Matriz de Leslie aplicada aos modelos populacionais*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2017. Citado na página 72.
- OSTROWSKI, A. M. Solutions of equations in euclidean and banach spaces. *Journal of Algebraic Combinatorics*, New York and London: Academic Press, 1973. Citado na página 51.
- SÁ, L. S. C.; SPREAFICO, E. V. P. Sobre um novo método de inversão de matrizes de Vandermonde para solução de recorrências lineares homogêneas de ordem superior. *PMO*, v. 8, n. 1, p. 64–72, 2020. Citado na página 16.
- SABETI, M. *Modelo Epidêmico Discreto SIR com estrutura etária e aplicação de vacinação em pulsos e constante*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2011. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/1321>>. Acesso em: 13 jan. 2024. Citado na página 72.
- STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. [S.l.]: Academic Press, New York, 1980. Citado na página 21.

APÊNDICE A – Algoritmo utilizado para determinar o comportamento assintótico através da diagonalização de matrizes

Algoritmo 3 – Cálculo do comportamento assintótico da potência de uma matriz de Leslie através de sua matriz diagonal.

Dados: Taxas de reprodução f e sobrevivência p da espécie

Resultado: Comportamento assintótico da matriz de Leslie $Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^n$ ou matriz de proporção da população

início

para $f \in \mathbb{R}^m$ e $p \in \mathbb{R}^{m-1}$ **faça**

Definir a matriz de Leslie \mathbb{L} tal que $\mathbb{L}_{1,i} = f_i$, com $i = 1, \dots, m$, $\mathbb{L}_{i+1,i} = p_i$, com $i = 1, \dots, m-1$, e as demais entradas são nulas.;

$\mathbb{L} \leftarrow$ matriz de Leslie $\mathbb{L}(f, p)$;

Calcular os autovalores da matriz de Leslie \mathbb{L} encontrando as raízes do polinômio característico dessa matriz.;

$D \leftarrow$ vetor de autovalores de \mathbb{L} ;

Prosseguir para determinar os autovetores associados aos autovalores previamente calculados, resolvendo a equação $(\mathbb{L} - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$ para cada autovalor λ .;

$M \leftarrow$ matriz de autovetores de \mathbb{L} ;

Calcular a matriz inversa da matriz de autovetores M .;

$N \leftarrow M^{-1}$;

se $d = \text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$ **então**

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m = 1$ **então**

Efetuar o cálculo da n -ésima potência de cada autovalor, com n tendendo ao infinito.;

$$D_i^n \leftarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_i^n;$$

Construir uma matriz diagonal com as entradas provenientes das potências calculadas dos autovalores.;

$$D^n \leftarrow \text{diag}(D_1^n, \dots, D_m^n);$$

Finalizar o cálculo da matriz de Leslie elevada à potência n utilizando a fórmula de diagonalização: $\mathbb{L}^n = M \cdot D^n \cdot N$, onde M representa a matriz de autovetores e N é a matriz inversa de M .;

$$Q \leftarrow M \cdot D^n \cdot N;$$

fim

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m \neq 1$ **então**

Dividir o autovetor v_1 associado com o autovalor real positivo λ_1 pela soma de suas entradas, obtendo a proporção de indivíduos por faixa de idade.;

$$x_\infty \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|_1}, \text{ onde } \|\bullet\|_1 \text{ representa a norma 1 de um vetor dada pela soma de suas entradas};$$

fim

fim

se $d = \text{mdc}\{i, a_i > 0\} \geq 2$ **então**

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m = 1$ **então**

Efetuar o cálculo da $d \cdot n$ -ésima potência de cada autovalor, com n tendendo ao infinito.;

$$D_i^{dn} \leftarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_i^{dn};$$

Construir uma matriz diagonal com as entradas provenientes das potências calculadas dos autovalores.;

$$D^{dn} \leftarrow \text{diag}(D_1^{dn}, \dots, D_m^{dn});$$

$$\text{Determinar a matriz } Q_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd};$$

$$Q_d \leftarrow M \cdot D^{dn} \cdot N;$$

Obter a sequência de matrizes Q_d, \dots, Q_1 representando $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd-l}$, com

$l = 0, \dots, d-1$, respectivamente.;

$$Q_{d-l} = Q_d \cdot \mathbb{L}^l, \text{ com } l = 0, \dots, d-1;$$

fim

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m \neq 1$ **então**

Calcular a proporção de indivíduos por faixa de idade para $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{dn} \cdot x_0$ dado por

$$x_\infty^{(d)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{MD^{dn}M^{-1} \cdot x_0}{\|MD^{dn}M^{-1} \cdot x_0\|_1};$$

$$x_\infty^{(d)} \leftarrow \frac{MD^{d\alpha}M^{-1} \cdot x_0}{\|MD^{d\alpha}M^{-1} \cdot x_0\|_1}, \text{ com } \alpha \text{ suficientemente grande};$$

Obter a sequência de vetores de proporção $x_\infty^{(d)}, \dots, x_\infty^{(1)}$ representando $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd-l} \cdot x_0$,

com $l = 0, \dots, d-1$, respectivamente.;

$$x_\infty^{(d-l)} = \mathbb{L}^l \cdot x_\infty^{(d)}, \text{ com } l = 0, \dots, d-1$$

fim

fim

fim

fim

APÊNDICE B – Algoritmo utilizado para
determinar o comportamento assintótico
através da equação de Fibonacci generalizada

Algoritmo 4 – Cálculo do comportamento assintótico da potência de uma matriz de Leslie através da equação de Fibonacci generalizada.

Dados: Taxas de reprodução f e sobrevivência p da espécie

Resultado: Comportamento assintótico da matriz de Leslie $Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^n$ ou matriz de proporção da população

início

para $f \in \mathbb{R}^m$ e $p \in \mathbb{R}^{m-1}$ **faça**

Definir a matriz de Leslie \mathbb{L} tal que $\mathbb{L}_{1,i} = f_i, \mathbb{L}_{i+1,i} = p_i$ e as demais entradas nulas.;

$\mathbb{L} \leftarrow$ matriz de Leslie $\mathbb{L}(f, p)$;

Calcular os coeficientes da matriz companheira \mathbb{A} .;

$\mathbb{A}_i \leftarrow p_1 \cdot \dots \cdot p_{i-1} \cdot f_i$, com $\mathbb{A}_1 = f_1$ e $i = 2, \dots, m$;

Calcular coeficientes ω_i utilizados para determinar as entradas da matriz procurada.;

$\omega_i \leftarrow p_i \cdot \dots \cdot p_{m-1}$, com $i = 1, \dots, m-1$ e $\omega_m = 1$;

se $d = \text{mdc}\{i, a_i > 0\} = 1$ **então**

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m = 1$ **então**

Calcular coeficientes Π .;

$$\Pi_s \leftarrow \frac{\sum_{j=s}^m a_j}{\sum_{j=1}^m (j+1) \cdot a_j}, \text{ com } s = 1, \dots, m;$$

Determinar a matriz $Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^n$.;

$$Q_{i,j} \leftarrow \Pi_j \cdot \frac{\omega_j}{\omega_i}, \text{ com } i = 1, \dots, j \text{ e } j = 1, \dots, m$$

fim

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m \neq 1$ **então**

Utilizar um algoritmo para determinar o valor do maior autovalor positivo λ_1 .;

$\lambda_1 \leftarrow$ maior autovalor positivo;

Calcular coeficientes Π .;

$$\Pi_s \leftarrow \frac{\sum_{j=s}^m \frac{a_j}{\lambda_1^{j+1}}}{\sum_{j=1}^m (j+1) \cdot \frac{a_j}{\lambda_1^{j+1}}}, \text{ com } s = 1, \dots, m;$$

Determinar a matriz de proporção Q .;

$$Q_{i,j} \leftarrow \lambda_1^{j-i} \cdot \frac{\omega_j}{\omega_i} \cdot \Pi_j, \text{ com } i = 1, \dots, j \text{ e } j = 1, \dots, m$$

fim

fim

se $d = \text{mdc}\{i, a_i > 0\} \geq 2$ **então**

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m = 1$ **então**

Calcular coeficientes Π .;

$$\Pi_s \leftarrow \frac{\sum_{j=s}^m a_j}{\sum_{j=1}^m (j+1) \cdot a_j}, \text{ com } s = 1, \dots, m;$$

Calcular a matriz q_d associada com $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd}$.;

$(q_d)_{i,j} \leftarrow d \cdot \Pi_j$, se $j \equiv i \pmod{d}$ e zero caso contrário;

Determinar a matriz $Q_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd}$.;

$(Q_d)_{i,j} \leftarrow \frac{\omega_j}{\omega_i} \cdot (q_d)_{i,j}$ Obter a sequência de matrizes Q_d, \dots, Q_1 representando

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd-l}$, com $l = 0, \dots, d$, respectivamente.;

$Q_l = Q_d \cdot \mathbb{L}^l$, com $l = 0, \dots, d$;

fim

se $\mathbb{A}_1 + \dots + \mathbb{A}_m \neq 1$ **então**

Utilizar um algoritmo para determinar o valor do maior autovalor positivo λ_1 .;

$\lambda_1 \leftarrow$ maior autovalor positivo;

Calcular coeficientes Π .;

$$\Pi_s \leftarrow \frac{\sum_{j=s}^m \frac{a_j}{\lambda_1^{j+1}}}{\sum_{j=1}^m (j+1) \cdot \frac{a_j}{\lambda_1^{j+1}}}, \text{ com } s = 1, \dots, m;$$

Calcular a matriz q_d associada com $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd}$.;

$(q_d)_{i,j} \leftarrow d \cdot \Pi_j$, se $j \equiv i \pmod{d}$ e zero caso contrário;

Determinar a matriz $Q_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd}$.;

$(Q_d)_{i,j} \leftarrow \lambda_1^{j-i} \frac{\omega_j}{\omega_i} \cdot (q_d)_{i,j}$;

Obter a sequência de matrizes Q_d, \dots, Q_1 representando $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{L}^{nd-l}$, com

$l = 0, \dots, d-1$, respectivamente.;

$Q_{d-l} = Q_d \cdot \mathbb{L}^l$, com $l = 0, \dots, d-1$;

fim

fim

fim

fim

ANEXO A – Código em Octave do cálculo da potência de matrizes de Leslie por distintos métodos

Código-fonte 1 – Código utilizado para o cálculo de potência de matrizes de Leslie por distintos métodos

```

1 clear all
2 clc
3
4 %%%%%%%%%% Dados de Entrada %%%%%%%%%%
5 % 1: Resolucao direta (multiplicando a matriz L)
6 % 2: Metodo diferencas - termos um a um
7 % 3: Metodo diferencas - termos pela forma geral
8 % 4: Metodo diferencas - dependencia linear das sequencias
9 % 5: Matriz diagonal
10
11 metodo = 2;
12
13 x0 = [10;10;10];           % Numero inicial de cada intervalo
14 f = [0;4;3];              % x(n+1) = f(n)*x(n)
15 p = [0.5;0.25];          % x(1) = sum(p(n)*x(n))
16
17 t = 3;                    % numero de iteracoes
18
19 r = size(x0)(1);          % Numero de faixas de idade
20 L = [f'];                 % Construcao da matriz de Leslie
21 for k = 1:r-1
22     L(k+1,k) = p(k);
23 endfor
24
25 %%%%%%%%%% Metodo direto %%%%%%%%%%
26 if metodo == 1
27     disp("Metodo 1")
28     Lt = L^t
29     xt = Lt*x0

```

```

30 endif
31
32 %%%%%%%%%%% Metodo - dif (1) %%%%%%%%%%%
33 if metodo == 2 || metodo == 3 || metodo == 4
34     omega(r) = 1;
35     for s = 1:r-1
36         omega(s) = 1;
37         for k = s:r-1
38             omega(s) = omega(s)*p(k);
39         endfor
40     endfor
41     H = diag(omega);
42     A = H*L*diag(1 ./ diag(H));           % Matriz companheira
43
44     if metodo == 2
45         disp("Metodo 2")
46         At = [];
47         for k = 1:r
48             V = eye(r)(1:r,r+1-k);
49             for j = 1:t
50                 aux = 0;
51                 for i = 1:r
52                     aux = aux + A(1,r+1-i)*V(r+1-i);
53                 endfor
54                 V = [aux;V];
55             endfor
56             At = [V At];
57         endfor
58
59         At = At(1:r,1:r);
60         Lt = diag(1 ./ diag(H))*At*H
61         xt = Lt*x0
62     endif
63
64     if metodo == 3
65         disp("Metodo 3")
66         pol = [1 -A(1,:)];
67         raiz = roots(pol);
68

```



```
107     endfor
108     aux = [num; aux];
109     endfor
110     aux = [aux; eye(r)(1:r,r+1-i)];
111     At = [aux At];
112     endfor
113     At = [V At](1:r,1:r);
114
115     Lt = diag(1 ./ diag(H))*At*H
116     xt = Lt*x0
117
118     endif
119
120 endif
121
122 %%%%%%%%%%%%% Matriz Diagonal %%%%%%%%%%%%%
123 if metodo == 5
124     disp("Metodo 5")
125     [M D] = eig(L);
126     Lt = M*(D^t)*inv(M)
127     xt = Lt*x0
128 endif
```

ANEXO B – Código em Octave do cálculo do comportamento assintótico da potência de uma matriz de Leslie através de sua matriz diagonal

Código-fonte 2 – Código utilizado para o cálculo do comportamento assintótico de matrizes de Leslie através de sua matriz diagonal

```

1 clear all
2 clc
3
4 %%%%%%%%%% Dados de Entrada %%%%%%%%%%
5 %x0 = [100;100;100;100];      % Numero inicial de cada
   intervalo
6 %f = [0;0;2;1];              % x(n+1) = f(n)*x(n)
7 %p = [1/2;51/64;26/51];      % x(1) = sum(p(n)*x(n))
8
9 %x0 = [10;10;10];
10 %f = [0;4;3];
11 %p = [0.5;0.25];
12
13 %x0 = [2;5;8;12];
14 %f = [0;3;0;6];
15 %p = [0.25;0.5;1/3];
16
17 x0 = [17;25;8;13];
18 f = [0;20;0;16];
19 p = [0.5;0.4;1.25];
20
21 %x0 = [10;10;10;10;10;10;10;10;10;10;10];
22 %f = [0.000;0.045;0.391;0.472;0.484;0.546;
   %0.543;0.502;0.468;0.459;0.433;0.421];
23
24 %p = [0.845;0.975;0.965;0.950;0.926;
   %0.895;0.850;0.786;0.691;0.561;0.370];
25
26
27 r = size(x0)(1);
28 L = [f'];                    %Construcao da matriz de Leslie

```

```
29 for k = 1:r-1
30     L(k+1,k) = p(k);
31 endfor
32
33 tic;
34 [M, D] = eig(L);           %Diagonalizacao da matriz de Leslie
35
36 %%%%%%%%%%% Comportamento assintotico %%%%%%%%%%%
37 A = [f(1)];               %A[a_0, ..., a_{r-1}]
38 for i = 1:r-1
39     cte = 1;
40     for j = 1:i
41         cte = cte*p(j);
42     endfor
43     A(i+1) = cte*f(i+1);
44 endfor
45
46 soma_mat_A = 0;
47 for i = 1:size(A)(2)
48     soma_mat_A = soma_mat_A + A(i);
49 endfor
50
51 indice = [];
52 for k = 1:r
53     if A(k) > 0
54         indice = [indice k];
55     endif
56 endfor
57
58 if size(indice)(2) == 1
59     d = indice;
60 else
61     d = gcd(num2cell(indice){:});
62 endif
63
64 if d == 1                 % MDC = 1
65
66                             % a_0 + ... + a_{r-1} = 1
67     if soma_mat_A == 1
```

```

68
69     printf('caso 1\n')
70
71     for i = 1:r
72         if abs(abs(D(i,i))-1) < 10^(-14)
73             Dn(i,i) = 1;
74         else
75             Dn(i,i) = 0;
76         endif
77     endfor
78
79     Q = M*Dn*inv(M);
80     x_assint = Q*x0;
81
82
83                                     % a_0 + ... + a_{r-1} /= 1
84 else
85     printf('caso 2\n')
86     x_assint_prop = abs(M(:,1))/norm(M(:,1),1);
87     if abs(D(1,1)) > 1
88         printf('Populacao tende ao infinito\n')
89     else
90         printf('Populacao tende a zero\n')
91     endif
92
93 endif
94
95 % d >= 2                               % MDC >= 2
96 else
97
98                                     % a_0 + ... + a_{r-1} = 1
99     if soma_mat_A == 1
100
101         printf('caso 3\n')
102         for i = 1:r
103             if abs(abs(D(i,i))-1) < 10^(-14)
104                 Dn(i,i) = D(i,i)^d;
105             else
106                 Dn(i,i) = 0;

```

```
107     endif
108   endfor
109
110   Q = M*Dn*inv(M);
111
112   for k = 0:d-1
113     L_period(:, :, d-k) = Q*L^k;
114     x_assint(:, :, d-k) = L_period(:, :, d-k)*x0;
115   endfor
116
117   else
118                                     % a_0 + ... + a_{r-1} /= 1
119
120   printf('caso 4\n')
121   for i = 1:r
122     if abs(D(i,i)) < 1
123       Dn(i,i) = 0;
124     else
125       Dn(i,i) = D(i,i)^30;
126     endif
127   endfor
128   N = inv(M);
129   x_assint = M*Dn*N*x0;
130
131   for k = 0:d-1
132     x_period(:, :, d-k) = (L^k)*x_assint/sum((L^k)*x_assint);
133   endfor
134
135   endif
136
137 endif
138
139 tempo = toc;
```

ANEXO C – Código em Octave do cálculo do comportamento assintótico da potência de uma matriz de Leslie através da equação de Fibonacci generalizada

Código-fonte 3 – Código utilizado para o cálculo do comportamento assintótico das matrizes de Leslie através das equações de Fibonacci generalizada

```

1 clear all
2 clc
3
4 %%%%%%%%%% Dados de Entrada %%%%%%%%%%
5 %x0 = [100;100;100;100]; % Numero inicial de cada intervalo
6 %f = [0;0;2;1]; % x(n+1) = f(n)*x(n)
7 %p = [1/2;51/64;26/51]; % x(1) = sum(p(n)*x(n))
8
9 %x0 = [10;10;10];
10 %f = [0;4;3];
11 %p = [0.5;0.25];
12
13 %x0 = [2;5;8;12];
14 %f = [0;3;0;6];
15 %p = [0.25;0.5;1/3];
16
17 x0 = [17;25;8;13];
18 f = [0;20;0;16];
19 p = [0.5;0.4;1.25];
20
21 %x0 = [10;10;10;10;10;10;10;10;10;10;10];
22 %f = [0.000;0.045;0.391;0.472;0.484;0.546;
23 %0.543;0.502;0.468;0.459;0.433;0.421];
24 %p = [0.845;0.975;0.965;0.950;0.926;0.895;
25 %0.850;0.786;0.691;0.561;0.370];
26
27 r = size(x0)(1);

```

```

28 L = [f'];                                     %Construcao da matriz de Leslie
29 for k = 1:r-1
30     L(k+1,k) = p(k);
31 endfor
32
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Comportamento assintotico %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34 tic;
35 omega(r) = 1;
36 for s = 1:r-1                                 %Constantes omega_0, ..., omega_{r
    -1}
37     omega(s) = 1;
38     for k = s:r-1
39         omega(s) = omega(s)*p(k);
40     endfor
41 endfor
42
43 A = [f(1)];                                   %A[a_0, ..., a_{r-1}]
44 for i = 1:r-1
45     cte = 1;
46     for j = 1:i
47         cte = cte*p(j);
48     endfor
49     A(i+1) = cte*f(i+1);
50 endfor
51
52 soma_mat_A = 0;
53 for i = 1:size(A)(2)
54     soma_mat_A = soma_mat_A + A(i);
55 endfor
56
57 indice = [];
58 for k = 1:r
59     if A(k) > 0
60         indice = [indice k];
61     endif
62 endfor
63
64 if size(indice)(2) == 1
65     d = indice;

```

```
66 else
67     d = gcd(num2cell(indice){:});
68 endif
69
70 if d == 1                                % MDC = 1
71
72                                     %  $a_0 + \dots + a_{r-1} = 1$ 
73     if soma_mat_A == 1
74
75         printf('caso 1\n')
76
77         PI = [];
78         soma2 = 0;
79         for j = 1:r
80             soma2 = soma2 + j*A(j);
81         endfor
82         for i = 1:r
83             soma1 = 0;
84             for j = i:r
85                 soma1 = soma1 + A(j);
86             endfor
87             PI(i) = soma1/soma2;
88         endfor
89
90         L_assint = [];
91         for i = 1:r
92             for j = 1:r
93                 L_assint(i,j) = PI(j)*omega(j)/omega(i);
94             endfor
95         endfor
96
97         x_assint = L_assint*x0;
98
99                                     %  $a_0 + \dots + a_{r-1} \neq 1$ 
100     else
101
102         printf('caso 2\n')
103
104         lambda_1 = max(eig(L));
```

```
105
106     PI = [];
107     soma2 = 0;
108     for j = 1:r
109         soma2 = soma2 + j*A(j)/(lambda_1^j);
110     endfor
111     for i = 1:r
112         soma1 = 0;
113         for j = i:r
114             soma1 = soma1 + A(j)/(lambda_1^j);
115         endfor
116         PI(i) = soma1/soma2;
117     endfor
118
119     Q = [];
120     for i = 1:r
121         for j = 1:r
122             Q(i,j) = (lambda_1^(r-i))*(PI(j)/(lambda_1^(r-j)))*
123                 omega(j)/omega(i);
124         endfor
125     endfor
126
127     x_assint_prop = Q*x0./sum(Q*x0);
128
129
130 % d >= 2                % MDC >= 2
131 else
132                         % a_0 + ... + a_{r-1} = 1
133     if soma_mat_A == 1
134
135         printf('caso 3\n')
136
137         PI = [];
138         soma2 = 0;
139         for j = 1:r
140             soma2 = soma2 + j*A(j);
141         endfor
142         for i = 1:r
```

```

143     soma1 = 0;
144     for j = i:r
145         soma1 = soma1 + A(j);
146     endfor
147     PI(i) = soma1/soma2;
148 endfor
149
150 l = d;
151 for i = 0:r-1
152     for j = 0:r-1
153         if mod(i+1,d) == mod(j,d)
154             q(i+1,j+1) = d*PI(j+1);
155         else
156             q(i+1,j+1) = 0;
157         endif
158     endfor
159 endfor
160
161 L_assint = [];
162 for i = 1:r
163     for j = 1:r
164         L_assint(i,j) = q(i,j)*omega(j)/omega(i);
165     endfor
166 endfor
167
168 for k = 0:d-1
169     L_period(:,:,d-k) = L_assint*L^k;
170     x_assint(:,:,d-k) = L_period(:,:,d-k)*x0;
171 endfor
172
173 else
174                                     % a_0 + ... + a_{r-1} /= 1
175
176     printf('caso 4\n')
177
178     lambda_1 = abs(max(eig(L)));          % Criar um m todo para
179                                         determinar o maior autovalor de L
180
181 PI = [];

```

```
181     soma2 = 0;
182     for j = 1:r
183         soma2 = soma2 + j*A(j)/(lambda_1^j);
184     endfor
185     for i = 1:r
186         soma1 = 0;
187         for j = i:r
188             soma1 = soma1 + A(j)/(lambda_1^j);
189         endfor
190         PI(i) = soma1/soma2;
191     endfor
192
193     l = d;
194     for i = 0:r-1
195         for j = 0:r-1
196             if mod(i+1,d) == mod(j,d)
197                 q(i+1,j+1) = d*PI(j+1);
198             else
199                 q(i+1,j+1) = 0;
200             endif
201         endfor
202     endfor
203
204     L_assint = [];
205     for i = 1:r
206         for j = 1:r
207             L_assint(i,j) = (lambda_1^(j-i))*q(i,j)*omega(j)/
                omega(i);
208         endfor
209     endfor
210
211     for k = 0:d-1
212         L_period(:, :, d-k) = L_assint*L^k;
213         x_assint(:, :, d-k) = L_period(:, :, d-k)*x0./sum(L_period
                (:, :, d-k)*x0);
214     endfor
215 endif
216
217 endif
```

218

219

```
tempo = toc;
```