UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JOÃO PEDRO MORESCA MARTINS

Espaços quase Besov: uma generalização de espaços de Besov através do método de decomposição atômica

Campinas

2024

João Pedro Moresca Martins

Espaços quase Besov: uma generalização de espaços de Besov através do método de decomposição atômica

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Gabriel Ponce

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno João Pedro Moresca Martins e orientada pelo Prof. Dr. Gabriel Ponce.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M366e

Martins, João Pedro Moresca, 1999-
Espaços quase Besov : uma generalização de espaços de Besov através do método de decomposição atômica / João Pedro Moresca Martins. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Gabriel Ponce.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Espaços de Besov. 2. Análise funcional. I. Ponce, Gabriel, 1989-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Besov-ish spaces : a generalization of Besov spaces through the method of atomic decomposition
Palavras-chave em inglês:
Besov spaces
Functional analysis
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Gabriel Ponce [Orientador]
Sahibzada Waleed Noor
Benito Frazão Pires
Data de defesa: 05-02-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-7772-9826
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/3240486130434491

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de fevereiro de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GABRIEL PONCE

Prof(a). Dr(a). BENITO FRAZÃO PIRES

Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), com código de financiamento 130406/2022-8.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, o Professor Doutor Gabriel Ponce, por toda a disponibilidade e aconselhamento dados ao longo desses dois anos e também antes disso.

Aos meus pais, Paulo e Tânia, que sempre estiveram presentes e me apoiaram em todas as etapas da minha vida.

Aos meus amigos, cuja presença, nos dias bons ou ruins, foi fundamental.

Resumo

Este trabalho apresenta uma descrição da teoria de espaços quase Besov, que são uma generalização de espaços de Besov $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ para espaços de medida mais gerais $(I, \mathscr{B}, m)$, bem como algumas aplicações. A ideia principal do trabalho é utilizar decomposições atômicas dos espaços de Lebesgue $L^p(I, \mathscr{B}, m)$ para definir os conceitos apresentados. Desse modo, não só se obtém uma descrição mais geral, como também mais simples, no sentido de que são necessárias ferramentas menos sofisticadas.

Palavras-chave: Espaços de Besov; Análise Funcional.

Abstract

This work presents a description of the theory of Besov-ish spaces, a generalization of Besov spaces $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ to more general measure spaces $(I, \mathscr{B}, m)$, as well as some applications. The main ideia of this work is to use atomic decompositions of the Lebesgue spaces $L^p(I, \mathscr{B}, m)$ to define the concepts presented. This way, not only a more general description is obtained, but also a simpler one, in the sense that it requires less sofisticated tools.

Keywords: Besov-ish spaces; Functional Analysis.

Sumário

Introdução

Espaços de funções são objetos de grande importância em diversas áreas da matemática. Muito estudados durante o século XX, esses espaços possuem muitas aplicações, seja em campos teóricos, como Análise Funcional e teoria de equações diferenciais (tanto ordinárias quanto parciais), ou em áreas mais concretas, como física e engenharia. No começo do século passado, exemplos mais clássicos, como os espaços C^k de funções k vezes diferenciáveis (aqui $k \in \mathbb{N}$ e $C^0 = C$, o espaço das funções contínuas) e os espaços L^p das funções p-integráveis, foram cuidadosamente explorados. Porém, embora esses espaços sejam interessantes por si só, possuem muitas limitações em suas aplicações, especialmente no estudo de equações diferenciais. Por isso, a partir dos anos 1930, espaços mais sofisticados foram surgindo, como é o caso dos espaços de Sobolev e de Hölder. Nas décadas seguintes, novos espaços, como os de Lipschitz, Liouville, Hardy e classes de Zygmund, foram sendo criados e investigados. Mas uma melhor aplicabilidade vem com um custo: esses espaços possuem, em geral, definições muito mais complicadas e que exigem muito mais pré-requisitos de quem estiver interessado em estudá-los. Uma discussão mais completa da história dos espaços de funções pode ser encontrada em [TRIEBEL, 1983].

Os espaços de Besov $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ foram introduzidos em [BESOV, 1959]. Uma escala de espaços em vez de um espaço de funções em si, esses objetos têm sido muito utilizados durante os anos. Talvez duas de suas propriedades mais atraentes sejam o fato de que muitos dos espaços que citamos acima aparecem como casos particulares nessa escala e o de existirem várias maneiras equivalentes de defini-los, de modo que se pode escolher a mais adequada a cada propósito. Uma introdução a esses espaços também pode ser encontrada em [TRIEBEL, 1983]. Classicamente, essa escala é definida usando os ferramentais de Análise de Fourier e teoria de distribuições e, assim como a maioria dos espaços mencionados no parágrafo anterior, sua definição formal é um tanto quanto complicada a primeira vista.

Nas últimas décadas, tem havido muito interesse em generalizar os espaços de Besov para *espaços de fase* menos regulares, substituindo $\mathbb{R}^n$ por espaços com menos estrutura. Podemos encontrar, na literatura, definições e propriedades de espaços de Besov em *espaços homogêneos*, como definidos em [COIFMAN; WEISS, 1971], como, por exemplo, em [HAN; SAWYER, 1994; HAN; LU; YANG, 1999]. Esses espaços são espaços quase métricos com uma medida duplicadora, isto é, uma medida cujo valor em qualquer bola de raio $2r$ é limitado por uma constante vezes seu valor na bola de raio r. Mais recentemente, uma nova abordagem a esse problema foi apresentada em [SMANIA, 2022]. Nesse artigo, que será a referência principal deste trabalho, é dada uma nova definição dos espaços $\mathcal{B}^s_{p,q}$, com $p, q \geqslant 1$ e $0 < s < 1/p$, onde o espaço de fase é um espaço de medida com medida finita munido de uma *grade*, que é uma sequência de partições finitas satisfazendo algumas propriedades simples. Ao utilizar essa nova construção, não só é obtida uma generalização dos espaços de Besov para espaços de medida muito mais gerais do que $\mathbb{R}^n$, como também uma definição muito mais acessível, em termos de pré-requisitos. De fato, as principais ferramentas utilizadas vêm da teoria da medida clássica e da teoria de espaços p-integráveis. Iremos relembrar as definições e resultados mais importantes no Capítulo 1. No entanto, a nova definição não é exatamente simples, na medida em que possui uma natureza extremamente técnica e pouco intuitiva.

A base da nova construção é o conceito de *decomposição atômica*. Em uma decomposição atômica de um espaço de funções, cada função é representada por uma combinação linear (infinita) de frações dos *átomos*, que são funções muito mais regulares que um elemento típico do espaço. Como vamos ver, em uma decomposição atômica de um um espaço de funções normado, a representação de cada função desse espaço, em geral, não é única. No entanto, é possível atribuir um "custo" a cada uma dessas representações e definir uma norma no espaço como o ínfimo desses custos, tomado sobre todas as representações possíveis. Em [COIFMAN, 1974], pode-se encontrar uma decomposição atômica do espaço de Hardy $H^p(\mathbb{R})$ e, em [LATTER, 1978], uma de $H^p(\mathbb{R}^n)$. No trabalho [FRAZIER; JAWERTH, 1985], é dada uma decomposição de $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ e, no contexto de espaços homogêneos, temos resultados em [HAN; LU; YANG, 1999] a respeito de uma decomposição atômica de espaços de Besov utilizando átomos de Hölder.

A construção dada em [SMANIA, 2022] se aproxima do que foi feito em [SOUZA, 1985], onde é dada uma decomposição atômica de $\mathcal{B}^s_{1,1}([0,1])$, com $s \in (0,1)$, utilizando uma classe especial de átomos, referida em [SMANIA, 2022] como *átomos de Souza*. Um átomo de Souza a_J em um intervalo J nada mais é do que uma função cujo suporte é J e que é constante em J. A simplicidade desses átomos permite descartar qualquer estrutura métrica ou topológica no espaço de fase.

Vale ressaltar que, na literatura, é mais comum encontrar decomposições atômicas sendo usadas para descrever espaços já bem conhecidos. Isso geralmente é feito depois de se estudar cuidadosamente o espaço em questão e é, muitas vezes, uma tarefa difícil. Porém, em [SMANIA, 2022], os espaços de Besov são *definidos através da decomposição atômica*. Essa construção, bem como o estudo de suas propriedades básicas, pode ser feita sem pré-requisitos comuns da área, como Análise de Fourier, por exemplo, e em contextos muito gerais, não dependendo, inclusive, da natureza dos átomos utilizados, a menos de pequenas condições impostas sobre sua regularidade. Com isso, é possível descrever espaços *quase Besov*, que são bem mais gerais que os espaços de Besov. Em particular, a natureza dos átomos pode variar muito e a própria grade utilizada pode ser bastante irregular. Essa construção será apresentada no Capítulo 2. Depois, no Capítulo 4, será apresentada a definição de espaço de Besov como um caso particular de espaço quase

Besov, utilizando átomos de Souza e o conceito de grades *boas*, que carregam algumas suposições adicionais em relação à definição mais geral. Aqui, deixamos indicado o trabalho [SMANIA, 2020], onde essa construção é comparada com definições mais clássicas. Em particular, é mostrado que espaços de Besov definidos em espaços homogêneos compactos, como feito em [HAN; LU; YANG, 1999], são um caso particular dos espaços de Besov definidos em [SMANIA, 2022].

No Capítulo 2, além da definição de espaços quase Besov, apresentamos alguns resultados, sendo o mais importante deles a Proposição 2.4.1. Essa proposição, de natureza extremamente técnica devido à generalidade em que é enunciada, nos dá condições para obter uma nova representação atômica (possivelmente usando outra classe de átomos) a partir de uma representação original e também fornece uma estimativa do custo dessa nova representação em função do custo da original.

Embora a definição de espaços de Besov no Capítulo 4 seja feita utilizando átomos de Souza, apresentamos nesse capítulo algumas caracterizações alternativas utilizando diferentes classes de átomos. Além disso, também mostramos que é possível definir, nesses espaços, diferentes normas equivalentes (em geral bem mais concretas do que a norma resultante do ínfimo dos custos), uma das quais é definida através de ondaletas de Haar. Ondaletas de Haar foram introduzidas em [HAAR, 1910] na reta real e têm grande importância em Análise Harmônica. Apresentamos aqui a construção de ondaletas de Haar *desbalanceadas* em espaços de medida gerais feita em [GIRARDI; SWELDENS, 1997], que foi utilizada na obtenção de uma base incondicional de L^p, $1 < p < \infty$.

Todos os enunciados e demonstrações dos capítulos 2, 3 e 4 foram retirados de [SMANIA, 2022], a menos que explicitamente indicado. Chamamos a atenção para as modificações feitas nas proposições 2.3.1 e 4.5.3, que as tornaram um pouco mais gerais.

Também trazemos um capítulo de aplicações ao final deste trabalho, que são mais voltadas à Teoria Ergódica. Nos guiamos por [ARBIETO; SMANIA, 2020], onde os métodos apresentados em [SMANIA, 2022] são usados para estudar a ação de operadores de transferência associados a transformações definidas por partes, e também por [SMANIA, 2021], de onde tiramos um exemplo mais básico da aplicação desses métodos. No primeiro trabalho, são obtidos resultados muito interessantes, como o Teorema do Limite Central, Decaimento Exponencial de Correlações e Princípio da Invariância Quase Certo para observáveis razoavelmente gerais. Infelizmente, devido ao pouco tempo no cronograma desta dissertação, trazemos a demonstração apenas do exemplo em [SMANIA, 2021], apelidado de “toy model”. Os outros resultados são apresentados sem demonstrações. Porém, várias definições novas mostraram-se necessárias para que esses resultados pudessem ser enunciados, o que torna a seção em que eles são apresentados, Seção 5.2, um pouco densa.

1 Preliminares

Neste capítulo, vamos relembrar algumas noções importantes para o entendimento do texto. Vamos trabalhar, principalmente, em um contexto de teoria da medida. Uma boa introdução ao assunto pode ser encontrada em [FOLLAND, 1999].

Seja $(I, \mathscr{B}, m)$ um espaço de medida. Seja f uma função mensurável em I e seja $p \in (0, \infty)$. Definimos

$$|f|_p = \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}m \right)^{1/p}$$

e definimos o espaço de funções p-integráveis como

$$L^p(I, \mathscr{B}, m) = \{ f \colon I \to \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } |f|_p < \infty \}.$$

Frequentemente, a notação é abreviada para $L^p(I)$, $L^p(m)$ ou, simplesmente, L^p. Além disso, funções iguais m-q.t.p. são consideradas como o mesmo elemento de L^p, ou seja, L^p é, na verdade, um conjunto de classes de equivalência de funções, nós apenas abusamos um pouco da notação. Os espaços $L^p(I)$ também são chamados de espaços de Lebesgue em I. Para o caso específico de quando m é a medida de contagem, é comum usar a notação ℓ^p ao invés de L^p.

Também é possível definir um espaço para o valor limite $p = \infty$ de uma maneira similar, definindo

$$|f|_\infty = \inf\{ C \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant C \text{ para quase todo } x \}$$

e

$$L^\infty(I, \mathscr{B}, m) = \{ f \colon I \to \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } |f|_\infty < \infty \}.$$

Observe que, se f for limitada, temos $|f|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$.

Os espaços L^p são espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$ e, para $p \in [1, \infty]$, temos que $|\cdot|_p$ é uma norma em L^p. Quando $0 < p < 1$, $|\cdot|_p$ satisfaz todos os axiomas de uma norma com exceção da desigualdade triangular. Porém, nesse caso, obtemos que $|\cdot|_p^p$ satisfaz a desigualdade triangular como consequência do seguinte lema:

Lema 1.0.1 (Desigualdade triangular para $|\cdot|^q$)**.** *Se* $0 < q \leqslant 1$, *vale*

$$|a + b|^q \leqslant |a|^q + |b|^q$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$.

Sendo assim, definindo $d(f,g) = |f-g|_p$, se $p \geqslant 1$ e $d(f,g) = |f-g|_p^p$, se $0 < p < 1$, temos que d é uma métrica em L^p para qualquer $p \in (0,\infty]$. Mais ainda, obtemos que o espaço métrico resultante é completo. Diremos que uma sequência $f_n \in L^p$ converge **fortemente** para f em L^p ou converge para f na **topologia forte** de L^p, se $f_n \to f$ nessa métrica. Por outro lado, se $p \geqslant 1$, diremos que f_n converge **fracamente** para f em L^p ou converge para f na **topologia fraca** de L^p, se, para todo $\phi \in (L^p)^*$, temos $\phi(f_n) \to \phi(f)$, onde $(L^p)^*$ é o espaço dual de L^p.

A seguir, apresentamos alguns resultados conhecidos da teoria de espaços L^p.

Lema 1.0.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam f e g funções mensuráveis que assumem valores reais ou complexos em um espaço de medida qualquer e seja $p \in [1,\infty]$. Então*

$$|fg|_1 \leqslant |f|_p |g|_{p'},$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

Lema 1.0.3 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $f, g \in L^p$, temos*

$$|f+g|_p \leqslant |f|_p + |g|_p.$$

Cabe dizer que a desigualdade de Minkowski é originalmente encontrada na literatura apenas para $1 \leqslant p < \infty$. Porém, como o resultado é válido também para o caso $p = \infty$, apresentamos os dois resultados como um único lema.

Lema 1.0.4 (Desigualdade de Young para convoluções)**.** *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $p, q \in [1,\infty]$. A desigualdade de Young para o par (p,q) diz que*

$$|f * g|_r \leqslant |f|_p |g|_q$$

onde $f * g$ denota a convolução de f e g, e r satisfaz

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Lema 1.0.5. *Se $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$ e m é a medida de contagem, então $\ell^p \subset \ell^q$ e $|f|_q \leqslant |f|_p$.*

Lema 1.0.6. *Se $m(I) < \infty$ e $0 < p < q \leqslant \infty$, então $L^q \subset L^p$ e $|f|_p \leqslant |f|_q m(I)^{(1/p)-(1/q)}$.*

Lema 1.0.7. *Se $f \in L^p \cap L^\infty$ para algum $p < \infty$, de modo que $f \in L^q$ para todo $q > p$, então $|f|_\infty = \lim\limits_{q\to\infty} |f|_q$.*

Lema 1.0.8. *Se $1 < p < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$, temos que L^q é isometricamente isomorfo a $(L^p)^*$. O mesmo resultado vale para $p = 1$, desde que a medida em consideração seja σ-finita.*

Outro importante resultado que usaremos com bastante frequência ao longo do texto é o

Lema 1.0.9. *Seja A um conjunto finito de índices, $(x_a)_{a\in A}$ uma sequência de números complexos ou de funções com valores complexos e $p \in (0, \infty)$. Então temos*

$$\left|\sum_{a\in A} x_a\right|^p \leqslant (\#A)^p \sum_{a\in A} |x_a|^p,$$

onde $\#A$ é a cardinalidade de A.

Agora vamos apresentar a noção de uma grade em um espaço de medida, um conceito fundamental para este trabalho. Para um conjunto mensurável $J \subset I$, vamos denotar $m(J) = |J|$.

Seja $(I, \mathscr{B}, m)$ um espaço de medida com $|I| < \infty$. Uma **grade** é uma sequência de famílias finitas de conjuntos mensuráveis com medida positiva $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que pelo menos uma delas é não vazia e a seguinte propriedade é satisfeita:

(G_1) Dado $Q \in \mathcal{P}^k$, seja

$$\Omega_Q^k = \{\, P \in \mathcal{P}^k : P \cap Q \neq \varnothing \,\}.$$

Então

$$C_1(\mathcal{P}) = \sup_k \sup_{Q\in\mathcal{P}^k} \#\Omega_Q^k < \infty.$$

Quando não houver risco de confusão, escreveremos apenas C_1, no lugar de $C_1(\mathcal{P})$.

Defina $|\mathcal{P}^k| = \sup\{\, |Q| : Q \in \mathcal{P}^k \,\}$. Para simplificar a notação, também assumimos que $P \neq Q$ para todo $P \in \mathcal{P}^i$ e $Q \in \mathcal{P}^j$ com $i \neq j$. Frequentemente abusaremos da notação e escreveremos $\mathcal{P}$ para representar tanto $(\mathcal{P}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ quanto $\bigcup_k \mathcal{P}^k$.

A seguir, veremos alguns conceitos e proposições que nos serão úteis ao longo do texto.

Definição 1.0.10. *Uma ρ-norma em um espaço vetorial complexo X é uma função $|\cdot|_X$ de X para os reais não negativos tal que*

- $|x|_X = 0 \iff x = 0$;
- $|cx|_X = |c||x|_X$ *para todo* $x \in X$ *e* $c \in \mathbb{C}$;
- $|x+y|_X^\rho \leqslant |x|_X^\rho + |y|_X^\rho$.

X é dito um espaço de ρ-Banach se toda sequência de Cauchy com respeito a $|\cdot|_X$ é uma sequência convergente.

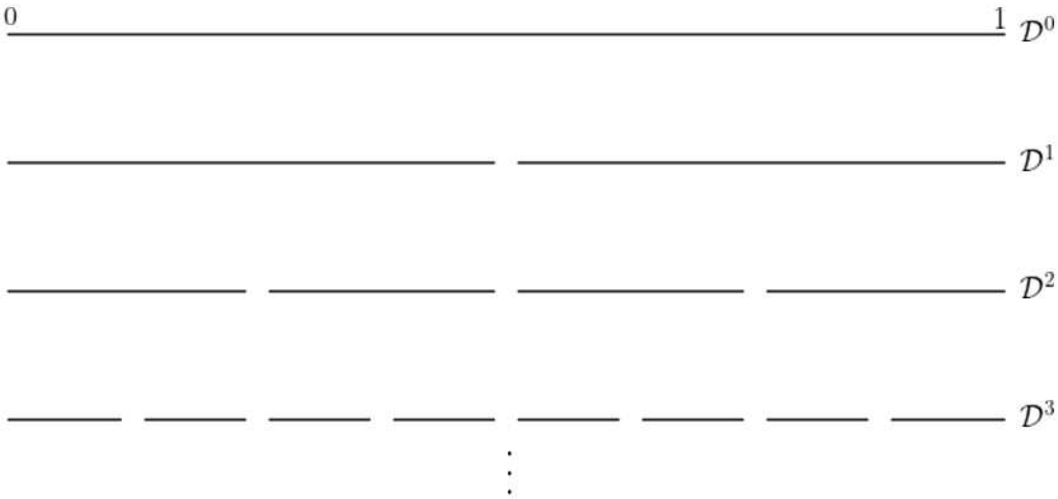

Figura 1 – Ilustração de uma grade diádica $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^k)_k$ dada por $\mathcal{D}^k = \left\{ \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k} \right) : 0 \leqslant i < 2^k \right\}$. O espaçamento entre os intervalos na imagem serve apenas para indicar a separação entre os elementos de cada nível. Também é possível considerar grades d-ádicas, onde 2^k é substituído por d^k na definição acima.

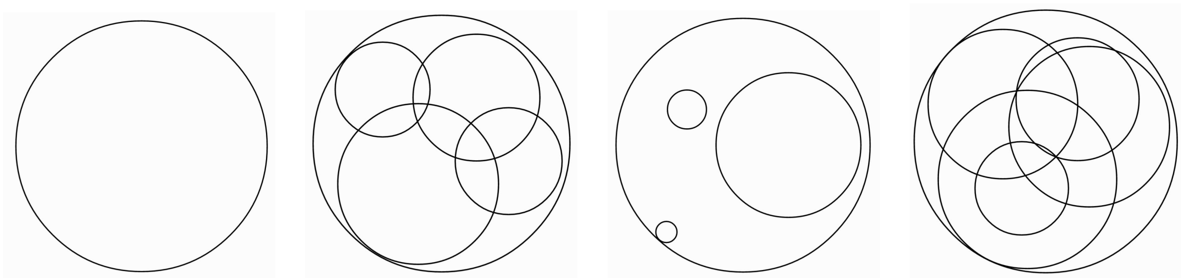

Figura 2 – Grade em um espaço de fase circular. Cada nível é uma família de, no máximo, 5 círculos dentro do espaço de fase. Ao contrário da grade diádica, é extremamente irregular.

Seja $\mathcal{P}$ uma grade em I. Vamos considerar, para $p \in (0,\infty)$ e $q \in (0,\infty]$, o conjunto $\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})$ das sequências

$$x = (x_P)_{P \in \mathcal{P}}$$

com $x_P \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|x|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} < \infty$, onde

$$|x|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} = \left(\sum_k \left(\sum_{P \in \mathcal{P}^k} |x_P|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

se $q < \infty$ e com a modificação

$$|x|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} = \sup_k \left(\sum_{P \in \mathcal{P}^k} |x_P|^p \right)^{1/p} \tag{1.0-1}$$

se $q = \infty$. Definimos soma e multiplicação por escalar em $\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})$ coordenada a coordenada. Uma teoria mais desenvolvida pode ser encontrada em [TRIEBEL, 1997]. É claro que, se $p = q$, esse espaço se resume ao espaço ℓ_p com componentes ordenadas de acordo. Dos lemas 1.0.1 e 1.0.3, obtemos o

Lema 1.0.11. $|\cdot|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})}$ *é uma* ρ*-norma, com* $\rho = \textit{mín}\{1, p, q\}$.

Demonstração. Vamos demonstrar o lema para os casos em que $q < \infty$. Os outros são análogos. Sejam $x, y \in \ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})$.

(A) Se $p, q \geqslant 1$, $\rho = 1$ e temos

$$\begin{aligned}
|x+y|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} &= \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P + y_P|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&\leqslant \left(\sum_k \left(\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p\right)^{1/p}\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leqslant \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} + \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&= |x|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} + |y|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})};
\end{aligned}$$

(B) Se $0 < p < 1$ e $q \geqslant 1$ ou $0 < p < q < 1$, temos $\rho = p$ e $q/p > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
|x+y|^p_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} &= \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P + y_P|^p\right)^{q/p}\right)^{p/q} \\
&\leqslant \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p + \sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p\right)^{q/p}\right)^{p/q} \\
&\leqslant \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p\right)^{q/p}\right)^{p/q} + \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p\right)^{q/p}\right)^{p/q} \\
&= |x|^p_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} + |y|^p_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})};
\end{aligned}$$

(C) Se $p \geqslant 1$ e $0 < q < 1$, temos $\rho = q$ e

$$\begin{aligned}
|x+y|^q_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} &= \sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P + y_P|^p\right)^{q/p} \\
&\leqslant \sum_k \left(\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p\right)^{1/p}\right)^q \\
&\leqslant \sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p\right)^{q/p} + \sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p\right)^{q/p} \\
&= |x|^q_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} + |y|^q_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})};
\end{aligned}$$

(D) Se $0 < q < p < 1$, temos $\rho = q$ e $q/p < 1$. Assim,

$$|x+y|^q_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} = \sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P + y_P|^p\right)^{q/p}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p + \sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p \right)^{q/p} \\
&\leqslant \sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |x_P|^p \right)^{q/p} + \sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |y_P|^p \right)^{q/p} \\
&= |x|^q_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})} + |y|^q_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})}
\end{aligned}
$$

□

Observação 1.0.12. *Ao longo do texto, vamos usar muitas expressões similares às de $|\cdot|_{\ell_q(\ell_p^{\mathcal{P}})}$ e, para deixar o texto mais limpo, vamos deixar implícita a modificação (1.0-1) ou nos referir a ela apenas como a "modificação usual".*

Para provar as próximas proposições, faremos uso dos lemas 1.0.1, 1.0.2 e 1.0.4.

Proposição 1.0.13. *Considere $t \in (0,\infty)$ e $q \in (0,\infty]$. Sejam $a = (a_k)_k$, $b = (b_k)_k$ e $c = (c_k)_k$ sequências não negativas tais que, para todo k,*

$$a_k^{1/\hat{t}} \leqslant C^{1/\hat{t}} b_k^{1/\hat{t}} c_k^{1/\hat{t}}.$$

Então, se $q < \infty$, temos

$$\left(\sum_k a_k^{1/\hat{t}} \right)^{\hat{t}/t} \leqslant C^{1/t} C_2(t,q,b) \left(\sum_k c_k^{q/t} \right)^{1/q}$$

e, se $q = \infty$,

$$\left(\sum_k a_k^{1/\hat{t}} \right)^{\hat{t}/t} \leqslant C^{1/t} C_2(t,q,b) \sup_k c_k^{1/t},$$

onde

A. Se $t \geqslant 1$ e $q > 1$, então $C_2(t,q,b) = \left(\sum_k b_k^{q'/t} \right)^{1/q'}$;

B. Se $t \geqslant 1$ e $q \leqslant 1$, então $C_2(t,q,b) = \sup_k b_k^{1/t}$;

C. Se $t < 1$ e $q/t > 1$, então $C_2(t,q,b) = \left(\sum_k b_k^{(q/t)'} \right)^{1/(t(q/t)')}$;

D. Se $t < 1$ e $q/t \leqslant 1$, então $C_2(t,q,b) = \sup_k b_k^{1/t}$.

Demonstração. Temos (substitua $(\sum_k c_k^{q/t})^{1/q}$ por $\sup_k c_k^{1/t}$ quando $q = \infty$):

A. Se $t \geqslant 1$ e $q > 1$, pela desigualdade de Hölder para o par (q, q'), temos

$$\left(\sum_k a_k^{1/\hat{t}}\right)^{\hat{t}/t} = \sum_k a_k^{1/t} \leqslant C^{1/t}\left(\sum_k b_k^{q'/t}\right)^{1/q'}\left(\sum_k c_k^{q/t}\right)^{1/q};$$

B. Se $t \geqslant 1$ e $q \leqslant 1$, pelo lema 1.0.1, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_k a_k^{1/\hat{t}}\right)^{q\hat{t}/t} &= \left(\sum_k a_k^{1/t}\right)^{q} \leqslant C^{q/t}\left(\sum_k b_k^{1/t} c_k^{1/t}\right)^{q} \\ &\leqslant C^{q/t}\sum_k (b_k^{1/t} c_k^{1/t})^q \\ &\leqslant C^{q/t}(\sup_k b_k^{q/t})\left(\sum_k c_k^{q/t}\right);\end{aligned}$$

C. Se $t < 1$ e $q/t > 1$, então $\hat{t}/t = 1/t$, $1/\hat{t} = 1$ e, aplicando Hölder para o par $(q/t, (q/t)')$, temos

$$\sum_k a_k \leqslant C\left(\sum_k b_k^{(q/t)'}\right)^{1/(q/t)'}\left(\sum_k c_k^{q/t}\right)^{t/q};$$

D. Se $t < 1$ e $q/t \leqslant 1$, então, usando novamente o lema 1.0.1,

$$\begin{aligned}\left(\sum_k a_k\right)^{q/t} &=\leqslant C^{q/t}\left(\sum_k b_k c_k\right)^{q/t} \\ &\leqslant C^{q/t}\sum_K (b_k c_k)^{q/t} \\ &\leqslant C^{q/t}(\sup_k b_k^{q/t})\left(\sum_k c_k^{q/t}\right).\end{aligned}$$

□

Proposição 1.0.14. *Sejam $p, q \in (0, \infty)$. Sejam $0 \leqslant a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tais que, para todo k,*

$$a_k^{1/\hat{p}} \leqslant C^{1/\hat{p}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{k-i}^{1/\hat{p}} c_i^{1/\hat{p}}. \tag{1.0-2}$$

Então

$$\left(\sum_k a_k^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C^{1/p} C_3(p, q, b)\left(\sum_k c_k^{q/p}\right)^{1/q},$$

onde $C_3 \geqslant 1$ satisfaz

A. *Se $p \geqslant 1$ e $q \geqslant 1$, então $C_3(p, q, b) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{1/p}$;*

B. *Se $p \geqslant 1$ e $q \leqslant 1$, então $C_3(p, q, b) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{q/p})^{1/q}$;*

C. Se $p < 1$ *e* $q/p \geqslant 1$*, então* $C_3(p,q,b) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k)^{1/p}$;

D. Se $p < 1$ *e* $q < 1$*, então* $C_3(p,q,b) = (\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{q/p})^{1/q}$.

Demonstração. Primeiro, observe que a somatória em (1.0-2) é equivalente à convolução $b_k * c_k$. Portanto, temos:

A. Se $p \geqslant 1$ e $q \geqslant 1$, então $\hat{p} = p$ e, pela desigualdade de Young para o par $(1, q)$, temos $r = q$ e, assim,

$$\left(\sum_k a_k^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C^{1/p}\left(\sum_k b_k^{1/p}\right)\left(\sum_k c_k^{q/p}\right)^{1/q};$$

B. Se $p \geqslant 1$ e $q \leqslant 1$, pelo lema 1.0.1 e pela desigualdade de Young para o par $(1,1)$, temos

$$\begin{aligned}\sum_k a_k^{q/p} &\leqslant C^{q/p}\sum_k\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{k-i}^{1/p} c_i^{1/p}\right)^q\\ &\leqslant C^{q/p}\sum_k\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{k-i}^{q/p} c_i^{q/p}\\ &\leqslant C^{q/p}\left(\sum_k b_k^{q/p}\right)\left(\sum_k c_k^{q/p}\right);\end{aligned}$$

C. Se $p < 1$ e $q/p \geqslant 1$, pela desigualdade de Young para o par $(1, q/p)$, temos

$$\left(\sum_k a_k^{q/p}\right)^{p/q} \leqslant C\left(\sum_k (b_k * c_k)^{q/p}\right)^{p/q} \leqslant C\left(\sum_k b_k\right)\left(\sum_k c_k^{q/p}\right)^{p/q};$$

D. Se $p < 1$ e $q/p \leqslant 1$, usando o lema 1.0.1 e a desigualdade de Young para o par $(1,1)$, temos

$$\begin{aligned}\sum_k a_k^{q/p} &\leqslant \sum_k\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{k-i} c_i\right)^{q/p}\\ &\leqslant C^{q/p}\sum_k\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{k-i}^{q/p} c_i^{q/p}\\ &\leqslant C^{q/p}\left(\sum_k b_k^{q/p}\right)\left(\sum_k c_k^{q/p}\right).\end{aligned}$$

□

2 Espaços quase Besov

Neste capítulo, vamos definir os espaços quase Besov em um espaço de medida com uma grade. Na Seção 2.1, vamos introduzir o conceito de átomo e vamos usá-lo na Seção 2.2 para decompor funções de L^p e construir os espaços quase Besov. Na Seção 2.3, exploraremos algumas mudanças de parâmetros e como isso afeta os espaços resultantes. O resultado mais importante do capítulo é a Proposição 2.4.1 da Seção 2.4, que diz respeito ao uso de diferentes classes de átomos na construção dos espaços.

Ao longo desse capítulo, consideraremos um espaço de medida $(I, \mathscr{B}, m)$, com $|I| < \infty$ e, a menos que explicitamente indicado, vamos assumir $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ e $s > 0$.

2.1 Átomos

Seja $\mathcal{P}$ uma grade. Sejam $p \in (0,\infty)$, $u \in [1,\infty]$ e $s > 0$. Uma classe de **átomos** associados a $\mathcal{P}$ de tipo (s,p,u) é uma família indexada $\mathcal{A}$ de pares $(\mathcal{B}(Q),\mathcal{A}(Q))_{Q\in\mathcal{P}}$, onde

(A_1) $\mathcal{B}(Q)$ é um espaço de Banach complexo contido em L^{pu};

(A_2) Se $\phi \in \mathcal{B}(Q)$, então $\phi(x) = 0$ para todo $x \notin Q$;

(A_3) $\mathcal{A}(Q)$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{B}(Q)$ tal que $\phi \in \mathcal{A}(Q)$ se, e somente se, $\sigma\phi \in \mathcal{A}(Q)$ para todo $\sigma \in \mathbb{C}$ com $|\sigma| = 1$;

(A_4) Temos

$$|\phi|_{pu} \leqslant |Q|^{s-\frac{1}{u'p}}$$

para todo $\phi \in \mathcal{A}(Q)$.

Diremos que $\phi \in \mathcal{A}(Q)$ é um $\mathcal{A}$-átomo de tipo (s,p,u) com suporte em Q e que $\mathcal{B}(Q)$ é o espaço de Banach local em Q. Às vezes, também iremos assumir algum dos itens a seguir:

(A_5) Para todo $Q \in \mathcal{P}$, temos que $\mathcal{A}(Q)$ é um subconjunto compacto na topologia *forte* de L^{pu};

(A_6) Temos $p \in [1,\infty)$ e, para todo $Q \in \mathcal{P}$, o conjunto $\mathcal{A}(Q)$ é sequencialmente compacto na topologia *fraca* de L^{pu};

(A_7) Para todo $Q \in \mathcal{P}$, $\mathcal{B}(Q)$ tem dimensão finita e $\mathcal{A}(Q)$ contém uma vizinhança de 0 em $\mathcal{B}(Q)$.

2.2 Espaços quase Besov

Aqui começamos a descrição dos espaços quase Besov. Esses espaços são generalizações dos espaços de Besov, obtidos ao enfraquecer algumas condições que serão dadas posteriormente. Por exemplo, vamos permitir $p, q < 1$ e grades e classes de átomos bem mais gerais.

Seja $p \in (0, \infty)$, $u \in [1, \infty]$, $q \in (0, \infty]$ e $s > 0$. Seja $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^k)_{k \geqslant 0}$ uma grade e seja $\mathcal{A}$ uma família de átomos de tipo (s, p, u). Também vamos assumir

(G_2) Temos

$$C_4 = C_2(p, q, (|\mathcal{P}^k|^s)_k) < \infty$$

e

$$\lim_k |\mathcal{P}^k| = 0.$$

Definição 2.2.1. *O* ***espaço quase Besov*** $\mathcal{B}^s_{p,q}(I, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ *é o conjunto de todas as funções com valores complexos* $g \in L^p(I)$ *que podem ser representadas por uma série absolutamente convergente em* $L^p(I)$

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q a_Q, \tag{2.2-1}$$

onde $a_Q \in \mathcal{A}(Q)$, $s_Q \in \mathbb{C}$ *e*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |s_Q|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty. \tag{2.2-2}$$

Note que a soma interna em (2.2-1) é finita. Por convergência absoluta em L^p, queremos dizer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q a_Q \Big|_p^{p/\hat{p}} < \infty.$$

A série em (2.2-1) é dita uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(I, \mathcal{P}, \mathcal{A})$**-representação** da função g e a expressão (2.2-2) é dita o **custo** da representação (2.2-1). Definimos

$$|g|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(I,\mathcal{P},\mathcal{A})} = \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |s_Q|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \tag{2.2-3}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis representações de g como em (2.2-1).

Frequentemente, ao longo do texto, quando for clara a escolha do espaço de medida I e/ou da grade $\mathcal{P}$, escreveremos $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ ou até $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$ ao invés de $\mathcal{B}^s_{p,q}(I, \mathcal{P}, \mathcal{A})$. Podemos ainda explicitar a medida, escrevendo $\mathcal{B}^s_{p,q}(I, m, \mathcal{P}, \mathcal{A})$. Sempre que omitirmos a classe $\mathcal{A}$ de átomos, significa que estamos usando átomos de Souza $\mathcal{A}^{sz}_{s,p}$, uma classe que introduziremos em mais detalhes na Seção 3.3.

Proposição 2.2.2. *Assuma G_1-G_2 e A_1-A_4. Seja $t \in (0, \infty)$ tal que*

$$s - \frac{1}{p} + \frac{1}{t} \geqslant 0, \quad p \leqslant t \leqslant pu, \tag{2.2-4}$$

e suponha

$$C_5 = C_1^{1+1/t} C_2(t, q, (|\mathcal{P}^k|^{t(s-1/p+1/t)})_k) < \infty. \tag{2.2-5}$$

Então, para todos os coeficientes s_Q satisfazendo (2.2-2) e todos os $\mathcal{A}$-átomos a_Q em Q, temos

$$\Big|\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q a_Q\Big|_t \leqslant C_1^{1+1/t} |\mathcal{P}^k|^{s-1/p+1/t} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |s_Q|^p\right)^{1/p}. \tag{2.2-6}$$

Em particular, obtemos que a série (2.2-1) converge absolutamente em L^t e

$$|g|_t \leqslant C_5 |g|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}. \tag{2.2-7}$$

Demonstração. Primeiro, note que, como $p \leqslant t \leqslant pu$, temos $\dfrac{pu}{t} \geqslant 1$ e podemos usar a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
|a_P|_t^t &= \int |a_P|^t \, \mathrm{d}m \\
&= \int |a_P|^t \, 1_P \, \mathrm{d}m \\
&\leqslant ||a_P|^t|_{\frac{pu}{t}} |1_P|_{\frac{pu}{pu-t}} \\
&\leqslant |a_P|_{pu}^t |P|^{\frac{pu-t}{pu}} \\
&\leqslant |P|^{ts - \frac{t}{u'p}} |P|^{\frac{pu-t}{pu}} = |P|^{t(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t})},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem da hipótese A_4.

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q a_Q\Big|_t^t &= \int \Big|\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q a_Q\Big|^t \mathrm{d}m \\
&\leqslant \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \int_Q \Big|\sum_{P \in \mathcal{P}^k} s_P a_P\Big|^t \mathrm{d}m \\
&\leqslant \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \int_Q \Big|\sum_{P \in \Omega_Q^k} s_P a_P\Big|^t \mathrm{d}m \\
&\leqslant C_1^t \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \int_Q \sum_{P \in \Omega_Q^k} |s_P a_P|^t \, \mathrm{d}m \\
&\leqslant C_1^t \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \sum_{P \in \Omega_Q^k} \int |s_P a_P|^t \, \mathrm{d}m \\
&\leqslant C_1^t \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \sum_{P \in \Omega_Q^k} \int |s_P|^t |a_P|^t \, \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C_1^t \sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{P\in\Omega_Q^k} |s_P|^t |a_P|_t^t \\
&\leqslant C_1^t \sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{P\in\Omega_Q^k} |P|^{t(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t})}|s_P|^t \\
&\leqslant C_1^t |\mathcal{P}^k|^{t(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t})} \sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{P\in\Omega_Q^k} |s_P|^t.
\end{aligned}
$$

Observe que, qualquer que seja $W \in \mathcal{P}^k$, $|s_W|^t$ aparece, no máximo, C_1 vezes na soma $\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{P\in\Omega_Q^k} |s_P|^t$, pois $W \in \Omega_Q^k \iff Q \in \Omega_W^k$ e $\#\Omega_W^k \leqslant C_1$. Portanto,

$$
C_1^t |\mathcal{P}^k|^{t(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t})} \sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{P\in\Omega_Q^k} |s_P|^t \leqslant C_1^{t+1} |\mathcal{P}^k|^{t(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t})} \sum_{P\in\mathcal{P}^k} |s_P|^t.
$$

Disso, temos que

$$
\Big|\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q\Big|_t \leqslant C_1^{1+1/t} |\mathcal{P}^k|^{s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t}} \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |s_P|^t\right)^{1/t}
$$

e (2.2-6) segue do Lema 1.0.5.

Com o auxílio da Proposição 1.0.13 e do Lema 1.0.5, temos

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_k \left(\Big|\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q\Big|_t^t\right)^{1/\hat{t}}\right)^{\hat{t}/t} &\leqslant C_1^{1+\frac{1}{t}} C_2(t,q,(|\mathcal{P}^k|^{t(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t})})_k) \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |s_P|^t\right)^{q/t}\right)^{1/q} \\
&\leqslant C_1^{1+\frac{1}{t}} C_2(t,q,(|\mathcal{P}^k|^{t(s-\frac{1}{p}+\frac{1}{t})})_k) \left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |s_P|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Isso mostra a convergência em L^t. A relação (2.2-7) vem do fato que

$$
\Big|\sum_k \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q\Big|_t \leqslant \left(\sum_k \left(\Big|\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q\Big|_t^t\right)^{1/\hat{t}}\right)^{\hat{t}/t}.
$$

□

A Proposição 2.2.2 é de extrema importância. Ela diz que qualquer série como em (2.2-1) que possua um custo finito é uma representação de uma função de $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$.

Observação 2.2.3. *Note que, devido a G_1 e G_2, se $t = p$, temos $C_5 < \infty$. Vamos mostrar para o caso $p \geqslant 1$ e $q > 1$, os outros são análogos. De fato, por G_1, temos que $C_1 < \infty$. Agora observe que, por G_2, temos que existe k_0 tal que $|\mathcal{P}^k| < 1$ para todo $k > k_0$. Também temos que $sq' \geqslant sq'/p$. Então, novamente por G_2,*

$$
\left(\sum_{k>k_0} |\mathcal{P}^k|^{sq'}\right)^{1/q'} \leqslant \left(\sum_{k>k_0} |\mathcal{P}^k|^{\frac{sq'}{p}}\right)^{1/q'} = C_4 < \infty
$$

Segue que $C_2(p,q,(|\mathcal{P}^k|^{sp})_k) < \infty$. Também pode ser conveniente usar estimativas mais precisas do que (2.2-6) e (2.2-7), substituindo $|\mathcal{P}^k|$ pela sequência

$$C^k = máx\{\, |Q| : Q \in \mathcal{P}^k,\ s_Q \neq 0 \,\}.$$

Por exemplo, se $s_Q = 0$ para todo $Q \in \mathcal{P}^k$ com $k \leqslant N$, então podemos substituir $C_2(t,q,(|\mathcal{P}^k|^{t(s-1/p+1/t)})_k)$ por $C_2(t,q,(|\mathcal{P}^k|^{t(s-1/p+1/t)}1_{(N,\infty)}(k))_k)$ em (2.2-5).

Proposição 2.2.4. *Assuma G_1-G_2 e A_1-A_4. Então $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e $|\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}$ é uma ρ-norma, com $\rho = mín\{1,p,q\}$. Além disso, a inclusão linear*

$$\iota\colon (\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}), |\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}) \to (L^p, |\cdot|_p)$$

é contínua.

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$. Então existem $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representações

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s'_Q a'_Q \text{ e } g = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q.$$

Seja $sgn(0) = 0$ e $sgn(z) = z/|z|$, se $z \neq 0$. Então podemos escrever

$$\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} c_Q b_Q = \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s'_Q a'_Q + \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q, \tag{2.2-8}$$

onde[1]

$$b_Q = \frac{|s'_Q|}{|s_Q| + |s'_Q|} sgn(s'_Q) a'_Q + \frac{|s_Q|}{|s_Q| + |s'_Q|} sgn(s_Q) a_Q$$

e

$$c_Q = |s'_Q| + |s_Q|.$$

Note que $sgn(s'_Q)a'_Q$ e $sgn(s_Q)a_Q$ são átomos devido a A_3. Então, novamente por A_3, temos que b_Q também é um átomo, pois é combinação convexa de átomos. Agora, pelo Lema 1.0.11, temos

$$\left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |c_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} \leqslant \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s'_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} + \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q}. \tag{2.2-9}$$

Portanto, pela Proposição 2.2.2, temos que

$$\sum_k \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} c_Q b_Q$$

[1] Nós não precisamos nos preocupar muito se $|s'_Q| + |s_Q| = 0$, pois, nesse caso, $|c_Q| = 0$ e podemos escolher b_Q como sendo um átomo qualquer (por exemplo a_Q) de tal forma que (2.2-8) seja satisfeita. Por isso, não vamos lidar explicitamente com situações semelhantes que aparecerem ao longo do texto.

é uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representação de $f+g$. Resta mostrar que $|\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}$ é uma ρ-norma. De fato, de (2.2-9), temos que

$$|f+g|^{\rho}_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} \leqslant \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s'_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} + \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as possíveis $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representações de f e g, obtemos

$$|f+g|^{\rho}_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} \leqslant |f|^{\rho}_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} + |g|^{\rho}_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}.$$

A identidade $|\alpha f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} = |\alpha||f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}$ para $\alpha\in\mathbb{C}$ é óbvia e, por último, a inequação (2.2-7) nos dá que $|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} = 0 \implies |f|_p = 0$, o que, por sua vez, implica em $f=0$. Da mesma inequação, obtemos, de forma direta, que ι é contínua. $\square$

Proposição 2.2.5. *Assuma G_1-G_2 e A_1-A_4. Suponha que g_n são funções em $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$ com $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representações*

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s^n_Q a^n_Q,$$

onde a^n_Q é um $\mathcal{A}$-átomo com suporte em Q, satisfazendo:

(i) Existe C tal que, para todo n,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s^n_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C; \tag{2.2-10}$$

(ii) Para todo $Q\in\mathcal{P}$, temos que existe $s_Q = \lim_n s^n_Q$;

(iii) Para todo $Q\in\mathcal{P}$, existe $a_Q\in\mathcal{A}(Q)$ tal que

(1) a sequência a^n_Q converge para a_Q na topologia forte de L^p ou

(2) temos $p\in[1,\infty)$ e a^n_Q converge na topologia fraca de L^p para a_Q.

Então g_n converge, forte ou fracamente em L^p, respectivamente, para $g\in\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$, onde g tem a $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representação

$$g = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q, \tag{2.2-11}$$

que satisfaz

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C. \tag{2.2-12}$$

Demonstração. De (2.2-10) segue que vale (2.2-12) e, assim, que (2.2-11) é, de fato, uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representação de uma função g. Resta provar que g_n converge em L^p na topologia em consideração. Dado $\varepsilon>0$, tome N suficientemente grande para que

$$C_1^{1+1/p} C_2(p,q,(|\mathcal{P}^k|^{ps}1_{(N,\infty)}(k))_k)2^{1/\rho}C < (\varepsilon/2)^{\hat{\rho}/p}.$$

Podemos escrever

$$g_n - g = \sum_{k\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}(s_Q^n a_Q^n - s_Q a_Q) + \sum_{k>N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} c_Q^n b_Q^n,$$

onde

$$b_Q^n = \frac{|s_Q^n|}{|s_Q^n|+|s_Q|} sgn(s_Q^n) a_Q^n + \frac{|s_Q|}{|s_Q^n|+|s_Q|} sgn(-s_Q) a_Q$$

é um átomo em $\mathcal{A}(Q)$ e

$$c_Q^n = |s_Q^n| + |s_Q|.$$

Observe que, similarmente à proposição anterior, a série no lado direito da igualdade converge absolutamente em L^p. Também, devido a (2.2-10) temos

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|c_Q^n|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q^n|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} \leqslant 2C^\rho,$$

de onde

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|c_Q^n|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant 2^{1/\rho}C.$$

Então, por (2.2-7) na Proposição 2.2.2 (veja também a observação 2.2.3), temos

$$\Big|\sum_{k>N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} c_Q^n b_Q^n\Big|_p \leqslant C_1^{1+1/p} C_2(p,q,(|\mathcal{P}^k|^{ps}1_{(N\infty)}(k))_k) 2^{1/\rho} C < (\varepsilon/2)^{\hat{p}/p}. \tag{2.2-13}$$

Se vale $(iii.1)$ note que, se n for grande o suficiente,

$$\Big|\sum_{k\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}(s_Q^n a_Q^n - s_Q a_Q)\Big|_p^{p/\hat{p}} < \varepsilon/2$$

e, consequentemente, $|g_n - g|_p^{p/\hat{p}} < \varepsilon$. Então $g_n \to g$ na topologia forte de L^p.

No caso $(iii.2)$, dado $\phi \in (L^p)^*$, temos que

$$\left|\phi\left(\sum_{k\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q^n a_Q^n - s_Q a_Q\right)\right| = \left|\sum_{k\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q^n\phi(a_Q^n) - s_Q\phi(a_Q)\right| \to 0.$$

Agora, pelo teorema de Banach-Alaoglu, sabemos que $|\phi|_{(L^p)^*} < \infty$. Portanto, por (2.2-13), temos que

$$\left|\phi\left(\sum_{k>N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} c_Q^n b_Q^n\right)\right| \leqslant |\phi|_{(L^p)^*}\Big|\sum_{k>N}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} c_Q^n b_Q^n\Big|_p \to 0.$$

Portanto $\phi(g_n) - \phi(g) = \phi(g_n - g) \to 0$. □

O Corolário 2.2.7 a seguir apresenta um resultado envolvendo aplicações lineares compactas. Existem várias definições equivalentes desse conceito. Vamos apresentar uma delas aqui, que nos é mais conveniente.

Definição 2.2.6. *Uma aplicação linear $T\colon V \to W$ entre dois espaços vetoriais topológicos é dita compacta se, para toda sequência limitada $(x_n)_n$ em V, a sequência $(Tx_n)_n$ possui uma subsequência convergente.*

Corolário 2.2.7. *Assuma G_1-G_2, A_1-A_4 e*

- *temos A_5 ou*
- *temos A_6.*

Então:

(i) Para toda sequência $g_n \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$ tal que $|g_n|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} \leqslant C$ para todo n, existe subsequência que converge forte ou fracamente em L^p, respectivamente, para alguma $g \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$ com $|g|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} \leqslant C$;

(ii) Em ambos os casos, $(\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}), |\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})})$ é um espaço de ρ-Banach complexo com $\rho = \text{mín}\{1, p, q\}$;

(iii) Em ambos os casos, a inclusão

$$\iota\colon (\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}), |\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}) \to (L^p, |\cdot|_p)$$

é uma aplicação linear compacta.

Demonstração. (i) Existem $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representações

$$g_n = \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s^n_Q a^n_Q,$$

onde a_Q é um $\mathcal{A}$-átomo com suporte em Q e

$$\left(\sum_k \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |s^n_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C + \varepsilon_n,$$

com $1 \geqslant \varepsilon_n \to 0$. Em particular, $|s^n_Q| \leqslant C + 1$, quaisquer que sejam n e Q. Agora observe que $\bigcup_k \mathcal{P}^k$ é enumerável. Seja $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ uma enumeração desse conjunto. Pelo teorema de Bolzano-Weiertrass, podemos extrair uma subsequência $n^1 = (n^1_1, n^1_2, n^1_3 \dots)$ da sequência n de modo que $(s^{n^1}_{Q_1})_{n^1}$ convirja para algum $s_{Q_1} \in \mathbb{C}$. Do mesmo modo, podemos tomar n^1 como a nova sequência original e obter uma subsequência n^2 de n^1 tal que $(s^{n^2}_{Q_2})_{n^2}$ é uma sequência convergente. Em geral, se supusermos obtida subsequência n^k da sequência n^{k-1} tal que $(s^{n^k}_{Q_k})_{n^k}$ convirja, podemos encontrar subsequência n^{k+1} de n^k de modo que a sequência $(s^{n^{k+1}}_{Q_{k+1}})_{n^{k+1}}$ é convergente. Com isso, podemos definir a sequência de números naturais $m =$

$(n_1^1, n_2^2, \ldots, n_j^j, \ldots)$ de modo que, para qualquer $Q \in \bigcup_k \mathcal{P}^k$, a sequência $(s_Q^m)_m$ converge para algum $s_Q \in \mathbb{C}$. Em [SMANIA, 2022], esse processo é referido como "argumento da diagonal de Cantor". Agora, devido a A_5 (A_6), podemos repetir o processo para a sequência de átomos, partindo da sequência m e obter uma sequência m' tal que, para todo $Q \in \bigcup_k \mathcal{P}^k$, temos $s_Q^{m'} \to s_Q$ e $(a_Q^{m'})_{m'}$ converge fortemente (fracamente) em L^p para algum $a_Q \in \mathcal{A}(Q)$. Definimos

$$g = \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q a_Q.$$

Pela Proposição 2.2.5, concluímos que a subsequência $g_{m'}$ de g_n converge para g em L^p, que $g \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$ e $|g|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} \leqslant C$.

(ii) Pela Proposição 2.2.4, já temos que $|\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}$ é uma ρ-norma. Basta mostrar que ela gera uma métrica completa. Então seja g_n uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$ e seja $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 2.2.2, temos que g_n também é uma sequência de Cauchy em L^p. Seja g seu limite em L^p. Como g_n é de Cauchy, é limitada, então, pelo que acabamos de provar em (i), temos que $g \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$. Note que existe M tal que, para $m, n \geqslant M$,

$$|g_n - g_m|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} < \varepsilon,$$

e $g_n - g_m$ converge para $g_n - g$ em L^p. Sendo assim, usando novamente (i), dessa vez aplicado à sequência $(g_n - g_m)_{m \geqslant M}$, temos que

$$|g_n - g|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} < \varepsilon,$$

então g_n converge a g em $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$.

(iii) De acordo com a Definição 2.2.6, temos que (iii) segue diretamente de (i).

□

Informalmente, o Corolário 2.2.7 pode ser visto como uma espécie de teorema de Bolzano-Weiertrass para o contexto em que estamos inseridos. O próximo corolário nos diz que podemos encontrar uma representação onde o ínfimo em (2.2-3) é satisfeito.

Corolário 2.2.8. *Assuma G_1-G_2, A_1-A_4 e*

- *temos A_5 ou*
- *temos A_6.*

Então, para todo $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$, existe uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representação

$$f = \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} c_Q a_Q$$

tal que

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} = \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |c_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.$$

Demonstração. Seja

$$g_n = \sum_k \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s^n_Q a^n_Q$$

uma sequência de representações de f tal que o custo forma uma sequência não-crescente, ou seja,

$$\left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s^n_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \geqslant \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s^{n+1}_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

para todo n. Então temos que $|g_n|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}$ é limitada pelo custo de g_1 para todo n e

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} = \lim_n \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s^n_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.$$

Pelo Corolário 2.2.7, temos que existe subsequência de g_n que converge em L^p a uma $g = \sum_k \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} s_Q a_Q$. Definindo, então, $c_Q := s_Q$, obtemos o resultado. $\square$

Corolário 2.2.9. *Assuma G_1-G_2 e A_1-A_4. Se, para todo $Q \in \mathcal{P}$, tivermos que $\mathcal{B}(Q)$ tem dimensão finita e que $\mathcal{A}(Q)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{B}(Q)$, então $(\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}), |\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})})$ é um espaço de ρ-Banach, com $\rho = \text{mín}\{1, p, q\}$.*

Demonstração. Já que todas as normas em $\mathcal{B}(Q)$ são equivalentes, temos que A_4 implica que $\mathcal{A}(Q)$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathcal{B}(Q)$, e é, portanto, compacto. Pelo Corlário 2.2.7(ii), segue que $(\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}), |\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})})$ é um espaço de ρ-Banach. $\square$

2.3 Escalas de espaços

Uma família $\mathcal{A}_{s,p}$ de átomos de tipo (s,p,∞) induz uma escala a dois parâmetros

$$(\tilde{s},\tilde{p}) \to \mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}$$

dada por

$$\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}} = \{\, |Q|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}} a_Q : a_Q \in \mathcal{A}_{s,p}(Q)\,\}.$$

De fato, se $b_Q \in \mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}(Q)$, temos

$$|b_Q|_\infty = |Q|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}}|a_Q|_\infty \leqslant |Q|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}}|Q|^{s-1/p} = |Q|^{\tilde{s}-1/\tilde{p}}$$

para algum $a_Q \in \mathcal{A}_{s,p}(Q)$.

A seguinte proposição nos dá alguns resultados sobre como os espaços são afetados por essas escalas. Em [SMANIA, 2022], ela é provada apenas para uma escala a um parâmetro, ou seja, quando $\tilde{p} = p$. Aqui, vamos prová-la com maior generalidade.

Proposição 2.3.1. *Assuma G_1-G_2. Suponha que a família $\mathcal{A}_{s,p}$ de átomos de tipo (s,p,∞) satisfaça A_1-A_4. Sejam $0 < \tilde{p} \leqslant p < \infty$ e $s, \tilde{s} > 0$ tais que*

$$\tilde{s} - s + \frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}} > 0$$

e $q, \tilde{q} \in (0,\infty]$. Suponha

$$\left(\sum_k |\mathcal{P}^k|^{q(\tilde{s}-s+1/p+1/\tilde{p})}\right)^{1/q} < \infty. \tag{2.3-14}$$

Então:

(A) Temos $\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}) \subset \mathcal{B}^{s}_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})$ e a inclusão é contínua;

(B) Suponha que $\mathcal{A}_{s,p}$ também satisfaça A_5 e A_7. Seja $g_n \in \mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})$ tal que $|g_n|_{\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})} \leqslant C$ para todo n. Então existe uma subsequência que converge em $\mathcal{B}^{s}_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})$ para alguma $g \in \mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})$ satisfazendo $|g|_{\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})} \leqslant C$.

(C) Sob as hipóteses de (B), a inclusão $\iota\colon \mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}) \to \mathcal{B}^{s}_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})$ é uma aplicação linear compacta.

Demonstração. Considere uma $\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})$-representação

$$f = \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q a_Q.$$

Como $a_Q \in \mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}(Q)$, temos que $b_Q = |Q|^{s-\tilde{s}+1/\tilde{p}-1/p} a_Q \in \mathcal{A}_{s,p}(Q)$ e podemos escrever

$$f = \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} s_Q |Q|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}} b_Q.$$

Agora, dado $k_0 \geqslant 0$, note que, para $k \geqslant k_0$, com o auxílio do Lema 1.0.5, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^p|Q|^{p(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{1/p} &\leqslant |\mathcal{P}^k|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant |\mathcal{P}^k|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^{\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{p}} \leqslant |\mathcal{P}^k|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}}\left(\sum_{k\geqslant k_0}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^{\tilde{p}}\right)^{\tilde{q}/\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{q}},\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k\geqslant k_0}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^p|Q|^{p(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{q/p}\right)^{1/q}\\ &\qquad\leqslant\left(\sum_{k\geqslant k_0}|\mathcal{P}^k|^{q(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{1/q}\left(\sum_{k\geqslant k_0}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^{\tilde{p}}\right)^{\tilde{q}/\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{q}}. \quad (2.3\text{-}15)\end{aligned}$$

Prova de (A): Combinando as equações (2.3-14) e (2.3-15) com $k_0 = 0$, concluímos que

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})} \leqslant \left(\sum_k|\mathcal{P}^k|^{q(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{1/q}|f|_{\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})},$$

de onde segue que $\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})$ e que a inclusão é contínua.

Prova de (B): Por definição, existem $s^n_Q \in \mathbb{C}$ tais que

$$g_n = \sum_k\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}s^n_Q a^n_Q,$$

onde a^n_Q é um $\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}$-átomo com suporte em Q e

$$\left(\sum_k\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s^n_Q|^{\tilde{p}}\right)^{\tilde{q}/\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{q}} \leqslant C + \varepsilon_n, \quad (2.3\text{-}16)$$

com $1 \geqslant \varepsilon_n \to 0$. Em particular, $|s^n_Q| \leqslant C + 1$ para todo n. Como $\bigcup_k \mathcal{P}^k$ é um conjunto enumerável, pelo argumento da diagonal de Cantor (como usado no Corolário 2.2.7(i)) e por A_5 podemos supor, recorrendo a uma subsequência se necessário, que, para todo $Q \in \mathcal{P}$, s^n_Q converge para algum $s_Q \in \mathbb{C}$ e a^n_Q converge em L^p para algum $a_Q \in \mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}}$. Pela Proposição 2.2.5, temos que g_n converge em L^p para uma função g tal que $|g|_{\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})} \leqslant C$ e com $\mathcal{B}^{\tilde{s}}_{\tilde{p},\tilde{q}}(\mathcal{A}_{\tilde{s},\tilde{p}})$-representação

$$g = \sum_k\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}s_Q a_Q.$$

Resta mostrar que a convergência de fato ocorre na topologia de $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})$.

Para todo $k_0 \geqslant 0$ e $\delta > 0$, podemos escrever

$$g_n - g = \sum_{k<k_0}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\delta d^n_Q + \sum_{k\geqslant k_0}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|Q|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}}c^n_Q b^n_Q,$$

onde

$$d_Q^n = \frac{1}{\delta}(s_Q^n a_Q^n - s_Q a_Q),$$

$$b_Q^n = \frac{|s_Q^n|}{|s_Q^n| + |s_Q|} sgn(s_Q^n)|Q|^{s-\tilde{s}+1/\tilde{p}-1/p} a_Q^n + \frac{|s_Q|}{|s_Q^n| + |s_Q|} sgn(-s_Q)|Q|^{s-\tilde{s}+1/\tilde{p}-1/p} a_Q$$

e

$$c_Q = |s_Q^n| + |s_Q|.$$

Note que $b_Q^n \in \mathcal{A}_{s,p}$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, escolha k_0 de modo que

$$\left(\sum_{k \geqslant k_0} |\mathcal{P}^k|^{q(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{1/q} 2^{1/\rho}(C+1) < (\varepsilon/2)^{1/\rho},$$

onde $\rho = \text{mín}\{1, p, q\}$. Por (2.3-15) e (2.3-16), temos que, para n grande o suficiente,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k \geqslant k_0} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |c_Q^n|^p |Q|^{p(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} \\
&\qquad \leqslant \left(\sum_{k \geqslant k_0} |\mathcal{P}^k|^{q(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{\rho/q} \left(\sum_{k \geqslant k_0} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |c_Q^n|^{\tilde{p}}\right)^{\tilde{q}/\tilde{p}}\right)^{\rho/\tilde{q}} \\
&\leqslant \left(\sum_{k \geqslant k_0} |\mathcal{P}^k|^{q(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{\rho/q} \left[\left(\sum_{k \geqslant k_0} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |s_Q^n|^{\tilde{p}}\right)^{\tilde{q}/\tilde{p}}\right)^{\rho/\tilde{q}} + \left(\sum_{k \geqslant k_0} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |s_Q|^{\tilde{p}}\right)^{\tilde{q}/\tilde{p}}\right)^{\rho/\tilde{q}}\right] \\
&\qquad\qquad \leqslant \left(\sum_{k \geqslant k_0} |\mathcal{P}^k|^{q(\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p})}\right)^{\rho/q} 2(C+1)^\rho < \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\left|\sum_{k \geqslant k_0} \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |Q|^{\tilde{s}-s+1/p-1/\tilde{p}} c_Q^n b_Q^n\right|^\rho_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})} < \varepsilon/2.$$

Agora escolha $\delta > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k < k_0} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \delta^p\right)^{q/p}\right)^{\rho/q} < \varepsilon/2.$$

Devido a A_7, existe $\eta > 0$ tal que, para todo $Q \in \mathcal{P}$, se $h \in \mathcal{B}(Q)$ satisfaz $|h|_{\mathcal{B}(Q)} < \eta$, então $h \in \mathcal{A}_{s,p}(Q)$. Como $s_Q^n a_Q^n \to s_Q a_Q$ em L^p e, novamente por A_7, as normas em $\mathcal{B}(Q)$ são equivalentes, temos que $s_Q^n a_Q^n \to s_Q a_Q$ em $\mathcal{B}(Q)$ e, assim, para n grande o suficiente,

$$d_Q^n = \frac{1}{\delta}(s_Q^n a_Q^n - s_Q a_Q) \in \mathcal{A}_{s,p}(Q)$$

para todo $Q \in \mathcal{P}$. Em particular,

$$\left|\sum_{k < k_0} \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \delta d_Q^n\right|^\rho_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})} < \varepsilon/2.$$

Concluímos que

$$|g_n - g|^\rho_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})} < \varepsilon$$

para n grande o suficiente, então a sequência g_n converge a g na topologia de $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_{s,p})$.

Prova de (C): Semelhantemente a 2.2.7(iii), segue diretamente de (B). □

2.4 Transmutação de átomos

Alguns espaços quase Besov podem ser obtidos usando diferentes classes de átomos. O seguinte resultado nos dá condições para que possamos comparar esses espaços.

Proposição 2.4.1 (Transmutação de átomos)**.** *Suponha:*

(I) $\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{W}$ *grades para um mesmo espaço* I*, satisfazendo* G_1*-*G_2 *e* $\mathcal{A}_2$ *uma classe de* (s, p, u_2)*-átomos para a grade* $\mathcal{W}$*, satisfazendo* A_1*-*A_4*;*

(II) $k_i \in \mathbb{N}$ *com* $i \geqslant 0$ *uma sequência tal que existe* $\alpha > 0$ *e* $A, B \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha i + A \leqslant k_i \leqslant \alpha i + B$$

para todo i*;*

(III) $\lambda \in (0,1)$ *tal que, para todo* $i \geqslant 0$*, para todo* $Q \in \mathcal{G}^i$ *e para todo* $P \in \mathcal{W}$ *tal que* $P \subset Q$*, existem* $b_{P,Q} \in \mathcal{A}_2(P)$ *e respectivos* $s_{P,Q} \in \mathbb{C}$ *de modo que*

$$h_Q = \sum_k \sum_{\substack{P \in \mathcal{W}^k \\ P \subset Q}} s_{P,Q} b_{P,Q}$$

é uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)$*-representação de uma função* h_Q *tal que* $s_{P,Q} = 0$ *para todo* $P \in \mathcal{W}^k$ *com* $k < k_i$ *e*

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{W}^k \\ P \subset Q}} |s_{P,Q}|^p \leqslant C_6 \lambda^{k-k_i} \tag{2.4-17}$$

para todo $k \geqslant k_i$*.*

Seja

$$\mathcal{H}^k = \bigcup_{Q \in \mathcal{G}} \{\, P \subset Q : P \in \mathcal{W}^k \ \text{e}\ s_{P,Q} \neq 0 \,\}.$$

Então:

(A) Para todos os coeficientes $(c_Q)_{Q \in \mathcal{G}}$ *tais que*

$$\left(\sum_i \left(\sum_{Q \in \mathcal{G}^i} |c_Q|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty,$$

temos que a sequência

$$N \mapsto \sum_{i \leqslant N} \sum_{Q \in \mathcal{G}^i} c_Q h_Q \tag{2.4-18}$$

converge em L^p *para uma função em* $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)$ *com* $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)$*-representação*

$$\sum_k \sum_{P \in \mathcal{H}^k} m_P d_P, \tag{2.4-19}$$

onde $m_P \geqslant 0$ para todo P e

$$\left(\sum_k \left(\sum_{P\in\mathcal{H}^k} |m_P|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$
$$\leqslant C_1(\mathcal{G})C_6^{1/p}\lambda^{-B/p}C_3(p,q,b)C_7^{1/q}\left(\sum_i \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} |c_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}, \quad (2.4\text{-}20)$$

onde $C_7 = máx\{\, l \in \mathbb{N} : l < \alpha \,\} + 1$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é definida por

$$b_n = \begin{cases} \lambda^{\alpha n} & se\ n > A/\alpha - 1 \\ 0 & se\ n \leqslant A/\alpha - 1 \end{cases};$$

(B) Assuma que $s_{P,Q}$ são números reais não negativos e $b_{P,Q} > 0$ em P para quaisquer P, Q. Então, se $m_P \neq 0$, temos que existe $Q \in \mathcal{G}$ tal que $P \subset supp\ h_Q$, $c_Q \neq 0$ e $s_{P,Q} > 0$. Se, adicionalmente, assumirmos que $c_Q \geqslant 0$ para todo Q, então $m_P \neq 0$ também implica $d_P > 0$ em P;

(C) Seja $\mathcal{A}_1$ uma classe de átomos de tipo (s, p, u_1) para a grade $\mathcal{G}$ satisfazendo A_1-A_4. Suponha que exista $\lambda \in (0, 1)$ tal que, para todo $a_Q \in \mathcal{A}_1(Q)$, podemos encontrar $s_{P,Q}$ e $b_{P,Q}$ em (III) tal que $h_Q = a_Q$. Então

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)$$

e a inclusão é contínua. De fato,

$$|\phi|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)} \leqslant C_1(\mathcal{G})C_6^{1/p}\lambda^{-B/p}C_3(p,q,b)C_7^{1/q}|\phi|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_1)}$$

para todo $\phi \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_1)$.

Demonstração. Para todo $P \in \mathcal{H}^k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, defina

$$m_{P,N} = \Bigg|\sum_{i\leqslant N} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i \\ P\subset Q}} c_Q s_{P,Q}\Bigg| = \Bigg|\sum_{\substack{i\leqslant N \\ k_i\leqslant k}} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i \\ P\subset Q}} c_Q s_{P,Q}\Bigg|.$$

Note que essa soma possui um número finito de termos. Se ela possuir zero termos, defina $m_{P,N} = 0$ e $d_{P,N}$ a função nula. Caso contrário, defina

$$d_{P,N} = \frac{1}{m_{P,N}} \sum_{i\leqslant N} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i \\ P\subset Q}} c_Q s_{P,Q} b_{P,Q}. \quad (2.4\text{-}21)$$

Denotando

$$\alpha = \sum_{i\leqslant N} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i \\ P\subset Q}} c_Q s_{P,Q},$$

podemos escrever

$$d_{P,N} = \frac{\alpha}{|\alpha|}\frac{1}{\alpha}\sum_{i\leqslant N}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i\\ P\subset Q}} c_Q s_{P,Q} b_{P,Q},$$

de onde vemos que $d_{P,N}$ é uma soma convexa de $\mathcal{A}_2(P)$-átomos multiplicada por um número complexo de módulo 1. Por A_3, segue que $d_{P,N} \in \mathcal{A}_2(P)$. O fato que a função nula é um átomo é uma consequência direta de A_3.

Afirmação 2.4.1- I. *Para $N \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{i\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} c_Q h_Q = \sum_k \sum_{P\in\mathcal{H}^k} m_{P,N} d_{P,N}.$$

Observe que

$$\sum_k \sum_{\substack{P\in\mathcal{W}^k\\ P\subset Q}} s_{P,Q} b_{P,Q} = \sum_k \sum_{\substack{P\in\mathcal{H}^k\\ P\subset Q}} s_{P,Q} b_{P,Q}.$$

Pela Proposição 2.2.2, essa série é absolutamente convergente em L^p. Sendo assim, podemos fazer a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned}\sum_{i\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} c_Q h_Q &= \sum_{i\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} c_Q \sum_k \sum_{\substack{P\in\mathcal{H}^k\\ P\subset Q}} s_{P,Q} b_{P,Q}\\ &= \sum_k \sum_{P\in\mathcal{H}^k}\sum_{i\leqslant N}\sum_{Q\in\mathcal{G}^i}\sum_{P\subset Q} c_Q s_{P,Q} b_{P,Q} = \sum_k\sum_{P\in\mathcal{H}^k} m_{P,N} d_{P,N}.\end{aligned}$$

Isso conclui a prova da Afirmação 2.4.1- I.

Afirmação 2.4.1- II. *Para todo $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$,*

$$\sum_k \sum_{P\in\mathcal{H}^k} m_{P,N} d_{P,N} \tag{2.4-22}$$

é uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)$-representação e

$$\begin{aligned}&\left(\sum_k\left(\sum_{P\in\mathcal{H}^k}|m_{P,N}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}\\ &\qquad\leqslant C_1(\mathcal{G})C_6^{1/p}\lambda^{-B/p}C_3(p,q,b)C_7^{1/q}\left(\sum_i\left(\sum_{Q\in\mathcal{G}^i}|c_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.\end{aligned} \tag{2.4-23}$$

De fato, dado $k \geqslant 0$,

$$\left(\sum_{P\in\mathcal{H}^k}|m_{P,N}|^p\right)^{1/\hat{p}} \leqslant \left(\sum_{P\in\mathcal{W}^k}\left(\sum_{\substack{i\leqslant N\\ k_i\leqslant k}}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i\\ P\subset Q}}|c_Q s_{P,Q}|\right)^p\right)^{1/\hat{p}}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{i\leqslant N\\ k_i\leqslant k}} \left(\sum_{P\in\mathcal{W}^k} \left(\sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i\\ P\subset Q}} |c_Q s_{P,Q}| \right)^p \right)^{1/\hat{p}}.$$

Como a soma interior da última expressão à direita está indexada sobre conjuntos $Q \in \mathcal{G}$ tais que $P \subset Q$, temos que esses conjuntos se intersectam. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{P\in\mathcal{H}^k} |m_{P,N}|^p \right)^{1/\hat{p}} &\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} \sum_{\substack{i\leqslant N\\ k_i\leqslant k}} \left(\sum_{P\in\mathcal{W}^k} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i\\ P\subset Q}} |c_Q|^p |s_{P,Q}|^p \right)^{1/\hat{p}} \\
&\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} \sum_{\substack{i\leqslant N\\ k_i\leqslant k}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} |c_Q|^p \sum_{\substack{P\in\mathcal{W}^k\\ P\subset Q}} |s_{P,Q}|^p \right)^{1/\hat{p}} \\
&\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} C_6^{1/\hat{p}} \sum_{\substack{i\leqslant N\\ k_i\leqslant k}} \lambda^{(k-k_i)/\hat{p}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} |c_Q|^p \right)^{1/\hat{p}} \\
&\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} C_6^{1/\hat{p}} \sum_{\alpha i+A\leqslant k} \lambda^{(k-\alpha i-B)/\hat{p}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} |c_Q|^p \right)^{1/\hat{p}}. \qquad (2.4\text{-}24)
\end{aligned}$$

Se $\alpha = 1$ e $A = B = 0$, então isso é uma convolução e podemos usar a Proposição 1.0.14 e (2.4-20) segue diretamente. Para o caso geral, considere

$$u_k = \sum_{P\in\mathcal{H}^k} |m_{P,N}|^p \quad \text{e} \quad c_i = \sum_{Q\in\mathcal{G}^i} |c_Q|^p.$$

Todo $k \in \mathbb{N}$ pode ser escrito *de maneira única* como $k = \alpha j_k + l_k + r_k$, com $j_k \in \mathbb{N}$, $l_k \in \mathbb{N}$, $l_k + r_k < \alpha$ e $r_k \in [0,1)$. Fixe $l \in [0,\alpha) \cap \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$. Então existe, no máximo, um $k' \in \mathbb{N}$ tal que $l_{k'} = l$ e $j_{k'} = j$. De fato, se $k' = \alpha j + l + r'$ e $k'' = \alpha j + l + r''$, com $r', r'' \in [0,1)$ e $(l+r'), (l+r'') < \alpha$, então $k' - k'' = r' - r'' \in (-1,1)$, de modo que $k' = k''$ e $r' = r''$. Se tal k' existir, defina $k(l,j) = k'$ e $r(l,j) = k(l,j) - \alpha j - l$ e $a_{l,j} = u_{k(l,j)}$. Caso contrário, defina $a_{l,j} = 0$. Então (2.4-24) implica que

$$\begin{aligned}
a_{l,j}^{1/\hat{p}} &\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} C_6^{1/\hat{p}} \sum_{\alpha i+A\leqslant \alpha j+l+r(l,j)} \lambda^{(\alpha j+l+r(l,j)-\alpha i-B)/\hat{p}} c_i^{1/\hat{p}} \\
&\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} C_6^{1/\hat{p}} \lambda^{-B/\hat{p}} \sum_{i\leqslant j+(-A+l+r(l,j))/\alpha} \lambda^{\alpha(j-i)/\hat{p}} c_i^{1/\hat{p}} \\
&\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} C_6^{1/\hat{p}} \lambda^{-B/\hat{p}} \sum_{i< j+(-A/\alpha+1)} \lambda^{\alpha(j-i)/\hat{p}} c_i^{1/\hat{p}} \\
&\leqslant C_1(\mathcal{G})^{p/\hat{p}} C_6^{1/\hat{p}} \lambda^{-B/\hat{p}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{j-i}^{1/\hat{p}} c_i^{1/\hat{p}}.
\end{aligned}$$

Aqui, $b_n = \lambda^{\alpha n}$, se $n > A/\alpha - 1$ e $b_n = 0$, caso contrário. Fixando $l \in \mathbb{N}$, $l < \alpha$, a Proposição 1.0.14 nos dá

$$K_l := \left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ l_k=l}} u_k^{q/p} \right)^{1/q} = \left(\sum_j a_{l,j}^{q/p} \right)^{1/q} \leqslant C_1(\mathcal{G}) C_6^{1/p} \lambda^{-B/p} C_3(p,q,b) \left(\sum_i \left(\sum_{Q\in\mathcal{G}^i} |c_Q|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$$

e

$$\left(\sum_k\left(\sum_{P\in\mathcal{H}^k}|m_{P,N}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}=\left(\sum_k u_k^{q/p}\right)^{1/q}=\left(\sum_{0\leqslant l<\alpha}\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ l_k=l}}u_k^{q/p}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\sum_{0\leqslant l<\alpha}K_l^q\right)^{1/q}\leqslant C_1(\mathcal{G})C_6^{1/p}\lambda^{-B/p}C_3(p,q,b)C_7^{1/q}\left(\sum_i\left(\sum_{Q\in\mathcal{G}^i}|c_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}. \quad (2.4\text{-}25)$$

Isso implica, em particular, que a soma em (2.4-22) é uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)$-representação. Isso prova a Afirmação 2.4.1- II.

Afirmação 2.4.1- III. *Temos que, na topologia forte de L^p,*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_k\sum_{P\in\mathcal{H}^k}m_{P,N}d_{P,N}=\sum_k\sum_{P\in\mathcal{H}^k}m_{P,\infty}d_{P,\infty}.$$

Para cada $P\in\mathcal{H}=\bigcup_k\mathcal{H}^k$, a sequência

$$N\mapsto m_{P,N} \quad (2.4\text{-}26)$$

é eventualmente constante e, portanto, convergente. Do mesmo modo,

$$N\mapsto d_{P,N} \quad (2.4\text{-}27)$$

converge fortemente em L^p. A Afirmação 2.4.1- I, a estimativa (2.4-23) e a Proposição 2.2.5 implicam que (2.4-18) converge fortemente em L^p para uma função com $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}_2)$-representação (2.4-22) com $N=\infty$. Isso conclui a prova da Afirmação 2.4.1- III.

Juntas, as Afirmações 2.4.1- I, 2.4.1- II e 2.4.1- III nos dão (A), quando tomamos $m_P=m_{P,\infty}$ e $d_P=d_{P,\infty}$. Temos que (C) é uma consequência imediata de (A). Agora, sob as hipóteses de (B), note que, se $m_P\neq 0$, temos

$$\sum_i\sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i\\ P\subset Q}}c_Q s_{P,Q}\neq 0$$

e, assim, deve existir Q' tal que $P\subset Q'$, $s_{P,Q'}>0$ e $c_{Q'}\neq 0$. Desse modo, para todo $x\in P$, temos

$$h_{Q'}(x)=\sum_k\sum_{\substack{R\in\mathcal{W}^k\\ R\subset Q'}}s_{R,Q'}b_{R,Q'}(x)\geqslant s_{P,Q'}b_{P,Q'}(x)>0,$$

e, assim, $P\subset \operatorname{supp} h_{Q'}$. Se supusermos, ainda, que $c_Q\geqslant 0$ para todo Q, temos que $m_P\neq 0 \implies c_{Q'}>0$. Logo, para todo $x\in P$,

$$d_P(x)=\frac{1}{m_P}\sum_i\sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^i\\ P\subset Q}}c_Q s_{P,Q}b_{P,Q}(x)\geqslant\frac{1}{m_P}c_{Q'}s_{P,Q'}b_{P,Q'}(x)>0.$$

□

3 Definições complementares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos que serão úteis nos próximos. As condições adicionais apresentadas na Seção 3.1 nos restringem a grades muito mais "bem comportadas", nos trazendo muitas facilidades ao longo do texto. Na Seção 3.2, introduzimos a noção de espaço quase Besov induzido, que será fundamental para definirmos os átomos de Besov, na Seção 4.5. Finalizamos o capítulo apresentando três classes de átomos, incluindo os átomos de Souza, classe mais simples dentre elas, que será a mais usada e a mais importante deste trabalho.

Assim como no Capítulo 2, trabalhamos em um espaço de medida finita (I, m) e, se nada for indicado, consideramos $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ e $s > 0$.

3.1 Grades boas

Uma grade (λ_1, λ_2)-boa, com $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, é uma grade $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ que, além de G_1 e G_2, satisfaz as seguintes propriedades:

(G_3) Temos $\mathcal{P}^0 = \{I\}$;

(G_4) Temos $I = \bigcup_{Q\in\mathcal{P}^k} Q$, a menos de um conjunto de medida nula;

(G_5) Os elementos da família $\{Q\}_{Q\in\mathcal{P}^k}$ são dois a dois disjuntos;

(G_6) Para todo $P \in \mathcal{P}^k$, com $k > 0$, temos que existe $Q \in \mathcal{P}^{k-1}$ tal que $P \subset Q$;

(G_7) Temos

$$\lambda_1 \leqslant \frac{|P|}{|Q|} \leqslant \lambda_2$$

para todo $P \subset Q$ tal que $P \in \mathcal{P}^{k+1}$ e $Q \in \mathcal{P}^k$ para algum $k \leqslant 0$;

(G_8) A família

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^k$$

gera a σ-álgebra $\mathscr{B}$.

Note que, pelas propriedades G_4, G_5 e G_7, podemos concluir que $\lambda_1 \leqslant 1/2$.

3.2 Espaços induzidos

Considere um espaço quase Besov $\mathcal{B}^s_{p,q}(I,\mathcal{P},\mathcal{A})$ onde $\mathcal{P}$ é uma grade boa. Dado $k_0 \in \mathbb{N}$ e $Q \in \mathcal{P}^{k_0}$, podemos considerar a sequência de famílias finitas $\mathcal{P}_Q = (\mathcal{P}^i_Q)_{i\geqslant 0}$ de subconjuntos de Q dada por

$$\mathcal{P}^i_Q = \{\, P \in \mathcal{P}^{k_0+i} : P \subset Q \,\}.$$

Seja $\mathcal{A}_Q$ a restrição da família indexada $\mathcal{A}$ de pares $(\mathcal{B}(P),\mathcal{A}(P))_{P\in\mathcal{P}}$ aos índices pertencentes a $\mathcal{P}_Q$. Então podemos considerar o espaço quase Besov **induzido** $\mathcal{B}^s_{p,q}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}_Q)$. Desse modo, temos que a inclusão

$$\iota\colon \mathcal{B}^s_{p,q}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}_Q) \to \mathcal{B}^s_{p,q}(I,\mathcal{P},\mathcal{A})$$

está bem definida, pois, se

$$g = \sum_i \sum_{P\in\mathcal{P}^i_Q} s_P a_P,$$

podemos escrever

$$g = \sum_k \sum_{P\in\mathcal{P}^k} s_P a_P,$$

onde $s_P = 0$ para todo $P \in \mathcal{P}$, tal que $P \notin \mathcal{P}_Q$. Além disso, segue diretamente das definições que ι é uma contração fraca, isto é,

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(I,\mathcal{P},\mathcal{A})} \leqslant |f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}_Q)},$$

para todo $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}_Q)$.

3.3 Exemplos de classes de átomos

Vamos listar algumas classes de átomos que nos serão úteis mais adiante. Todas as classes citadas são de átomos de tipo (s, p, ∞).

3.3A ***Átomos de Souza.*** Seja $Q \in \mathcal{P}$. Um (s, p)-átomo de Souza suportado em Q é uma função $a\colon I \to \mathbb{C}$ tal que $a(x) = 0$ para todo $x \notin Q$ e a é constante em Q, com

$$|a|_\infty \leqslant |Q|^{s-1/p}.$$

O conjunto dos (s, p)-átomos de Souza suportados em Q será denotado por $\mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q)$. Um *átomo de Souza canônico* em Q é um átomo de Souza tal que $a(x) = |Q|^{s-1/p}$ para todo $x \in Q$. Para ver que essas propriedades definem, de fato, uma classe de átomos, podemos tomar, para $Q \in \mathcal{P}$,

$$\mathcal{B}(Q) = \{\, \phi \in L^\infty : \phi \text{ é constante em } Q \text{ e } \phi(x) = 0 \text{ para todo } x \notin Q \,\}.$$

Dessa forma, temos que A_1, A_2 e A_4 seguem diretamente das definições. Para ver que A_3 é satisfeita, tome $a, b \in \mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q)$ para algum Q e $\lambda \in (0, 1)$. Então, se

$$c = \lambda a + (1 - \lambda) b,$$

temos $c(x) = 0$ para todo $x \notin Q$, c é constante em Q e

$$|c|_\infty \leqslant \lambda |a|_\infty + (1 - \lambda)|b|_\infty \leqslant |Q|^{s-1/p}.$$

Das propriedades de norma, é claro que temos $\sigma a \in \mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q) \iff a \in \mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q)$ para qualquer $\sigma \in \mathbb{C}$ tal que $|\sigma| = 1$.

3.3B ***Átomos de Hölder.*** Um espaço quase métrico, com uma quase distância d, é um espaço que satisfaz todos os axiomas de um espaço métrico, com exceção da desigualdade triangular, que é substituída pela condição mais fraca de que existe $\alpha \geqslant 1$ tal que

$$d(x, y) \leqslant \alpha(d(x, z) + d(z, y)).$$

Suponha que I é um espaço quase métrico, com uma quase distância d, tal que todo $Q \in \mathcal{P}^k$, com $k \geqslant 0$ é um conjunto limitado e existem $C_8 \geqslant 0$ e $D \geqslant 0$ tais que

$$\frac{1}{C_8^D}|Q| \leqslant (\text{diam } Q)^D \leqslant C_8^D |Q|. \tag{3.3-1}$$

Adicionalmente, assuma que existem $\lambda_3, \lambda_4 \in (0, 1)$ tais que, para todo $P \in \mathcal{P}^{k+1}$ tal que $P \subset Q$, vale

$$\lambda_3 \leqslant \frac{\text{diam } P}{\text{diam } Q} \leqslant \lambda_4. \tag{3.3-2}$$

Seja $\mathcal{A}^h_{s,\beta,p}(Q)$ o subconjunto de todas as funções ϕ satisfazendo

$$\sup_{\substack{x,y\in Q\\ x\neq y}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{d(x,y)^{D\beta}} \leqslant |Q|^{s-1/p-\beta} \quad \text{e} \quad |\phi|_\infty \leqslant |Q|^{s-1/p}.$$

Dizemos que $\mathcal{A}^h_{s,\beta,p}(Q)$ é o conjunto dos (s,β,p)-**átomos de Hölder** suportados em Q. Para ver que esse conjunto satisfaz as propriedades da Seção 2.1, definimos

$$\mathcal{B}(Q) = \{\, \phi \in L^\infty : \phi(x) = 0 \text{ para todo } x \notin Q \,\}$$

para $Q \in \mathcal{P}$. Desse modo, temos que A_1, A_2 e A_4 seguem diretamente das definições. A_3 segue das propriedades da norma infinito e do supremo, de maneira semelhante ao que foi feito para os átomos de Souza.

Observe que, para todo $Q \in \mathcal{P}$, como átomos de Souza são constantes em Q, temos que $\mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q) \subset \mathcal{A}^h_{s,\beta,p}(Q)$.

3.3C ***Átomos de variação limitada***. Agora suponha que I é um intervalo de $\mathbb{R}$ de comprimento 1, m, a medida de Lebesgue em I e as partições na grade $\mathcal{P}$ são partições em intervalos. Seja Q um intervalo, $s \leqslant \beta \leqslant 1$ e $p \in [1,\infty)$. Um (s,β,p)-átomo de variação limitada em Q é uma função $a\colon I \to \mathbb{C}$ tal que $a(x) = 0$ para todo $x \notin Q$,

$$|a|_\infty \leqslant |Q|^{s-1/p}$$

e

$$\mathrm{var}_{1/\beta}(a,Q) \leqslant |Q|^{s-1/p},$$

onde $\mathrm{var}_{1/\beta}(\cdot,Q)$ é dado por

$$\mathrm{var}_{1/\beta}(a,Q) = \sup\left(\sum_i |a(x_{i+1}) - a(x_i)|^{1/\beta}\right)^\beta,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as sequências $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, com x_i no interior de Q.

Vamos denotar o conjunto dos átomos de variação limitada em Q por $\mathcal{A}^{bv}_{s,\beta,p}(Q)$, onde *bv* vem do inglês *bounded variation*. Para ver que essa classe de átomos está bem definida, novamente tomamos

$$\mathcal{B}(Q) = \{\, \phi \in L^\infty : \phi(x) = 0 \text{ para todo } x \notin Q \,\}.$$

Assim, A_1, A_2 e A_4 seguem das definições. A_3 vem do fato de que $\mathrm{var}_{1/\beta}(\cdot,Q)$ satisfaz a desigualdade triangular e $\mathrm{var}_{1/\beta}(c\cdot a,Q) = c\cdot \mathrm{var}_{1/\beta}(a,Q)$ para $c \in \mathbb{C}$.

Note que $\mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q) \subset \mathcal{A}^{bv}_{s,\beta,p}(Q)$ para todos $Q \in \mathcal{P}$ e $\beta \geqslant s$.

4 Espaços de Besov e caracterizações alternativas

Neste capítulo, vamos explorar as propriedades dos espaços $\mathcal{B}^s_{p,q}$, definidos usando os átomos de Souza, que foram introduzidos na Seção 3.3. Começamos apresentando a definição de espaço de Besov, obtida a partir da noção de espaço quase Besov, na Seção 4.1. Em seguida, na Seção 4.2, definimos o conceito de função $\mathcal{B}^s_{p,q}$-positiva. As seções seguintes são bem mais densas e são onde apresentamos os resultados do capítulo. Na Seção 4.3, vamos construir uma base incondicional para L^β, com $1 < \beta < \infty$, seguindo um dos métodos descritos em [GIRARDI; SWELDENS, 1997]. As seções 4.4 e 4.5 nos dão maneiras diferentes de obter o espaço $\mathcal{B}^s_{p,q}$. A primeira explora diferentes normas e a segunda, diferentes classes de átomos. O capítulo termina com a Seção 4.6, onde obtemos uma proposição um pouco mais técnica, uma igualdade e uma desigualdade chamadas, em [SMANIA, 2022], de *Aproximações de Dirac*.

Assim como nos capítulos anteriores, consideramos $(I, \mathscr{B}, m)$ um espaço de medida com $|I| < \infty$, mas agora assumimos $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$ e $s > 0$, a menos que indicado de outra maneira.

4.1 Espaços de Besov em um espaço de medida com uma grade boa

Vamos analisar os espaços quase Besov $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P}, \mathcal{A}^{sz}_{s,p})$ associados ao espaço de medida com uma grade boa $(I, \mathcal{P}, m)$. Denotamos $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P}, \mathcal{A}^{sz}_{s,p}) = \mathcal{B}^s_{p,q}$. Note que, sob nossas suposições no Capítulo 4, temos que $\mathcal{A}^{sz}_{s,p}$ satisfaz, também, A_5-A_7.

De fato, observe que, se a_n é uma sequência em $\mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q)$, temos que, para todo $x \in Q$, $a_n(x)$ é uma sequência limitada em $\mathbb{C}$, então possui subsequência convergente. Como L^∞ é um espaço métrico, A_5 segue. A_6 é uma consequência de A_5, já que estamos assumindo $p \geqslant 1$.

Por último, temos que $\mathcal{B}(Q)$, assim como definido na Seção 3.3, é gerado por 1_Q para todo $Q \in \mathcal{P}$ e, por definição, $\mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q)$ possui uma vizinhança do zero.

Quando $0 < s < 1/p$, diremos que $\mathcal{B}^s_{p,q}$ é um **espaço de Besov**. Note que, pela Proposição 2.2.2, existe $\beta > 1$, tal que $\mathcal{B}^s_{p,q} \subset L^\beta$.

4.2 Cone positivo

Dizemos que f é $\mathcal{B}^s_{p,q}$-positiva se tiver uma $\mathcal{B}^s_{p,q}$-representação

$$f = \sum_k \sum_{P \in \mathcal{P}^k} c_P a_P,$$

onde $c_P \geqslant 0$ e a_P é um átomo de Souza canônico suportado em P. O conjunto de todas as funções $\mathcal{B}^s_{p,q}$-positivas, denotado por $\mathcal{B}^{s+}_{p,q}$, é um cone convexo em $\mathcal{B}^s_{p,q}$, ou seja, é um subconjunto de $\mathcal{B}^s_{p,q}$ fechado por combinações lineares com coeficientes positivos. Podemos definir uma "norma" [1] em $\mathcal{B}^{s+}_{p,q}$ por

$$|f|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} = \inf \left(\sum_k \left(\sum_{P \in \mathcal{P}^k} c_P^p \right)^{q/p} \right)^{1/q},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as possíveis representações $\mathcal{B}^s_{p,q}$-positivas de f. Para todas $f, g \in \mathcal{B}^{s+}_{p,q}$ e $\alpha \geqslant 0$, temos

$$|\alpha f|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} = \alpha |f|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}}, \quad |f+g|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} \leqslant |f|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} + |g|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} \quad \text{e} \quad |f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \leqslant |f|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}}.$$

Observe que, da última desigualdade e de (2.2-7), segue que $|f|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} = 0 \implies f = 0$. Além disso, se $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$ é uma função com valores reais, podemos encontrar $f_+, f_- \in \mathcal{B}^{s+}_{p,q}$ tais que $f = f_+ - f_-$ e

$$|f_+|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} \leqslant |f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \quad \text{e} \quad |f_-|_{\mathcal{B}^{s+}_{p,q}} \leqslant |f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}.$$

Para isso, basta tomar, na $\mathcal{B}^s_{p,q}$-representação $\sum_k \sum_{P \in \mathcal{P}^k} c_P a_P$ de f,

$$f_+ = \sum_k \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^k \\ c_P \geqslant 0}} c_P a_P \quad \text{e} \quad f_- = \sum_k \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^k \\ c_P \leqslant 0}} -c_P a_P.$$

Já que o suporte de cada a_P é P e $a_P \in L^p$, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 4.2.1. *Se $f \in \mathcal{B}^{s+}_{p,q}$, então supp f é uma união enumerável de elementos de $\mathcal{P}$, a menos de um conjunto de medida nula.*

[1] Em geral, $\mathcal{B}^{s+}_{p,q}$ não é um espaço vetorial.

4.3 Base de Haar

Nesta seção, vamos trabalhar com conceitos de Análise de Ondaletas, um ramo que se assemelha à Análise de Fourier, no sentido em que opera com decomposições de funções em sinais semelhantes a ondas, mas que se difere na natureza desses sinais. Ondaletas, em geral, são sinais de duração limitada, que tendem a ser irregulares e assimétricos. Entre os tipos mais simples de ondaletas, estão as ondaletas de Haar, que são, essencialmente, redimensionamentos e translações de funções características. Uma introdução mais completa ao assunto pode ser encontrada em [WALNUT, 2002].

Vamos descrever o resultado apresentado em [GIRARDI; SWELDENS, 1997], que dá uma condição para a obtenção de uma base incondicional para L^β, com $1 < \beta < \infty$, constituída de ondaletas semelhantes às ondaletas de Haar. Depois disso, vamos aplicar esse resultado ao contexto deste trabalho. A descrição que faremos engloba apenas os resultados de [GIRARDI; SWELDENS, 1997] que iremos usar, sem demonstrações.

Por base incondicional de um espaço de Banach X, queremos dizer uma base $(e_i)_i$ em que, para todo $x \in X$, a representação

$$x = \sum_i x_i e_i$$

converge incondicionalmente, isto é,

$$\sum_i x_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = x$$

para qualquer permutação σ.

No que se segue, vamos considerar $\beta \in (1, \infty)$. $\mathscr{B}^+$ e $\widetilde{\mathscr{B}}$ vão denotar a coleção de conjuntos em $\mathscr{B}$ com medida estritamente positiva e qualquer sub-σ-álgebra de $\mathscr{B}$ tal que o completamento de $(I, \widetilde{\mathscr{B}})$ é $(I, \mathscr{B})$, respectivamente.

4.3.1 Árvores e florestas

Vamos apresentar a notação de *floresta*, que vamos usar como um conjunto indexador. Uma floresta $(\mathcal{F}, g, p, f, <)$ é um conjunto enumerável $\mathcal{F}$, que possui um conjunto $\mathcal{R}$ (possivelmente vazio) de *raízes*, junto com uma função *geração* $g\colon \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$, uma função *pai* $p\colon \mathcal{F} \backslash \mathcal{R} \to \mathcal{F}$, uma função *filhos* $f\colon \mathcal{F} \to \mathscr{P}(\mathcal{F})$ e uma ordenação parcial de *idade* $<$ em $\mathcal{F}$, todas as quais satisfazem as seguintes propriedades:

(F_1) $f(a) = \{\, b \in \mathcal{F} : p(b) = a \,\}$;

(F_2) $0 \leqslant \#f(a) < \infty$ para cada $a \in \mathcal{F}$;

(F_3) Se $b \in f(a)$, então $g(b) = g(a) + 1$;

(F_4) A ordem $<$ ordena totalmente o conjunto $f(a)$ para cada $a \in \mathcal{F}$;

(F_5) Se $g(a) < g(b)$ e $p^n(a) = p^m(b)$ para alguns $m, n \in \mathbb{N}$, então $b < a$.

Quando não houver risco de confusão, denotaremos uma floresta $(\mathcal{F}, g, p, f, <)$ apenas por $\mathcal{F}$. Uma floresta que satisfaz a propriedade adicional

(T_1) Se $a, b \in \mathcal{F}$, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $p^n(a) = p^m(b)$

é dita uma *árvore*. Uma árvore possui, no máximo, uma raiz. Uma árvore *enraizada* possui exatamente uma raiz. Denotaremos as raízes por r. Uma *folha* é um elemento que não possui filhos.

Vamos apresentar, como um exemplo, a árvore logarítmica, que será importante na construção das ondaletas.

Exemplo 4.3.1 (Árvore logarítmica)**.** *Seja $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. A árvore $\mathcal{T}_{log}^N$ em N é unicamente determinada pelas seguintes propriedades:*

1. *Possui l gerações $(0, 1, \ldots, l-1)$, onde $2^{l-2} < n \leqslant 2^{l-1}$;*
2. *Cada elemento de $\mathcal{T}_{log}^N$ é um conjunto de inteiros consecutivos de N;*
3. *Possui uma raiz $r = N$ e $g(r) = 0$;*
4. *A geração $l-1$ consiste das folhas $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$;*
5. *Cada elemento $a \in \mathcal{T}_{log}^N$ tal que $\#a > 1$ possui dois filhos b_1 e b_2 e, se b_1 é o filho mais velho, vale $\#b_1 = \#b_2$ ou $\#b_1 = \#b_2 + 1$.*

Se $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, por exemplo, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{log}^N = \{\, &\{1,2,3,4,5,6,7\},\\ &\{1,2,3\},\{4,5,6,7\},\\ &\{1\},\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\},\\ &\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\,\},\end{aligned}$$

onde cada linha corresponde a uma geração, de 0 até 3, e o filho mais velho de cada subconjunto de N foi escolhido como sendo a "metade da direita". Note que o importante para definir essa árvore é o número de elementos de cada subconjunto de N, não sua natureza. Portanto, é possível escolher N como um conjunto qualquer com n elementos; basta fazer pequenas alterações na definição.

Uma união enumerável de árvores disjuntas forma uma floresta. Por outro lado, qualquer floresta $\mathcal{F}$ pode ser expressa como união enumerável de árvores disjuntas. Para ver isso, considere a relação de equivalência $\sim$ em $\mathcal{F}$ dada por $a \sim b$ se, e somente se, vale (T_1). Essa relação induz uma partição de $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}} \mathcal{F}(\kappa) \tag{4.3-1}$$

em classes de equivalência $\mathcal{F}(\kappa)$ disjuntas, onde o conjunto indexador $\mathcal{K}$ é o espaço quociente induzido. Cada $\mathcal{F}(\kappa)$ é uma árvore.

4.3.2 Partições

Chamamos a coleção $\{ I_a : a \in \mathcal{F} \}$ de $\mathscr{B}^+$ de uma *partição encaixada* de I com respeito à floresta $\mathcal{F}$, se ela satisfaz as seguintes propriedades:

(P_1) $I_{a_1} \cap I_{a_2} = \varnothing$ se $g(a_1) = g(a_2)$ e $a_1 \neq a_2$;

(P_2) $I_a \cap I_r = \varnothing$ se $r \in \mathcal{R}$ e $p^n(a) \neq r$ para todo $n \geqslant 0$;

(P_3) Se a não é uma folha, I_a pode ser escrito como a união disjunta

$$I_a = \bigcup_{b \in f(a)} I_b;$$

(P_4) $I = \bigcup_{a \in \mathcal{F}} I_a$;

(P_5) A família $\{ I_a : a \in \mathcal{F} \}$ gera a sub-σ-álgebra $\widetilde{\mathscr{B}}$.

A partição (4.3-1) de $\mathcal{F}$ em árvores nos dá uma partição de I. Para cada $\kappa \in \mathcal{K}$, seja

$$I(\kappa) = \bigcup_{a \in \mathcal{F}(\kappa)} I_a.$$

Das primeiras três propriedades de partições, temos que, se $\kappa_1 \neq \kappa_2$, então $I(\kappa_1)$ e $I(\kappa_2)$ são disjuntos. Logo, I pode ser escrito como a união disjunta

$$I = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}} I(\kappa). \tag{4.3-2}$$

Para cada $\kappa \in \mathcal{K}$, a subcoleção $\{ I_a : a \in \mathcal{F}(\kappa) \}$ é uma partição encaixada de $I(\kappa)$ com respeito à árvore $\mathcal{F}(\kappa)$.

Em [GIRARDI; SWELDENS, 1997], são descritos três tipos de partições encaixadas com respeito à uma árvore. Vamos usar apenas o tipo I, onde $\mathcal{R} \neq \varnothing$.

4.3.3 Construção das ondaletas

Seja $\mathcal{T}$ uma árvore e seja $\{ I_a : a \in \mathcal{T} \}$ uma partição encaixada de I com respeito a $\mathcal{T}$. Vamos, agora, construir as ondaletas que vão formar a base de L^β.

As ondaletas serão indexadas por um conjunto $\widehat{\mathcal{H}}$, que consiste de um conjunto $\mathcal{H}$ junto com mais um elemento. Cada ondaleta indexada por um $\zeta \in \mathcal{H}$ será da forma

$$\phi_\zeta = m_\zeta \left(\frac{1_{P_\zeta}}{|P_\zeta|} - \frac{1_{R_\zeta}}{|R_\zeta|} \right), \tag{4.3-3}$$

para alguns conjuntos $P_\zeta, R_\zeta \in \widetilde{\mathscr{B}}$ com m_ζ escolhido de forma a normalizar ϕ_ζ em L^β, ou seja,

$$m_\zeta = (|P_\zeta|^{1-\beta} + |R_\zeta|^{1-\beta})^{-1/\beta}. \tag{4.3-4}$$

Essa definição se assemelha à de ondaletas de Haar, mas como $|P_\zeta|$ pode ser diferente de $|R_\zeta|$, as funções ϕ_ζ são chamadas de *ondaletas de Haar desbalanceadas* em [GIRARDI; SWELDENS, 1997].

Seja $a \in \mathcal{T}$. E seja $n = \#f(a)$. Vamos construir um conjunto $\mathcal{H}(a)$ para indexar as ondaletas que terão suporte em I_a e serão constantes em I_b, com $b \in f(a)$. Para fazer isso, é necessário construir uma subárvore entre os filhos de a. Se $n = 0$ ou $n = 1$, definimos $\mathcal{H}(a) = \varnothing$. Do contrário, enumeramos os filhos de a como b_i, com $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $b_i < b_{i+1}$. A seguir, consideramos uma árvore $\mathcal{T}_{log}^N$ e definimos

$$\mathcal{H}(a) = \{ \zeta \in \mathcal{T}_{log}^N : \#f(\zeta) = 2 \}.$$

Cada elemento $\zeta \in \mathcal{H}(a)$ gera uma ondaleta como em (4.3-3) com

$$P_\zeta = \bigcup_{i \in \zeta_1} I_{b_i} \quad \text{e} \quad R_\zeta = \bigcup_{i \in \zeta_2} I_{b_i},$$

onde ζ_1 e ζ_2 são os filhos de ζ.

Observação 4.3.2. *Vamos mostrar, por indução sobre o número n de filhos de a, que $\#\mathcal{H}(a) = n - 1$. De fato, o caso base é óbvio. Agora suponha a afirmação verdadeira para qualquer $k < n$. Considere $N' = \{1, 2, \ldots, [n/2]\}$ e $N'' = \{[n/2] + 1, \ldots, n\}$, onde $[x]$ denota a parte inteira de x, de modo que $N = N' \cup N''$ e $\mathcal{T}_{log}^N = \mathcal{T}_{log}^{N'} \cup \mathcal{T}_{log}^{N''} \cup \{N\}$. Pela hipótese de indução, o número de elementos de $\mathcal{T}_{log}^{N'}$ e $\mathcal{T}_{log}^{N''}$, que possuem exatamente 2 filhos é $[n/2] - 1 + (n - [n/2]) - 1$. Como o elemento $\{N\}$ de $\mathcal{T}_{log}^N$ possui 2 filhos, temos que $\mathcal{T}_{log}^N$ possui $[n/2] - 1 + n - [n/2] - 1 + 1 = n - 1$ elementos com 2 filhos, ou seja, $\#\mathcal{H}(a) = n - 1$.*

Definimos

$$\mathcal{H} = \bigcup_{a \in \mathcal{T}} \mathcal{H}(a).$$

Para completar a descrição, colocamos

$$\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \{I\} \quad \text{e} \quad \phi_I = |I|^{-1/\beta} 1_I.$$

Por fim, tomamos

$$\Phi = \{\, \phi_\zeta : \zeta \in \widehat{\mathcal{H}} \,\}. \tag{4.3-5}$$

Agora seja $\mathcal{F}$ uma floresta e seja $\{\, I_a : a \in \mathcal{F} \,\}$ uma partição encaixada de I com respeito a $\mathcal{F}$. Escreva I como em (4.3-2). Para cada $\kappa \in \mathcal{K}$, a subcoleção $\{\, I_a : a \in \mathcal{F}(\kappa) \,\}$ é uma partição encaixada de $I(\kappa)$ com respeito à árvore $\mathcal{F}(\kappa)$. Portanto, podemos considerar um conjunto de ondaletas $\Phi(\kappa)$ como em (4.3-5) em $I(\kappa)$. Seja

$$\Xi = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}} \Phi(\kappa). \tag{4.3-6}$$

Vamos enunciar o principal resultado de [GIRARDI; SWELDENS, 1997], encontrado nesse artigo como "*Corolário 1*", na forma do

Lema 4.3.3. *O conjunto Ξ, como definido em (4.3-6), forma uma base incondicional normalizada de $L^\beta(I, \mathscr{B}, m)$.*

4.3.4 Construção de uma base de Haar em um espaço de medida com grade

Agora vamos voltar ao contexto de [SMANIA, 2022] e vamos construir um conjunto como em (4.3-6) para podermos usar o Lema 4.3.3.

Seja $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^k)_k$ uma grade boa. Devido às propriedades de grades boas, podemos considerar $\mathcal{P}$ como uma partição encaixada de I com respeito a alguma árvore $\mathcal{T}$, onde I corresponde ao elemento indexado pela raiz de $\mathcal{T}$, cada nível $\mathcal{P}^k$ de $\mathcal{P}$ corresponde aos elementos indexados por uma mesma geração de $\mathcal{T}$ e, se $Q \in \mathcal{P}^k$, com $k \geqslant 0$, for indexado por um elemento $a \in \mathcal{T}$, então os elementos indexados pelos filhos de a são os elementos $P \in \mathcal{P}^{k+1}$ tais que $P \subset Q$. Abusando um pouco da notação, chamaremos esses elementos de *filhos* de Q. Vamos definir o conjunto Ω_Q como o conjunto dos filhos de Q (observe que esse conjunto não é o mesmo que o conjunto Ω_Q^k definido no Capítulo 1). Note que cada $Q \in \mathcal{P}$ tem, ao menos, 2 e, no máximo, $1/\lambda_1$ filhos, de acordo com as propriedades de uma grade boa. Em particular, $\#\Omega_Q < \infty$ para todo $Q \in \mathcal{P}$, o que condiz com a definição de árvore.

Então considere a ordenação $\Omega_Q = \{P_1^Q, P_2^Q, \ldots, P_{n_Q}^Q\}$, onde $2 \leqslant n_Q \leqslant 1/\lambda_1$. Seja $\mathcal{H}_Q$ a família dos pares (S_1, S_2), com $S_1, S_2 \subset \Omega_Q$ e $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, definida por

$$\mathcal{H}_Q = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{Q,j},$$

onde os $\mathcal{H}_{Q,j}$ são definidos de forma recursiva da seguinte maneira. Seja $\mathcal{H}_{Q,0} = \{(A, B)\}$, onde $A = \{P_1^Q, \ldots, P_{[n_Q/2]}^Q\}$ e $B = \{P_{[n_Q/2]+1}^Q, \ldots, P_{n_Q}^Q\}$. Suponha definido $\mathcal{H}_{Q,j}$. Para cada elemento $(S_1, S_2) \in \mathcal{H}_{Q,j}$, fixe uma ordenação $S_1 = \{R^1_1, \ldots, R^1_{n_1}\}$ e $S_2 = \{R^2_1, \ldots, R^2_{n_2}\}$. Para cada $i = 1, 2$ tal que $n_i \geqslant 2$, defina $T^i_1 = \{R^i_1, \ldots, R^i_{[n_i/2]}\}$ e $T^i_2 = \{R^i_{[n_i/2]+1}, \ldots, R_{n_i}\}$ e adicione (T^i_1, T^i_2) a $\mathcal{H}_{Q,j+1}$. Isso define $\mathcal{H}_{Q,j+1}$.

Construindo um paralelo com a Subseção 4.3.3, o conjunto $\mathcal{H}_Q$ corresponde a $\mathcal{H}(a)$, mas estamos identificando os elementos através de seus filhos. Cada $\mathcal{H}_{Q,j}$ pode ser identificado com uma geração de uma árvore logarítmica. Para j grande o suficiente, temos $\mathcal{H}_{Q,j} = \varnothing$ e, pela Observação 4.3.2, temos que

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} \#\mathcal{H}_Q \leqslant \frac{1}{\lambda_1} - 1.$$

Para todo $S = (S_1, S_2) \in \mathcal{H}_Q$, defina

$$\phi_S = \frac{1}{m_S}\left(\frac{\sum_{P \in S_1} 1_P}{\sum_{P \in S_1} |P|} - \frac{\sum_{R \in S_2} 1_R}{\sum_{R \in S_2} |R|}\right),$$

onde

$$m_S = \left(\frac{1}{\sum_{P \in S_1} |P|} + \frac{1}{\sum_{R \in S_2} |R|}\right)^{1/2}.$$

Essas serão nossas ondaletas. Note que

$$\int_Q \phi_S \, \mathrm{d}m = 0.$$

Observação 4.3.4. *Em relação a (4.3-4), tomamos $\beta = 2$. Isso faz com que a base que obteremos no final seja composta por múltiplos da base fornecida pelo Lema 4.3.3. Ainda será uma base incondicional, mas não será uma base normalizada (exceto, claro, no caso $\beta = 2$). Isso foi feito simplesmente por conveniência: os coeficientes da representação de um elemento na base serão dados da mesma forma para todo $1 < \beta < \infty$.*

Agora observe que $1 \leqslant \#S_i \leqslant 1/\lambda_1$ para $i = 1, 2$, o que, junto com G_7, nos dá

$$\lambda_1 |Q| \leqslant \sum_{P \in S_i} |P| \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1}|Q|,$$

de modo que

$$\left(\frac{2\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} \frac{1}{|Q|^{1/2}} \leqslant m_S \leqslant \left(\frac{2}{\lambda_1}\right)^{1/2} \frac{1}{|Q|^{1/2}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{C_9}{|Q|^{1/2}} &\leqslant \frac{1}{m_S} \min\left\{\frac{1}{\sum_{P \in S_1} |P|}, \frac{1}{\sum_{R \in S_2} |R|}\right\} \\ &\leqslant |\phi_S(x)| \leqslant \frac{1}{m_S} \max\left\{\frac{1}{\sum_{P \in S_1} |P|}, \frac{1}{\sum_{R \in S_2} |R|}\right\} \leqslant \frac{C_{10}}{|Q|^{1/2}} \end{aligned} \quad (4.3\text{-}7)$$

para todo $x \in \bigcup_{P \in S_1 \cup S_2} P$. Aqui,

$$C_9 = \frac{\lambda_1^{3/2}}{\sqrt{2}\lambda_2} \quad \text{e} \quad C_{10} = \frac{\lambda_2^{1/2}}{\sqrt{2}\lambda_1^{3/2}} + 1.$$

Seja $\mathcal{H} = \bigcup_{Q \in \mathcal{P}} \mathcal{H}_Q$, $\widehat{\mathcal{H}} = \{I\} \cup \mathcal{H}$ e defina

$$\phi_I = \frac{1_I}{|I|^{1/2}}.$$

Se quisermos fazer menção explícita à grade utilizada, podemos escrever $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ e $\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{P})$. Pelo Lema 4.3.3, temos que

$$\{\phi_S\}_{S \in \widehat{\mathcal{H}}}$$

é uma base incondicional de L^β, para qualquer $1 < \beta < \infty$.

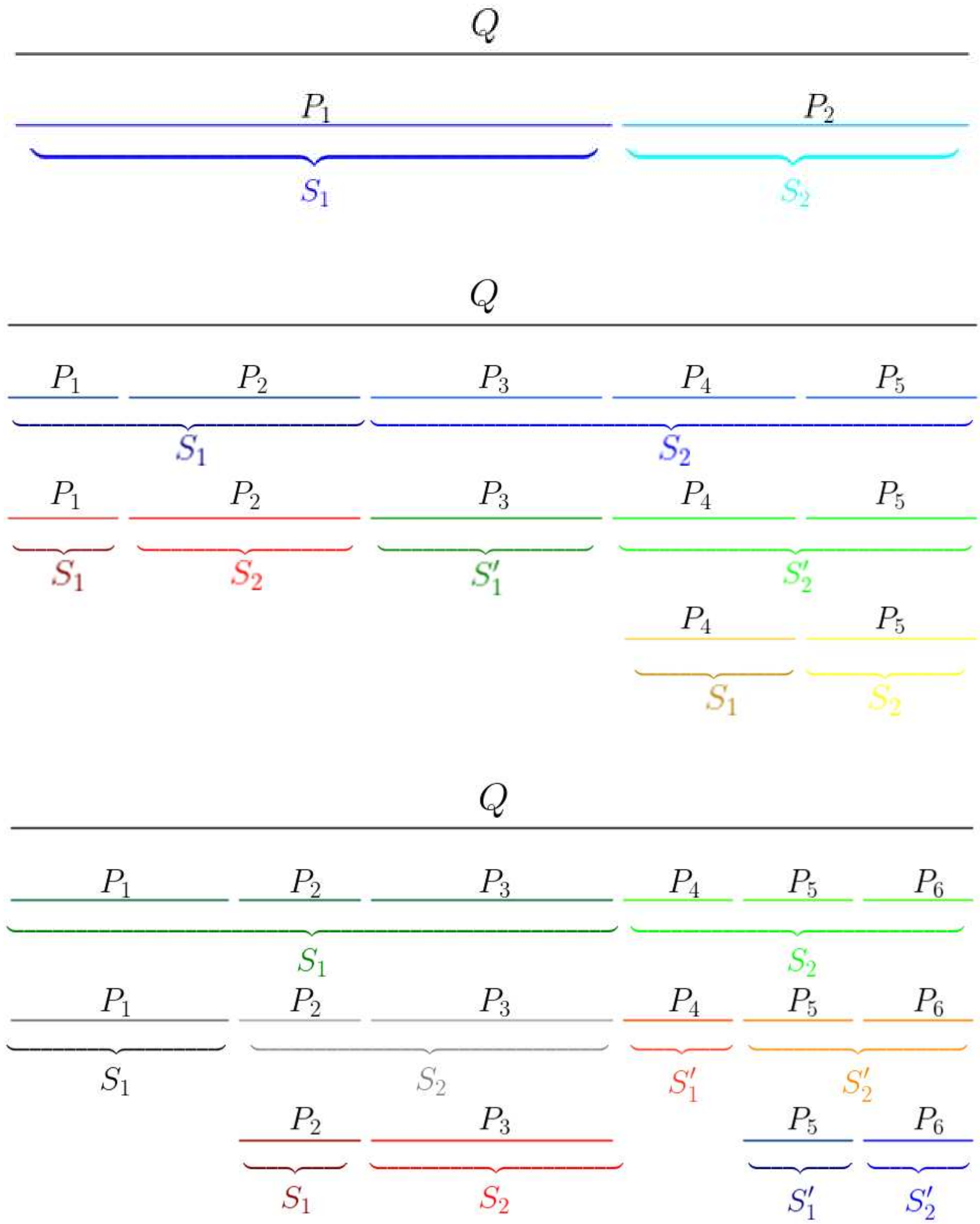

Figura 3 – Construção do conjunto $\mathcal{H}(Q)$ quando $\mathcal{P}$ é uma grade de intervalos e Q possui, respectivamente, 2, 5 e 6 filhos.

4.4 Caracterizações alternativas I: normas

Iremos descrever três normas que são equivalentes a $|\cdot|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$. Sua vantagem é que são mais concretas, pois não precisamos considerar decomposições atômicas arbitrárias para defini-las.

Nesta seção, foram feitas algumas adaptações em relação a [SMANIA, 2022]. Em especial, na definição de $\tilde{k}^f_P$ em (4.4-10), que foi feita de outra forma para obter uma maior clareza, e no Teorema 4.4.1, que sofreu algumas modificações no enunciado e na demonstração.

Vamos usar a notação da Seção 4.3.

4.4A ***Norma de Haar.*** Seja $1 < \beta < \infty$. Para $S \in \widehat{\mathcal{H}}$, defina $d_S \colon L^\beta \to \mathbb{C}$ por

$$d_S(f) = \int f\phi_S \, \mathrm{d}m.$$

Primeiro, observe que $d_I(\phi_I) = 1$ e $d_I(\phi_S) = \dfrac{1}{|I|^{1/2}} \displaystyle\int \phi_S \, \mathrm{d}m = 0$ se $S \neq I$. Agora tome $S \in \mathcal{H}$. Então $S = (S_1, S_2) \in \mathcal{H}_Q$ para algum $Q \in \mathcal{P}$. Para simplificar notação, vamos denotar $x_i = \displaystyle\sum_{P \in S_i} 1_P$, $z_i = \displaystyle\sum_{P \in S_i} |P|$ e $m = m_S$. Assim, temos

$$\phi_S^2 = \frac{1}{m^2}\left(\frac{x_1}{z_1} - \frac{x_2}{z_2}\right)^2 = \frac{1}{m^2}\left(\frac{x_1^2}{z_1^2} - \frac{2x_1x_2}{z_1z_2} + \frac{x_2^2}{z_2^2}\right).$$

Agora note que $x_i^2 = x_i$ e o termo x_1x_2 é identicamente nulo, pois $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Com isso, temos

$$\phi_S^2 = \frac{1}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}\left(\frac{x_1}{z_1^2} + \frac{x_2}{z_2^2}\right)$$

e, portanto,

$$d_S(\phi_S) = \int \phi_S^2 \, \mathrm{d}m = 1,$$

já que $\displaystyle\int x_i \, \mathrm{d}m = z_i$. Por outro lado, se temos $S, S' \in \mathcal{H}$, com $S \neq S'$, então

$$d_{S'}(\phi_S) = \int \phi_S\phi_{S'} \, \mathrm{d}m.$$

Temos $S = (S_1, S_2) \in \mathcal{H}_Q$ e $S' = (S_1', S_2') \in \mathcal{H}_{Q'}$, para alguns $Q, Q' \in \mathcal{P}$. Se $Q \neq Q'$, então $S_i \cap S_j' = \varnothing$ para quaisquer $i, j = 1, 2$ e, com isso, $\phi_S\phi_{S'}$ e, consequentemente, $d_{S'}(\phi_S)$, é igual a zero. Já se $Q = Q'$, devemos ter $S_1, S_2 \subset S_j'$ para algum $j = 1, 2$ ou $S_1', S_2' \subset S_i$ para algum $i = 1, 2$. Sem perda de generalidade, tomemos o caso $S_1', S_2' \subset S_1$. Então $\displaystyle\int \phi_S\phi_{S'} \, \mathrm{d}m = \int_{S_1} \phi_S\phi_{S'} \, \mathrm{d}m$. Como ϕ_S é constante em S_1, digamos, $\phi_S \equiv k$, temos

$$d_{S'}(\phi_S) = k\int_{S_1} \phi_{S'} \, \mathrm{d}m = k\int_Q \phi_{S'} \, \mathrm{d}m = 0.$$

Portanto, acabamos de mostrar que os funcionais d_S constituem a base dual da base de Haar obtida na Seção 4.3. Portanto, qualquer que seja $f \in L^\beta$, podemos escrever (trocando $d_S(f)$ por d_S^f para simplificar a notação)

$$f = \sum_{S \in \hat{\mathcal{H}}} d_S^f \phi_S \tag{4.4-8}$$

e essa série converge incondicionalmente por definição. Vamos chamar a série do lado direito de (4.4-8) de *representação de Haar* de f. Defina a norma de Haar como

$$N_{haar}(f) = |I|^{1/p-s-1/2}|d_I^f| + \left(\sum_k \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S \in \mathcal{H}_Q} |d_S^f|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.$$

4.4B *Representação atômica padrão.* Note que

$$k_I^f a_I = d_I^f \phi_I,$$

onde $k_I^f = |I|^{1/p-s-1/2} d_I^f$ e a_I é o átomo de Souza canônico em I. Seja $S \in \mathcal{H}$. Então $S \in \mathcal{H}_Q$, com $S = (S_1, S_2)$ e $Q \in \mathcal{P}^k$ para algum $k \geqslant 0$. Podemos ver, com o auxílio de (4.3-7), que, para todo $P \in S_1 \cup S_2$,

$$a_{S,P} = \frac{|Q|^{1/2}}{C_{10}} |P|^{s-1/p} \phi_S 1_P$$

é um átomo de Souza em P. Defina

$$c_{S,P}^f = C_{10}|Q|^{-1/2}|P|^{1/p-s} d_S^f.$$

Observe que, devido a G_7, temos

$$|c_{S,P}^f| \leqslant C_{10} \text{máx}\{\lambda_1^{1/p-s}, \lambda_2^{1/p-s}\}|Q|^{1/p-s-1/2}|d_S^f|. \tag{4.4-9}$$

Para cada filho P de $Q \in \mathcal{P}^k$, com $k \geqslant 0$, defina

$$\mathcal{S}_P^Q = \{\, S = (S_1, S_2) \in \mathcal{H}_Q : P \in S_1 \cup S_2 \,\}.$$

Observe que a cardinalidade de $\mathcal{S}_P^Q$ é finita e que esse número depende apenas da geometria de $\mathcal{P}$. Colocamos

$$\tilde{a}_P^f = \frac{1}{\tilde{k}_P^f} \sum_{S \in \mathcal{S}_P^Q} c_{S,P}^f a_{S,P},$$

onde

$$\tilde{k}_P^f = \Big|\sum_{S \in \mathcal{S}_P^Q} c_{S,P}^f\Big|. \tag{4.4-10}$$

Pelo mesmo truque utilizado na Seção 2.4 para mostrar que $d_{P,N}$ era um átomo, vemos que $\tilde{a}_P^f$ é um átomo de Souza em P. Também temos que

$$\sum_{P \in \Omega_Q} \tilde{k}_P^f \tilde{a}_P^f = \sum_{P \in \Omega_Q} \sum_{S \in \mathcal{S}_P^Q} c_{S,P}^f a_{S,P}^f$$

$$= \sum_{P \in \Omega_Q} \sum_{S \in \mathcal{S}_P^Q} d_S^f \phi_S 1_P$$
$$= \sum_{S \in \mathcal{H}_Q} d_S^f \phi_S.$$

Seja a_P o (s,p)-átomo de Souza canônico em P e seja $x_P \in P$. Defina

$$\begin{aligned} k_P^f &= \frac{\tilde{a}_P^f(x_P)}{|P|^{s-1/p}} \tilde{k}_P^f = \frac{1}{|P|^{s-1/p}} \sum_{S \in \mathcal{H}_Q} d_S^f \phi_S(x_P) \\ &= \frac{1}{|P|^{s-1/p}} \int f \sum_{S \in \mathcal{H}_Q} \phi_S(x_P) \phi_S \, \mathrm{d}m. \end{aligned}$$

Em particular, como as ϕ_S são limitadas e $\mathcal{H}_Q$ é finito, para todo P, temos

$$\begin{aligned} |k_P^f| &\leqslant \frac{1}{|P|^{s-1/p}} \int |f| \Big| \sum_{S \in \mathcal{H}_Q} \phi_S(x_P) \phi_S \Big| \, \mathrm{d}m \\ &\leqslant K \int |f| \, \mathrm{d}m \\ &\leqslant K \cdot |I|^{1-1/\beta} \left(\int |f|^\beta \, \mathrm{d}m \right)^{1/\beta} \end{aligned}$$

para alguma constante K, que depende de P. Ou seja,

$$f \mapsto k_P^f$$

se estende, pelo teorema de Hahn-Banach, para um funcional linear limitado em L^1. Além disso, como $\tilde{a}_P^f$ é um átomo de Souza, temos que $|k_P^f| \leqslant \tilde{k}_P^f$ e, denotando a_P o átomo de Souza canônico em P,

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{Q \in \mathcal{P}^i} k_Q^f a_Q &= k_I^f a_I + \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^{k+1} \\ P \subset Q}} k_P^f a_P \\ &= k_I^f a_I + \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^{k+1} \\ P \subset Q}} \tilde{k}_P^f \tilde{a}_P^f(x_P) 1_P \\ &= k_I^f a_I + \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}^{k+1} \\ P \subset Q}} \tilde{k}_P^f \tilde{a}_P^f \\ &= d_I^f \phi_I + \sum_k \sum_{Q \in \mathcal{P}^k} \sum_{S \in \mathcal{H}_Q} d_S^f \phi_S \\ &= \sum_{S \in \hat{\mathcal{H}}} d_S^f \phi_S. \end{aligned} \tag{4.4-11}$$

Em particular, temos

$$f = \sum_i \sum_{Q \in \mathcal{P}^i} k_Q^f a_Q, \tag{4.4-12}$$

onde essa soma converge incondicionalmente em L^β. Vamos chamar o lado direito da equação (4.4-12) de *representação atômica padrão* de f. Defina

$$N_{st}(f) = |k_I^f| + \left(\sum_{k \geqslant 1} \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |k_Q^f|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q},$$

onde "*st*" vem do inglês *standard*.

4.4C ***Oscilação média.*** Defina, para $p \in [1, \infty)$,

$$\operatorname{osc}_p(f, Q) = \inf_{c \in \mathbb{C}} \left(\int_Q |f(x) - c|^p \, \mathrm{d}m(x) \right)^{1/p},$$

com

$$\operatorname{osc}_\infty(f, Q) = \inf_{c \in \mathbb{C}} |f - c|_{L^\infty(Q)}.$$

Defina, também, para $p \in [1, \infty)$ e $q \in [1, \infty]$,

$$\operatorname{osc}^s_{p,q}(f) = \left(\sum_k \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |Q|^{-sp} \operatorname{osc}_p(f, Q)^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \tag{4.4-13}$$

com a modificação usual quando $q = \infty$. Seja

$$N_{osc}(f) = |I|^{-s} |f|_p + \operatorname{osc}^s_{p,q}(f).$$

4.4D ***Equivalência entre as normas.*** Aqui provamos que as normas definidas até agora são equivalentes. O teorema a seguir é apresentado de uma maneira um pouco diferente em [SMANIA, 2022]; mudamos alguns métodos e constantes.

Teorema 4.4.1. *Suponha $s > 0$, $p \in [1, \infty)$ e $q \in [1, \infty]$. Cada uma das normas $|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$, $N_{haar}(f)$, $N_{st}(f)$ e $N_{osc}(f)$ é finita se, e somente se, $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$. Além disso, essas normas são equivalentes em $\mathcal{B}^s_{p,q}$. De fato,*

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \leqslant N_{st}(f), \tag{4.4-14}$$

$$N_{st}(f) \leqslant C_{11} N_{haar}(f), \tag{4.4-15}$$

$$N_{haar}(f) \leqslant C_{12} N_{osc}(f), \tag{4.4-16}$$

$$N_{osc}(f) \leqslant C_{13} |f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}, \tag{4.4-17}$$

onde

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{10} \, \text{máx}\{\lambda_1^{1/p-s}, \lambda_2^{1/p-s}\} \lambda_1^{-1/p} \gamma, \\ C_{12} &= C_{10}(\lambda_1^{-1} - 1), \\ C_{13} &= C_1^{1+1/p} C_2(p, q, (|\mathcal{P}^k|^{sp})_k) |I|^{-s} + \frac{1}{1 - \lambda_2^s} \end{aligned}$$

e $\gamma \geqslant 1$ é o inteiro tal que $2^{\gamma - 1} < \lambda_1^{-1} \leqslant 2^\gamma$.

Demonstração. Se $N_{st}(f) = \infty$, a inequação (4.4-14) é óbvia. Do contrário, temos que $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$, pela Proposição 2.2.2 e, portanto, $|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \leqslant N_{st}(f)$, por definição.

Daqui em diante, para simplificar ainda mais a notação, vamos omitir o sobrescrito f onde possível, por exemplo, ao escrever d_S no lugar de d^f_S.

Prova de (4.4-15): Seguindo a notação da Seção 4.3, temos que cada P filho de um $Q \in \mathcal{P}^k$, com $k \geqslant 0$, pertence a, no máximo, um $S \in \mathcal{H}_{Q,j}$ (no sentido de que $P \in S_1 \cup S_2$), para cada j. Com isso, temos que a cardinalidade de $\mathcal{S}^Q_P$ é menor ou igual ao número de gerações da árvore logarítmica formada com o conjunto $\{1, 2, \ldots, n_Q\}$ menos um (pois a última geração consiste apenas de folhas). De acordo com 4.3.1, $\#\mathcal{S}^Q_P \leqslant l - 1$, onde $2^{l-2} < n_Q \leqslant 2^{l-1}$. Desse modo, se γ é o inteiro tal que $2^{\gamma-1} < 1/\lambda_1 \leqslant 2^\gamma$, então

$$\sup_{Q\in\mathcal{P}} \sup_{P\in\Omega_Q} \#\mathcal{S}^Q_P \leqslant \gamma.$$

Agora, considere a representação atômica padrão de f dada por (4.4-12). Com o auxílio da equação (4.4-9), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} \sum_{P\in\Omega_Q} |k_P|^p &\leqslant \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} \sum_{P\in\Omega_Q} \tilde{k}^p_P \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} \sum_{P\in\Omega_Q} \Big| \sum_{S\in\mathcal{S}^Q_P} c_{S,P} \Big|^p \\
&\leqslant \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} \sum_{P\in\Omega_Q} \gamma^p \sum_{S\in\mathcal{S}^Q_P} |c_{S,P}|^p \\
&\leqslant C^p_{10} \text{máx}\{\lambda_1^{1-sp}, \lambda_2^{1-sp}\}\gamma^p \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{P\in\Omega_Q} \sum_{S\in\mathcal{S}^Q_P} |d_S|^p \\
&\leqslant C^p_{10} \text{máx}\{\lambda_1^{1-sp}, \lambda_2^{1-sp}\}\gamma^p \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{P\in\Omega_Q} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} |d_S|^p \\
&\leqslant C^p_{10} \text{máx}\{\lambda_1^{1-sp}, \lambda_2^{1-sp}\}\lambda_1^{-1}\gamma^p \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} |d_S|^p
\end{aligned}$$

para todo k. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
N_{st}(f) = |k_I| + \left(\sum_{k\geqslant 1} \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |k_P|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} &= |k_I| + \left(\sum_{k} \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} \sum_{P\in\Omega_Q} |k_P|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\
\leqslant |I|^{1/p-s-1/2}|d_I| + C_{10}\text{máx}\{\lambda_1^{1/p-s}, \lambda_2^{1/p-s}\}\lambda_1^{-1/p}\gamma & \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} |d_S|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \\
\leqslant C_{11}|I|^{1/p-s-1/2}|d_I| + C_{11} \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} |d_S|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} &= C_{11} N_{haar}(f),
\end{aligned}$$

pois $C_{11} \geqslant 1$.

Prova de (4.4-16): Note que

$$|d_I| \leqslant \int |f||\phi_I| \,\mathrm{d}m \leqslant |f|_p |I|^{1/2-1/p}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ e $Q \in \mathcal{P}$, escolha $c_Q \in \mathbb{C}$ tal que

$$\left(\int_Q |f - c_Q|^p \, \mathrm{d}m\right)^{1/p} \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{osc}_p(f, Q).$$

Já que $\displaystyle\int_Q \phi_S \, \mathrm{d}m = 0$ e $|\phi_S| \leqslant C_{10}|Q|^{-1/2}$ para todo $S \in \mathcal{H}_Q$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} |d_S|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} \left|\int f\phi_S \, \mathrm{d}m\right|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} \left|\int_Q f\phi_S - c_Q\phi_S \, \mathrm{d}m\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} \left(\int_Q |f - c_Q||\phi_S| \, \mathrm{d}m\right)^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} \left(C_{10}|Q|^{-1/2}\int_Q |f - c_Q| \, \mathrm{d}m\right)^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} \left(C_{10}|Q|^{1/2-1/p}(1+\varepsilon)\mathrm{osc}_p(f, Q)\right)^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant C_{10}(1+\varepsilon)\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{-sp} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} \mathrm{osc}_p(f, Q)^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant C_{10}(1+\varepsilon)(\sup_{Q\in\mathcal{P}^k} \#\mathcal{H}_Q)\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{-sp}\mathrm{osc}_p(f, Q)^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant C_{10}(1+\varepsilon)(\lambda_1^{-1} - 1)\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{-sp}\mathrm{osc}_p(f, Q)^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Como ε é arbitrário e $C_{12} \geqslant 1$, temos

$$\begin{aligned}
N_{haar}(f) &= |I|^{1/p-s-1/2}|d_I| + \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{1-sp-p/2} \sum_{S\in\mathcal{H}_Q} |d_S|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&\leqslant |I|^{-s}|f|_p + C_{10}(\lambda_1^{-1} - 1)\left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{-sp}\mathrm{osc}_p(f, Q)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&\leqslant C_{12}|I|^{-s}|f|_p + C_{12}\left(\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |Q|^{-sp}\mathrm{osc}_p(f, Q)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C_{12}N_{osc}(f).
\end{aligned}$$

Prova de (4.4-17): Se $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$ e $\varepsilon > 0$, então existe uma $\mathcal{B}^s_{p,q}$-representação de f

$$f = \sum_{Q\in\mathcal{P}} s_Q a_Q$$

tal que

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}\leqslant(1+\varepsilon)|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$$

ou, se $q=\infty$,

$$\sup_k\left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}|s_Q|^p\right)^{1/p}\leqslant(1+\varepsilon)|f|_{\mathcal{B}^s_{p,\infty}}.$$

Observe que, para algum $J\in\mathcal{P}$, podemos escrever

$$f=\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}\\J\subset Q}}s_Qa_Q+\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}\\Q\subsetneq J}}s_Qa_Q+\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}\\Q\cap J=\emptyset}}s_Qa_Q.$$

Desse modo, em J, temos

$$f=\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}\\J\subset Q}}s_Qa_Q+\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}\\Q\subsetneq J}}s_Qa_Q.$$

Então tome $k_0\geqslant 0$ e, para cada $J\in\mathcal{P}^{k_0}$, escolha $x_J\in J$. Temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-sp}\mathrm{osc}_p(f,J)^p\right)^{1/p}&\leqslant\left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-sp}\int_J\Big|f-\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}\\J\subset Q}}s_Qa_Q(x_J)\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}\\&=\left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-sp}\int_J\Big|\sum_{k>k_0}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k\\Q\subset J}}s_Qa_Q\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}\left(\int\Big|\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-s}\sum_{k>k_0}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k\\Q\subset J}}s_Qa_Q\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}&=\left(\sum_{J'\in\mathcal{P}^{k_0}}\int_{J'}\Big|\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-s}\sum_{k>k_0}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k\\Q\subset J}}s_Qa_Q\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}\\&=\left(\sum_{J'\in\mathcal{P}^{k_0}}\int\Big||J'|^{-s}\sum_{k>k_0}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k\\Q\subset J'}}s_Qa_Q\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}\\&=\left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-sp}\int\Big|\sum_{k>k_0}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k\\Q\subset J}}s_Qa_Q\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p},\end{aligned}$$

pois o suporte de a_Q está contido em Q. Vamos usar esse mesmo argumento algumas vezes a seguir:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-sp}\mathrm{osc}_p(f,J)^p\right)^{1/p}&\leqslant\left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-sp}\int\Big|\sum_{k>k_0}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k\\Q\subset J}}s_Qa_Q\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}\\&=\left(\int\Big|\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}}|J|^{-s}\sum_{k>k_0}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k\\Q\subset J}}s_Qa_Q\Big|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int \Big| \sum_{k>k_0} \sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-s} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} s_Q a_Q \Big|^p \, \mathrm{d}m \right)^{1/p} \\
&\leqslant \sum_{k>k_0} \left(\int \Big| \sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-s} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} s_Q a_Q \Big|^p \, \mathrm{d}m \right)^{1/p} \\
&= \sum_{k>k_0} \left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-sp} \int \Big| \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} s_Q a_Q \Big|^p \, \mathrm{d}m \right)^{1/p} \\
&= \sum_{k>k_0} \left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-sp} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} \int_Q |s_Q a_Q|^p \, \mathrm{d}m \right)^{1/p} \\
&\leqslant \sum_{k>k_0} \left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-sp} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} |Q|^{sp-1} \int_Q |s_Q|^p \, \mathrm{d}m \right)^{1/p} \\
&= \sum_{k>k_0} \left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-sp} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} |Q|^{sp} |s_Q|^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \sum_{k>k_0} \left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} \left(\frac{\sup\{|Q| : Q\in\mathcal{P}^k, Q\subset J\}}{|J|} \right)^{sp} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} |s_Q|^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \sum_{k>k_0} \left(\lambda_2^{sp(k-k_0)} \sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} \sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}^k \\ Q\subset J}} |s_Q|^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \sum_{k>k_0} \left(\lambda_2^{sp(k-k_0)} \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s_Q|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Se $q < \infty$, pela Proposição 1.0.14, temos

$$
\left(\sum_{k_0} \left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-sp} \mathrm{osc}_p(f,J)^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\lambda_2^s} |f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}.
$$

Caso contrário, temos

$$
\begin{aligned}
\sup_{k_0} \left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-sp} \mathrm{osc}_p(f,J)^p \right)^{1/p} &\leqslant \sup_{k_0} \sum_{k>k_0} \lambda_2^{s(k-k_0)} \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s_Q|^p \right)^{1/p} \\
&= \sum_{k>0} \lambda_2^{sk} \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |s_Q|^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant (1+\varepsilon) |f|_{\mathcal{B}^s_{p,\infty}} \sum_{k>0} \lambda_2^{sk} \\
&\leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\lambda_2^s} |f|_{\mathcal{B}^s_{p,\infty}}.
\end{aligned}
$$

Como ε é arbitrário, pela Proposição 2.2.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
N_{osc}(f) &= |I|^{-s}|f|_p + \left(\sum_{k_0}\left(\sum_{J\in\mathcal{P}^{k_0}} |J|^{-sp}\mathrm{osc}_p(f,J)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&\leqslant \left(C_1^{1+1/p}C_2(p,q,(|\mathcal{P}^k|^{sp})_k)|I|^{-s} + \frac{1}{1-\lambda_2^s}\right)|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} = C_{13}|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}.
\end{aligned}
$$

□

O seguinte corolário é uma importante consequência desta seção.

Corolário 4.4.2. *Para cada $P \in \mathcal{P}$, existe um funcional linear em L^1*

$$f \mapsto k_P^f$$

com a seguinte propriedade. A chamada $\mathcal{B}^s_{p,q}$-representação padrão de $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$, dada por

$$f = \sum_k \sum_{P\in\mathcal{P}^k} k_P^f a_P$$

satisfaz

$$\left(\sum_k\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k} |k_P^f|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C_{11}C_{12}C_{13}|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}.$$

4.5 Caracterizações alternativas II: átomos

Aqui damos descrições alternativas de $\mathcal{B}^s_{p,q}$, que são bem diferentes daquelas apresentadas na Seção 4.4. Vamos mostrar que é possível obter $\mathcal{B}^s_{p,q}$ usando diferentes classes de átomos. No que segue, β será um número real.

4.5A Usando átomos de Besov. A vantagem de usar átomos de Besov é que eles são uma classe ampla e geral de átomos. Eles podem ser considerados em qualquer espaço de medida munido de uma grade boa. Além disso, como ainda vamos demonstrar, sob condições adequadas, eles contêm os átomos de Hölder e de variação limitada, que serão muito úteis em outras caracterizações de $\mathcal{B}^s_{p,q}$.

Seja $s < \beta$ e $\tilde{q} \in [1, \infty]$. Um $(s, \beta, p, \tilde{q})$-*átomo de Besov* em $Q \in \mathcal{P}$ é uma função $a \in \mathcal{B}^\beta_{p,\tilde{q}}(Q, \mathcal{P}_Q, \mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})$ tal que

$$|a|_{\mathcal{B}^\beta_{p,\tilde{q}}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})} \leqslant \frac{1}{C_{14}} |Q|^{s-\beta},$$

onde

$$C_{14} = C_1^{1+1/p} \left(\sum_k \lambda_2^{k\beta\tilde{q}'} \right)^{1/\tilde{q}'}$$

com a modificação usual se $\tilde{q}' = \infty$. Note que, como $\lambda_2 \in (0,1)$ e $\beta, \tilde{q} > 0$, temos

$$\left(\sum_k \lambda_2^{k\beta\tilde{q}'} \right)^{1/\tilde{q}'} = \left(\frac{1}{1 - \lambda_2^{\beta\tilde{q}'}} \right)^{1/\tilde{q}'} \geqslant 1.$$

e, assim, $C_{14} \geqslant 1$. Também podemos considerar a fora de Q, simplesmente definindo $a(x) = 0$ para todo $x \notin Q$.

Denotamos a família de $(s, \beta, p, \tilde{q})$-átomos de Besov com suporte em Q por $\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}(Q)$. Vamos mostrar que $\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}$ satisfaz as propriedades A_1-A_4 com $u = 1$ e $\mathcal{B}(Q) = \{ \phi \in L^p : \phi(x) = 0 \text{ para todo } x \notin Q \}$. De fato, obtemos imediatamente as propriedades A_1 e A_2. A_3 segue diretamente do fato de que $\mathcal{B}^\beta_{p,\tilde{q}}(Q, \mathcal{P}_Q, \mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})$ é um espaço vetorial normado, como dado pela Proposição 2.2.4. Para ver A_4 suponha, primeiro, $\tilde{q} > 1$. Note que, pela Proposição 2.2.2, temos

$$\begin{aligned} |a|_p \leqslant \frac{1}{C_{14}} |a|_p &\leqslant \frac{1}{C_{14}} C_1^{1+1/p} C_2(p, \tilde{q}, (|\mathcal{P}^k_Q|^{p\beta})_k) |a|_{\mathcal{B}^\beta_{p,\tilde{q}}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})} \\ &= \frac{C_1^{1+1/p}}{C_{14}} \left(\sum_k |\mathcal{P}^k_Q|^{\beta\tilde{q}'} \right)^{1/\tilde{q}'} |a|_{\mathcal{B}^\beta_{p,\tilde{q}}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})} \\ &\leqslant \frac{C_1^{1+1/p}}{C_{14}} \left(\sum_k (\lambda_2^k |Q|)^{\beta\tilde{q}'} \right)^{1/\tilde{q}'} |a|_{\mathcal{B}^\beta_{p,\tilde{q}}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})} \\ &\leqslant |Q|^\beta |Q|^{s-\beta} = |Q|^s = |Q|^{s-1/\infty}. \end{aligned} \tag{4.5-18}$$

De maneira análoga, mostra-se o caso $\tilde{q} = 1$. Desse modo, temos que um $(s, \beta, p, \tilde{q})$-átomo de Besov é um átomo de tipo $(s, p, 1)$.

O resultado a seguir diz que existem várias maneiras de definir $\mathcal{B}^s_{p,q}$ usando diferentes classes de átomos. Partes do enunciado e da demonstração foram alteradas.

Proposição 4.5.1 (Átomos de Souza e de Besov)**.** *Seja $\mathcal{P}$ uma grade boa. Seja $\mathcal{A}$ uma classe de átomos de tipo (s, p, u), com $u \geqslant 1$, tal que, para alguns $s < \beta$, $\tilde{q} \in [1, \infty]$ e $C_{15}, C_{16} \geqslant 0$, temos que, para todo $Q \in \mathcal{P}$,*

$$\frac{1}{C_{15}}\mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q) \subset \mathcal{A}(Q) \subset C_{16}\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}(Q).$$

Então

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P}, \mathcal{A}^{sz}_{s,p}) = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P}, \mathcal{A}) = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P}, \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})$$

para todo $q \in [1, \infty]$. Mais ainda, temos

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} \leqslant C_{15}|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{sz}_{s,p})}, \tag{4.5-19}$$

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})} \leqslant C_{16}|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})}, \tag{4.5-20}$$

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{sz}_{s,p})} \leqslant \frac{2C_1}{1 - \lambda_2^{\beta - s}}|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})}. \tag{4.5-21}$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{sz}_{s,p})$. Então podemos escrever

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{P}} s_Q a_Q,$$

com $s_Q \in \mathbb{C}$ e $a_Q \in \mathcal{A}^{sz}_{s,p}(Q)$. Desse modo, temos que $\dfrac{1}{C_{15}}a_Q \in \mathcal{A}(Q)$ e

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{P}} C_{15} s_Q \frac{a_Q}{C_{15}}$$

é uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})$-representação de f. Com isso, temos que, para todo q,

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A})} \leqslant \left(\sum_k \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |C_{15} s_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} = C_{15}\left(\sum_k \left(\sum_{Q \in \mathcal{P}^k} |s_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q},$$

com a modificação usual quando $q = \infty$. Disso, segue (4.5-19) e, de maneira totalmente análoga, (4.5-20). Para provar (4.5-21), vamos, primeiro, mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação 4.5.1- I. *Seja b_J um $(s, \beta, p, \tilde{q})$-átomo de Besov em $J \in \mathcal{P}^j$. Então, para todo $P \in \mathcal{P}$, com $P \subset J$, existe $m_P \in \mathbb{C}$ tal que*

$$b_J = \sum_{P \in \mathcal{P}, P \subset J} m_P a_P,$$

onde a_P é o (s, p)-átomo de Souza canônico em P e, para todo $k \geqslant j$,

$$\left(\sum_{P \in \mathcal{P}^k, P \subset J} |m_P|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{2}{C_{14}}\lambda_2^{(k-j)(\beta - s)}.$$

De fato, como

$$|b_J|_{\mathcal{B}^{\beta}_{p,\tilde{q}}(J,\mathcal{P}_J,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})} \leqslant \frac{1}{C_{14}}|J|^{s-\beta},$$

existe uma $\mathcal{B}^{\beta}_{p,\tilde{q}}(J,\mathcal{P}_J,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})$-representação

$$b_J = \sum_{P\in\mathcal{P},P\subset J} c_P d_P,$$

onde d_P é o (β,p)-átomo de Souza canônico em P e, para todo $k \geqslant j$,

$$\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k,P\subset J}|c_P|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_i\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^i,P\subset J}|c_P|^p\right)^{\tilde{q}/p}\right)^{1/\tilde{q}} \leqslant \frac{2}{C_{14}}|J|^{s-\beta}.$$

Então

$$a_P = |P|^{s-\beta}d_P$$

é o (s,p)-átomo de Souza canônico em P e

$$b_J = \sum_{P\in\mathcal{P},P\subset J} m_P a_P,$$

com $m_P = c_P|P|^{\beta-s}$ e

$$\begin{aligned}\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k,P\subset J}|m_P|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k,P\subset J}\left(\frac{|P|}{|J|}\right)^{p(\beta-s)}|J|^{p(\beta-s)}|c_P|^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant \lambda_2^{(k-j)(\beta-s)}|J|^{\beta-s}\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^k,P\subset J}|c_P|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{2}{C_{14}}\lambda_2^{(k-j)(\beta-s)}\end{aligned}$$

para todo $k \geqslant j$. Isso conclui a demonstração da Afirmação 4.5.1- I. Agora (4.5-21) segue da Proposição 2.4.1. Para ver isso, tome $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}^{sz}_{s,p}$, $k_i = i$, $\alpha = 1$, $A = B = 0$, $C_6 = \left(\frac{2}{C_{14}}\right)^p$ e $\lambda = \lambda_2^{p(\beta-s)}$ em 2.4.1. Desse modo, com a Afirmação 4.5.1- I, temos que as hipóteses de 2.4.1(C) são satisfeitas e temos $C_7 = 1$,

$$b_n = \begin{cases}\lambda_2^{np(\beta-s)} & \text{se } n > -1\\ 0 & \text{se } n \leqslant -1\end{cases}$$

e, consequentemente,

$$C_3(p,q,b) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_2^{\beta-s})^n = \frac{1}{1-\lambda_2^{\beta-s}}.$$

Portanto, por 2.4.1(C), temos

$$|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{sz}_{s,p})} \leqslant C_1\frac{2}{C_{14}}\frac{1}{1-\lambda_2^{\beta-s}}|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})} \leqslant \frac{2C_1}{1-\lambda_2^{\beta-s}}|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})}.$$

Para concluir, observe que (4.5-19) nos dá

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P},\mathcal{A}^{sz}_{s,p}) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P},\mathcal{A}),$$

(4.5-20) nos dá

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P},\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P},\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})$$

e (4.5-21) nos dá

$$\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P},\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{P},\mathcal{A}^{sz}_{s,p}).$$

□

4.5B Usando átomos de Hölder. Suponha que I é um espaço quase métrico, com uma quase distância d e uma grade boa $\mathcal{P}$ satisfazendo as mesmas suposições que em **3.3B**. Suponha ainda que os átomos de Hölder assumam valores apenas em $\mathbb{R}$. A seguinte proposição sofreu algumas modificações em relação a [SMANIA, 2022].

Proposição 4.5.2. *Suponha*

$$0 < s < \beta < \tilde{\beta},$$

$p \in [1,\infty)$ *e* $\tilde{q} \in [1,\infty]$. *Para todo* $Q \in \mathcal{P}$, *temos*

$$C_{17}\mathcal{A}^h_{s,\tilde{\beta},p}(Q) \subset \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}(Q) \tag{4.5-22}$$

para algum $C_{17} > 0$. *Além disso,*

$$C_{18}\mathcal{A}^h_{s,\beta,p}(Q) \subset \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\infty}(Q) \tag{4.5-23}$$

para algum $C_{18} > 0$. *Em particular*

$$\mathcal{B}^s_{p,q} = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^h_{s,\tilde{\beta},p}) = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}) \tag{4.5-24}$$

e as normas correspondentes são equivalentes.

Demonstração. Vamos denotar, para $R \in \mathcal{P}$,

$$\inf \phi(R) = \inf\{\, \phi(x) : x \in R\,\}.$$

Seja $Q \in \mathcal{P}^j$ e tome $\phi \in \mathcal{A}^h_{s,\tilde{\beta},p}(Q)$. Assuma, primeiro, que $\phi \geqslant 0$. Defina

$$c_Q = \inf \phi(Q)|Q|^{1/p-\beta}$$

e, para todo $P \subset W \subset Q$, com $P \in \mathcal{P}^{k+1}$ e $W \in \mathcal{P}^k$, defina

$$c_P = (\inf \phi(P) - \inf \phi(W))|P|^{1/p-\beta}. \tag{4.5-25}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, temos que existe $x \in W$ tal que

$$\inf \phi(W) \geqslant \phi(x) - \varepsilon.$$

Desse modo, temos que existem $x \in W$ e $y \in P$ tais que

$$\inf \phi(P) - \inf \phi(W) \leqslant \phi(y) - \phi(x) + \varepsilon \leqslant |Q|^{s-1/p-\tilde{\beta}} d(x,y)^{D\tilde{\beta}} + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, temos

$$\inf \phi(P) - \inf \phi(W) \leqslant |Q|^{s-1/p-\tilde{\beta}}(\text{diam } W)^{D\tilde{\beta}}.$$

Agora, de (3.3-2), temos que

$$(\text{diam } W)^{D\tilde{\beta}} \leqslant \frac{(\text{diam } P)^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}}$$

e, de (3.3-1), temos que

$$\frac{(\text{diam } P)^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}} \leqslant \frac{C_8^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}}|P|^{\tilde{\beta}}.$$

Com essas informações, concluímos que

$$\begin{aligned}
|c_P| &= (\inf \phi(P) - \inf \phi(W))|P|^{1/p-\beta} \\
&\leqslant |Q|^{s-1/p-\tilde{\beta}}\frac{C_8^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}}|P|^{\tilde{\beta}}|P|^{1/p-\beta} \\
&= \frac{C_8^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}}\left(\frac{|P|}{|Q|}\right)^{1/p}|Q|^{s-\tilde{\beta}}|P|^{\tilde{\beta}-\beta} \\
&= \frac{C_8^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}}\left(\frac{|P|}{|Q|}\right)^{1/p}|Q|^{s-\beta}\left(\frac{|P|}{|Q|}\right)^{\tilde{\beta}-\beta}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{k+1}\\ P\subset Q}} |c_P|^p &\leqslant \frac{C_8^{D\tilde{\beta}p}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}p}}|Q|^{p(s-\beta)}\lambda_2^{(k+1-j)p(\tilde{\beta}-\beta)}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{k+1}\\ P\subset Q}}\frac{|P|}{|Q|} \\
&= \frac{C_8^{D\tilde{\beta}p}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}p}}|Q|^{p(s-\beta)}\lambda_2^{(k+1-j)p(\tilde{\beta}-\beta)},
\end{aligned} \tag{4.5-26}$$

de modo que

$$\left(\sum_{k\geqslant j-1}\left(\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{k+1}\\ P\subset Q}}|c_P|^p\right)^{\tilde{q}/p}\right)^{1/\tilde{q}} \leqslant \frac{C_8^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}}\left(\frac{1}{1-\lambda_2^{\tilde{q}(\tilde{\beta}-\beta)}}\right)^{1/\tilde{q}}|Q|^{s-\beta}.$$

Portanto,

$$\tilde{\phi} = \sum_{k\geqslant j}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^k\\ P\subset Q}} c_P a_P,$$

onde a_P é o (β,p)-átomo de Souza canônico em P, é uma $\mathcal{B}^{\beta}_{p,\tilde{q}}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})$-representação de uma função $\tilde{\phi}$. De (4.5-25) segue que

$$\sum_{j\leqslant k\leqslant N}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^k\\ P\subset Q}} c_P a_P(x)$$

é uma soma telescópica e é igual a $\inf \phi(P)$ para todo $x \in P \in \mathcal{P}^N$. Em particular,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j\leqslant k\leqslant N} \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^k \\ P\subset Q}} c_P a_P(x) = \phi(x)$$

para quase todo x, de modo que $\tilde{\phi} = \phi$. Assim,

$$|C_{17}\phi|_{\mathcal{B}^{\beta}_{p,\tilde{q}}(Q,\mathcal{P}_Q,\mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})} \leqslant \frac{1}{2C_{14}}|Q|^{s-\beta}, \tag{4.5-27}$$

onde

$$C_{17} = \frac{1}{2C_{14}}\left(\frac{C_8^{D\tilde{\beta}}}{\lambda_3^{D\tilde{\beta}}}\left(\frac{1}{1-\lambda_2^{\tilde{q}(\tilde{\beta}-\beta)}}\right)^{1/\tilde{q}}\right)^{-1}.$$

Para o caso geral, escrevemos $\phi_+(x) = \max\{\phi(x), 0\}$ e $\phi_-(x) = \max\{-\phi(x), 0\}$. Desse modo, temos $0 \leqslant \phi_+, \phi_- \in \mathcal{A}^h_{s,\tilde{\beta},p}(Q)$ e $\phi = \phi_+ - \phi_-$. Aplicando (4.5-27) para ϕ_+ e ϕ_-, obtemos (4.5-22).

A inclusão (4.5-23) pode ser obtida tomando $\tilde{\beta} = \beta$ em (4.5-26). Desse modo, ficamos com

$$\sup_{k\geqslant j}\left(\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{k+1} \\ P\subset Q}} |c_P|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{C_8^{D\beta}}{\lambda_3^{D\beta}}|Q|^{s-\beta}$$

e podemos repetir o resto do argumento com $\tilde{q} = \infty$.

Pela Proposição 4.5.1, temos (4.5-24). □

4.5C Usando átomos de variação limitada. Assuma que I é um intervalo de $\mathbb{R}$ de comprimento 1, m é a medida de Lebesgue em I e as partições em $\mathcal{P}$ são partições por intervalos. A próxima proposição foi modificada de modo a torná-la um pouco mais geral, além de corrigir alguns erros de digitação.

Proposição 4.5.3. *Se*

$$0 < s < \beta \leqslant \frac{1}{p}$$

então

$$C_{20}\mathcal{A}^{bv}_{s,\beta,p}(Q) \subset \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\infty}(Q)$$

para todo $Q \in \mathcal{P}$. *Se*

$$0 < s < \beta < \tilde{\beta} \leqslant \frac{1}{p}$$

então

$$C_{21}\mathcal{A}^{bv}_{s,\tilde{\beta},p}(Q) \subset \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}(Q)$$

para todo $\tilde{q} \in [1,\infty]$. *Em particular,*

$$\mathcal{B}^s_{p,q} = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bv}_{s,\tilde{\beta},p}) = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})$$

para todos $q, \tilde{q} \in [1,\infty]$.

Demonstração. Suponha
$$0 < s < \beta \leqslant \tilde{\beta} \leqslant \frac{1}{p}.$$
Seja $Q \in \mathcal{P}^j$ e $a_Q \in \mathcal{A}^{bv}_{s,\tilde{\beta},p}(Q)$. Temos
$$|a_Q|_p \leqslant |a_Q|_\infty |Q|^{1/p} \leqslant |Q|^{s-1/p}|Q|^{1/p} = |Q|^s \leqslant C_{19}|Q|^{s-\beta},$$
onde $C_{19} = \sup_{Q\in\mathcal{P}} |Q|^\beta$. Se $\tilde{\beta}p \neq 1$, temos, para todo $k \geqslant j$,
$$\begin{aligned}
\sum_{W\in\mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p}\mathrm{osc}_p(a_Q,W)^p &= \sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|^{-\beta p} \inf_{c\in\mathbb{C}} |a_Q - c|^p_{L^p(W)} \\
&\leqslant \sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|^{-\beta p} \inf_{c\in\mathbb{C}} |a_Q - c|^p_{L^\infty(W)}|W| \\
&= \sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|^{1-\beta p}\mathrm{osc}_\infty(a_Q,W)^p \\
&\leqslant \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|^{\frac{1-\beta p}{1-\tilde{\beta}p}}\right)^{1-\tilde{\beta}p} \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} \mathrm{osc}_\infty(a_Q,W)^{1/\tilde{\beta}}\right)^{\tilde{\beta}p}
\end{aligned}$$
$$\leqslant \left(\sup_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|^{\frac{(\tilde{\beta}-\beta)p}{1-\tilde{\beta}p}}\right)^{1-\tilde{\beta}p} \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|\right)^{1-\tilde{\beta}p} \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} \mathrm{osc}_\infty(a_Q,W)^{1/\tilde{\beta}}\right)^{\tilde{\beta}p}$$

Agora observe que o conjunto $\{W \in \mathcal{P}^k : W \subset Q\}$ é finito. Como $\mathcal{P}$ é uma grade boa, temos que esse é um conjunto de intervalos disjuntos. Escreva-o como $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$ de modo que a maior extremidade de W_i é menor ou igual à menor extremidade de W_{i+1}. Assim, temos
$$\sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} \mathrm{osc}_\infty(a_Q,W)^{1/\tilde{\beta}} = \sum_{i=1}^m \mathrm{osc}_\infty(a_Q,W_i)^{1/\tilde{\beta}}.$$
Seja $x_1 \in \mathrm{int}\, W_1$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que existe $x_2 \in \mathrm{int}\, W_1$ tal que
$$\begin{aligned}
\mathrm{osc}_\infty(a_Q,W_1) &= \inf_{c\in\mathbb{C}}(\sup_{x\in W_1} |a_Q(x) - c|) \\
&\leqslant \sup_{x\in W_1} |a_Q(x) - a_Q(x_1)| \\
&\leqslant (1+\varepsilon)|a_Q(x_2) - a_Q(x_1)|.
\end{aligned}$$
Sem perda de generalidade, podemos tomar $x_1 < x_2$. Do mesmo modo, para cada $2 \leqslant i \leqslant m$, dado $x_i \in \mathrm{int}\, W_{i-1}$, obtemos $x_{i+1} \in \mathrm{int}\, W_i$ como o elemento que satisfaz
$$\begin{aligned}
\mathrm{osc}_\infty(a_Q,W_i) &= \inf_{c\in\mathbb{C}}(\sup_{x\in W_i} |a_Q(x) - c|) \\
&\leqslant \sup_{x\in W_i} |a_Q(x) - a_Q(x_i)| \\
&\leqslant (1+\varepsilon)|a_Q(x_{i+1}) - a_Q(x_i)|.
\end{aligned}$$

Note que, dessa forma, temos $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{m+1}$ e

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{osc}_\infty(a_Q, W_i)^{1/\tilde\beta}\right)^{\tilde\beta} \leqslant (1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{m} |a_Q(x_{i+1}) - a_Q(x_i)|^{1/\tilde\beta}\right)^{\tilde\beta} \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{var}_{1/\tilde\beta}(a_Q, Q).$$

Como ε é arbitrário, temos

$$\left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} \mathrm{osc}_\infty(a_Q, W)^{1/\tilde\beta}\right)^{\tilde\beta} \leqslant \mathrm{var}_{1/\tilde\beta}(a_Q, Q).$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{W\in\mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p}\mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p \\
&\quad\leqslant \left(\sup_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|^{\frac{(\tilde\beta-\beta)p}{1-\tilde\beta p}}\right)^{1-\tilde\beta p} \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k, W\subset Q} |W|\right)^{1-\tilde\beta p} (\mathrm{var}_{1/\tilde\beta}(a_Q, Q))^p \\
&\quad\quad\leqslant \lambda_2^{(k-j)(\tilde\beta-\beta)p}|Q|^{(\tilde\beta-\beta)p}|Q|^{1-\tilde\beta p}|Q|^{sp-1} \leqslant \lambda_2^{(k-j)(\tilde\beta-\beta)p}|Q|^{(s-\beta)p}.
\end{aligned}$$

Note que, no caso $\tilde\beta p = 1$, o argumento acima necessita apenas de uma modificação simples. Para $k < j$, seja $W_Q \in \mathcal{P}^k$ tal que $Q \subset W_Q$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{W\in\mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p}\mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p &= |W_Q|^{-\beta p}\mathrm{osc}_p(a_Q, W_Q)^p \\
&= |W_Q|^{-\beta p} \inf_{c\in\mathbb{C}} |a_Q - c|^p_{L^p(W_Q)} \\
&\leqslant |W_Q|^{-\beta p}|a_Q|_p^p \\
&\leqslant |W_Q|^{-\beta p}|Q|^{sp} \\
&= \left(\frac{|Q|}{|W_Q|}\right)^{\beta p} |Q|^{(s-\beta)p} \\
&\leqslant \lambda_2^{(j-k)\beta p}|Q|^{(s-\beta)p}.
\end{aligned}$$

Se $\beta < \tilde\beta$, temos, para todo $\tilde q \in [1, \infty)$ e usando $N_{osc}(\cdot) = |I|^{-\beta}|\cdot| + \mathrm{osc}^\beta_{p,\tilde q}(\cdot)$,

$$\begin{aligned}
N_{osc}(a_Q) &= |I|^{-\beta}|a_Q|_p + \left(\sum_k \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p}\mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p\right)^{\tilde q/p}\right)^{1/\tilde q} \\
&= |I|^{-\beta}|a_Q|_p + \left(\sum_{k\geqslant j} \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p}\mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p\right)^{\tilde q/p}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k<j} \left(\sum_{W\in\mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p}\mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p\right)^{\tilde q/p}\right)^{1/\tilde q} \\
&\leqslant |I|^{-\beta}C_{19}|Q|^{s-\beta} + \left(\sum_{k\geqslant j} \lambda_2^{(k-j)(\tilde\beta-\beta)\tilde q}|Q|^{(s-\beta)\tilde q}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k\leqslant j} \lambda_2^{(j-k)\beta\tilde q}|Q|^{(s-\beta)\tilde q}\right)^{1/\tilde q}
\end{aligned}$$

$$= \left(C_{19}|I|^{-\beta} + \left(\frac{1}{1-\lambda_2^{\tilde{q}(\tilde{\beta}-\beta)}} + \frac{1}{1-\lambda_2^{\tilde{q}\beta}} \right)^{1/\tilde{q}} \right) |Q|^{s-\beta}.$$

Se $\tilde{q} = \infty$, obtemos, de maneira análoga, que $N_{osc}(a_Q) \leqslant (C_{19}|I|^{-\beta}+1)|Q|^{s-\beta}$. Já se $\tilde{\beta} = \beta$, usamos N_{osc} com $\tilde{q} = \infty$:

$$\begin{aligned} N_{osc}(a_Q) &= |I|^{-\beta}|a_Q|_p + \sup_k \left(\sum_{W \in \mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p} \mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p \right)^{1/p} \\ &= |I|^{-\beta}|a_Q|_p + \text{máx}\left\{ \sup_{k \geqslant j} \left(\sum_{W \in \mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p} \mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p \right)^{1/p}, \right. \\ &\qquad \left. \sup_{k<j} \left(\sum_{W \in \mathcal{P}^k} |W|^{-\beta p} \mathrm{osc}_p(a_Q, W)^p \right)^{1/p} \right\} \\ &\leqslant |I|^{-\beta} C_{19} |Q|^{s-\beta} + \text{máx}\left\{ \sup_{k \geqslant j} |Q|^{s-\beta}, \sup_{k<j} \lambda_2^{(j-k)\beta} |Q|^{s-\beta} \right\} \\ &= (C_{19}|I|^{-\beta} + 1)|Q|^{s-\beta}. \end{aligned}$$

Em todos os casos, temos $N_{osc}(a_Q) < \infty$. Pelo Teorema 4.4.1, temos que a_Q é um elemento de $\mathcal{B}^{\beta}_{p,\tilde{q}}(Q, \mathcal{P}_Q, \mathcal{A}^{sz}_{\beta,p})$ e existem C_{20} e C_{21} tais que $C_{20}\mathcal{A}^{bv}_{s,\beta,p}(Q) \subset \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\infty}(Q)$ e $C_{21}\mathcal{A}^{bv}_{s,\tilde{\beta},p}(Q) \subset \mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}}(Q)$ para todo $Q \in \mathcal{P}$.

Com isso, dado $\tilde{q} \in [1, \infty]$, pela Proposição 4.5.1, temos que

$$\mathcal{B}^s_{p,q} = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bv}_{s,\tilde{\beta},p}) = \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathcal{A}^{bs}_{s,\beta,p,\tilde{q}})$$

para todo $q \in [1, \infty]$. □

4.6 Aproximações de Dirac

Nesta seção, vamos usar a base de Haar e a notação definidas na Seção 4.3. Algumas definições foram alteradas em relação a [SMANIA, 2022] para melhor entendimento do texto. Para cada $x_0 \in I$ e $k_0 \in \mathbb{N}$, defina a família finita

$$\mathcal{S}_{x_0}^{k_0} = \left\{ S = (S_1, S_2) \in \mathcal{H}(Q) : Q \in \mathcal{P}^k \text{ com } k < k_0 \text{ e } x_0 \in \bigcup_{a=1,2} \bigcup_{P \in S_a} P \right\}.$$

Seja $N(x_0, k_0) = \#\mathcal{S}_{x_0}^{k_0}$. Então podemos considerar a enumeração

$$S^1, S^2, \ldots, S^{N(x_0,k_0)}$$

dos elementos de $\mathcal{S}_{x_0}^{k_0}$ de modo que, para todo i,

$$\bigcup_{P \in S_1^{i+1} \cup S_2^{i+1}} P \subset \bigcup_{Q \in S_1^i \cup S_2^i} Q.$$

Também definimos

$$S^0 = \{I\}.$$

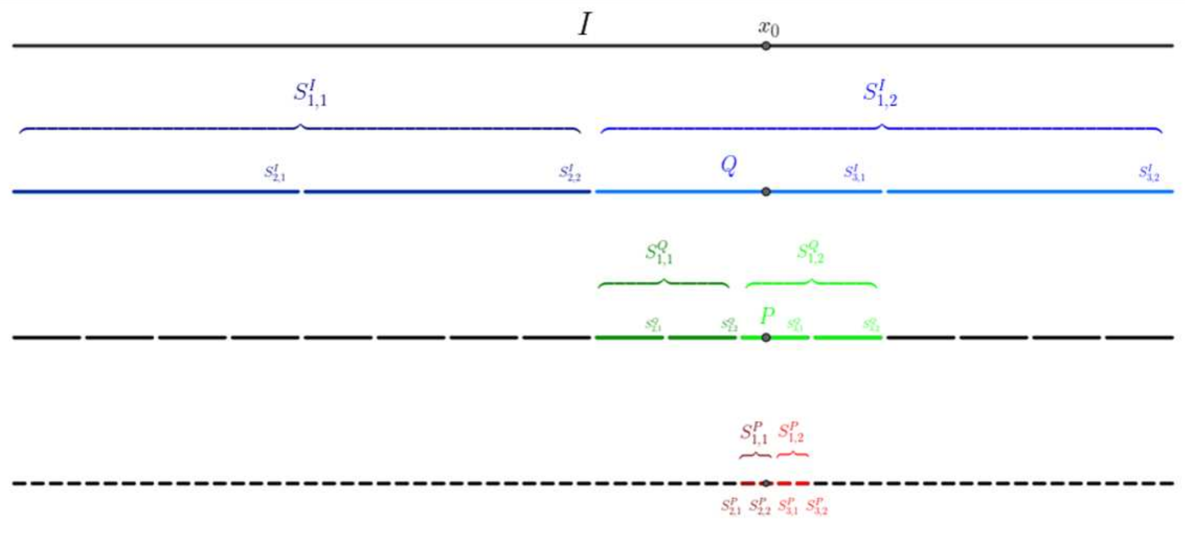

Figura 4 – Ilustração da construção do conjunto $\mathcal{S}_{x_0}^{k_0}$, com $k_0 = 3$, em uma grade 4-ádica. Denotamos por $S_i^W = (S_{i,1}^W, S_{i,2}^W)$ o i-ésimo elemento de $\mathcal{H}(W)$, ordenado de acordo com o imagem. Nesse caso, teríamos $N(x_0, 3) = 6$ e $S^1 = S_1^I$, $S^2 = S_3^I$, $S^3 = S_1^Q$, $S^4 = S_3^Q$, $S^5 = S_1^P$ e $S^6 = S_2^P$.

Seja

$$\psi_0 = \frac{1_I}{|I|}$$

e defina, para $i > 0$,

$$\psi_i = (-1)^{a_i+1} \frac{\sum_{R \in S^i_{3-a_i}} |R|}{\sum_{Q \in S^{i-1}_{a_{i-1}}} |Q|} \left(\frac{\sum_{P \in S_1^i} 1_P}{\sum_{P \in S_1^i} |P|} - \frac{\sum_{R \in S_2^i} 1_R}{\sum_{R \in S_2^i} |R|} \right) = (-1)^{a_i+1} \frac{\sum_{R \in S^i_{3-a_i}} |R|}{\sum_{Q \in S^{i-1}_{a_{i-1}}} |Q|} m_{S^i} \phi_{S^i},$$

onde a_i deve ser escolhido de modo que $x_0 \in \bigcup_{P \in S^i_{a_i}} P$, para $i > 0$ e, para S^0, o subíndice deve ser desconsiderado.

Vamos mostrar, usando indução sobre j, que, para $j \geqslant 0$, temos

$$\sum_{i=0}^{j} \psi_i = \frac{\sum_{P \in S^j_{a_j}} 1_P}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|}.$$

O caso base $j = 0$ é óbvio. Agora suponha a igualdade válida para um número natural $j > 0$. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j+1} \psi_i &= \frac{\sum_{P \in S^j_{a_j}} 1_P}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|} + \psi_{j+1} \\
&= \frac{\sum_{P \in S^j_{a_j}} 1_P}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|} + (-1)^{a_{j+1}+1} \frac{\sum_{R \in S^{j+1}_{3-a_{j+1}}} |R|}{\sum_{Q \in S^j_{a_j}} |Q|} \left(\frac{\sum_{P \in S^{j+1}_1} 1_P}{\sum_{P \in S^{j+1}_1} |P|} - \frac{\sum_{R \in S^{j+1}_2} 1_R}{\sum_{R \in S^{j+1}_2} |R|} \right) \\
&= \frac{1}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|} \left(\sum_{P \in S^j_{a_j}} 1_P + (-1)^{a_{j+1}+1} \sum_{R \in S^{j+1}_{3-a_{j+1}}} |R| \left(\frac{\sum_{P \in S^{j+1}_1} 1_P}{\sum_{P \in S^{j+1}_1} |P|} - \frac{\sum_{R \in S^{j+1}_2} 1_R}{\sum_{R \in S^{j+1}_2} |R|} \right) \right).
\end{aligned}$$

Agora observe que, sem perda de generalidade, podemos assumir $a_{j+1} = 1$. Desse modo, ficamos com

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j+1} \psi_i &= \frac{1}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|} \left(\sum_{P \in S^j_{a_j}} 1_P + \frac{\sum_{R \in S^{j+1}_2} |R|}{\sum_{P \in S^{j+1}_1} |P|} \sum_{P \in S^{j+1}_1} 1_P - \sum_{R \in S^{j+1}_2} 1_R \right) \\
&= \frac{1}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|} \left(\sum_{P \in S^{j+1}_1} 1_P + \sum_{R \in S^{j+1}_2} 1_R + \frac{\sum_{R \in S^{j+1}_2} |R|}{\sum_{P \in S^{j+1}_1} |P|} \sum_{P \in S^{j+1}_1} 1_P - \sum_{R \in S^{j+1}_2} 1_R \right) \\
&= \frac{1}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|} \sum_{P \in S^{j+1}_1} 1_P \left(\frac{\sum_{P \in S^{j+1}_1} |P| + \sum_{R \in S^{j+1}_2} |R|}{\sum_{P \in S^{j+1}_1} |P|} \right) \\
&= \frac{1}{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|} \sum_{P \in S^{j+1}_1} 1_P \left(\frac{\sum_{P \in S^j_{a_j}} |P|}{\sum_{P \in S^{j+1}_1} |P|} \right) \\
&= \frac{\sum_{P \in S^{j+1}_{a_{j+1}}} 1_P}{\sum_{P \in S^{j+1}_{a_{j+1}}} |P|}.
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos que, em particular,

$$\sum_{i=0}^{N(x_0,k_0)} \psi_i = \frac{1_{Q_{k_0}}}{|Q_{k_0}|},$$

onde $x_0 \in Q_{k_0} \in \mathcal{P}^{k_0}$. Em outras palavras,

$$\frac{1}{|I|^{1/2}} \phi_I + \sum_{i=1}^{N(x_0,k_0)} (-1)^{a_i+1} \left(\frac{\sum_{R \in S^i_{3-a_i}} |R|}{\sum_{Q \in S^{i-1}_{a_{i-1}}} |Q|} \right) m_{S^i} \phi_{S^i} = \frac{1_{Q_{k_0}}}{|Q_{k_0}|}. \tag{4.6-28}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sum_{R\in S^i_{3-a_i}}|R|}{\sum_{Q\in S^{i-1}_{a_{i-1}}}|Q|}\right) m_{S^i} &= \left(\frac{\sum_{R\in S^i_{3-a_i}}|R|}{\sum_{Q\in S^{i-1}_{a_{i-1}}}|Q|}\right)^{1/2}\left(\frac{\sum_{R\in S^i_{3-a_i}}|R|}{\sum_{Q\in S^{i-1}_{a_{i-1}}}|Q|}\right)^{1/2}\left(\frac{\sum_{P\in S^i_1}|P|+\sum_{R\in S^i_2}|R|}{(\sum_{P\in S^i_1}|P|)(\sum_{R\in S^i_2}|R|)}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{\sum_{R\in S^i_{3-a_i}}|R|}{\sum_{P\in S^i_{a_i}}|P|}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sum_{Q\in S^{i-1}_{a_{i-1}}}|Q|)^{1/2}}. \qquad (4.6\text{-}29)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (4.6-28) por f, integrando termo a termo e usando (4.6-29), obtemos

$$
\frac{d_I}{|I|^{1/2}}+\sum_{i=1}^{N(x_0,k_0)}(-1)^{a_i+1}\left(\frac{\sum_{R\in S^i_{3-a_i}}|R|}{\sum_{P\in S^i_{a_i}}|P|}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sum_{Q\in S^{i-1}_{a_{i-1}}}|Q|)^{1/2}}d_{S^i}=\int f\cdot\frac{1_{Q_{k_0}}}{|Q_{k_0}|}\,\mathrm{d}m.
$$

Se $f\in L^\beta$, com $1<\beta<\infty$, podemos escrever

$$
f=\sum_{S\in\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{P})}d_S\phi_S,
$$

com $d_S=\displaystyle\int f\phi_S\,\mathrm{d}m$, onde essa série converge absolutamente em L^β. Seja

$$
f_{k_0}=d_I\phi_I+\sum_{k<k_0}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{S\in\mathcal{H}_Q(\mathcal{P})}d_S\phi_S.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
f_{k_0}(x_0) &= d_I\phi_I+\sum_{i=1}^{N(x_0,k_0)}d_{S^i}\phi_{S^i}(x_0) \\
&= \frac{d_I}{|I|^{1/2}}+\sum_{i=1}^{N(x_0,k_0)}(-1)^{a_i+1}d_{S^i}\frac{1}{m_{S^i}}\frac{1}{\sum_{P\in S^i_{a_i}}|P|} \\
&= \frac{d_I}{|I|^{1/2}}+\sum_{i=1}^{N(x_0,k_0)}(-1)^{a_i+1}d_{S^i}\left(\frac{(\sum_{R\in S^i_2}|R|)(\sum_{P\in S^i_1}|P|)}{\sum_{R\in S^i_2}|R|+\sum_{P\in S^i_1}|P|}\right)^{1/2}\frac{1}{\sum_{P\in S^i_{a_i}}|P|} \\
&= \frac{d_I}{|I|^{1/2}}+\sum_{i=1}^{N(x_0,k_0)}(-1)^{a_i+1}d_{S^i}\left(\frac{\sum_{R\in S^i_{3-a_i}}|R|}{\sum_{P\in S^i_{a_i}}|P|}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sum_{Q\in S^{i-1}_{a_{i-1}}}|Q|)^{1/2}} \\
&= \int f\cdot\frac{1_{Q_{k_0}}}{|Q_{k_0}|}\,\mathrm{d}m.
\end{aligned}
$$

Seja

$$
f=\sum_k\sum_{P\in\mathcal{P}^k}k_P a_P \qquad (4.6\text{-}30)
$$

a série dada por (4.4-12). Note que, usando raciocínio similar ao de (4.4-11), concluímos que

$$
f_{k_0}=d_I\phi_I+\sum_{k<k_0}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{S\in\mathcal{H}_Q}d_S\phi_S
$$

$$= d_I\phi_I + \sum_{k<k_0}\sum_{Q\in\mathcal{P}^k}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{k+1}\\ P\subset Q}} k_P a_P$$
$$= k_I a_I + \sum_{k<k_0}\sum_{P\in\mathcal{P}^{k+1}} k_P a_P$$
$$= \sum_{k\leqslant k_0}\sum_{P\in\mathcal{P}^k} k_P a_P. \tag{4.6-31}$$

Consequentemente, obtemos a seguinte proposição, que sofreu pequenas alterações.

Proposição 4.6.1 (Aproximações de Dirac)**.** *Seja $f \in L^\beta$, com $1 < \beta < \infty$. Seja*

$$f = \sum_k \sum_{P\in\mathcal{P}^k} k_P a_P$$

a representação dada por (4.4-12)*. Então, para todo $Q \in \mathcal{P}$,*

$$\sum_{J\in\mathcal{P},Q\subset J} k_J |J|^{s-1/p} = \int f\cdot \frac{1_Q}{|Q|}\,\mathrm{d}m.$$

Em particular, temos

$$\Big|\sum_{J\in\mathcal{P},Q\subset J} k_J |J|^{s-1/p}\Big| \leqslant |f1_Q|_\infty.$$

Demonstração. Observe que, para todo $x_0 \in Q \in \mathcal{P}^{k_0}$, temos

$$\int f\cdot\frac{1_Q}{|Q|}\,\mathrm{d}m = f_{k_0}(x_0) = \sum_{J\in\mathcal{P},Q\subset J} k_J a_J(x_0) = \sum_{J\in\mathcal{P},Q\subset J} k_J |J|^{s-1/p},$$

pois a_J é um átomo canônico de Souza. Com isso, temos

$$\Big|\sum_{J\in\mathcal{P},Q\subset J} k_J |J|^{s-1/p}\Big| \leqslant \frac{1}{|Q|}\int |f1_Q|\,\mathrm{d}m = \frac{1}{|Q|}|f1_Q|_1 \leqslant |f1_Q|_\infty.$$

□

5 Aplicações

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados que podem ser obtidos através da teoria desenvolvida em [SMANIA, 2022]. Na Seção 5.1, trazemos um exemplo de [SMANIA, 2021], apelidado de “toy model”. Esse exemplo consiste na demonstração da desigualdade de Lasota-Yorke para uma aplicação expansora no intervalo $[0, 1]$ através da decomposição atômica de $\mathcal{B}^s_{1,1}([0, 1])$, com $s \in (0, 1)$. Já na Seção 5.2, trazemos resultados de [ARBIETO; SMANIA, 2020] que dizem respeito à ação de um operador de transferência associado a uma transformação (expansora por partes) T, mas sem demonstrações.

5.1 Toy Model

A fim de demonstrar a desigualdade de Lasota-Yorke para uma aplicação expansora, vamos apresentar uma definição de operador de transferência que melhor se ajusta aos nossos propósitos atuais. Na Seção 5.2, traremos uma definição ligeiramente diferente.

Definição 5.1.1 (Operador de Transferência)**.** *Seja $f\colon X \to X$ uma função definida em um conjunto arbitrário X, tal que o jacobiano $|J|$ de f existe para todo $x \in X$. O operador de Ruelle-Perron-Frobenius, ou operador de transferência, é um operador linear $\mathcal{L}$, que age no espaço das funções $\psi\colon X \to \mathbb{C}$, definido por*

$$(\mathcal{L}_f\psi)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{1}{|J(y)|}\psi(y).$$

Proposição 5.1.2. *Seja $\ell \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ e defina $f_\ell\colon [0,1] \to [0,1]$ como*

$$f_\ell(x) = \ell x \mod 1.$$

Seja $\mathcal{D}_\ell^k$ a partição de $[0,1]$ em ℓ^k intervalos de mesmo tamanho. Então $\mathcal{D}_\ell = (\mathcal{D}_\ell^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma grade boa. A função f_ℓ assim definida é um exemplo clássico de uma aplicação expansora. É um resultado conhecido de Teoria Ergódica que a medida de Lebesgue m em $[0,1]$ é uma probabilidade invariante para f_ℓ. Nosso objetivo será provar a desigualdade de Lasota-Yorke para f_ℓ no espaço $\mathcal{B}^s_{1,1}([0,1], m, \mathcal{D}_\ell)$, com $s \in (0,1)$. Isto é, vamos encontrar $j > 0$, $C > 0$ e $\lambda \in (0,1)$ tais que

$$|\mathcal{L}^j_{f_\ell}(\phi)|_{\mathcal{B}^s_{1,1}} \leqslant C|\phi|_1 + \lambda|\phi|_{\mathcal{B}^s_{1,1}}$$

para todo $\phi \in \mathcal{B}^s_{1,1}([0,1], m, \mathcal{D}_\ell)$.

De acordo com a definição 5.1.1, temos que o operador de transferência de f_{ℓ^j} é (abusando um pouco da notação)

$$(\mathcal{L}_{\ell^j}\psi)(x) = \sum_{i=0}^{\ell^j-1} \frac{1}{\ell^j}\psi(\frac{x}{\ell^j} + \frac{i}{\ell^j}).$$

Vamos provar, usando indução sobre j, que $\mathcal{L}^j_\ell = \mathcal{L}_{\ell^j}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^2_\ell\psi)(x) &= (\mathcal{L}_\ell\mathcal{L}_\ell\psi)(x) \\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{1}{\ell}(\mathcal{L}_\ell\psi)(\frac{x}{\ell} + \frac{i}{\ell}) \\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1} \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{\ell}\psi(\frac{\frac{x}{\ell} + \frac{i}{\ell}}{\ell} + \frac{k}{\ell}) \\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1}\sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{\ell^2}\psi(\frac{x}{\ell^2} + \frac{i + k\ell}{\ell^2})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell^2-1} \frac{1}{\ell^2}\psi(\frac{x}{\ell^2} + \frac{i}{\ell^2}) = (\mathcal{L}_{\ell^2}\psi)(x).$$

Supondo $\mathcal{L}_\ell^{j-1} = \mathcal{L}_{\ell^{j-1}}$, *temos*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\ell^j\psi)(x) &= (\mathcal{L}_\ell\mathcal{L}_\ell^{j-1}\psi)(x)\\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{\ell}(\mathcal{L}_\ell^{j-1}\psi)(\frac{x}{\ell}+\frac{i}{\ell})\\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{\ell}(\mathcal{L}_{\ell^{j-1}}\psi)(\frac{x}{\ell}+\frac{i}{\ell})\\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\ell^{j-1}-1}\frac{1}{\ell^{j-1}}\psi(\frac{\frac{x}{\ell}+\frac{i}{\ell}}{\ell^{j-1}}+\frac{k}{\ell^{j-1}})\\
&= \sum_{i=0}^{\ell-1}\sum_{k=0}^{\ell^{j-1}-1}\frac{1}{\ell^j}\psi(\frac{x}{\ell^j}+\frac{i+k\ell}{\ell^j})\\
&= \sum_{i=0}^{\ell^j-1}\frac{1}{\ell^j}\psi(\frac{x}{\ell^j}+\frac{i}{\ell^j}) = (\mathcal{L}_{\ell^j}\psi)(x).
\end{aligned}$$

Agora note que, se $P \in \mathcal{D}_\ell^k$ *e* $k \geqslant j$, *então* $Q = f_{\ell^j}(P) \in \mathcal{D}_\ell^{k-j}$. *Se* a_P *é um* $(s,1)$*-átomo de Souza em* P, *então*

$$(\mathcal{L}_{\ell^j}a_P)(x) = \sum_{y\in f_{\ell^j}^{-1}(x)}\frac{1}{\ell^j}|P|^{s-1}1_P(y) \neq 0 \iff \exists y \in P;\ y \in f_{\ell^j}^{-1}(x) \iff x \in f_{\ell^j}(P) = Q.$$

Além disso, se $f_{\ell^j}(y_1) = f_{\ell^j}(y_2)$, *com* $y_1 \neq y_2$, *temos que existe* $z \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ *tal que* $y_2 = y_1 + z\ell^{-j}$. *Como* $|P| = \ell^{-k} \leqslant \ell^{-j}$, *temos que* $y_1 \in P \implies y_2 \notin P$. *Desse modo, temos*

$$\mathcal{L}_{\ell^j}(a_P) = \frac{1}{\ell^j}|P|^{s-1}1_Q = \frac{1}{\ell^{sj}}|\ell^j|^{s-1}|P|^{s-1}1_Q = \frac{1}{\ell^{sj}}a_Q.$$

Já se $P \in \mathcal{D}_\ell^k$ *com* $k < j$, *então* P *é uma união de* ℓ^{j-k} *elementos de* $\mathcal{D}_\ell^j$. *Logo*

$$\mathcal{L}_{\ell^j}(a_P) = \mathcal{L}_{\ell^j}(|P|^{s-1}\sum_{\substack{Q\in\mathcal{D}_\ell^j\\ Q\subset P}}1_Q) = \frac{\ell^{j-k}}{\ell^j}|P|^{s-1} = \ell^{-ks}a_{[0,1]}.$$

Pelo Corolário 4.4.2, existe C *tal que, para todo* $P \in \mathcal{D}_\ell$, *existem funcionais lineares* $k_P\colon \phi \mapsto k_P^\phi$ *em* $(L^1)^*$ *tais que toda* $\phi \in \mathcal{B}_{1,1}^s([0,1], m, \mathcal{D}_\ell)$ *tem uma* $\mathcal{B}_{1,1}^s$*-representação*

$$\phi = \sum_k \sum_{P\in\mathcal{D}_\ell^k} k_P^\phi a_P$$

satisfazendo

$$\sum_k \sum_{P\in\mathcal{D}_\ell^k} |k_P^\phi| \leqslant C|\phi|_{\mathcal{B}_{1,1}^s}.$$

Em particular,

$$\mathcal{L}_{\ell^j}(\phi) = \left(\sum_{k<j} \frac{1}{\ell^{ks}} \sum_{P\in\mathcal{D}_\ell^k} k_P^\phi\right) a_{[0,1]} + \frac{1}{\ell^{sj}} \sum_{k\geqslant j} \sum_{P\in\mathcal{D}_\ell^k} k_P^\phi a_{f_{\ell^j}(P)}$$

e

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_\ell^j(\phi)|_{\mathcal{B}_{1,1}^s} = |\mathcal{L}_{\ell^j}(\phi)|_{\mathcal{B}_{1,1}^s} &\leqslant \sum_{k<j} \frac{1}{\ell^{ks}} \sum_{P\in\mathcal{D}_\ell^k} |k_P^\phi| + \frac{1}{\ell^{sj}} \sum_{k\geqslant j} \sum_{P\in\mathcal{D}_\ell^k} |k_P^\phi| \\ &\leqslant \left(\sum_{k<j} \frac{1}{\ell^{ks}} \sum_{P\in\mathcal{D}_\ell^k} |k_P|_{(L^1)^*}\right) |\phi|_1 + \frac{C}{\ell^{sj}} |\phi|_{\mathcal{B}_{1,1}^s}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência dos lemas 1.0.2 e 1.0.8. Podemos escolher j grande o suficiente para que

$$\lambda = \frac{C}{\ell^{sj}} < 1$$

e, assim, obtemos a desigualdade de Lasota-Yorke.

5.2 Operadores de transferência

Nesta seção, vamos enunciar alguns resultados de [ARBIETO; SMANIA, 2020]. Porém, devido à falta de tempo no cronograma desta dissertação e ao alto grau de complexidade das demonstrações, elas não serão incluídas. Ainda assim, precisaremos introduzir vários conceitos novos, de caráter altamente técnico, para que possamos elencar as hipóteses desses resultados, que serão apresentados ao final da seção. Vamos usar, majoritariamente, a mesma notação usada nesse artigo. Em particular, é usada uma nomenclatura muito específica para algumas constantes. Para se ajustar a essa notação, vamos renomear as constantes que aparecem em (4.5-21) e no Corolário 4.4.2 da seguinte maneira

$$\frac{2C_1}{1-\lambda_2^{\beta-s}} = C_{GBS} \text{ e } C_{11}C_{12}C_{13} = C_{GC}.$$

Continuamos considerando $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$ e $(I,\mathscr{B},m)$ um espaço de medida munido da grade boa $\mathcal{P}$, mas também vamos supor $m(I)=1$ e

(S_1) *Temos $(J,\mathcal{H},\mu)$ um espaço de medida com uma grade boa $\mathcal{H}$. Além disso, $\varepsilon > 0$, $\gamma \in [0,1]$ e $s,\beta,\delta \in (0,\infty)$ são tais que*

$$0 < s+\varepsilon \leqslant \frac{1}{p},\ s < \beta < \frac{1}{p}$$

e $0 < \delta < \text{mín}\{s,\varepsilon\}$.

A seguir, traremos três definições fundamentais para a próxima suposição.

Definição 5.2.1 (Domínios regulares)**.** *Seja $\Omega \subset J$. Denote*

$$k_0(\Omega) = k_0(\Omega,\mathcal{H}) = \text{mín}\{\, k \geqslant 0 : \exists P \in \mathcal{H}^k \text{ tal que } P \subset \Omega\,\},$$

sempre que o conjunto da direita for não vazio. Diremos que Ω é um (α,C,λ)-domínio regular se for possível encontrar famílias $\mathcal{F}^k(\Omega) \subset \mathcal{H}^k$, $k \geqslant k_0(\Omega)$, tais que

I. Temos $\Omega = \displaystyle\bigcup_{k \geqslant k_0(\Omega)} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}^k(\Omega)} Q$;

II. Se $P,Q \in \displaystyle\bigcup_{k\geqslant k_0(\Omega)} \mathcal{F}^k(\Omega)$ *e* $P \neq Q$, *então* $P \cap Q = \varnothing$;

III. Temos

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}^k(\Omega)} |Q|^\alpha \leqslant C\lambda^{k-k_0(\Omega)}|\Omega|^\alpha,$$

onde, claro, $|M|$ denota a medida de um conjunto M quando esta medida está clara no contexto.

Definição 5.2.2 (Ramos)**.** *Sejam $\hat{I} \subset I$ e $\hat{J} \subset J$ conjuntos mensuráveis. Um*

$$(s, p, a, \tilde{\varepsilon}, C_{DGD1}, \lambda_{DGD2}, C_{DC1}, \lambda_{DC2}, \mathcal{G}) - \textit{ramo}$$

é uma função mensurável

$$h\colon \hat{J} \to \hat{I}$$

tal que

$$h^{-1}\colon \hat{I} \to \hat{J}$$

também é mensurável, $\mathcal{G}$ é uma grade em $(\hat{I}, m)$ e

I. Para todo conjunto mensurável $Q \subset J$, temos $m(Q) = 0 \iff \mu(h^{-1}(Q)) = 0$;

II. Para todo $Q \subset I$ tal que $Q \in \mathcal{G}$, temos que $h^{-1}(Q)$ é um $(1 - sp, C_{DGD1}, \lambda_{DGD2})$-domínio regular em $(J, \mathcal{H})$;

III. Temos

$$|k_0(Q, \mathcal{G}) - k_0(h^{-1}(Q), \mathcal{H})| \geqslant a$$

e

$$\left(\frac{|Q|}{|h^{-1}(Q)|}\right)^{\tilde{\varepsilon}/|\tilde{\varepsilon}|} \leqslant C_{DC1}\lambda_{DC2}^{|k_0(Q,\mathcal{G})-k_0(h^{-1}(Q),\mathcal{H})|};$$

IV. O conjunto $\hat{I}$ é uma união enumerável de elementos de $\mathcal{P}$, a menos de medida nula;

V. Para todo $W \in \mathcal{G}$ tal que $W \subset \hat{I}$, temos que $h^{-1}(W)$ é uma união enumerável de elementos de $\mathcal{H}$, a menos de medida nula.

Definição 5.2.3 (Potenciais)**.** *Seja*

$$h\colon \hat{J} \to \hat{I}$$

um ramo como na definição 5.2.2. Um $(C_{DRP}, \beta, \tilde{\varepsilon})$-potencial regular, com $s < \beta \leqslant 1/p$ associado a h é uma função $g\colon \hat{J} \to \mathbb{C}$ tal que

$$|g \cdot 1_W|_{\mathcal{B}^{\beta}_{p,q}(W, \mathcal{H}_W, \mathcal{A}^{sz}_{s,p})} \leqslant C_{DRP} \left(\frac{|Q|}{|h^{-1}(Q)|}\right)^{1/p-s+\tilde{\varepsilon}} |W|^{1/p-\beta}$$

para todo $W \in \mathcal{H}$ e $Q \in \mathcal{G}$ com $W \subset \hat{J}$, $Q \subset \hat{I}$ e $h(W) \subset Q$.

Diremos que g é um potencial regular $\mathcal{B}^s_{p,q}$-positivo se, para todo $W \subset J$ tal que $W \in \mathcal{H}$, existe uma $\mathcal{B}^{\beta}_{p,q}$-representação de $g \cdot 1_W$

$$g \cdot 1_W = \sum_k \sum_{\substack{P \in \mathcal{H}^k \\ P \subset W}} c_P a_P$$

tal que $c_P \geqslant 0$ para todo $P \in \mathcal{H}$ e, ainda,

$$\left(\sum_k \left(\sum_{\substack{P \in \mathcal{H}^k \\ P \subset W}} |c_P|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C_{DRP} \left(\frac{|Q|}{|h^{-1}(Q)|}\right)^{1/p-s+\tilde{\varepsilon}} |W|^{1/p-\beta}$$

para todo $W \in \mathcal{H}$ e $Q \in \mathcal{G}$ com $W \subset J$, $Q \subset I$ e $h(W) \subset Q$.

Com isso, podemos escrever a suposição

(S_2) *Vamos assumir*

- $\{I_r\}_{r\in\Lambda}$ *e* $\{J_r\}_{r\in\Lambda}$ *são famílias de subconjuntos mensuráveis de* I *e* J*, respectivamente, com* $\Lambda \subset \mathbb{N}$*;*
- *As funções*
$$h_r\colon J_r \to I_r$$
são $(s, p, a_r, \varepsilon_r, C^r_{DGD1}, \lambda^r_{DGD2}, C^r_{DC1}, \lambda^r_{DC2}, \mathcal{G}_r)$*-ramos, com* $|\varepsilon_r| = \varepsilon$ *para todo* r*;*
- *Temos que*
$$\{\, Q \subset I_r,\ Q \in \mathcal{G}_r : r \in \Lambda \,\} \cup \{\, Q \in \mathcal{P} : Q \cap I_r = \varnothing \text{ para todo } r \in \Lambda \,\}$$
gera a σ*-álgebra* $\mathscr{B}$*;*
- *Temos que*
$$g_r\colon J_r \to \mathbb{C}$$
são $(C^r_{DRP}, , \beta, \varepsilon_r)$*-potenciais regulares;*
- *Seja*
$$\lambda^r_{DRS2} = \text{máx}\{(\lambda^r_{DC2})^{\varepsilon}, (\lambda^r_{DGD2})^{1/p}\} < 1.$$
Então $\lambda_{DRS2} = \sup_r \lambda^r_{DRS2} < 1$

A letra "r" na notação das constantes C^r_{DGD1}*,* C^r_{DC1}*,* λ^r_{DGD2}*,* λ^r_{DC2}*,* C^r_{DRP} *e* λ^r_{DRS2} *é apenas um índice, indicando que elas podem depender de* r*.*

Vamos considerar um operador de transferência Φ, definido de uma maneira um pouco diferente daquela apresentada na Definição 5.1.1, mas mais próxima do nosso contexto atual. Para cada $r \in \Lambda$, definia $g_r(x) = 0$ se $x \in J$ mas $x \notin J_r$. Do mesmo modo, coloque $h_r(x) = y_0 \in I$ para todo $r \in \Lambda$ e todo $x \in J$ tal que $x \notin J_r$. Para cada $f \in L^{t_0}(m)$, onde $t_0 = \dfrac{p}{1 - sp + \delta p}$, seja

$$\Phi(f)(x) = \sum_{r\in\Lambda} g_r(x)\hat{f}(h_r(x)),$$

onde $\hat{f}$ é o elemento da classe de equivalência de f tal que $\hat{f}(y_0) = 0$. Defina, também,

$$\Phi_r(f)(x) = g_r(x)f(h_r(x)).$$

Vamos supor

(S_3) *Existe* $K \geqslant 0$ *tal que, para todo* $f \in L^{t_0}(m)$*,*

$$|\Phi f|_{L^1(\mu)} \leqslant \sum_{r\in\Lambda} |\Phi_r f|_{L^1(\mu)} \leqslant K|f|_{L^{t_0}(m)}.$$

Note que S_3 implica que $\Phi\colon L^{t_0}(m) \to L^1(\mu)$ é uma transformação limitada. Como, por S_1, temos $p < t_0$, então, pela Proposição 2.2.2, temos que $\Phi\colon \mathcal{B}^s_{p,q} \to L^1(\mu)$ é uma transformação limitada.

Para formular S_4, precisaremos das definições de fatiamento regular e fatiamento essencial. Considere

$$\mathcal{I} = (s, p, q, \varepsilon, \gamma, \{(I_r, J_r, a_r, \lambda^r_{DGD2}, \lambda^r_{DC2}, C^r_{DC1}, C^r_{DRP}, C^r_{DGD1}, \mathcal{G}_r)\}_{r\in\Lambda}).$$

Diremos que $\mathcal{I}$ é uma *família ponderada de conjuntos*. Seja

$$N = \sup_{P\in\mathcal{H}} \#\{\, r \in \Lambda : P \subset J_r \,\}$$

e defina

$$\Theta_r = (C^r_{DC1})^{\varepsilon} C^r_{DRP} (C^r_{DGD1})^{1/p} (\lambda^r_{DRS2})^{a_r(1-\gamma)}.$$

Definição 5.2.4 (Fatiamento regular)**.** *Diremos que o par*

$$(\mathcal{I}, \sum_k \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} d_Q a_Q)$$

possui um C_{DRS1}-fatiamento regular se $C_{DRS1} \geqslant 0$ e

I. Temos que

$$f = \sum_k \sum_{Q\in\mathcal{P}^k} d_Q a_Q$$

é uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(I, m, \mathcal{P})$-representação de uma função $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}(I, m, \mathcal{P})$;

II. Para todo $r \in \Lambda$, existe uma $\mathcal{B}^s_{p,q}(I_r, m, \mathcal{G}_r)$-representação da função $f \cdot 1_{I_r}$

$$f \cdot 1_{I_r} = \sum_k \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}_r \\ Q\subset I_r}} c^r_Q a_Q,$$

satisfazendo

$$\left(\sum_j \left(\sum_r \Theta_r \left(\sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^j_r \\ Q\subset I_r}} |c^r_Q|^p\right)^{1/p}\right)^q\right)^{1/q} \leqslant C_{DRS1} \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |d_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

ou

$$N^{1/p'} \left(\sum_j \left(\sum_r \Theta^p_r \sum_{\substack{Q\in\mathcal{G}^j_r \\ Q\subset I_r}} |c_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C_{DRS1} \left(\sum_k \left(\sum_{Q\in\mathcal{P}^k} |d_Q|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q},$$

com a convenção de que $N^{1/1'} = 1$;

III. Se $d_Q \geqslant 0$ para todo $Q \in \mathcal{P}$, podemos escolher $c^r_Q \geqslant 0$ para todo $Q \in \mathcal{G}_r$.

Definição 5.2.5 (Fatiamento essencial)**.** *Seja S um subespaço de $\mathcal{B}^s_{p,q}(I, m, \mathcal{P})$ e seja $\mathcal{I}$ uma família ponderada de conjuntos. Diremos que $(S, \mathcal{I})$ possui um (C_{DRSFR}, C_{DRSES})-fatiamento essencial, onde $C_{DRSFR}, C_{DRSES} \geqslant 0$, se existir um subconjunto finito $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ tal que, para toda $\mathcal{B}^s_{p,q}$-representação*

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}} d_Q a_Q$$

de uma função $f \in S$, o par

$$(\mathcal{I}, \sum_{Q \in \mathcal{P}'} d_Q a_Q)$$

possui um C_{DRSFR}-fatiamento regular e o par

$$(\mathcal{I}, \sum_{Q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'} d_Q a_Q)$$

possui um C_{DRSES}-fatiamento regular.

Munidos dessas novas definições, temos

(S_4) *Temos $(J, \mu, \mathcal{H}) = (I, m, \mathcal{P})$ e $(\mathcal{B}^s_{p,q}(I, m, \mathcal{P}), \mathcal{I})$ possui um (C_{DRSFR}, C_{DRSES})-fatiamento essencial.*

Para as próximas duas suposições, não serão necessárias definições adicionais.

(S_5) *Temos*

$$6 C_{GBS} C_D C_{DRSES} C_{GC} < 1,$$

onde $C_D = \dfrac{2}{1 - \lambda^{\gamma}_{DRS2}}$. Além disso, $g_r \geqslant 0$ m-q.t.p. para todo $r \in \Lambda$ e

$$\int \Phi(f) \, \mathrm{d}m = \int f \, \mathrm{d}m$$

para toda $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}(I, m, \mathcal{P})$.

(S_6) *Os potenciais g_r são $\mathcal{B}^s_{p,q}$-positivos.*

Dada uma função mensurável $T \colon I \to I$ e uma medida finita ν em I, podemos considerar a medida *pushforward* $T^*\nu$ em I definida como $T^*\nu(A) = \nu(T^{-1}(A))$ para qualquer $A \subset I$ mensurável. Suponha que T^* preserva medidas absolutamente contínuas com respeito a m, isto é,

$$\nu \ll m \implies T^*\nu \ll m.$$

Então dizemos que o operador de transferência Φ está *associado a T* se $\nu = \varphi \, \mathrm{d}m$, com $\varphi \in L^1(m)$, implica em $T^*\nu = \Phi(\varphi) \, \mathrm{d}m$, isto é,

$$\nu(A) = \int_A \varphi \, \mathrm{d}m \text{ para alguma } \varphi \in L^1(m) \implies T^*\nu(A) = \int_A \Phi(\varphi) \, \mathrm{d}m.$$

Vamos supor que o operador de transferência Φ está associado a uma transformação expansora por partes T. Temos

(S_7) *T é transitivo, ou seja, para todos $P, Q \in \mathcal{P}$, existe $n \geqslant 0$ tal que $m(P \cap T^{-n}(Q)) > 0$.*

(S_8) *T é topologicamente mixing, isto é, para todos $P, Q \in \mathcal{P}$, existe $n_0 \geqslant 0$ tal que $m(P \cap T^{-n}(Q)) > 0$ para todo $n \geqslant n_0$.*

Agora, finalmente, podemos enunciar os resultados.

Teorema 5.2.6 (Desigualdade de Lasota-Yorke)**.** *Suponha S_1-S_4,*

$$C_{GBS}C_DC_{DRSES}C_{GC} < 1$$

e

$$|\Phi(f)|_1 \leqslant |f|_1$$

para qualquer $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$. Então Φ satisfaz a desigualdade de Lasota-Yorke

$$|\Phi^n(f)|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \leqslant C|f|_1 + (C_{GBS}C_DC_{DRSES}C_{GC})^n|f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}}$$

para algum $C \geqslant 0$ e toda $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$.

Denote por $M(\mathcal{B}^s_{p,q}) \subset \mathcal{B}^s_{p,q}$ o conjunto das funções g tais que a multiplicação ponto a ponto

$$f \mapsto fg$$

é um operador limitado em $\mathcal{B}^s_{p,q}$, isto é, se $f \in \mathcal{B}^s_{p,q}$, então $fg \in \mathcal{B}^s_{p,q}$ e

$$\sup\{\, |fg|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} : |f|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} \leqslant 1 \,\} < \infty.$$

Corolário 5.2.7 (Teorema do Limite Central e Princípio da Invariância Quase Certo)**.** *Suponha que valem S_1-S_5 para alguns $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$ e $0 < s < 1/p$ e que 1 é um autovalor simples do operador de transferência $\Phi\colon \mathcal{B}^s_{p,q} \to \mathcal{B}^s_{p,q}$. Então, existe uma única probabilidade absolutamente contínua $\varphi_0\,\mathrm{d}m$ tal que $\varphi_0 \in \mathcal{B}^s_{p,q}$ e, para cada função $v = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in \mathcal{B}^{1/p}_{p,\infty}$ e $v_2 \in M(\mathcal{B}^s_{p,q})$ são funções com valores reais tais que*

$$\int v\varphi_0\,\mathrm{d}m = 0,$$

temos que

A. O limite

$$\sigma^2(v) = \lim_{n\to\infty} \int \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} v \circ T^i}{\sqrt{n}} \right)^2 \varphi_0\,\mathrm{d}m$$

converge;

B. *Se $\sigma(v) > 0$, a sequência*

$$v,\ v \circ T,\ v \circ T^2, \ldots$$

satisfaz o Teorema do Limite Central com média 0 e variância σ e o Princípio da Invariância Quase Certo com todo expoente de erro menor que 1/4.

Teorema 5.2.8 (Estrutura de medidas invariantes)**.** *Suponha S_1-S_6. Para toda $\varphi \in L^1(m)$ tal que $\varphi \geqslant 0$,*

$$\int \varphi \, \mathrm{d}m = 1$$

e $\Phi(\varphi) = \varphi$ é $\mathcal{B}^s_{p,q}(I, m, \mathcal{P})$-positiva. Em particular,

A. *O conjunto*

$$\{\, x \in I : \varphi(x) > 0 \,\}$$

é uma união enumerável de elementos de $\mathcal{P}$ a menos de um conjunto de medida nula;

B. *Para m-quase todo $y \in \{\, x \in I : \varphi(x) > 0 \,\}$, existe $P \in \mathcal{P}$ e $\hat{\varepsilon} > 0$ tais que $y \in P$, $\varphi(y) \geqslant \hat{\varepsilon}$ e $\varphi(x) \geqslant \hat{\varepsilon}$ para m-quase todo $x \in P$.*

Corolário 5.2.9 (Ergodicidade)**.** *Suponha S_1-S_7. Então existe uma única probabilidade ν invariante por T tal que $\nu = \varphi_0 \, \mathrm{d}m$. Além disso,*

A. *A probabilidade ν é ergódica;*

B. *A bacia de atração de ν é I a menos de um conjunto de medida nula;*

C. *φ_0 é a única função em $L^1(m)$ tal que*

$$\int \varphi_0 \, \mathrm{d}m = 1 \ \text{ e } \ \Phi(\varphi_0) = \varphi_0;$$

D. *1 é um autovalor simples de Φ.*

Terminamos essa seção enunciando o

Corolário 5.2.10 (Decaimento de correlações e propriedade mixing)**.** *Suponha S_1-S_8. Então existe $C \geqslant 0$ e $\lambda \in (0,1)$ tais que, se $u \in \mathcal{B}^s_{p,q}$ e $v \in L^{p'}$, temos*

$$\left| \int v \circ T^k u \, \mathrm{d}m - \int v \varphi_0 \, \mathrm{d}m \int u \, \mathrm{d}m \right| \leqslant C \lambda^k |u|_{\mathcal{B}^s_{p,q}} |v|_{p'}.$$

Referências

ARBIETO, A.; SMANIA, D. *Transfer operators and atomic decomposition*. 2020. Citado 3 vezes nas páginas 11, 77 e 81.

BESOV, O. V. On some families of functional spaces. Imbedding and extension theorems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 126, p. 1163–1165, 1959. ISSN 0002-3264. Citado na página 9.

COIFMAN, R. A real variable characterization of H^p. *Studia Mathematica*, v. 51, n. 3, p. 269–274, 1974. Disponível em: http://eudml.org/doc/217919. Citado na página 10.

COIFMAN, R. R.; WEISS, G. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Vol. 242. v+160 p. (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242). Étude de certaines intégrales singulières. Citado na página 9.

FOLLAND, G. B. *Real analysis*. Second. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. xvi+386 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-31716-0. Citado na página 12.

FRAZIER, M.; JAWERTH, B. Decomposition of Besov spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 34, n. 4, p. 777–799, 1985. ISSN 0022-2518,1943-5258. Disponível em: https://doi.org/10.1512/iumj.1985.34.34041. Citado na página 10.

GIRARDI, M.; SWELDENS, W. A new class of unbalanced Haar wavelets that form an unconditional basis for L_p on general measure spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, v. 3, n. 4, p. 457–474, 1997. ISSN 1069-5869,1531-5851. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF02649107. Citado 6 vezes nas páginas 11, 44, 47, 49, 50 e 51.

HAAR, A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.*, v. 69, n. 3, p. 331–371, 1910. ISSN 0025-5831,1432-1807. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF01456326. Citado na página 11.

HAN, Y.; LU, S.; YANG, D. Inhomogeneous Besov and Triebel-Lizorkin spaces on spaces of homogeneous type. *Approx. Theory Appl. (N.S.)*, v. 15, n. 3, p. 37–65, 1999. ISSN 1000-9221. Citado 3 vezes nas páginas 9, 10 e 11.

HAN, Y. S.; SAWYER, E. T. Littlewood-Paley theory on spaces of homogeneous type and the classical function spaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, v. 110, n. 530, p. vi+126, 1994. ISSN 0065-9266,1947-6221. Disponível em: https://doi.org/10.1090/memo/0530. Citado na página 9.

LATTER, R. A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms. *Studia Mathematica*, v. 62, n. 1, p. 93–101, 1978. Disponível em: http://eudml.org/doc/218201. Citado na página 10.

SMANIA, D. Classic and exotic besov spaces induced by good grids. *The Journal of Geometric Analysis*, Springer Science and Business Media LLC, v. 31, n. 3, p. 2481–2524, fev. 2020. ISSN 1559-002X. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/s12220-020-00361-x. Citado na página 11.

______. *Transfer operators, atomic decomposition and the Bestiary*. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 77.

______. Besov-ish spaces through atomic decomposition. *Anal. PDE*, v. 15, n. 1, p. 123–174, 2022. ISSN 2157-5045,1948-206X. Disponível em: https://doi.org/10.2140/apde.2022.15.123. Citado 12 vezes nas páginas 9, 10, 11, 29, 31, 44, 51, 55, 58, 67, 73 e 77.

SOUZA, G. S. D. The atomic decomposition of Besov-Bergman-Lipschitz spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 94, n. 4, p. 682–686, 1985. ISSN 0002-9939,1088-6826. Disponível em: https://doi.org/10.2307/2044886. Citado na página 10.

TRIEBEL, H. *Theory of function spaces*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983. v. 78. 284 p. (Monographs in Mathematics, v. 78). ISBN 3-7643-1381-1. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0416-1. Citado na página 9.

______. *Fractals and spectra*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. v. 91. viii+271 p. (Monographs in Mathematics, v. 91). Related to Fourier analysis and function spaces. ISBN 3-7643-5776-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0034-1. Citado na página 15.

WALNUT, D. F. *An introduction to wavelet analysis*. [S.l.]: Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. xx+449 p. (Applied and Numerical Harmonic Analysis). ISBN 0-8176-3962-4. Citado na página 47.