

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DOGLASSE JOÃO MÁRIO

**O estudo do efeito de Goos-Hänchen na
propagação de ondas sísmicas**

Campinas

2024

Doglasse João Mário

O estudo do efeito de Goos-Hänchen na propagação de ondas sísmicas

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Stefano De Leo

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Doglasse João Mário e orientada pelo Prof. Dr. Stefano De Leo.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M339e Mário, Doglasse João, 1992-
O estudo do efeito de Goos-Hänchen na propagação de ondas sísmicas /
Doglasse João Mário. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Stefano De Leo.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas
(UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de Zoeppritz. 2. Efeito de Goos-Hänchen. 3. Ondas sísmicas.
I. De Leo, Stefano, 1966-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: The study of the Goos-Hänchen effect in the propagation of seismic waves

Palavras-chave em inglês:

Zoeppritz equations

Goos-Hanchen effect

Seismic waves

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Jayme Morandi Vaz

Gisele Cristina Ducati

Silvânia Alves de Carvalho

Data de defesa: 31-07-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0004-7949-9883>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/6485465039044194>

**Dissertação de Mestrado defendida em 31 de julho de 2024 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). JAYME MORANDI VAZ

Prof(a). Dr(a). GISELE CRISTINA DUCATI

Prof(a). Dr(a). SILVÂNIA ALVES DE CARVALHO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Aos meus filhos, Lameck e Raquel, minha inspiração para continuar estudando.
Aos meus pais, João Mário e Maria Tacacheque, companheiros de vida, toda minha
admiração sempre.*

Tudo o que eu sou e vou chegar a ser, é por eles.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua misericórdia e por me mostrar que, apesar de tudo, Ele nunca abandona seus filhos.

Ao meu orientador, Professor Stefano De Leo, pela sua dedicação e por compartilhar seu valioso conhecimento, me ajudando a me tornar um excelente profissional. Aos demais professores do Departamento de Matemática Aplicada do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, por fazerem parte desse período de formação, através das diversas disciplinas cursadas ao longo do percurso.

Aos meus pais, João Mário e Maria Tacacheque, pelo seu amor, esforço e apoio incondicional, que sempre nos incentivaram a alcançar nossos sonhos. Aos meus irmãos Antoninho, Carlota e Israel por sempre acreditarem em mim e me consolarem nos meus piores dias.

Aos meus colegas Gabriel, Fausto, Luz, Robson, José, Andres e Castro pela orientação e ajuda no trabalho.

A Daruez Sale Afonso e Amizito Luis Rajabo, sem cujas indicações eu não teria conseguido chegar a estudar em uma das melhores universidades do mundo, como é a UNICAMP.

À UNICAMP, ao IMECC, aos professores do programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e à secretaria de Pós-Graduação.

Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Você é uma águia, filho, você nasceu para voar alto, suas asas estão prontas, vá com fé em direção ao seu destino.”

João Mário

Resumo

A presente proposta versa sobre o estudo dos efeitos de Goos-Hänchen na propagação de ondas sísmicas em interfaces do tipo líquido-sólido-líquido. Partimos dos conceitos basilares das ondas do tipo P e S que se propagam em diferentes meios e, a partir das equações de continuidade, determinamos as formas matriciais das equações de Zoeppritz em interfaces do tipo líquido-sólido e sólido-líquido. Em seguida, recorremos a algumas manipulações algébricas para determinar as respectivas expressões que computam os coeficientes de reflexão e transmissão. Através da conservação de energia, analisamos essas equações tanto de forma analítica quanto numericamente. Após isso, apresentamos um modelo simplificado no qual propomos analisar o deslocamento de Goos-Hänchen para as ondas primárias e secundárias refletidas nas interfaces líquido-sólido-líquido, incluindo a análise das múltiplas reflexões, em particular no caso da interferência entre a onda P e S que dão origem a uma reflexão. Não obstante, no caso das reflexões totais, propomos o estudo do máximo deslocamento, onde, após o ângulo crítico, objetiva-se apresentar a expressão analítica para este fenômeno.

Palavras-chave: Equações de Zoeppritz; Efeito Goos-Hänchen; Ondas sísmicas.

Abstract

This proposal deals with the study of Goos-Hänchen effects on the propagation of seismic waves at liquid-solid-liquid interfaces. We start from the basic concepts of P and S waves that propagate in different media and, based on the continuity equations, we determine the matrix forms of the Zoeppritz equations at liquid-solid and solid-liquid interfaces. We then resort to some algebraic manipulations to determine the respective expressions that compute the reflection and transmission coefficients. Through conservation of energy, we analyze these equations both analytically and numerically. After this, we present a simplified model in which we propose to analyze the Goos-Hänchen displacement for the primary and secondary waves reflected at the liquid-solid-liquid interfaces, including the analysis of multiple reflections, in particular in the case of interference between the P wave and S that give rise to reflection. However, in the case of total reflections, we propose the study of the maximum displacement, where, after the critical angle, the objective is to present the analytical expression for this phenomenon.

Keywords: Zoeppritz equations; Goos-Hänchen effect; Seismic waves.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Perfil de refletividade e de velocidade.	19
Figura 2 – Ruído em sinais	20
Figura 3 – Movimento das partículas provocado pela passagem das ondas P.	21
Figura 4 – Movimento das partículas provocado pela passagem das ondas S.	22
Figura 5 – Frente de onda e um raio	24
Figura 6 – Representação esquemática para diversos tipos de propagação em função do percurso dos raios.	25
Figura 7 – Iluminação da subsuperfície por reflexões primárias e por reflexões múltiplas.	26
Figura 8 – O Princípio de Huygens, raios perpendiculares às frentes de onda podem ser retilíneos (a) ou curvos (b). (a) Frentes de onda em um meio homogêneo. (b) Frentes de onda em um meio heterogêneo. Figura retirada de [14].	27
Figura 9 – O Princípio de Fermat, vários caminhos possíveis conectam o ponto A ao ponto B. Por definição, o caminho do raio é o caminho perpendicular às frentes de onda. Neste caso, a linha reta entre A e B é o caminho ótimo do raio. Figura retirada de [14].	28
Figura 10 – Lei de Snell e propagação das ondas P e S quando a fonte emite uma onda P na interface sólido-sólido	29
Figura 11 – Lei de Snell para o caso em que a velocidade do segundo meio é menor que a do primeiro meio ($p_2 < p_1$)	30
Figura 12 – Combinação linear das ondas refletidas em um meio sólido-sólido.	35
Figura 13 – Combinação linear das ondas transmitidas em um meio sólido-sólido	36
Figura 14 – Conservação de energia no caso de transição líquido-sólido	50
Figura 15 – Conservação de energia no caso de transição sólido-líquido incidente P	51
Figura 16 – Conservação de energia no caso de transição sólido-líquido incidente S	54
Figura 17 – Reflexões múltiplas em camadas do tipo líquido-sólido-líquido.	57
Figura 18 – Múltiplas reflexões para diferentes ângulos de ψ_1 na interface do tipo água/granito/água (a), (b) são reflexões para $\psi_1 < \psi_{c1}$, (c), (d) para $\psi_{c1} < \psi_1 < \psi_{c2}$, e (e), (f) para $\psi_1 > \psi_{c2}$	58
Figura 19 – Múltiplas reflexões para diferentes ângulos de ψ_1 na interface do tipo água/granito/óleo. (a), (b) são reflexões para $\psi_1 < \psi_{c1}$, (c), (d) para $\psi_{c1} < \psi_1 < \psi_{c2}$, e (e), (f) para $\psi_1 > \psi_{c2}$	59
Figura 20 – Reflexão R_1 representada nas três regiões de incidência. Nos casos de água/granito/água e água/granito/óleo observa-se o mesmo comportamento.	60

Figura 21 – Reflexão R_2 nas diferentes regiões de incidência. Em (a) temos o fluxo de energia refletido na primeira região e em (b) na segunda região de incidência.	61
Figura 22 – Reflexão R_3 em (a), onde vemos que o fluxo de energia é maior em comparação com R_4 em (b). As duas representações referem-se à primeira região.	62
Figura 23 – Propagação da onda no regime de reflexão primária (a) e total (b). Em (b), d_{GH} representa o deslocamento de Goos-Hänchen, descrito por Goos e Hänchen em 1947, conforme explicado em [10].	65
Figura 24 – Rotação dos eixos devido à mudança de direção de propagação	68
Figura 25 – Representação gráfica do deslocamento lateral de Goos-Hänchen da função R_1	72
Figura 26 – Representação gráfica do deslocamento lateral de Goos-Hänchen da função analítica encontrada através da derivada da fase de R_1	76
Figura 27 – No caso água/granito/água, para reflexão total interna, ou seja, ângulos de incidência maiores que ψ_{c2} , após o segundo ângulo crítico, observamos a presença de um ângulo de incidência que maximiza o deslocamento lateral.	77
Figura 28 – Representação do modelo sob a perspectiva de barreira de potencial, que origina o tunelamento quântico.	78

Lista de tabelas

Tabela 1 – Velocidades das ondas P e S e as respectivas densidades de diversos materiais	23
Tabela 2 – Ângulos críticos em interface líquido-sólido-líquido	55
Tabela 3 – Tabela dos pontos da visualização geométrica do problema	56
Tabela 4 – Tabela das reflexões nos ângulos críticos do modelo apresentado	63

Sumário

Introdução	15
1 Embasamento teórico	17
1.1 Métodos geofísicos	17
1.1.1 Métodos potenciais	17
1.1.2 Métodos artificiais	17
1.2 Refração e reflexão de ondas	18
1.3 Sísmica de reflexão	18
1.4 Ondas sísmicas	20
1.4.1 Ondas de volume	21
1.4.2 Ondas de superfície	23
1.5 Raios	24
1.5.1 Atenuação da energia ao longo dos raios	24
1.5.2 Tipos de ondas em relação ao percurso	25
1.6 Partição de energia em uma interface	26
1.6.1 Princípio de Huygens	26
1.6.2 Princípio de Fermat	28
1.7 Lei de Snell	29
1.7.1 Lei de Snell na interface líquido-líquido	29
1.7.2 Lei de Snell na interface sólido-sólido	32
2 Equações de Zoeppritz	34
2.1 Forma matricial das equações de Zoeppritz	34
2.1.1 Interface Líquido 1-Sólido 2	37
2.1.2 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda P	39
2.1.3 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda S	41
2.1.4 Interface sólido 2 - líquido 1 para incidência de uma onda P	43
2.1.5 Interface sólido 2 - líquido 1 para incidência de uma onda S	44
3 Conservação de energia	46
3.1 Regiões de incidência	46
3.2 Interface líquido 1 - sólido 2	46
3.2.1 Primeira região de incidência	47
3.2.2 Segunda região de incidência	48
3.2.3 Terceira região de incidência	49
3.3 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda P	49
3.3.1 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda S	51

3.3.2	Primeira região de incidência	52
3.3.3	Segunda região de incidência	53
4	Múltiplas reflexões e interferências	55
4.1	Ângulos críticos na interface líquido-sólido-líquido	55
4.2	A Geometria do problema	56
4.2.1	Modelo Água-Granito-Água	58
4.2.2	Modelo Água-Granito-Óleo	59
4.2.3	Comportamento das reflexões	60
4.3	Estudo analítico	60
5	Efeito Goos-Hänchen	65
5.1	Introdução histórica	65
5.2	Integração Gaussiana	66
5.2.1	Método da fase estacionária	69
5.3	Deslocamentos laterais	71
5.3.1	Estimativa do máximo	71
5.4	Máximo pela derivada de R_1	73
5.4.1	Equação do máximo	76
5.4.2	Analogia com problemas de tunelamento	77
6	Considerações finais	80
 REFERÊNCIAS		82
 APÊNDICE A Forma matricial das equações de Zoeppritz		85
A.1	Interface Líquido 1 - Sólido 2	85
A.2	Interface Sólido 2 - Líquido 3 para Incidência P	88
A.3	Interface Sólido 2 - Líquido 3 Incidência S	91
 APÊNDICE B A conservação de energia		95
B.1	Interface Líquido 1 - Sólido 2	95
B.1.1	Primeira região de incidência	95
B.1.2	Segunda região de incidência	96
B.1.3	Terceira região de incidência	97
B.2	Interface Sólido 2 - Líquido 3 para Incidência P	97
B.3	Interface Sólido 2 - Líquido 3 para Incidência S	98
B.3.1	Primeira região de incidência	98
B.3.2	Segunda região de incidência	99

Introdução

Uma onda sísmica é uma onda mecânica de energia acústica que se propaga através da Terra ou de outro corpo planetário. Pode resultar de um terremoto (ou, geralmente, um tremor), erupção vulcânica, movimento de magma, um grande deslizamento de terra e uma grande explosão feita pelo homem que produz energia acústica de baixa frequência. A velocidade de propagação de uma onda sísmica depende da densidade e elasticidade do meio, assim como do tipo de onda. Na geofísica, a refração ou reflexão de ondas sísmicas é utilizada para pesquisas sobre a estrutura interna da Terra. Às vezes, os cientistas geram e medem vibrações para investigar estruturas rasas e subsuperficiais.

Dentre os muitos tipos de ondas sísmicas, é possível fazer uma distinção ampla entre ondas corporais, que se propagam através da Terra, e ondas superficiais, que se deslocam na superfície terrestre. As ondas superficiais decaem mais lentamente com a distância do que as ondas corporais, que se movem em três dimensões. O movimento das partículas nas ondas superficiais é maior do que nas ondas corporais, então as ondas superficiais tendem a causar mais danos.

As ondas corporais viajam pelo interior da Terra ao longo de trajetórias controladas pelas propriedades materiais em termos de densidade e módulo. A densidade e o módulo, por sua vez, variam de acordo com a temperatura, composição e fase do material. Esse efeito se assemelha à refração das ondas de luz. Dois tipos de movimentos de partículas resultam em dois tipos de ondas corporais denominadas ondas Primárias e Secundárias. Essa distinção foi reconhecida em 1830 pelo matemático francês Siméon Denis Poisson.

Atualmente, estudos da área de geofísica buscam compreender os perfis de velocidades de diferentes camadas geológicas, de tal modo que, no presente estudo, assumimos já conhecido esse modelo através de velocidades modelos conhecidas. Portanto com base nesse modelo buscamos estudar os fenômenos que ocorrem. Os principais trabalhos da área, nos quais este estudo se baseou, incluem o estudo de [23], que utilizou a técnica Schlieren para visualizar variações no índice de refração em meios líquido-sólido. Por outro lado, em [27] os autores consideraram o efeito Goos-Hänchen na interpretação de dados de reflexão em amplos ângulos para análises de NMO (Normal Moveout) e AVO (Amplitude Versus Offset). Finalmente, em um estudo recente [19], foram fornecidas fórmulas fechadas para a fase de Goos-Hänchen, das quais determinam os deslocamentos laterais.

Entretanto, nos estudos consultados, não encontramos pesquisas além daquelas realizadas por [23], [27] e [19] que tenham investigado as interferências em múltiplas reflexões e também que estudem os feitos de Goos-Hänchen no caso de três camadas do tipo líquido-

sólido-líquido. Dado o significado crucial do entendimento desses fenômenos, especialmente pela hipótese de que tal compreensão fornecerá informações sobre as camadas subsequentes, no contexto de investigar a presença de hidrocarbonetos nessas camadas, a escolha do tema deste estudo é assim justificada. Portanto, nosso objetivo consistirá em analisar e compreender as equações de Zoeppritz para descrever a reflexão de ondas sísmicas em interfaces líquido-sólido-líquido, avaliar os deslocamentos laterais e as amplitudes resultantes das reflexões, comparar os resultados obtidos com as equações de Zoeppritz com os resultados numéricos e descrever as múltiplas reflexões e suas respectivas interferências.

Para concretizar os objetivos deste estudo, organizamos cinco capítulos, sendo que o primeiro denominamos de “Embasamento Teórico”, onde apresentamos de forma sucinta os conceitos essenciais necessários para o desenvolvimento do estudo.

No segundo capítulo, intitulado “Forma Matricial das Equações de Zoeppritz”, partimos das equações das ondas sísmicas e aplicamos as condições de continuidade para derivar as matrizes de Zoeppritz. Estas matrizes representam as relações matemáticas que permitem determinar os coeficientes de reflexão e transmissão em interfaces do tipo líquido-sólido-líquido.

Posteriormente, no terceiro capítulo, validamos as fórmulas obtidas no Capítulo 3 por meio da conservação de energia, utilizando tanto métodos analíticos quanto numéricos.

No quarto capítulo, propomos um modelo de três camadas, consistindo em líquido-sólido-líquido e, investigamos múltiplas reflexões em interfaces de água-granito-água e água-granito-óleo.

Por fim, no quinto capítulo, exploramos o efeito Goos-Hänchen no contexto de interfaces líquido-sólido-líquido. Concluimos com a apresentação de nossas considerações finais e a bibliografia consultada.

1 Embasamento teórico

No primeiro capítulo, dedicamo-nos ao estudo dos conceitos fundamentais que sustentam este trabalho. Abordamos os métodos geofísicos, classificando-os e também destacamos o método sísmico que constitui a bússola usada para a realização deste trabalho, os Princípios de Huygens e Fermat e, a Lei de Snell, os quais servem como base nos capítulos subsequentes.

1.1 Métodos geofísicos

Há uma ampla variedade de métodos geofísicos empregados na obtenção de informações acerca das estruturas internas da Terra. Esses métodos podem ser categorizados em dois grupos distintos: aqueles que se valem dos campos naturais da Terra e aqueles que demandam a introdução controlada de energia como descrito por Kearey [17].

1.1.1 Métodos potenciais

Os métodos que se apoiam nos campos naturais, conhecidos como *Métodos Potenciais*, exploram os campos gravitacionais, magnéticos, elétricos e/ou eletromagnéticos da Terra. Esses métodos visam detectar variações locais nesses campos que podem estar associadas a estruturas geológicas de interesse.

1.1.2 Métodos artificiais

Por outro lado, dispositivos como o radar de penetração no solo, ou GPR (sigla em inglês para Ground Penetrating Radar), geram um pulso eletromagnético local que, ao se propagar pelo solo e ser refletido pelas variações do terreno, é então capturado novamente na superfície. Utilizando esses dados como base, é possível criar uma representação visual das camadas superficiais da subsuperfície.

Para a investigação de profundidades da ordem de centenas de metros a quilômetros, a Sísmica assume o papel de destaque como método geofísico líder. Nesse método, ondas sísmicas, sejam elas de pressão ou cisalhantes, são geradas e registradas. Ao analisar o intervalo de tempo entre a emissão do pulso sísmico e sua captura nos receptores, juntamente com a medição das amplitudes dessas ondas, é possível criar imagens das estruturas geológicas em profundidade com resolução na ordem de dezenas de metros.

Enquanto os métodos potenciais oferecem informações em escalas amplas e, são operacionalmente mais simples, os métodos artificiais fornecem informações mais

detalhadas e com uma resolução superior. No entanto, isso vem acompanhado de custos substanciais e desafios logísticos mais complexos.

Os diversos métodos disponíveis não devem ser considerados como concorrentes, mas sim como complementares. Atualmente, busca-se a integração de diferentes métodos geofísicos, como na combinação de dados de sísmica com dados provenientes de fontes eletromagnéticas controladas CSEM (do inglês Controlled Source Electro-Magnetic Data, como referenciado por Constable e Srnka [7] e também exemplificado nos trabalhos de Harris e MacGregor [12], ou Kwon e Snieder [18]).

1.2 Refração e reflexão de ondas

Sempre que uma onda encontra uma transição acentuada nas propriedades elásticas dos materiais, como uma superfície que separa dois meios com impedâncias acústicas diferentes, uma parte da energia é refletida e permanece no meio, preservando sua energia original. A outra parte da energia é refratada para dentro do segundo meio, com uma mudança abrupta na direção de propagação. Na Figura 6 configura-se a representação visual dos fenômenos que ocorrem com as ondas longitudinais e transversais em uma interface entre dois meios com diferentes propriedades elásticas.

1.3 Sísmica de reflexão

Na sismologia de reflexão, os sinais são originados por fontes que geralmente se encontram próximas à superfície e, em seguida, eles percorrem as camadas da Terra. O modo como essa energia se propaga é afetado pela variação de densidade e módulo de Bulk do meio, que, por sua vez, influenciam a velocidade de propagação das ondas sísmicas, como detalhado em [17]. Sempre que uma onda sísmica atinge uma fronteira entre áreas com diferentes densidades e/ou módulos de Bulk, uma fração da energia é transmitida através dessa fronteira, enquanto outra parte é refletida. Além disso, parte da energia se dissipa devido à atenuação, muitas vezes na forma de calor, uma vez que o meio não é perfeitamente elástico. Na superfície, os sinais que foram refletidos são registrados por conjuntos de receptores.

Os receptores, por sua vez, capturam os sinais que os alcançam ao longo do tempo, resultando no que é conhecido como um traço sísmico. Cada traço sísmico é, essencialmente, uma combinação da resposta do meio à ação do pulso emitido pela fonte sísmica utilizada.

Excluindo qualquer consideração relativa à alteração do pulso sísmico durante a sua propagação, o registro sísmico é representado como a convolução do pulso emitido com uma série temporal denominada função de refletividade ou resposta impulsiva da

Terra, conforme é explicado por Mousa e Al-Shuhail em [22]. A refletividade consiste em uma sequência de picos, cada um deles com uma amplitude que reflete as discrepâncias nas propriedades do meio acima e abaixo da interface. Esses picos estão situados no instante correspondente ao tempo de trânsito de ida e volta, que equivale ao tempo de reflexão desde a superfície até a interface.

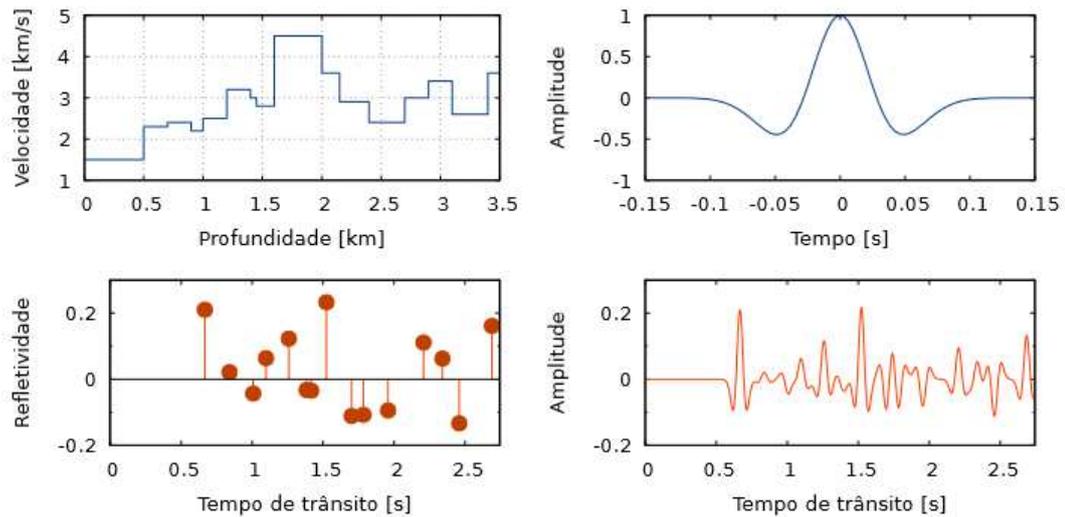


Figura 1 – Perfil de refletividade e de velocidade.

A Figura 1 representa um diagrama, na qual podemos observar um traço sísmico sintético gerado por meio do modelo de convolução. No canto superior esquerdo, apresenta-se um perfil da velocidade de propagação da onda em um meio onde as propriedades são exclusivamente dependentes da profundidade. No canto superior direito, visualizamos o pulso sintético gerado pela fonte sísmica. Na parte inferior esquerda, temos a representação da refletividade, relacionada ao tempo de ida e volta de uma reflexão com afastamento nulo, ou seja, quando a fonte e o receptor ocupam a mesma posição. Por fim, no canto inferior direito, exibe-se o traço sísmico sintético, produzido através da convolução do pulso com a refletividade.

Portanto, na Figura 1 exibe-se um traço sísmico sintético modelado desta forma, considerando diversas suposições. As seguintes hipóteses foram adotadas para gerar esta figura, a primeira é do meio, o qual é tratado como unidimensional, com propriedades variando apenas com a profundidade (meio 1D). A densidade é considerada constante e o registro do sinal sísmico é realizado no mesmo local onde o sinal foi emitido, resultando em um traço de afastamento nulo. Além disso, a forma do pulso não é alterada nas reflexões e transmissões, não havendo dissipação de energia. Os coeficientes de reflexão e transmissão são aproximados com base no cenário de onda plana com incidência normal. Tal como afirma [25], esta representação aborda apenas reflexões primárias, desconsiderando outras formas de ondas como, por exemplo, as reflexões múltiplas.

Como o impulso sísmico não é instantâneo, mas sim tem uma duração finita,

as reflexões provenientes de interfaces geograficamente próximas podem se sobrepor no registro temporal de um traço sísmico (ver Figura 2). Esta limitação da duração do impulso sísmico restringe a resolução do método, isto é, a capacidade de diferenciar entre refletores próximos. O limite de resolução de Rayleigh é determinado como sendo um quarto do comprimento da onda dominante do impulso. Em outras palavras, conforme definido por Rayleigh, se dois eventos estão separados por uma distância menor do que $\lambda/4$, onde λ é o comprimento de onda dominante do impulso, não é mais possível discernir uma mudança no impulso causada pelo segundo refletor após o primeiro refletor.

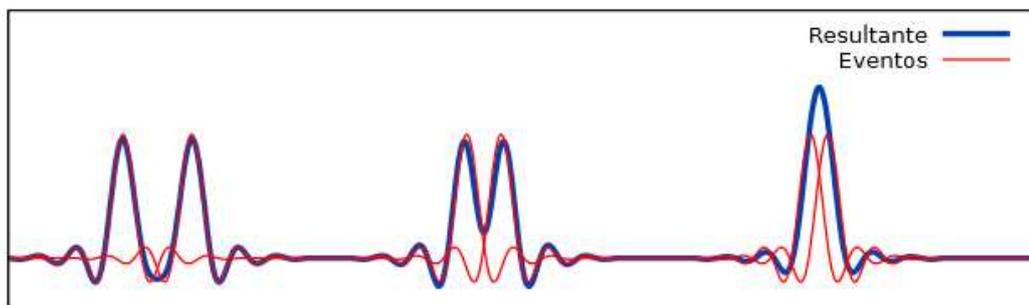


Figura 2 – Ruído em sinais

Na Figura 2 temos três situações onde dois pulsos próximos interagem. Nos dois pulsos em vermelho mais à esquerda, a distância entre eles é tal que na resultante (em azul) é possível distinguir claramente os dois eventos. Os dois pulsos mais à direita estão tão próximos que a resultante da interação entre ambos não permite distingui-los mais, dando a impressão de que há apenas um pulso gerado por um único evento. Os dois pulsos centrais exibem um caso limite.

Devido a vários fatores, os dados sísmicos estão frequentemente contaminados com ruídos coerentes, como ondas de superfície, e ruídos incoerentes, como interferências dos equipamentos de medição. A tarefa do processamento sísmico é mitigar ao máximo esses ruídos e estimar o pulso emitido pela fonte, a fim de eliminar sua influência nos dados, obtendo assim, a estimativa mais precisa da impedância (uma combinação de densidade e módulo de elasticidade) em cada interface entre as camadas da subsuperfície.

1.4 Ondas sísmicas

A propagação das ondas sísmicas elásticas é influenciada pelos coeficientes de compressibilidade e cisalhamento, juntamente com a densidade do meio de propagação. Essas ondas sísmicas podem assumir formas superficiais ou volumétricas [17].

A amplitude de uma onda sísmica decresce com o inverso da distância da fonte, de maneira similar a qualquer outro tipo de onda que se propaga em um espaço tridimensional a partir de uma fonte pontual. A superfície em que todos os pontos

apresentam o mesmo estado de vibração é chamada de *frente de ondas*, e, em analogia à ótica, a direção perpendicular à frente de ondas é denominada raio sísmico. Quando nos afastamos uma pequena distância r da fonte em um meio homogêneo, a frente de ondas assume uma forma esférica, o que resulta em ondas esféricas se propagando. À medida que aumentamos a distância r da fonte, a curvatura da frente de ondas diminui, e, assim, em distâncias consideravelmente maiores da fonte, a frente de ondas pode ser aproximada como uma superfície plana. Nesse caso, as ondas podem ser tratadas como ondas planas. Essa simplificação facilita a descrição do movimento harmônico da frente de ondas, tornando-se uma abordagem útil.

1.4.1 Ondas de volume

As ondas de volume, também conhecidas como ondas corporais (do inglês "Body Waves"), se propagam no interior de um corpo tridimensional e podem ser de dois tipos: ondas de compressão ou ondas cisalhantes. As ondas de compressão, frequentemente chamadas de ondas P (do inglês "Primary Waves"), se propagam através de compressão e expansão na direção de propagação (ver Figura 3). Já as ondas cisalhantes, também chamadas de ondas S (do inglês "Secondary Waves") o movimento ocorre no plano da frente de onda, ou seja, perpendicular à direção de propagação da onda.

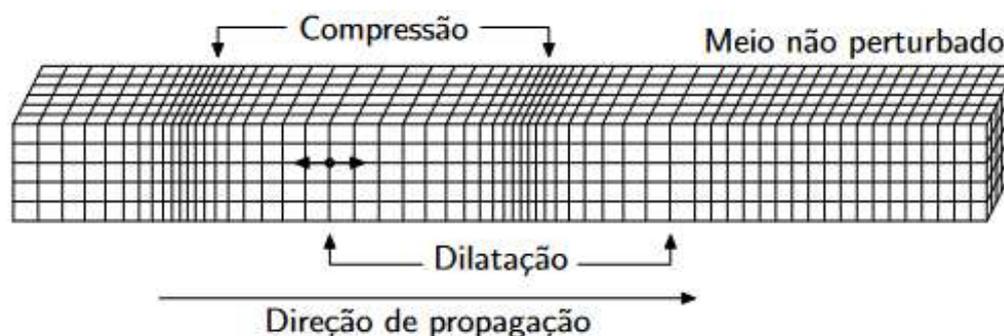


Figura 3 – Movimento das partículas provocado pela passagem das ondas P.

Quando as ondas transversais passam, os planos verticais do meio se movem para cima e para baixo, resultando em variações na forma dos elementos adjacentes. A velocidade de propagação dessas ondas está relacionada exclusivamente à rigidez do meio, e em meios fluidos, onde a rigidez é nula, as ondas transversais não se propagam. As ondas transversais são mais lentas do que as ondas longitudinais e, portanto, são registradas posteriormente, sendo conhecidas como ondas S. O movimento das partículas pode estar polarizado no plano vertical (denominadas ondas SV) ou no plano horizontal (denominadas ondas SH), conforme explicado em [21]. Outra característica importante que diferencia as ondas S das ondas P é que as ondas S não se propagam em meios acústicos, como a água, por exemplo.

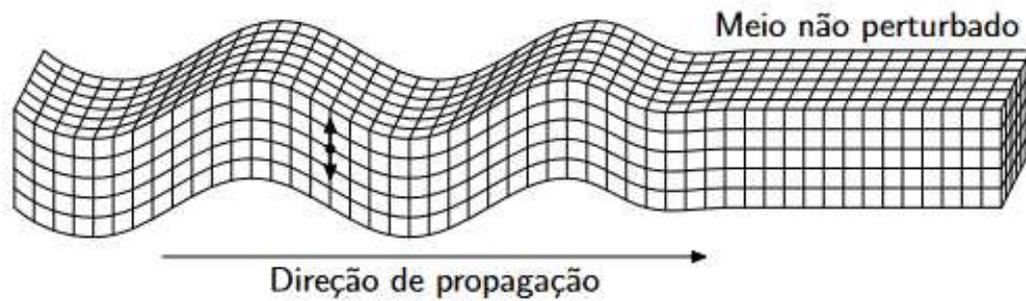


Figura 4 – Movimento das partículas provocado pela passagem das ondas S.

A velocidade de propagação da onda P, que denominaremos como p , é determinada pela equação (1.1), dada por

$$p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}, \quad (1.1)$$

onde K é o módulo de Bulk, μ é o módulo de cisalhamento e ρ é a densidade do meio. A velocidade da onda S, que denominamos por s , é calculada pela (1.2), a saber

$$s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1.2)$$

Para fluidos, μ é zero e, portanto, v_s é zero, ou seja, ondas S não se propagam em fluidos. Como todas essas constantes são positivas, ao comparar as (1.1) e (1.2), percebe-se que $v_p > v_s$.

Diante disso, apresentamos na Tabela 1 informações relativas às velocidades de P e S e a densidade dos materiais.

Para sólidos consolidados temos, tipicamente, $p \approx \sqrt{3}s$ [17]. Portanto, é tarefa do processamento sísmico estimar a velocidade da onda P (p) e a velocidade da onda S (s). A Tabela 1 apresenta valores típicos de velocidade para diferentes tipos de meios de propagação.

Historicamente, apenas ondas P eram usadas no processamento, pois sua aquisição é mais simples, utilizando apenas detectores que registram movimento e/ou pressão na componente vertical. Tais receptores são insensíveis a movimentos na horizontal e, portanto, não podem registrar a chegada de uma onda S perpendicular à superfície. Além disso, como a velocidade da onda P é maior do que a da onda S, é mais fácil identificar as ondas P em sismogramas, pois chegam primeiro. Como se não bastasse, a amplitude da onda P é maior que a amplitude da onda S.

Material	Onda P (m/s)	Onda S (m/s)	Densidade (ρ) (kg/m ³)
Ar	343	N/A	1225
Água	1450-1500	N/A	1000
Gelo	3400-3800	1700-1900	920
Óleo	1200-1250	N/A	950
Solo vegetal	300-700	100-300	1600
Areias secas	400-1200	100-500	1500
Areias grossas	1500-2000	400-600	1700
Giz	2300-2600	1100-1300	1900
Carvão	2200-2700	1000-1400	400
Sal	4500-5500	2500-3100	2200
Calcários	3500-6000	2000-3300	2600
Dolomitas	3500-6500	1900-3600	2500
Granito	4500-6000	2500-3300	3000
Basalto	5000-6000	2800-2400	2900
Gnaisse	4400-5200	2700-3200	2600

Tabela 1 – Velocidades das ondas P e S e as respectivas densidades de diversos materiais

1.4.2 Ondas de superfície

Como o próprio nome sugere, as ondas de superfície se propagam na superfície de um meio ou na interface entre duas camadas geológicas. Ondas Rayleigh se propagam na superfície livre de sólidos, ou no contato entre dois meios com propriedades semelhantes e estimulam as partículas do meio a moverem-se em órbitas elípticas num plano perpendicular à superfície onde a propagação ocorre. Além disso, a oscilação ocorre em sentido inverso ao da propagação da onda. Essa onda tem velocidade inferior a da onda S , sua amplitude decai exponencialmente com a distância abaixo da superfície e não é dispersiva em meios homogêneos (na prática, a dispersão é observada devido à variação na velocidade de propagação no meio) [17].

No processamento sísmico, as ondas Rayleigh são conhecidas como “Ground Roll” [25], e são responsáveis por “sujar” seções sísmicas de dados terrestres. Esse tipo de onda, presente em levantamentos terrestres, mas não em marinhos, é uma das grandes diferenças entre o processamento desses dois tipos de dados e representa uma dificuldade adicional para o processamento de dados terrestres.

Em superfícies acamadas, quando a velocidade da onda S aumenta de uma camada mais rasa para uma mais profunda diretamente abaixo, outro tipo de onda superficial, conhecida como onda Love, também é observada. Ondas Love são ondas cisalhantes polarizadas, onde as partículas oscilam em direção perpendicular à propagação da onda [17]. Este é um tipo de onda dispersiva e sua amplitude decai com a profundidade. Ondas Love podem ser bastante prejudiciais a edificações.

1.5 Raios

Um pulso sísmico propagando-se a partir de uma fonte pontual, em um meio isotrópico e homogêneo, viajará com a mesma velocidade em todas as direções. Portanto, a frente de onda, definida como o lugar geométrico de todos os pontos do espaço que são atingidos pelo pulso em um mesmo instante de tempo, é uma casca esférica centrada na fonte (ver Figura 5). Os raios sísmicos são as curvas definidas matematicamente (ou finos tubos) pelas quais a energia se propaga. Em meios isotrópicos, os raios são perpendiculares às frentes de onda. Raios podem também ser entendidos como os caminhos preferenciais que a energia percorre para ir de um ponto a outro do espaço [17].

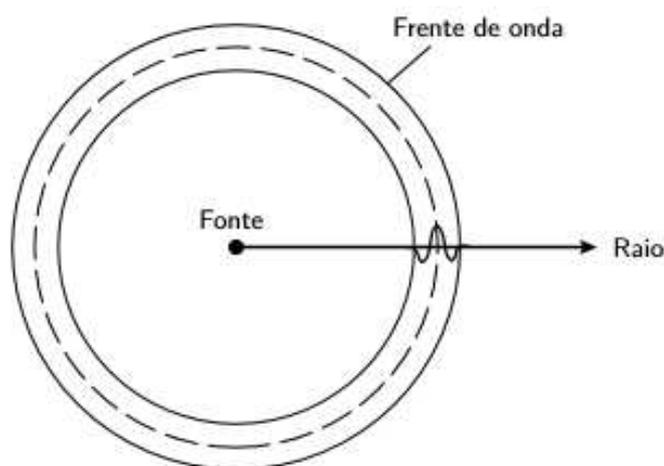


Figura 5 – Frente de onda e um raio

1.5.1 Atenuação da energia ao longo dos raios

À medida que o pulso se propaga, a energia original gerada pela fonte é distribuída pela frente de onda que se expande. Em um meio homogêneo, a frente de onda gerada por uma fonte pontual é uma casca esférica. A uma distância r da fonte, a energia original E está distribuída sobre uma superfície de área $4\pi r^2$. Logo, a energia em um tubo de raio cai com $1/r^2$. Esse fenômeno é conhecido como espalhamento geométrico da energia ou divergência esférica. Portanto, as amplitudes de oscilação da onda, que são proporcionais à raiz quadrada da energia, decaem com $1/r$ [17]. Durante o processamento sísmico, fatores de correção são aplicados aos traços sísmicos com o intuito de mitigar esse decréscimo de amplitude em virtude do espalhamento geométrico. Do contrário, reflexões mais profundas dificilmente seriam percebidas. Além da perda de energia por divergência esférica, a onda, ao se propagar em um meio que não é perfeitamente elástico, também perde energia dissipada por fricção, por exemplo.

1.5.2 Tipos de ondas em relação ao percurso

Podemos classificar as ondas também pelo percurso durante a propagação. A onda registrada em um receptor, que tenha partido da fonte e não tenha sofrido qualquer reflexão, é denominada onda direta. Na sismologia convencional, onde tanto a fonte quanto os receptores estão próximos da superfície, a onda direta contém pouca informação e é quase sempre ignorada durante o processamento sísmico. Isso já não é o caso quando os receptores estão em um poço e a fonte na superfície (ou vice-versa).

Ondas registradas na superfície, que tenham sido refletidas uma única vez, são denominadas ondas de reflexão primária, ou simplesmente primárias (ver Figura 6). Estas ondas são o principal instrumento de trabalho no processamento sísmico, a ponto de, muitas vezes, qualquer outra onda ser considerada indesejada.

Ondas que tenham refletido mais de uma vez antes de serem registradas na superfície são denominadas ondas de reflexão múltipla, ou simplesmente múltiplas (Figura 6). Essas ondas carregam consigo informações sobre regiões mais extensas da subsuperfície (Figura 6), no entanto, são mais difíceis de serem compreendidas. Por isso, existem métodos para atenuá-las nos dados sísmicos registrados.

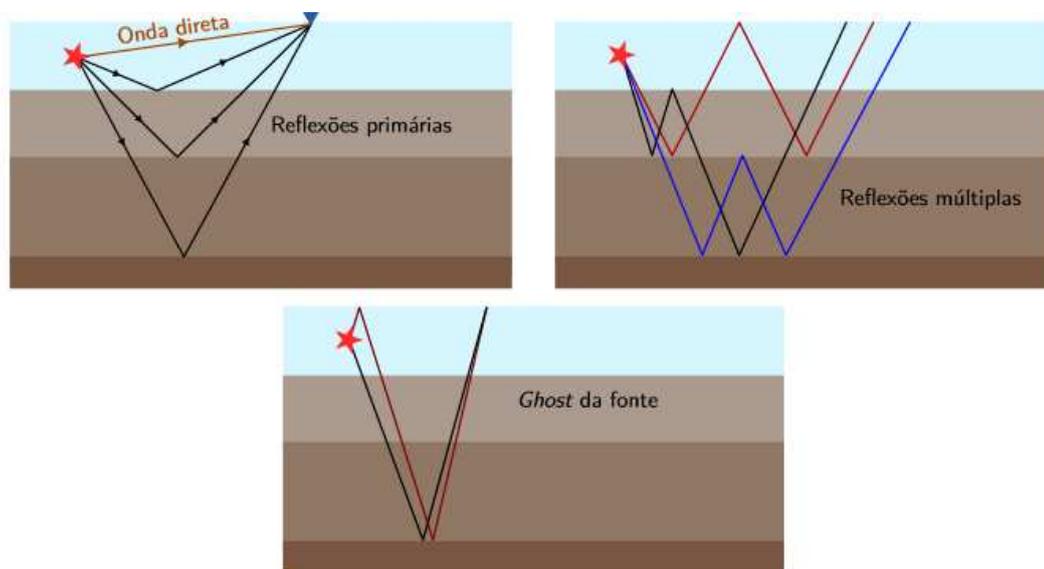


Figura 6 – Representação esquemática para diversos tipos de propagação em função do percurso dos raios.

Quando a fonte (ou o receptor) está um pouco abaixo da superfície livre, um tipo especial de múltipla também é registrado, denominado "ghost" da fonte (ou do receptor). Essa múltipla caracteriza-se por uma reflexão na superfície livre, logo após sair da fonte ou imediatamente antes de atingir o receptor. Como a fonte, mesmo quando enterrada, está relativamente próxima da superfície, os caminhos dos raios da reflexão primária e do "ghost" diferem muito pouco.

Por consequência, ambas as reflexões são registradas quase no mesmo tempo de

chegada, porém, com a fase trocada, como resultado da reflexão na superfície livre. Sendo assim, o "ghost" acaba comprometendo a qualidade do sinal da primária de interesse, e uma tarefa importante durante o processamento sísmico é atenuar (ou deconvolver) o "ghost".

Recentemente, as reflexões múltiplas estão ganhando destaque na pesquisa em Geofísica, justamente pelo fato de iluminarem porções da subsuperfície que não são atingidas por reflexões primárias. Métodos têm sido propostos para utilizar ativamente a informação contida nas reflexões múltiplas como forma de melhorar a qualidade da imagem obtida para a subsuperfície [5, 8, 16, 26, 28].

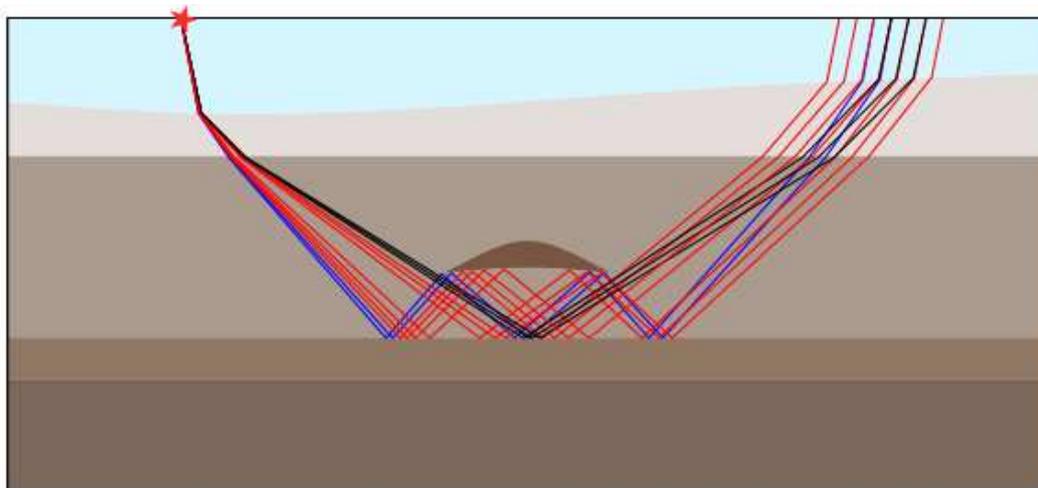


Figura 7 – Iluminação da subsuperfície por reflexões primárias e por reflexões múltiplas.

A Figura 7 mostra um exemplo onde se compara a iluminação da subsuperfície por reflexões primárias e por reflexões múltiplas. Podemos ver uma pequena região de alta velocidade no centro do modelo. Partindo da fonte representada pela estrela vermelha, podemos identificar três tipos de raios. Em preto, estão os raios de reflexão primária, em vermelho, os raios de reflexões múltiplas de primeira ordem e, em azul, os raios de reflexões múltiplas de segunda ordem. Observa-se que uma porção significativamente maior do refletor plano é atingida por reflexões múltiplas.

Por fim, cada vez que a onda atinge uma interface, também há conversão de modo, ou seja, independentemente da onda incidente, ao atingir a interface serão geradas ondas P e S transmitidas e refletidas (a menos que o meio seja fluido). A este tipo de onda dá-se o nome de onda convertida P-S ou S-P.

1.6 Partição de energia em uma interface

1.6.1 Princípio de Huygens

Para uma introdução eficaz ao princípio de Huygens, é necessário esclarecer a noção de frentes de onda e raios. Uma frente de onda representa um conjunto de partículas

(ou seja, pontos) que passam por movimentos semelhantes em um instante dado. Uma captura instantânea da propagação da onda em um momento específico representa uma frente de onda. Raios são definidos como linhas normais à frente de onda (ou seja, apontam na direção de propagação).

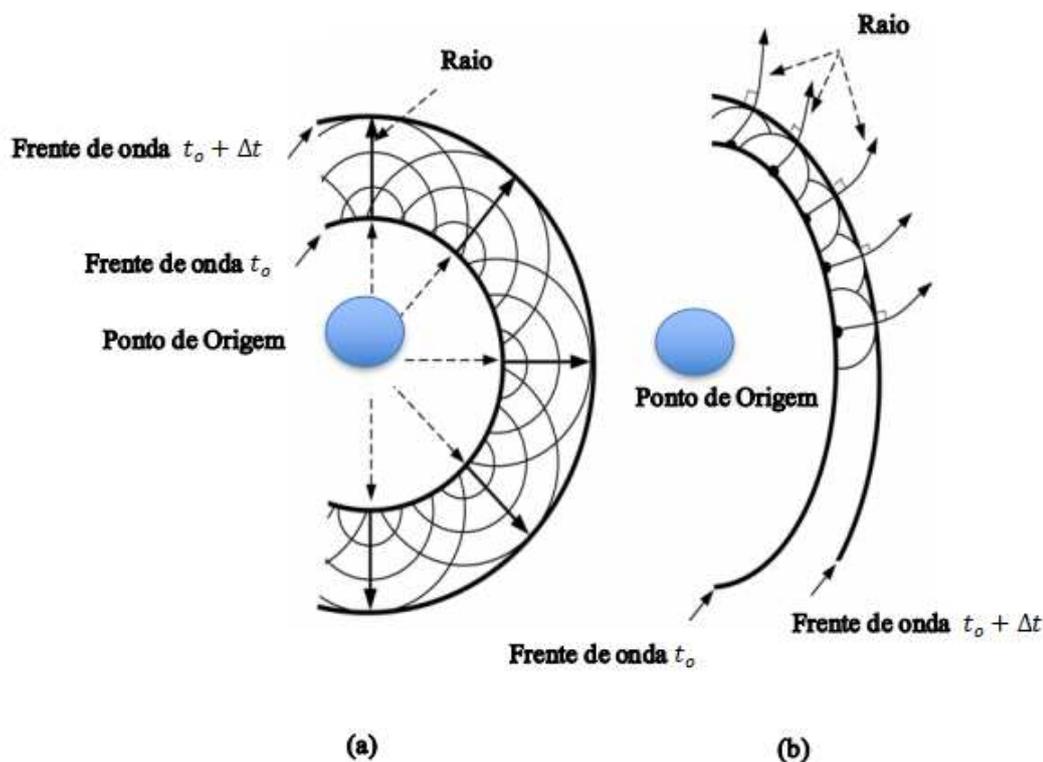


Figura 8 – O Princípio de Huygens, raios perpendiculares às frentes de onda podem ser retilíneos (a) ou curvos (b). (a) Frentes de onda em um meio homogêneo. (b) Frentes de onda em um meio heterogêneo. Figura retirada de [14].

O Princípio de Huygens afirma que todos os pontos em uma frente de onda podem ser considerados como fontes pontuais para a geração de ondas secundárias. Após um intervalo de tempo t_0 , a nova posição da frente de onda é a superfície tangente a essas ondas [15]. Se aplicarmos esse princípio à frente de onda no tempo t_0 , conforme mostrado na Figura 8, item (a), podemos construir a frente de onda no tempo $t_0 + \Delta t$. Para simplificar, exibimos apenas a frente de onda das ondas P neste exemplo, visto que ilustrações semelhantes para ondas S podem ser repetidas simplesmente substituindo a imagem das ondas P pela das ondas S. Na Figura 8, item (a), assumimos uma velocidade constante das ondas P em todo o meio.

Este procedimento resulta na frente de onda no tempo $t = t_0 + \Delta t$. A Figura 8, item (b), ilustra o procedimento para um meio com velocidade variada.

1.6.2 Princípio de Fermat

Em um meio não homogêneo (como o que discutiremos nesta subseção), a forma e/ou direção das frentes de onda podem mudar com o tempo. Portanto, como os raios são perpendiculares às frentes de onda, seus caminhos também mudarão com o tempo.

O Princípio de Fermat, também conhecido como o Princípio do Tempo Estacionário, nos permite prever o caminho dos raios sob essas circunstâncias. Ele afirma que o caminho da onda entre quaisquer dois pontos fixos é aquele ao longo do qual o tempo de viagem é o extremo de todos os caminhos possíveis. Por exemplo, o raio que segue um caminho de tempo mínimo (ou seja, o caminho que permitirá que a frente de onda se mova de A para B no menor tempo possível, conforme descrito na Figura 9) é um extremo de todos os caminhos possíveis. Neste exemplo, porque assumimos uma velocidade constante, podemos ver claramente que o raio deve seguir uma linha reta, pois é aquela para a qual o tempo de viagem é um extremo (mínimo).

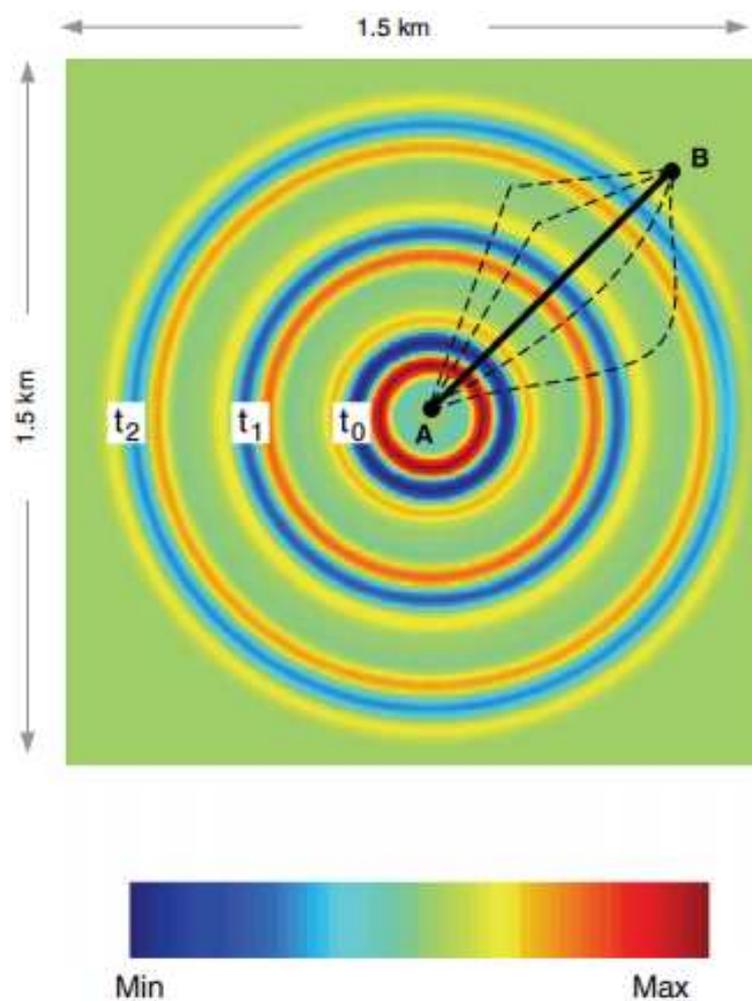


Figura 9 – O Princípio de Fermat, vários caminhos possíveis conectam o ponto A ao ponto B. Por definição, o caminho do raio é o caminho perpendicular às frentes de onda. Neste caso, a linha reta entre A e B é o caminho ótimo do raio. Figura retirada de [14].

1.7 Lei de Snell

Consideremos um modelo composto por dois meios infinitamente homogêneos e isotrópicos, separados por uma superfície horizontal. Este modelo é conhecido como “modelo de dois meios espaçosos”, no qual cada meio representa um meio espaço. Na Figura 10, estamos considerando a interface sólido-sólido, onde a onda P e a onda S se propagam completamente.

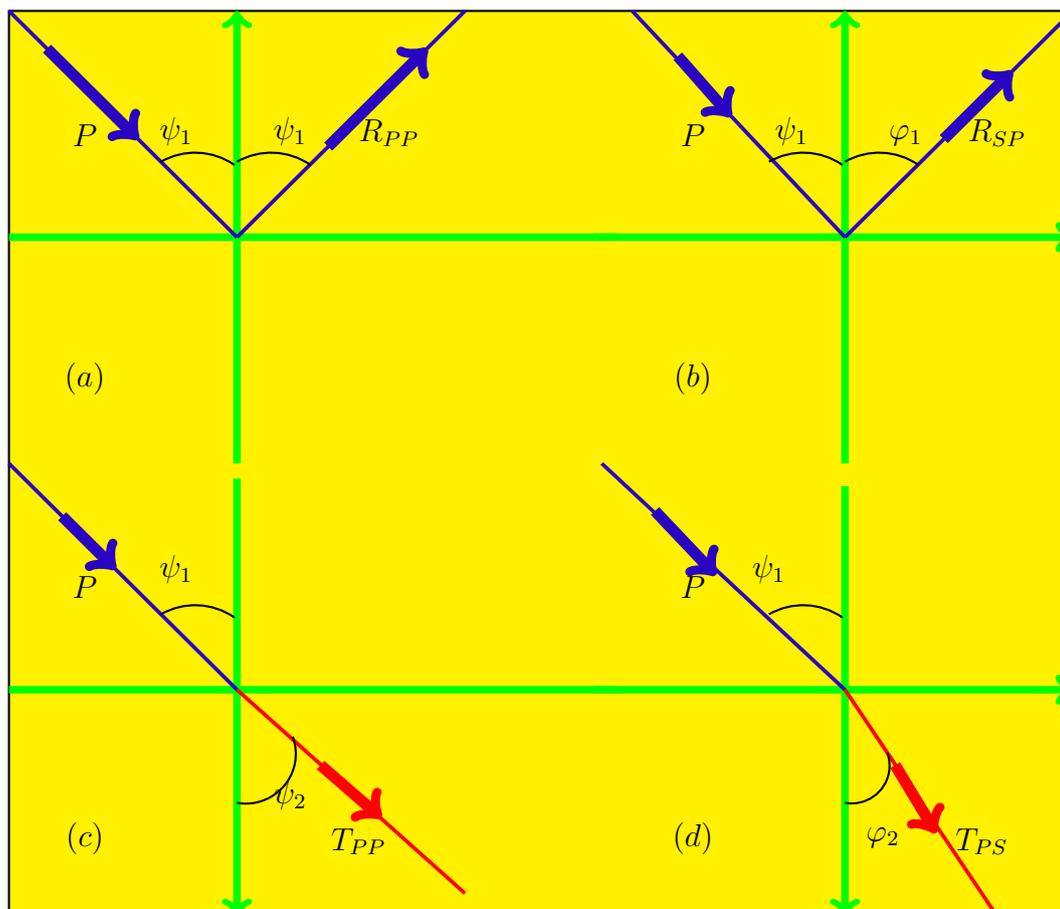


Figura 10 – Lei de Snell e propagação das ondas P e S quando a fonte emite uma onda P na interface sólido-sólido

Suponha que uma fonte explosiva, conforme mostrado na Figura 11, gera uma onda P que se propaga na metade superior do espaço. Quando consideramos os caminhos da onda, cada um vindo de A e, após reflexão, indo para B, apenas um caminho pode realmente ser seguido pelas frentes de onda nos meios homogêneos. De acordo com o Princípio de Fermat, este caminho é mais curto do que qualquer outro caminho possível, é o caminho correspondente ao menor tempo de viagem.

1.7.1 Lei de Snell na interface líquido-líquido

Agora, vamos usar o princípio de Fermat para derivar a relação entre o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão.

e, utilizando a relação que se segue

$$\operatorname{sen}\psi_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\psi_{1r} = \frac{L' - x}{\sqrt{(L' - x)^2 + h_1^2}},$$

onde ψ_{1r} refere-se ao ângulo que a onda refletida forma em relação à normal, chegamos que

$$\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{p_1} - \frac{\operatorname{sen}\psi_{1r}}{p_1} = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\psi_1}{p_1} = \frac{\operatorname{sen}\psi_{1r}}{p_1},$$

ou seja

$$\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{p_1} = \frac{\operatorname{sen}\psi_{1r}}{p_1} \quad \text{ou seja} \quad \psi_1 = \psi_{1r}. \quad (1.6)$$

Por outro lado, vemos que o tempo necessário para a onda fazer a trajetória de A até C é dada por

$$t = \sqrt{\frac{x^2 + h_1^2}{p_1^2}} + \sqrt{\frac{(L - x)^2 + h_2^2}{p_2^2}}. \quad (1.7)$$

Novamente pelo Princípio de Fermat, diferenciando a Equação (1.7), obtemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{p_1\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{L - x}{p_2\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}} = 0, \quad (1.8)$$

e, usando as identidades

$$\operatorname{sen}\psi_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\psi_2 = \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}},$$

vemos que

$$\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{p_1} - \frac{\operatorname{sen}\psi_2}{p_2} = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\psi_1}{p_1} = \frac{\operatorname{sen}\psi_2}{p_2},$$

e finalmente, temos a seguinte relação

$$\frac{\operatorname{sen}\psi_1}{p_1} = \frac{\operatorname{sen}\psi_2}{p_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{sen}\psi_1}{\operatorname{sen}\psi_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (1.9)$$

A expressão (1.9), comumente utilizada para descrever esse fenômeno, é conhecida como Lei de Snell. Se p_2 é menor que p_1 , o raio das ondas transmitidas se curva em direção à normal (ou seja, $\psi_2 \leq \psi_1$), enquanto que, se p_1 é maior que p_2 (ou seja, $\psi_2 \geq \psi_1$), ele se curva para longe da normal, como ilustrado na Figura 10. Quando $\psi_2 \rightarrow 90^\circ$, a onda

é refratada ao longo da interface em vez de ser transmitida para o segundo meio. A partir desse ponto, as ondas não são mais transmitidas para o meio inferior, daí,

$$\frac{\text{sen}\psi_{1cr}}{p_1} = \frac{\text{sen}90^\circ}{p_2} = \frac{1}{p_2} \quad \text{portanto,} \quad \psi_{1cr} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right). \quad (1.10)$$

Conforme ilustrado nas Figuras 10 e 11, a Lei de Snell prevê o ângulo crítico a partir do qual tais refrações ocorrem.

1.7.2 Lei de Snell na interface sólido-sólido

No caso anterior, assumimos que as velocidades das ondas S em ambos os meios semi-infinitos são zero, em outras palavras, esses meios não suportam ondas S . Aqui, generalizamos a Lei de Snell para casos em que as velocidades das ondas S não são nulas. Vamos considerar dois meios sólidos semi-infinitos. Suponha que a fonte explosiva gere uma onda P que se propaga através do meio superior. Quando a onda atinge a interface entre os meios ela é dividida em duas ondas refletidas (P e S) e duas ondas transmitidas (P e S). Os trajetos dessas ondas são descritos na Figura 10. Usando o Princípio de Fermat, pode-se verificar que a Lei de Snell também se aplica à reflexão e transmissão de ondas S a partir da onda P incidente. As novas relações são

$$\frac{\text{sen}\psi_1}{\text{sen}\varphi_2} = \frac{p_1}{s_2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}\psi_1}{\text{sen}\varphi_1} = \frac{p_1}{s_1}. \quad (1.11)$$

Os ângulos da onda S refletida, φ_1 , e da onda S transmitida, φ_2 , são definidos na Figura 10. Vimos na descrição anterior que, quando $\varphi_2 \rightarrow 90^\circ$, a Lei de Snell prevê o ângulo crítico a partir do qual ocorrem refrações das ondas P . No caso elástico, um segundo ângulo crítico pode ocorrer quando $\varphi_2 \rightarrow 90^\circ$. A Lei de Snell, conforme expressada na Equação (1.11), prevê outro ângulo crítico a partir do qual ocorrem tais refrações das ondas S , assim

$$\psi_{1crP} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \quad \text{e} \quad \psi_{1crS} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{p_1}{s_2}\right). \quad (1.12)$$

Observe que se $\psi_1 \geq \psi_{1cr}$, nenhuma energia de onda S pode penetrar, e, conseqüentemente, a energia incidente é refletida de volta para o meio superior. Além disso, observe que ψ_{1cr} é sempre menor que φ_{1crS} porque $p_2 > s_2$. Além disso, se $s_2 \leq s_1$, o segundo ângulo crítico, φ_{1crS} , não ocorre.

Da mesma forma, uma onda sísmica incidente S dá origem a ondas P refletidas e transmitidas, assim como a ondas S refletidas e transmitidas, com as seguintes relações

$$\frac{\text{sen}\varphi_1}{\text{sen}\varphi_2} = \frac{s_1}{s_2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}\varphi_1}{\text{sen}\psi_2} = \frac{s_1}{p_2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}\varphi_1}{\text{sen}\psi_1} = \frac{s_1}{p_1}. \quad (1.13)$$

Além dos dois ângulos críticos seguintes correspondentes aos casos em que $\psi_2 \rightarrow 90^\circ$ e $\varphi_2 \rightarrow 90^\circ$, ou seja

$$\varphi_{1crP} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{s_1}{p_2} \right), \quad \varphi_{1crS} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{s_1}{s_2} \right), \quad \varphi_{1cr} = \text{sen}^{-1} \left(\frac{s_1}{p_1} \right). \quad (1.14)$$

Um terceiro ângulo crítico ocorrerá quando $\psi_1 \rightarrow 90^\circ$, devido a p_1 ser sempre maior do que s_1 . Portanto, a forma generalizada da Lei de Snell é

$$\frac{\text{sen}\psi_1}{p_1} = \frac{\text{sen}\psi_2}{p_2} = \frac{\text{sen}\varphi_1}{s_1} = \frac{\text{sen}\varphi_2}{s_2} = k. \quad (1.15)$$

onde

$$\tau_k = \frac{\cos \psi_1}{p_1}. \quad (1.16)$$

Entretanto, k é o parâmetro de raio sísmico ou a componente horizontal de velocidade. A componente vertical da velocidade da onda P , por exemplo, é dada pela Equação (1.16).

2 Equações de Zoeppritz

Neste capítulo recorreremos às equações de continuidade para determinar as formas matriciais das equações de Zoeppritz em interfaces líquido-sólido-líquido. A partir delas, encontramos as respectivas formas fechadas para os coeficientes de reflexão e transmissão

2.1 Forma matricial das equações de Zoeppritz

A análise dos coeficientes de reflexão e transmissão em ondas sísmicas P e S é realizada sob a suposição de que essas ondas podem ser tratadas como ondas planas. Quando ocorre uma descontinuidade entre dois meios elásticos surgem tensões de compressão e cisalhamento. Ao atingirem a interface que separa esses meios, tanto as ondas P quanto as S são refletidas e transmitidas para longe da interface.

Dois métodos clássicos são comumente empregados na sismologia para obter os coeficientes de reflexão e transmissão em ondas planas. Como citado [19], em 1899, Knott desenvolveu tais coeficientes ao introduzir amplitudes potenciais desconhecidas nas condições de continuidade. Posteriormente, em 1919, Zoeppritz apresentou um conjunto de coeficientes muito semelhantes, utilizando amplitudes de deslocamento como amplitudes potenciais desconhecidas.

Este estudo adotará a notação e a abordagem matricial fundamentada no método de Zoeppritz, conforme detalhado na obra de referência de Ikelle e Amundsen [14]. Nessa abordagem, as amplitudes potenciais das ondas P e S são substituídas por amplitudes potenciais multiplicadas por suas respectivas velocidades. Isso possibilita o tratamento simultâneo das ondas P e S incidentes. As expressões para as ondas incidentes são

$$\begin{aligned} P_{\text{INC}} &= p_1 \exp [i\omega (y \sin \psi_1 + z \cos \psi_1 - p_1 t) / p_1] \\ S_{\text{INC}} &= s_1 \exp [i\omega (y \sin \varphi_1 + z \cos \varphi_1 - s_1 t) / s_1]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Em (2.1), P_{INC} representa a onda P incidente, e S_{INC} representa a onda S incidente. Ambas as ondas são descritas como funções exponenciais complexas, onde p_1 e s_1 são as velocidades das ondas P e S , respectivamente, ψ_1 e φ_1 são os ângulos de incidência das ondas P e S , ω é a frequência angular e t é o tempo.

Portanto o plano yz , em que z representa o eixo perpendicular à interface que separa o meio 1 do meio 2, conforme representado na Figura 11, é escolhido como o plano de incidência [14]. Essa seleção nos permite representar a onda sonora incidente que contém uma combinação (α, β) de ondas P e S enquanto se propaga no meio 1. Essa

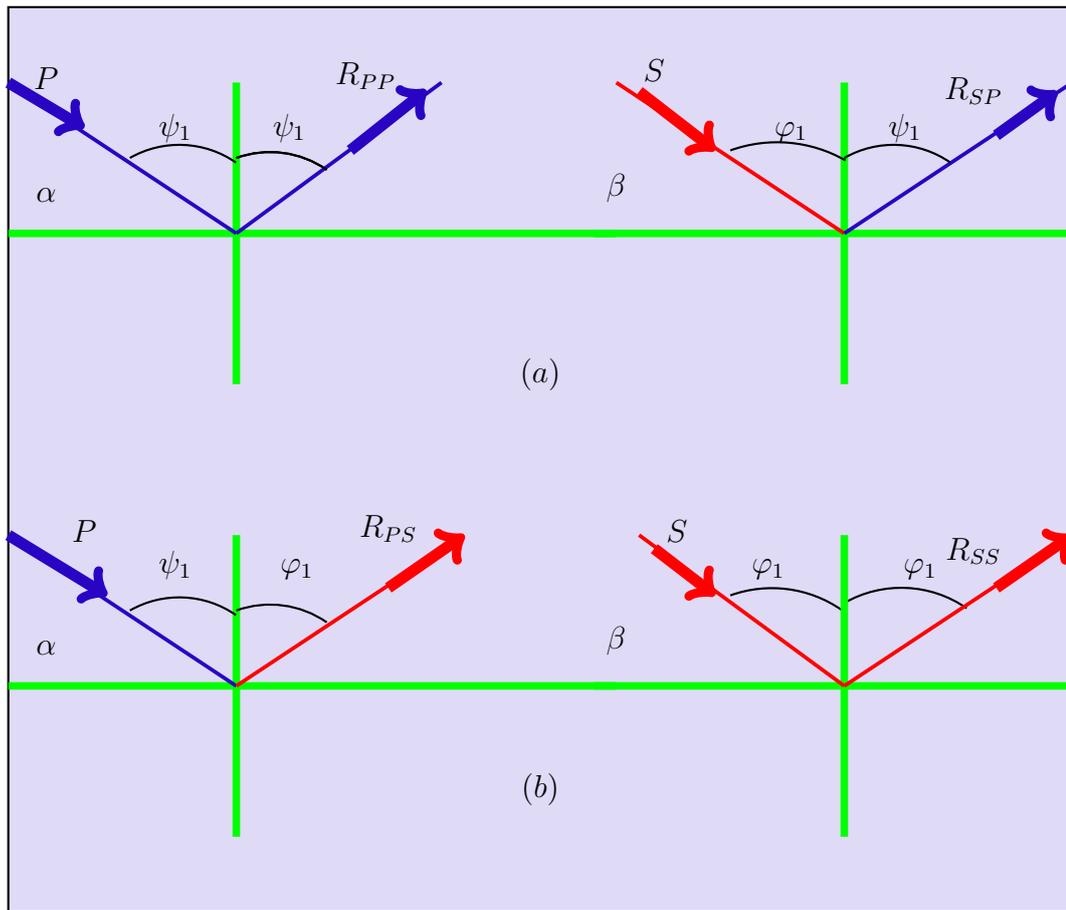


Figura 12 – Combinação linear das ondas refletidas em um meio sólido-sólido.

representação é expressa matematicamente pela combinação linear

$$\alpha P_{\text{INC}} + \beta S_{\text{INC}}. \quad (2.2)$$

Na Equação (2.2), os coeficientes α e β desempenham um papel fundamental na determinação da proporção de cada onda na combinação. O coeficiente α corresponde à contribuição da onda P , enquanto o coeficiente β está associado à contribuição da onda S . Sendo valores reais, esses coeficientes determinam a intensidade relativa de cada onda na onda sonora incidente.

As ondas P_{INC} e S_{INC} representam, respectivamente, as ondas P e S incidentes no meio 1, antes que a combinação linear ocorra. A expressão (2.2) é de grande relevância para entender a interação das ondas incidentes no meio 1 e para estudar as características resultantes da onda sonora incidente. Através dessa combinação é possível analisar como as ondas P e S se comportam e interagem à medida que se propagam no meio 1, sendo os coeficientes α e β cruciais para ajustar a combinação das ondas, influenciando a amplitude e a intensidade de cada componente na onda resultante Figura 12. Além disso, as expressões

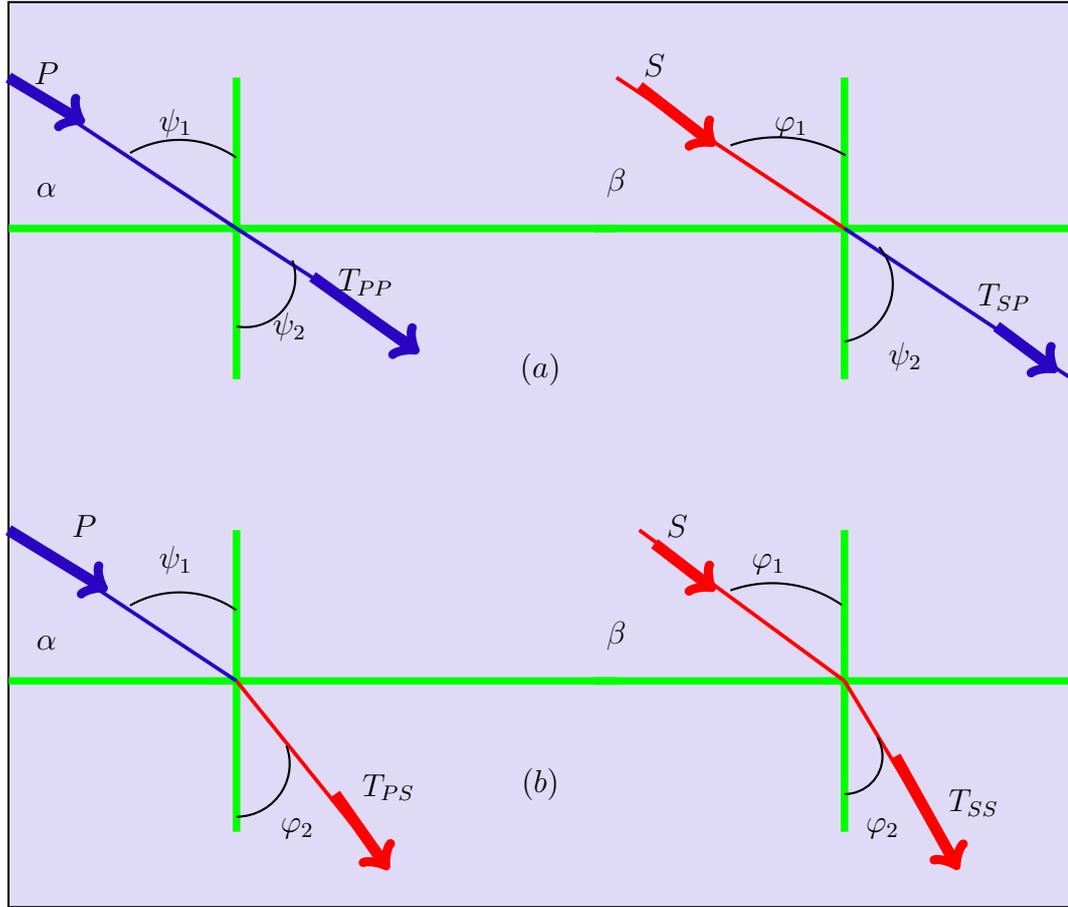


Figura 13 – Combinação linear das ondas transmitidas em um meio sólido-sólido

para as ondas refletidas são

$$\begin{aligned} P_{\text{REF}} &= p_1(\alpha R_{PP} + \beta R_{SP}) \exp [i\omega (y \sin \psi_1 - z \cos \psi_1 - p_1 t) / p_1] \\ S_{\text{REF}} &= s_1(\alpha R_{PS} + \beta R_{SS}) \exp [i\omega (y \sin \varphi_1 - z \cos \varphi_1 - s_1 t) / s_1]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Na Equação (2.3) as ondas refletidas são representadas por P_{REF} e S_{REF} . Igualmente, essas ondas são descritas como funções exponenciais complexas. Aqui, R_{PP} , R_{SP} , R_{PS} e R_{SS} são os coeficientes de reflexão que representam as amplitudes das ondas refletidas em relação às ondas incidentes. O termo $(\alpha R_{PP} + \beta R_{SP})$ descreve a combinação linear das ondas refletidas P e o termo $(\alpha R_{PS} + \beta R_{SS})$ descreve a combinação linear das ondas refletidas S tal como representado na Figura 13. Esses coeficientes de reflexão dependem das propriedades dos meios em ambos os lados da interface.

A seguir, descrevemos as expressões matemáticas para as ondas transmitidas (P_{TRA} e S_{TRA}) após a incidência na interface

$$\begin{aligned} P_{\text{TRA}} &= p_2(\alpha T_{PP} + \beta T_{SP}) \exp [i\omega (y \sin \psi_2 + z \cos \psi_2 - p_2 t) / p_2] \\ S_{\text{TRA}} &= s_2(\alpha T_{PS} + \beta T_{SS}) \exp [i\omega (y \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2 - s_2 t) / s_2]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avançando no meio 2, encontramos as velocidades (p_2, ψ_2) e (s_2, φ_2) , que descrevem as ondas P e S transmitidas, respectivamente. Os subíndices presentes nos coeficientes de reflexão e transmissão identificam se a onda incidente é P ou S, enquanto o segundo subíndice indica se a onda é refletida ou transmitida. A presença do sinal negativo na fase das ondas refletidas indica que elas se propagam em sentido oposto ao eixo z . As equações que descrevem os ângulos de reflexão e transmissão são baseadas na Lei de Snell

$$\frac{\text{sen}\psi_1}{p_1} = \frac{\text{sen}\varphi_1}{s_1} = \frac{\text{sen}\psi_2}{p_2} = \frac{\text{sen}\varphi_2}{s_2}. \quad (2.5)$$

Nas Figuras 10 e 11 apresentamos uma representação esquemática das ondas acústicas incidentes, refletidas e transmitidas em interfaces entre sólido-sólido e líquido-líquido.

Como as velocidades são previamente conhecidas e os ângulos são determinados pela Lei de Snell, o foco dos cálculos recai exclusivamente sobre os coeficientes de reflexão e transmissão. Esses coeficientes são derivados a partir da condição de continuidade do deslocamento e do estresse na interface. Essencialmente, em termos dos potenciais de onda, isso implica na manutenção da continuidade das seguintes funções

$$P_z + S_y \quad (2.6)$$

$$\mu(2P_{yz} + S_{yy} - S_{zz}) \quad (2.7)$$

$$\lambda(P_{yy} + P_{zz}) + 2\mu(P_{zz} + S_{yz}), \quad (2.8)$$

onde $\mu = \rho s^2$ e $\lambda = \rho(p^2 - 2s^2)$, com ρ sendo a densidade do meio e s (respectivamente, p) representando a velocidade da onda S (respectivamente, P).

A seguir, vamos aplicar essas equações de continuidade em diferentes interfaces do tipo líquido-sólido e sólido-líquido, considerando diferentes tipos de ondas incidentes.

2.1.1 Interface Líquido 1-Sólido 2

Como afirmamos no capítulo anterior, em um líquido, a onda S não se propaga. Portanto, na interface líquido-sólido, realizaremos os cálculos para encontrar as matrizes de Zoeppritz apenas para o caso em que a onda incidente é do tipo P

Para simplificar os cálculos, quando lidamos com a interface do tipo líquido-sólido, as Equações (2.1), (2.3) e (2.4) podem ser expressas de forma mais concisa, com $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $s_1 = \varphi_1 = 0$, como representamos no Sistema (2.9).

$$\begin{aligned} INC &= P[p_1, \psi_1, z] \\ REF &= R_{PP}^{[Li1So2]} P[p_1, \psi_1, -z] \\ TRA &= T_{PP}^{[Li1So2]} P[p_2, \psi_2, z] + T_{PS}^{[Li1So2]} S[s_2, \varphi_2, z]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assim, ao aplicar a primeira equação de continuidade (2.6) obtemos

$$P_z[p_1, \psi_1, z] + R_{PP}^{[Li1So2]} P_z[p_1, \psi_1, -z] = T_{PP}^{[Li1So2]} P_z[p_2, \psi_2, z] + T_{PS}^{[Li1So2]} S_y[s_2, \varphi_2, z], \quad (2.10)$$

recorrendo ao sistema de equações (2.9) e realizando as derivadas, levando em conta a Equação (2.10) temos

$$\cos \psi_1 - R_{PP}^{[Li1So2]} \cos \psi_1 = T_{PP}^{[Li1So2]} \cos \psi_2 + T_{PS}^{[Li1So2]} \sin \varphi_2. \quad (2.11)$$

Isolando o termo sem coeficiente de reflexão e transmissão chegamos à seguinte equação

$$\cos \psi_1 R_{PP}^{[Li1So2]} + \cos \psi_2 T_{PP}^{[Li1So2]} + \sin \varphi_2 T_{PS}^{[Li1So2]} = \cos \psi_1. \quad (2.12)$$

A segunda equação de continuidade, conforme dada em (2.7), toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} & 2\mu_1 P_{yz}[p_1, \psi_1, z] + 2\mu_1 R_{PP}^{[Li1So2]} P_{yz}[p_1, \psi_1, -z] \\ & = \mu_2 (2T_{PP}^{[Li1So2]} P_{yz}[p_2, \psi_2, z] \\ & + T_{PS}^{[Li1So2]} S_{yy}[s_2, \varphi_2, z] - T_{PS}^{[Li1So2]} S_{zz}[s_2, \varphi_2, z]). \end{aligned} \quad (2.13)$$

sendo $\mu_1 = \rho_1 s_1^2 = 0$, pois, $s_1 = \varphi_1 = 0$. Ao fazermos as derivadas das equações em (2.9) e, tendo em conta a Equação (2.13) escrevemos

$$s_2 \sin 2\psi_2 T_{PP}^{[Li1So2]} - p_2 \cos 2\varphi_2 T_{PS}^{[Li1So2]} = 0. \quad (2.14)$$

A terceira equação de continuidade (2.8), quando a escrevemos para a interface líquido-sólido é

$$\begin{aligned} & \lambda_1 (P_{yy}[p_1, \psi_1, z] + P_{zz}[p_1, \psi_1, z]) + 2\mu_1 P_{zz}[p_1, \psi_1, z] \\ & + R_{PP}^{[Li1So2]} \lambda_1 (P_{yy}[p_1, \psi_1, -z] + P_{zz}[p_1, \psi_1, -z]) + 2\mu_1 R_{PP}^{[Li1So2]} P_{zz}[p_1, \psi_1, -z] \\ & = T_{PP}^{[Li1So2]} \lambda_2 (P_{yy}[p_2, \psi_2, z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, z]) \\ & + 2\mu_2 (T_{PP}^{[Li1So2]} P_{zz}[p_2, \psi_2, z] + T_{PS}^{[Li1So2]} P_{yz}[s_2, \varphi_2, z]), \end{aligned} \quad (2.15)$$

sabendo que $\mu_1 = \rho_1 s_1^2 = 0$, pois, $s_1 = \varphi = 0$. Daí, isolando os termos sem coeficiente de reflexão e transmissão, segue que

$$-\rho_1 p_1 R_{PP}^{[Li1So2]} + \rho_2 p_2 \cos \varphi_2 T_{PP}^{[Li1So2]} + \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 T_{PS}^{[Li1So2]} = \rho_1 p_1. \quad (2.16)$$

Com isso, as equações dadas em (2.12), (2.14) e (2.16) podem ser escritas na forma matricial que segue

$$M^{[\text{Li1So2}]} A^{[\text{Li1So2}]} = B^{[\text{Li1So2}]}, \quad (2.17)$$

onde $M^{[\text{Li1So2}]}$ é uma matriz de coeficientes, $A^{[\text{Li1So2}]}$ é um vetor de variáveis desconhecidas e $B^{[\text{Li1So2}]}$ é um vetor de termos independentes, ou seja

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_1 & \cos \psi_2 & \text{sen} \varphi_2 \\ 0 & s_2 \text{sen} 2\psi_2 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ -\rho_1 p_1 & \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{Li1So2}]} \\ T_{PP}^{[\text{Li1So2}]} \\ T_{PS}^{[\text{Li1So2}]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ 0 \\ \rho_1 p_1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$M^{[\text{Li1So2}]} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & \cos \psi_2 & \text{sen} \varphi_2 \\ 0 & s_2 \text{sen} 2\psi_2 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ -\rho_1 p_1 & \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix}$$

e

$$A^{[\text{Li1So2}]} = \begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{Li1So2}]} \\ T_{PP}^{[\text{Li1So2}]} \\ T_{PS}^{[\text{Li1So2}]} \end{pmatrix}, \quad B^{[\text{Li1So2}]} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ 0 \\ \rho_1 p_1 \end{pmatrix}.$$

Para obter os coeficientes de reflexão e transmissão, a partir da matriz (2.18), é necessário inverter a matriz $M^{[\text{Li1So2}]}$. Fazendo algumas manipulações algébricas concluímos que

$$\begin{aligned} R_{PP}^{[\text{Li1So2}]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \\ T_{PP}^{[\text{Li1So2}]} &= \frac{2\rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \\ T_{PS}^{[\text{Li1So2}]} &= \frac{2\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 \text{sen} 2\psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

As equações dadas em (2.19) representam os coeficientes de reflexão e transmissão na interface do tipo líquido-sólido.

2.1.2 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda P

Considerando, como foi explicado com detalhes no Capítulo 1, que em meio líquido a onda S não se propaga, temos assim $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $s_3 = 0$ e $\varphi_3 = 0$, logo, as

Equações (2.1), (2.3) e (2.4) podem ser escritas de forma compacta, como segue

$$\begin{aligned}
INC &= P[p_2, \psi_2, z] \\
REF &= R_{PP}^{[So2Li3S]} P[p_2, \psi_2, -z] + R_{PS}^{[So2Li3S]} S[s_2, \varphi_2, -z] \\
TRA &= T_{PP}^{[So2Li3S]} P[p_3, \psi_3, z].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Com a primeira equação de continuidade, que faz referência à Equação (2.6), podemos expressá-la nas interfaces sólido-líquido da seguinte forma

$$\begin{aligned}
P_z[p_2, \psi_2, z] + R_{PP}^{[So2Li3S]} P_z[p_2, \psi_2, -z] + R_{PS}^{[So2Li3P]} S_y[s_2, \varphi_2, -z] \\
= T_{PP}^{[So2Li3P]} P_z[p_3, \psi_3, z].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Derivando as equações dadas em (2.20), substituindo na Equação (2.21) e isolando os termos independentes dos coeficientes de reflexão e transmissão, concluímos que, para este tipo de interface, a primeira equação de continuidade é escrita da seguinte maneira

$$\cos \psi_2 R_{PP}^{[So2Li3P]} - \sin \varphi_2 R_{PS}^{[So2Li3P]} + \cos \psi_3 T_{PP}^{[So2Li3P]} = \cos \psi_2. \tag{2.22}$$

Por outro lado, a segunda equação de continuidade, referente à equação (2.7), pode ser expressa da seguinte maneira, tendo em vista a continuidade do deslocamento

$$\begin{aligned}
2\mu_2 P_{yz}[p_2, \psi_2, z] + 2\mu_2 R_{PP}^{[So2Li3P]} P_{yz}[p_2, \psi_2, -z] \\
+ \mu_2 R_{PS}^{[So2Li3P]} (S_{yy}[s_2, \varphi_2, -z] - S_{zz}[s_2, \varphi_2, -z]) \\
= 2\mu_3 T_{PP}^{[So2Li3P]} P_{yz}[p_3, \psi_3, z].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Sabendo que $\mu_3 = \rho_3 s_3^2 = 0$ pois $s_3 = 0$ e, ao isolar o termo independente e dividir ambos os lados da equação por s_2 , concluímos que

$$s_2 \sin 2\psi_2 R_{PP}^{[So2Li3P]} + p_2 \cos 2\varphi_2 R_{PS}^{[So2Li3P]} = s_2 \sin 2\psi_2. \tag{2.24}$$

No que diz respeito à terceira equação de continuidade, conforme apresentado na Equação (2.8), ao assumirmos as definições das potências da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\lambda_2 (P_{yy}[p_2, \psi_2, z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, z]) + 2\mu_2 P_{zz}[p_2, \psi_2, z] \\
+ 2\mu_2 R_{PS}^{[So2Li3P]} S_{yz}[s_2, \varphi_2, -z] \\
+ \lambda_2 R_{PP}^{[So2Li3P]} (P_{yy}[p_2, \psi_2, -z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, -z]) \\
+ 2\mu_2 R_{PP}^{[So2Li3P]} P_{zz}[p_2, \psi_2, -z] + 2\mu_2 R_{PS}^{[So2Li3P]} S_{yz}[s_2, \varphi_2, -z] \\
= \lambda_3 T_{PP}^{[So2Li3P]} (P_{yy}[p_3, \psi_3, z] + P_{zz}[p_3, \psi_3, z]),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

e derivando as equações dadas em (2.20) e fazendo as substituições necessárias em (2.25), obtemos

$$-\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} + \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} + \rho_3 p_3 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} = \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2. \quad (2.26)$$

Essa análise demonstra que, ao considerarmos um cenário de interface sólido-líquido com uma onda incidente do tipo P , podemos representar as condições de continuidade sob a forma de matrizes, conforme detalhado em (2.17), resultando em uma equação matricial específica, como ilustrado na Equação (2.27), daí

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_2 & -\sin \varphi_2 & \cos \psi_3 \\ s_2 \sin 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \\ R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} \\ T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_2 \\ s_2 \sin 2\psi_2 \\ \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Formando a matriz de cofatores e realizando a transposição, seguida por algumas manipulações algébricas temos

$$\begin{aligned} R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\ R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} &= \frac{2\rho_2 p_2 s_2 \sin 2\psi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\ T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} &= \frac{2\rho_2 p_2^2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Em (2.28) apresentamos a matriz de Zoeppritz para a interface do tipo sólido-líquido, na qual a onda incidente é do tipo P .

2.1.3 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda S

Para a interface do tipo sólido-líquido, na qual a onda incidente é do tipo S , temos as condições $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $s_3 = 0$, e $\varphi_3 = 0$. Com isso, as equações descritas em (2.1), (2.3) e 2.4 podem ser resumidas no seguinte sistema

$$\begin{aligned} INC &= S[s_2, \varphi_2, z] \\ REF &= R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P[p_2, \psi_2, -z] + R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} S[s_2, \varphi_2, -z] \\ TRA &= T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P[p_3, \psi_3, z]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

De modo análogo, ao recorrermos à primeira equação de continuidade que representamos em (2.6), podemos traduzi-la da seguinte forma

$$S_y[s_2, \varphi_2, z] + R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P_z[p_2, \psi_2, -z] + R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} S_y[s_2, \varphi_2, -z] = T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P_z[p_3, \psi_3, z]. \quad (2.30)$$

E se derivarmos as equações dadas em (2.29), coadjuvando com a primeira equação de continuidade, segue que

$$\cos \psi_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} - \sin \varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} + \cos \psi_3 T_{SP}^{[So2Li3S]} = \sin \varphi_2. \quad (2.31)$$

Recorrendo à segunda equação de continuidade, conforme representamos em (2.7), e as derivadas das equações do Sistema (2.29), obtemos

$$\begin{aligned} & 2\mu_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} P_{yz}[p_2, \psi_2, -z] + \mu_2 (S_{yy}[s_2, \varphi_2, z] - S_{zz}[s_2, \varphi_2, z]) \\ & + \mu_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} (S_{yy}[s_2, \varphi_2, -z] - S_{zz}[s_2, \varphi_2, -z]) \\ & = \mu_3 T_{SP}^{[So2Li3S]} P_{yz}[p_3, \psi_3, z], \end{aligned} \quad (2.32)$$

Fazendo alguns calculos algebricos para o cenário sólido-líquido, no qual a onda incidente é do tipo S , a segunda equação de continuidade assume a seguinte forma

$$s_2 \sin 2\varphi_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} + p_1 \cos 2\varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} = -p_2 \cos 2\varphi_2. \quad (2.33)$$

Para a terceira equação de continuidade, conforme apresentada em (2.8), no cenário em análise, temos

$$\begin{aligned} & \lambda_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} (P_{yy}[p_2, \psi_2, -z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, -z]) \\ & + 2\mu_2 P_{zz}[p_2, \psi_2, -z] R_{SP}^{[So2Li3S]} \\ & + 2\mu_2 (S_{yz}[s_2, \varphi_2, z]) \\ & + 2\mu_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} S_{yz}[s_2, \varphi_2, -z] \\ & = \lambda_3 T_{PS}^{[So2Li3S]} (P_{yy}[p_3, \psi_3, z] + P_{zz}[p_3, \psi_3, z]) \\ & + 2\mu_3 T_{SP}^{[So2Li3S]} P_{zz}[p_3, \psi_3, z], \end{aligned} \quad (2.34)$$

como $\mu_3 = \rho_3 s_3^2 = 0$, pois, $s_3 = 0$ seque que no caso sólido-líquido em que a onda incidente é do tipo S , a terceira equação de continuidade nos leva à seguinte equação

$$-\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} + \rho_2 p_2 \sin 2\varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} + \rho_3 p_3 T_{SP}^{[So2Li3S]} = \rho_2 p_2 \sin 2\varphi_2. \quad (2.35)$$

Portanto, as equações para o caso de uma onda incidente S em um meio sólido-líquido, descritas em (2.31), (2.33) e (2.35), podem ser expressas na forma de uma matriz como na Equação (2.17), resultando, assim, no sistema de equação matricial abaixo

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_2 & -\sin \varphi_2 & \cos \psi_3 \\ s_2 \sin 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{SP}^{[So2Li3S]} \\ R_{SS}^{[So2Li3S]} \\ T_{SP}^{[So2Li3S]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 \\ -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ \rho_2 p_2 \sin 2\varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Formando a matriz de cofatores e realizando a transposição, seguida por algumas manipulações algébricas, temos

$$\begin{aligned}
R_{SP}^{[So2Li3S]} &= -\frac{2\rho_2 s_2 p_2 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\
R_{SS}^{[So2Li3S]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\
T_{SP}^{[So2Li3S]} &= \frac{2\rho_2 s_2 p_2 \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

A Equação (2.37) representa o sistema matricial de Zoeppritz para a interface líquido-sólido quando a onda incidente é do tipo S .

2.1.4 Interface sólido 2 - líquido 1 para incidência de uma onda P

Considerando como foi explicado no caso de interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda P, o que difere, neste caso, é o segundo meio, visto que a onda está retornando e o meio pelo qual a onda pode refletir é o primeiro líquido. Diante disso, todos os cálculos efetuados neste caso são válidos, trocando ψ_3 por ψ_1 e p_3 por p_1 . Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
INC &= P[p_2, \psi_2, z] \\
REF &= R_{PP}^{[So2Li1P]} P[p_2, \psi_2, -z] + R_{PS}^{[So2Li1P]} S[s_2, \varphi_2, -z] \\
TRA &= T_{PP}^{[So2Li1P]} P[p_1, \psi_1, z]
\end{aligned} \quad (2.38)$$

E, aplicando as equações de continuidade (2.6), (2.7) e (2.8), obtemos o sistema matricial que se segue

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_2 & -\sin \varphi_2 & \cos \psi_3 \\ s_2 \sin 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 & \rho_1 p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{PP}^{[So2Li1]} \\ R_{PS}^{[So2Li1]} \\ T_{PP}^{[So2Li1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_2 \\ s_2 \sin 2\psi_2 \\ \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Daí, formando a matriz dos cofatores e realizando a transposição, seguida por algumas manipulações algébricas chegamos que

$$\begin{aligned}
R_{PP}^{[So2Li1P]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2} \\
R_{PS}^{[So2Li1P]} &= \frac{2\rho_2 p_2 s_2 \text{sen} 2\psi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2} \\
T_{PP}^{[So2Li1P]} &= \frac{2\rho_2 p_2^2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2}. \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Na Equação (2.40) apresentamos os coeficientes de reflexão e transmissão na matriz de Zoeppritz para a interface do tipo sólido 2 - líquido 1, na qual a onda incidente é do tipo P .

2.1.5 Interface sólido 2 - líquido 1 para incidência de uma onda S

Analogamente, considerando como foi explicado no caso de interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda S , o que difere neste caso é o segundo meio, visto que a onda está incidindo e refletindo no meio sólido 2 e se transmitindo no meio líquido 1. Diante disso, todos os cálculos efetuados neste caso são válidos, trocando ψ_3 por ψ_1 e p_3 por p_1 . Portanto, segue que para a interface do tipo sólido 2 - líquido 1, na qual a onda incidente é do tipo S , temos

$$\begin{aligned}
INC &= S[s_2, \varphi_2, z] \\
REF &= R_{SP}^{[So2Li1S]} P[p_2, \psi_2, -z] + R_{SS}^{[So2Li1S]} S[s_2, \varphi_2, -z] \\
TRA &= T_{SP}^{[So2Li1S]} P[p_1, \psi_1, z]. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Ao recorrermos às equações de continuidade que representamos em (2.6), (2.7) e (2.8), podemos traduzi-las da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_2 & -\text{sen} \varphi_2 & \cos \psi_1 \\ s_2 \text{sen} 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 & \rho_1 p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{SP}^{[So2Li1S]} \\ R_{SS}^{[So2Li1S]} \\ T_{SP}^{[So2Li1S]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen} \varphi_2 \\ -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ \rho_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Portanto, formando a matriz de cofatores e realizando a transposição, seguido por algumas manipulações algébricas, temos

$$\begin{aligned}
R_{SP}^{[So2Li1S]} &= -\frac{2\rho_2 s_2 p_2 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2} \\
R_{SS}^{[So2Li1S]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2} \\
T_{SP}^{[So2Li1S]} &= \frac{2\rho_2 s_2 p_2 \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_2 p_1 \cos \psi_2}. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

A Equação (2.43) representa o sistema matricial de Zoeppritz para a interface líquido-sólido quando a onda incidente é do tipo S .

3 Conservação de energia

No presente capítulo estudamos os coeficientes de energia de Knott, obtidos através dos coeficientes de reflexão e transmissão apresentados no Capítulo 2. Por meio da conservação de energia mostramos que nas três regiões de incidência, delimitadas pelos ângulos críticos, a energia se conserva.

3.1 Regiões de incidência

O coeficiente de reflexão é um parâmetro que descreve a quantidade de uma onda sísmica refletida por uma descontinuidade no meio de transmissão. É definido como a razão entre a amplitude da onda refletida e a onda incidente. Analogamente, o coeficiente de transmissão representa a fração de energia transmitida para outro meio. A seguir, estudamos a conservação de energia em uma interface do tipo líquido-sólido-líquido.

O nosso estudo da conservação de energia vai singir-se na primeira, segunda e terceira regiões identificadas como I, II e III, respectivamente. Em termos de extensão, as regiões são identificadas pela relação abaixo (3.2)

$$0 < \psi_1^{[I]} < \arcsin \frac{p_1}{p_2} < \psi_1^{[II]} < \arcsin \frac{p_1}{s_2} < \psi_1^{[III]} < \frac{\pi}{2}. \quad (3.1)$$

Quando $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, de acordo com a Lei de Snell obtemos $\sin \psi_1 = \frac{p_1}{p_2}$. Por outro lado, se $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, então, $\psi_1 = \frac{p_1}{s_2}$, ou seja, no contexto de duas interfaces temos dois ângulos críticos, dados por

$$\psi_{1c} = \arcsin \frac{p_1}{p_2} \quad \text{e} \quad \psi_{2c} = \arcsin \frac{p_1}{s_2}. \quad (3.2)$$

Portanto, vamos demonstrar que a Lei de Conservação de Energia é válida nas diferentes regiões.

3.2 Interface líquido 1 - sólido 2

No capítulo anterior mostramos que, no contexto de uma interface líquido-sólido, os coeficientes são precisamente determinados pela Equação (2.19). Portanto, os coeficientes de Knott associados a eles são

$$\begin{aligned}
E_{\text{REF}(P)}^{[\text{Li1So2P}]} &= \left[\frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \right]^2 \\
E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{Li1So2P}]} &= \frac{\rho_2 p_2 \cos \psi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left[\frac{2\rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \right]^2 \\
E_{\text{TRA}(S)}^{[\text{Li1So2P}]} &= \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left[\frac{2\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 \sin 2\psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.1 Primeira região de incidência

Na primeira região de incidência, onde $0 < \psi_1^{[I]} < \arcsin \frac{p_1}{p_2}$, quando tanto o ângulo ψ_2 quanto o ângulo φ_2 são números reais, ocorre um fenômeno interessante. Nessa situação, observamos o surgimento de uma onda P refletida que se propaga na direção oposta, além de duas ondas P e S transmitidas que se propagam para a frente. Essas ondas são fundamentais para a compreensão dos coeficientes de energia de Knott, que desempenham um papel crucial na análise dos fenômenos sísmicos. Portanto, podemos concluir que a Lei da Conservação de Energia é válida nessa primeira região, nos pontos de reflexão e de transmissão, ou seja, é válida a Equação (3.4), dada por

$$\left[R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \right]^2 + \frac{\rho_2 p_2 \cos \psi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left[T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \right]^2 + \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left[T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} \right]^2 = 1, \tag{3.4}$$

Para simplificar os cálculos, usando a equação (3.4), podemos observar que o denominador é dado por

$$\left[\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \right]^2. \tag{3.5}$$

Podemos, então, realizar manipulações algébricas no numerador para verificar se ele é igual ao denominador. Segue-se que o numerador da Equação (3.4) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
& \left[\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \right]^2 \\
& + \frac{\rho_2 p_2 \cos \psi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} (2\rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2)^2 \\
& + \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} (2\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 \sin 2\psi_2)^2 \\
& = \left[\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \right]^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto, o numerador é igual ao denominador. Assim, a Lei de Conservação de Energia é satisfeita e, podemos escrever

$$E_{\text{REF}(P)}^{[Li1So2P]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[Li1So2P]} + E_{\text{TRA}(S)}^{[Li1So2P]} = 1. \quad (3.7)$$

Vemos que, da Equação (3.3), quando ψ_1 supera o primeiro ângulo crítico, ou seja, $\psi_1 > \psi_{1c}$, temos a segunda região.

3.2.2 Segunda região de incidência

A segunda região de incidência para o caso líquido-sólido é $\arcsin \frac{p_1}{p_2} < \psi_1^{II} < \arcsin \frac{p_1}{s_2}$. Como $\cos^2 \psi_2 = 1 - \sin^2 \psi_2$, podemos obter $\cos \psi_2$ da seguinte forma

$$\cos \psi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \psi_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \sin \psi_1\right)^2}, \quad (3.8)$$

sendo que na região II, temos $\sin \psi_1 > \frac{p_1}{p_2}$, então, da Equação (3.8) segue que

$$\cos \psi_2 = i \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1} \sin \psi_1\right)^2 - 1} = i |\cos \psi_2|, \quad (3.9)$$

então, teremos a primeira e a terceira equação do sistema dado em (3.3). No entanto, fazendo a substituição $\cos \psi_2 = i |\cos \psi_2|$, obtemos

$$\begin{aligned} E_{\text{REF}(P)}^{[Li1So2P]} &= \frac{\left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i 2s_2^2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2| \sin 2\varphi_2) - i \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2| \right|^2}{\left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i 2s_2^2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2| \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 i |\cos \psi_2| \right|^2} \\ E_{\text{TRA}(S)}^{[Li1So2P]} &= \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| \frac{4i \rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 |\cos \psi_2| \sin \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i 2s_2^2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2| \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 i |\cos \psi_2|} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

E ocorre que, na segunda região de incidência é válida a Lei de Conservação de Energia e, a partir da Equação (3.10), escrevemos

$$\left| R_{PP}^{[Li1So2P]} \right|^2 + \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| T_{PS}^{[Li1So2P]} \right|^2 = 1, \quad (3.11)$$

e, para provar isso, basta vermos que o denominador da Equação (3.11) é

$$\left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2s_2^2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2| \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2| \right|^2, \quad (3.12)$$

e o numerador da Equação (3.11) é dado por

$$\begin{aligned}
& \left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i2s_2^2 \text{sen}\psi_2 | \cos \psi_2 | \text{sen}2\varphi_2) - i\rho_1 p_1 p_2 | \cos \psi_2 | \right|^2 \\
& + \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} (4i\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 | \cos \psi_2 | \text{sen}\psi_2)^2 \\
& = \left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2s_2^2 \text{sen}\psi_2 | \cos \psi_2 | \text{sen}2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 | \cos \psi_2 | \right|^2,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

sendo que o denominador e o numerador da Equação (3.11) são iguais. Então, concluímos que

$$E_{\text{REF}(P)}^{[Li1So2P]} + E_{\text{TRA}(S)}^{[Li1So2P]} = 1. \tag{3.14}$$

Vemos que, da Equação (3.3), quando ψ_1 supera o segundo ângulo crítico, ou seja, $\psi_1 > \psi_{2c}$, temos a terceira região.

3.2.3 Terceira região de incidência

A terceira região de incidência para o cenário em que $\arcsin \frac{p_1}{s_2} < \psi_1^{III} < \frac{\pi}{2}$, apresenta ângulos totalmente complexos. No Sistema (3.3) ficamos unicamente com sua primeira equação. Tomando $\cos \psi_2 = i | \cos \psi_2 |$ e $\text{sen}\varphi_2 = i | \text{sen}\varphi_2 |$ temos

$$E_{\text{REF}(P)}^{[Li1So2P]} = \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - s_2^2 | \text{sen}2\psi_2 \text{sen}2\varphi_2 |) - i\rho_1 p_1 p_2 | \cos \psi_2 |}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - s_2^2 | \text{sen}2\psi_2 \text{sen}2\varphi_2 |) + i\rho_1 p_1 p_2 | \cos \psi_2 |} \right|^2 = 1. \tag{3.15}$$

Em suma, na interface líquido-sólido, temos as três regiões. E a conservação de energia é preservada em todas elas. Na Figura 14, visualizamos as três regiões, separadas pelos ângulos críticos.

3.3 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda P

Os coeficientes de reflexão e transmissão para o caso sólido-líquido, quando a onda incidente é do tipo P, são dados pela Equação (2.28). Consequentemente, os respectivos coeficientes de energia de Knott assumem a forma

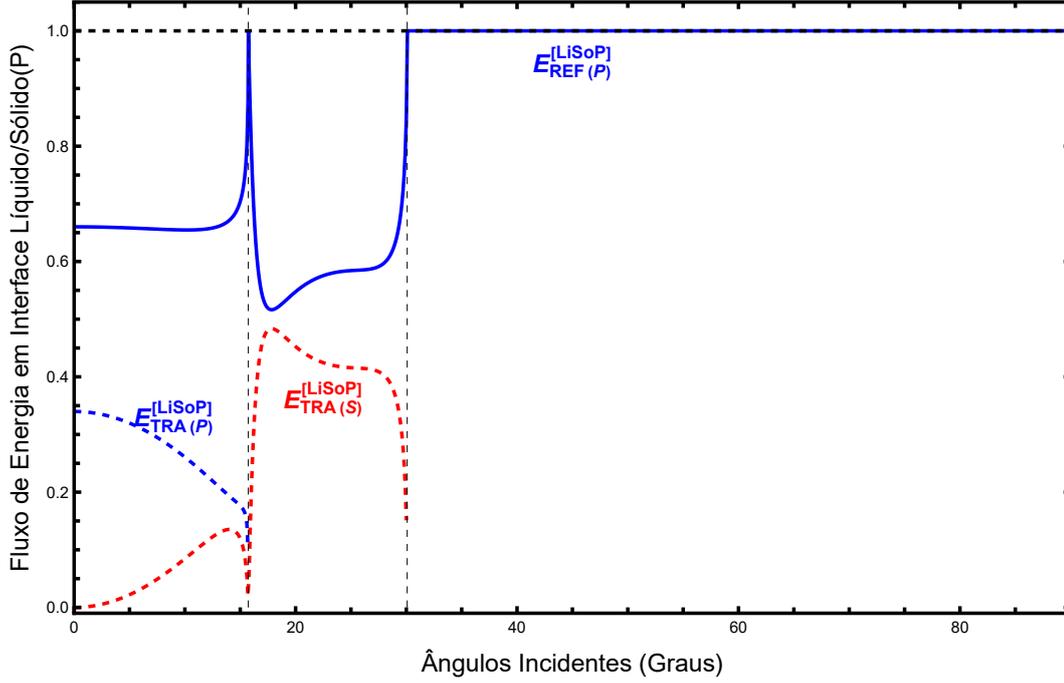


Figura 14 – Conservação de energia no caso de transição líquido-sólido

$$\begin{aligned}
 E_{REF(P)}^{[So2Li3P]} &= \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\
 E_{REF(S)}^{[So2Li3P]} &= \frac{s_2 \cos \varphi_2}{p_2 \cos \psi_2} \left| \frac{2\rho_2 p_2 s_2 \sin 2\psi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\
 E_{TRA(P)}^{[So2Li3P]} &= \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 p_2 \cos \psi_2} \left| \frac{2\rho_2 p_2^2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Dessa forma, pretendemos mostrar que, para este cenário, a Lei de Conservação de Energia é válida. Na primeira região, onde todos os ângulos são reais, temos que

$$\left[R_{PP}^{[So2Li3P]} \right]^2 + \frac{s_3 \cos \varphi_2}{p_2 \cos \psi_2} \left[R_{PS}^{[So2Li3P]} \right]^2 + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 p_2 \cos \psi_2} \left[T_{PP}^{[So2Li3P]} \right]^2 = 1, \tag{3.17}$$

E notamos que na Equação (3.17) o denominador é dado por

$$\left[\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right]^2, \tag{3.18}$$

e o numerador é

$$\begin{aligned}
 & \left[\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right]^2 \\
 & + \frac{s_2 \cos \varphi_2}{p_2 \cos \psi_2} (2\rho_2 p_2 s_2 \sin 2\psi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3)^2 \\
 & + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 p_2 \cos \psi_2} (2\rho_2 p_2^2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2)^2 \\
 & = \left[\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right]^2
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Note que, pela Lei de Snell $2s_2 \sin \psi_2 = 2p_2 \sin \varphi_2$. Isso prova que o denominador e o numerador da equação da conservação de energia no caso sólido-líquido, dada em (3.17), são iguais, pelo que

$$E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So2Li3P}]} + E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3P}]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3P}]} = 1. \quad (3.20)$$

Portanto, na Equação (3.20), superando o primeiro ângulo crítico, ψ_{1c} , o ψ_2 é complexo e, não teremos $E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3P}]}$ e $E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3P}]}$. Conseqüentemente, não teremos $E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So2Li3P}]}$. Assim, conclui-se que no caso sólido-líquido, quando a onda incidente é do tipo P, a incidência ocorre somente na região I.

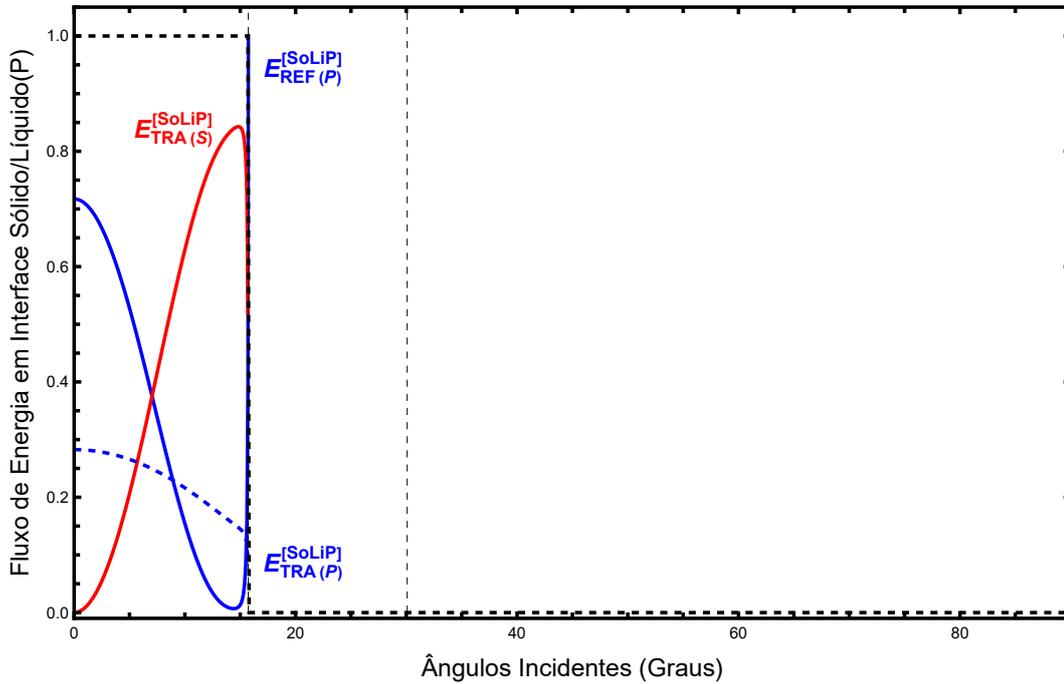


Figura 15 – Conservação de energia no caso de transição sólido-líquido incidente P

3.3.1 Interface sólido 2 - líquido 3 para incidência de uma onda S

Para o cenário sólido-líquido, no qual a onda incidente é do tipo S, os coeficientes de reflexão e transmissão são dados pela Equação (2.37). Conseqüentemente, as respectivas equações de energia são

$$\begin{aligned}
E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} &= \frac{p_2 \cos \psi_2}{s_2 \cos \varphi_2} \left| \frac{2\rho_2 s_2 p_2 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\
E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} &= \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\
E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} &= \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_1 s_2 \cos \varphi_2} \left| \frac{2\rho_2 s_2 p_2 \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3.2 Primeira região de incidência

Tal como referimos no caso líquido-sólido, na interface sólido-líquido quando a onda incidente é do tipo S , a primeira região de incidência é onde $0 < \psi_1^{[I]} < \arcsin \frac{p_1}{p_2}$. Nesta região temos,

$$\frac{p_2 \cos \psi_2}{s_2 \cos \varphi_2} \left[R_{SP}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} \right]^2 + \left[R_{SS}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} \right]^2 + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} \left[T_{SP}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} \right]^2 = 1. \tag{3.22}$$

E, portanto, pela Equação (3.22), vemos que o denominador é

$$\left| \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2, \tag{3.23}$$

e o numerador na Equação (3.22) é

$$\begin{aligned}
&\frac{p_2 \cos \psi_2}{s_2 \cos \varphi_2} (2\rho_2 s_2 p_2 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3)^2 \\
&+ \left| \rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2 \\
&+ \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} (2\rho_2 s_2 p_2 \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2)^2 \\
&= \left[\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Isso conclui que o denominador é igual ao numerador, o que nos leva a seguinte equação

$$E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} + E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]} = 1. \tag{3.25}$$

Portanto, a partir da Equação (3.22), quando ψ_1 supera ψ_2 a onda responsável pelo coeficiente de energia de Knott $E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So}_2\text{Li}_3\text{S}]}$ não se propaga, originando a segunda região.

3.3.3 Segunda região de incidência

A segunda região de incidência para o caso sólido-líquido é $\arcsin \frac{p_1}{p_2} < \psi_1^H < \arcsin \frac{p_1}{s_2}$. Como $\cos^2 \psi_2 = 1 - \sin^2 \psi_2$, tal como na Equação (3.9), segue que, $\cos \psi_2 = i \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1} \sin \psi_1\right)^2 - 1} = i |\cos \psi_2|$. Entretanto, os coeficientes de energia de Knott $E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3S}]}$ e $E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3S}]}$ são reescritos como seguem

$$E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3S}]} = \left| \frac{i \rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - 2i s_2^2 |\cos \psi_2| \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2)}{i \rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2i s_2^2 |\cos \psi_2| \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2)} \right|^2$$

$$E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} = \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_1 s_2 \cos \varphi_2} \left| \frac{4i \rho_2 s_2 p_2 |\cos \psi_2| \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{i \rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2i s_2^2 |\cos \psi_2| \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2)} \right|^2. \quad (3.26)$$

A conservação de energia agora está garantida por

$$\left| R_{\text{SS}}^{[\text{So2Li3S}]} \right|^2 + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} \left| T_{\text{SP}}^{[\text{So2Li3S}]} \right|^2 = 1. \quad (3.27)$$

Por conseguinte, vemos que o denominador da Equação (3.25) é dado na Equação (3.28), como segue

$$\left| i \rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2i s_2^2 |\cos \psi_2| \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2) \right|^2. \quad (3.28)$$

e o numerador é dado por

$$\begin{aligned} & \left| i \rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - 2i s_2^2 |\cos \psi_2| \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2) \right|^2 \\ & + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} (4i \rho_2 s_2 p_2 |\cos \psi_2| \sin \varphi_2 \cos \varphi_2)^2 \\ & = \left| i \rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2i s_2^2 |\cos \psi_2| \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Então, o denominador e o numerador da Equação (3.27) são iguais. Portanto,

$$E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3S}]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} = 1. \quad (3.30)$$

Como podemos ver, se ψ_1 supera o segundo ângulo crítico ψ_{2c} , o ângulo φ_2 torna-se complexo e não teremos todos os coeficientes de reflexão e transmissão na terceira região.

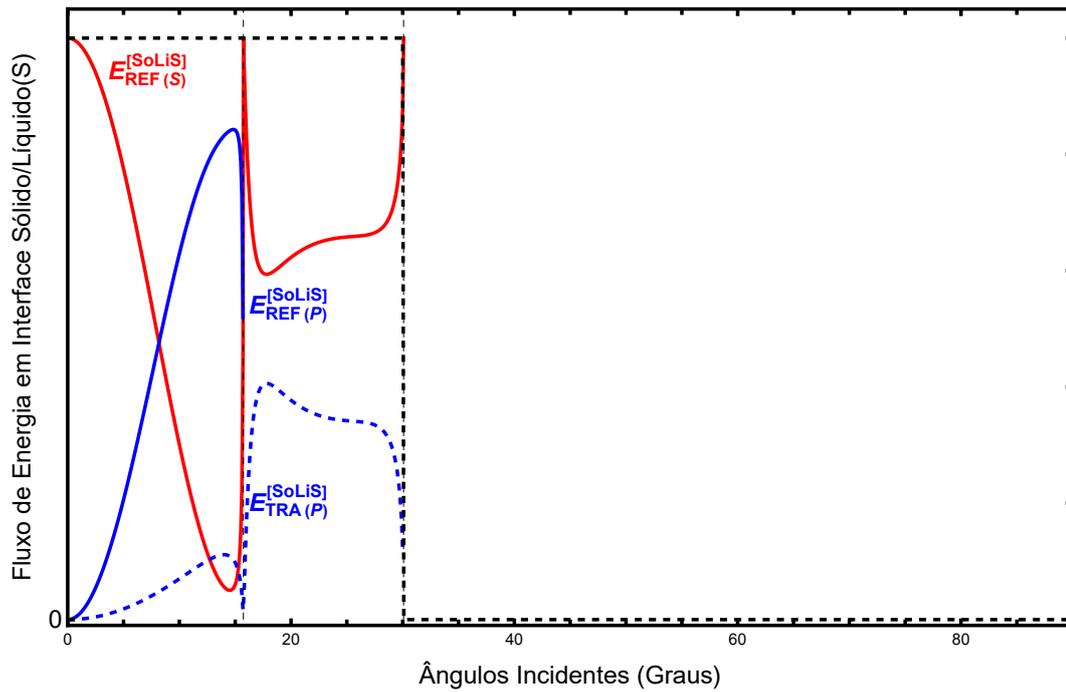


Figura 16 – Conservação de energia no caso de transição sólido-líquido incidente S

No caso de uma interface sólido 2 - líquido 1, quando a onda incidente é do tipo P ou S, a conservação de energia também é verificada, bastando, neste caso, ter em consideração que o segundo meio é o líquido 1. Portanto, todos os cálculos feitos são válidos, trocando os parâmetros do líquido 3 pelos do líquido 1.

4 Múltiplas reflexões e interferências

Neste capítulo descrevemos o modelo estudado neste trabalho. Começamos apresentando os ângulos críticos, seguido da geometria do problema e, finalmente, descrevemos as reflexões e transmissões nas interfaces do tipo água-granito-água e água-granito-óleo.

4.1 Ângulos críticos na interface líquido-sólido-líquido

Para o estudo de múltiplas reflexões pretendemos analisar situações em que dois refletores estão envolvidos. No presente trabalho nosso modelo proposto é do tipo líquido-sólido-líquido, onde, por simplificação, consideramos a homogeneidade de cada camada. Sendo assim, a Lei de Snell para esse contexto segue abaixo

$$\frac{\text{sen}\psi_1}{p_1} = \frac{\text{sen}\psi_2}{p_2} = \frac{\text{sen}\varphi_2}{s_2} = \frac{\text{sen}\psi_3}{p_3}, \quad (4.1)$$

da Equação (4.1) podemos escrever

$$\text{sen}\psi_1 = \frac{p_1}{p_2}\text{sen}\psi_2 = \frac{p_1}{s_2}\text{sen}\varphi_2 = \frac{p_1}{p_3}\text{sen}\psi_3. \quad (4.2)$$

Entretanto, na Equação (4.2) temos que, quando $\psi_2 = \frac{\pi}{2}$, então, não teremos a onda P se propagando no segundo meio, daí, $\text{sen}\psi_1 = \frac{p_1}{p_2}$, ou seja, $\psi_1 = \arcsin\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. De modo análogo, não teremos a onda S se $\text{sen}\psi_1 = \frac{p_1}{s_2}$, o que implica $\psi_1 = \arcsin\left(\frac{p_1}{s_2}\right)$.

Portanto, conforme mencionado anteriormente, o terceiro meio é constituído por um líquido. Sendo assim, a transmissão só ocorre na onda P naquele meio e, após o primeiro ângulo crítico, não teremos a propagação no terceiro meio. Dessa forma, temos apenas dois ângulos críticos descritos como segue

Modelo	Ângulos Críticos	
	$\arcsin \frac{p_1}{p_2}$	$\arcsin \frac{p_1}{s_2}$
Água/granito/água	15.73	30.08
Água/granito/óleo		

Tabela 2 – Ângulos críticos em interface líquido-sólido-líquido

4.2 A Geometria do problema

Na Tabela 3 descrevemos as coordenadas dos pontos representados na Figura 18. Elas são a base para a montagem do programa computacional que permite visualizar as reflexões a partir da origem O .

Nome	O Ponto
Onda incidente(I)	$(-d_1 \operatorname{tg} \psi_1, d_1)$
Onda P transmitida no segundo meio (P)	$(d_2 \operatorname{tg} \psi_2, -d_2)$
Onda S transmitida no segundo meio (S)	$(d_2 \operatorname{tg} \varphi_2, -d_2)$
Reflexão(S) da (S) no segundo meio (D_2)	$(2d_2 \operatorname{tg} \varphi_2, 0)$
Reflexão(P) da S_2 no segundo meio (D_3)	$(d_2 \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \psi_2, 0)$
Reflexão(S) da P no segundo meio (D_3)	$(d_2 \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \psi_2, 0)$
Reflexão(P) da P_2 no segundo meio (D_4)	$(2d_2 \operatorname{tg} \psi_2, 0)$
R_1	$(d_1 \operatorname{tg} \psi_1, d_1)$
R_2	$(2d_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + d_1 \operatorname{tg} \psi_1, d_1)$
R_3	$(d_2(\operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \psi_2) + d_1 \operatorname{tg} \psi_1, d_1)$
R_4	$(2d_2 \operatorname{tg} \psi_2 + d_1 \operatorname{tg} \psi_1, d_1)$
A onda transmitida no terceiro meio vindo de P (E_1)	$(d_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + d_3 \operatorname{tg} \psi_3, -(d_2 + d_3))$
A onda transmitida no terceiro meio vindo de S (E_2)	$(d_2 \operatorname{tg} \psi_2 + d_3 \operatorname{tg} \psi_3, -(d_2 + d_3))$

Tabela 3 – Tabela dos pontos da visualização geométrica do problema

Perante os pontos da Tabela 3, construímos o modelo como representado na Figura 17, válido para interfaces do tipo líquido-sólido-líquido.

A Figura 17 é a representação geométrica dos modelos água/granito/água e água/granito/óleo. Esses modelos presumem que as velocidades e densidades de cada meio são conhecidas. Conforme descrito nas Equações (3.30) e (4.2) e, de forma concisa na Tabela 2, onde os ângulos críticos do modelo são detalhados, procedemos à análise do comportamento das múltiplas reflexões quando a onda P é enviada, temos imediatamente na primeira interface a reflexão primária (R_1). No segundo meio, a onda é transmitida como $T_{PS}^{[Li1So2]}$ e $T_{PP}^{[Li1So2]}$, as quais, por sua vez, refletem como $R_{SS}^{[So2Li3]}$, $R_{SP}^{[So2Li3]}$, $R_{PS}^{[So2Li3]}$, e $R_{PP}^{[So2Li3]}$, respectivamente, dando origem às múltiplas reflexões R_2 , R_3 e R_4 . Investigamos esses cenários para diferentes valores de ψ_1 , tais como, 5° , 10° , 20° , 25° , 35° e 45° , levando em conta os ângulos críticos.

Portanto, dos gráficos apresentados nas Figuras 18 e 19, observamos um comportamento semelhante, no qual, a onda P quando enviada para se propagar nas interfaces subsequentes se subdivide em duas outras ondas, sendo a onda P e a onda S, com as velocidades ψ_2 e φ_2 , respectivamente. Teoricamente, a reflexão primária R_1 e as múltiplas reflexões R_2 , R_3 e R_4 são todas visíveis quando $\psi_1 < \psi_{c1}$, conforme mostrado nos gráficos (a) e (b).

Quando ψ_1 atinge ψ_{c1} , ou seja, $\psi_{c1} < \psi_1 < \psi_{c2}$, ocorre que ψ_2 atinge o máximo,

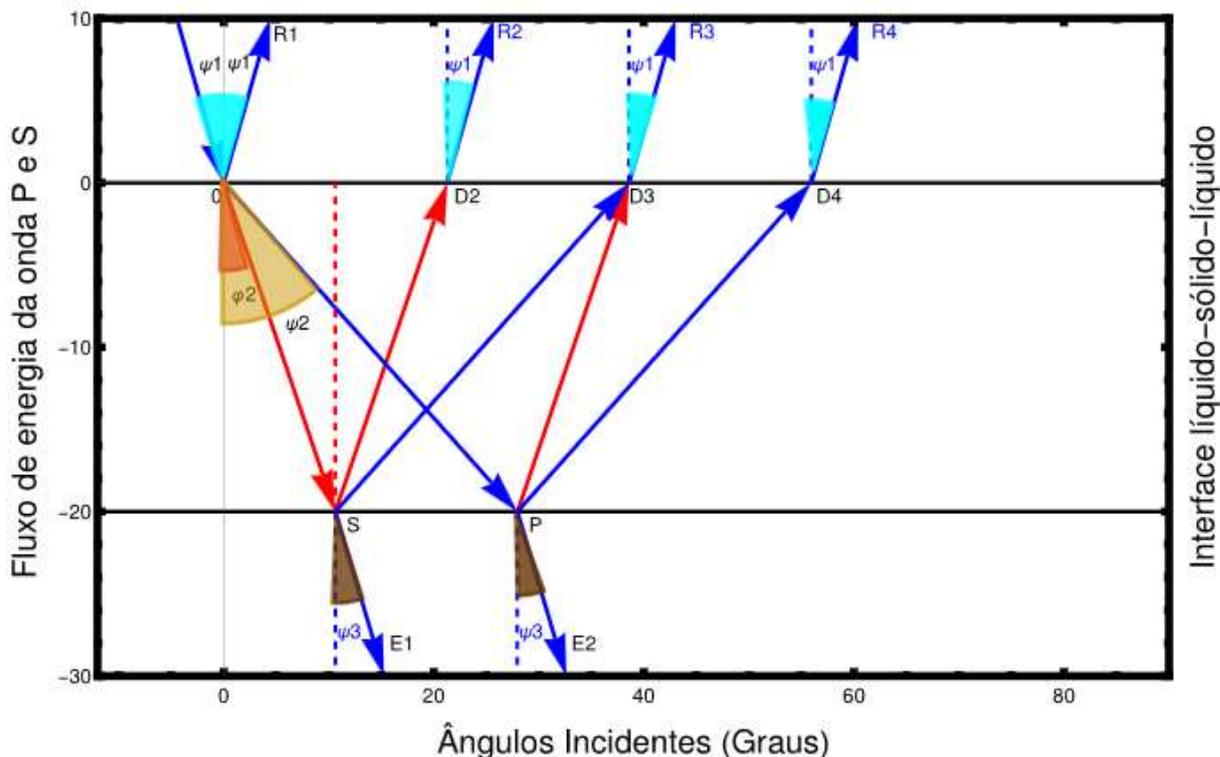


Figura 17 – Reflexões múltiplas em camadas do tipo líquido-sólido-líquido.

resultando na onda P não se propagando, conseqüentemente, não teremos as reflexões R_3 e R_4 , como ilustrado nos gráficos (c) e (d).

Finalmente, quando $\psi_1 > \psi_{c2}$ temos que φ_2 atinge o máximo, resultando na onda S não se propagando e, como conseqüência, não teremos a reflexão múltipla R_2 , ou seja, estaremos perante a reflexão total. A fonte emite uma onda e é refletida completamente, conforme apresentado nos gráficos (e) e (f).

Quando uma onda atravessa uma fronteira entre água-granito-água ou água-granito-óleo, com diferentes índices de refração, geralmente ela se divide em duas novas ondas: uma refletida e outra refratada. Isso sempre acontece, exceto no caso de reflexão interna total. A reflexão interna está sempre presente, sem exceções, mesmo quando a onda atinge a fronteira diretamente. No entanto, o mesmo não é verdadeiro para a onda refratada.

A reflexão interna total ocorre apenas quando o meio de origem é “ópticamente mais denso”, ou seja, tem um índice de refração maior. O ângulo de refração no meio “ópticamente menos denso” é maior do que o ângulo de incidência no meio “mais denso”, mas seu valor não pode ser maior do que 90 graus. Assim, a fórmula funciona até dar respostas reais em todos os outros casos, ou seja, a partir de um ângulo de incidência maior que o “crítico”, ocorre a reflexão interna total e toda a energia da onda incidente é refletida. Para ângulos menores que o crítico, quanto menor o ângulo, maior a energia da onda refratada.

4.2.1 Modelo Água-Granito-Água

No modelo água-granito-água consideramos que a primeira camada é constituída por água, com uma velocidade de onda P de 1494.33m/s. A segunda camada é composta por granito, com velocidades de ondas P e S de 5510.42m/s e 2981.93m/s, respectivamente. Por fim, a terceira camada é novamente formada por água, mantendo a mesma velocidade de onda P que a primeira camada, ou seja, 1494.33m/s.

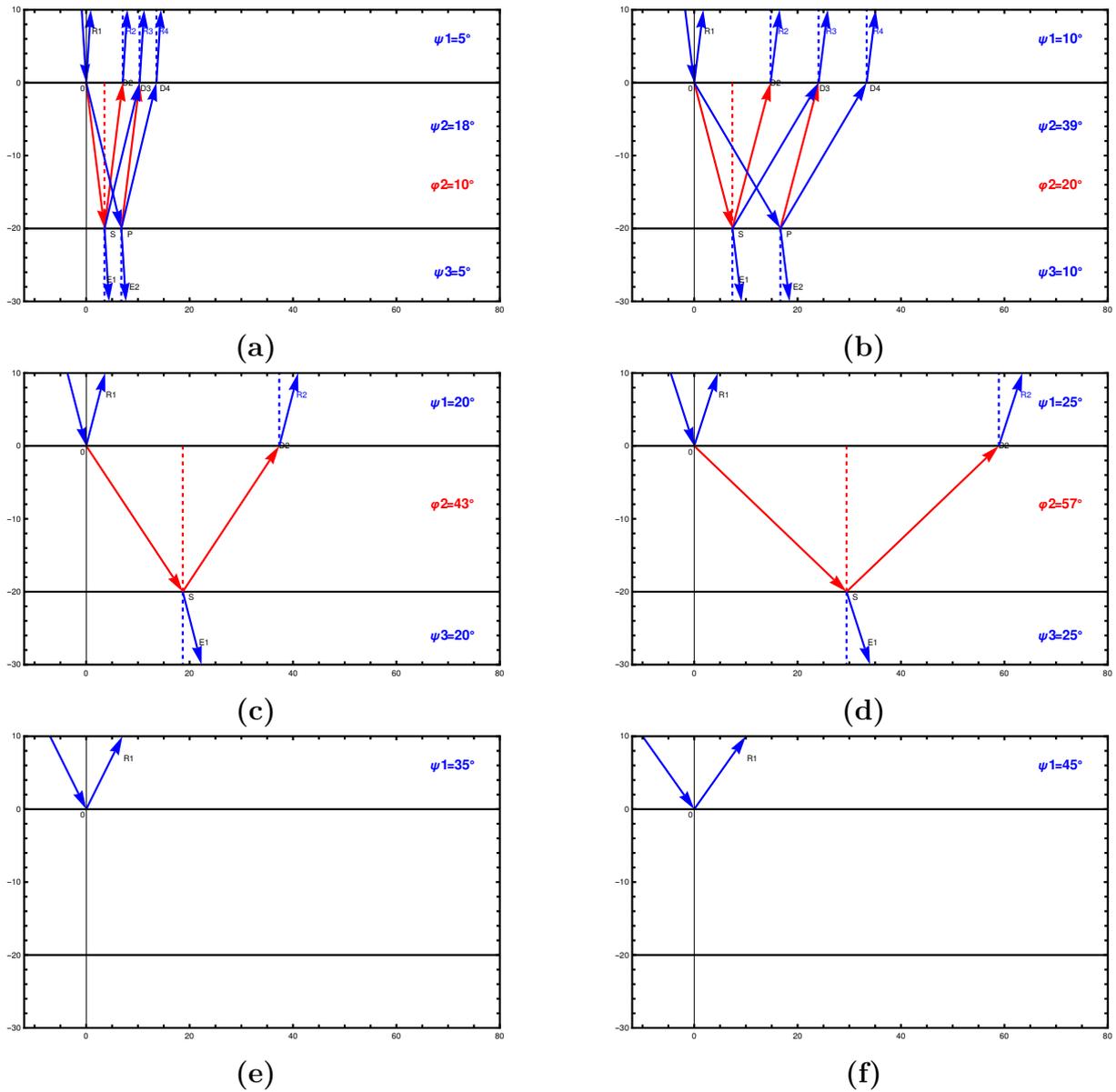


Figura 18 – Múltiplas reflexões para diferentes ângulos de ψ_1 na interface do tipo água/granito/água (a), (b) são reflexões para $\psi_1 < \psi_{c1}$, (c), (d) para $\psi_{c1} < \psi_1 < \psi_{c2}$, e (e), (f) para $\psi_1 > \psi_{c2}$.

4.2.2 Modelo Água-Granito-Óleo

No modelo água-granito-óleo consideramos que a primeira camada é composta por água, com uma velocidade de onda P de 1494.33m/s. A segunda camada é feita de granito, com velocidades de ondas P e S de 5510.42m/s e 2981.93m/s, respectivamente. Por fim, a terceira camada é constituída por óleo, com uma velocidade de onda P de 1294.77m/s.

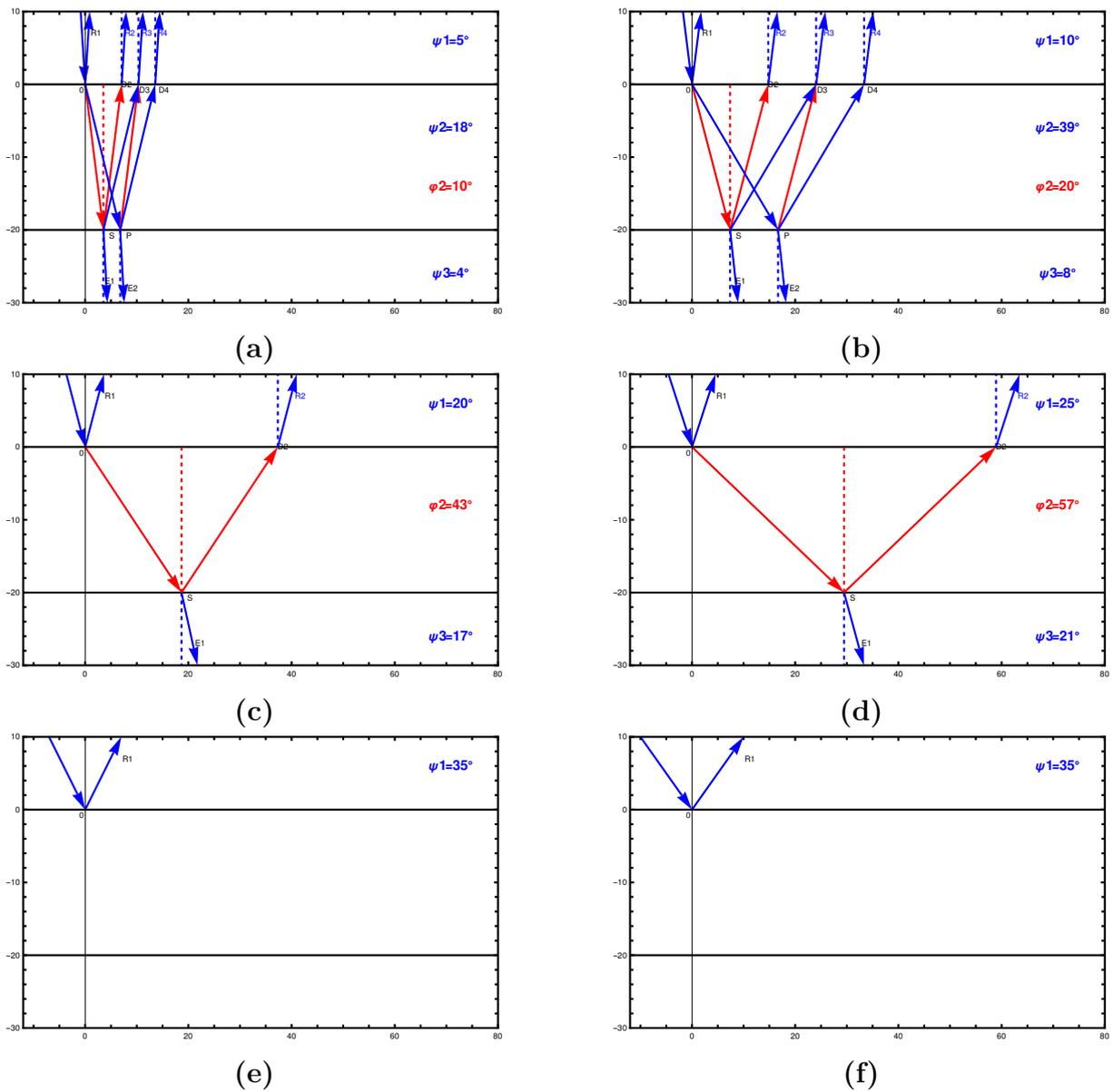


Figura 19 – Múltiplas reflexões para diferentes ângulos de ψ_1 na interface do tipo água/granito/óleo. (a), (b) são reflexões para $\psi_1 < \psi_{c1}$, (c), (d) para $\psi_{c1} < \psi_1 < \psi_{c2}$, e (e), (f) para $\psi_1 > \psi_{c2}$.

4.2.3 Comportamento das reflexões

Na seção anterior foram apresentados gráficos das reflexões em três regiões de incidência e em diferentes interfaces. Conforme descrito no modelo, observamos as quatro reflexões que denominamos como R_1, R_2, R_3 e R_4 . Nosso objetivo neste caso é plotar as reflexões para compreender o comportamento do fluxo de energia nas três regiões de incidência.

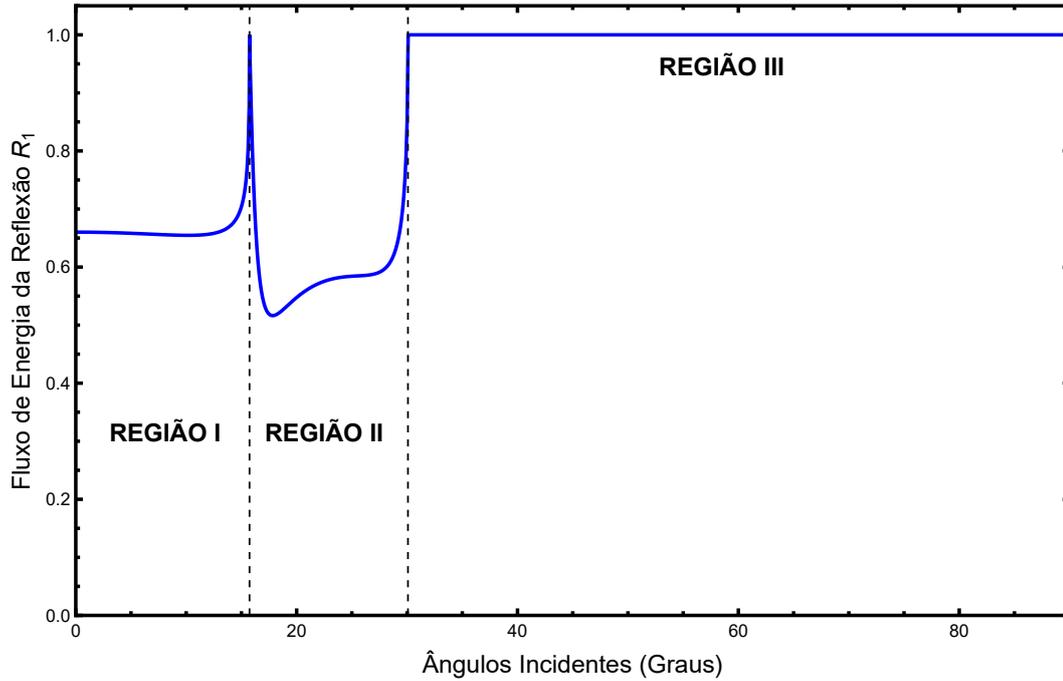


Figura 20 – Reflexão R_1 representada nas três regiões de incidência. Nos casos de água/granito/água e água/granito/óleo observa-se o mesmo comportamento.

4.3 Estudo analítico

Como podemos observar pela Figura 20, R_1 está nas três regiões. Faremos então um estudo analítico para determinar os pontos nos quais R_1, R_2, R_3 e R_4 tomam quando ψ_1 assume ângulos críticos.

Começemos no caso em que $\psi_1 = 0^\circ$. Pela Lei de Snell é fácil inferir que $\psi_2 = \varphi_2 = \psi_3 = 0^\circ$. Sendo assim, temos que

$$R_1 = \left| \frac{\rho_2 p_2^2 - \rho_1 p_1 p_2}{\rho_2 p_2^2 + \rho_1 p_1 p_2} \right|^2 = \left| \frac{\rho_2 p_2 - \rho_1 p_1}{\rho_2 p_2 + \rho_1 p_1} \right|^2 \quad (4.3)$$

por outro lado, note que

$$R_2 = |T_{PS}^{[Li1So2]}|^2 \cdot |R_{SS}^{[So2Li3]}|^2 \cdot |T_{SP}^{[So2Li1]}|^2 \quad (4.4)$$

daí, temos que $T_{PS}^{[Li1So2]} = 0$, pelo que concluímos que $R_2 = 0$.

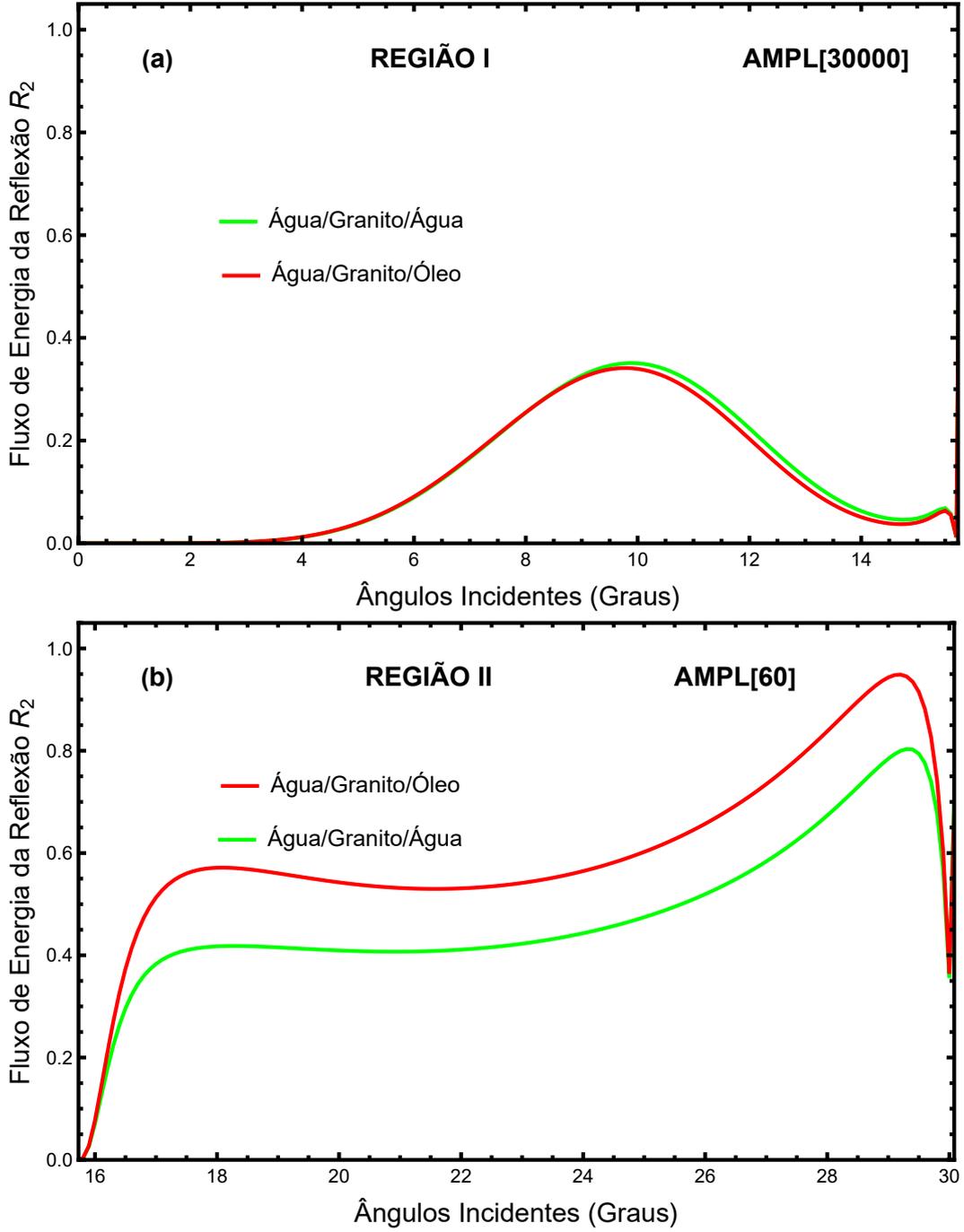


Figura 21 – Reflexão R_2 nas diferentes regiões de incidência. Em (a) temos o fluxo de energia refletido na primeira região e em (b) na segunda região de incidência.

Similarmente, observe que

$$R_3 = |T_{PS}^{[Li1So2]} \cdot R_{SP}^{[So2Li3]} \cdot T_{PP}^{[So2Li1]} + T_{PP}^{[Li1So2]} \cdot R_{PS}^{[So2Li3]} \cdot T_{SP}^{[So2Li1]}|^2 \quad (4.5)$$

pela condição dada segue que $T_{PS}^{[Li1So2]} = R_{SP}^{[So2Li3]} = R_{PS}^{[So2Li3]} = T_{SP}^{[So2Li1]} = 0$, com isso, concluímos que $R_3 = 0$.

Finalmente,

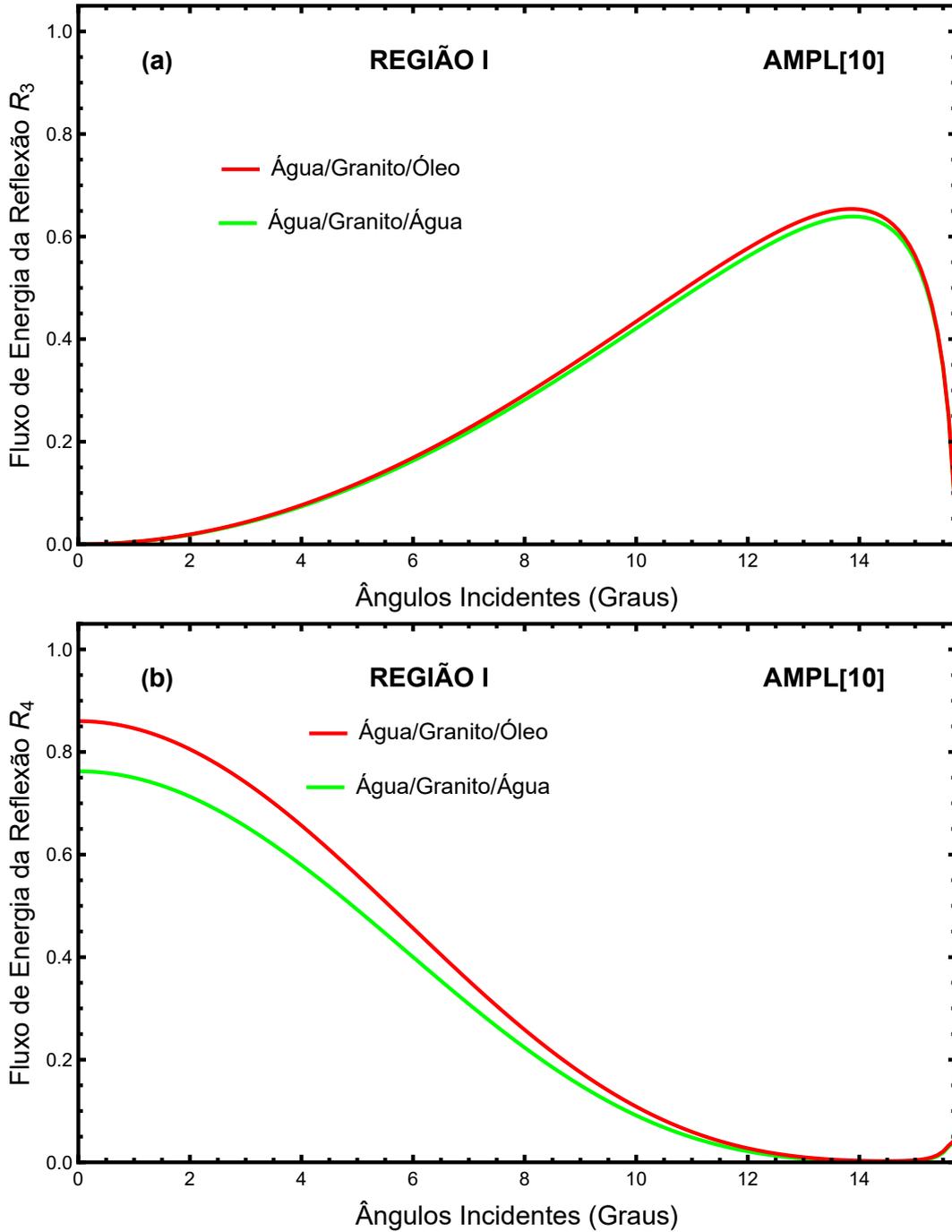


Figura 22 – Reflexão R_3 em (a), onde vemos que o fluxo de energia é maior em comparação com R_4 em (b). As duas representações referem-se à primeira região.

$$R_4 = |T_{PP}^{[Li1So2]}|^2 \cdot |R_{PP}^{[So2Li3]}|^2 \cdot |T_{PP}^{[So2Li1]}|^2 \quad (4.6)$$

em que nenhuma das partes é nula e, quando considerada a condição dada, temos

$$\begin{aligned}
 R_4 &= \left| \frac{2\rho_1 p_1 p_2}{\rho_1 p_1 p_2 + \rho_2 p_2} \right|^2 \cdot \left| \frac{-\rho_2 p_2^2 + \rho_3 p_2 p_3}{\rho_2 p_2^2 + \rho_3 p_2 p_3} \right|^2 \\
 &\quad \cdot \left| \frac{2\rho_2 p_2^2}{\rho_2 p_2^2 + \rho_3 p_2 p_3} \right|^2 \\
 &= 16 \left| \frac{p_1 p_2^3 \rho_1 \rho_2 (-p_2^2 \rho_2 + p_2 p_3 \rho_3)}{(p_1 p_2 \rho_1 + p_2^2 \rho_2)^2 (p_2^2 \rho_2 + p_2 p_3 \rho_3)} \right|^2
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Simplificando a Equação (4.7), conclui-se que

$$R_4 = 16 \left| \frac{p_1 p_2 \rho_1 \rho_2 (p_2^2 \rho_2 - p_3 \rho_3)}{(p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2)^2 (p_2 \rho_2 + p_3 \rho_3)} \right|^2 \tag{4.8}$$

Agora, faremos o estudo no caso em que $\psi_1 = \psi_{c1}$, onde ψ_{c1} é o ângulo crítico. Quando isso ocorre, pela Lei de Snell, vemos que $\sin \psi_2 = 1$ e $\cos \psi_2 = 0$.

Portanto, na relação de R_1 , se tomarmos $\sin \psi_2 = 1$ e $\cos \psi_2 = 0$ nota-se que R_1 atinge o máximo, ou seja, $R_1 = 1$.

Por outro lado, R_2 , conforme dado pela Equação (4.4), para $\sin \psi_2 = 1$ e $\cos \psi_2 = 0$, temos que $T_{\text{SP}}^{[\text{So2Li1}]} = 0$ e, daí, segue que $R_2 = 0$.

Analogamente, para R_3 , conforme a Equação (4.5) e pela condição dada temos que $T_{\text{PP}}^{[\text{So2Li1}]}$ e $T_{\text{SP}}^{[\text{So2Li1}]}$ são nulos, conseqüentemente $R_3 = 0$.

E, no caso de R_4 , tal como escrevemos na Equação (4.6), tem-se que $T_{\text{PP}}^{[\text{So2Li1}]} = 0$, portanto, $R_4 = 0$.

Finalmente, para $\psi_1 = \psi_{c2}$ temos que $\sin \varphi_2 = 1$ e $\cos \varphi_2 = 0$, imediatamente, $R_1 = 1$ e $R_2 = 0$. Sendo assim, tomando os valores teóricos das velocidades e densidades de cada meio, conforme apresentados na Tabela 1, analiticamente e de forma resumida, apresentamos as amplitudes que R_1 , R_2 , R_3 e R_4 atingem quando ψ_1 assume 0° e os ângulos críticos (ver a Tabela 4).

Ângulo	Água/Granito/Água			
	R_1	R_2	R_3	R_4
$\psi_1 = 0^\circ$	0.660	0	0	0.076
$\psi_1 = \psi_{c1}$	1	0	0	0
$\psi_1 = \psi_{c2}$	1	0	0	0
Ângulo	Água/Granito/Óleo			
	R_1	R_2	R_3	R_4
$\psi_1 = 0^\circ$	0.660	0	0	0.086
$\psi_1 = \psi_{c1}$	1	0	0	0
$\psi_1 = \psi_{c2}$	1	0	0	0

Tabela 4 – Tabela das reflexões nos ângulos críticos do modelo apresentado

Os resultados obtidos no estudo analítico naturalmente coincidem com os apresentados nos gráficos anteriores. No entanto, observamos que, para visualizar as Figuras 21 e 22 foi necessário adicionar fatores multiplicativos de 30000 e 60 para a primeira e a segunda região de incidência no caso de R_2 , e fatores de 10 para R_3 e R_4 , respectivamente.

5 Efeito Goos-Hänchen

Este capítulo aborda o efeito Goos-Hänchen, iniciando com uma breve nota histórica e contextualização do fenômeno. Em seguida, utilizamos o formalismo do pacote de ondas, através da integração gaussiana, para determinar como uma reflexão dá origem a um deslocamento lateral. Aplicando este formalismo, estudamos o efeito Goos-Hänchen na interface líquido-sólido-líquido, com ênfase na primeira das quatro reflexões examinadas no capítulo anterior..

5.1 Introdução histórica

O efeito Goos-Hänchen é um fenômeno óptico onde a luz linearmente polarizada experimenta um deslocamento lateral (paralelo ao plano de incidência) ao ser totalmente refletida. Esse efeito não é previsto pela óptica geométrica e foi primeiramente observado por Goos e Hänchen em 1947. Tal como representamos na Figura 23.

Na reflexão total da luz, uma onda evanescente aparece no meio de menor índice de refração. Essas ondas evanescentes, juntamente com o efeito de interferência entre as ondas incidente e refletida no meio de maior índice de refração, são responsáveis pelo deslocamento lateral da luz refletida. Este fenômeno foi observado experimentalmente pela primeira vez em 1947 pelos físicos Goos e Hänchen e foi explicado teoricamente por

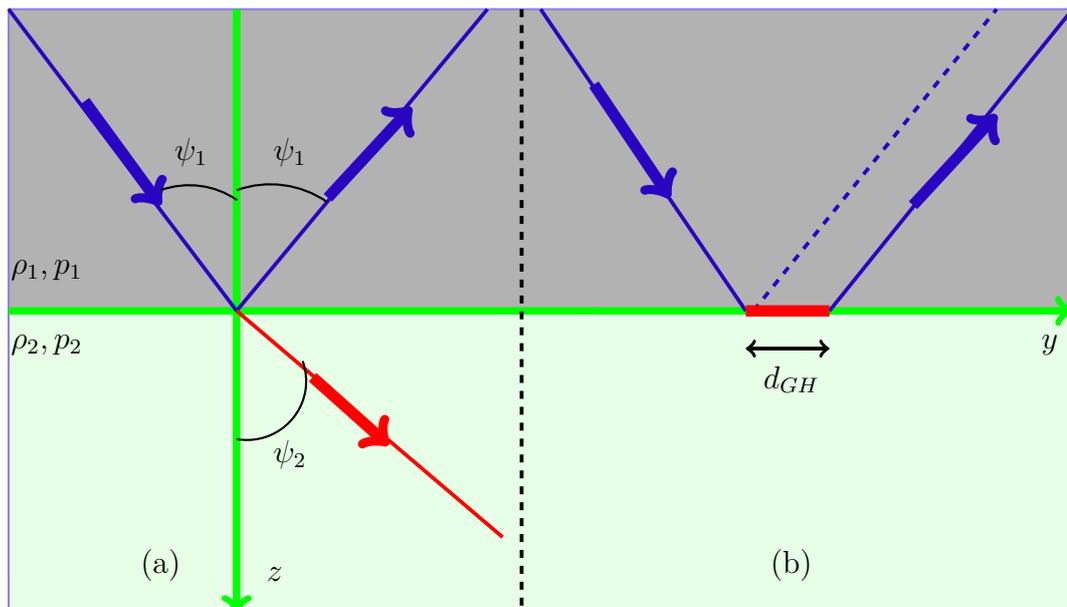


Figura 23 – Propagação da onda no regime de reflexão primária (a) e total (b). Em (b), d_{GH} representa o deslocamento de Goos-Hänchen, descrito por Goos e Hänchen em 1947, conforme explicado em [10].

Kurt Artmann em 1948, utilizando o método da fase estacionária [4].

No caso da mecânica quântica não relativística, o deslocamento de Goos-Hänchen está associado com o “delay time” [20]. Neste contexto, destacamos o trabalho de Renard [24], no qual ele obteve expressões para o deslocamento lateral, tanto para ondas de luz na óptica clássica, quanto para ondas associadas a partículas na mecânica quântica.

Estudos teóricos e experimentais têm sido realizados sobre o deslocamento de Goos-Hänchen. A começar por Artmann, que foi o primeiro a obter expressões analíticas e observar que estas apresentavam um comportamento infinito na incidência crítica. Muitas tentativas foram realizadas para resolver esse problema do infinito [6, 24]. Horowitz e Tamir [13] obtiveram uma expressão para o deslocamento utilizando a aproximação de Fresnel. A expressão obtida é válida para ângulos de incidência próximos ao ângulo crítico.

Além disso, existem dificuldades experimentais para medir tal deslocamento. O processo de medição do deslocamento de Goos-Hänchen é, em geral, uma tarefa difícil, pois, trata-se de um deslocamento da ordem do comprimento de onda da luz. Muitas técnicas foram utilizadas para medir esse deslocamento, dentre elas destacamos a técnica de múltiplas reflexões [10] e a técnica de interferência entre feixes, que pode ser entendida como uma medida fraca óptica. Esta técnica é um análogo óptico da medida fraca quântica, conceito introduzido por [1]. A técnica de interferência permite amplificar o efeito de Goos-Hänchen, sendo válida apenas no regime de reflexão interna total.

Ao longo dos anos, o deslocamento de Goos-Hänchen tem sido objeto de consideráveis estudos, não apenas pela sua importância nas propriedades fundamentais da luz, mas, também, por suas aplicações em muitas áreas da física, tais como, acústica, física de plasmas [11] e mecânica quântica [29].

Nesta dissertação analisaremos o efeito de Goos-Hänchen para ondas refletidas em interfaces do tipo líquido-sólido-líquido e homogêneas. Em tal análise, utilizaremos uma técnica de cálculo empregada em problemas de mecânica quântica, com base nos artigos [9] e [19].

5.2 Integração Gaussiana

Durante a ocorrência de reflexão total, Hermann Fritz Gustav Goos e Hilda Lindberg-Hänchen descobriram experimentalmente um deslocamento lateral do feixe refletido. Eles também conseguiram, de forma fenomenológica, derivar as expressões para esse deslocamento. Em reconhecimento aos seus descobridores esse fenômeno foi denominado deslocamento de Goos-Hänchen.

Hilda obteve seu título de doutora em 1943 na Universidade de Hamburgo, sob a orientação de Fritz Goos, com a dissertação intitulada “Penetração da luz totalmente

refletida em um meio raro”.

Seu trabalho resultou na publicação de um artigo na revista alemã *Annalen der Physik* em 1947, intitulado “Novo e fundamental experimento sobre reflexão total” [10].

Em 1948, Von Kurt Artmann apresentou a primeira derivação teórica desse fenômeno [4]. Utilizando as equações de Fresnel, Artmann identificou uma diferença de fase entre os feixes incidente e refletido no regime de reflexão total. Ele propôs duas expressões diferentes para esse fenômeno, uma para ondas polarizadas P e outra para ondas polarizadas S (com o campo magnético perpendicular ao plano de propagação).

Em 1949, Goos e Hänchen conduziram novos experimentos e confirmaram que o deslocamento lateral depende da polarização da luz [4].

Nesta seção, vamos explorar a ideia de Artmann utilizando o formalismo que será empregado nesta dissertação. Consideramos uma distribuição gaussiana angular centrada em ψ_1 , dada por

$$G(\psi - \psi_1) = \frac{k\omega_0}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\psi - \psi_1)^2(k\omega_0)^2}{4}\right]. \quad (5.1)$$

Do Capítulo 1 sabemos que a onda plana incidente do tipo P é representada por,

$$P_{\text{INC}} = p_1 \exp[i\omega(y \operatorname{sen}\psi + z \cos\psi - p_1 t)/p_1], \quad (5.2)$$

sendo que, na análise que estamos a fazer, a parte temporal não interfere, daí reescrevemos a Equação (5.2) como segue,

$$P_{\text{INC}} = p_1 \exp[ik(y \operatorname{sen}\psi + z \cos\psi)], \quad (5.3)$$

onde $k = \frac{\omega}{p_1}$. Usaremos o desenvolvimento em séries de Taylor até a segunda ordem de $\operatorname{sen}\psi$ e $\cos\psi$ em relação ao ponto ψ_1 , que é constante, uma vez que este representa o pico da distribuição gaussiana e o ângulo de incidência da onda P. Por outro lado, ω_0 representa a largura do pacote. Diante disso, a integral que o representa é dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\psi - \psi_1)^2(k\omega_0)^2}{4}\right] \exp(ik(y \operatorname{sen}\psi + z \cos\psi)) d\psi, \quad (5.4)$$

onde,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\psi &= \operatorname{sen}\psi_1 + (\psi - \psi_1) \cos\psi_1 - \frac{(\psi - \psi_1)^2}{2} \operatorname{sen}\psi_1 \\ \cos\psi &= \cos\psi_1 - (\psi - \psi_1) \operatorname{sen}\psi_1 - \frac{(\psi - \psi_1)^2}{2} \cos\psi_1, \end{aligned}$$

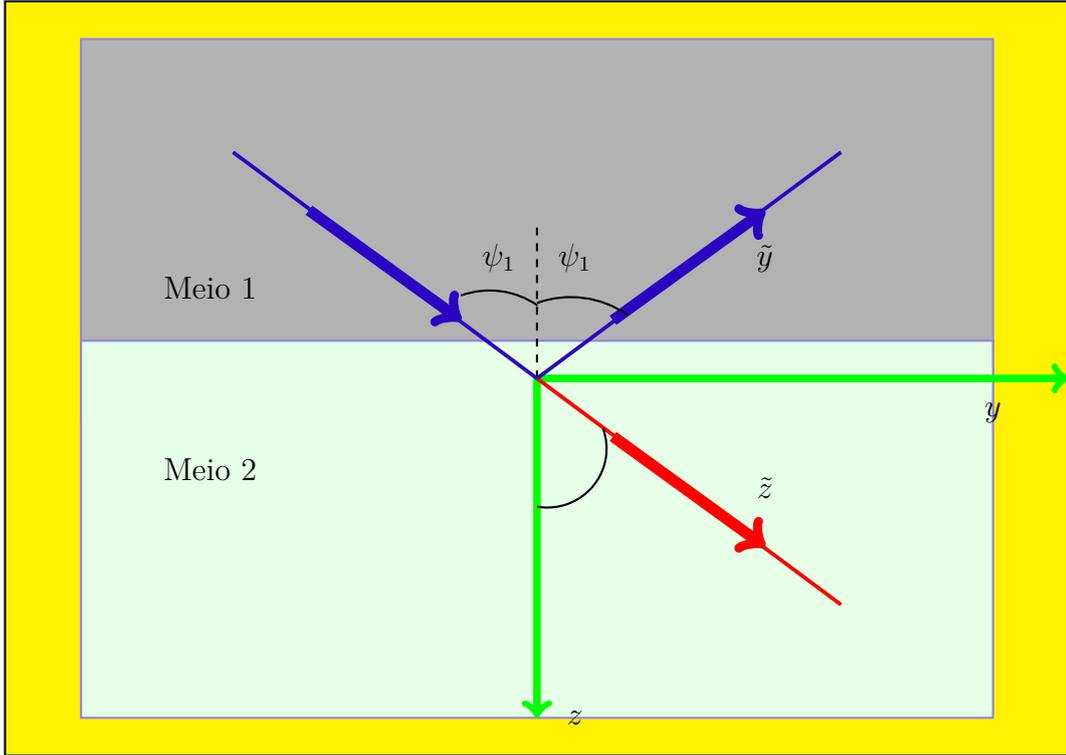


Figura 24 – Rotação dos eixos devido à mudança de direção de propagação

pelo que,

$$y \sin \psi - z \cos \psi = y \sin \psi_1 + z \cos \psi_1 + (\psi - \psi_1)(y \cos \psi_1 - z \sin \psi_1) - \frac{(\psi - \psi_1)^2}{2}(y \sin \psi_1 + z \cos \psi_1). \quad (5.5)$$

Quando a onda atinge a interface e é refletida, os eixos de referência podem ser rotacionados devido à mudança na direção da propagação da onda sísmica.

Da Figura 24 temos o sistema que segue,

$$\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 \\ \sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

portanto,

$$\tilde{y} = y \cos \psi_1 - z \sin \psi_1$$

$$\tilde{z} = y \sin \psi_1 + z \cos \psi_1$$

e, da Equação (5.5) temos

$$y \sin \psi - z \cos \psi = \tilde{z} + (\psi - \psi_1)\tilde{y} - \frac{(\psi - \psi_1)^2}{2}\tilde{z}. \quad (5.7)$$

Com isso, a integral Gaussiana dada em (5.4) pode ser reescrita como

$$\Psi(\tilde{y}, \tilde{z}) = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\psi - \psi_1)^2 (k\omega_0)^2}{4}} e^{ik\tilde{z}} e^{i(\psi - \psi_1)k\tilde{y}} e^{-i(\psi - \psi_1)^2 \frac{k}{2}\tilde{z}} d\psi. \quad (5.8)$$

Seja $u = \frac{(\psi - \psi_1)(k\omega_0)}{\sqrt{2}}$, daí, $du = \frac{d\psi(k\omega_0)}{\sqrt{2}}$, o que implica $d\psi = \frac{\sqrt{2}}{k\omega_0} du$ e, também, $(\psi - \psi_1) = \frac{\sqrt{2}u}{k\omega_0}$. Logo

$$\begin{aligned}\Psi(\tilde{y}, \tilde{z}) &= N e^{ik\tilde{z}} \frac{\sqrt{2}}{k\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\frac{\sqrt{2}u}{k\omega_0})^2 (k\omega_0)^2}{4}} e^{i(\frac{\sqrt{2}u}{k\omega_0})k\tilde{y}} e^{-i(\frac{\sqrt{2}u}{k\omega_0})^2 \frac{k}{2}\tilde{z}} du \\ &= N e^{ik\tilde{z}} \frac{\sqrt{2}}{k\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{i(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0})\tilde{y}u} e^{-i(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0})^2 \frac{\tilde{z}}{2k}u^2} du, \\ &= N e^{ik\tilde{z}} \frac{\sqrt{2}}{k\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2} + i\frac{\tilde{z}}{k\omega_0^2})u^2} e^{i(\frac{\sqrt{2}}{\omega_0})\tilde{y}u} du\end{aligned}\quad (5.9)$$

Partindo de (5.9), considere $\beta = \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\tilde{z}}{k\omega_0^2}}u$, daí, $d\beta = \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\tilde{z}}{k\omega_0^2}}du$, ou seja, $du = \frac{d\beta}{\sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\tilde{z}}{k\omega_0^2}}}$, além disso, $u = \frac{\beta}{\sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\tilde{z}}{k\omega_0^2}}}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\Psi(\tilde{y}, \tilde{z}) &= N e^{ik\tilde{z}} \frac{\sqrt{2}}{k\omega_0 \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\tilde{z}}{k\omega_0^2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2 + i\frac{\sqrt{2}\beta\tilde{y}}{\omega_0 \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\tilde{z}}{k\omega_0^2}}}} d\beta \\ &= N e^{ik\tilde{z}} \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k\omega_0^2 + 2i\tilde{z}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2 + i\frac{2\sqrt{k}\tilde{y}}{\sqrt{k\omega_0^2 + 2i\tilde{z}}}\beta} d\beta \\ &= N e^{ik\tilde{z}} \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k\omega_0^2 + 2i\tilde{z}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta - i\frac{2\sqrt{k}\tilde{y}}{\sqrt{k\omega_0^2 + 2i\tilde{z}}})^2} e^{-\frac{k\tilde{y}^2}{(k\omega_0^2 + 2i\tilde{z})}} d\beta \\ &= N e^{ik\tilde{z}} \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k\omega_0^2 + 2i\tilde{z}}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{k\tilde{y}^2}{(k\omega_0^2 + 2i\tilde{z})}}.\end{aligned}\quad (5.10)$$

5.2.1 Método da fase estacionária

Portanto, como podemos ver na Equação (5.10), isso deu origem a uma fase de \tilde{y} . Entretanto, estamos introduzindo uma distribuição angular real, $G(\psi, \psi_1)$, centrada em ψ_1 , o ângulo de incidência de um feixe óptico. Essa distribuição angular permite determinar o comportamento dos pacotes de ondas incidentes e refletidas por meio de integrais, tal como foi feito em (5.4), de tal modo que, a onda incidente, quando considerada a distribuição, toma a seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi G(\psi, \psi_1) \exp[ik(y\text{sen}\psi + z \cos \psi)], \quad (5.11)$$

e, para a onda refletida segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi G(\psi, \psi_1) R(\psi) \exp[ik(y\text{sen}\psi - z \cos \psi)], \quad (5.12)$$

onde $R(\psi)$ é o coeficiente de Fresnel para a onda refletida, obtido resolvendo a equação de Maxwell e impondo as condições de continuidade.

E, para o nosso caso, conforme descrito por [19], vamos utilizar o chamado *Método da Fase Estacionária*, que estima a propagação do feixe sem que seja necessário resolver as integrais (5.11) e (5.12). Portanto, partimos da ideia de que, assintoticamente, quando a fase é suficientemente grande, de modo a gerar oscilações rápidas, então, as contribuições do integrando são anuladas, exceto nos pontos onde a derivada da fase é nula, ou seja, nos pontos estacionários,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \psi} (k y \sin \psi + z \cos \psi) \right]_{\psi=\psi_1} = 0 \implies y_{\text{inc}} = z \operatorname{tg} \psi_1.$$

Por outro lado, quando o coeficiente de reflexão é complexo, tal como discutido no capítulo anterior nas regiões II e III, temos $|R(\psi)| \exp[i\Phi_{GH}(\psi)]$ e, portanto, a fase espacial da onda refletida ganha uma fase adicional. E, usando o método de fase estacionária, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial \psi} [k(y \sin \psi - z \cos \psi) + \Phi_{GH}(\psi)]_{\psi=\psi_1} = 0 \implies y_{\text{ref}} = -z \operatorname{tg} \psi_1 - \frac{1}{k \cos \psi_1} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \Phi_{GH}(\psi) \right]_{\psi_1},$$

onde, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. No entanto, o deslocamento lateral da onda sísmica refletida é proporcional a k . E, portanto, $-z \operatorname{tg} \psi_1$ é a parte geométrica, ao passo que, $-\frac{1}{k \cos \psi_1} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \Phi_{GH} \right]_{\psi_1}$ representa o deslocamento de Goos-Hänchen. Em geral, para ondas incidente, refletida e transmitida, temos,

$$y = \begin{cases} z \operatorname{tg} \psi_1 & \text{Onda incidente} \\ -z \operatorname{tg} \psi_1 & \text{Onda refletida} \\ z \operatorname{tg} \psi_2 & \text{Onda transmitida.} \end{cases} \quad (5.13)$$

No caso de ondas sísmicas em interfaces líquido-sólido-líquido, ocorre a reflexão da onda P. Neste contexto, o deslocamento lateral é associado à onda compressional (P) e é denominado (PGH), conforme apresentado em (5.14), daí

$$y_{\text{ref}}^{(P)} = -z \operatorname{tg} \psi_1 - \frac{p_1}{\omega \cos \psi_1} \frac{\partial \Phi_{GH}}{\partial \psi_1}. \quad (5.14)$$

No caso de termos sólido-líquido, além do deslocamento da onda compressional (P), teremos também o deslocamento da onda cisalhante (SGH). Neste contexto, o deslocamento é computado conforme apresentado em (5.15) e dado por

$$y_{\text{ref}}^{(S)} = -z \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{p_1}{\omega \cos \varphi_1} \frac{\partial \Phi_{GH}}{\partial \varphi_1}. \quad (5.15)$$

Portanto, o deslocamento lateral das ondas refletidas P e S, quando a onda enviada é do tipo S e P, é encontrado nas seguintes regiões, respectivamente

$$\arcsin \frac{s_1}{p_2} < \varphi_1 < \frac{s_1}{p_1}, \quad \arcsin \frac{p_1}{p_2} < \psi_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (5.16)$$

Para o nosso modelo, interessa-nos unicamente a condição da onda P .

5.3 Deslocamentos laterais

No nosso modelo, discutido no capítulo anterior, temos as reflexões R_1 , R_2 , R_3 e R_4 . Destas, R_3 e R_4 não originam deslocamento, uma vez que só são visíveis na primeira região, onde todos os ângulos são reais. Por outro lado, R_2 é real na primeira região, mas torna-se complexa na segunda. Todavia, para conseguirmos visualizá-la, é necessária uma grande amplificação. Diante disso, vamos focar nossa atenção no deslocamento lateral de Goos-Hänchen para R_1 .

$$R_1 = \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}, \quad (5.17)$$

Portanto, tal como discutido em [19], de forma direta temos que

$$\ln R_1 = i\Phi \implies -i \frac{\partial}{\partial \psi_1} \ln R_1 = \frac{\partial \Phi_{GH}}{\partial \psi_1}. \quad (5.18)$$

Entretanto, dado o que foi apresentado na Equação (5.14), segue que o deslocamento lateral pode ser visualizado graficamente por

$$\Phi_{GH} = \frac{i}{\cos \psi_1} \frac{\ln R_1}{\psi_1}. \quad (5.19)$$

5.3.1 Estimativa do máximo

Dado que a R_1 é uma expressão bastante complicada, existe um trabalho feito por De Leo e Krauss (ver [19]), onde os autores observaram que o máximo de (5.17) ocorre quando consideramos que o denominador (D) da fase dada em (5.34) é anulado. Ou seja, quando o deslocamento GH, representado matematicamente em (5.47), atinge seu máximo. Isso é claramente ilustrado na Figura 25.

No cenário água/granito/água, para a ocorrência de reflexão total interna, ou seja, ângulos de incidência superiores a $30,08^\circ$, observamos, após o segundo ângulo crítico, a presença de um ângulo de incidência que maximiza o deslocamento lateral. Esse fenômeno ocorre quando a velocidade da onda P, no líquido, supera a velocidade da onda P (e, conseqüentemente, da onda S).

É interessante notar que a reflexão total ocorre quando duas condições são simultaneamente satisfeitas: dois ângulos críticos surgem e, o ângulo de incidência está na terceira região de incidência, onde o ângulo é maior que o segundo ângulo crítico (ver as Figuras 25, 26 e 27). Em comparação com o caso óptico, ocorre um fenômeno completamente novo: a presença de um máximo logo após o segundo ângulo crítico. Daí,

$$p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 = s_2^2 |\sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2|, \quad (5.20)$$

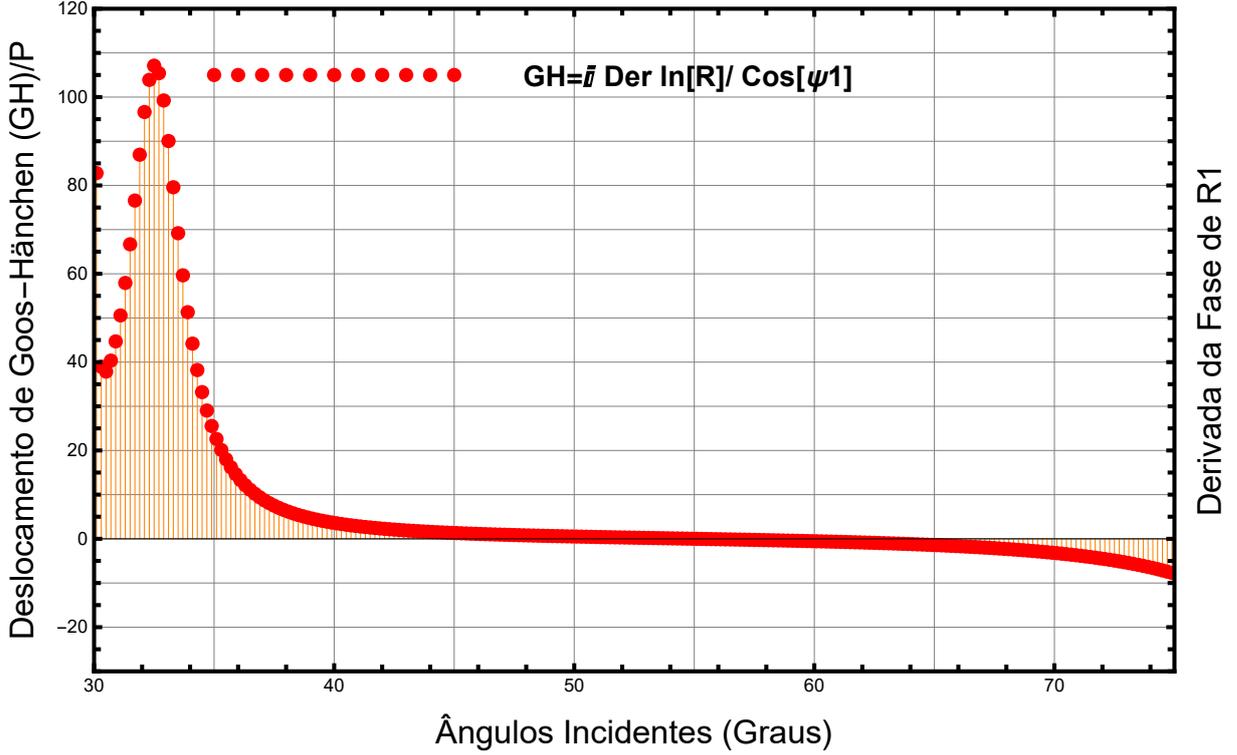


Figura 25 – Representação gráfica do deslocamento lateral de Goos-Hänchen da função R_1

e, levando em conta as equações dadas em (5.28) e (5.29), segue que

$$p_2^2 \left[1 - 2 \left(\frac{s_2}{p_1} \sin \psi_1 \right)^2 \right]^2 = 4 \frac{s_2^3 p_2}{p_1^2} \sin^2 \psi_1 \sqrt{\left(\frac{s_2}{p_1} \sin \psi_1 \right)^2 - 1} \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1} \sin \psi_1 \right)^2 - 1}, \quad (5.21)$$

Defina $p := \frac{p_2}{p_1}$ (ou $p_2 = pp_1$) e $s := \frac{s_2}{p_1}$ (ou $s_2 = sp_1$). Portanto, a Equação (5.21) pode ser reescrita como

$$p^2 \left[1 - 2(s \sin \psi_1)^2 \right]^2 = 4s^3 p \sin^2 \psi_1 \sqrt{\left(s \sin \psi_1 \right)^2 - 1} \sqrt{\left(p \sin \psi_1 \right)^2 - 1}, \quad (5.22)$$

Vamos introduzir uma nova variável, dada por $x = \sin^2 \psi_1$. Daí, a Equação (5.22) se torna

$$p^2 \left[1 - 2s^2 x \right]^2 = 4s^3 p x \sqrt{\left(s^2 x - 1 \right)} \sqrt{\left(p^2 x - 1 \right)}, \quad (5.23)$$

e, elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$p^4 \left[1 - 2s^2 x \right]^4 = 16s^6 p^2 x^2 \left(s^2 x - 1 \right) \left(p^2 x - 1 \right), \quad (5.24)$$

fazendo algumas manipulações algébricas da equação (5.24) chegamos a

$$16s^6 \left(p^2 - s^2 \right) x^3 + 8s^4 \left(2s^2 - 3p^2 \right) x^2 + 8s^2 p^2 x - p^2 = 0. \quad (5.25)$$

Ou seja, de (5.25) obtemos um polinômio de grau 3 que nos permite calcular, no cenário líquido/sólido, o ângulo de incidência no qual o deslocamento lateral de GH é maximizado. Para uma interface água/granito, pelos valores dos parâmetros p_1, p_2 e s_2 , temos que $p \approx 3.68$ e $s \approx 1.99$. Entretanto, o polinômio (5.25) fornece uma solução real em $x \approx 0.2915$. Conseqüentemente, o ângulo de incidência que maximiza o deslocamento lateral de GH é encontrado quando,

$$\psi_1^{[Max]} = \arcsin \sqrt{0.2915} = 32.67^\circ$$

A divergência no ângulo crítico e a descontinuidade entre a região anterior e posterior à incidência crítica foram recentemente discutidas e solucionadas na óptica, utilizando o formalismo do pacote de ondas dados [2] e [3]. Além disso, foi demonstrado que a análise de onda plana permanece válida fora da região crítica.

Nessa abordagem, a fase no integrando pode ser aproximada usando o método da fase estacionária, permitindo que a integral seja resolvida analiticamente [3]. Esse fenômeno também se aplica claramente às ondas sísmicas. Portanto, a análise de onda plana apresentada neste trabalho fornece resultados precisos para ângulos de incidência fora das regiões críticas.

Casos de particular interesse são aqueles em que ocorre reflexão total de uma única onda. Nessas situações encontramos um máximo após o segundo ângulo crítico, esse efeito é intensificado no cenário líquido/sólido. Como mencionado anteriormente, a análise de onda plana é válida fora da região crítica. Assim, o máximo obtido na análise de onda plana também é aplicável a pacotes de ondas com uma cintura de feixe w_0 , desde que, o ângulo crítico, o ângulo máximo, as velocidades, a frequência e a cintura do feixe satisfaçam certas condições, como as que seguem na Equação (5.26).

$$\psi_1^{[max]} > \arcsin \frac{p_1}{s_2} + \frac{p_1}{\omega w_0}, \quad (5.26)$$

Note que, da desigualdade (5.26), podemos obter w_0 como segue:

$$w_0 > \frac{p_1}{\omega \left[\psi_1^{[max]} - \arcsin \left(\frac{p_1}{s_2} \right) \right]}. \quad (5.27)$$

As ondas sísmicas volúmicas têm, na sua origem, uma vasta gama de frequências. Todavia, devido à atenuação sofrida durante a propagação, as mais pronunciadas têm frequências entre 0,5 e 20 Hz.

5.4 Máximo pela derivada de R_1

De (5.17) sabemos que os ângulos ψ_2 e φ_2 são relacionados pelo ângulo de incidência ψ_1 pela Lei de Snell, tal como descrevemos na Equação (3.30), na qual podemos ver que na região $\sin \psi_1 > \frac{p_1}{s_2} > \frac{p_1}{p_2}$, onde ($p_2 > s_2$) temos

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{s_2}{p_1} \operatorname{sen} \psi_1\right)^2} = i \sqrt{\left(\frac{s_2}{p_1} \operatorname{sen} \psi_1\right)^2 - 1} = i |\cos \varphi_2|, \quad (5.28)$$

$$\cos \psi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \operatorname{sen} \psi_1\right)^2} = i \sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1} \operatorname{sen} \psi_1\right)^2 - 1} = i |\cos \psi_2|, \quad (5.29)$$

Portanto, na Equação (5.17), quando considerada na terceira região, basta tomar a Equação (5.29) e, daí, a reflexão que pretendemos estudar o deslocamento é dada por

$$R_1 = \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \operatorname{sen} 2\psi_2 \operatorname{sen} 2\varphi_2) - i \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \operatorname{sen} 2\psi_2 \operatorname{sen} 2\varphi_2) + i \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|}, \quad (5.30)$$

Vamos considerar, neste caso, $N = -i \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2$, $D_1 = \rho_2 p_2^2 \cos \psi_1 \cos^2 2\varphi_2$ e $D_2 = \rho_2 s_2^2 \cos \psi_1 \operatorname{sen} 2\psi_2 \operatorname{sen} 2\varphi_2$. Daí, podemos reescrever a Equação (5.30) como segue

$$R_1 = \frac{D - iN}{D + iN}, \quad (5.31)$$

onde $D = D_1 + D_2$ e, além disso, $D, N \in \mathbb{R}$. Logo,

$$R_1 = e^{-2i\Phi}, \quad (5.32)$$

e o argumento de (5.32) é dado por

$$\Phi = -2 \arctan \left[\frac{N}{D} \right], \quad (5.33)$$

pelo que

$$\Phi = -2 \arctan \left[\frac{-i \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \operatorname{sen} 2\psi_2 \operatorname{sen} 2\varphi_2)} \right]. \quad (5.34)$$

Como o deslocamento de Goos-Hänchen é dado pela derivada da fase, teremos que derivar a Equação (5.33). Assim, a derivada parcial de Φ em relação a ψ_1 é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \psi_1} \Phi = \widetilde{GH} = -2 \frac{N'D - D'N}{D^2 + N^2}, \quad (5.35)$$

e, para facilitar nossos cálculos, aplicamos a Lei de Snell, o que nos permite escrever

$$\operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{s_2}{p_1} \operatorname{sen} \psi_1 \implies \cos \varphi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} = \frac{s_2}{p_1} \cos \psi_1 \implies \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi_1} = \frac{s_2 \cos \psi_1}{p_1 \cos \varphi_2}, \quad (5.36)$$

$$\operatorname{sen} \psi_2 = \frac{p_2}{p_1} \operatorname{sen} \psi_1 \implies \cos \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} = \frac{p_2}{p_1} \cos \psi_1 \implies \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} = \frac{p_2 \cos \psi_1}{p_1 \cos \psi_2}. \quad (5.37)$$

Portanto, tal como definimos a derivada da fase na Equação (5.35), note que precisaremos computar $\frac{\partial \cos \psi_2}{\partial \psi_1}$, $\frac{\partial \cos^2(2\varphi_2)}{\partial \psi_1}$, $\frac{\partial \operatorname{sen}(2\varphi_2)}{\partial \psi_1}$ e $\frac{\partial \operatorname{sen}(2\psi_2)}{\partial \psi_1}$. Tendo em conta as Equações (5.36) e (5.37), segue que

$$\frac{\partial \cos \psi_2}{\partial \psi_1} = -\operatorname{sen} \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} = -\operatorname{sen} \psi_2 \frac{p_2 \cos \psi_1}{p_1 \cos \psi_2} = -\frac{p_2}{p_1} \operatorname{tg} \psi_2 \cos \psi_1, \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial \cos^2 2\varphi_2}{\partial \psi_1} = -2 \cos 2\varphi_2 \operatorname{sen} 2\varphi_2 \cdot 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi_1} = -\operatorname{sen} 4\varphi_2 2 \frac{s_2 \cos \psi_1}{p_1 \varphi_2} \quad (5.39)$$

$$= -2 \frac{s_2 \operatorname{sen} 4\varphi_2}{p_1 \cos \varphi_2} \cos \psi_1, \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{sen} 2\varphi_2}{\partial \psi_1} &= \cos 2\varphi_2 \cdot 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi_1} = \cos 2\varphi_2 \cdot 2 \frac{s_2 \cos \psi_1}{p_1 \cos \varphi_2}, \\ &= 2 \frac{s_2 \cos 2\varphi_2}{p_1 \cos \varphi_2} \cos \psi_1, \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \operatorname{sen} 2\psi_2}{\partial \psi_1} = \cos 2\psi_2 \cdot 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} = \cos 2\psi_2 \cdot 2 \frac{p_2 \cos \psi_1}{p_1 \cos \psi_2} \quad (5.42)$$

$$= 2 \frac{p_2 \cos 2\psi_2}{p_1 \cos \psi_2} \cos \psi_1. \quad (5.43)$$

Feito isso, vamos derivar N , D_1 e D_2 em relação a ψ_1 . Daí,

$$N' = -i\rho_1 p_1 p_2 \frac{\partial \cos \psi_2}{\partial \psi_1} = i\rho_1 p_1 p_2 \frac{p_2}{p_1} \operatorname{tg} \psi_2 \cos \psi_1 = i\rho_1 p_2^2 \operatorname{tg} \psi_2 \cos \psi_1. \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} D_1' &= \rho_2 p_2^2 \left[-\operatorname{sen} \psi_1 \cos^2 (2\varphi_2) - 2 \cos (2\varphi_2) \operatorname{sen} (2\varphi_2) \cdot 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi_1} \cos \psi_1 \right] \\ &= \rho_2 p_2^2 \left[-\frac{2s_2 \operatorname{sen} (4\varphi_2)}{p_1 \cos \varphi_2} \cos^2 \psi_1 - \cos^2 (2\varphi_2) \operatorname{sen} \psi_1 \right] \\ &= -\rho_2 p_2^2 \left[\frac{2s_2 \operatorname{sen} (4\varphi_2)}{p_1 \cos \varphi_2} \cos \psi_1 + \cos^2 (2\varphi_2) \operatorname{tg} \psi_1 \right] \cos \psi_1 \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} D_2' &= \rho_2 s_2^2 \left[-\operatorname{sen} \psi_1 \operatorname{sen} (2\varphi_2) \operatorname{sen} (2\psi_2) + 2 \cos (2\varphi_2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi_1} \operatorname{sen} 2\psi_2 \cos \psi_1 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos (2\psi_2) \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} \operatorname{sen} 2\varphi_2 \cos \psi_1 \right] \\ &= \rho_2 s_2^2 \left[-\frac{\operatorname{sen} \psi_1}{\cos \psi_1} \operatorname{sen} (2\varphi_2) \operatorname{sen} (2\psi_2) \cos \psi_1 + 2 \cos (2\varphi_2) \frac{s_2 \cos \psi_1}{p_1 \cos \varphi_2} \operatorname{sen} 2\psi_2 \cos \psi_1 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos (2\psi_2) \frac{p_2 \cos \psi_1}{p_1 \cos \psi_2} \operatorname{sen} 2\varphi_2 \cos \psi_1 \right] \\ &= \rho_2 s_2^2 \left[-\operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{sen} (2\varphi_2) \operatorname{sen} (2\psi_2) + 2 \frac{s_2 \cos (2\varphi_2)}{p_1 \cos \varphi_2} \operatorname{sen} 2\psi_2 \cos \psi_1 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{p_2 \cos (2\psi_2)}{p_1 \cos \psi_2} \operatorname{sen} 2\varphi_2 \cos \psi_1 \right] \cos \psi_1 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Levando em consideração as Equações (5.44), (5.45) e (5.46) quando aplicadas em (5.35), o deslocamento lateral de GH de R_1 para esta nova forma analítica é dado pela Figura 27.

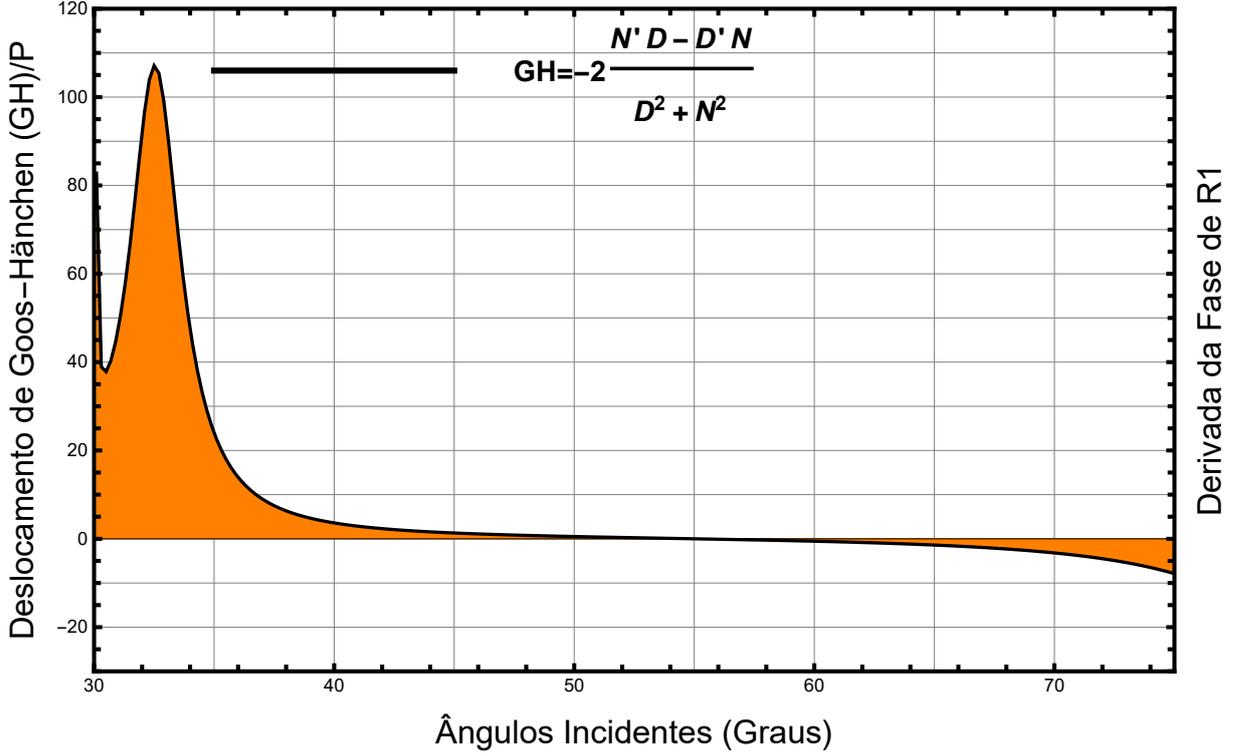


Figura 26 – Representação gráfica do deslocamento lateral de Goos-Hänchen da função analítica encontrada através da derivada da fase de R_1

Portanto, em geral, vemos que o deslocamento de GH da R_1 pode ser visualizado graficamente e representado pelas relações dadas a seguir

$$GH_{\text{shift}} = \begin{cases} GH = \frac{i}{\cos \psi_1} \frac{\partial \ln R}{\partial \psi_1} \\ \widetilde{GH} = -2 \frac{N'D - D'N}{D^2 + N^2} \end{cases} \quad (5.47)$$

5.4.1 Equação do máximo

A expressão para o deslocamento de GH, dada em (5.35), é de grande importância, pois, com ela nos permite computar o máximo do deslocamento. Daí, computando a segunda derivada, temos

$$\begin{aligned} & \frac{(N'D - D'N)^2(D^2 + N^2) - (D^2 + N^2)'(N'D - D'N)}{(D^2 + N^2)} \\ &= [(N'D)' - (D'N)'](D^2 + N^2) - [(D^2)' + (N^2)'](N'D - D'N) \\ &= (N''D' - D''N')(D^2 + N^2) - 2D^2D'N' + 2D(D')^2N - 2N(N')^2D + 2N^2N'D' \\ &= (N''D' - D''N')(D^2 + N^2) + 2N'D'(N^2 - D^2) + 2ND[(D')^2 - (N')^2] = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

O nosso entendimento, neste contexto, pode ser observado a partir da Figura (27). Vemos que o máximo do deslocamento de GH ocorre após o segundo ângulo crítico, de tal forma que podemos estimar que o máximo esteja a 3 graus após o ângulo crítico.

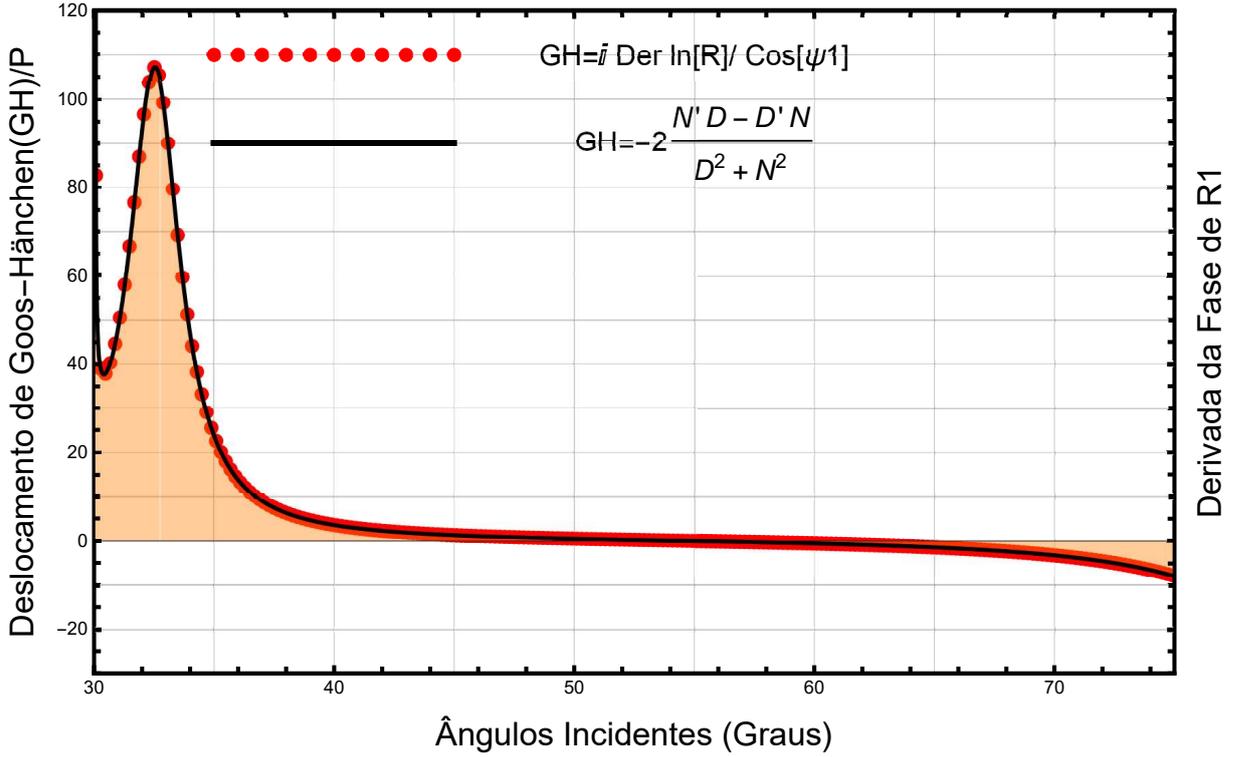


Figura 27 – No caso água/granito/água, para reflexão total interna, ou seja, ângulos de incidência maiores que ψ_{c2} , após o segundo ângulo crítico, observamos a presença de um ângulo de incidência que maximiza o deslocamento lateral.

Portanto, ao converter este ângulo em radianos, obtemos aproximadamente 0.05, o que é muito pequeno. Sendo assim, faz sentido realizar a expansão de Taylor para o ângulo.

$$\text{sen}(\psi_{c2} + \delta) = \text{sen}\psi_{c2} \cos \delta + \text{sen}\delta \cos \psi_{c2} = \cos \delta$$

$$\cos(\psi_{c2} + \delta) = \cos(\psi_{c2}) \cos(\delta) - \text{sen}(\psi_{c2})\text{sen}(\delta) = -\text{sen}(\delta).$$

A expansão de Taylor de $\cos(\delta)$ até a segunda ordem em torno de $\delta = 0$ é dada por

$$\cos(\delta) \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

Por outro lado, a expansão de Taylor de $-\text{sen}(\delta)$ até a segunda ordem em torno de $\delta = 0$ é

$$\text{sen}(\delta) \approx \delta.$$

5.4.2 Analogia com problemas de tunelamento

Um outro ponto de vista do trabalho apresentado seria olhar sob o ponto de vista de tunelamento quântico. Portanto, como mostrado na Figura 28, no estudo realizado nesta dissertação, consideramos que o tamanho do pacote de ondas é suficientemente menor em comparação com o das camadas. Na Figura 28(a), representamos este caso.

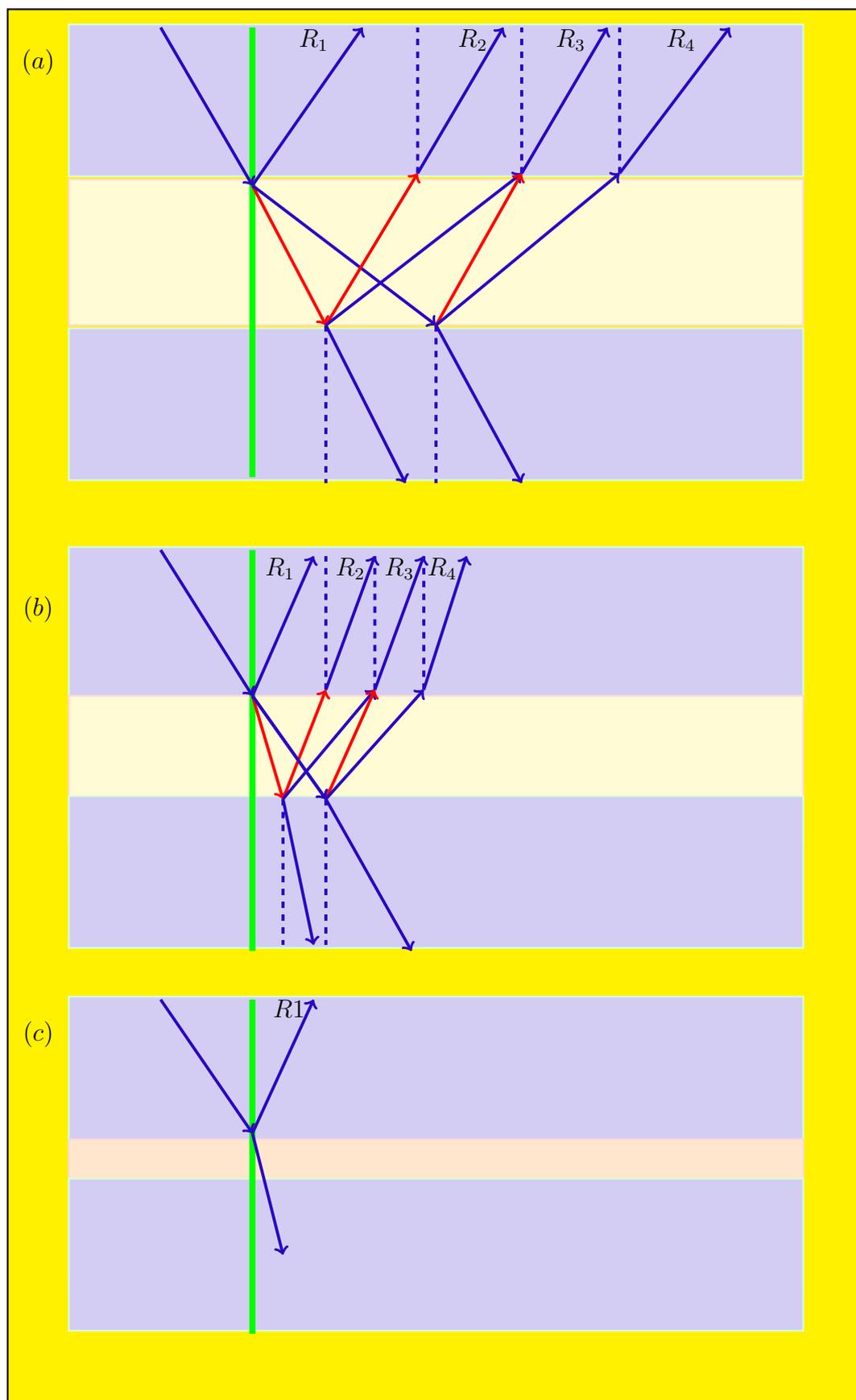


Figura 28 – Representação do modelo sob a perspectiva de barreira de potencial, que origina o tunelamento quântico.

Na Figura 28(b), diminuimos o tamanho da camada do segundo meio e observamos que a distância entre as reflexões R_1, R_2, R_3 e R_4 diminui em relação ao normal. Estamos, portanto, sugerindo que, em algum momento, teremos apenas uma reflexão e parte dela será transmitida para o meio seguinte, considerando que estamos diante de uma barreira de potencial.

6 Considerações finais

O estudo do deslocamento de Goos-Hänchen tem sido uma fonte contínua de entusiasmo na comunidade de ótica. Desde a primeira evidência experimental apresentada por Goos e Hänchen em 1947, os principais interesses têm sido a compreensão teórica do fenômeno e a possibilidade de encontrar expressões analíticas para prever os deslocamentos laterais. Em 1948, Artmann forneceu a primeira fórmula analítica, baseada no método da fase estacionária. Ele observou que, quando a luz é totalmente refletida, o coeficiente de reflexão se torna complexo e a fase adicional é responsável pelo deslocamento.

Embora seja verdade que a abordagem de onda plana contenha divergências que só podem ser removidas usando o formalismo do pacote de ondas dado em [2], é importante lembrar que, fora da região crítica, a abordagem de onda plana fornece resultados em total concordância com aqueles obtidos usando pacotes de ondas.

Nesse intuito, utilizando ondas planas e o método da fase estacionária, apresentamos uma análise detalhada dos deslocamentos laterais das ondas P refletidas nas interfaces líquido/sólido/líquido e, estamos confiantes de que, assim como é feito na ótica, as divergências em ângulos críticos podem ser posteriormente removidas tratando o problema dentro do formalismo do pacote de ondas.

O efeito Goos-Hänchen é um fenômeno da ótica clássica, no qual, um feixe de luz refletido em uma superfície é deslocado espacialmente como consequência de sua breve penetração através da superfície antes de ser refletido de volta. O mesmo fenômeno ocorre para ondas acústicas, onde, devido à estrutura matricial das equações de Zoeppritz, geralmente são encontrados dois ângulos críticos. Nos dados sísmicos, ao contrário do que ocorre na ótica, uma reflexão total pode ocorrer também para coeficientes de reflexão reais. Nesse caso, nenhum deslocamento lateral é observado na onda refletida.

Tal como vemos quando considerado no modelo apresentado nesta dissertação, temos três regiões de incidência com características distintas em termos de fluxo de energia refletida e transmitida, sendo que, na primeira região onde $\psi_1 < \psi_{c1}$ todas as reflexões são visíveis e, nesta região, todos os ângulos de incidência são reais e, quando ψ_1 atinge ψ_{c1} , ou seja, $\psi_{c1} < \psi_1 < \psi_{c2}$, ocorre que ψ_2 atinge o máximo, resultando na onda P não se propagando, conseqüentemente, não teremos as reflexões R_3 e R_4 , como ilustrado nas Figuras 18 e Figura 19 gráficos (c) e (d). Agora, quando $\psi_1 > \psi_{c2}$, ocorre que φ_2 atinge o máximo, resultando então na onda S não se propagando e, como consequência, não teremos a reflexão múltipla R_2 , sendo assim, estaremos perante a reflexão total, ou seja, a fonte emite uma onda e é refletida completamente, conforme apresentado nas Figuras 18 e Figura 19 nos gráficos (e) e (f).

Os principais objetivos do estudo apresentado nesta dissertação são: oferecer uma introdução matemática formal básica ao efeito Goos-Hänchen na análise de dados sísmicos, resolver as equações de Zoeppritz, fornecer explicitamente a fase complexa dos coeficientes de reflexão na interface líquido/sólido/líquido, a partir da qual o deslocamento lateral pode ser calculado usando o método da fase estacionária e, finalmente, encontrar a equação polinomial que permite prever o ângulo de incidência que maximiza o deslocamento lateral do efeito Goos-Hänchen, conforme a Equação (5.25).

Normalmente, as analogias entre diferentes sistemas físicos ajudam a aumentar a compreensão do fenômeno estudado e, às vezes, abrem portas para novos efeitos e desafios. O estudo do efeito Goos-Hänchen para ondas acústicas é um exemplo intrigante disso. Claramente, ainda existem várias questões em aberto, como uma fórmula fechada para o deslocamento lateral máximo, a análise do deslocamento para incidência crítica e a quebra de simetria perto da região crítica.

Enquanto o deslocamento espacial do efeito Goos-Hänchen ocorre essencialmente devido à fase do coeficiente de reflexão de Fresnel, o efeito angular está principalmente ligado à sua amplitude. A quebra de simetria na distribuição do número de onda do feixe óptico, induzida pelo coeficiente de Fresnel, causa a variação angular [3]. Esse fenômeno também pode ser observado em ondas acústicas quando o coeficiente de reflexão de Zoeppritz muda rapidamente.

Um ponto de interesse particular seria examinar a influência das ondas de Rayleigh em feixes acústicos em interfaces líquido-sólido, considerando o feixe refletido de duplo pico recentemente discutido em óptica [3]. Uma outra abordagem deste estudo seria, neste caso, estudar o modelo sob o ponto de vista de barreira de potencial. Considerando, neste caso, que o ω , que representa a largura da onda envolvida, é maior o suficiente que as camadas propostas no modelo, seria necessário abordar o problema como sendo um efeito túnel.

A importância deste estudo está centrada na possibilidade de o efeito Goos-Hänchen melhorar os dados de aquisição sísmica. O deslocamento lateral fornece informações *a priori* de uma região que a reflexão normal, prevista pela lei de Snell clássica, não abrange. Portanto, é importante obter os deslocamentos de R_2 na segunda região, uma vez que este é o resultado de múltiplas reflexões nas diferentes interfaces, o que proporciona informações da terceira camada.

Referências

- [1] AIELLO, A. Goos–hänchen and imbert–fedorov shifts: a novel perspective. *New Journal of Physics* 14, 1 (2012), 013058. Citado na página 66.
- [2] ARAUJO, M. P., CARVALHO, S. A., AND DE LEO, S. The asymmetric goos–hänchen effect. *Journal of Optics* 16, 1 (2013), 015702. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 80.
- [3] ARAÚJO, M. P., DE LEO, S., AND MAIA, G. G. Oscillatory behavior of light in the composite goos–hänchen shift. *Physical Review A* 95, 5 (2017), 053836. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 81.
- [4] ARTMANN, K. Berechnung der seitenversetzung des totalreflektierten strahles. *Annalen der Physik* 437, 1-2 (1948), 87–102. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.
- [5] BERKHOUT, A., AND VERSCHUUR, D. Imaging of multiple reflections. *Geophysics* 71, 4 (2006), SI209–SI220. Citado na página 26.
- [6] CARTER, J., AND HORA, H. Total reflection of matter waves: the goos–haenchen effect for grazing incidence. *JOSA* 61, 12 (1971), 1640–1645. Citado na página 66.
- [7] CONSTABLE, S., AND SRNKA, L. J. An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration. *Geophysics* 72, 2 (2007), WA3–WA12. Citado na página 18.
- [8] CURTIS, A., GERSTOFT, P., SATO, H., SNIEDER, R., AND WAPENAAR, K. Seismic interferometry—turning noise into signal. *The Leading Edge* 25, 9 (2006), 1082–1092. Citado na página 26.
- [9] DE LEO, S., AND ROTELLI, P. P. Localized beams and dielectric barriers. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 10, 11 (2008), 115001. Citado na página 66.
- [10] GOOS, F., AND HÄNCHEN, H. Ein neuer und fundamentaler versuch zur totalreflexion. *Annalen der Physik* 436, 7-8 (1947), 333–346. Citado 4 vezes nas páginas 11, 65, 66 e 67.
- [11] HARRICK, N. Study of physics and chemistry of surfaces from frustrated total internal reflections. *Physical Review Letters* 4, 5 (1960), 224. Citado na página 66.
- [12] HARRIS, P., AND MACGREGOR, L. Determination of reservoir properties from the integration of csem, seismic, and well-log data. *First Break* 24, 11 (2006). Citado na página 18.

- [13] HOROWITZ, B., AND TAMIR, T. Lateral displacement of a light beam at a dielectric interface. *JOSA* 61, 5 (1971), 586–594. Citado na página 66.
- [14] IKELLE, L. T., AND AMUNDSEN, L. *Introduction to petroleum seismology*. Society of Exploration Geophysicists, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 10, 27, 28 e 34.
- [15] IKELLE, L. T., AND AMUNDSEN, L. *Introduction to petroleum seismology*. Society of Exploration Geophysicists, 2018. Citado na página 27.
- [16] JIANG, Z., SHENG, J., YU, J., SCHUSTER, G. T., AND HORNBY, B. E. Migration methods for imaging different-order multiples. *Geophysical Prospecting* 55, 1 (2007), 1–19. Citado na página 26.
- [17] KEAREY, P., BROOKS, M., AND HILL, I. *An introduction to geophysical exploration*, vol. 4. John Wiley & Sons, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 17, 18, 20, 22, 23 e 24.
- [18] KWON, M. J., AND SNIEDER, R. Uncertainty analysis for the integration of seismic and controlled source electro-magnetic data. *Geophysical Prospecting* 59, 4 (2011), 609–626. Citado na página 18.
- [19] LEO, S. D., AND KRAUS, R. K. Incidence angles maximizing the goos–hänchen shift in seismic data analysis. *Pure and Applied Geophysics* 175 (2018), 2023–2044. Citado 5 vezes nas páginas 15, 34, 66, 70 e 71.
- [20] LONGHI, S. Quantum-optical analogies using photonic structures. *Laser & Photonics Reviews* 3, 3 (2009), 243–261. Citado na página 66.
- [21] LOWRIE, W., AND FICHTNER, A. *Fundamentals of geophysics*. Cambridge university press, 2020. Citado na página 21.
- [22] MOUSA, W. A., AND AL-SHUHAIL, A. A. *Processing of seismic reflection data using MATLAB*. Springer Nature, 2022. Citado na página 19.
- [23] NEUBAUER, W. G. Ultrasonic reflection of a bounded beam at rayleigh and critical angles for a plane liquid-solid interface. *Journal of Applied Physics* 44, 1 (1973), 48–55. Citado na página 15.
- [24] RENARD, R. H. Total reflection: a new evaluation of the goos–hänchen shift. *JOSA* 54, 10 (1964), 1190–1197. Citado na página 66.
- [25] SHERIFF, R. E., AND GELDART, L. P. *Exploration seismology*. Cambridge university press, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- [26] SLOB, E., WAPENAAR, K., BROGGINI, F., AND SNIEDER, R. Seismic reflector imaging using internal multiples with marchenko-type equations. *Geophysics* 79, 2 (2014), S63–S76. Citado na página 26.

-
- [27] WANG, Z. The influence of the goos–haenchen effect on seismic data processing and avo in attenuating media. *Journal of Applied Geophysics* 122 (2015), 122–133. Citado na página 15.
- [28] WAPENAAR, K., THORBECKE, J., VAN DER NEUT, J., BROGGINI, F., SLOB, E., AND SNIEDER, R. Marchenko imaging. *Geophysics* 79, 3 (2014), WA39–WA57. Citado na página 26.
- [29] YASUMOTO, K., AND ŌISHI, Y. A new evaluation of the goos–hänchen shift and associated time delay. *Journal of Applied Physics* 54, 5 (1983), 2170–2176. Citado na página 66.

APÊNDICE A – Forma matricial das equações de Zoeppritz

A.1 Interface Líquido 1 - Sólido 2

$$\begin{aligned}
 INC &= P[p_1, \psi_1, z] \\
 REF &= R_{PP}^{[Li1So2P]} P[p_1, \psi_1, -z] \\
 TRA &= T_{PP}^{[Li1So2P]} P[p_2, \psi_2, z] + T_{PS}^{[Li1So2P]} S[s_2, \varphi_2, z], \\
 & \quad P_z + S_y
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Derivando as equações dadas em (A.1), tendo em conta a primeira equação de continuidade, temos

$$P_z[p_1, \psi_1, z] + R_{PP}^{[Li1So2P]} P_z[p_1, \psi_1, -z] = T_{PP}^{[Li1So2P]} P_z[p_2, \psi_2, z] + T_{PS}^{[Li1So2P]} S_y[s_2, \varphi_2, z], \tag{A.2}$$

daí, de (A.2) segue

$$\cos \psi_1 - R_{PP}^{[Li1So2P]} \cos \psi_1 = T_{PP}^{[Li1So2P]} \cos \psi_2 + T_{PS}^{[Li1So2P]} \sin \varphi_2, \tag{A.3}$$

Isolando o termo sem coeficiente de reflexão e transmissão da Equação (A.3) chegamos à

$$\cos \psi_1 R_{PP}^{[Li1So2P]} + \cos \psi_2 T_{PP}^{[Li1So2P]} + \sin \varphi_2 T_{PS}^{[Li1So2P]} = \cos \psi_1. \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu(2P_{yz} + S_{yy} - S_{zz}) \\
 & 2\mu_1 P_{yz}[p_1, \psi_1, z] + 2\mu_1 R_{PP}^{[Li1So2P]} P_{yz}[p_1, \psi_1, -z] \\
 & = \mu_2 (2T_{PP}^{[Li1So2P]} P_{yz}[p_2, \psi_2, z] \\
 & \quad + T_{PS}^{[Li1So2P]} S_{yy}[s_2, \varphi_2, z] - T_{PS}^{[Li1So2P]} S_{zz}[s_2, \varphi_2, z]),
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

sendo $\mu_1 = \rho_1 s_1^2 = 0$, pois, $s_1 = \varphi = 0$. Ao fazermos as derivadas de (A.1) e, tendo em conta a Equação (A.5), escrevemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \mu_2 \left(2T_{PP}^{[Li1So2P]} \frac{\sin \psi_2 \cos \psi_2}{p_2} + T_{PS}^{[Li1So2P]} \frac{\sin^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_2}{s_2} \right) \\
 &= \frac{\mu_2}{p_2} \sin 2\psi_2 T_{PP}^{[Li1So2P]} - \frac{\mu_2}{s_2} \cos 2\varphi_2 T_{PS}^{[Li1So2P]} \\
 &= \frac{\rho_2^2 \cdot s_2^2}{p_2} \sin 2\psi_2 T_{PP}^{[Li1So2P]} - \frac{\rho_2^2 \cdot s_2^2}{s_2} \cos 2\varphi_2 T_{PS}^{[Li1So2P]} \\
 &= s_2^2 \sin 2\psi_2 T_{PP}^{[Li1So2P]} - p_2 s_2 \cos 2\varphi_2 T_{PS}^{[Li1So2P]},
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

assim isso concluímos que

$$s_2 \text{sen} 2\psi_2 T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} - p_2 \cos 2\varphi_2 T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} = 0. \quad (\text{A.7})$$

$$\lambda(P_{yy} + P_{zz}) + 2\mu(P_{zz} + S_{yz})$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1(P_{yy}[p_1, \psi_1, z] + P_{zz}[p_1, \psi_1, z]) + 2\mu_1 P_{zz}[p_1, \psi_1, z] \\ & + R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \lambda_1(P_{yy}[p_1, \psi_1, -z] + P_{zz}[p_1, \psi_1, -z]) + 2\mu_1 R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} P_{zz}[p_1, \psi_1, -z] \\ & = T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \lambda_2(P_{yy}[p_2, \psi_2, z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, z]) \\ & + 2\mu_2 (T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} P_{zz}[p_2, \psi_2, z] + T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} P_{yz}[s_2, \varphi_2, z]). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Sabendo que $\mu_1 = \rho_1 s_1^2 = 0$, pois, $s_1 = \varphi = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \lambda_1(P_{yy}[p_1, \psi_1, z] + P_{zz}[p_1, \psi_1, z]) + R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \lambda_1(P_{yy}[p_1, \psi_1, -z] + P_{zz}[p_1, \psi_1, -z]) \\ & = T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \lambda_2(P_{yy}[p_2, \psi_2, z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, z]) \\ & + 2\mu_2 (T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} P_{zz}[p_2, \psi_2, z] + T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} P_{yz}[s_2, \varphi_2, z]). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Derivando (A.1) e substituindo em (A.9) temos

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left(\frac{\text{sen}^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_1}{p_1} \right) + \lambda_1 R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \left(\frac{\text{sen}^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_1}{p_1} \right) \\ & = T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \lambda_2 \left(\frac{\text{sen}^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_2}{p_2} \right) + 2\mu_2 \left(T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \frac{\cos^2 \psi_2}{p_2} \right) + 2\mu_2 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cos \varphi_2}{s_2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Agora, aplicando propriedades trigonométricas em (A.10) segue que

$$\frac{\lambda_1}{p_1} (1 + R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]}) = \left(\frac{\lambda_2}{p_2} + \frac{2\mu_2}{p_2} \cos^2 \psi_2 \right) T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} + \frac{\mu_2}{s_2} \text{sen} 2\varphi_2 T_P^{[\text{Li1So2P}]}, \quad (\text{A.11})$$

note que

$$\frac{\lambda_1}{p_1} = \frac{\rho_1(p_1^2 - 2s_1^2)}{p_1} = \frac{\rho_1 p_1^2}{p_1} = \rho_1 p_1 \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{p_2} + \frac{2\mu_2}{p_2} \cos^2 \psi_2 &= \frac{\rho_2(p_2^2 - 2s_2^2)}{p_2} + \frac{2\rho_2 s_2^2}{p_2} \cos^2 \psi_2 \\ &= \frac{\rho_2 p_2^2}{p_2} - \frac{2\rho_2 s_2^2}{p_2} + \frac{2\rho_2 s_2^2}{p_2} \cos^2 \psi_2 \\ &= \rho_2 p_2 - \frac{2\rho_2 s_2^2}{p_2} \text{sen}^2 \psi_2 \\ &= \rho_2 p_2 - 2\rho_2 p_2 \text{sen}^2 \varphi_2 \\ &= \rho_2 p_2 (1 - 2\text{sen}^2 \varphi_2) \\ &= \rho_2 p_2 (\cos^2 \varphi_2 - \text{sen}^2 \varphi_2) \\ &= \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\mu_2}{s_2} \text{sen} 2\varphi_2 = \frac{\rho_2 s_2^2}{s_2} \text{sen} 2\varphi_2 = \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2. \quad (\text{A.14})$$

Isolando os termos sem coeficiente de reflexão e transmissão obtemos

$$-\rho_1 p_1 R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} + \rho_2 p_2 \cos \varphi_2 T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} + \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} = \rho_1 p_1. \quad (\text{A.15})$$

A partir do que fora desenvolvido até agora, notamos que, as igualdades dadas em (A.4), (A.7) e (A.15) dão origem ao sistema

$$\begin{cases} \cos \psi_1 R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} + \cos \psi_2 T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} + \text{sen} \varphi_2 T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} = \cos \psi_1 \\ 0 + s_2 \text{sen} \psi_2 T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} - p_2 \cos 2\varphi_2 T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} = 0 \\ -\rho_1 p_1 R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} + \rho_2 p_2 \cos \varphi_2 T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} + \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} = \rho_1 p_1 \end{cases}, \quad (\text{A.16})$$

cuja equação matricial é dada por

$$M^{[\text{Li1So2P}]} A^{[\text{Li1So2P}]} = B^{[\text{Li1So2P}]}, \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_1 & \cos \psi_2 & \text{sen} \varphi_2 \\ 0 & s_2 \text{sen} 2\psi_2 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ -\rho_1 p_1 & \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \\ T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \\ T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ 0 \\ \rho_1 p_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

$$M^{[\text{Li1So2P}]} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & \cos \psi_2 & \text{sen} \varphi_2 \\ 0 & s_2 \text{sen} 2\psi_2 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ -\rho_1 p_1 & \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix}$$

e

$$A^{[\text{Li1So2P}]} = \begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \\ T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \\ T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} \end{pmatrix},$$

$$B^{[\text{Li1So2P}]} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ 0 \\ \rho_1 p_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M^{[\text{Li1So2P}]} &= \cos \psi_1 \begin{pmatrix} s_2 \text{sen} 2\psi_2 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \cos \psi_2 \begin{pmatrix} 0 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ -\rho_1 p_1 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \text{sen} \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & s_2 \text{sen} 2\psi_2 \\ -\rho_1 p_1 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

daí, partindo da Equação (A.19) temos

$$\begin{aligned}
 \det M^{[\text{Li1So2P}]} &= \cos \psi_1 (\rho_2 s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2 + \rho_2 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \sin 2\varphi_2 \cos \psi_2 + \rho_1 p_1 s_2 \sin 2\psi_2 \\
 &= \cos \psi_1 \rho_2 (s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2 + p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \left(\cos 2\varphi_2 + \frac{s_2 \sin 2\psi_2}{p_2 \cos \psi_2} \sin \varphi_2 \right) \\
 &= \cos \psi_1 \rho_2 (s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2 + p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2. \tag{A.20}
 \end{aligned}$$

Montando a matriz de cofatores e realizando a transposição, seguida por algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\det M^{[\text{Li1So2P}]} \text{Adj} [M^{[\text{Li1So2P}]}] = \\
 &\begin{pmatrix} \rho_2 (p_2^2 \cos 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\varphi_2) & \rho_2 s_2 (\sin \psi_2 \cos 2\varphi_2 - \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2) & -p_2 \cos \psi_2 \\ \rho_1 p_1 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_1 p_1 \sin \varphi_2 + \rho_2 s_2 \cos \psi_1 \sin 2\varphi_2 & p_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2 \\ \rho_1 p_1 s_2 \sin 2\psi_2 & \rho_1 p_1 \cos \psi_2 - \rho_2 s_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2 & s_2 \cos \psi_1 \sin 2\psi_2 \end{pmatrix}. \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

Da (A.21) resulta que

$$\begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \\ T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} \\ T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} \end{pmatrix} = \det M^{[\text{Li1So2P}]} \text{Adj} [M^{[\text{Li1So2P}]}] \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi_1 \\ 0 \\ \rho_1 p_1 \end{pmatrix} \tag{A.22}$$

Finalmente, resolvendo a Equação (A.22) segue

$$\begin{aligned}
 R_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \\
 T_{PP}^{[\text{Li1So2P}]} &= \frac{2\rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \\
 T_{PS}^{[\text{Li1So2P}]} &= \frac{2\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 \sin 2\psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}. \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

A.2 Interface Sólido 2 - Líquido 3 para Incidência P

$$\begin{aligned}
 INC &= P[p_2, \psi_2, z] \\
 REF &= R_{PP}^{[\text{LiSo}]} P[p_2, \psi_2, -z] + R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} S[s_2, \varphi_2, -z] \\
 TRA &= T_{PP}^{[\text{LiSo}]} P[p_3, \psi_3, z], \tag{A.24}
 \end{aligned}$$

$$P_z + S_y$$

$$P_z[p_2, \psi_2, z] + R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} P_z[p_2, \psi_2, -z] + R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} S_y[s_2, \varphi_2, -z] = T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} P_z[p_3, \psi_3, z], \tag{A.25}$$

Derivando a Equação (A.24) temos

$$\cos \psi_2 - \cos \psi_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} + \sin \varphi_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} = \cos \psi_3 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]}.$$
 (A.26)

Isolando os termos independentes dos coeficientes de reflexão e transmissão, concluímos que

$$\cos \psi_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} - \sin \varphi_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} + \cos \psi_3 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} = \cos \psi_2.$$
 (A.27)

$$\mu(2P_{yz} + S_{yy} - S_{zz})$$

$$\begin{aligned} & 2\mu_2 P_{yz}[p_2, \psi_2, z] + 2\mu_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} P_{yz}[p_2, \psi_2, -z] \\ & + \mu_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} (S_{yy}[s_2, \varphi_2, -z] - S_{zz}[s_2, \varphi_2, -z]) \\ & = 2\mu_3 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} P_{yz}[p_3, \psi_3, z]. \end{aligned}$$
 (A.28)

Derivando a Equação (A.24) e realizando as substituições necessárias, obtemos

$$\begin{aligned} & 2\mu_2 \frac{\sin \psi_2 \cos \psi_2}{p_2} - 2\mu_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \frac{\sin \psi_2 \cos \psi_2}{p_2} \\ & + \mu_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} \left(\frac{\sin^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_2}{s_2} \right) \\ & = 2\mu_2 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \frac{\sin \psi_3 \cos \psi_3}{p_3}, \end{aligned}$$
 (A.29)

sendo que $\mu_3 = \rho_3 s_3^2 = 0$, pois, $s_3 = 0$. Portanto, ao isolar o termo independente e dividir ambos os lados da equação por s_2 , concluímos que

$$s_2 \sin 2\psi_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} + p_2 \cos 2\varphi_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} = s_2 \sin 2\psi_2.$$
 (A.30)

$$\lambda(P_{yy} + P_{zz}) + 2\mu(P_{zz} + S_{yz})$$

$$\begin{aligned} & \lambda_2 (P_{yy}[p_2, \psi_2, z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, z]) + 2\mu_2 P_{zz}[p_2, \psi_2, z] \\ & + 2\mu_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} S_{yz}[s_2, \varphi_2, -z] \\ & + \lambda_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} (P_{yy}[p_2, \psi_2, -z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, -z]) \\ & + 2\mu_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} P_{zz}[p_2, \psi_2, -z] + 2\mu_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} S_{yz}[s_2, \varphi_2, -z] \\ & = \lambda_3 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} (P_{yy}[p_3, \psi_3, z] + P_{zz}[p_3, \psi_3, z]). \end{aligned}$$
 (A.31)

Derivando a Equação (A.24) e fazendo as substituições necessárias em (A.31) obtemos

$$(1 + R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]}) \left(\frac{\lambda_2}{p_2} + 2\mu_2 \frac{\cos^2 \psi_2}{p_2} \right) - 2\mu_2 \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{s_2} R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} = \frac{\rho_3 p_3^2}{p_3} T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]}.$$
 (A.32)

Note que $\left(\frac{\lambda_2}{p_2} + 2\mu_2 \frac{\cos^2 \psi_2}{p_2}\right) = \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2$, assim como mostramos em casos análogos acima, daí, segue que

$$\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 + \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} - \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} = \rho_3 p_3 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]}, \quad (\text{A.33})$$

pelo que

$$-\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} + \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} + \rho_3 p_3 T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} = \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2. \quad (\text{A.34})$$

De (A.24), (A.30) e (A.34) escrevemos o sistema matricial que segue.

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_2 & -\sin \varphi_2 & \cos \psi_3 \\ s_2 \sin 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \\ R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} \\ T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_2 \\ s_2 \sin 2\psi_2 \\ \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

Vamos computar o determinante da matriz dada em (A.35). Daí,

$$\begin{aligned} \det M^{[\text{So2Li3P}]} &= \cos \psi_2 \begin{pmatrix} p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \\ &+ \sin \varphi_2 \begin{pmatrix} s_2 \sin 2\psi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \\ &+ \cos \psi_3 \begin{pmatrix} s_2 \sin 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \sin 2\varphi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} \det(M^{[\text{So2Li3P}]}) &= \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2 \\ &+ \rho_3 p_3 s_2 \sin 2\psi_2 \sin \varphi_2 \\ &+ \cos \psi_3 (\rho_2 s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2 + \rho_2 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) \\ &= \rho_2 \cos \psi_3 (s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2 + p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) \\ &+ \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \left(\cos 2\varphi_2 + \frac{s_2 \sin 2\psi_2}{p_2 \cos \psi_2} \sin \varphi_2 \right) \\ &= \rho_2 \cos \psi_3 (s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2 + p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) \\ &+ \rho_3 p_3 p_3 \cos \psi_2, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Formando a matriz de cofatores e realizando a transposição, seguida por algumas manipulações algébricas, temos

$$\det M^{[\text{So2Li3P}]} \text{Adj} [M^{[\text{So2Li3P}]}] = \begin{pmatrix} \rho_3 p_2 p_3 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \cos \psi_3 \sin 2\varphi_2 + \rho_3 p_3 \sin \varphi_2 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3 \\ -\rho_3 s_2 p_3 \sin 2\psi_2 & \rho_2 p_2 \cos \psi_3 \cos 2\varphi_2 + \rho_3 p_3 \cos \psi_2 & s_2 \sin 2\psi_2 \cos \psi_3 \\ \rho_2 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) & \rho_2 s_2 (\sin \psi_2 \cos 2\varphi_2 - \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2) & p_2 \cos \psi_2. \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

donde segue que

$$\begin{pmatrix} R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \\ R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} \\ T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} \end{pmatrix} = \det M^{[\text{So2Li3P}]} \text{Inverso} [M^{[\text{So2Li3P}]}] \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi_2 \\ s_2 \text{sen} 2\psi_2 \\ \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.39})$$

Portanto, a solução de (A.39) é a seguinte

$$\begin{aligned} R_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\ R_{PS}^{[\text{So2Li3P}]} &= \frac{2\rho_2 p_2 s_2 \text{sen} 2\psi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\ T_{PP}^{[\text{So2Li3P}]} &= \frac{2\rho_2 p_2^2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

A.3 Interface Sólido 2 - Líquido 3 Incidência S

$$\begin{aligned} INC &= S[s_2, \varphi_2, z] \\ REF &= R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P[p_2, \psi_2, -z] + R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} S[s_2, \varphi_2, -z] \\ TRA &= T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P[p_3, \psi_3, z], \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$P_z + S_y$$

$$S_y[s_2, \varphi_2, z] + R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P_z[p_2, \psi_2, -z] + R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} S_y[s_2, \varphi_2, -z] = T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P_z[p_3, \psi_3, z], \quad (\text{A.42})$$

Derivando a Equação A.41 obtemos

$$\text{sen} \varphi_2 - \cos \psi_2 R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} + \text{sen} \varphi_2 R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} = \cos \psi_3 T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]}, \quad (\text{A.43})$$

Daí, isolando o termo independente dos coeficientes de reflexão e transmissão, concluímos que

$$\cos \psi_2 R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} - \text{sen} \varphi_2 R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} + \cos \psi_3 T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} = \text{sen} \varphi_2. \quad (\text{A.44})$$

$$\mu(2P_{yz} + S_{yy} - S_{zz})$$

$$\begin{aligned} &2\mu_2 R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P_{yz}[p_2, \psi_2, -z] + \mu_2 (S_{yy}[s_2, \varphi_2, z] - S_{zz}[s_2, \varphi_2, z]) \\ &+ \mu_2 R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} (S_{yy}[s_2, \varphi_2, -z] - S_{zz}[s_2, \varphi_2, -z]) \\ &= \mu_3 T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} P_{yz}[p_3, \psi_3, z]. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Levando em consideração as equações dadas em (A.41) e, combinando-as com a Equação (A.45), temos

$$\begin{aligned}
 & 2\mu_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} P_{yz}[p_2, \psi_2, -z] + \mu_2 (S_{yy}[s_2, \varphi_2, z] - S_{zz}[s_2, \varphi_2, z]) \\
 & + \mu_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} (S_{yy}[s_2, \varphi_2, -z] - S_{zz}[s_1, \varphi_2, -z]) \\
 & = \frac{\mu_1}{s_2} (\text{sen}^2 \varphi_2 - \text{cos}^2 \varphi_2) \\
 & - \frac{\mu_2}{p_2} (2\text{sen} \varphi_2 \text{cos} \varphi_2) R_{SP}^{[So2Li3S]} \\
 & + \frac{\mu_1}{s_2} (\text{sen}^2 \varphi_2 - \text{cos}^2 \varphi_2) R_{SS}^{[So2Li3S]} \\
 & = \frac{\mu_2}{s_2} \text{cos} 2\varphi_2 - \frac{\mu_2}{p_2} \text{sen} 2\varphi_1 R_{SP}^{[So2Li3S]} \\
 & - \frac{\mu_2}{s_2} \text{cos} 2\varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} \\
 & = \frac{\rho_2 s_2^2}{s_2} \text{cos} 2\varphi_2 - \frac{\rho_2 s_2^2}{p_2} \text{sen} 2\varphi_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} \\
 & - \frac{\rho_2 s_2^2}{s_2} \text{cos} 2\varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} \\
 & = s_2 \text{cos} 2\varphi_2 - \frac{s_2^2}{p_2} \text{sen} 2\varphi_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} \\
 & - s_2 \text{cos} 2\varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} \\
 & = p_2 \text{cos} 2\varphi_2 - s_2 \text{sen} 2\varphi_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} \\
 & - p_2 \text{cos} 2\varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

Isso demonstra que, para o cenário sólido-líquido, no qual a onda incidente é do tipo S , a segunda equação de continuidade assume a seguinte forma

$$s_2 \text{sen} 2\varphi_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} + p_1 \text{cos} 2\varphi_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} = -p_2 \text{cos} 2\varphi_2. \tag{A.47}$$

$$\lambda(P_{yy} + P_{zz}) + 2\mu(P_{zz} + S_{yz})$$

$$\begin{aligned}
 & \lambda_2 R_{SP}^{[So2Li3S]} (P_{yy}[p_2, \psi_2, -z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, -z]) \\
 & + 2\mu_2 P_{zz}[p_2, \psi_2, -z] R_{SP}^{[So2Li3S]} \\
 & + 2\mu_2 (S_{yz}[s_2, \varphi_2, z]) \\
 & + 2\mu_2 R_{SS}^{[So2Li3S]} S_{yz}[s_2, \varphi_2, -z] \\
 & = \lambda_3 T_{PS}^{[So2Li3S]} (P_{yy}[p_3, \psi_3, z] + P_{zz}[p_3, \psi_3, z]) \\
 & + 2\mu_3 T_{SP}^{[So2Li3S]} P_{zz}[p_3, \psi_3, z],
 \end{aligned} \tag{A.48}$$

como $\mu_3 = \rho_3 s_3^2 = 0$, pois, $s_3 = 0$ segue que

$$\begin{aligned}
 & \lambda_2 R_{PS}^{[\text{So2Li3S}]} (P_{yy}[p_2, \psi_2, -z] + P_{zz}[p_2, \psi_2, -z]) \\
 & + 2\mu_2 P_{zz}[p_2, \psi_2, -z] R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} \\
 & + 2\mu_2 (S_{yz}[s_2, \varphi_2, z]) \\
 & + 2\mu_2 R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} S_{yz}[s_2, \varphi_2, -z] \\
 & = \lambda_3 T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} (P_{yy}[p_3, \psi_3, z] + P_{zz}[p_3, \psi_3, z])
 \end{aligned} \tag{A.49}$$

e, portanto, simplificando (A.49) temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\lambda_2}{p_2} + \frac{2\mu_2}{p_2} \cos^2 \psi_2 \right) R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} \\
 & + \frac{2\mu_2}{s_2} (\text{sen} \varphi_2 \cos \varphi) - \frac{2\mu_2}{s_2} (\text{sen} \varphi_2 \cos \varphi_2) R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} \\
 & = \frac{\lambda_3}{p_3} (\text{sen} \psi_3 + \cos \psi_3) T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} .
 \end{aligned} \tag{A.50}$$

Como mostramos em casos anteriores que

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\lambda_2}{p_2} + \frac{2\mu_2}{p_2} \cos^2 \psi_2 \right) = \rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 \\
 & \frac{2\mu_2}{s_2} (\text{sen} \varphi_2 \cos \varphi_2) = \frac{\mu_2}{s_2} \text{sen} 2\varphi_2 = \frac{\rho_2 s_2^2}{s_2} \text{sen} 2\varphi_2 = \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2, \\
 & \frac{\lambda_2}{p_3} = \frac{\rho_2 (p_3^2 - 2s_3^2)}{p_3} = \frac{\rho_3 p_3^2}{p_3} = \rho_3 p_3
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

podemos escrever

$$\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} + \rho_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 - \rho_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} = \rho_3 p_3 T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} . \tag{A.52}$$

Finalmente, isolando o termo independente dos coeficientes de reflexão e transmissão, concluímos que, no caso sólido-líquido em que a onda incidente é do tipo S , a terceira equação de continuidade nos leva à seguinte equação

$$-\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} + \rho_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} + \rho_3 p_3 T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} = \rho_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 . \tag{A.53}$$

daí segue que

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_2 & -\text{sen} \varphi_2 & \cos \psi_3 \\ s_2 \text{sen} 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} \\ R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} \\ T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen} \varphi_2 \\ -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ \rho_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix} . \tag{A.54}$$

Vamos computar o determinante dessa matriz. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
 \det M^{[\text{So2Li3S}]} & = \cos \psi_2 \begin{pmatrix} p_2 \cos 2\varphi_2 & 0 \\ \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \\
 & + \text{sen} \varphi_2 \begin{pmatrix} s_2 \text{sen} 2\psi_2 & 0 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_3 p_3 \end{pmatrix} \\
 & + \cos \psi_3 \begin{pmatrix} s_2 \text{sen} 2\psi_2 & p_2 \cos 2\varphi_2 \\ -\rho_2 p_2 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

$$\begin{aligned}
 \det(M^{[\text{So2Li3S}]}) &= \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2 \\
 &\quad + \rho_3 p_3 s_2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} \varphi_2 \\
 &\quad + \cos \psi_3 (\rho_2 s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2 + \rho_2 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) \\
 &= \rho_2 \cos \psi_2 (s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2 + p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) \\
 &\quad + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \left(\cos 2\varphi_2 + \frac{s_2 \text{sen} 2\psi_2}{p_2 \cos \psi_2} \text{sen} \varphi_2 \right) \\
 &= \rho_2 \cos \psi_3 (s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2 + p_2^2 \cos^2 2\varphi_2) \\
 &\quad + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2,
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

Formando a matriz de cofatores e realizando a transposição, seguida por algumas manipulações algébricas, temos

$$\begin{aligned}
 &\det M^{[\text{So2Li3S}]} \text{Adj} [M^{[\text{So2Li3S}]}] = \\
 &\begin{pmatrix} \rho_3 p_2 p_3 \cos 2\varphi_2 & \rho_2 s_2 \cos \psi_3 \text{sen} 2\varphi_2 + \rho_2 p_3 \text{sen} \varphi_2 & -p_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3 \\ -\rho_3 s_2 p_3 \text{sen} 2\psi_2 & \rho_2 p_2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2 + \rho_2 p_3 \cos \psi_2 & s_2 \text{sen} 2\psi_2 \cos \psi_3 \\ \rho_2 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) & \rho_2 s_2 (\text{sen} \psi_2 \cos 2\varphi_2 - \cos \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) & p_2 \cos \psi_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.57}$$

De (A.57) podemos escrever

$$\begin{pmatrix} R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} \\ R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} \\ T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} \end{pmatrix} = \det M^{[\text{So2Li3S}]} \text{Adj} [M^{[\text{So2Li3S}]}] \cdot \begin{pmatrix} \text{sen} \varphi_2 \\ -p_2 \cos 2\varphi_2 \\ \rho_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{A.58}$$

pelo que,

$$\begin{aligned}
 R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} &= -\frac{2\rho_2 s_2 p_2 \text{sen} 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\
 R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} &= \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) - \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \\
 T_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} &= \frac{2\rho_2 s_2 p_2 \cos \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}.
 \end{aligned} \tag{A.59}$$

As equações de Zoeppritz nos casos de sólido 2-líquido 1, com onda incidente P e S, é calculada da mesma forma que no caso de sólido 2-líquido 3, simplesmente substituindo ρ_3 , p_3 e ψ_3 por ρ_1 , p_1 e ψ_1 , respectivamente.

APÊNDICE B – A conservação de energia

B.1 Interface Líquido 1 - Sólido 2

$$\begin{aligned}
 E_{\text{REF}(P)}^{[\text{LiSoP}]} &= \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \right|^2 \\
 E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{LiSoP}]} &= \frac{\rho_2 p_2 \cos \psi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| \frac{2\rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \right|^2 \\
 E_{\text{TRA}(S)}^{[\text{LiSoP}]} &= \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| \frac{2\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 \text{sen} 2\psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2} \right|^2 \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

B.1.1 Primeira região de incidência

$$\left| R_{PP}^{[\text{LiSo}]} \right|^2 + \frac{\rho_2 p_2 \cos \psi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| T_{PP}^{[\text{LiSo}]} \right|^2 + \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| T_{PS}^{[\text{LiSo}]} \right|^2 = 1. \quad (\text{B.2})$$

Da Equação (B.2), temos o denominador,

$$\left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \right|^2. \quad (\text{B.3})$$

Da Equação (B.2) o numerador é dado por

$$\begin{aligned}
 & \left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \right|^2 \\
 & + \frac{\rho_2 p_2 \cos \psi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} (2\rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos 2\varphi_2)^2 \\
 & + \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} (2\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 \text{sen} 2\psi_2)^2. \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

Podemos manipular algebricamente a Equação (B.4), daí, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \right|^2 \\
 & - 4\rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) \\
 & + 4\rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 \\
 & + 4\rho_1 \rho_2 p_1 p_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \left(\frac{s_2^2}{p_2} \cos \varphi_2 \frac{\text{sen}^2 2\psi_2}{\cos \psi_2} \right) \\
 & = \left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 \cos \psi_2 \right|^2. \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

O resultado dado em (B.5), junto ao fato de que

$$\begin{aligned}
 \frac{s_2^3}{p_2} \cos \varphi_2 \frac{\text{sen}^2 2\psi_2}{\cos \psi_2} &= \frac{s_2^3}{p_2} \cos \varphi_2 \text{sen} 2\psi_2 \frac{2\text{sen}\psi_2 \cos \psi_2}{\cos \psi_2} \\
 &= \frac{s_2^3}{p_2} \cos \varphi_2 \text{sen} 2\psi_2 2\text{sen}\psi_2 \\
 &= s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \left(2 \cos \varphi_2 \frac{s_2}{p_2} \text{sen}\psi_2 \right) , \\
 &= s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \left(2 \cos \varphi_2 \frac{s_2}{p_2} \text{sen}\psi_2 \right) \\
 &= s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 (2 \cos \varphi_2 \text{sen} \varphi_2) \\
 &= s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

nos permite concluir que

$$E_{\text{REF}(P)}^{[Li1So2P]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[Li1So2P]} + E_{\text{TRA}(S)}^{[Li1So2P]} = 1. \tag{B.7}$$

B.1.2 Segunda região de incidência

$$\begin{aligned}
 E_{\text{REF}(P)}^{[Li1So2P]} &= \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i2s_2^2 \text{sen}\psi_2 |\cos \psi_2| \text{sen} 2\varphi_2) - i\rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i2s_2^2 \text{sen}\psi_2 |\cos \psi_2| \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 i |\cos \psi_2|} \right|^2 \\
 E_{\text{TRA}(S)}^{[Li1So2P]} &= \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| \frac{4i\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 |\cos \psi_2| \text{sen}\psi_2}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i2s_2^2 \text{sen}\psi_2 |\cos \psi_2| \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 i |\cos \psi_2|} \right|^2 .
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Na segunda região temos,

$$\left| R_{PP}^{[LiSo]} \right|^2 + \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} \left| T_{PS}^{[LiSo]} \right|^2 = 1. \tag{B.9}$$

O denominador é dado por (B.3) e o numerador da equação (B.9) é dado por

$$\begin{aligned}
 &\left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + i2s_2^2 \text{sen}\psi_2 |\cos \psi_2| \text{sen} 2\varphi_2) - i\rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2| \right|^2 \\
 &+ \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} (4i\rho_1 s_2 p_1 \cos \psi_1 |\cos \psi_2| \text{sen}\psi_2)^2
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

A Equação (B.10) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 &(\rho_2 p_2^2 \cos \psi_1 \cos^2 2\varphi_2)^2 \\
 &+ (\rho_2 \cos \psi_1 2s_2^2 \text{sen}\psi_2 |\cos \psi_2| \text{sen} 2\varphi_2 - i\rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|)^2 \\
 &+ \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} 16\rho_1^2 s_2^2 p_1^2 \cos^2 \psi_1 |\cos^2 \psi_2| \text{sen}^2 \psi_2 .
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Fazendo algumas manipulações algébricas em (B.11) segue que

$$\begin{aligned}
 &(\rho_2 p_2^2 \cos \psi_1 \cos^2 2\varphi_2)^2 \\
 &+ (\rho_2 \cos \psi_1 2s_2^2 \text{sen}\psi_2 |\cos \psi_2| \text{sen} 2\varphi_2 - \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|)^2 \\
 &+ \frac{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2}{\rho_1 p_1 \cos \psi_1} 16\rho_1^2 s_2^2 p_1^2 \cos^2 \psi_1 |\cos^2 \psi_2| \text{sen}^2 \psi_2 \\
 &= \left| \rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2s_2^2 \text{sen}\psi_2 |\cos \psi_2| \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2| \right|^2 .
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

O resultado na Equação (B.12) é dado pelo fato de que

$$\begin{aligned} 16\rho_2 s_2 \cos \varphi_2 \rho_1 p_1 s_2^2 \cos \psi_1 \sin^2 \psi_2 |\cos \psi_2|^2 &= 8\rho_2 s_2 \cos \varphi_2 \rho_1 p_1 s_2^2 2 \cos \psi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_2 \frac{p_2}{s_2} |\cos \psi_2|^2 \\ &= 8\rho_1 \rho_2 p_1 p_2 s_2^2 \cos \psi_1 \sin 2\varphi_2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2|^2 \end{aligned} \quad (B.13)$$

e também

$$\begin{aligned} &(\rho_2 \cos \psi_1 2s_2^2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2| \sin 2\varphi_2) - \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|)^2 \\ &= (\rho_2 \cos \psi_1 2s_2^2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2| \sin 2\varphi_2) + \rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|)^2 \\ &\quad - 8\rho_1 \rho_2 p_1 p_2 s_2^2 \cos \psi_1 \sin 2\varphi_2 \sin \psi_2 |\cos \psi_2|^2 \end{aligned} \quad (B.14)$$

Isso prova que o denominador e o numerador da Equação (B.9) são iguais. Então, concluímos que

$$E_{\text{REF}(P)}^{[Li1So2P]} + E_{\text{TRA}(S)}^{[Li1So2P]} = 1. \quad (B.15)$$

B.1.3 Terceira região de incidência

$$E_{\text{REF}(P)}^{[LiSo]} = \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - s_2^2 |\sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2|) - i\rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|}{\rho_2 \cos \psi_1 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - s_2^2 |\sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2|) + i\rho_1 p_1 p_2 |\cos \psi_2|} \right|^2 = 1 \quad (B.16)$$

B.2 Interface Sólido 2 - Líquido 3 para Incidência P

$$\begin{aligned} E_{\text{REF}(P)}^{[So2Li3P]} &= \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\ E_{\text{REF}(S)}^{[So2Li3P]} &= \frac{s_2 \cos \varphi_2}{p_2 \cos \psi_2} \left| \frac{2\rho_2 p_2 s_2 \sin 2\psi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\ E_{\text{TRA}(P)}^{[So2Li3P]} &= \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 p_2 \cos \psi_2} \left| \frac{2\rho_2 p_2^2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\ &\left| R_{PP}^{[So2Li3P]} \right|^2 + \frac{s_3 \cos \varphi_2}{p_2 \cos \psi_2} \left| R_{PS}^{[So2Li3P]} \right|^2 + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 p_2 \cos \psi_2} \left| T_{PP}^{[So2Li3P]} \right|^2 = 1. \end{aligned} \quad (B.17)$$

Notamos que em (B.18) o denominador é dado por

$$\left| \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2, \quad (B.18)$$

e o numerador é

$$\begin{aligned} &\left| \rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2 \\ &+ \frac{s_2 \cos \varphi_2}{p_2 \cos \psi_2} (2\rho_2 p_2 s_2 \sin 2\psi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3)^2 \\ &+ \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 p_2 \cos \psi_2} (2\rho_2 p_2^2 \cos \psi_2 \cos 2\varphi_2)^2. \end{aligned} \quad (B.19)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas na Equação (B.19), temos

$$\begin{aligned}
 & \left| \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2 \\
 & - 4\rho_2 \cos \psi_3 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 (\rho_2 \cos \psi_3 s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2 + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2) \\
 & + 4\rho_2^2 p_2 s_2 \sin \psi_2 \sin 2\psi_2 \cos^2 \psi_3 \cos^2 2\varphi_2 \cos \varphi_2 \\
 & + 4\rho_2 \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_3 \cos \psi_2 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 \\
 & = \left| \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2. \tag{B.20}
 \end{aligned}$$

Isso prova que,

$$E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So2Li3P}]} + E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3P}]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3P}]} = 1. \tag{B.21}$$

B.3 Interface Sólido 2 - Líquido 3 para Incidência S

$$\begin{aligned}
 E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} &= \frac{p_2 \cos \psi_2}{s_2 \cos \varphi_2} \left| \frac{2\rho_2 s_2 p_2 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\
 E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3S}]} &= \left| \frac{\rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \\
 E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} &= \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_1 s_2 \cos \varphi_2} \left| \frac{2\rho_2 s_2 p_2 \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2}{\rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2} \right|^2 \tag{B.22}
 \end{aligned}$$

B.3.1 Primeira região de incidência

$$\frac{p_2 \cos \psi_2}{s_2 \cos \varphi_2} \left| R_{SP}^{[\text{So2Li3S}]} \right|^2 + \left| R_{SS}^{[\text{So2Li3S}]} \right|^2 + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} \left| T_{SP}^{[\text{SoLi}]} \right|^2 = 1. \tag{B.23}$$

Portanto, pela Equação (B.23), vemos que o denominador é

$$\left| \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2, \tag{B.24}$$

e o numerador na Equação (B.23) é

$$\begin{aligned}
 & \frac{p_2 \cos \psi_2}{s_2 \cos \varphi_2} (2\rho_2 s_2 p_2 \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \cos \psi_3)^2 \\
 & + \left| \rho_2 \cos \psi_3 (-p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \sin 2\psi_2 \sin 2\varphi_2) - \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2 \\
 & + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} (2\rho_2 s_2 p_2 \cos \psi_2 \sin 2\varphi_2)^2. \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

Fazendo manipulações algébricas na Equação (B.25), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left| \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2 \\
 & - 4\rho_2 \cos \psi_3 s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2 (\rho_2 \cos \psi_3 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + \rho_3 p_2 p_3 \cos \varphi_3) \\
 & + 4\rho_2^2 s_2 p_2 \text{sen} \psi_2 2 \cos \psi_2 \cos^2 2\varphi_2 \cos^2 \psi_3 \text{sen} 2\varphi_3 \\
 & + 4\rho_2 \rho_3 p_2 p_3 s_2 p_2 2 \text{sen} \psi_2 \cos \psi_3 \cos \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2 \\
 & = \left| \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + s_2^2 \text{sen} 2\psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) + \rho_3 p_2 p_3 \cos \psi_2 \right|^2. \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

Isso conclui que o denominador é igual ao numerador, pelo que obtemos

$$E_{\text{REF}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} + E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3S}]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} = 1. \tag{B.27}$$

B.3.2 Segunda região de incidência

$$\begin{aligned}
 E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3S}]} &= \left| \frac{i\rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - 2is_2^2 |\cos \psi_2| \text{sen} \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2)}{i\rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2is_2^2 |\cos \psi_2| \text{sen} \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2)} \right|^2 \\
 E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} &= \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_1 s_2 \cos \varphi_2} \left| \frac{4i\rho_2 s_2 p_2 |\cos \psi_2| \text{sen} \varphi_2 \cos \varphi_2}{i\rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2is_2^2 |\cos \psi_2| \text{sen} \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2)} \right|^2. \tag{B.28}
 \end{aligned}$$

A conservação de energia agora está garantida por

$$\left| R_{\text{SS}}^{[\text{So2Li3S}]} \right|^2 + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} \left| T_{\text{SP}}^{[\text{So2Li3S}]} \right|^2 = 1. \tag{B.29}$$

Por conseguinte, vemos que o denominador da Equação (B.29) é dado na Equação (B.24). O numerador é,

$$\begin{aligned}
 & \left| i\rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - 2is_2^2 |\cos \psi_2| \text{sen} \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) \right|^2 \\
 & + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} (4i\rho_2 s_2 p_2 |\cos \psi_2| \text{sen} \varphi_2 \cos \varphi_2)^2. \tag{B.30}
 \end{aligned}$$

Reescrevendo a Equação (B.30) temos

$$\begin{aligned}
 & \left| i\rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - 2is_2^2 |\cos \psi_2| \text{sen} \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) \right|^2 \\
 & + \frac{\rho_3 p_3 \cos \psi_3}{\rho_2 s_2 \cos \varphi_2} 16\rho_2^2 s_2^2 p_2^2 |\cos^2 \psi_2| \text{sen}^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_2 \\
 & = \left| i\rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - 2is_2^2 |\cos \psi_2| \text{sen} \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) \right|^2 \\
 & + 16\rho_2 \rho_3 s_2 p_2^2 p_3 \cos \psi_3 |\cos^2 \psi_2| \text{sen}^2 \varphi_2 \cos \varphi_2 \\
 & = \left| i\rho_3 p_2 p_3 |\cos \psi_2| + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 + 2is_2^2 |\cos \psi_2| \text{sen} \psi_2 \text{sen} 2\varphi_2) \right|^2. \tag{B.31}
 \end{aligned}$$

Portanto, o resultado dado em (B.31) segue pelo fato de que

$$\begin{aligned}
& |i\rho_3 p_2 p_3 | \cos \psi_2 | + \rho_2 \cos \psi_3 (p_2^2 \cos^2 2\varphi_2 - 2i s_2^2 | \cos \psi_2 | \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2) |^2 \\
&= (\rho_2 \cos \psi_3 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2)^2 + (\rho_3 p_2 p_3 | \cos \psi_2 | - 2\rho_2 \cos \psi_3 s_2^2 | \cos \psi_2 | \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2)^2 \\
&= (\rho_2 \cos \psi_3 p_2^2 \cos^2 2\varphi_2)^2 + (\rho_3 p_2 p_3 | \cos \psi_2 | + 2\rho_2 \cos \psi_3 s_2^2 | \cos \psi_2 | \sin \psi_2 \sin 2\varphi_2)^2 \\
&- 8\rho_2 \rho_3 p_2 p_3 s_2^2 \cos \psi_3 | \cos^2 \psi_2 | \sin 2\varphi_2 \sin \psi_2
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Além disso, pela Lei de Snell, escrevemos

$$\begin{aligned}
& 16\rho_2 \rho_3 s_2 p_2^2 p_3 \cos \psi_3 | \cos^2 \psi_2 | \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_2 \\
&= 8\rho_2 \rho_3 p_2^2 p_3 s_2 \cos \psi_3 | \cos^2 \psi_2 | 2 \sin^{\varphi_2} \cos \varphi_2 \frac{s_2}{p_2} \cos \psi_2. \\
&= -8\rho_2 \rho_3 p_2 p_3 s_2^2 \cos \psi_3 | \cos^2 \psi_2 | \sin 2\varphi_2 \sin \psi_2
\end{aligned} \tag{B.33}$$

Então, na Equação (B.32), provamos que o denominador e o numerador da Equação (B.29) são iguais, donde obtemos

$$E_{\text{REF}(S)}^{[\text{So2Li3S}]} + E_{\text{TRA}(P)}^{[\text{So2Li3S}]} = 1. \tag{B.34}$$

A conservação de energia nos casos de sólido 2 - líquido 1, com onda incidente P e S, é calculada da mesma forma que no caso de sólido 2 - líquido 3, simplesmente substituindo ρ_3 , p_3 e ψ_3 por ρ_1 , p_1 e ψ_1 , respectivamente.