



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

AIRLAN ARNALDO NASCIMENTO DE LIMA

Sistemas presa-predador: modelagem, simulação e controle ótimo

Campinas

2024

Airlan Arnaldo Nascimento de Lima

Sistemas presa-predador: modelagem, simulação e controle ótimo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Simão Nicolau Stelmastchuk

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Airlan Arnaldo Nascimento de Lima e orientada pelo Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L628s Lima, Airlan Arnaldo Nascimento de, 1981-
Sistemas presa-predador : modelagem, simulação e controle ótimo / Airlan Arnaldo Nascimento de Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Simão Nicolau Stelmastchuk.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Modelagem matemática. 2. Controle ótimo. 3. Equações diferenciais ordinárias. 4. Simulação (Computadores). 5. Biomatemática. I. Stelmastchuk, Simão Nicolau, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Predator-prey systems : modeling, simulation and optimal control

Palavras-chave em inglês:

Mathematical modeling

Optimal control

Ordinary differential equations

Computer simulation

Biomathematics

Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

Banca examinadora:

Simão Nicolau Stelmastchuk [Orientador]

Alexandre José Santana

João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Data de defesa: 15-07-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-6013-3046>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/2368819461212823>

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 15 de julho de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SIMÃO NICOLAU STELMASTCHUK

Prof(a). Dr(a). ALEXANDRE JOSÉ SANTANA

Prof(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Este trabalho é dedicado aos meus pais Arnaldo Sales de Lima (in memoriam) e Maria Rozinete Nascimento de Lima, a minha avó, Inácia Sales de Lima (in memoriam) e a minha esposa, Erica karanine Bezerra Silva.

Agradecimentos

Aos meus pais, Arnaldo (in memoriam) e Rozinete, por dedicarem todo amor e cuidado ao meu crescimento pessoal. Sem eles, eu nada seria.

A minha avó Inácia (in memoriam), cujo coração bondoso sempre me acolheu como um filho. Muito obrigado, vovó!

A minha esposa Erica, sempre ao meu lado, é inspiração e exemplo de perseverança. Seu amor é o meu refúgio em todos os momentos.

Ao Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk, por dedicar tanta atenção e cuidado na orientação deste trabalho. Prof. Simão sempre foi compreensivo com as minhas limitações, demonstrando zelo e cordialidade no processo de orientação. Muito obrigado, Prof. Simão! Suas contribuições foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico.

A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional, em especial à Prof^a. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa e ao Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer, por todos os ensinamentos e incentivos.

Aos membros da banca examinadora, por apresentarem contribuições para a melhoria deste trabalho.

*“Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana,
seja apenas outra alma humana”.
(Carl Gustav Jung)*

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre a modelagem matemática da dinâmica populacional de sistemas do tipo presa-predador com duas espécies. Os objetivos do estudo consistem em investigar o comportamento qualitativo (via análise de estabilidade) dos pontos críticos dos sistemas de equações diferenciais ordinárias que descrevem as interações entre as espécies, verificando a possibilidade de coexistência e identificando eventuais cenários de extinção. Alguns modelos foram estudados sob a perspectiva da Teoria do Controle Ótimo, de modo que buscamos otimizar estratégias para redução de uma população de pragas. Em todos os casos analisados, simulações numéricas foram utilizadas para exemplificar os resultados alcançados.

Palavras-chave: Sistemas presa-predador. Modelagem Matemática. Controle Ótimo, Simulação Numérica.

Abstract

This work presents a study on the mathematical modeling of the population dynamics of predator-prey systems with two species. The objectives of the study are to investigate the qualitative behavior (via stability analysis) of the critical points of the systems of ordinary differential equations that describe the interactions between the species, checking the possibility of coexistence and identifying potential extinction scenarios. Some models were examined from the perspective of Optimal Control Theory, aiming to optimize strategies for reducing a pest population. In all analyzed cases, numerical simulations were used to illustrate the results obtained

Keywords: Predator-prey systems. Mathematical Modeling. Optimal Control. Numerical Simulation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Continuidade por partes.	23
Figura 2 – Funções côncavas e convexas.	24
Figura 3 – Curva solução no plano de fase xy	44
Figura 4 – Gráficos de z em função de x e de y	45
Figura 5 – Retrato de fase. Em vermelho, temos $x(0) = 400$ e $y(0) = 30$; em laranja, $x(0) = 700$ e $y(0) = 50$; em azul, $x(0) = 800$ e $y(0) = 60$; em verde, $x(0) = 950$ e $y(0) = 70$	48
Figura 6 – Simulação numérica executada com o software Mathematica.	49
Figura 7 – Abundância de coelhos e lobos, segundo dados da Hudson's Bay Company	50
Figura 8 – Crescimento logístico com diferentes condições iniciais. Gráficos construídos com a linguagem Python.	55
Figura 9 – Retrato de fase. Em vermelho, temos $x(0) = 1000$ e $y(0) = 40$; em laranja, $x(0) = 1200$ e $y(0) = 30$; em azul, $x(0) = 900$ e $y(0) = 20$; em verde, $x(0) = 850$ e $y(0) = 50$	57
Figura 10 – Simulação numérica executada com o software Mathematica	58
Figura 11 – Retrato de fase. Em vermelho, temos $x(0) = 1000$ e $y(0) = 40$; em laranja, $x(0) = 800$ e $y(0) = 30$; em azul, $x(0) = 600$ e $y(0) = 20$; em verde, $x(0) = 400$ e $y(0) = 15$	61
Figura 12 – Simulação numérica executada com o software Mathematica	61
Figura 13 – Simulação numérica para o modelo 1	70
Figura 14 – Simulação numérica para o modelo 2	71

Lista de Códigos-fonte

Código-fonte 1	– Lotka-Volterra	76
Código-fonte 2	– competicao-presas	78
Código-fonte 3	– competicao-populacoes	80
Código-fonte 4	– Modelo 1	82
Código-fonte 5	– Modelo 2	84

Sumário

Introdução	14
1 Sistemas de equações diferenciais ordinárias	16
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias	16
1.2 Equações Diferenciais Lineares e não lineares	16
1.3 Solução de uma EDO	17
1.4 Problemas de valor inicial	18
1.5 Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias	19
1.6 Sistemas autônomos bidimensionais	19
1.6.1 Estabilidade de sistemas autônomos lineares	21
1.6.2 Estabilidade de sistemas localmente lineares	22
2 Elementos da Teoria do Controle Ótimo	23
2.1 Definições preliminares	23
2.2 Caracterização do problema básico de controle ótimo	24
2.3 Princípio do Máximo de Pontryagin	25
2.4 Condições suficientes para a existência do controle ótimo	29
2.5 Generalizações do Princípio do Máximo de Pontryagin	31
2.5.1 Problemas com várias variáveis de estado e de controle	32
2.5.1.1 Problemas com estados finais fixados	36
2.5.1.2 Funcional objetivo com “termos de retorno”	37
2.5.1.3 Controle limitado	38
3 Sistemas presa-predador livres de controle	40
3.1 O modelo de Lotka - Volterra	40
3.2 Modificações no modelo de Lotka - Volterra	51
3.3 Competição intraespecífica entre as presas	53
3.4 Competição intraespecífica entre ambas as populações	58
4 Sistemas presa-predador com controle ótimo	63
4.1 Modelo de Lotka-Volterra com controle ótimo	63
4.2 Minimizando pragas e predadores	70
5 Considerações Finais	72
 REFERÊNCIAS	 73
 Apêndices	 75
APÊNDICE A Código em Mathematica para construção do retrato de fase e simulação numérica do modelo de Lotka-Volterra	 76

APÊNDICE B	Código em Mathematica para construção do retrato de fase e simulação numérica do modelo com competição intraespecífica entre as presas	78
APÊNDICE C	Código em Mathematica para construção do retrato de fase e simulação numérica do modelo com competição entre ambas as populações	80
APÊNDICE D	Código em Python para simulação numérica do modelo 1 . .	82
APÊNDICE E	Código em Python para simulação numérica do modelo 2 . .	84

Introdução

Este trabalho apresenta um estudo sobre a modelagem matemática da dinâmica populacional de sistemas do tipo presa-predador com duas espécies. Pesquisas relacionadas à sistemas presa-predador permitem ampliar a compreensão sobre relações entre espécies em diferentes ecossistemas, contribuindo para a adoção de estratégias que promovam a conservação da biodiversidade e o desenvolvimento sustentável.

Ao longo das últimas décadas, a modelagem matemática tem sido utilizada como uma ferramenta relevante no estudo de sistemas biológicos. Em particular, no campo da dinâmica populacional, a aplicação de modelos matemáticos torna possível simular e explorar cenários diversos, investigando os efeitos que certas perturbações ou mudanças ambientais podem provocar nas interações entre as espécies, fornecendo informações valiosas para o manejo e a preservação do ecossistema ([BRAUER; KRIBS, 2016](#)).

A complexidade intrínseca nas relações entre as partes que compõem um ecossistema pode transformar a modelagem matemática de fenômenos biológicos em uma tarefa desafiadora. Com efeito, o modelo deve buscar equilíbrio entre uma representação razoavelmente fidedigna de recortes da realidade e uma escolha criteriosa de hipóteses simplificadoras. Nessa perspectiva, o presente trabalho trata de modelos relativamente simples, que poderão servir como ponto de partida para a elaboração de modelos mais sofisticados.

Nossa abordagem trata da análise qualitativa de modelos matemáticos construídos a partir de sistemas com duas equações diferenciais ordinárias. Os objetivos centrais consistem em verificar a possibilidade de coexistência entre as espécies e identificar os cenários de extinção das espécies. Com o intuito de ampliar o alcance do estudo, incluímos elementos da Teoria de Controle Ótimo. Neste caso, os modelos descrevem dinâmicas presa-predador sujeitas à necessidade de otimização de certas relações.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo trata da apresentação de definições, conceitos e resultados sobre equações diferenciais ordinárias que serão aplicados nos capítulos seguintes. O foco consiste em delinear procedimentos para o estudo qualitativo do comportamento das soluções de sistemas com duas equações autônomas, incluindo a utilização da matriz Jacobiana para análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio dos sistemas não lineares.

No segundo capítulo, discutimos elementos básicos da Teoria do Controle Ótimo. De acordo com ([KIRK, 2004](#)), esta teoria dedica-se essencialmente ao desenvolvimento de métodos para otimização do desempenho de sistemas dinâmicos sujeitos a certas restrições. Mais especificamente, tais métodos permitem controlar as variáveis de um sistema de

modo a maximizar ou minimizar uma determinada função, que pode representar, dentre outras coisas, um custo de produção, uma quantidade de inseticida ou o tempo necessário para percorrer uma trajetória. Diante da ampla gama de possibilidades de aplicação, a Teoria do Controle Ótimo tornou-se uma ferramenta importante em diversas áreas. No decorrer do capítulo, utilizamos o Princípio do Máximo de Pontryagin para a resolução de vários problemas de controle ótimo.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo qualitativo de sistemas presa-predador com duas espécies, modelados por equações diferenciais ordinárias. Além do modelo clássico de Lotka-Volterra, estudamos o modelo de Pielou e um modelo que considera a competição intraespecífica. Em todos os modelos, utilizamos os resultados do primeiro capítulo para responder as seguintes questões: 1) ambas as espécies podem coexistir em um estado de equilíbrio? 2) caso as espécies estejam coexistindo em equilíbrio, pequenas mudanças no número de indivíduos de uma ou ambas espécies pode provocar extinção no futuro? 3) supondo que as populações possuam um número arbitrário de indivíduos no instante inicial, é possível atingir uma coexistência em equilíbrio ou haverá extinção? As respostas para estas questões são cruciais na compreensão dos processos de interação entre espécies (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

Finalmente, o quarto capítulo apresenta algumas aplicações da Teoria do Controle Ótimo ao estudo dos sistemas presa-predador. Parte considerável dos resultados discutidos no segundo capítulo são utilizados para estudar um modelo presa-predador proposto por (GOH; LEITMANN; VINCENT, 1974), no qual, em um intervalo de tempo fixo, as populações de presas e predadores devem ser conduzidas do seu estado inicial até um estado determinado. Além disso, deve-se minimizar a quantidade de inseticida empregada para combater as presas. Em seguida, propomos dois modelos que descrevem a intenção de reduzir (em um intervalo de tempo fixado) uma população de pragas sujeita à inserção de indivíduos predadores. O controle ótimo é utilizado para, respectivamente, minimizar e maximizar o número total de predadores inseridos no sistema. Em todos os casos, ilustramos soluções para casos particulares dos problemas propostos através de simulações numéricas obtidas por meio da biblioteca *GEKKO*, nativa da linguagem Python. Os códigos destas simulações estão incluídos no apêndice do trabalho.

1 Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Tomando por base (DOERING; LOPES, 2014), (FIGUEIREDO; NEVES, 2008), (BOYCE; DIPRIMA; MEAD, 2020), (BASSANEZI; JUNIOR, 1988), (BRAUN, 1993) e (SIMMONS, 2016), pretendemos apresentar os conceitos e resultados relacionados a Equações Diferenciais Ordinárias que serão utilizados nos capítulos seguintes.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que envolve funções de uma variável real e suas derivadas. A ordem da EDO corresponde à ordem mais alta das derivadas presentes na equação.

A forma geral de uma EDO de ordem n pode ser escrita como

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (1.1)$$

em que F é uma função de $n + 2$ variáveis e $y = y(x)$ é a função a ser determinada. Se for possível escrever $y^{(n)}(x)$ explicitamente, obtemos a forma normal da EDO:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Exemplo 1. A equação $y'' + y' + 10\sin y = 0$ é uma EDO de segunda ordem. Observe que $f(x, y, y') = -y' - 10\sin y$ não depende explicitamente da variável x . Quando isto ocorre, a EDO é denominada autônoma.

1.2 Equações Diferenciais Lineares e não lineares

Dizemos que a EDO definida por

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

é *linear* se F for uma função linear em cada uma das variáveis $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Isto significa que a forma geral de uma EDO linear de ordem n é

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (1.4)$$

em que $a_i(x)$ e $b(x)$ são funções de x .

Exemplo 2. A equação $(1 - x^2)y''' + x^3y'' + 2y = x^2$ é linear.

Exemplo 3. A equação $y'' + y' + 10\sin y = 0$ é não linear, pois não pode ser escrita na forma definida em (1.4).

1.3 Solução de uma EDO

Uma solução da equação $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ é uma função $\phi = \phi(x)$, derivável até a n -ésima ordem em um intervalo aberto (a, b) tal que

$$F(x, \phi, \phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}) = 0, \forall x \in (a, b). \quad (1.5)$$

Exemplo 4. *Seja $c \in \mathbb{R}$. É imediato verificar que, para cada valor de c , a função $\phi(x) = ce^x$, definida para todos os valores reais de x é uma solução da equação $y' = y$.*

Determinar soluções para uma EDO pode ser uma tarefa desafiadora. Em muitos casos, é impossível obter uma solução analítica, construída a partir de processos finitos envolvendo funções elementares. Conforme afirmam (BASSANEZI; JUNIOR, 1988), a quantidade de equações que possuem tais soluções é muito pequena, ficando restrita a certos casos particulares. Além disso, a manipulação da solução analítica pode ser demasiadamente complicada, reduzindo consideravelmente sua utilidade. Especialmente no contexto das aplicações envolvendo equações diferenciais ordinárias, os métodos numéricos e o estudo qualitativo são indispensáveis. Os exemplos a seguir apresentam métodos para a obtenção de soluções para certos tipos particulares de equações.

Exemplo 5. *Suponha que é possível escrever a equação $y' = f(x, y)$ na forma*

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}, h(y) \neq 0. \quad (1.6)$$

As equações que podem ser escritas na forma 1.6 são denominadas separáveis. É possível provar ¹ que as soluções da equação (1.6) são determinadas implicitamente por

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx + C, \quad (1.7)$$

em que C é uma constante real arbitrária. Observe que os valores constantes de y tais que $h(y) = 0$ podem ser soluções da equação $y' = f(x, y)$. Esta possibilidade deve ser verificada por meio de uma substituição direta, evitando a perda de soluções constantes.

Em alguns casos, as soluções obtidas em (1.7) podem ser escritas explicitamente em função de x . No terceiro capítulo deste trabalho, utilizaremos esta técnica para resolver a equação logística, cujas aplicações são muito importantes em Matemática e outras Ciências.

Exemplo 6. *Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo I , todas ² as soluções da equação linear de primeira ordem*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.8)$$

¹ Uma demonstração pode ser encontrada em (BOYCE; DIPRIMA; MEAD, 2020).

² Uma demonstração pode ser encontrada em (BOYCE; DIPRIMA; MEAD, 2020).

são dadas por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)g(x) dx + C \right), \quad (1.9)$$

em que $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ e C é uma constante real arbitrária.

Considerando o escopo deste trabalho, a partir deste ponto, nossa discussão será restrita ao caso das EDOs de primeira ordem.

1.4 Problemas de valor inicial

Conforme vimos anteriormente, é possível que uma EDO possua mais de uma solução. O conjunto de todas as soluções é denominado *solução geral* da EDO. Resolver a EDO significa determinar sua solução geral. Em muitos casos, estamos interessados em determinar soluções particulares, de tal modo que certas condições sejam satisfeitas.

Nessa direção, uma situação que frequentemente surge em muitas aplicações consiste em resolver um problema de valor inicial (PVI). Isto significa que é necessário determinar uma solução da equação $y' = f(x, y)$, que satisfaça uma condição inicial $y(x_0) = y_0$.

Exemplo 7. Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (1.10)$$

Na seção anterior, concluímos que a família de funções $y(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$ é a solução geral para $y' = y$. Além disso, $y(0) = 1 \implies c = 1$. Portanto, a solução para o PVI é a função $y(x) = e^x$.

Determinar as condições sob as quais um PVI admite solução única é uma questão relevante. No caso das equações diferenciais de primeira ordem, o seguinte Teorema³, estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de soluções locais:

Teorema 1.1. Suponha que $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em uma região retangular R do plano determinada por $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$. Seja I um intervalo aberto centrado em x_0 . Se (x_0, y_0) é um ponto interior de R , então existe uma única função $\phi(x)$ definida em I que satisfaz o PVI $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Ressaltamos que as condições assumidas no Teorema 1.1 são suficientes mas não são necessárias. Ou seja, ainda que estas condições não sejam satisfeitas, o referido PVI pode admitir solução única, mais que uma solução ou ainda, pode não ter solução.

³ A demonstração de um caso mais geral pode ser encontrada em (DOERING; LOPES, 2014).

Em particular, se admitirmos apenas a hipótese da continuidade da função f , isto garante a existência de solução⁴ (não necessariamente única) para o PVI.

1.5 Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

Um sistema de equações diferenciais ordinárias é caracterizado por uma coleção de equações onde funções desconhecidas estão conectadas por meio expressões que envolvem suas derivadas em relação a uma variável independente comum. Neste estudo, serão considerados sistemas de equações do tipo:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{1.11}$$

em que $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ são as funções que devem ser determinadas, x é a variável independente, e $f_1, f_2, \dots, f_n$ são funções contínuas com todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, contínuas em um intervalo aberto $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Conforme demonstrado em (DOERING; LOPES, 2014), para todo ponto $(x_0, y_{01}, y_2(x_0) = y_{02}, \dots, y_n(x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, a continuidade das funções f_i e de suas derivadas parciais em relação a y_i , garante a existência e unicidade de soluções para o PVI determinado pelo sistema (1.11) com condição inicial $y_1(x_0) = y_{01}, y_2(x_0) = y_{02}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n}$.

Para finalizar esta seção, observamos que o sistema de equações (1.11) também pode ser escrito na forma vetorial

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

em que:

- $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ é um vetor, usualmente chamado de *vetor de estado* ou *vetor das variáveis de estado*.
- $\mathbf{f} = (f_1(x, \mathbf{y}(x)), f_2(x, \mathbf{y}(x)), \dots, f_n(x, \mathbf{y}(x)))$.

1.6 Sistemas autônomos bidimensionais

Em consonância com os objetivos deste trabalho, estamos interessados em estabelecer resultados que permitam analisar o comportamento qualitativo das soluções de

⁴ Uma demonstração pode ser encontrada em (DOERING; LOPES, 2014).

sistemas com duas funções desconhecidas e duas equações autônomas de primeira ordem. Desta forma, vamos considerar o sistema

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y),\end{aligned}\tag{1.12}$$

em que

- $X(t) = (x(t), y(t))$ é uma função vetorial cujas componentes $x = x(t)$ e $y = y(t)$ devem ser determinadas.
- As funções f e g não dependem explicitamente da variável independente t e são contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.1. *Uma solução para o sistema (1.12) em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ é uma função vetorial $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ que satisfaz (1.12) para todo $t \in I$.*

De acordo com (BOYCE; DIPRIMA; MEAD, 2020), a função ϕ pode ser interpretada como a representação paramétrica de uma curva no plano $\phi_1\phi_2$. Tal curva pode ser considerada como uma trajetória percorrida por uma partícula cuja velocidade em cada instante t é determinada pelas equações diferenciais que caracterizam o sistema. O plano $\phi_1\phi_2$ é chamado de *plano de fase* e pode ser utilizado para esboçar o *retrato de fase*, definido como um conjunto representativo das trajetórias.

Seja $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. A continuidade das funções f , g e de suas derivadas parciais de primeira ordem em todo $\mathbb{R}^2$ é suficiente⁵ para garantir a existência e unicidade de soluções para o sistema (1.12), com condições iniciais determinadas pelo ponto P .

Exemplo 8. *Sejam c_1 e c_2 constantes reais. Se $\phi(t) = (c_1, c_2)$ é uma solução do sistema (1.12), é imediato verificar que $f(c_1, c_2) = g(c_1, c_2) = 0$. Reciprocamente, se $f(c_1, c_2) = g(c_1, c_2) = 0$, então $\phi(t) = (c_1, c_2)$ é uma solução do sistema (1.12). Este resultado implica que as soluções constantes (também chamadas de soluções de equilíbrio) do sistema autônomo são determinadas a partir da resolução do sistema*

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Conforme (FIGUEIREDO; NEVES, 2008) e (SIMMONS, 2016) afirmam, as soluções constantes de um sistema autônomo são de extrema importância, na medida em que funcionam como "atratores" ou "repulsores" das demais soluções. Em outras palavras, as

⁵ A demonstração pode ser encontrada em (DOERING; LOPES, 2014).

soluções não constantes de um sistema autônomo tendem a aproximar-se (ou afastar-se) das soluções constantes. Neste cenário, o conceito de estabilidade é fundamental e será apresentado a seguir.

Definição 1.2. Um ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ é denominado ponto crítico ou ponto de equilíbrio do sistema autônomo (1.12) se $f(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Definição 1.3. Um ponto crítico $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ do sistema (1.12) é chamado estável se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que toda solução $\phi(t)$ satisfazendo $\|\phi(t_0) - \bar{X}\| < \delta$, existe para todo $t > t_0$ e $\|\phi(t) - \bar{X}\| < \varepsilon$ em que $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

Intuitivamente, esta definição significa que um ponto crítico é estável se todas as soluções que iniciam suficientemente próximas do ponto, sempre permanecem próximas do ponto, com distância inferior a ε .

Definição 1.4. Um ponto crítico que não é estável é denominado instável.

Definição 1.5. Um ponto crítico estável $\bar{X}$ é denominado assintoticamente estável se existe $\delta > 0$, tal que, se uma solução ϕ satisfaz $\|\phi(t_0) - \bar{X}\| < \delta$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \bar{X}$. Apelando mais uma vez para a intuição, esta definição significa que soluções iniciam suficientemente próximas de $\bar{X}$, permanecem próximas e, no longo prazo, tendem a $\bar{X}$.

1.6.1 Estabilidade de sistemas autônomos lineares

Considere o sistema autônomo linear

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \tag{1.14}$$

em que a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são constantes reais. Utilizando notação matricial, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Seja A a matriz dos coeficientes do sistema (1.14). Isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Se $\det A \neq 0$, o único ponto crítico de (1.14) é $\bar{X} = (0, 0)$. Neste caso, segundo (BOYCE; DIPRIMA; MEAD, 2020), ocorre exatamente uma dentre as três situações a seguir:

1. Se todos os autovalores de A possuem parte real negativa, $\bar{X}$ é assintoticamente estável;

2. Se todos os autovalores de A possuem parte real nula, $\bar{X}$ é estável;
3. Se pelo menos um dos autovalores de A possuir parte real positiva, $\bar{X}$ é instável.

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em (SOTOMAYOR, 1979).

1.6.2 Estabilidade de sistemas localmente lineares

Seja $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ um ponto crítico do sistema autônomo

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Suponha que as funções f e g são contínuas, não lineares e possuem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Nessas condições, o sistema é localmente linear e assim, é possível provar⁶ que, em uma vizinhança do ponto $\bar{X}$, o sistema (1.15) pode ser aproximado pelo sistema linear

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix},$$

em que

$$J = J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

é denominada *matriz jacobiana*.

Finalmente, autovalores da matriz jacobiana $J = (\bar{x}, \bar{y})$ determinam a estabilidade do ponto de equilíbrio da seguinte forma:

- Se todos os autovalores têm parte real negativa, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Neste caso, $\phi(t) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ quando $t \rightarrow \infty$. Intuitivamente, isto significa que o ponto crítico "atrai" todas as soluções;
- Se algum autovalor tem parte real positiva, o ponto de equilíbrio é instável.
- Se os autovalores são números imaginários puros, nada se pode concluir.

No terceiro capítulo deste trabalho, os resultados apresentados até aqui serão sistematicamente utilizados para estudar a estabilidade dos pontos críticos de certos sistemas autônomos localmente lineares.

⁶ A demonstração pode ser encontrada em (BOYCE; DIPRIMA; MEAD, 2020).

2 Elementos da Teoria do Controle Ótimo

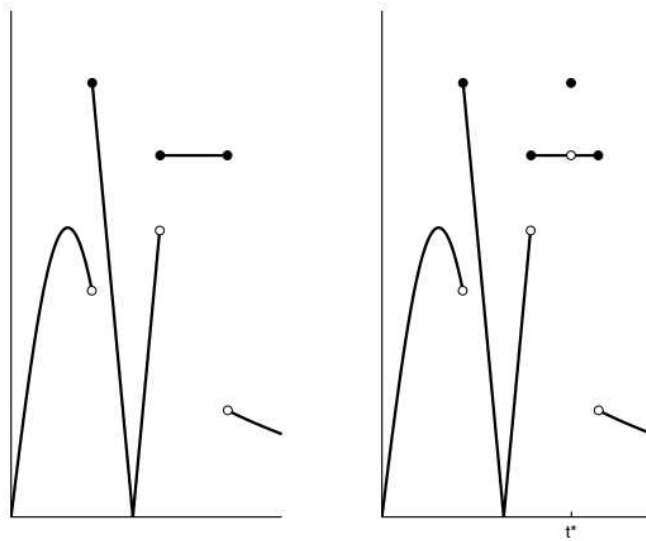
Este capítulo apresenta os conceitos e resultados da Teoria do Controle Ótimo que são aplicados no último capítulo deste trabalho. Concentraremos nossa atenção especialmente nos problemas de controle ótimo que envolvem sistemas de equações diferenciais ordinárias. Nossa discussão se apoia nas obras de (KAMIEN; SCHWARTZ, 2012), (KIRK, 2004) e (LENHART; WORKMAN, 2007), que oferecem uma perspectiva mais abrangente e aprofundada dos tópicos discutidos aqui.

2.1 Definições preliminares

Definição 2.1 (Função contínua por partes). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por partes, se u é contínua em cada ponto de I , exceto possivelmente em um número finito de pontos, onde o valor da função deve ser igual ao limite lateral à esquerda ou à direita.*

A figura a seguir exibe um exemplo (à esquerda) e um contraexemplo (à direita) de uma função contínua por partes. No gráfico representado à direita, observamos que o valor da função no ponto t^* é diferente dos limites laterais.

Figura 1 – Continuidade por partes.



Fonte: (LENHART; WORKMAN, 2007).

Definição 2.2. Seja $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em I e diferenciável em I , exceto possivelmente em um número finito de pontos. Se x' é contínua em todos os pontos nos quais está definida, dizemos que x é diferenciável por partes.

Definição 2.3. Seja $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I . Se x' é contínua em I , dizemos que x é continuamente diferenciável.

Definição 2.4. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava neste intervalo se

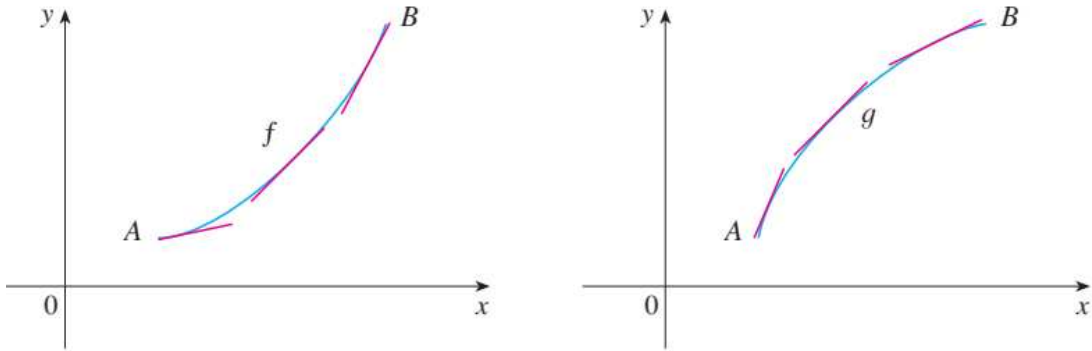
$$\alpha f(t_1) + (1 - \alpha)f(t_2) \leq f(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2), \quad (2.1)$$

quaisquer que sejam $0 \leq \alpha \leq 1$ e $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$. Se $-f$ é côncava, dizemos que f é convexa e a desigualdade correspondente é

$$\alpha f(t_1) + (1 - \alpha)f(t_2) \geq f(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2). \quad (2.2)$$

Na hipótese de f ser côncava e diferenciável duas vezes, as inclinações das retas tangentes em cada ponto não são crescentes. Isto significa que $f'' \leq 0$. Analogamente, se f é convexa, as inclinações das tangentes não são decrescentes e $f'' \geq 0$. Analisando a figura a seguir é possível perceber que as funções f e g são, respectivamente, convexa e côncava.

Figura 2 – Funções côncavas e convexas.



Fonte: adaptado de (STEWART, 2013).

2.2 Caracterização do problema básico de controle ótimo

O problema básico de controle ótimo (PBC) consiste em determinar uma função u , contínua por partes, de modo a maximizar uma **função de custo**¹ J definida por

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.3)$$

¹ Uma discussão mais detalhada sobre a construção de diversas funções de custo pode ser encontrada em (KIRK, 2004).

sujeita às condições

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.4)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.5)$$

Assumimos que as funções f e g são continuamente diferenciáveis em relação a cada um dos seus três argumentos e o valor de $x(t_1)$ fica livre de restrições. As funções x e u são denominadas respectivamente de **variável de estado** e **variável de controle ou controle** e x deve ser diferenciável por partes. A expressão definida em (2.3) também pode ser chamada de **funcional objetivo** e (2.4) é a **equação de estado**.

Convém destacar que há uma relação de dependência entre u e x . Isto significa que, para cada u , existe uma função x correspondente. Uma função u^* que é solução do PBC é chamada de **controle ótimo** e a função x^* associada é chamada de **estado ótimo**.

2.3 Princípio do Máximo de Pontryagin

O Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP) fornece um conjunto de condições necessárias (mas não suficientes) para a existência do controle ótimo. Mais especificamente, o PMP permite determinar apenas candidatos ao controle ótimo. Nesta seção apresentamos uma versão do PMP para o problema determinado por (2.3), (2.4) e (2.5). Variações mais gerais do PMP serão discutidas nas próximas seções.

Inicialmente definimos o **Hamiltoniano** como a função

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, x(t), u(t)). \quad (2.6)$$

Se u^* e x^* são soluções ótimas para este problema, o PMP afirma que, para todos os controles u e todo $t \in [t_0, t_1]$, existe uma função diferenciável por partes λ tal que

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)).$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0, \quad (2.7)$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2.8)$$

$$\lambda(t_1) = 0. \quad (2.9)$$

Alternativamente, as equações (2.7) e (2.8) podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} f_u(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g_u(t, x(t), u(t)) &= 0, \\ \lambda'(t) &= -f_x(t, x(t), u(t)) - \lambda(t)g_x(t, x(t), u(t)), \end{aligned}$$

A equação (2.7) é chamada de **condição de otimalidade**, (2.8) é denominada **equação adjunta** e (2.9) é a **condição de transversalidade**. Tais equações formam um conjunto de condições necessárias (mas não suficientes) que um controle ótimo u^* e seu estado associado x^* devem satisfazer (LENHART; WORKMAN, 2007).

De acordo com (KAMIEN; SCHWARTZ, 2012), o PMP implica que o problema de determinar o controle ótimo é convertido em um problema de otimização do Hamiltoniano, em relação ao controle u e em cada ponto do intervalo $I = [t_0, t_1]$.

Observe que minimizar J equivale a maximizar $-J$. Então, u^* minimiza J se, e somente se, maximiza $-J$. Portanto, caso o problema de controle ótimo tenha por objetivo minimizar J , uma versão alternativa do PMP continua válida, de tal forma que

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)). \quad (2.10)$$

Segundo (LENHART; WORKMAN, 2007), as etapas listadas abaixo indicam como esta versão do PMP pode ser utilizada para resolver certos problemas simples:

1. Escrever o Hamiltoniano;
2. Escrever a equação adjunta e a condição de otimalidade;
3. Utilizar a condição de otimalidade para escrever u^* em função de x^* e λ ;
4. Utilizar a condição inicial e a condição de transversalidade para resolver o sistema formado pelas duas equações diferenciais envolvendo x^* e λ , substituindo a expressão de u^* obtida na etapa anterior;
5. Utilizar a solução encontrada na etapa anterior para escrever u^* .

No exemplo a seguir, adaptado de (LENHART; WORKMAN, 2007), utilizamos o PMP para resolver analiticamente um problema de controle ótimo.

Exemplo 9.

$$\min_u \int_1^2 (t u(t)^2 + t^2 x(t)) dt,$$

sujeito a

$$x'(t) = -u(t), \quad x(1) = 1.$$

Solução: Aplicando o PMP, podemos escrever

$$\begin{aligned} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) &= t u(t)^2 + t^2 x(t) - \lambda(t) u(t), \\ \lambda'(t) &= -t^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\lambda(2) = 0. \quad (2.12)$$

Inicialmente, observamos que $H_{uu}(t) = 2t > 0$ no intervalo $I = [1, 2]$. Isto significa que o Hamiltoniano é uma função convexa em relação a u e pode assumir um valor mínimo. Assim, confirmamos que o nosso problema consiste efetivamente na minimização do funcional objetivo. A equação (2.11) é linear e sua solução geral é dada por

$$\lambda(t) = \int -t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C.$$

Utilizando (2.12), obtemos $C = \frac{8}{3}$. Então

$$\lambda(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{8}{3}. \quad (2.13)$$

De acordo com a condição de otimalidade,

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=u^*} = 0 \Rightarrow 2tu^*(t) - \lambda(t) = 0,$$

Ou seja,

$$u^*(t) = \frac{\lambda(t)}{2t}. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.13) na equação (2.14), temos

$$u^*(t) = -\frac{t^2}{6} + \frac{4}{3t}. \quad (2.15)$$

Agora, substitutindo (2.15) na equação de estado, temos

$$x'(t) = \frac{t^2}{6} - \frac{4}{3t}. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é linear, com solução geral no intervalo $I = [1, 2]$ dada por

$$x(t) = \int \left(\frac{t^2}{6} - \frac{4}{3t} \right) dt = \frac{t^3}{18} - \frac{4}{3} \ln t + K.$$

A partir da condição inicial $x(1) = 1$, determinamos $K = \frac{17}{18}$. Portanto, a solução do nosso problema de controle ótimo é dada por

$$u^*(t) = -\frac{t^2}{6} + \frac{4}{3t}, \quad x^*(t) = \frac{t^3}{18} - \frac{4}{3} \ln t + \frac{17}{18}.$$

Neste caso, também é possível determinar o valor do funcional objetivo. Para isto, basta substituir as expressões encontradas para u^* e x^* . Então

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_1^2 (t u(t)^2 + t^2 x(t)) dt \\ J(u^*) &= \int_1^2 t \left(-\frac{t^2}{6} + \frac{4}{3t} \right)^2 + t^2 \left(\frac{t^3}{18} - \frac{4}{3} \ln t + \frac{17}{18} \right) dt \\ J(u^*) &\simeq 1.846. \end{aligned}$$

Observação: na próxima seção mostraremos que u^* é realmente solução do problema proposto.

É importante salientar que as equações obtidas por meio da aplicação do PMP compõem um conjunto de condições necessárias que um provável controle ótimo u^* deve cumprir. Em geral, tais condições não são suficientes para garantir a existência e unicidade de u^* . Com efeito, no desenvolvimento do PMP, as condições necessárias foram estabelecidas a partir da suposição de que o controle ótimo existe.

Deste modo, a utilização do PMP conforme discutido nesta seção, pode conduzir a mais de um par de funções u^* e x^* de tal forma que apenas alguns deles realmente otimizam o funcional objetivo. Além disso, é possível que u^* e x^* tornem funcional objetivo infinito, e assim, o problema de controle ótimo não possui solução. Esta situação é ilustrada pelo próximo exemplo, adaptado de (LENHART; WORKMAN, 2007).

Exemplo 10.

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} x(t) + u(t) dt$$

sujeita às condições

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - u(t)^2, \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

O hamiltoniano é dado por

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = x(t) + u(t) + \lambda(t) - \lambda(t)u(t)^2.$$

Consequentemente, temos a condição de otimalidade e a equação adjunta:

$$1 - 2\lambda(t)u(t) = 0, \quad (2.17)$$

$$\lambda'(t) = -1. \quad (2.18)$$

Observando que a equação (2.18) é linear e utilizando a condição de transversalidade $\lambda(1) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \int -1 dt + c, \\ \lambda(t) &= -t + c, \\ \lambda(t) &= -t + 1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para determinar $u^*(t)$, substituímos (2.19) em (2.17). Portanto

$$u^*(t) = \frac{1}{-2t + 2} \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) na equação de estado, encontramos

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - \left(\frac{1}{-2t + 2} \right)^2, \\ x(t) &= \int 1 - \left(\frac{1}{-2t + 2} \right)^2 dt + C, \\ x(t) &= t + \frac{1}{4t - 4} + C. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Aplicando a condição inicial em (2.21), temos que $C = \frac{5}{4}$. Então

$$x^*(t) = t + \frac{1}{4t-4} + \frac{5}{4}.$$

Notamos que $u^*(1)$ e $x^*(1)$ não estão definidos. Mais ainda: $\lim_{t \rightarrow 1^-} u^*(t) = \infty$ e $\lim_{t \rightarrow 1^-} x^*(t) = -\infty$. Ou seja, o controle e a variável de estado não são limitados no intervalo $[0, 1]$. Além disso, o funcional objetivo é infinito. Com efeito, substituindo u^* e x^* , temos

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 t + \frac{1}{4t-4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{-2t+2} dt, \\ J &= \int_0^1 t + \frac{1}{-4t+4} + \frac{5}{4} dt, \\ J &= \lim_{a \rightarrow 1^-} -\frac{1}{4} \ln(1-a) + \frac{a^2}{2} + \frac{5a}{4}, \\ J &= \infty. \end{aligned}$$

Deste modo, mostramos que o problema de controle ótimo não possui solução.

Em geral, a demonstração da existência e unicidade de solução para problemas de controle ótimo pode ser uma questão complexa que depende das características específicas do problema. Muitas vezes, essa demonstração é feita caso a caso, considerando as particularidades das equações envolvidas. Via de regra, a existência de soluções é mais fácil de demonstrar, na medida em que é possível utilizar alguns teoremas e resultados razoavelmente simples para estabelecer condições suficientes para a existência de soluções. Na próxima seção discutiremos um dos teoremas que caracteriza condições suficientes para a existência de soluções para o problema básico de controle ótimo.

2.4 Condições suficientes para a existência do controle ótimo

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em (KAMIEN; SCHWARTZ, 2012), apresenta condições suficientes para a existência de soluções para o problema de controle ótimo definido na seção (2.2).

Teorema 2.1. *Considere o problema de controle ótimo*

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.22)$$

sujeito às condições

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.23)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.24)$$

Suponha que, para todo $t \in [t_0, t_1]$, as funções $u^*(t)$, $x^*(t)$ e $\lambda(t)$ satisfazem as condições necessárias

$$f_u(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g_u(t, x(t), u(t)) = 0, \quad (2.25)$$

$$\lambda'(t) = -f_x(t, x(t), u(t)) - \lambda(t)g_x(t, x(t), u(t)), \quad (2.26)$$

$$\lambda(t_1) = 0. \quad (2.27)$$

e também satisfazem as equações (2.23) e (2.24). Caso $g(t, x(t), u(t))$ seja não linear em x ou u , suponha adicionalmente que

$$\lambda(t) \geq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.28)$$

Se $f(t, x(t), u(t))$ e $g(t, x(t), u(t))$ são côncavas em relação a x e u separadamente (ou seja, mantendo fixa a outra variável), então, para todos os controles u

$$J(u^*) \geq J(u),$$

em que $J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt$.

Em outras palavras, este teorema garante que, se as funções f e g forem côncavas em relação a x e u e se g for linear em x e u , então x^* e u^* majoram J se e somente se, satisfazem as condições (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27). Caso g seja não linear em x ou u , a condição (2.28) também deverá ser satisfeita.

Na seção anterior discutimos que minimizar J é equivalente a maximizar $-J$. Portanto, o Teorema (2.1) pode ser aplicado em problemas que exigem a minimização da função de custo. O exemplo a seguir apresenta uma aplicação do referido Teorema.

Exemplo 11. Considerando novamente o problema

$$\min_u \int_1^2 (t u(t)^2 + t^2 x(t)) dt,$$

sujeito a

$$x'(t) = -u(t), \quad x(1) = 1,$$

utilizamos o Princípio do Máximo de Pontryagin e determinamos

$$u^*(t) = -\frac{t^2}{6} + \frac{4}{3t}, \quad x^*(t) = \frac{t^3}{18} - \frac{4}{3} \ln t + \frac{19}{18}, \quad J(u^*) \simeq 1.846. \quad (2.29)$$

Naturalmente, u^* e x^* minimizam J se, e somente se, maximizam $-J$. Além disso, tais funções satisfazem as condições explicitadas no Teorema (2.1). Para comprovar a

maximização de $-J$, vamos considerar as funções $f(t, x(t), u(t)) = -t u(t)^2 - t^2 x(t)$ e $g(t, x(t), u(t)) = -u(t)$ definidas no intervalo $[1, 2]$, temos

$$f_{uu} = -2t \leq 0, \quad (2.30)$$

$$f_{xx} = 0, \quad (2.31)$$

$$g_{uu} = 0, \quad (2.32)$$

$$g_{xx} = 0. \quad (2.33)$$

Como consequência de (2.30), (2.31), (2.32) e (2.33), concluímos que f e g são côncavas em relação a x e a u . Ademais, g é linear em x e u . Portanto, de acordo com o Teorema (2.1), podemos concluir que u^* e x^* maximizam $-J$ e, consequentemente, minimizam J . Finalmente, segundo o resultado obtido na seção anterior $J(u^*) \simeq 1.846$ é o valor mínimo que o funcional objetivo pode assumir.

Finalizamos esta seção salientando que é necessário um certo cuidado ao aplicar o Teorema (2.1). Com efeito, no Exemplo 2, mostramos que o problema de controle ótimo

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} x(t) + u(t) dt$$

sujeita às condições

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - u(t)^2, \\ x(0) &= 1, \end{aligned}$$

não possui solução, pois as funções $u^* = \frac{1}{-2t+2}$ e $x^* = t + \frac{1}{4t-4} + \frac{5}{4}$ obtidas por meio do PMP tornam o funcional objetivo infinito. Por outro lado, temos que

1. As funções $f(t, x(t), u(t)) = x(t) + u(t)$ e $g(t, x(t), u(t)) = 1 - u(t)^2$ são côncavas em relação a x e u , pois $f_{xx} = 0$, $f_{uu} = 0$, $g_{xx} = 0$ e $g_{uu} = -2$;
2. A função $g(t, x(t), u(t)) = 1 - u(t)^2$ é não linear em u , mas $\lambda(t) = -t + 1 \geq 0$, $\forall t \in [0, 1]$.

Observamos que, exceto pelo fato dos valores de $u^*(1)$ e $x^*(1)$ não estarem definidos, as demais condições do Teorema (2.1) estão satisfeitas. Ainda assim, mesmo que $J(u^*) = \infty \geq J(u)$ para qualquer outro controle u^* , o problema de controle ótimo não possui solução.

2.5 Generalizações do Princípio do Máximo de Pontryagin

A versão do PMP que apresentamos na Seção 2.1 é restrita ao caso de problemas de controle ótimo nos quais há apenas uma variável de estado com condições iniciais fixadas, uma variável de controle sem restrições e a função objetivo assume um formato particular.

Nesta seção, discutiremos versões mais gerais do PMP, incluindo problemas com várias variáveis de estado e de controle, condições finais fixadas para as variáveis de estado, controles limitados e acréscimo de um "termo de recompensa" ao funcional objetivo.

2.5.1 Problemas com várias variáveis de estado e de controle

Vamos considerar o problema de controle ótimo com variáveis de estado dadas por $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ e variáveis de controle $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ que consiste em maximizar

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (2.34)$$

sujeita às condições

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.35)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.36)$$

em que:

- f é uma função vetorial continuamente diferenciável em todos os seus argumentos no intervalo $I = [t_0, t_1]$.
- $g(t, x(t), u(t)) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ é um campo vetorial continuamente diferenciável em relação a todos os seus argumentos no intervalo I ;
- J é a função objetivo (ou função custo) a ser maximizada e,
- $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ é o vetor que define as condições iniciais.

Supondo que uma solução do problema caracterizado por (2.34), (2.35) e (2.36) seja dada por vetores $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_n^*(t))$ e $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_m^*(t))$, o Princípio do Máximo de Pontryagin é análogo ao caso unidimensional discutido na Seção 2.3 e afirma que existe um vetor de variáveis adjuntas (ou vetor de coestados) $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$, continuamente diferenciável tal que que:

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

com a função hamiltoniana H definida por

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t). \quad (2.37)$$

Além disso, devem ser satisfeitas as equações:

$$(\text{Equações de estado}): \quad x'_i(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.38)$$

$$(\text{Equações adjuntas}): \quad \lambda'_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \lambda_j(t_1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.39)$$

$$(\text{Condição de otimalidade}): \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \text{em} \quad u^*. \quad (2.40)$$

De acordo com (KAMIEN; SCHWARTZ, 2012), as equações (2.38), (2.39) e (2.40) são condições necessárias (mas em geral não são suficientes) para a existência de soluções do problema de controle ótimo.

Em sintonia com o escopo deste trabalho, a partir deste ponto, nossos exemplos tratarão exclusivamente de problemas envolvendo duas variáveis de estado e uma variável de controle.

Exemplo 12 (adaptado de (LENHART; WORKMAN, 2007)). *Considere o problema:*

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J &= \int_0^1 x_2(t) + u^2(t) dt, \\ \text{sujeito a } x'(t) &= (x_2(t), u(t)), \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0, \end{aligned}$$

Temos que:

- O vetor das variáveis de estado é $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$;
- $f(t, x(t), u(t)) = x_2(t) + u^2(t)$;
- $(g_1(t), g_2(t)) = (x_2(t), u(t))$.

O problema possui duas variáveis de estado. Portanto, definimos $\lambda = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$. Segundo o Princípio do Máximo, temos:

1. *Hamiltoniano:*

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = x_2(t) + u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t). \quad (2.41)$$

2. *Equações adjuntas:*

$$\lambda'_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \lambda_1(1) = 0, \quad (2.42)$$

$$\lambda'_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1(t), \quad \lambda_2(1) = 0. \quad (2.43)$$

A partir da equação (2.42), concluímos que $\lambda_1(t) = 0$. Substituindo este resultado na equação (2.43), obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda'_2(t) &= -1 \\ \lambda_2(t) &= -t + C, \quad (C \text{ é uma constante}). \\ \lambda_2(1) &= 0 \Rightarrow C = 1, \quad \therefore \lambda_2(t) = -t + 1. \end{aligned} \quad (2.44)$$

3. Condição de otimalidade:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u(t) + \lambda_2(t) = 0 \Rightarrow u(t) = -\frac{\lambda_2(t)}{2}. \quad (2.45)$$

Substituindo (2.44) em (2.45) encontramos

$$u(t) = \frac{t-1}{2}.$$

Resolvendo as equações de estado, temos

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= u(t), \\ x_2'(t) &= \frac{t-1}{2}, \\ x_2(t) &= \int \left(\frac{t-1}{2} \right) dt = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + K, \quad (K \text{ é uma constante}) \\ x_2(0) &= 0 \Rightarrow K = 0, \quad \therefore, \quad x_2(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Com relação a $x_1(t)$, temos

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t), \\ x_1'(t) &= \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}, \\ x_1(t) &= \int \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \right) dt = \frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{4} + k, \quad (k \text{ é uma constante}) \\ x_1(0) &= 0 \Rightarrow k = 0, \quad \therefore \quad x_1(t) = \frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{4}. \end{aligned}$$

Neste caso é possível determinar o valor mínimo do funcional objetivo sem grandes dificuldades. De fato:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 x_2(t) + u^2(t) dt, \\ J &= \int_0^1 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \left(\frac{t-1}{2} \right)^2 \right) dt, \\ J &\simeq -0.083. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do problema é dada por $x_1^*(t) = \frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{4}$, $x_2^*(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}$ e $u^*(t) = \frac{t-1}{2}$.

O próximo exemplo evidenciará a necessidade do uso de métodos numéricos na resolução de problemas de controle ótimo.

Exemplo 13 (adaptado de (KIRK, 2004)). Considere o problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} [2x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt, \\ \text{sujeito a } x'(t) &= (x_2(t), -x_1(t) + [1 - x_1^2(t)]x_2(t) + u(t)), \\ x_1(t_0) &= x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \end{aligned}$$

Em que:

- $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é vetor das variáveis de estado;
- $f(t, x(t), u(t)) = \frac{1}{2} [2x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)]$,
- $(g_1(t), g_2(t)) = (x_2(t), -x_1(t) + [1 - x_1^2(t)]x_2(t) + u(t))$.

Como o problema possui duas variáveis de estado, definimos $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$. Então, de acordo com o Princípio do Máximo, devemos ter:

1. *Hamiltoniano:*

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2} [2x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)(x_1(t) + [1 - x_1^2(t)]x_2(t) + u(t))$$

2. *Equações adjuntas:*

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2x_1(t) - \lambda_2(t) + 2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t), \quad \lambda_1(t_1) = 0, \quad (2.46)$$

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -x_2(t) - \lambda_1(t) + \lambda_2(t)(x_1^2(t) - 1), \quad \lambda_2(t_1) = 0.. \quad (2.47)$$

3. *Condição de otimalidade:*

$$u^*(t) + \lambda_2(t) = 0. \quad (2.48)$$

Combinando as equações de estado com (2.46), (2.47) e (2.48), concluímos que, se u^* , x_1^* e x_2^* são soluções do nosso problema de controle ótimo, então, no intervalo $[t_0, t_1]$, devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t), & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + [1 - x_1^2(t)]x_2(t) - \lambda_2(t), & x_2(t_0) &= x_{20}, \\ \lambda_1'(t) &= -2x_1(t) - \lambda_2(t) + 2\lambda_2(t)x_1(t)x_2(t), & \lambda_1(t_1) &= 0, \\ \lambda_2'(t) &= -x_2(t) - \lambda_1(t) + \lambda_2(t)(x_1^2(t) - 1), & \lambda_2(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

A partir de (2.48), temos $u^*(t) = -\lambda_2(t)$. Utilizamos este fato para eliminar $u(t)$ na equação (2.49). Ainda assim, conforme discutimos no primeiro capítulo deste trabalho, é inviável resolver analiticamente este sistema de equações.

Em geral, é difícil ou mesmo impossível determinar analiticamente soluções para problemas de controle ótimo. Deste forma, tomando como inspiração o trabalho de (LENHART; WORKMAN, 2007), exceto pelo caso anterior, os nossos exemplos foram escolhidos de forma que sua solução analítica pode ser determinada sem grandes dificuldades.

2.5.1.1 Problemas com estados finais fixados

Alguns problemas de controle ótimo exigem que as variáveis de estado tenham condições finais fixadas. Tais situações surgem de maneira natural, quando se deseja otimizar o funcional objetivo e conduzir x de um determinado estado inicial até um estado final, ao longo do intervalo de tempo. Isto significa que estamos considerando o problema

$$\text{maximizar } J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.50)$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.51)$$

$$x(t_0) = x_{t_0} \quad x(t_1) = x_{t_1} = (x_1(1), x_2(1)). \quad (2.52)$$

De acordo com (KAMIEN; SCHWARTZ, 2012), é possível mostrar que, se $x^*(t)$ e $u^*(t)$ compõem uma solução do problema definido por (2.50), (2.51) e (2.52), então devem satisfazer as condições:

$$\lambda'_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \text{em } u^*. \quad (2.54)$$

Neste caso, o Hamiltoniano é definido por

$$H(t, x(t), u(t)) = \lambda_0 f(t, x(t), u(t)) + \lambda_1(t)g_1(t) + \lambda_2(t)g_2(t), \text{ com } \lambda_0 = 0 \text{ ou } \lambda_0 = 1.$$

Observação 1: sob certas circunstâncias², é necessário que $\lambda_0 = 0$. Nos problemas abordados neste trabalho, sempre teremos $\lambda_0 = 1$.

Observação 2: sempre que $(x_1(1), x_2(1))$ são dados, as condições de transversalidade ($\lambda_j(t_1) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$) não são exigidas. Por outro lado, se uma das variáveis de estado não tiver o valor final fixado, a respectiva condição de transversalidade deve ser aplicada.

Exemplo 14 (adaptado de (LENHART; WORKMAN, 2007)). *Vamos resolver o problema*

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J &= \int_0^1 u^2(t) dt, \\ \text{sujeito a } x'(t) &= (x_2(t), u(t)), \\ x_1(0) &= 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 0. \end{aligned}$$

² Ver (KAMIEN; SCHWARTZ, 2012).

Temos:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t), & x_2'(t) &= u(t), \\ H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) &= u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t), \\ \lambda_1'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t), \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \iff 2u(t) + \lambda_2(t) = 0. \tag{2.57}$$

A partir de (2.55), encontramos

$$\lambda_1(t) = c_1, \tag{2.58}$$

substituindo em (2.56),

$$\begin{aligned} \lambda_2'(t) &= -c_1 \\ \lambda_2(t) &= -c_1 t + c_2. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Substituindo (2.59) em (2.60) podemos escrever,

$$u(t) = \frac{c_1 t - c_2}{2}. \tag{2.60}$$

Agora é possível determinar x_2 e x_1 :

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= \frac{c_1 t - c_2}{2}, \\ x_2(t) &= \int \left(\frac{c_1 t - c_2}{2} \right) dt = \frac{c_1 t^2}{4} - \frac{c_2 t}{2} + c_3, \\ x_1'(t) &= \frac{c_1 t^2}{4} - \frac{c_2 t}{2} + c_3, \\ x_1(t) &= \int \left(\frac{c_1 t^2}{4} - \frac{c_2 t}{2} + c_3 \right) dt \\ x_1(t) &= \frac{c_1 t^3}{12} - \frac{c_2 t^2}{4} + c_3 t + c_4. \end{aligned}$$

Determinamos as constantes $c_1 = -24$, $c_2 = -12$, $c_3 = 0$ e $c_4 = 0$ aplicando as condições de contorno especificadas. Portanto, a solução do problema é dada por:

$$x_1^*(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad x_2^*(t) = -6t^2 + 6t, \quad u^*(t) = -12t + 6.$$

2.5.1.2 Funcional objetivo com “termos de retorno”

Em certos problemas de controle ótimo, além do funcional objetivo, torna-se necessário otimizar uma função específica em um determinado ponto (geralmente no final do intervalo de tempo). Por exemplo, é bastante razoável buscar a minimização de uma

população de pragas, ou do número de indivíduos infectados ao final de uma epidemia. Em tais situações, estamos lidando com problemas do tipo:

$$\text{minimizar } J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_1)), \quad (2.61)$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.62)$$

$$x(0) = x_{t_0}. \quad (2.63)$$

A função vetorial $\phi(x(t_1))$ é denominada termo de retorno³ e caracteriza o valor final da variável de estado a ser otimizado. Segundo (LENHART; WORKMAN, 2007), é possível mostrar que se $x^*(t)$ e $u^*(t)$ compõem uma solução do problema definido por (2.61), (2.62) e (2.63), então devem satisfazer as condições:

$$\begin{aligned} \lambda_j' &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \lambda_j(t_1) = \phi_{x_j}(x(t_1)), \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \quad \text{em } u^*. \end{aligned}$$

Observe que $\phi_{x_j}(x(t_1))$ representa a derivada parcial de ϕ em relação à variável x_j .

2.5.1.3 Controle limitado

Diversos problemas apresentam restrições físicas, econômicas ou ambientais em relação à variável de controle. Por exemplo, no caso do sistema de controle de um veículo, podem existir limitações quanto à quantidade máxima de combustível a ser injetada ou à força de frenagem disponível, dentre outros. Na modelagem de um sistema biológico, a variável de controle pode representar a taxa de aplicação de um inseticida, fertilizante ou vacina, estando sujeita a certas limitações: não negatividade e valor máximo total ou por unidade de tempo.

As situações nas quais a variável de controle é limitada dão origem a problemas do tipo:

$$\text{maximizar } J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt + \phi(x(t_1)), \quad (2.64)$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.65)$$

$$x(0) = x_{t_0}, \quad (2.66)$$

$$a \leq u(t) \leq b. \quad (2.67)$$

Observe que os valores assumidos pela variável de controle devem pertencer ao intervalo $[a, b]$. Seja U o conjunto de todas as funções que cumprem esta restrição. É usual denominar U de *conjunto dos controles admissíveis*. Assim, $u \in U \iff u : [t_0, t_1] \longrightarrow [a, b]$.

³ Também denominado termo de resgate.

A versão do Princípio do Máximo para problemas com controle limitado é análoga aos casos anteriores, incluindo apenas controles admissíveis. De acordo com (LENHART; WORKMAN, 2007), as condições necessárias para que $x^*(t)$ e $u^*(t)$ satisfaçam (2.64), (2.65), (2.66) e (2.67) são as seguintes:

$$\lambda'_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \lambda_j(t_1) = \phi_{x_j}(x(t_1)), \quad j = 1, 2, \quad (2.68)$$

$$u(t) = a, \quad \text{se} \quad \frac{\partial H}{\partial u} < 0, \quad (2.69)$$

$$a \leq u(t) \leq b, \quad \text{se} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (2.70)$$

$$u(t) = b, \quad \text{se} \quad \frac{\partial H}{\partial u} > 0. \quad (2.71)$$

Se o problema demandar a minimização do funcional objetivo, deve-se inverter sentido das desigualdades em (2.69) e (2.71).

Finalizamos este capítulo ressaltando que a implementação computacional de métodos numéricos desempenha um papel extremamente relevante na resolução de problemas de controle ótimo, oriundos de uma ampla gama de aplicações. Embora uma discussão sobre tais métodos não faça parte dos nossos objetivos, no último capítulo deste trabalho, utilizaremos a biblioteca GEKKO (nativa da linguagem Python) para resolver numericamente alguns problemas de controle ótimo.

Segundo (BEAL et al., 2018), GEKKO é uma ferramenta de código aberto e permite abordar uma ampla gama de problemas envolvendo otimização de sistemas. Além disso, GEKKO é versátil e possui uma manipulação relativamente simples. Sua documentação oficial, incluindo detalhes sobre instalação e funcionamento pode ser encontrada no link [GEKKO Optimization Suite](#)⁴.

⁴ Último acesso em 14 de julho de 2024.

3 Sistemas presa-predador livres de controle

Neste capítulo, estudamos três modelos presa-predador bidimensionais. Seguindo os resultados que estabelecemos no nosso primeiro capítulo, todos os modelos são construídos de modo a garantir existência e unicidade de soluções.

Estamos interessados em compreender o comportamento qualitativo das soluções de cada modelo. Mais especificamente, buscamos respostas para as seguintes questões: 1) ambas as espécies podem coexistir em um estado de equilíbrio? 2) caso as espécies estejam coexistindo em equilíbrio, pequenas mudanças no número de indivíduos de uma ou ambas espécies pode provocar extinção no futuro? 3) supondo que as populações possuam um número arbitrário de indivíduos no instante inicial, é possível atingir uma coexistência em equilíbrio ou sempre haverá extinção?

Em todos os modelos, identificamos a existência de soluções de equilíbrio assintoticamente estáveis, implicando na coexistência de presas e predadores. Em tais situações, apresentamos o retrato de fase e resultados de simulações numéricas executadas com o software *Mathematica*¹.

3.1 O modelo de Lotka - Volterra

Segundo (BRAUN, 1993), em meados da década de 1920, o biólogo Umberto D’Ancona estudava a variação populacional de diversas espécies de peixes que habitavam o mar Mediterrâneo. Uma das questões centrais para a pesquisa de D’Ancona era compreender como a intensidade da pesca afeta as populações de peixes.

Analisando dados referentes aos anos 1914 - 1923, D’Ancona observou que o percentual de tubarões e raias pescados aumentou substancialmente. D’Ancona concluiu que a forte redução da pesca provocada pela primeira guerra mundial foi mais benéfica para o aumento da população de peixes predadores.

Como não conseguiu uma explicação biológica para este fenômeno, D’Ancona apresentou a questão ao matemático Vito Volterra. Foi neste contexto que surgiu o modelo clássico de Lotka - Volterra, proposto como uma tentativa de descrição matemática da interação do tipo predação entre espécies.

Vale ressaltar que, mesmo assumindo um conjunto de pressupostos simplificadores da realidade, que limitam a utilização em situações mais gerais, sua importância é reconhecida até os dias atuais, inclusive servindo como base para a obtenção de modelos mais refinados.

¹ Versão 11.0.

De acordo com (GOTELLI, 2009), considerando que a , α , b e β são constantes positivas que representam, respectivamente, a taxa de crescimento intrínseco das presas, a eficiência de captura dos predadores, a taxa de mortalidade dos predadores (provocada pela ausência de alimento) e a eficiência de conversão (capacidade dos predadores em converter cada vítima em um incremento no seu crescimento populacional), a construção do modelo de Lotka - Volterra é fundamentada essencialmente nas seguintes hipóteses:

1. Existem apenas duas espécies (presas e predadores) dividindo o mesmo ambiente fechado. As presas dispõem de alimento suficiente e não há competição intraespecífica.
2. As variáveis $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam, respectivamente, as quantidades (não negativas) de indivíduos das populações de presas e predadores, que variam continuamente em função do tempo.
3. A taxa de crescimento de cada população é definida pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade;
4. Na ausência de predadores, a população de presas apresenta crescimento malthusiano. Isto significa que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população. Daí, se $y = 0$, temos $\frac{dx}{dt} = ax$.
5. Na ausência de presas, a população de predadores é extinta por falta de alimento, decrescendo proporcionalmente ao tamanho da população de predadores. Logo, $x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -by$.
6. O ataque dos predadores é a principal causa de mortalidade entre as presas. Considera-se que a taxa de mortalidade das presas é proporcional ao produto entre as duas populações, com constante de proporcionalidade igual a α . Assim, a taxa de mortalidade das presas é definida pela expressão $-\alpha xy$. Portanto, a taxa de crescimento da população de presas é dada por $\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$.
7. A taxa de natalidade dos predadores é proporcional ao produto entre as duas populações, com constante de proporcionalidade igual a β . Portanto, a taxa de natalidade dos predadores é definida pela expressão βxy e a taxa de crescimento dos predadores é dada por $\frac{dy}{dt} = -by + \beta xy$.

Combinando as duas equações da dinâmica populacional obtidas acima, temos o modelo clássico de Lotka - Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy. \end{cases} \quad (3.1)$$

Para analisar o comportamento qualitativo das soluções de (3.1), observamos inicialmente que o sistema é quase linear, pois as funções $F(x, y) = ax - \alpha xy$ e $G(x, y) = -by + \beta xy$ são contínuas e possuem derivadas parciais contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. A matriz Jacobiana correspondente ao sistema (3.1) é

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -b + \beta x \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (3.1) são soluções das equações

$$\begin{cases} ax - \alpha xy = 0 \\ -by + \beta xy = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Portanto, temos os pontos de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$. Com relação ao ponto $P_1 = (0, 0)$, temos a matriz Jacobiana

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Os autovalores associados à matriz são $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -b < 0$. Daí, P_1 é um ponto de sela instável.

Para o ponto $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, temos a matriz Jacobiana

$$J\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b\alpha}{\beta} \\ \frac{a\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

cujas equação característica é $\lambda^2 + ab = 0$. Daí, as soluções desta equação são os números complexos $\lambda = i\sqrt{ab}$ e $\lambda = -i\sqrt{ab}$. Assim, P_2 pode ser um centro ou extremidade de uma espiral. Neste caso específico, é possível obter uma conclusão a partir da determinação das trajetórias do sistema (3.1). Com efeito, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y(-b + \beta x)}{x(a - \alpha y)}. \quad (3.6)$$

Note que a equação (3.6) é separável. De fato:

$$\frac{(a - \alpha y)dy}{y} = \frac{(-b + \beta x)dx}{x}. \quad (3.7)$$

Integrando a equação (3.7), obtemos as soluções na forma implícita

$$a \ln y - \alpha y = -b \ln x + \beta x + \ln K. \quad (3.8)$$

em que $K > 0$ é uma constante de integração. Efetuando algumas manipulações na equação (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \ln y^a - \alpha y &= \ln x^{-b} + \beta x + \ln K \\ y^a e^{-\alpha y} &= K e^{\beta x} x^{-b}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ é extremidade de uma espiral, todas as trajetórias definidas pela equação (3.9) devem apresentar um número infinito de intersecções com a reta $x = \frac{b}{\beta}$. Para mostrar que isto não é possível, vamos tomar $x = \frac{b}{\beta}$ em (3.9). Daí

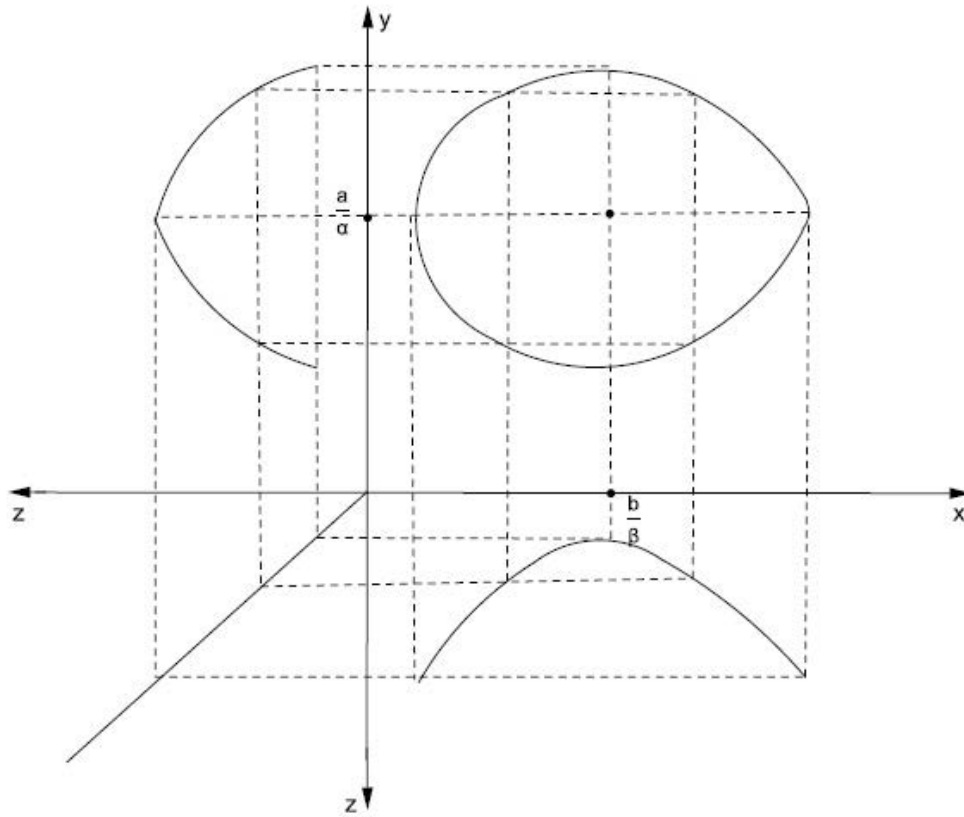
$$y^a e^{-\alpha y} = K e^{\beta(\frac{b}{\beta})} \left(\frac{b}{\beta}\right)^{-b} = K \left(\frac{e\beta}{b}\right)^b = w$$

com $w > 0$ constante. Considerando a função $f(y) = y^a e^{-\alpha y}$, a equação $f(y) = w$ admite, no máximo, duas raízes reais no intervalo $(0, \infty)$, pois f é crescente em $\left(0, \frac{a}{\alpha}\right)$ e decrescente em $\left(\frac{a}{\alpha}, \infty\right)$. Portanto, P_2 é um centro estável para o sistema (3.1).

Uma maneira para concluir que P_2 é um centro consiste em tomar $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, com $x(t) = K e^{\beta t} t^{-b}$ e $y(t) = t^a e^{-\alpha t}$ a forma paramétrica de (3.9). Daí, $\gamma'(t) = (K e^{\beta t} t^{-b} (\beta - b t^{-1}), e^{-\alpha t} t^a (a t^{-1} - \alpha))$. Assim, para qualquer t tal que $\gamma(t) \neq (0, 0)$ e $\gamma(t) \neq \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, tem-se $\gamma'(t) \neq (0, 0)$. Isto significa que γ é regular e não possui auto intersecção. Além disto, é possível provar que existem números reais distintos t_1, t_2 , de modo que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Logo, o gráfico da função que satisfaz (3.9) é uma curva fechada e contém o ponto P_2 .

Estudando o sinal das equações que compõem o sistema (3.1), temos que $\frac{dx}{dt} > 0 \Leftrightarrow 0 < y < \frac{a}{\alpha}$ e $\frac{dx}{dt} < 0 \Leftrightarrow y > \frac{a}{\alpha}$. Portanto, a população de presas é crescente se $y < \frac{a}{\alpha}$ e decresce se a população de predadores superar $\frac{a}{\alpha}$. Analogamente, a população de predadores é decrescente se $x < \frac{b}{\beta}$ e crescente se $x > \frac{b}{\beta}$.

O método gráfico de Volterra foi empregado por (BASSANEZI; JUNIOR, 1988) para construir um esboço do gráfico de uma solução do sistema (3.1) com condições iniciais positivas. A figura seguinte apresenta o resultado obtido.

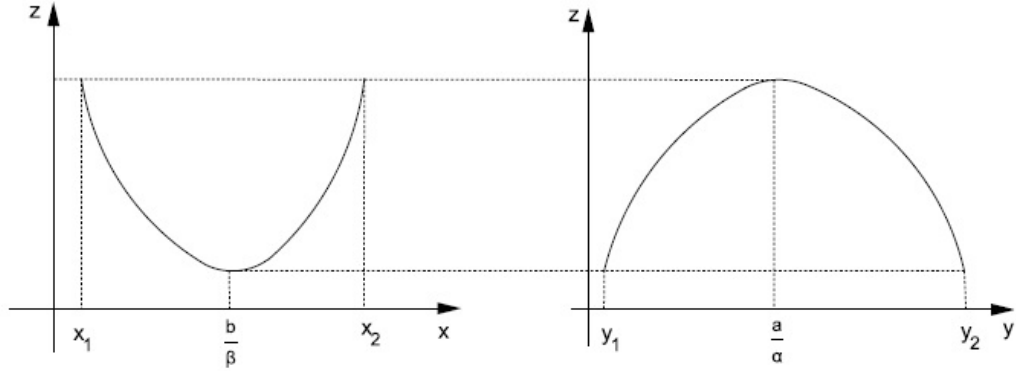
Figura 3 – Curva solução no plano de fase xy 

Fonte: Adaptado de (BASSANEZI; JUNIOR, 1988)

Observando a figura acima, percebemos que as populações de presas e predadores variam entre um valor mínimo e um valor máximo. Para determinar tais valores, introduzimos z como variável auxiliar na equação (3.9). Portanto

$$z = y^a e^{-\alpha y} = K e^{\beta x} x^{-b}.$$

É possível mostrar que a função $z(y) = y^a e^{-\alpha y}$ admite valor máximo $z_M = a \left(\ln \left(\frac{a}{\alpha} \right) - 1 \right)$ no ponto $y = \frac{a}{\alpha}$. Por outro lado, a função $z(x) = K e^{\beta x} x^{-b}$ admite um valor mínimo $z_m = b \left(1 - \ln \left(\frac{K^{\frac{1}{b-1}} b}{\beta} \right) \right)$ no ponto $x = \frac{b}{\beta}$. Os gráficos destes casos estão esboçados na figura a seguir.

Figura 4 – Gráficos de z em função de x e de y .

Fonte: Adaptado de (BASSANEZI; JUNIOR, 1988)

Então, $x_1 < x < x_2$, onde x_1 e x_2 são soluções da equação

$$a \left(\ln \left(\frac{a}{\alpha} \right) - 1 \right) = K e^{\beta x} x^{-b}.$$

Analogamente, $y_1 < y < y_2$, onde y_1 e y_2 são soluções de

$$b \left(1 - \ln \left(\frac{k^{b-1} b}{\beta} \right) \right) = y^a e^{-\alpha y}.$$

É possível compreender o comportamento das soluções de (3.1) em uma vizinhança do ponto $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} \right)$ estudando o sistema linearizado. Com efeito, de acordo com os resultados apresentados no Capítulo 1, para condições iniciais suficientemente próximas do ponto P_2 , o sistema linear

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b\alpha}{\beta} \\ \frac{a\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

serve como boa aproximação para o sistema (3.1). Assumindo que $u(t) = x(t) - \frac{b}{\beta}$ e $v(t) = y(t) - \frac{a}{\alpha}$, podemos escrever o sistema (3.10) na forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{-b\alpha}{\beta} v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{a\beta}{\alpha} u. \end{cases} \quad (3.11)$$

Derivando ambos os membros de cada equação em relação a t , temos

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{-b\alpha}{\beta} \frac{dv}{dt} \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{a\beta}{\alpha} \frac{du}{dt}, \end{cases} \quad (3.12)$$

ou:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \left(\frac{-b\alpha}{\beta} \right) \left(\frac{a\beta}{\alpha} \right) u \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = \left(\frac{a\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{-b\alpha}{\beta} \right) v. \end{cases}$$

As equações acima podem ser escritas respectivamente como

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + abu = 0, \quad (3.13)$$

e

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + abv = 0. \quad (3.14)$$

A solução analítica da equação (3.13) pode ser determinada observando que a equação característica associada é $r^2 + ab = 0$, com raízes $r_1 = i\sqrt{ab}$ e $r_2 = -i\sqrt{ab}$. Portanto, a solução analítica de (3.13) é

$$u(t) = k_1 \cos(\sqrt{ab} t) + k_2 \sin(\sqrt{ab} t), \quad (3.15)$$

em que k_1 e k_2 são constantes. Supondo $k_1 \neq 0$, existem constantes η e θ tais que

$$u(t) = \frac{\eta b}{\beta} \cos(\sqrt{ab} t + \theta).$$

De fato, sejam

$$k_1 = \frac{\eta b}{\beta} \cos \theta \text{ e } k_2 = \frac{-\eta b}{\beta} \sin \theta. \quad (3.16)$$

Podemos escrever (3.15) na forma

$$u(t) = \frac{\eta b}{\beta} \cos \theta \cos(\sqrt{ab} t) - \frac{\eta b}{\beta} \sin \theta \sin(\sqrt{ab} t).$$

Observando que $\cos \theta \cos(\sqrt{ab} t) - \sin \theta \sin(\sqrt{ab} t) = \cos(\sqrt{ab} t + \theta)$, temos

$$u(t) = \frac{\eta b}{\beta} \cos(\sqrt{ab} t + \theta).$$

As constantes η e θ dependem das condições iniciais do sistema. Com efeito, de (3.16) decorre que

$$\eta = \frac{\beta k_1}{b \cos \theta} = \frac{-\beta k_2}{b \sin \theta}.$$

Isto significa que

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-k_2}{k_1}.$$

Então,

$$\theta = \arctg \left(\frac{-k_2}{k_1} \right).$$

Para determinar a solução analítica de (3.14), tomamos como ponto de partida a primeira equação de (3.11),

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{-b\alpha}{\beta}v \\ v &= \frac{-\beta}{b\alpha} \frac{du}{dt}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{du}{dt} = \frac{-\eta b}{\beta} \sqrt{ab} \operatorname{sen}(\sqrt{ab} t + \theta).$$

Portanto

$$v(t) = \frac{\eta}{\alpha} \sqrt{ab} \operatorname{sen}(\sqrt{ab} t + \theta) = \frac{\eta a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{ab} t + \theta).$$

Lembrando que fizemos a mudança de variáveis $u(t) = x(t) - \frac{b}{\beta}$ e $v(t) = y(t) - \frac{a}{\alpha}$, podemos escrever a solução analítica do sistema linearizado (3.10) na forma

$$\begin{cases} x(t) = \frac{b}{\beta} + \frac{\eta b}{\beta} \cos(\sqrt{ab} t + \theta) \\ y(t) = \frac{a}{\alpha} + \frac{\eta a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{ab} t + \theta). \end{cases} \quad (3.17)$$

A partir de (3.17), concluímos que, em uma vizinhança do ponto $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$, as populações de presas e predadores são periódicas e oscilam com período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$. Este período é independente das condições iniciais. Ainda que o tempo tenda para o infinito, as espécies coexistirão. Além disso, no caso das presas, a amplitude de oscilação é igual a $\frac{\eta b}{\beta}$. A população de predadores oscila com amplitude $\frac{\eta a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}}$. Note que estas amplitudes dependem das condições iniciais e dos parâmetros do sistema.

Para determinar as populações médias de presas e predadores ao longo de um período T , recordamos que

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ \bar{y} &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt\end{aligned}$$

Então, dividindo ambos os membros da segunda equação dada em (3.1) por y , separando as variáveis e integrando em relação a t , obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{1}{y(t)} \frac{dy}{dt} dt &= \int_0^T (-b + \beta x(t)) dt \\ \ln y(T) - \ln y(0) &= -bT + \beta \int_0^T x(t) dt\end{aligned}$$

Mas $y(t)$ é uma função de período T . Portanto, $y(T) = y(0)$. Daí

$$\begin{aligned} -bT + \beta \int_0^T x(t)dt &= 0 \\ \int_0^T x(t)dt &= \frac{bT}{\beta} \end{aligned}$$

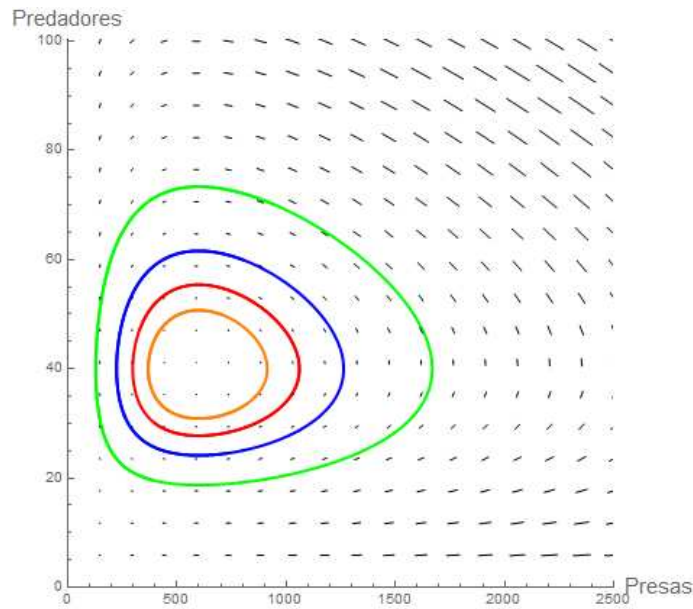
Portanto

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T} \frac{bT}{\beta} = \frac{b}{\beta}$$

Analogamente, mostra-se que $\bar{y} = \frac{a}{\alpha}$. Isto evidencia que as populações médias de presas e predadores, ao longo de um período T , não dependem das condições iniciais do sistema e são numericamente iguais aos seus valores de equilíbrio, dados pelas coordenadas do ponto P_2 .

A figura a seguir apresenta um retrato de fase do modelo de Lotka - Volterra, construído com o software Mathematica², com diferentes condições iniciais e parâmetros $a = 0.04$, $\alpha = 0.001$, $b = 0.012$ e $\beta = 0.00002$.

Figura 5 – Retrato de fase. Em vermelho, temos $x(0) = 400$ e $y(0) = 30$; em laranja, $x(0) = 700$ e $y(0) = 50$; em azul, $x(0) = 800$ e $y(0) = 60$; em verde, $x(0) = 950$ e $y(0) = 70$.

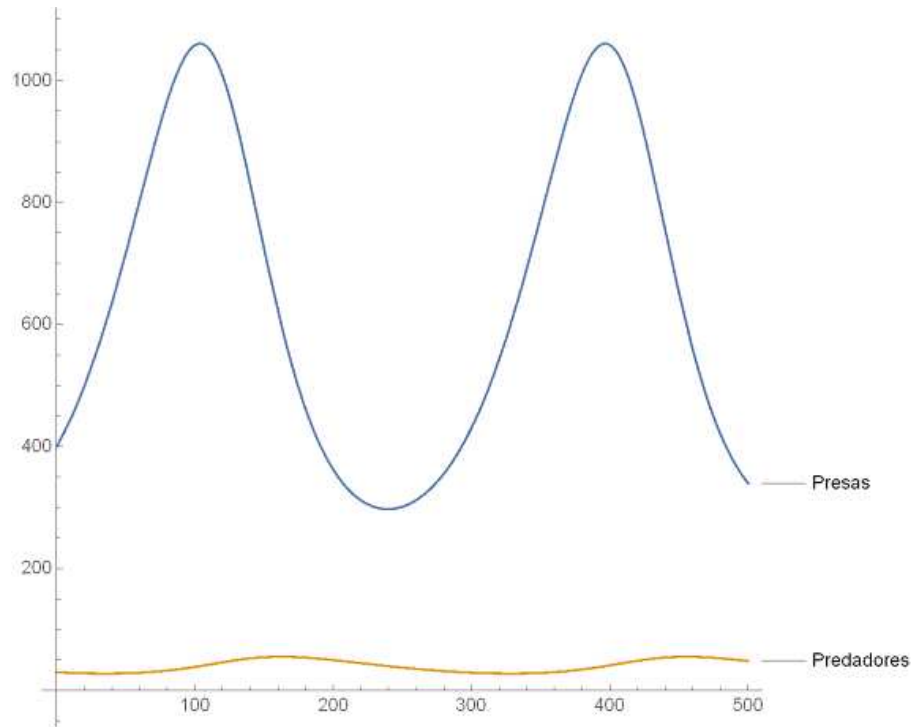


Fonte: O autor

² Código disponível nos apêndices deste trabalho.

Na figura seguinte, temos o gráfico de uma simulação numérica para o modelo clássico de Lotka - Volterra com condições iniciais $x(0) = 400$ e $y(0) = 30$ e parâmetros $a = 0.04$, $\alpha = 0.001$, $b = 0.012$ e $\beta = 0.00002$.

Figura 6 – Simulação numérica executada com o software Mathematica.



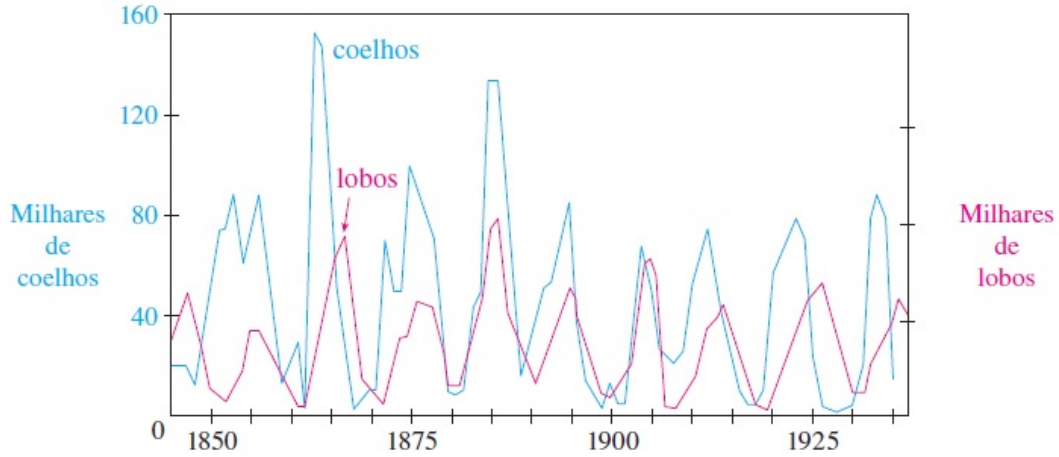
Fonte: O autor

Segundo (GOTELLI, 2009), a principal característica do modelo de Lotka - Volterra é a periodicidade da oscilação das populações de presas e predadores, pois a dinâmica de cada população é regulada pelo crescimento ou decrescimento da outra. Dentre os casos nos quais o comportamento oscilatório de duas populações em uma interação do tipo presa - predador foi verificado empiricamente, (EDELSTEIN-KESHET, 2005) e (MURRAY, 2002) destacam o exemplo de uma empresa que comercializava peles de animais no Canadá e manteve registros sobre as quantidades de peles de coelhos e lobos ao longo de praticamente cem anos.

É possível constatar no gráfico abaixo que as oscilações relacionadas as populações dos animais ocorrem com um período de aproximadamente dez anos.

Retomando a indagação de D'Ancona sobre as razões pelas quais a redução da pesca foi mais benéfica para o aumento da população de predadores, (BRAUN, 1993) observa que Volterra introduziu no modelo (3.1) o efeito provocado pela pesca, considerando uma redução populacional proporcional ao tamanho de cada população. Assim, se $e > 0$ é

Figura 7 – Abundância de coelhos e lobos, segundo dados da Hudson's Bay Company



Fonte: Adaptado de (EDELSTEIN-KESHET, 2005)

uma constante que representa a intensidade da pesca, obtém-se as equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy - ex = (a - e)x - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy - ey = (-b - e)y + \beta xy. \end{cases} \quad (3.18)$$

Notemos que, para $a - e > 0$, o sistema de equações acima é o mesmo que (3.1), substituindo a por $a - e$ e b por $b + e$. Consequentemente, (3.18) possui as mesmas características qualitativas do modelo de Lotka - Volterra. Em particular, os pontos de equilíbrio $\hat{P}_1 = (0, 0)$ e $\hat{P}_2 = \left(\frac{a + e}{\alpha}, \frac{b - e}{\beta} \right)$, são, respectivamente, ponto de sela instável e centro. Ademais, os valores médios para as populações de presas e predadores ao longo de um período são dados por $\bar{x} = \frac{a + e}{\alpha}$ e $\frac{b - e}{\beta}$. Isto significa que uma intensidade de pesca moderada ($e < a$) implica no aumento da população média de presas e na redução da população média de predadores. Segundo (BRAUN, 1993), este fato notável é conhecido como *princípio de Volterra* e apresenta consequências importantes para o manejo de inseticidas que matam insetos predadores e suas presas, pois a mortalidade de ambas as populações contribuirá para o aumento da população de presas e diminuição da população de predadores.

Finalizamos esta seção salientando que, embora o modelo de Lotka - Volterra seja capaz de explicar razoavelmente certos casos de predação, a natureza é extremamente complexa e a aplicação do referido modelo não se mostra adequada para um grande número de situações, conforme discutem (EDELSTEIN-KESHET, 2005) e (MURRAY, 2002). Nas próximas seções discutiremos algumas críticas ao modelo de Lotka - Volterra e apresentaremos alguns modelos alternativos, um pouco mais próximos de situações reais.

3.2 Modificações no modelo de Lotka - Volterra

Conforme explicitamos na seção anterior, as hipóteses essenciais que sustentam a construção do modelo de Lotka - Volterra configuram uma considerável simplificação do complexo processo de predação em casos mais gerais. (GOTELLI, 2009) sintetiza algumas limitações do referido modelo:

- O crescimento da população de presas é inibido apenas pela predação;
- Os predadores são especialistas, isto é, alimentam-se apenas de um único tipo de presas;
- Cada predador pode consumir um número infinito de presas e não há cooperação nem competição entre os predadores;
- Os encontros entre predadores e presas ocorrem aleatoriamente em um ambiente homogêneo. Isto implica que as presas não possuem um refúgio espacial ou temporal dos predadores.

Ainda que seja possível encontrar muitas outras limitações do modelo de Lotka - Volterra, não nos alongaremos nesta questão. nossa intenção consiste em evidenciar a necessidade da construção de modelos mais apropriados para certas condições. Com o objetivo de obter modelos que melhor se ajustem a situações mais diversas, vários estudiosos propuseram modificações no modelo de Lotka - Volterra. (EDELSTEIN-KESHET, 2005) apresenta alguns modelos alternativos, considerando que:

1. A taxa de crescimento intrínseco da população de presas é definida por uma função de densidade-dependência f :

$$\text{a) } f(x) = r \left(1 - \frac{x}{K} \right);$$

$$\text{b) } f(x) = r \left[\left(\frac{K}{x} \right)^{-g} - 1 \right], \quad 0 < g \leq 1 \text{ - Modelo de Rosenzweig (1971);}$$

$$\text{c) } f(x) = r \left(\frac{K}{x} - 1 \right) \text{ - Modelo de Schoener (1973).}$$

2. A taxa de ataque dos predadores não é constante. Daí, o termo αx na equação (3.1) é substituído por uma função g (denominada **resposta funcional dos predadores à densidade populacional das presas**):

$$\text{a) } g(x) = k(1 - e^{-px}) \text{ - Modelo de Ivlev (1961);}$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{kx}{x + D} \text{ - Modelo de Holling (1965);}$$

$$\text{c) } g(x) = \frac{kx^2}{x^2 + D^2} \text{ - Modelo de Takahashi (1964);}$$

d) $g(x) = kx^g$, $0 < g \leq 1$ - Modelo de Rosenzweig (1971).

Em 1936, o matemático Andrei Kolmogorov estudou uma generalização de modelos presa-predador. Os modelos considerados por Kolmogorov podem ser definidos através do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(x)x - B(x)y \\ \frac{dy}{dt} = C(x)y \end{cases}$$

Nas equações acima, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam, respectivamente, as quantidades (não negativas) de indivíduos das populações de presas e predadores, que variam continuamente em função do tempo e, de acordo com (BASSANEZI; JUNIOR, 1988) e (EDELSTEIN-KESHET, 2005), as funções A , B e C são contínuas e devem satisfazer as seguintes condições:

1. A é decrescente, ou seja, $A'(x) < 0$. Além disso, $A(\infty) < 0 < A(0)$ e existe $\bar{x}$, tal que $A(\bar{x}) = 0$. Isto significa que, se $y = 0$ (ausência de predadores), a taxa de natalidade das presas é inicialmente positiva mas diminui com o aumento da população, até atingir valores negativos. Do ponto de vista biológico, as presas estão competindo por recursos limitados, com a possibilidade de estabilizar seu crescimento ao atingir $\bar{x}$.
2. $x > 0 \Rightarrow B(x) > 0$ e $B(0) = 0$. $B(x)$ é a resposta funcional dos predadores à densidade populacional das presas e, de acordo com (GOTELLI, 2009), possui um papel decisivo no controle populacional que os predadores exercem nas presas. É usual que as modificações no modelo de Lotka - Volterra incluam respostas funcionais que apresentem um crescimento convergindo até um dado valor constante. Portanto, ainda que a população de presas cresça, a capacidade de caça e alimentação dos predadores tende a um valor máximo. Este tipo de resposta funcional pode ser considerado razoavelmente realista.
3. $C'(x) > 0$ e $B(0) < 0 < B(\infty)$. Assim, a taxa de crescimento dos predadores varia entre valores negativos (com a ausência de presas) e valores positivos.

Um estudo mais detalhado sobre a generalização de Kolmogorov para o modelo presa - predador pode ser encontrada em (SANTOS, 1989). Nas próximas seções discutiremos os modelos alternativos cuja construção está inspirada em alguns pressupostos adotados por Kolmogorov.

3.3 Competição intraespecífica entre as presas

Conforme discutimos nas seções anteriores, uma das críticas que o modelo clássico de Lotka - Volterra recebeu diz respeito ao crescimento exponencial da população de presas, na ausência de predadores.

Um dos caminhos para modelar o crescimento populacional das presas de modo mais próximo da realidade consiste em adotar um dos pressupostos da generalização de Kolmogorov, onde, na ausência de predadores, a taxa de natalidade das presas é inicialmente positiva, mas diminui com o aumento da população, atingindo valores negativos, caso a população seja suficientemente grande.

O caso que estudaremos nesta seção é análogo ao modelo clássico de Lotka - Volterra, porém, assume que, na ausência de predadores, as presas apresentam competição intraespecífica, representada através do crescimento logístico. Desta forma, o modelo com competição intraespecífica entre as presas é definido por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy, \end{cases} \quad (3.19)$$

em que $k > 0$ é uma constante denominada *capacidade de suporte* e representa a quantidade máxima de indivíduos que o meio suporta. Os demais termos possuem os mesmos significados dados no modelo de Lotka - Volterra.

Para analisar o crescimento das presas na ausência de predadores, fazemos $y = 0$ em (3.19). Se considerarmos $x(0) = x_0$, temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = p_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

O modelo Logístico para o crescimento populacional (também conhecido como modelo de Verhulst) é definido pelo problema de valor inicial (3.20). A solução analítica pode ser determinada aplicando a técnica da separação de variáveis:

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) \Leftrightarrow \frac{dx}{x \left(1 - \frac{x}{k}\right)} = a dt$$

Logo

$$\int \frac{dx}{x \left(1 - \frac{x}{k}\right)} = \int a dt.$$

Mas

$$\frac{1}{x \left(1 - \frac{x}{k}\right)} = \frac{k}{x(k - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{k - x}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{k-x} \right) dx = \int a dt.$$

Então,

$$\ln \left| \frac{k-x}{x} \right| = -at - C,$$

em que C é uma constante de integração. Assim,

$$\frac{k-x}{x} = \pm e^{-C} \cdot e^{-at}.$$

Fazendo $\pm e^{-C} = D$ e isolando x , temos

$$x(t) = \frac{k}{1 + De^{-at}}.$$

Para determinar D usamos o fato de que $x(0) = x_0$. Daí obtemos

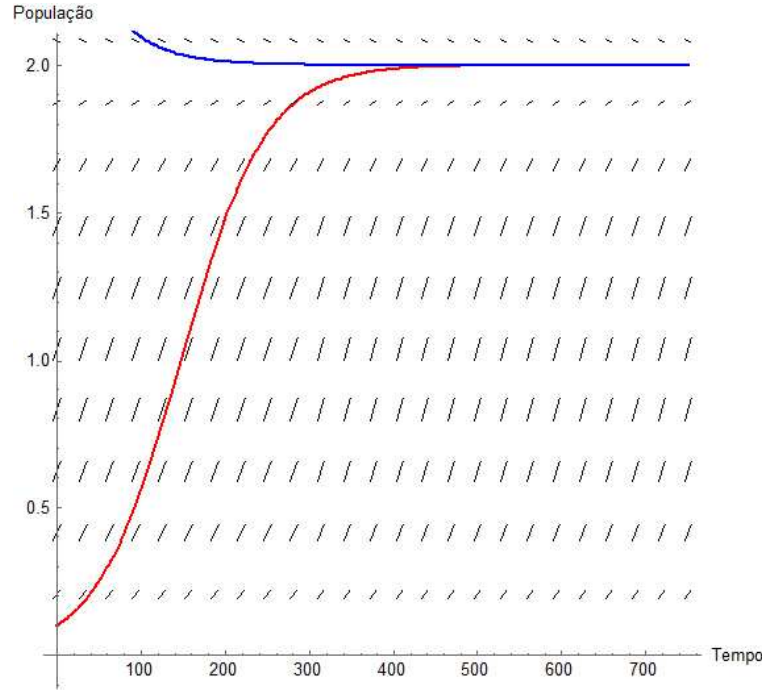
$$\frac{k}{1+D} = x_0 \Rightarrow D = \frac{k-x_0}{x_0}.$$

As principais características do modelo Logístico são as seguintes:

1. Se x é pequeno em comparação com k , $\frac{dx}{dt} \approx ax$ e $\frac{dx}{dt} > 0$, pois, por hipótese, $a > 0$. Em outras palavras, se o tamanho da população está distante da capacidade de suporte, então seu crescimento é aproximadamente exponencial.
2. Se x é maior que k , $\frac{dx}{dt} < 0$ e x é uma função decrescente;
3. Para t suficientemente grande, x aproxima-se assintoticamente de k . Ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = k$;
4. Como $\frac{dx}{dt} = ax - \frac{ax^2}{k}$, podemos interpretar, $\frac{dx}{dt}$ como uma função quadrática de x , possuindo as propriedades: (i) a concavidade é voltada para baixo; (ii) se anula quando $x = 0$ ou $x = k$; (iii) é positiva se $0 < x < k$ e negativa se $x > k$; (iv) é crescente se $0 \leq x \leq k/2$ e decrescente se $k/2 \leq x \leq k$, atingido seu valor máximo em $x = k/2$. Ressaltamos que esta última propriedade implica que, ao atingir um valor igual à metade da capacidade de suporte, a taxa de crescimento da população vai diminuindo e, se $x \rightarrow k$, $\frac{dx}{dt} \rightarrow 0$.
5. Em síntese, das propriedades anteriores, decorre que modelo de crescimento logístico dado em (3.20) possui dois pontos de equilíbrio: $x^* = 0$ (instável) e $\bar{x} = k$ (assintoticamente estável).

Na figura a seguir temos o gráfico das soluções de (3.20) com $k = 2$, $a = 0.02$ e condições iniciais $x(0) = 0.1 < k$ e $x(0) = 3 > k$.

Figura 8 – Crescimento logístico com diferentes condições iniciais. Gráficos construídos com a linguagem Python.



Fonte: O autor

Para analisar o comportamento qualitativo das soluções do modelo, observamos que seus pontos de equilíbrio são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy = 0 \\ -by + \beta xy = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Resolvendo (3.21) obtemos os pontos de equilíbrio: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (k, 0)$ e $P_3 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} - \frac{ab}{k\beta\alpha}\right)$.

Considerando $F(x, y) = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy$ e $G(x, y) = -by + \beta xy$, a matriz Jacobiana associada ao modelo é

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ak - 2ax - k\alpha y}{k} & -\alpha x \\ \beta y & -b + \beta x \end{pmatrix}.$$

Determinando a matriz Jacobiana em $P_1 = (0, 0)$, temos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

É imediato que os autovalores da matriz $J(0,0)$ são $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -b < 0$. Logo, o ponto $P_1 = (0,0)$ é um ponto de sela instável. Já para $P_2 = (k,0)$, a matriz Jacobiana é

$$J(k,0) = \begin{pmatrix} -a & -\alpha k \\ 0 & -b + \beta k \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz $J(k,0)$ são soluções da equação característica

$$(-a - \lambda)(-b + \beta k - \lambda) = 0.$$

Assim, os autovalores de $J(k,0)$ são os números $\lambda_1 = -a < 0$ e $\lambda_2 = -b + \beta k$. Vale ressaltar que estamos interessados apenas no comportamento de soluções que contenham pontos $P = (p_1, p_2)$ com ambas coordenadas positivas na vizinhança de P_2 . Temos duas possibilidades: (i) se $k > \frac{b}{\beta}$, $\lambda_2 > 0$ e P_2 é ponto de sela instável. (ii) caso $k < \frac{b}{\beta}$, $\lambda_2 < 0$ e P_2 é assintoticamente estável. Nesta última situação, independentemente do seu tamanho inicial, a população de predadores sempre será extinta em um tempo suficientemente grande.

Em relação $P_3 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} - \frac{ab}{k\beta\alpha}\right)$, observamos que a população dos predadores deve ser positiva. Ou seja, $\frac{a}{\alpha} - \frac{ab}{k\beta\alpha} > 0$. Isto ocorrerá se, e somente se, $\frac{b}{k\beta} < 1$. Com esta restrição, vamos considerar a matriz jacobiana

$$J\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} - \frac{ab}{k\beta\alpha}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{ab}{\beta k} & \frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} - \frac{ab}{\alpha k} & 0 \end{pmatrix},$$

cujas equação característica é

$$\left(-\frac{ab}{\beta k} - \lambda\right)(-\lambda) - \left(\frac{a\beta}{b} - \frac{ab}{\alpha k}\right)\left(\frac{\alpha b}{\beta}\right) = 0. \quad (3.22)$$

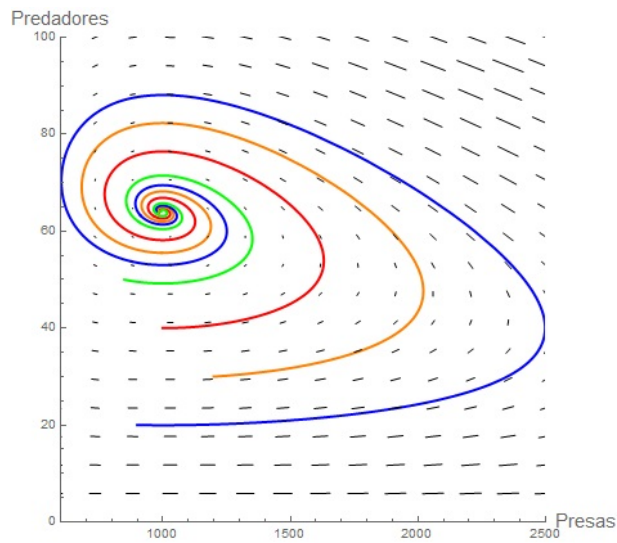
As soluções da equação (3.22) são os autovalores $\lambda_1 = -\frac{ab}{2\beta k} + \frac{\sqrt{\mu}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{ab}{2\beta k} - \frac{\sqrt{\mu}}{2}$, em que $\mu = \left(\frac{ab}{\beta k}\right)^2 - 4ab\left(1 - \frac{b}{\beta k}\right)$. Como $\frac{b}{k\beta} < 1$, temos as seguintes possibilidades:

- $\mu < 0$ e os autovalores são números complexos conjugados com parte real negativa. Daí, P_3 é assintoticamente estável.
- μ é não negativo mas, $\sqrt{\mu} < \frac{ab}{\beta k}$. Consequentemente, os autovalores são números reais negativos e P_3 é assintoticamente estável. Portanto, se as populações de presas e predadores são positivas e $\frac{b}{k\beta} < 1$, as espécies sempre coexistirão e, em um tempo

suficientemente grande, atingirão as respectivas populações de equilíbrio, dadas por $x^* = \frac{b}{\beta}$ e $y^* = \frac{a}{\alpha} - \frac{ab}{k\beta\alpha}$.

A figura seguinte apresenta um retrato de fase construído com o software Mathematica³, com diferentes condições iniciais e parâmetros $a = 0.08$; $\alpha = 0.001$; $k = 5000$; $b = 0.02$ e $\beta = 0.00002$.

Figura 9 – Retrato de fase. Em vermelho, temos $x(0) = 1000$ e $y(0) = 40$; em laranja, $x(0) = 1200$ e $y(0) = 30$; em azul, $x(0) = 900$ e $y(0) = 20$; em verde, $x(0) = 850$ e $y(0) = 50$.

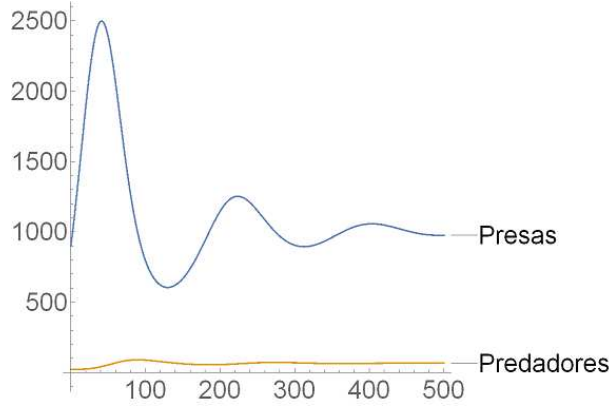


Fonte: O autor

³ Código disponível nos apêndices deste trabalho.

A seguir, temos o gráfico de uma simulação numérica com condições iniciais $x(0) = 900$ e $y(0) = 20$ e parâmetros $a = 0.08$; $\alpha = 0.001$; $k = 5000$; $b = 0.02$ e $\beta = 0.00002$.

Figura 10 – Simulação numérica executada com o software Mathematica



Fonte: O autor

3.4 Competição intraespecífica entre ambas as populações

Nesta seção estudaremos um modelo presa-predador que inclui crescimento logístico para as presas e competição intraespecífica entre os predadores. De acordo com (BRAUN, 1993), este modelo considera a disputa dos predadores por uma quantidade escassa de presas e pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by - \gamma y^2 + \beta xy, \end{cases} \quad (3.23)$$

em que γy^2 representa a competição intraespecífica entre os predadores e os demais termos assumem os mesmos significados definidos no modelo de Pielou.

Os pontos de equilíbrio de (3.23) são soluções do sistema

$$\begin{cases} ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy = 0 \\ -by - \gamma y^2 + \beta xy = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Resolvendo (3.24) obtemos os pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (k, 0)$, $P_3 = \left(\frac{bk\alpha + ak\gamma}{bk\alpha + a\gamma}, \frac{ak\beta - ab}{bk\alpha + a\gamma}\right)$ e $P_4 = \left(0, -\frac{b}{\gamma}\right)$. Note que a população dos predadores é sempre negativa em P_4 . Por esta razão, não o consideraremos em nossa análise.

Dadas as funções $F(x, y) = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy$ e $G(x, y) = -by - \gamma y^2 + \beta xy$, temos que a matriz jacobiana do modelo (3.23) é

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ak - 2ax - k\alpha y}{k} & -\alpha x \\ \beta y & -b - 2\gamma y + \beta x \end{pmatrix}.$$

- Para $P_1 = (0, 0)$, temos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

É imediato que os autovalores da matriz $J(0, 0)$ são $\lambda_1 = a > 0$ e $\lambda_2 = -b < 0$. Logo, o ponto $P_1 = (0, 0)$ é um ponto de sela instável.

- Para $P_2 = (k, 0)$, temos

$$J(k, 0) = \begin{pmatrix} -a & -\alpha k \\ 0 & -b + \beta k \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz $J(k, 0)$ são soluções da equação

$$(-a - \lambda)(-b + \beta k - \lambda) = 0.$$

Portanto, os autovalores de $J(k, 0)$ são os números $\lambda_1 = -a < 0$ e $\lambda_2 = -b + \beta k$. Analogamente ao que ocorreu no caso do modelo de Pielou, estamos interessados apenas no comportamento de soluções que contenham pontos $P = (p_1, p_2)$ com ambas coordenadas positivas na vizinhança de P_2 . Daí, temos duas possibilidades: (i) se $k > \frac{b}{\beta}$, $\lambda_2 > 0$ e P_2 é ponto de sela instável. (ii) caso $k < \frac{b}{\beta}$, $\lambda_2 < 0$ e P_2 é assintoticamente estável. Nesta última situação, independentemente do seu tamanho inicial, a população de predadores sempre será extinta em um tempo suficientemente grande.

- No caso de $P_3 = \left(\frac{bk\alpha + ak\gamma}{bk\alpha + a\gamma}, \frac{ak\beta - ab}{bk\alpha + a\gamma}\right)$, observamos que a população de predadores é positiva quando $ak\beta - ab > 0$. Isto significa que devemos ter $k > \frac{b}{\beta}$. Considerando esta restrição, temos a matriz Jacobiana associada a P_3

$$J\left(\frac{bk\alpha + ak\gamma}{bk\alpha + a\gamma}, \frac{ak\beta - ab}{bk\alpha + a\gamma}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-ab\alpha - a^2\gamma}{k\alpha\beta + a\gamma} & \frac{-kba^2 - ka\alpha\gamma}{k\alpha\beta + a\gamma} \\ \frac{-a\beta b + k\beta^2}{k\alpha\beta + a\gamma} & \frac{ab\gamma - ak\beta\gamma}{k\alpha\beta + a\gamma} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

A equação característica da matriz obtida em (3.25) é

$$\lambda^2 - \left(\frac{-ab\alpha - a^2\gamma + ab\gamma - ak\beta\gamma}{k\alpha\beta + a\gamma}\right)\lambda + \left(\frac{-a(b - k\beta)(b\alpha + a\gamma)}{k\alpha\beta + a\gamma}\right) = 0. \quad (3.26)$$

A soma S e o produto P das raízes de (3.26) são, respectivamente,

$$S = \frac{-ab\alpha - a^2\gamma + ab\gamma - ak\beta\gamma}{k\alpha\beta + a\gamma}.$$

$$P = \frac{-a(b - k\beta)(b\alpha + a\gamma)}{k\alpha\beta + a\gamma}.$$

Para mostrar que $P > 0$, observamos que todos os parâmetros do modelo definido em (3.23) são positivos. Portanto, $b\alpha + a\gamma > 0$ e $k\alpha\beta + a\gamma > 0$. Além disso, $k > \frac{b}{\beta} \Rightarrow k\beta > b$. Então

$$\begin{aligned} b - k\beta &< 0 \\ -a(b - k\beta) &> 0. \end{aligned}$$

Assim, $P > 0$ e os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz (3.25) devem ser números reais com o mesmo sinal, ou números complexos conjugados com parte real de mesmo sinal. Além disso, $k\beta > b \Rightarrow ak\beta\gamma > ab\gamma$. Logo

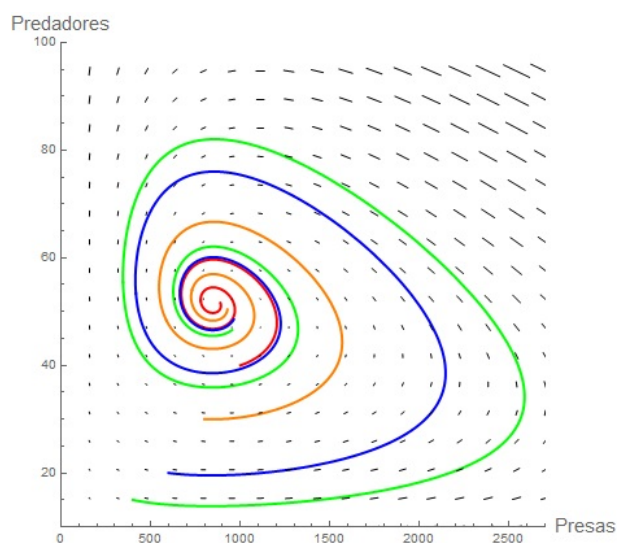
$$S = \frac{-ab\alpha - a^2\gamma + ab\gamma - ak\beta\gamma}{k\alpha\beta + a\gamma} < 0. \quad (3.27)$$

Como $S < 0$ e $P > 0$, concluímos que λ_1 e λ_2 são números reais negativos ou números complexos conjugados com parte real negativa. Em ambos os casos, o ponto P_3 é assintoticamente estável, sempre haverá coexistência entre presas e predadores e quando o tempo tende ao infinito, todas as soluções tendem ao ponto P_3 .

A figura seguinte apresenta um retrato de fase construído com o software Mathematica⁴, com diferentes condições iniciais e parâmetros $a = 0.06$; $\alpha = 0.001$; $k = 6000$; $b = 0.015$, $\gamma = 0.00005$ e $\beta = 0.000018$.

⁴ Código disponível nos apêndices deste trabalho.

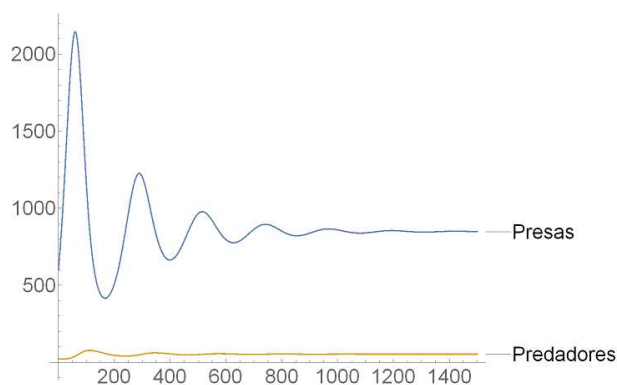
Figura 11 – Retrato de fase. Em vermelho, temos $x(0) = 1000$ e $y(0) = 40$; em laranja, $x(0) = 800$ e $y(0) = 30$; em azul, $x(0) = 600$ e $y(0) = 20$; em verde, $x(0) = 400$ e $y(0) = 15$.



Fonte: O autor

A seguir, temos o gráfico de uma simulação numérica com condições iniciais $x(0) = 600$ e $y(0) = 20$ e parâmetros $a = 0.06$; $\alpha = 0.001$; $k = 6000$; $b = 0.015$, $\gamma = 0.00005$ e $\beta = 0.000018$.

Figura 12 – Simulação numérica executada com o software Mathematica



Fonte: O autor

Finalizamos este capítulo ressaltando que, conforme ([BRAUER; KRIBS, 2016](#)) afirmam, os resultados de um modelo matemático podem não concordar com observações, ou podem ter limitações que impedem o modelo de ser útil. Nestes casos, deve-se fazer alterações no modelo, ou até mesmo substituí-lo completamente, e então analisar o novo modelo, para verificar há uma descrição suficientemente boa da realidade. Em suma, o processo de modelagem pode ser cíclico, demandando várias tentativas de refinamento, reconstrução e análise.

4 Sistemas presa-predador com controle ótimo

Neste capítulo estudaremos dois modelos presa-predador bidimensionais com controle ótimo. A construção e discussão dos modelos está fundamentada nas referências (GOH; LEITMANN; VINCENT, 1974), (KIRK, 2004), (LENHART; WORKMAN, 2007) e (KAMIEN; SCHWARTZ, 2012). No primeiro modelo, aplicaremos boa parte dos conceitos e resultados que apresentamos ao longo deste trabalho e os resultados serão ilustrados através de uma simulação numérica. O segundo modelo será tratado apenas numericamente. Em ambos os casos, aplicaremos a biblioteca GEKKO¹, nativa da linguagem Python e amplamente utilizada na resolução numérica de problemas de controle ótimo.

4.1 Modelo de Lotka-Volterra com controle ótimo

Conforme discutido no capítulo anterior, o Princípio de Volterra implica que, se introduzirmos os efeitos de uma retirada de indivíduos (pesca, caça, etc) proporcional ao tamanho de cada população no modelo clássico de Lotka - Volterra, a população de presas é beneficiada e há um aumento no seu valor médio ao longo de um ciclo populacional. Assim, uma eliminação uniforme e moderada de indivíduos de ambas as populações beneficia o crescimento da população de presas. (BASSANEZI; JUNIOR, 1988) ilustram este fato através do seguinte exemplo: o bicudo, praga que afeta o algodão, e a formiga, seu predador natural, coexistem em um sistema presa-predador. O uso de um inseticida que extermina tanto as formigas quanto os bicudos provocará um aumento na população média de bicudos, a menos que o produto seja capaz de eliminar completamente a praga, com a possibilidade de contaminar o solo ou afetar a saúde humana.

Nesta seção, pretendemos estudar a dinâmica de um sistema presa-predador com ação de um inseticida que elimina proporcionalmente indivíduos de ambas as populações. Além disso, os resíduos deixados pelo inseticida podem ser desprezados e não interferem na dinâmica. Com o intuito de evitar desequilíbrio ambiental e otimizar recursos, vamos introduzir um controle $u(t)$ no modelo clássico de Lotka - Volterra. Neste caso, o controle representa a taxa de aplicação do inseticida. Portanto, a dinâmica do sistema é dada pelas equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy - e_1 ux \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy - e_2 uy, \end{cases} \quad (4.1)$$

¹ Mais detalhes podem ser encontrados no site oficial: [GEKKO Optimization Suite](https://www.gekkko.com/)..

em que e_1 e e_2 são parâmetros positivos e $u = u(t) \geq 0$. Vamos supor que $t \in [t_0, t_f]$, com t_0 e t_f positivos. Vamos considerar como condições de contorno

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = \frac{b}{\beta}, y(t_0) = y_0, y(t_f) = \frac{a}{\alpha}.$$

De acordo com os resultados do terceiro capítulo, $x(t_f) = \frac{b}{\beta}$ e $y(t_f) = \frac{a}{\alpha}$ são as populações de equilíbrio para modelo de Lotka-Volterra livre de controle.

Vamos ad admitir que razões de natureza ambiental ou econômica impõem restrições ao valor máximo de $u(t)$. Então,

$$0 \leq u(t) \leq u_m,$$

com $u_m \geq 0$.

Desta forma, nosso problema de controle ótimo consiste em conduzir o sistema definido em (4.1) do estado inicial $I_0 = (x_0, y_0)$ até o estado final $I_f = (x_f, y_f)$, de tal forma que a quantidade total de inseticida aplicada seja mínima. Ou seja, desejamos minimizar o funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u(t) dt.$$

Ao longo desta seção, adotaremos a notação:

$$\begin{aligned} X &= (x, y); f(t, X, u) = u; \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \\ g(t, X, u) &= (ax - \alpha xy - e_1 ux, ax - \alpha xy - e_1 ux). \end{aligned}$$

As condições supracitadas implicam que nosso problema possui uma variável de controle limitada e duas variáveis de estado cujos valores iniciais e finais são fixados em um intervalo de tempo finito. Para abordar o problema analiticamente, utilizaremos as ideias expostas por (GOH; LEITMANN; VINCENT, 1974) em articulação com os resultados apresentados no Capítulo 1. Portanto, para determinar o controle singular u^* , seguiremos os seguintes passos:

1. Determinar função hamiltoniana $H = H(t, X, u, \lambda) = f_u + \lambda \cdot g_u$:

Neste caso, as equações de estado são autônomas. Então, temos a função hamiltoniana $H = H(x, y, u, \lambda_1, \lambda_2, t)$ dada por

$$H = u + \lambda_1(ax - \alpha xy - e_1 ux) + \lambda_2(-by + \beta xy - e_2 uy), \quad (4.2)$$

em que λ_1 e λ_2 são não nulas.

2. Escrever a equação adjunta $\lambda' = -(f_X + \lambda \cdot g_X)$:

Utilizando a definição da equação adjunta, temos que

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1(a - \alpha y - e_1 u) - \lambda_2 \beta y, \quad (4.3)$$

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda_1 \alpha x - \lambda_2(-b + \beta x - e_2 u). \quad (4.4)$$

3. Escrever a condição de otimalidade $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ no intervalo $I = [t_0, t_f]$. Daí:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda_1 e_1 x - \lambda_2 e_2 y = 0. \quad (4.5)$$

Seja $H_u = \frac{\partial H}{\partial u}$. Derivando H_u em relação a t (derivada total), é possível escrever

$$H'_u = -e_1(\lambda_1' x + \lambda_1 x') - e_2(\lambda_2' y + \lambda_2 y').$$

4. Utilizar os resultados anteriores para escrever o controle ótimo u^* em termos das variáveis de estado e dos demais parâmetros do sistema de equações definido em (4.1). Para tanto, seguiremos o caminho delineado em (GOH; LEITMANN; VINCENT, 1974).

Neste ponto, estamos interessados no ponto de equilíbrio não nulo do sistema presa-predador. Portanto, devemos considerar $x' = y' = 0$. A partir deste pressuposto, podemos utilizar as equações (4.3) e (4.4) para escrever

$$\begin{aligned} H'_u &= -[-\lambda_1(a - \alpha y - e_1 u) - \lambda_2 \beta y]e_1 x - [\lambda_1 \alpha x - \lambda_2(-b + \beta x - e_2 u)]e_2 y \\ H'_u &= -[-\lambda_1 e_1 x(a - \alpha y - e_1 u) - \lambda_2 \beta y e_1 x] - [\lambda_1 e_2 \alpha x y - \lambda_2 e_2 y(-b + \beta x - e_2 u)] \\ H'_u &= \lambda_2 e_1 \beta x y - \lambda_1 e_2 \alpha x y - \lambda_1 e_1 (a x - \alpha x y - e_1 u x) + \lambda_2 e_2 (-b y + \beta x y - e_2 u y). \end{aligned}$$

De (4.1) decorre que $x' = a x - \alpha x y - e_1 u x$ e $y' = -b y + \beta x y - e_2 u y$. Substituindo em (4.6) e admitindo que $x' = y' = 0$, obtemos

$$H'_u = x(\lambda_2 e_1 \beta y - \lambda_1 e_2 \alpha y).$$

Como $H'_u = 0$ no intervalo I , temos

$$x y (\lambda_2 e_1 \beta - \lambda_1 e_2 \alpha) = 0.$$

Em razão da natureza biológica do sistema, consideramos $x > 0$ e $y > 0$. Isto significa que

$$\lambda_2 e_1 \beta - \lambda_1 e_2 \alpha = 0. \quad (4.6)$$

Isolando λ_1 em (4.5), temos

$$\lambda_1 = \frac{1 - \lambda_2 e_2 y}{e_1 x}.$$

Substituindo este resultado em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_2 e_1 \beta - \left(\frac{1 - \lambda_2 e_2 y}{e_1 x} \right) e_2 \alpha &= 0 \\ e_1^2 \lambda_2 x \beta - e_2 \alpha + \lambda_2 e_2^2 \alpha y &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{e_2 \alpha}{e_1^2 \beta x + e_2^2 \alpha y}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

A partir de (4.6) podemos isolar λ_2 . Daí

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 e_2 \alpha}{e_1 \beta}.\tag{4.8}$$

Utilizando (4.8) em (4.5),

$$\begin{aligned}1 - \lambda_1 e_1 x - \left(\frac{\lambda_1 e_2 \alpha}{e_1 \beta} \right) e_2 y &= 0 \\ e_1 \beta - \lambda_1 e_1^2 \beta x - \lambda_1 e_2^2 \alpha y &= 0 \\ \lambda_1 e_1^2 \beta x + \lambda_1 e_2^2 \alpha y &= e_1 \beta \\ \lambda_1 &= \frac{e_1 \beta}{e_1^2 \beta x + e_2^2 \alpha y}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

As equações (4.7) e (4.9) permitem escrever

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left(\frac{e_2 \alpha}{e_1 \beta} \right).$$

Em decorrência de (4.1) é possível calcular H_u'' . Portanto,

$$H_u'' = x'(\lambda_2 e_1 \beta y - \lambda_1 e_2 \alpha y) + x(\lambda_2' e_1 \beta y + \lambda_2 e_1 \beta y' - \lambda_1' e_2 \alpha y - \lambda_1 e_2 \alpha y').$$

Novamente, estamos considerando $x' = y' = 0$. Assim, podemos escrever (4.1 na forma)

$$H_u'' = xy(\lambda_2' e_1 \beta - \lambda_1' e_2 \alpha).$$

Utilizando (4.3) e (4.4), podemos escrever

$$H_u'' = xy[(\lambda_1 \alpha x - \lambda_2(-b + \beta x - e_2 u)e_1 \beta + \lambda_1(a - \alpha y - e_1 u) + \lambda_2 \beta y)e_2 \alpha].$$

Ou seja,

$$H_u'' = xy[\lambda_1 \alpha e_1 \beta x - e_1 \beta \lambda_2(-b + \beta x - e_2 u) + \lambda_1 e_2 \alpha(a - \alpha y - e_1 u) + \lambda_2 e_2 \alpha \beta y].\tag{4.10}$$

De (4.6), decorre que $\lambda_2 e_1 \beta = \lambda_1 e_2 \alpha$. Substituindo este resultado em (4.10) e organizando os termos de forma conveniente, obtemos

$$H_u'' = xy[\lambda_1 \alpha \beta e_1 x + \lambda_2 \alpha \beta e_2 y + \lambda_1 \alpha e_2(a + b - (e_1 - e_2)u - \alpha y - \beta x)].\tag{4.11}$$

Derivando (4.11) em relação a u , temos

$$H_{uu}'' = -xy\lambda_1 \alpha e_2(e_1 - e_2).$$

Conforme apresentamos no Capítulo 1, devemos ter $H''_{uu} \leq 0$. Mas, x , y , λ_1 , α e e_2 são positivos. Isto significa que $e_1 - e_2 \geq 0$. Se $e_1 = e_2$, é possível verificar que o controle singular não existe. De fato, assumindo isto e substituindo (4.1) em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
H''_u &= xy \left[\lambda_1 \alpha \beta e_1 x + \lambda_1 \left(\frac{e_2 \alpha}{e_1 \beta} \right) \alpha \beta e_2 y + \lambda_1 \alpha e_2 (a + b - \alpha y - \beta x) \right] \\
H''_u &= xy \left[\lambda_1 \alpha \beta e_1 x + \frac{\lambda_1 e_2^2 \alpha^2 y}{e_1} + \lambda_1 \alpha e_2 a + \lambda_1 \alpha e_2 b - \lambda_1 \alpha^2 e_2 y - \lambda_1 \alpha e_2 \beta x \right] \\
H''_u &= xy \left(\lambda_1 \alpha \beta x e_1 - \lambda_1 \alpha \beta x e_2 + \frac{\lambda_1 e_2^2 \alpha^2 y - e_1 \lambda_1 \alpha^2 e_2 y}{e_1} + \lambda_1 \alpha e_2 a + \lambda_1 \alpha e_2 b \right) \\
H''_u &= xy \left[\lambda_1 \alpha \beta x (e_1 - e_2) + \frac{\lambda_1 e_2 \alpha^2 y (e_2 - e_1)}{e_1} + \lambda_1 \alpha e_2 (a + b) \right] \\
H''_u &= xy \lambda_1 \alpha e_2 (a + b).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

No intervalo $I = [t_0, t_f]$, devemos ter $H''_u = 0$. Como x , y , e_2 , α , a e b são positivos, devemos ter $\lambda_1 = 0$. No entanto, isto é absurdo, pois o lado direito de (4.9) é positivo. Portanto, para que o controle singular exista, é necessário que $0 < e_2 < e_1$. Observamos que é possível escrever a função hamiltoniana definida em (4.2) na forma

$$H = u + \lambda_1 x(a - \alpha y) + \lambda_2 y(-b + \beta x) + u(-\lambda_1 e_1 x - \lambda_2 e_2 y). \tag{4.13}$$

A partir de (4.5), concluímos que $-\lambda_1 e_1 x - \lambda_2 e_2 y = -1$. Substituindo este resultado em (4.13), temos

$$H = \lambda_1 x(a - \alpha y) + \lambda_2 y(-b + \beta x).$$

Considerando $H = 0$ e utilizando (4.1), obtém-se

$$\begin{aligned}
\lambda_1 x(a - \alpha y) + \lambda_1 \left(\frac{e_2 \alpha}{e_1 \beta} \right) y(-b + \beta x) &= 0 \\
e_1 \beta x(a - \alpha y) + e_2 \alpha y(-b + \beta x) &= 0.
\end{aligned}$$

Para determinar o controle singular u^* , vamos substituir (4.1) em (4.10). Assim,

$$\begin{aligned}
H''_u &= xy \left[\lambda_1 \alpha e_1 \beta x - e_1 \beta \lambda_1 \left(\frac{e_2 \alpha}{e_1 \beta} \right) (-b + \beta x - e_2 u) \right. \\
&\quad \left. + \lambda_1 e_2 \alpha (a - \alpha y - e_1 u) + \lambda_1 \left(\frac{e_2 \alpha}{e_1 \beta} \right) e_2 \alpha \beta y \right].
\end{aligned}$$

Mais uma vez, admitindo que $H''_u = 0$, temos

$$\begin{aligned}
xy \left[\lambda_1 \alpha e_1 \beta x - \lambda_1 e_2 \alpha (-b + \beta x - e_2 u) + \lambda_1 e_2 \alpha (a - \alpha y - e_1 u) + \frac{\lambda_1 e_2^2 \alpha^2 y}{e_1} \right] &= 0 \\
xy \lambda_1 \alpha \left[e_1 \beta x - e_2 (-b + \beta x - e_2 u) + e_2 (a - \alpha y - e_1 u) + \frac{e_2^2 \alpha y}{e_1} \right] &= 0 \\
e_1^2 \beta x + e_2^2 \alpha y + e_1 e_2 [b - \beta x + a - \alpha y + u(e_2 - e_1)] &= 0 \\
e_1^2 \beta x + e_2^2 \alpha y + e_1 e_2 (e_2 - e_1) u + e_1 e_2 (b - \beta x + a - \alpha y) &= 0.
\end{aligned}$$

A partir de (4.14), podemos isolar u e escrever

$$u^* = \frac{e_1^2 \beta x + e_2^2 \alpha y}{e_1 e_2 (e_1 - e_2)} + \frac{(a - \alpha y) - (-b + \beta x)}{e_1 - e_2}. \quad (4.14)$$

Para analisar a dinâmica da população de predadores, vamos isolar y em (4.14).

Então

$$\begin{aligned} e_1 \beta x (a - \alpha y) + e_2 \alpha y (-b + \beta x) &= 0 \\ e_1 \beta x a - e_1 \beta x \alpha y + e_2 \alpha y \beta x - e_2 \alpha y b &= 0 \\ y (-e_1 \beta x \alpha + e_2 \alpha \beta x - e_2 \alpha b) &= -e_1 \beta x a \\ y &= \frac{e_1 \beta x a}{(e_1 - e_2) \alpha \beta x + e_2 \alpha b}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{e_1 a}{(e_1 - e_2) \alpha}. \quad (4.16)$$

Isto significa que, à medida que a população de presas cresce, a população de predadores tende assintoticamente para uma constante. Além disso, derivando (4.15) em relação a x , temos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{e_1 \beta a [(e_1 - e_2) \alpha \beta x - e_2 \alpha b] - e_1 \beta a x (e_1 - e_2) \alpha \beta}{[(e_1 - e_2) \alpha \beta x + e_2 \alpha b]^2} \\ y' &= \frac{e_1 e_2 \alpha \beta a b}{[(e_1 - e_2) \alpha \beta x + e_2 \alpha b]^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A partir de (4.16) e (4.17) concluímos que:

1. Se $x = 0$, y' atinge seu valor máximo;
2. Se x tende ao infinito, y' tende a zero. Portanto, se a população de presas é suficientemente grande, a taxa de crescimento da população de predadores é próxima de zero;
3. A população de predadores é limitada, de modo que $y < \frac{e_1 a}{(e_1 - e_2) \alpha}$.

Para verificar o que ocorre com ambas populações ao longo do tempo no intervalo $I = [t_0, t_f]$, vamos aplicar (4.14) em (4.1). Com relação à população de presas, temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy - e_1 ux \\ \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy - e_1 \left[\frac{e_1^2 \beta x + e_2^2 \alpha y}{e_1 e_2 (e_1 - e_2)} + \frac{(a - \alpha y) - (-b + \beta x)}{e_1 - e_2} \right] x \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{x [ae_2(e_1 - e_2) - \alpha e_2 y (e_1 - e_2) - e_1^2 \beta x - e_2^2 \alpha y - e_1 e_2 (a - \alpha y) + e_1 e_2 (-b + \beta x)]}{e_2 (e_1 - e_2)} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{x [e_1 e_2 (a - \alpha y) - e_1 e_2 (a - \alpha y) - e_2^2 a + e_2^2 \alpha y - e_1^2 \beta x - e_1 e_2 b + e_1 e_2 \beta x]}{e_2 (e_1 - e_2)} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{-x [e_2^2 a + e_1 \beta x (e_1 - e_2) + e_1 e_2 b]}{e_2 (e_1 - e_2)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

O lado direito de (4.18) é sempre negativo. Portanto, a população de presas é decrescente ao longo do tempo. Analogamente, substituindo (4.14) na segunda equação dada em (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy - e_2 uy \\
\frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy - e_2 \left[\frac{e_1^2 \beta x + e_2^2 \alpha y}{e_1 e_2 (e_1 - e_2)} + \frac{(a - \alpha y) - (-b + \beta x)}{e_1 - e_2} \right] y \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{y[-be_1(e_1 - e_2) + \beta x e_1(e_1 - e_2) - e_1^2 \beta x - e_2^2 \alpha y - e_1 e_2(a - \alpha y) + e_1 e_2(-b + \beta x)]}{e_1(e_1 - e_2)} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{y(-be_1^2 + be_1 e_2 - be_1 e_2 + \beta x e_1^2 - \beta x e_1^2 - \beta x e_1 e_2 + \beta x e_1 e_2 - e_2^2 \alpha y - e_1 e_2 a + e_1 e_2 \alpha y)}{e_1(e_1 - e_2)} \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{y}{e_1(e_1 - e_2)} [-e_1^2 b - e_1 e_2 a + e_2(e_1 - e_2) \alpha y]. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Como $y < \frac{e_1 a}{(e_1 - e_2) \alpha}$, temos que

$$-e_1^2 b - e_1 e_2 a + e_2(e_1 - e_2) \alpha y < -e_1^2 b - e_1 e_2 a + e_2(e_1 - e_2) \alpha \frac{e_1 a}{(e_1 - e_2) \alpha}$$

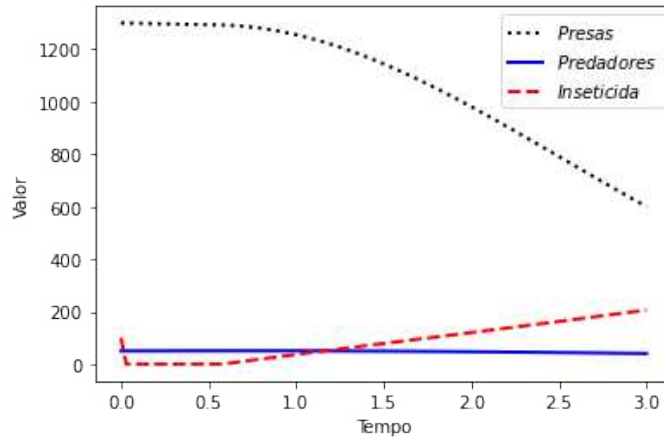
Ou seja,

$$-e_1^2 b - e_1 e_2 a + e_2(e_1 - e_2) \alpha y < -e_1^2 b. \tag{4.20}$$

Isto significa que o lado direito de (4.19) é sempre negativo. Consequentemente, a população de predadores é decrescente com o tempo.

A figura a seguir apresenta o gráfico de uma simulação numérica executada com a biblioteca GEKKO, disponível para a linguagem Python. Como parâmetros, tomamos $a = 0.04$; $\alpha = 0.001$; $e_1 = 0.003$; $b = 0.012$; $\beta = 0.00002$ e $e_2 = 0.001$. O intervalo de tempo $I = [0, 3]$ foi subdividido em cem partes de mesmo comprimento. As condições de contorno assumidas foram $x_0 = 1300$, $y_0 = 50$, $x_1 = \frac{b}{\beta} = 600$ e $y_1 = \frac{a}{\alpha} = 40$. Com relação à variável de controle, adotamos $0 \leq u \leq 1000$, com $u_0 = 100$. Os resultados obtidos na simulação indicam que, para atingir os objetivos propostos, aproximadamente 251,71 unidades de inseticida devem ser utilizadas ao longo do intervalo I .

Figura 13 – Simulação numérica para o modelo 1



Fonte: O autor

Para finalizar esta seção, ressaltamos que, em geral, a estratégia ideal de controle ótimo para este modelo pode exigir uma combinação do controle singular com controles constantes e iguais, respectivamente aos valores mínimo e máximo para a variável u . Os detalhes desta discussão são encontrados em (GOH; LEITMANN; VINCENT, 1974).

4.2 Minimizando pragas e predadores

Neste caso, nossa intenção é manipular uma população de pragas com a introdução de indivíduos predadores. Mais precisamente, ao final de um certo intervalo de tempo, desejamos minimizar ambas as populações. Vamos supor que, no total, deve ser utilizado uma quantidade mínima de predadores. Além disso, o número de predadores é limitado em cada instante de tempo. Com o intuito de tornar nosso modelo mais realista, admitimos que, na ausência de predadores, a população de pragas possui um crescimento logístico. Desta forma, a dinâmica do sistema é descrita pelas equações

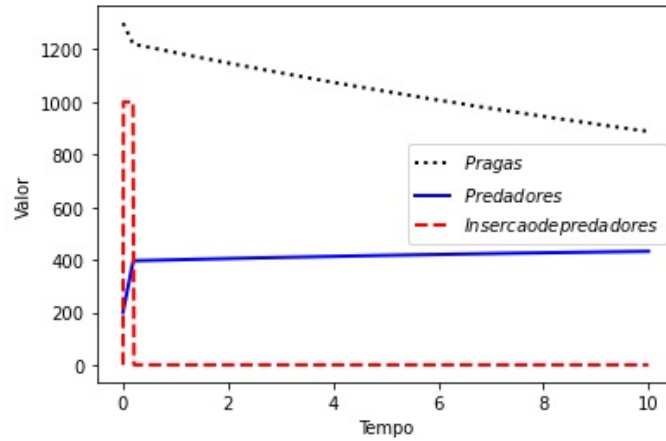
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha xy - e u x \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy + u, \end{cases} \quad (4.21)$$

em que $k > 0$ é a capacidade de suporte do meio, u é a taxa de inserção dos indivíduos predadores no sistema e e indica a eficiência segundo a qual a inserção de predadores contribui para eliminar as pragas. Os demais parâmetros e variáveis possuem os mesmos significados definidos no modelo clássico de Lotka - Volterra.

Nossa simulação numérica assume que as condições iniciais são $x(0) = 1300$, $y(0) = 200$. Adotamos a restrição $0 \leq u \leq 1000$ e os parâmetros $a = 0.03$; $\alpha = 0.0001$;

$k = 1500$; $e = 0.0003$; $b = 0.012$; $\beta = 0.00002$, $I = [0, 10]$, $x_0 = 1300$ e $y_0 = 200$. A figura a seguir apresenta o resultado gráfico obtido através da biblioteca GEKKO.²

Figura 14 – Simulação numérica para o modelo 2



Fonte: O autor

Conforme verificamos na figura acima, o valor mínimo para a população de pragas é aproximadamente igual a 900 e o valor mínimo para a população de predadores é aproximadamente 410.

Este capítulo apresenta um vislumbre das possibilidades de aplicação da Teoria do Controle Ótimo no estudo de sistemas biológicos. De acordo com (LENHART; WORKMAN, 2007), esta teoria é uma poderosa ferramenta matemática que pode ser usada para tomar decisões envolvendo uma ampla gama de situações complexas e pode contribuir significativamente para avanços em diversos campos da Ciência.

² Código disponível nos apêndices deste trabalho.

5 Considerações Finais

Este trabalho teve por objetivo aplicar conceitos de equações diferenciais ordinárias e elementos da teoria do controle ótimo para estudar alguns modelos presa-predador bidimensionais. Os resultados obtidos indicaram que a utilização de ferramentas matemáticas e computacionais pode contribuir com a descrição e compreensão de certos fenômenos naturais complexos.

Dentre as limitações do estudo, destacamos a não utilização de parâmetros reais para os modelos estudados. A ausência de tais parâmetros motivou a realização de simulações numéricas, cuja finalidade foi ilustrar o comportamento quantitativo dos modelos. Como sugestão para trabalhos futuros, indicamos a construção e análise de modelos matemáticos que incluam parâmetros provenientes de situações reais.

Por fim, desejamos que o presente trabalho possa motivar mais estudos sobre os temas aqui abordados.

Referências

- BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. [S.l.]: Editora Harbra, 1988. Citado 7 vezes nas páginas 16, 17, 43, 44, 45, 52 e 63.
- BEAL, L.; HILL, D.; MARTIN, R.; HEDENGREN, J. Gekko optimization suite. *Processes*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 6, n. 8, p. 106, 2018. Citado na página 39.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEAD, D. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2020. v. 11. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 20, 21 e 22.
- BRAUER, F.; KRIBS, C. *Dynamical systems for biological modeling*. [S.l.]: CRC press, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 62.
- BRAUN, M. *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*. 4. ed. [S.l.]: Springer, 1993. Citado 5 vezes nas páginas 16, 40, 49, 50 e 58.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. [S.l.]: IMPA, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 16, 18, 19 e 20.
- EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. [S.l.]: SIAM, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 15, 49, 50, 51 e 52.
- FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.
- GOH, B. S.; LEITMANN, G.; VINCENT, T. L. Optimal control of a prey-predator system. *Mathematical Biosciences*, Elsevier, v. 19, n. 3-4, p. 263-286, 1974. Citado 5 vezes nas páginas 15, 63, 64, 65 e 70.
- GOTELLI, N. J. *Ecologia*. [S.l.]: Editora Planta, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 41, 49, 51 e 52.
- KAMIEN, M. I.; SCHWARTZ, N. L. *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. 2. ed. [S.l.]: courier corporation, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 23, 26, 29, 33, 36 e 63.
- KIRK, D. E. *Optimal control theory: an introduction*. [S.l.]: Courier Corporation, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 14, 23, 24, 34 e 63.
- LENHART, S.; WORKMAN, J. T. *Optimal control applied to biological models*. [S.l.]: CRC press, 2007. Citado 10 vezes nas páginas 23, 26, 28, 33, 35, 36, 38, 39, 63 e 71.
- MURRAY, J. D. *Mathematical biology: I. An introduction*. [S.l.]: Springer, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- SANTOS, V. M. P. dos. *Sistema presa-predador generalizado*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 1989. Citado na página 52.

SIMMONS, G. F. *Differential equations with applications and historical notes*. [S.l.]: CRC Press, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.

SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias (Vol. 11)*. [S.l.: s.n.], 1979. Citado na página 22.

STEWART, J. *Cálculo, volume 2*. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. Citado na página 24.

Apêndices

APÊNDICE A – Código em Mathematica para construção do retrato de fase e simulação numérica do modelo de Lotka-Volterra

Código-fonte 1 – Lotka-Volterra

```

1 {xsol, ysol} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.04*x[t] - 0.001*x[t]
   ]*y[t], y'[t] == -0.012*y[t] + 0.00002*x[t]*y[t], x[0] ==
   400, y[0] == 30}, {x, y}, {t, 0, 500}];
2 g1 = ParametricPlot[{xsol[t], ysol[t]} , {t, 0, 500},
   PlotStyle -> {Red, Thick}, PlotRange -> {{0, 2500}, {0,
   100}}, AspectRatio -> 1];
3 {xsol1, ysol1} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.04*x[t] - 0.001*x[t]
   ]*y[t], y'[t] == -0.012*y[t] + 0.00002*x[t]*y[t], x[0] ==
   700, y[0] == 50}, {x, y}, {t, 0, 500}];
4 g2 = ParametricPlot[{xsol1[t], ysol1[t]} , {t, 0, 500},
   PlotStyle -> {Orange, Thick}, PlotRange -> {{0, 2500}, {0,
   100}}, AspectRatio -> 1];
5 {xsol2, ysol2} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.04*x[t] - 0.001*x[t]
   ]*y[t], y'[t] == -0.012*y[t] + 0.00002*x[t]*y[t], x[0] ==
   800, y[0] == 60}, {x, y}, {t, 0, 500}];
6 g3 = ParametricPlot[{xsol2[t], ysol2[t]} , {t, 0, 500},
   PlotStyle -> {Blue, Thick}, PlotRange -> {{0, 2500}, {0,
   100}}, AspectRatio -> 1];
7 {xsol3, ysol3} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.04*x[t] - 0.001*x[t]
   ]*y[t], y'[t] == -0.012*y[t] + 0.00002*x[t]*y[t], x[0] ==
   950, y[0] == 70}, {x, y}, {t, 0, 500}];
8 g4 = ParametricPlot[{xsol3[t], ysol3[t]} , {t, 0, 500},
   PlotStyle -> {Green, Thick}, PlotRange -> {{0, 2500}, {0,
   100}}, AspectRatio -> 1];
9 dir = VectorPlot[{0.04*x - 0.001 x*y, -0.012 y + 0.00002 x*y
   }, {x, 0, 2500}, {y, 0, 100}, PlotRange -> {{0, 2500},
   {0, 100}}, VectorStyle -> {Black, Arrowheads[0]},
   PlotRange -> {{0, 2500}, {0, 100}}, VectorPoints -> 18,
   Axes -> True, AxesLabel -> {"x(t)", "y(t)"}, AspectRatio
   -> 1];

```

```
10 Show[g1, g2, g3, g4, dir, AxesLabel -> {Style["Presas",  
    FontSize -> 15], Style["Predadores", FontSize -> 15]},  
    AspectRatio -> 1]  
11 Plot[{xsol2[t], ysol2[t]}, {t, 0, 500}, PlotLabels -> {"  
    Presas", "Predadores"}, LabelStyle -> Large,  
12 ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1]
```

APÊNDICE B – Código em Mathematica para construção do retrato de fase e simulação numérica do modelo com competição intraespecífica entre as presas

Código-fonte 2 – competicao-presas

```

1 {xsol, ysol} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.08*x[t] (1 - x[t]
    ]/5000) - 0.001*x[t]*y[t], y'[t] == -0.02*y[t] + 0.00002*x[
    t]*y[t], x[0] == 1000, y[0] == 40}, {x, y}, {t, 0, 500}];
2 g1 = ParametricPlot[{xsol[t], ysol[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Red, Thick}, PlotRange -> {{600, 2500}, {0,
    100}}, AspectRatio -> 1];
3 {xsol1, ysol1} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.08*x[t] (1 - x[t]
    ]/5000) - 0.001*x[t]*y[t],
4     y'[t] == -0.02*y[t] + 0.00002*x[t]*y[t], x[0] == 1200, y
    [0] == 30}, {x, y}, {t, 0, 500}];
5 g2 = ParametricPlot[{xsol1[t], ysol1[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Orange, Thick},
6     PlotRange -> {{600, 2500}, {0, 100}}, AspectRatio -> 1];
7 {xsol2, ysol2} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.08*x[t] (1 - x[t]
    ]/5000) - 0.001*x[t]*y[t],
8     y'[t] == -0.02*y[t] + 0.00002*x[t]*y[t], x[0] == 900, y
    [0] == 20}, {x, y}, {t, 0, 500}];
9 g3 = ParametricPlot[{xsol2[t], ysol2[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Blue, Thick}, PlotRange -> {{600, 2500}, {0,
    100}}, AspectRatio -> 1];
10 {xsol3, ysol3} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.08*x[t] (1 - x[t]
    ]/5000) - 0.001*x[t]*y[t],
11     y'[t] == -0.02*y[t] + 0.00002*x[t]*y[t], x[0] == 850, y
    [0] == 50}, {x, y}, {t, 0, 500}];
12 g4 = ParametricPlot[{xsol3[t], ysol3[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Green, Thick}, PlotRange -> {{600, 2500},
    {0, 100}}, AspectRatio -> 1];
13 dir = VectorPlot[{0.08*x (1 - x/5000) - 0.001 x*y, -0.02 y +

```

```

0.00002 x*y}, {x, 0, 2500}, {y, 0, 100},
14   PlotRange -> {{0, 2500}, {0, 100}}, VectorStyle -> {Black
    , Arrowheads[0]}, PlotRange -> {{0, 2500}, {0, 100}},
    VectorPoints -> 18, Axes -> True, AxesLabel -> {"x(t)",
    "y(t)"}, AspectRatio -> 1];
15 Show[g1, g2, g3, g4, dir, AxesLabel -> {Style["Presas",
    FontSize -> 15], Style["Predadores", FontSize -> 15]},
    AspectRatio -> 1]
16 Plot[{xsol2[t], ysol2[t]}, {t, 0, 500}, PlotLabels -> {"
    Presas", "Predadores"}, ImageSize -> Large,
17 LabelStyle -> Large, AspectRatio -> 1]

```

APÊNDICE C – Código em Mathematica para construção do retrato de fase e simulação numérica do modelo com competição entre ambas as populações

Código-fonte 3 – competicao-populacoes

```

1 {xsol, ysol} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.06*x[t] (1 - x[t]
    ]/6000) - 0.001*x[t]*y[t], y'[t] == -0.015*y[t] -
    0.000005*y[t]*y[t] + 0.000018*x[t]*y[t], x[0] == 1000, y
    [0] == 40}, {x, y}, {t, 0, 500}];
2 g1 = ParametricPlot[{xsol[t], ysol[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Red, Thick}, PlotRange -> {{0, 2700}, {10,
    100}}, AspectRatio -> 1];
3 {xsol1, ysol1} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.06*x[t] (1 - x[t]
    ]/6000) - 0.001*x[t]*y[t], y'[t] == -0.015*y[t] -
    0.000005*y[t]*y[t] + 0.000018*x[t]*y[t], x[0] == 800, y[0]
    == 30}, {x, y}, {t, 0, 500}];
4 g2 = ParametricPlot[{xsol1[t], ysol1[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Orange, Thick}, PlotRange -> {{0, 2700},
    {10, 100}}, AspectRatio -> 1];
5 {xsol2, ysol2} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.06*x[t] (1 - x[t]
    ]/6000) - 0.001*x[t]*y[t], y'[t] == -0.015*y[t] -
    0.000005*y[t]*y[t] + 0.000018*x[t]*y[t], x[0] == 600, y[0]
    == 20}, {x, y}, {t, 0, 1500}];
6 g3 = ParametricPlot[{xsol2[t], ysol2[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Blue, Thick}, PlotRange -> {{0, 2700}, {10,
    100}}, AspectRatio -> 1];
7 {xsol3, ysol3} = NDSolveValue[{x'[t] == 0.06*x[t] (1 - x[t]
    ]/6000) - 0.001*x[t]*y[t], y'[t] == -0.015*y[t] -
    0.000005*y[t]*y[t] + 0.000018*x[t]*y[t], x[0] == 400, y
    [0] == 15}, {x, y}, {t, 0, 500}];
8 g4 = ParametricPlot[{xsol3[t], ysol3[t]} , {t, 0, 500},
    PlotStyle -> {Green, Thick}, PlotRange -> {{0, 2700}, {10,
    100}}, AspectRatio -> 1];

```

```

9  dir = VectorPlot[{0.06*x (1 - x/6000) - 0.001 x*y, -0.015*y -
    0.00005*y^2 + 0.000018*x*y}, {x, 0, 2700}, {y, 10, 100},
    PlotRange -> {{0, 2700}, {0, 100}}, VectorStyle -> {Black,
    Arrowheads[0]}, PlotRange -> {{0, 2700}, {10, 100}},
    VectorPoints -> 18, Axes -> True, AxesLabel -> {"x(t)", "y
    (t)"}, AspectRatio -> 1];
10 Show[g1, g2, g3, g4, dir, AxesLabel -> {Style["Presas",
    FontSize -> 15], Style["Predadores", FontSize -> 15]},
    AspectRatio -> 1]
11 Plot[{xsol2[t], ysol2[t]}, {t, 0, 1500}, PlotLabels -> {"
    Presas", "Predadores"}, ImageSize -> Large,
12 LabelStyle -> Large, AspectRatio -> 1]

```

APÊNDICE D – Código em Python para simulação numérica do modelo 1

Código-fonte 4 – Modelo 1

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from gekko import GEKKO
4 m = GEKKO(remote=False)
5 #Determinando o intervalo de tempo entre 0 e 3
6 nt = 101 #subdivisoes do intervalo de tempo
7 m.time = np.linspace(0,3,nt)
8 #Parametros internos para a variavel de controle
9 u = m.MV(value=0,lb=0,ub=1000) #valor inicial, valor minimo e
    valor maximo
10 u.STATUS = 1
11 u.DCOST = 0
12 #Variaveis de estado com valores iniciais
13 x1 = m.Var(value=1300)
14 x2 = m.Var(value=50)
15 x3 = m.Var(value=0)
16 #Atribuindo valor 1 para o final do intervalo de tempo
17 p = np.zeros(nt)
18 p[-1] = 1.0
19 final = m.Param(value=p)
20 #Parametros para as equacoes de estado
21 a = 0.04; alfa = 0.001; e1 = 0.003; b = 0.012; beta =
    0.00002; e2 = 0.001
22 #Equacoes de estado
23 m.Equation(x1.dt() == a*x1 - alfa*x1*x2 - e1*u*x1) #taxa de
    crescimento das presas
24 m.Equation(x2.dt() == -b*x2 + beta*x1*x2 - e2*u*x2) #taxa de
    crescimento dos predadores
25 m.Equation(x3.dt() == u)
26 #Definindo os valores finais para as populacoes
27 x1_final = b/(beta)
28 x2_final = a/(alfa)

```

```
29 m.Equation(final*(x1-x1_final)==0)
30 m.Equation(final*(x2-x2_final)==0)
31 #Definindo que a funcao objetivo deve minimizar a integral de
    u
32 m.Obj(x3*final)
33 #Definindo o modo de controle otimo e resolvendo o problema
34 m.options.IMODE = 6
35 m.solve()
36 #Exibindo o grafico da simulacao
37 plt.figure(1)
38 plt.plot(m.time,x1.value,'k:',lw=2,label=r'$Presas$')
39 plt.plot(m.time,x2.value,'b-',lw=2,label=r'$Predadores$')
40 plt.plot(m.time,u.value,'r--',lw=2,label=r'$Inseticida$')
41 plt.legend(loc='best')
42 plt.xlabel('Tempo')
43 plt.ylabel('Valor')
44 plt.show()
```

APÊNDICE E – Código em Python para simulação numérica do modelo 2

Código-fonte 5 – Modelo 2

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from gekko import GEKKO
4 m = GEKKO(remote=False)
5 #Determinando o intervalo de tempo entre 0 e 10
6 nt = 1001 #subdivisoes do intervalo de tempo
7 m.time = np.linspace(0,10,nt)
8 #Parametros internos para a variavel de controle
9 u = m.MV(value=0,lb=0,ub=1000) #valor inicial, valor minimo e
    valor maximo
10 u.STATUS = 1
11 u.DCOST = 0
12 #Variaveis de estado com valores iniciais
13 x1 = m.Var(value=1300)
14 x2 = m.Var(value=200)
15 #Atribuindo valor 1 para o final do intervalo de tempo
16 p = np.zeros(nt)
17 p[-1] = 1.0
18 final = m.Param(value=p)
19 #Parametros para as equacoes de estado
20 a = 0.03; alfa = 0.0001; k = 1500; e = 0.0003; b = 0.012;
    beta = 0.00002
21 #Equacoes de estado
22 m.Equation(x1.dt() == a*x1*(1 - x1/k) - alfa*x1*x2 - e*u*x1)
    #taxa de crescimento das pragas
23 m.Equation(x2.dt() == -b*x2 + beta*x1*x2 + u) #taxa de
    crescimento dos predadores
24 #Definindo a funcao objetivo
25 m.Obj(x1*final + x2*final) #minimizar a soma das populacoes no
    tempo final
26 #Definindo o modo de controle otimo e resolvendo o problema
27 m.options.IMODE = 6

```

```
28 m.solve()
29 #Exibindo o grafico da simulacao
30 plt.figure(1)
31 plt.plot(m.time,x1.value,'k:',lw=2,label=r'$Pragas$')
32 plt.plot(m.time,x2.value,'b-',lw=2,label=r'$Predadores$')
33 plt.plot(m.time,u.value,'r--',lw=2,label=r'$Insercao de
    predadores$')
34 plt.legend(loc='best')
35 plt.xlabel('Tempo')
36 plt.ylabel('Valor')
37 plt.show()
```