UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

WENDER DOS SANTOS LAGOIN

Sobre alguns problemas elípticos não-lineares com potenciais singulares e Laplaciano fracionário em espaços de modulação-Lorentz e Fourier-Besov

Campinas

2021

Wender dos Santos Lagoin

Sobre alguns problemas elípticos não-lineares com potenciais singulares e Laplaciano fracionário em espaços de modulação-Lorentz e Fourier-Besov

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Wender dos Santos Lagoin e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L137s Lagoin, Wender dos Santos, 1992-
Sobre alguns problemas elípticos não-lineares com potenciais singulares e laplaciano fracionário em espaços de modulação-Lorentz e Fourier-Besov / Wender dos Santos Lagoin. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações elípticas não-lineares. 2. Existência de solução (Equações diferenciais parciais). 3. Regularidade (Equações diferenciais parciais). 4. Espaços de modulação-Lorentz. 5. Espaços de Fourier-Besov. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On some nonlinear elliptic problems with singular potentials and fractional Laplacian in modulation-Lorentz and Fourier-Besov spaces
Palavras-chave em inglês:
Nonlinear elliptic equations
Existence of solution (Partial differential equations)
Regularity (Partial differential equations)
Modulation-Lorentz spaces
Fourier-Besov spaces
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]
Everaldo Souto de Medeiros
Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Marcelo Fernandes Furtado
Data de defesa: 10-09-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-1517-7437
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/4823369214449649

Tese de Doutorado defendida em 10 de setembro de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS

Prof(a). Dr(a). GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO

Prof(a). Dr(a). LIDIANE DOS SANTOS MONTEIRO LIMA

Prof(a). Dr(a). MARCELO FERNANDES FURTADO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais, Valderia e Antonio e aos meus amigos Fred e Murilo.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos membros da coordenação de pós-graduação, por ter me dado a oportunidade de realizar estes estudos de doutorado nesta prestigiosa instituição e com ótimas condições. Agradeço ao meu orientador Lucas C. F. Ferreira pelos seus conselhos e idéias não só para elaboração desta tese, mas também na vida acadêmica em geral. Agradeço aos meus colegas e amigos, pelo apoio durante esses quatro anos e principalmente ao meu companheiro Fred que me acompanha desde a graduação e sempre me ajudou em todos os aspectos da minha vida pessoal e acadêmica. Agradeço a minha família, dando destaque a minha mãe, pois sem ela não teria conseguido chegar ao final de mais essa etapa na minha carreira. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, e com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) mediante ao processo 155552/2019-8.

Resumo

Nesta tese de doutorado, inicialmente introduzimos os espaços de modulação-Lorentz e obtemos algumas propriedades algébricas, propriedades de inclusão com espaços clássicos, interpolação e ação de alguns operadores sobre tais espaços, com destaque para os operadores do tipo composição. Em seguida estudamos a existência e unicidade de soluções nesses espaços para uma classe de equações elípticas não-lineares em todo $\mathbb{R}^n$, onde as não-linearidades dependem da solução u e seu gradiente via a composição com uma função g. Exemplos de não-linearidades que vamos cobrir são u^ρ, $|u|^\rho$, $|\nabla u|^\rho$, entre outras funções de u satisfazendo condições em suas séries de potências ou do tipo Lipschitz. Em particular, valores grandes de ρ serão cobertos. Além disso, obtemos algumas propriedades para as soluções, isto é, dependendo dos dados, soluções podem ser distribuições homogêneas, radialmente simétricas ou positivas.

O segundo problema trata-se de um problema de fronteira no semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$ para uma classe de equações elípticas não-homogêneas com condições de fronteira não-lineares. Dentro do domínio há uma ação de uma não-linearidade que depende de derivadas fracionárias. Obtemos resultados de existência, unicidade, regularidade e simetria via uma abordagem não-variacional que consiste em um argumento de contração em espaços do tipo Chamin-Lerner definidos a partir dos espaços de Fourier-Besov e espaços fracionários do tipo Fourier-Sobolev. Assim, os resultados fornecem uma nova escala de espaços no contexto de EDPs elípticas, a qual nos leva a novas classes de soluções, potenciais e termos forçantes, bem como cobrem potências super-críticas na fronteira e no interior do domínio.

Palavras-chave: Equações elípticas não-lineares; Existência de solução (Equações diferenciais parciais); Regularidade (Equações diferenciais parciais); Espaços de modulação-Lorentz; Espaços de Fourier-Besov.

Abstract

In this doctoral thesis, we introduce the modulation-Lorentz spaces and give some algebraic properties, inclusions with classic spaces, interpolation and the action of some operators on those spaces, with emphasis on composition-type operators. Then we study the existence and uniqueness of solutions in those spaces to a class of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, where the nonlinearities depend on the solution u and its gradient via the composition with a function g. Examples of nonlinearities that we are going to cover are u^ρ, $|u|^\rho$, $|\nabla u|^\rho$, among other functions of u (and its gradient) satisfying conditions in their power series or of Lipschitz-type. In particular, large values of ρ are covered by results. Moreover, we obtain some properties of the solution, that is, it can be an homogeneous, radially symmetric or positive distribution, depending on the data.

The second problem considered by us is a boundary value problem in the half-space $\mathbb{R}^n_+$ for a class of nonhomogeneous elliptic equations with nonlinear boundary conditions. Within the domain there is an action of a nonlinearity that depends on fractional derivatives. We obtain results on existence, uniqueness, regularity and symmetry via a non-variational approach that consists in an argument of contraction in spaces of Chamin-Lerner based on spaces of Fourier-Besov and fractional Fourier-Sobolev types. Thus, the results provide a new scale of spaces in the context of elliptic PDEs, which leads us to new classes of solutions, potentials and forcing terms, as well as cover super-critical powers on the boundary and interior of the domain.

Keywords : Nonlinear elliptic equations; Existence of solution (Partial differential equations); Regularity (Partial differential equations); Modulation-Lorentz spaces; Fourier-Besov spaces.

Lista de símbolos

L^p	Espaço de Lebesgue
$\|\cdot\|_p$	Norma dos espaços de Lebesgue L^p
$L^{(p,\infty)}$	Espaços L^p-fracos
$\|\cdot\|_{p,\infty}$	Norma dos espaços L^p-fracos
$L^{(p,r)}$	Espaço de Lorentz
$\|\cdot\|_{(p,r)}$	Norma dos espaços de Lorentz $L^{(p,r)}$
l^p	Espaço das sequências de número reais
$\|\cdot\|_{l^p}$	Norma do espaço das sêquencias de números reais l^p
$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier
$\mathcal{S}$	Classe de Schwartz
$\mathcal{S}'$	Espaço das distribuições temperadas
$suppf$	Suporte da função f
$B^s_{q,\sigma}$	Espaços de Besov
$\|\cdot\|_{B^s_{q,\sigma}}$	Norma dos espaços de Besov
$M^{p,r}_{q,s}$	Espaços de modulação-Lorentz
$\|\cdot\|_{M^{p,r}_{q,s}}$	Norma dos espaços de modulação-Lorentz
$FB^s_{p,q}$	Espaços de Fourier-Besov
$\|\cdot\|_{FB^s_{p,q}}$	Norma dos espaços de Fourier-Besov
$(-\triangle)^{\frac{z}{2}}$	Laplaciano Fracionário
$C^{N,loc}(\mathbb{R})$	Espaço das funções localmente Holder Contínuas até ordem N

Sumário

Introdução

O estudo de equações diferenciais parciais elípticas e de problemas elípticos com condições de fronteira não-lineares são amplamente estudados devido ao seu grande interesse matemático em si e a suas aplicações em várias áreas da ciência. Esta classe de equações tem sido abordada por meio de diferentes técnicas, por exemplo, mencionamos os métodos variacionais que tem um papel histórico de destaque (veja, e.g., [43, 48, 55]).

Nesta tese, estudaremos dois problemas elípticos não-lineares não-homogêneos sendo um definido em todo o espaço $\mathbb{R}^n$ e outro um problema de valor de fronteira (P.V.F.) no semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Pontuando em uma perspectiva geral, utilizaremos uma abordagem não-variacional onde o estudo de existência e propriedades qualitativas são realizados com base na seguinte tríade: formulação integral baseada nas correspondentes funções de Green; espaços funcionais críticos; e argumentos de contração. Tal tipo de abordagem foi utilizada em [16], [25] e [26] para estudar soluções de certas classes de problemas elípticos não-homogêneas em todo o espaço $\mathbb{R}^n$.

Para problemas de valor de fronteira (P.V.F.), este tipo de abordagem foi utilizada em [23] para obter existência e unicidade para a equação de Laplace no semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$ com uma condição de contorno de Robin super-crítica (em relação a métodos variacionais). Em [12, 13], para estudar P.V.F. não-homogêneos em $\mathbb{R}^n_+$ do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = A_1 u^\rho + V_1 u & , \text{ em } \mathbb{R}^n_+ \\ B_1 \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + B_2 u = g(x') + V_2(x')u + A_2 u^q & , \text{ em } \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{1}$$

os autores consideraram os espaços $PM^a = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), ess \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{u}(\xi)| < +\infty\}$ e utilizaram a transformada de Fourier nas $n-1$ primeiras variáveis para desenvolver uma formulação integral equivalente do problema. Aqui, inspirado por [12, 13], vamos utilizar esse argumento para obter uma formulação integral para o P.V.F. que estudaremos.

Em nosso primeiro problema, consideramos a seguinte classe de equações elípticas não-lineares

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = V(x)u + g(u, \nabla u) + f \text{ , em } \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

onde $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ é o Laplaciano fracionário, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo certas condições e que indica o perfil não-linear de (2), e o potencial V e o termo forçante f são dados que podem ser funções singulares, por exemplo, singularidades de *power-type*.

Inicialmente iremos estudar funções g dependentes apenas de u, porém iremos também considerar casos de (2) com g dependendo de ∇u. Alguns exemplos de não-linearidades que iremos tratar são u^ρ, $u|u|^{\rho-1}$, $|u|^\rho$ e $|\nabla u|^\rho$ e funções $g(u)$ satisfazendo

$g(0) = 0$ e certas condições em suas séries de potências, ou um certo tipo de regularidade no espírito Lipschitz. Em particular, valores grandes de ρ serão cobertos.

No estudo de (2), introduzimos um tipo de espaço de modulação baseado na norma dos espaços de Lorentz, a saber os espaços de modulação-Lorentz (inspirados naqueles espaços de Feichtinger [21]), detalhes mais abaixo), que denotaremos por $M^{p,r}_{q,s}$. Esses espaços nos permitem considerar potenciais V e termos forçantes f singulares e obter propriedades para as soluções como invariância sobre rotações e positividade, desde que tenhamos f e V com as mesmas propriedades.

Espaços de modulação foram inicialmente introduzidos por Feichtinger em [21], assumindo integrabilidade para a transformada de Fourier de distribuições temperadas. Seu apelo é devido ao fato de que eles podem efetivamente capturar a concentração de uma distribuição de tempo-frequência. Os espaços de modulação são baseados nos espaços de Lebesgue ou Fourier-Lebesgue, porém eles são mais flexisíveis na medida em que permitem um controle separado da regularidade local e do decaimento no infinito de uma função, para mais detalhes veja [22, 32]. Os espaços de modulação $M^s_{p,q}$ são um caso particular dos espaços de modulação-Lorentz quando $p = r$ e mostraremos que várias de suas propriedades básicas também são válidas para $M^{p,r}_{q,s}$ com os ajustes necessários.

Para $\alpha = 2$, $f = 0$ e não-linearidades do tipo $u|u|^{\rho-1}$ em (2), temos a equação

$$-\Delta u = V(x)u + u|u|^{\rho-1} \text{ , em } \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

a qual tem sido abordada em vários trabalhos, em diferentes tipos de domínios, principalmente usando-se espaços de Sobolev e uma abordagem variacional, os quais levam a restrição $1 < \rho \leqslant \frac{n+2}{n-2}$; veja, por exemplo, [3, 17–19] (e suas referências) onde os autores consideram potenciais do tipo Hardy.

Para $1 < \rho < \infty$ com $\rho \neq \frac{n+2}{n-2}$, se considerarmos $V = 0$ em (3), usando identidades do tipo Pohozaev mostra-se que a equação não possui soluções positivas em $H^1(\mathbb{R}^n)$ (ver [15, pág. 514]). Quando considera-se o caso crítico variacional, isto é, $\rho = \frac{n+2}{n-2}$ existem soluções positivas em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ para $n \geqslant 3$ e nos casos $n = 3, 4$ essas soluções não pertencem a $H^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, em domínios suaves limitados e estrelados temos a existência de soluções positivas em H^1 se, e somente se, ρ é subcrítico $1 < \rho < \frac{n+2}{n-2}$. Esses resultados motivam o estudo da equação não-homogênea (2) que cubram em particular potências super-críticas. De fato, obtemos resultados para (2) em todo *range* $2 \leqslant \rho < \infty$ e, mais geralmente, para não-linearidades $g(u)$ podendo ter diversos tipos de crescimento, tais como, crescimentos exponenciais.

Em [16], os autores estudaram a equação não-homogênea

$$\mathcal{L}u = u^\rho + V(x)u + f(x) \text{ , em } \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

onde $\mathcal{L}$ pode ser uma classe ampla de operadores do tipo multiplicadores de Fourier. Exemplos do operador $\mathcal{L}$ são o menos Laplaciano, biharmônico e operadores de ordem fracionária. Eles consideraram (4) em espaços de pseudomedidas PM^a, assumiram ρ inteiro com $\rho > \dfrac{n}{n-m}$, onde m é a ordem do operador $\mathcal{L}$, e cobriram casos em que f e V têm infinitas singularidades, mudam de sinal, oscilam no infinito e são medidas. Por sua vez, em [26], estudou-se a existência de soluções para a equação

$$-\Delta u = u|u|^{\rho-1} + V(x)u + f(x) \text{ , em } \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$u \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty,$$

com $n \geqslant 3$ e $\rho > \dfrac{n}{n-2}$, nos espaços $H_k = \{u \text{ mensurável } : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^k|u(x)| < \infty\}$. Os espaços PM^a, H_k e os espaços de modulação-Lorentz não possuem uma relação de inclusão, o que nos permite considerar classes de V e f diferentes daquelas em [16, 26].

Em conexão com o problema (2), a presença de termos não-lineares envolvendo o gradiente introduz novas dificuldades quando combinados com domínios ilimitados, pois impedem o uso de várias técnicas tais como teoria de Leray-Schauder, métodos variacionais, argumentos de compacidade, teorema do ponto fixo de Banach em espaços de Sobolev, entre outras técnicas e argumentos. Em [51], usando um argumento de sub-super solução combinado com um de perturbação, os autores mostraram existência de soluções inteiras para o problema

$$-\Delta u + h(x)|\nabla u|^{\rho} = b(x)g(u) \text{ , } u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

onde $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ e $\rho \in [1, 2)$, em um espaço de funções localmente Holder contínuas. Como observado em [11] e [34], frequentemente, o uso de técnicas baseadas em princípios do máximo requerem que a não-linearidade g cresça no máximo quadraticamente com relação ao gradiente. Por exemplo, tal restrição aparece nos trabalhos [2, 6, 14, 39] mas foi contornada em [40] para o caso de uma equação logística com $|\nabla u|^{\rho}$, $\rho > 1$, em domínios limitados, combinando métodos de bifurcação e C^1-estimativas a *priori*. Para mais resultados sobre problemas elípticos com não-linearidades envolvendo o gradiente, veja [29, 52] e suas referências. Em nossos resultados, além de abordar (2) via um argumento de contração e o *framework* dos espaços de modulação-Lorentz, conseguimos cobrir o caso $\alpha = 2$ com não-linearidades $|\nabla u|^{\rho}$ para $2 \leqslant \rho < \infty$, veja (3.19) e Teorema 3.18, página 95.

Em nosso segundo problema, consideramos a classe de equações elípticas não-lineares com condições de contorno de Neumann não-lineares

$$\begin{cases} -\Delta u = K_1(\partial^{\beta} u)^a & \text{, em } \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = V(x')u + K_2 u^b + f(x') & \text{, em } \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{6}$$

onde u é definida em $\mathbb{R}^n_+$, vamos indicar $u = u(x', x_n)$ com $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n > 0$, $n \geqslant 3$, η é o vertor normal exterior a fronteira de $\mathbb{R}^n_+$, K_1, K_2 são constantes e ∂^{β} é definido a partir da transformada de Fourier nas $n-1$ primeiras váriáveis como

$$(\partial^\beta u)^\wedge(x',x_n) = (2\pi|x'|)^\beta(\widehat{u})(x',x_n).$$

Analisaremos a existência e unicidade de soluções para (6) em um espaço do tipo Chamin-Lerner baseado nos espaços de Fourier-Besov. Aqui investigaremos também a regularidade da solução obtida, e buscaremos condições para que a solução obtida pertença a certos espaços de Fourier-Sobolev $H^{1,s}$, o que naturalmente fornecerá mais regularidade para a solução. Provaremos também que a solução obtida possui a propriedade de invariância em relação a rotações em torno do eixo $\{x_n = 0\}$. Cabe também pontuar que trocando a condição de fronteira de Neumann pela condição de fronteira de Robin podemos, atráves do mesmo método, provar a existência e unicidade de solução do problema (6). Os espaços de Fourier-Besov, bem como algumas de suas extensões (e.g., espaços de Fourier-Besov-Morrey), têm sido utilizados na análise de alguns modelos em dinâmica dos fluídos e equações parabólicas (veja, e.g., [4, 27, 35, 36, 38, 41] e suas referências).

Como mostrado em [35], os espaços de Fourier-Besov $FB^a_{p,q}$ são equivalentes aos espaços PM^a quando tomamos $p = q = \infty$. Note também que o P.V.F. (6) com $\beta = 0$ é equivalente ao P.V.F. (1) com $V_1 = 0$. Então, nessas condições nossos resultados estendem aqueles de [13] e cobrem novas classes de potenciais e termos forçantes.

Problemas envolvendo potenciais e não-linearidades tanto na fronteira quanto dentro do domínio vem sendo amplamente estudados. Por exemplo, em [10], os autores estudaram o P.V.F.

$$\begin{cases} -\Delta u = au^\rho & , \text{ em } \mathbb{R}^n_+ \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = bu^q & , \text{ em } \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{7}$$

onde $n \geqslant 3, a \geqslant 0, b \geqslant 0, \rho = \dfrac{(n+2)}{(n-2)}$ e $q = \dfrac{n}{(n-2)}$, e descreveram todas as soluções não-triviais e não-negativas. Para o caso $b = 0$ e $1 < q < \dfrac{n}{n-2}$, Hu em [33] provou que (7) não possui soluções clássicas não-negativas. Em [23] os autores abordaram o P.V.F.

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & , \text{ em } \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = u|u|^{\rho-1} + f(x) & , \text{ em } \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{8}$$

onde através de argumentos de ponto fixo nos espaços $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap L^q(\mathbb{R}^n_+)$ foi mostrada a existência de solução e propriedades como positividade, homogeneidade e invariância em relação a rotações em torno do eixo $\{x_n = 0\}$, dependendo das propriedades de f. Em [1], de Almeida e Lima estenderam os resultados de [23] para o *framework* dos espaços de *weak*-Morrey.

Em comparação com a literatura existente, consideramos um problema em $\mathbb{R}^n_+$ com uma não-linearidade envolvendo uma derivada fracionária e obtemos uma teoria de existência e unicidade em uma nova escala de espaço no contexto de EDPs elípticas, os quais carregam uma noção diferente de regularidade. Além disso, os resultados fornecem novas classes de soluções, potenciais e termos forçantes, bem como cobrem casos de potências super-críticas na fronteira e (quando $\beta = 0$) no interior.

Esta tese está organizada como segue. O Capítulo 1 é composto por preliminares contendo definições, conceitos e alguns resultados prévios necessários ao desenvolvimento do texto. Nele são relembrados definições e notações de espaços de Lebesgue e algumas ferramentas básicas como a convolução e a transformada de Fourier. Apresentamos também as definições e propriedades dos espaços de Lorentz e L^p-fraco que são relevantes para o estudo dos espaços de modulação-Lorentz. Relembramos a classe de Schwartz a partir da qual pudemos definir e estudar propriedades das distribuições temperadas, do Laplaciano fracionário e dos multiplicadores de Fourier. São definidos também os espaços de Besov, usando a decomposição de Littlewood-Paley (Seção 1.7), que são úteis por sua relação com os espaços de modulação. Finalmente, na última seção são relembrados os espaços de Fourier-Besov, $FB^s_{p,q}$, a partir do qual definiremos o espaço que será utilizado para analisar o P.V.F. (6). Nesta mesma seção, apresentamos algumas propriedades dos espaços do tipo Fourier-Sobolev fracionário $H^{1,s}$, onde estudaremos a regularidade da solução.

O Capítulo 2 é dedicado à definição e estudo de propriedades dos espaços de modulação-Lorentz. Para definir esses espaços é necessário a definição de um operador de decomposição $\square_k$, usando a transformada de Fourier e uma partição da unidade obtida com translações de uma função suave. São provadas inclusões contínuas entre os próprios espaços de modulação-Lorentz, propriedades álgebricas do espaço e uma inclusão do tipo Sobolev (Seção 2.1). Em seguida, apresentamos estimativas para alguns operadores, tais como o operador convolução e o operador dilatação, e apresentamos um resultado de interpolação complexa para os espaços $M^{p,r}_{q,s}$ (Seção 2.2). Mostramos também a relação entre os espaços de modulação-Lorentz e alguns espaços clássicos como os espaços de Besov (Seção 2.3). Finalmente, na Seção 2.4, estudaremos a ação do operador composição $f \mapsto g(f)$ para dois casos, o primeiro para funções g pertencentes a classe $Lip\mu$ e o segundo para funções g que podem ser escritas como séries de potências. As estimativas obtidas nesta seção serão importantes para obter estimativas da formulação integral e então os resultados de existência e propriedades qualitativas de soluções de (2).

No Capítulo 3, apresentamos o estudo da equação (2). Iniciamos o capítulo fazendo uma análise de escalonamento para a equação (Seção 3.1). Em seguida, enunciamos dois resultados de existência e unicidade obtidos para (2), além disso mostramos que as soluções obtidas dependem continuamente dos dados f e V (Seção 3.2). Na Seção 3.3, apresentamos lemas com estimativas linerares e não-lineares nos espaços de modulação-Lorentz necessários para a demonstração dos resultados. De posse dessas estimativas, provamos os dois resultados mencionados acima (Seção 3.4). Para finalizar, nas duas últimas seções, são estudadas algumas propriedades das soluções obtidas e analisamos separadamente alguns casos particulares de (2) com não-linearidades g de interesse no estudo de EDP's elípticas não-lineares.

Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos a análise do P.V.F. (6). Inicialmente utilizando a transformada de Fourier, obtemos uma formulação funcional para (6), bem como definimos e obtemos algumas propriedades dos espaços do tipo Chemin-Lerner $\mathcal{L}_d^r FB_{p,q}^s$. Na Seção 4.1, apresentamos a análise de escalonamento para (6). Em seguida, enunciamos os resultados de existência, unicidade e regularidade. Para o estudo da regularidade definimos o espaço $\mathcal{H}_d^{1,s}$ (Seção 4.2). Em seguida, provamos algumas estimativas preliminares nos espaços $\mathcal{L}_d^r FB_{p,q}^s$ e $\mathcal{H}_d^{1,s}$ (Seção 4.3). Nas duas últimas seções, apresentamos as demonstrações dos primeiros resultados enunciados e um resultado de simetria axial.

1 Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns espaços de funções e propriedades básicas que serão importantes na demonstração dos resultados principais dessa tese. A teoria desenvolvida nesse capítulo foi tirada principalmente de [49] e [31] que podem ser consultados para mais detalhes. Outras bibliografias que foram utilizadas serão citadas em cada uma das seções.

1.1 Espaços L^p, a Transformada de Fourier e as funções Beta e Gamma

Várias propriedades de funções podem ser estudadas a partir da integrabilidade. Por isso é importante estudar os espaços de Lebesgue, o qual denotamos por L^p, que é formado por funções cujo módulo elevado a p é integrável. Nesta seção daremos a definição formal dos espaços e enunciaremos algumas propriedades.

Definição 1.1. *Seja $(X, \mathbb{M}, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p \leqslant \infty$. O espaço $L^p = L^p(X, \mathbb{M}, \mu)$ é o conjunto de todas as classes de μ-equivalência de funções reais $\mathbb{M}$-mensuráveis f tais que $|f|^p$ é integrável com relação a μ sobre X. Em L^p definimos*

$$\| f \|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \ se \ 0 < p < \infty$$

e

$$\| f \|_\infty = ess\ sup|f| = \inf\{a \geqslant 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > a\}) = 0\} \ , \ se \ p = \infty.$$

Exemplo 1.2. *Seja $X = \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{M} = \wp(\mathbb{Z}^n)$ o conjunto das partes de $\mathbb{Z}^n$ e μ a medida da contagem definida a seguir. Se $E \in \mathbb{M}$ então $\mu(E)$ é o número de elementos de E, caso E seja finito, e $\mu(E) = \infty$ se E é infinito.*

Assim, para $0 < p < \infty$ obtemos o espaço $L^p(\mathbb{Z}^n, \mathbb{M}, \mu)$, o qual denotaremos por $l^p(\mathbb{Z}^n)$, que nada mais é que o espaço de sequências $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ de números reais com índices em $\mathbb{Z}^n$, tais que a norma

$$\| \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \|_{l^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é finita.

Por simplicidade denotaremos $l^p(\mathbb{Z}^n)$ apenas por l^p.

Observação 1.3. *Nesse trabalho vamos sempre usar $X = \mathbb{R}^n$, μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{M}$ a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveise e por simplicidade denotaremos o espaço $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{M}, \mu)$ por L^p.*

A seguir enunciaremos algumas propriedades dos espaços L^p.

Proposição 1.4. *(i)(Desigualde de Holder) Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e vale a seguinte desigualdade*

$$\| fg \|_1 \leqslant \| f \|_p \| g \|_q .$$

(ii)(Desigualdade de Minkowski) Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Se $f, g \in L^p$ então $f + g \in L^p$ e vale

$$\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p .$$

Proposição 1.5. *(i) Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ então $f \star g$ é limitada e uniformemente contínua.*

(ii) Sejam $1 < p, q < \infty$, $f \in L^p$ e $g \in L^q$. Então $f \star g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

(iii)(Desigualdade de Young) Sejam $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ tais que

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ então $f \star g \in L^r$ e vale

$$\| f \star g \|_r \leqslant \| f \|_p \| g \|_q .$$

Definição 1.6. *Seja $\alpha > 0$. Definimos a função $K_\alpha : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}.$$

Proposição 1.7. *(Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para L^p) Sejam $1 < p, q < \infty$ e $0 < \alpha < n$ tais que $\alpha = n(1 - \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p})$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| K_\alpha \star f \|_p \leqslant C \| f \|_q,$$

para toda $f \in L^q$.

Apesar de a transformada de Fourier em $\mathbb{R}^n$ ser motivada pelas séries trigonométricas, trataremos aqui apenas o caso $\mathbb{R}^n$, ao invés de trabalhar com funções periódicas. Inicialmente definiremos o conceito para funções em L^1 e a partir daí podemos definir para espaços mais gerais.

Definição 1.8. *Seja $f \in L^1$. Definimos a transformada de Fourier de f, denotada por $\widehat{f}$ como*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx.$$

A proposição a seguir coleta uma série de propriedades básicas da transformada de Fourier. Em particular, observe sua relação com o operador de convolução e seu caráter especial de transformar diferenciação em multiplicação por polinômios.

Proposição 1.9. *Sejam $f, g \in L^1$. Valem as seguintes propriedades:*

(i) $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *e* $\| \widehat{f} \|_\infty \leqslant \| f \|_1$.

(ii) $(\tau_y f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i \xi y}\widehat{f}(\xi)$ *e* $\tau_\eta(\widehat{f})(x) = (e^{2\pi i \eta \xi} f)^\wedge(x)$.

(iii) $(f \star g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}$.

(iv) Se $x^\alpha f \in L^1$, *para* $|\alpha| \leqslant k$, *então* $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *e vale*

$$\partial^\alpha \widehat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]^\wedge \ ,$$

onde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ *e* $\partial^\alpha \widehat{f} = (\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}) \ldots (\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_n}})\widehat{f}$, *com* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup 0)^n$.

(v) Se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1$, $|\alpha| \leqslant k$, *e* $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Definição 1.10. *Definimos a transformada de Fourier inversa* $f^\vee$, *de uma função f por*

$$f^\vee(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \ .$$

Podemos extender a definição da transformada de Fouirer para os espaços L^p, onde relembramos uma desigualdade importante a qual enunciaremos a seguir.

Proposição 1.11. *(Desigualdade de Hausdorff - Young). Se* $f \in L^p$ *com* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *temos que*

$$\| \widehat{f} \|_{p'} \leqslant \| f \|_p \ .$$

Para finalizar essa seção iremos dar uma breve definição das funções Beta e da função Gamma.

Definição 1.12. *(i) Para um número complexo z com parte real positiva definimos a função Gamma por*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

(ii) Dados z, w *números complexos com parte real positiva, definimos a função Beta por*

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt.$$

Observação 1.13. *A função* Γ *é analítica no semiplano* $Re(z) > 0$ *e vale:*

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

1.2 Espaços L^p-fraco

Nesta seção vamos introduzir os espaços L^p-fracos e dar algumas de suas propriedades e relações com os espaços de lebesgue. Para mais informações e demonstrações ver [42].

Definição 1.14. *Sejam (X, A, μ) um espaço de medida e f uma função A-mensurável em X. A função distribuição, D_f, da função f, é definida por*

$$D_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\},$$

para todo $\lambda \geqslant 0$

Lema 1.15. *Seja (X, A, μ) um espaço de medida e f uma função A-mensurável satisfazendo*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \leqslant (\frac{C}{\lambda})^p,$$

para algum $C > 0$. Então

$$\inf\{C > 0 : D_f(\lambda) \leqslant (\frac{C}{\lambda})^p\} = \sup_{\lambda>0} \lambda(D_f(\lambda))^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.16. *Seja $0 < p < \infty$. O espaço de Lebesgue fraco, denotado por $L^{(p,\infty)}(X, A, \mu)$ ou simplesmente $L^{(p,\infty)}(X)$, é definido pelo conjunto de todas as funções mensuráveis f tais que*

$$\| f \|_{L^{(p,\infty)}} = \| f \|_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda(D_f(\lambda))^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Observação 1.17. *(i) O Lema acima nos da duas normas equivalentes para o espaço $L^{(p,\infty)}$.*

(ii) Quando $X = \mathbb{R}^n$, μ for a medida de lebesgue e A for a coleção de conjuntos lebesgue mensuráveis, denotaremos o espaço de Lebesgue fraco simplismente por $L^{(p,\infty)}$.

Nos proximos resultados enunciaremos algumas propriedades importantes do espaços L^p-fraco, onde consideramos (X, A, μ) espaço de medida.

Proposição 1.18. *Para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$ temos $L^p \subset L^{(p,\infty)}$, sendo a inclusão contínua.*

Observação 1.19. *$L^p \subsetneq L^{(p,\infty)}$. De fato, basta definir $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ em $(0, +\infty)$. Assim, $f \in L^{(p,\infty)}$ mas $f \notin L^p$.*

Proposição 1.20. *Seja $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $f \in L^{(p,\infty)} \cap L^{(q,\infty)}$. Então $f \in L^r$ para todo $p < r < q$ e vale*

$$\| f \|_r \leqslant \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r} \right) \| f \|_{p,\infty}^{\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \| f \|_{q,\infty}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} . \tag{1.1}$$

Proposição 1.21. *Seja $E \subset X$ um subconjunto de medida finita. Então*

(a) Para $q < p$ temos

$$\int_E |f(x)|^q d\mu \leqslant \frac{p}{p-q}\mu(E)^{1-\frac{q}{p}} \parallel f \parallel_{p,\infty} \quad , \forall f \in L^{(p,\infty)}(X).$$

(b) Se $\mu(X) < \infty$ e $q < p$ então

$$L^{(p,\infty)}(X) \subset L^{(q,\infty)}(X). \tag{1.2}$$

Definição 1.22. *Seja $1 \leqslant p < \infty$ e escolha $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < p$ e definimos*

$$\parallel f \parallel_{p,\infty}^{*} = \sup_{0<\mu(E)<\infty} \mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_E |f|^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}},$$

para toda $f \in L^{(p,\infty)}(X)$.

Proposição 1.23. *Seja $f \in L^{(p,\infty)}$. Então*

$$\parallel f \parallel_{p,\infty} \leqslant \parallel f \parallel_{p,\infty}^{*} \leqslant \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}} \parallel f \parallel_{p,\infty} . \tag{1.3}$$

Proposição 1.24. *Sejam $1 \leqslant p_0 < p < p_1 < \infty$ tais que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

para algum $\theta \in [0,1]$. Se $f \in L^{(p_0,\infty)}(X) \cap L^{(p_1,\infty)}(X)$ então

$$\parallel f \parallel_{p,\infty} \leqslant \parallel f \parallel_{p_0,\infty}^{1-\theta} \parallel f \parallel_{p_1,\infty}^{\theta} . \tag{1.4}$$

1.3 Espaços de Lorentz

Antes de introduzir os espaços de Lorentz vamos precisar definir algumas ferramentas importantes para seu estudo. Nesta seção, a menos que menção contraria, estaremos considerando (X, A, μ) um espaço de medida e $F(X, A)$ o conjunto de funções A-mensuráveis em X. A teoria apresentada nesta seção teve como principal fonte [42].

Definição 1.25. *(Função Rearranjo) Seja $f \in F(X, A)$. A função rearranjo decrescente de f, denotada por f^*, é definida por*

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \geqslant 0; D_f(\lambda) \leqslant t\}, \tag{1.5}$$

tomando como convenção $\inf(\varnothing) = \infty$.

Observação 1.26. *(i) $f^*(0) = \parallel f \parallel_\infty$ para toda $f \in L^\infty$.*

(ii) $f^*(D_f(\lambda)) \leqslant \lambda$.

Definição 1.27. *Seja $f \in F(X, A)$, denotamos por f^{**} o duplo rearranjo descrescente da função f, definido por*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \tag{1.6}$$

para $t > 0$.

Definição 1.28. *Para qualquer $f \in F(X, A)$ e $p, q \in [1, \infty]$ definimos*

$$\begin{cases} \| f \|_{(p,q)^*} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & , \ se\ q < \infty \\ \| f \|_{(p,q)^*} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & , \ se\ q = \infty. \end{cases} \tag{1.7}$$

Os funcionais $\| \cdot \|_{(p,q)^*}$ são funções a valores não negativos definidos de $F(X, A)$ em $[0, \infty]$. Posteriormente veremos que esses valores serão importantes na teoria dos espaços de Lorentz.

Observação 1.29. *(i) Note que para $q = \infty$ temos que $\| \cdot \|_{(p,\infty)^*}$ coincide com a norma definida para o espaço L^p-fraco, isto é, $\| \cdot \|_{(p,\infty)^*} = \| \cdot \|_{p,\infty}$.*

(ii) Para todo $p \geqslant 1$ temos que $\| \cdot \|_{(p,p)^*}$ coincide com a norma do espaço de lebesgue L^p.

A proposição a seguir nos da algumas propriedades desses funcionais.

Proposição 1.30. *Sejam $p, q, r \in [1, \infty]$ e $f \in F(X, A)$.*

(a) Se $q < r$ então

$$\| f \|_{(p,r)^*} \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \| f \|_{(p,q)^*} . \tag{1.8}$$

(b)

$$\| f + g \|_{(p,q)^*} \leqslant 2^{\frac{1}{p}}(\| f \|_{(p,q)^*} + \| g \|_{(p,q)^*}). \tag{1.9}$$

(c) $\| f \|_{(p,q)^*} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.t.p.

Vemos pela proposição anterior que esses funcionais não são sempre bons candidatos para definir uma norma, porem como veremos a seguir serão equivalentes a norma que definiremos para os espaços de Lorentz. Antes de definir os espaçõs vamos considerar a seguinte relação de equivalência em $F(X, A)$

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ q.t.p.$$

Escrevemos

$$[f] = \{g \in F(X, A); f = g \ q.t.p.\},$$

para denotar a classe de equivalência de f. Para facilitar a escrita usaremos simplesmente f para representar a classe $[f]$. Agora podemos finalmente definir os espaços de Lorentz.

Definição 1.31. *Sejam $1 \leqslant p < \infty$ e $1 \leqslant q \leqslant \infty$, o espaço de Lorentz, denotado por $L^{(p,q)}(X, A, \mu)$, é definido por*

$$L^{(p,q)}(X, A, \mu) = \{f \in F(X, A); \| f \|_{(p,q)} < \infty\},$$

onde

$$\begin{cases} \| f \|_{(p,q)} = \left(\displaystyle\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & , \text{ se } q < \infty \\ \| f \|_{(p,q)} = \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & , \text{ se } q = \infty. \end{cases} \tag{1.10}$$

Para facilitar a escrita denotaremos o espaço de Lorentz por $L^{(p,q)}(X)$. Quando estivermos trabalhando em $\mathbb{R}^n$ com a medida de Lebesgue usaremos simplesmente $L^{(p,q)}$.

Observação 1.32. *O funcional $\| \cdot \|_{(p,q)}$ define uma norma em $L^{(p,q)}(X, A, \mu)$. Mais ainda, $(L^{(p,q)}(X, A, \mu), \| \cdot \|_{(p,q)})$ é um espaço de Banach.*

Agora enunciaremos um importante lema que nos da uma inclusão entre espaços de Lorentz.

Lema 1.33. *(Calderón) Sejam $1 < p < \infty$ e $1 \leqslant q < r \leqslant \infty$ e $f \in L^{p,q}(X)$. Então*

$$\| f \|_{(p,r)} \leqslant \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \| f \|_{(p,q)} . \tag{1.11}$$

O próximo resultado nos dara relações importantes entre a norma do espaço de Lorentz, a norma dos espaços de Lebesgue, a quasi-norma definidas nos espaços L^p-fraco e os funcionais $\| \cdot \|_{(p,q)^*}$.

Proposição 1.34. *Sejam $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $f \in F(X, A)$. Então*

(a)

$$\| f \|_{(p,q)^*} \leqslant \| f \|_{(p,q)} \leqslant \frac{p}{p-1} \| f \|_{(p,q)^*} . \tag{1.12}$$

(b)

$$\| f \|_p \leqslant \| f \|_{(p,p)} \leqslant \frac{p}{p-1} \| f \|_p . \tag{1.13}$$

(c)

$$\| f \|_{(p,\infty)^*} \leqslant \| f \|_{(p,\infty)} \leqslant \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} \| f \|_{(p,q)} . \tag{1.14}$$

Observação 1.35. *(i) Vemos pelo item (a) da proposição que o espaço $L^{(p,q)}(X)$ estária bem definido usando o funcional $\| \cdot \|_{(p,q)^*}$, o que facilita os cálculos ja que ele em geral é mais fácil de se trabalhar do que a norma $\| \cdot \|_{(p,q)}$ devido sua definição.*

(ii) O item (b) nos mostra que a norma $\| \cdot \|_{(p,p)}$ é uma norma equivalente a $\| \cdot \|_p$ nos espaços de Lebesgue.

(iii) Pela equivalência das normas mostradas na proposição podemos concluir que o espaço de Lorentz $L^{(p,q)}(X)$ quando $q = \infty$ equivale ao espaços L^p-fraco estudado na seção anterior.

A seguir iremos enunciar dois resultados que serão muito úteis na demonstração das propriedades do espaços de Modulação-Lorentz, os quais iremos tratar no próximo capítulo. A prova dos resultados segue das desigualdade conhecidas para os espaços L^p e aplicando o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz (conforme [31], pág. 56).

Proposição 1.36. *(Desigualdade de Holder generalizada) Seja $f_j \in L^{(p_j,q_j)}(X)$, para $j = 1, \ldots, k$, onde $1 \leqslant p_j < \infty$ e $1 \leqslant q_j \leqslant \infty$. Sejam p e s tais que*

$$\frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j}, \frac{1}{s} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{q_j} \text{ e } s \geqslant 1.$$

Então

$$\| \prod_{j=1}^{k} f_j \|_{(p,s)} \leqslant C(p') \prod_{j=1}^{k} \| f_j \|_{(p_j,q_j)},$$

onde $C(p')$ é uma constante dependendo de p'.

Proposição 1.37. *(Desigualdade de Young para espaços de Lorentz) Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$, $1 \leqslant q_1, q_2 \leqslant \infty$, r e $s \geqslant 1$ tais que*

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \text{ e } \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Se $f \in L^{(p_1,q_1)}(X)$ e $g \in L^{(p_2,q_2)}(X)$ então $f \star g \in L^{(r,s)}(X)$ e vale

$$\| f \star g \|_{(r,s)} \leqslant C \| f \|_{(p_1,q_1)} \| g \|_{(p_2,q_2)},$$

onde $C = C(r)$ é uma constante positiva dependendo de r.

Proposição 1.38. *(Desigualdade de Hausdorff-Young para espaços de Lorentz) Seja $1 < p < 2$. Então*

$$\| \widehat{f} \|_{(p',q)} \leqslant \| f \|_{(p,q)},$$

para toda $f \in L^{(p,q)}$.

Proposição 1.39. *(Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para espaços de Lorentz) Sejam $1 < p, q < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ e $0 < \alpha < n$ tais que $\alpha = n(1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{p})$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\| K_\alpha \star f \|_{(p,r)} \leqslant C \| f \|_{(q,r)},$$

para toda $f \in L^{(q,r)}$.

Proposição 1.40. *(Desigualdade do Tipo Minkowiski para espaços de Lorentz, ver [9]) Seja f uma função mensurável, não negativa em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Suponha que $1 < p < s \leqslant \infty$ e para quase todo $y \in \mathbb{R}^n$ a função*

$$f_y(x) = f(x, y) \in L^{(p,s)}.$$

Seja $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dy$ com $x \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\| F \|_{(p,s)} \leqslant C_{p,s} \int_{\mathbb{R}^n} \| f_y \|_{(p,s)} \, dy,$$

onde

$$C_{p,s} = \left(\frac{p}{s}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{p'}{s'}\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Para finalizar esta seção introduziremos o operador maximal de Hardy-Littlewood e provaremos sua limitação nos espaços de Lorentz.

Definição 1.41. *Seja $f \in L^1_{loc}$. Então definimos o operador maximal de Hardy-Littlewood, denotado por Mf, por*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Temos

$$Mf(x) \geqslant |f(x)|,$$

para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.42. *Seja $1 < p \leqslant \infty$ e $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Então*

$$\| Mf \|_{(p,r)} \leqslant C \| f \|_{(p,r)}, \tag{1.15}$$

para toda $f \in L^{(p,r)}$.

Demonstração:

Conforme o Teorema 1, página 13 em [47] sabemos que

$$\| Mf \|_p \leqslant \| f \|_p,$$

para toda $f \in L^p$.

Assim, o resultado segue aplicando o teorema de Interpolação de Marcinkiewicz.

■

1.4 A classe de Schwartz, distribuições temperadas e o Laplacioano fracionário

Para estender o conceito de transformada de Fourier para distribuições primeiro precisamos definir uma classe de funções-teste onde a transformada tem boas propriedades. O conteúdo desenvolvido nesta seção foi em grande parte retirado de [31].

Definição 1.43. *Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tais que*

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f| < \infty,$$

para quaisquer multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, ou seja, é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis, tais que, qualquer derivada decai mais rapidamente do que qualquer polinômio. Este conjunto é conhecido como classe de Schwartz.

A proposição a seguir nos dá algumas propriedades importantes do espaço $\mathcal{S}$ e dos operadores definidos anteriormente nesse espaço.

Proposição 1.44. *(i) A transformada de Fourier é um homeomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.*

(ii) Se $f, g \in \mathcal{S}$ então $f \star g \in \mathcal{S}$.

(iii) O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, é denso em $\mathcal{S}$.

As propriedades da transfromada de Fourier dadas em 20 são válidas para funções de $\mathcal{S}$. Podemos destacar também as seguintes propriedades:

(i) Seja $\delta^t(f) = f(t\cdot)$. Então

$$(\delta^t(f))^\wedge = t^{-n}\delta^{-t}(\widehat{f}).$$

(ii) Seja A uma matriza ortogonal e ξ um vetor coluna. Então

$$(f \circ A)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(A\xi).$$

O espaço dual $\mathcal{S}'$ formado por todos os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}$ é chamado espaço das distribuições temperadas.

Podemos estender vários conceitos definidos até agora para o conjunto $\mathcal{S}'$ de distribuições temperadas. A seguir, mostraremos como estender os operadores de convolução e a Transformada de Fourier que serão mais utilizados no presente trabalho.

(I) Transformada de Fourier: Seja $u \in \mathcal{S}'$. A transformada de Fourier de u, denotada por $\hat{u}$, é uma distribuição temperada definida por

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

(II) Operador Convolução: Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $f \in \mathcal{S}$. Se $\tilde{f} := f(-x)$ então o produto de convolução de u e f é uma distribuição temperada definida por

$$u \star f(\varphi) = u(\tilde{f}\varphi(x)) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Para finalizar essa seção iremos dar uma breve introdução aos operadores Laplacianos fracionários, que nos serão úteis para estudar as equações elípticas no capítulo 3 dessa tese.

Relembremos o operador Laplaciano

$$\triangle = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2,$$

que pode atuar sobre funções ou distribuições temperadas. Se f pertence a $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}'$ temos a seguinte identidade

$$(- \triangle f)^\wedge(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{f}(\xi).$$

Motivado por essa identidade podemos definir o operador Laplaciano fracionário $(-\triangle)^{\frac{z}{2}}$ com $z \in \mathbb{C}$. Mais precisamente, se $f \in \mathcal{S}$ temos

$$(-\triangle)^{\frac{z}{2}} f(x) = ((2\pi|\xi|)^z(\widehat{f})(\xi))^\vee(x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e estendemos de maniera usual para $\mathcal{S}'$.

A grosso modo o operador $(-\triangle)^{\frac{z}{2}}$ age como uma derivada de ordem z, quando $z \in \mathbb{N}$. Se z é complexo e $Re(z) < -n$ a função $|\cdot|^z$ não é localmente integrável em $\mathbb{R}^n$ e então o operador pode não estar bem definido. Neste caso para que a definição funcione precisamos acrescentar a hipótese de $\widehat{f}$ se anular suficientemente longe da origem.

Observe ainda que a família de operadores $(-\triangle)^z$ satisfaz a propriedade de semigrupos

$$(-\triangle)^z(-\triangle)^w = (-\triangle)^{z+w},$$

em $\mathcal{S}$. O operador $(-\triangle)^{\frac{z}{2}}$ é dado pela convolução com a transformada de Fourier inversa de $(2\pi)^z|\cdot|^z$ que é dada por

$$(2\pi)^z(|\xi|^z)^\vee(x) = (2\pi)^z\frac{\pi^{\frac{-z}{2}}\Gamma(\frac{n+z}{2})}{\frac{\pi(n+z)}{2}\Gamma(\frac{-z}{2})}|x|^{-z-n},$$

que em geral é no sentido de distribuição.

1.5 Multiplicadores de Fourier

Nesta seção vamos definir os multiplicadores de Fourier e veremos algumas de suas propriedades nos espaços de Lebesgue e Lorentz. A teoria apresentada nessa seção foi retirada de [49].

Definição 1.45. *Sejam Ω um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $0 < p \leqslant \infty$ e $M \in \mathcal{S}'$ tal que $M^\vee \in L^1$. Dizemos que M é um multiplier de Fourier para L_p^Ω, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| M^\vee \widehat{f} \|_p \leqslant C \| f \|_p \quad , \forall f \in L_p^\Omega.$$

A próxima proposição nos dá uma propriedade interessante dos multiplier de Fourier.

Proposição 1.46. *Seja Ω e Γ subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Seja $0 < p \leqslant \infty$ e $\tilde{p} = \min\{1, p\}$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| [M\widehat{f}]^\vee \|_p \leqslant C \| M^\vee \|_{\tilde{p}} \| f \|_p \ ,$$

para toda $f \in L_p^\Omega$ e toda $M \in \mathcal{S}'$ com $M^\vee \in L_{\tilde{p}}^\Gamma$.

Para enunciar o lema central dessa sessão precisamos introduzir um espaço de funções muito utilizado no estudo de edp's.

Definição 1.47. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço normado $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ por*

$$H_2^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{H_2^s} < \infty\},$$

onde a norma $\| \cdot \|_{H_2^s}$ é dada por

$$\| f \|_{H_2^s} = \| (1+x)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(x) \|_2 \ .$$

Novamente usaremos a notação H_2^s para indicar $H_2^s(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.48. *(i) Algumas vezes, esses espaços são denotados por $W_2^s = H_2^s$, chamados espaços de Sobolev-Slobockey, se $s \geqslant 0$. Se $s = m \in \mathbb{N}$ então os espaços W_2^s são os espaços de Sobolev usuais, isto é,*

$$W_2^m = \{f \in \mathcal{S}'; \| f \|_{W_2^m} < \infty\},$$

onde

$$\| f \|_{W_2^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \| \partial^\alpha f \|_2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Se $s_0 > s_1$, então vale a seguinte inclusão contínua

$$H_2^{s_0} \subset H_2^{s_1}.$$

Além disso, $H_2^0 = L^2$.

Finalmente, o lema a seguir nos dá uma estimativa para os multipliers de Fourier em espaços de Lebesgue, a qual será útil para a demonstração de algumas estimativas de operadores em espaços de modulação.

Lema 1.49. *(Ver [49] seção 1.5.2, pág. 26) Sejam Ω um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $0 < p \leqslant \infty$. Seja também $\sigma_p = n\left(\dfrac{1}{\min\{1,p\}} - \dfrac{1}{2}\right)$. Se $s > \sigma_p$ então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| (M\widehat{f})^{\vee} \|_p \leqslant C \| M \|_{H_2^s} \| f \|_p, \tag{1.16}$$

para toda $f \in L^p$ com supp$(f) \subset \Omega$.

Proposição 1.50. *Sejam Ω um subconjunto compactos de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$. Se $s > \dfrac{n}{2}$ então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| (M\widehat{f})^{\vee} \|_{(p,r)} \leqslant C \| M \|_{H_2^s} \| f \|_{(p,r)}, \tag{1.17}$$

para toda $f \in L^{(p,r)}$ com supp$\widehat{f} \subset \Omega$.

Demonstração: Seja $0 < \sigma < p$. Pelo Lema anterior temos

$$\| (M\widehat{f})^{\vee} \|_{(\sigma,\infty)} \leqslant \| (M\widehat{f})^{\vee} \|_{\sigma} \leqslant \| M \|_{H_2^s} \| f \|_{\sigma} \quad , \forall f \in L_{\sigma}^{\Omega}$$

e

$$\| (M\widehat{f})^{\vee} \|_{(\infty,\infty)} \leqslant \| (M\widehat{f})^{\vee} \|_{\infty} \leqslant \| M \|_{H_2^s} \| f \|_{\infty} \quad , \forall f \in L_{\infty}^{\Omega}.$$

Assim, aplicando o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz (conforme [31], pág. 56) ontemos o resultado desejado.

■

1.6 Decomposição de Littlewood-Paley e os espaços de Besov

Nesta seção vamos construir a decomposição de Littlewood-Paley e definir os clássicos espaços de Besov. A teoria desenvolvida nessa seção foi retirada em sua maioria de [45].

Lema 1.51. *Existe uma função $\phi \in \mathcal{S}$ satisfazendo*

(i) $0 \leqslant \widehat{\phi} \leqslant 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

(ii) supp$(\widehat{\phi}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$.

(iii) Se $\phi_j(\xi) = 2^{jn}\phi(2^j\xi)$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, então

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_j(\xi) = 1 \ , \ \forall \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Chamaremos a função ϕ de função base.

O lema anterior nos permite definir os operadores da decomposição diádica e a partir deles definir a decomposição de Littlewood-Paley.

Definição 1.52. *Seja $f \in \mathcal{S}'$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos os k-blocos diádicos Δ_k e os operadores "cut-off"de frequência S_k da seguinte forma*

$$\Delta_k f = \phi_k \star f$$

e

$$S_k f = \sum_{j=-\infty}^{k} \Delta_j f.$$

A partir dos operadores acima obtemos a decomposição a seguir.

Proposição 1.53. *Seja $f \in \mathcal{S}'$. Para qualquer $N \in \mathbb{Z}$, temos que*

$$f = S_N f + \sum_{j \geqslant N} \Delta_j f \ \textit{em } \mathcal{S}'.$$

Esta igualdade é chamada decomposição de Littlewood-Paley de f. Além disso, se $\lim_{N\to\infty} S_N f = 0$, obtemos a igualdade

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f,$$

a qual chamamos decomposição homogênea de Littlewood-Paley.

Agora, de posse dos operadores de decomposição, podemos definir os espaços de Besov.

Definição 1.54. *Sejam $1 \leqslant q, \sigma \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Definimos os espaços de Besov $B^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$B^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{B^s_{q,\sigma}} < \infty\},$$

onde

$$\begin{cases} \| f \|_{B^s_{q,\sigma}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks\sigma} \| \Delta_k f \|_q^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} & , \ \textit{se } \sigma < \infty \\ \| f \|_{B^s_{q,\sigma}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{2^{ks} \| \Delta_k f \|_q\} & , \ \textit{se } \sigma = \infty. \end{cases}$$

Por simplicidade, vamos denotar os espaços de Besov $B^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ apenas por $B^s_{q,\sigma}$.

A partir da decomposição de Littlewood-Paley, podemos também definir os espaços de Besov homogêneos que são denotados por $\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Considere o conjunto

$$\dot{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'; (D^\alpha \widehat{f})(0) = 0, \forall \alpha\} .$$

Definição 1.55. *Sejam* $1 \leqslant q, \sigma \leqslant \infty$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *Definimos os espaços de Besov Homogêneos* $\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ *como*

$$\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \dot{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}} < \infty\},$$

onde

$$\begin{cases} \| f \|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ks\sigma} \| \Delta_k f \|_q^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} & , \ se\ \sigma < \infty \\ \| f \|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{2^{ks} \| \Delta_k f \|_q\} & , \ se\ \sigma = \infty. \end{cases}$$

A proposição a seguir nos traz algumas propriedades básicas dos espaços $B^s_{q,\sigma}$. Para demosntração e mais detalhes ver [45].

Proposição 1.56. *(i)* $\mathcal{S} \subset B^s_{q,\sigma} \subset \mathcal{S}'$.

(ii) Se $1 \leqslant q, \sigma < \infty$ *então* $\mathcal{S}$ *é denso em* $B^s_{q,\sigma}$.

(iii)Sejam $1 \leqslant p, q_1, q_2 \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ *e* $\delta > 0$. *Então*

$$B^{s+\delta}_{p,q_1} \subset B^s_{p,q_2}.$$

(iv) Sejam $1 \leqslant q_1, q_2 \leqslant \infty$, $1 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ *e* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, *tais que*

$$s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2},$$

então

$$B^{s_1}_{q_1,\sigma} \subset B^{s_2}_{q_2,\sigma}.$$

1.7 Espaços de Fourier-Besov e $H^{1,s}$

Nesta seção vamos intriduzir os espaços onde iremos estudar a existência e a regularidade de nosso problema de fronteira. A teoria desenvolvida aqui foi baseada em [41] e [12].

Definição 1.57. *Seja* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$0 \leqslant \widehat{\phi}(\xi) \leqslant 1 \ , \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$supp \widehat{\phi}(\xi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \ ; 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$$

e

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}_j = 1 \ , \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

onde $\phi_j(x) = 2^{jn}\phi(2^j x)$. *Para* $s \in \mathbb{R}$ *e* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *o espaço de Fourier-Besov, denotado por* $FB^s_{p,q}$, *é definido pelo conjunto de todas as distribuições temperadas* $f \in \mathcal{S}'$ *tal que* $\widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\| f \|_{FB^s_{p,q}} := \| \{2^{sj} \| \widehat{\phi}_j \widehat{f} \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\} \|_{l^q(\mathbb{Z})} \ .$$

Proposição 1.58. *(i) Considere* $\mathcal{S}'$ *com a topologia forte. Então*

$$\mathcal{S} \subset FB^s_{p,q} \subset \frac{\mathcal{S}'}{\mathcal{P}},$$

onde $\mathcal{P}$ *é o anel de polinômios no corpo* $\mathbb{C}$ *em* n *variáveis.*

(ii) $(FB^s_{p,q}, \|\cdot\|_{FB^s_{p,q}})$ *é um espaço de Banach.*

■

Definição 1.59. *Para cada* $k \in \mathbb{Z}$ *definimos o* k*-bloco diádico, denotado por* Δ_k *e o operador de baixa-frequencia, denotado por* S_k*, por*

$$\Delta_k = \phi_k \star f \text{ e } S_k f = \sum_{j=-\infty}^{k} \Delta_j f,$$

para toda $f \in \mathcal{S}'$.

Proposição 1.60. *(i)*$(\widehat{\Delta_j \Delta_k f}) = 0$ *se* $|j-k| \geqslant 3$.

(ii)supp$(\widehat{S_{k-3}\Delta_k} f) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \ ; 2^{k-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}\}$.

(iii) Sejam $f, g \in \dfrac{\mathcal{S}'}{\mathcal{P}}$. *Então*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$$

e

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-3} f \Delta_j g \text{ converge em } \frac{\mathcal{S}'}{\mathcal{P}}.$$

■

Definição 1.61. *Para cada* $f, g \in \dfrac{\mathcal{S}'}{\mathcal{P}}$ *vale*

$$fg = \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-3} f \Delta_j g + \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-3} g \Delta_j f + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \sum_{|j-k| \leqslant 2} \Delta_k f \Delta_j g$$

e essa igualdade é conhecida como paraproduto de Bony.

Para finalizar as preliminares vamos definir e dar algumas propriedades dos espaços $H^{1,s}(\mathbb{R}^n)$ que são definidos por

$$H^{1,s} = \{f \in \mathcal{S}'; \| f \|_{H^{1,s}} < \infty\},$$

com a norma

$$\| f \|_{H^s} = \| (1+|x|^s)\widehat{f}(x) \|_1 .$$

Este espaço tem propriedades que serão do nosso interesse, as quais enunciaremos a seguir.

(i) Existe uma constante $C > 0$ tal que, se $s, t \geqslant 0$ então

$$\langle \cdot \rangle^s \langle \cdot \rangle^s \leqslant C \langle \cdot \rangle^{s+t}.$$

(ii) Seja $u_j \in H^{1,s}$ para $j = 1, ..., m$. Então

$$\| \langle \xi \rangle^s \circledast_{j=1}^m u_j \|_1 \leqslant C \prod_{j=1}^m \| u_j \|_{H^{1,s}} .$$

(iii) Se $s \geqslant t$ então $H^{1,s} \subset H^{1,t}$.

2 Espaços de modulação-Lorentz

Neste capítulo vamos mostrar algumas propriedades de espaços de modulação-Lorentz e suas relações com alguns espaços importantes como o espaço de Besov. A constante C denota uma constante estritamente positiva que pode mudar de linha para linha ou mesmo em cada linha.

2.1 Definição e propriedades dos espaços $M^{p,r}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.1. *Seja Q_k o cubo unitário de centro $k \in \mathbb{Z}^n$. Logo $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ constitui uma decomposição de $\mathbb{R}^n$. Considere $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ uma função suave satisfazendo $\phi(\xi) = 1$ se $|\xi| \leqslant \dfrac{1}{2}$ e $\phi(\xi) = 0$ se $|\xi| \geqslant 1$. Seja ϕ_k uma translação da ϕ, isto é,*

$$\phi_k(\xi) = \phi(\xi - k) \ , \ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Considere

$$\varphi_k(\xi) = \frac{\phi_k(\xi)}{\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \phi_j(\xi)}$$

e assim

$$\mathrm{supp}\varphi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi - k| \leqslant \sqrt{n}\} \ e \ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi_k(\xi) = 1 \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos o operador $\square_k$ por

$$\square_k(f) = (\varphi_k \widehat{(f)})^\vee, \tag{2.1}$$

para toda $f \in \mathcal{S}'$. Para $1 \leqslant p, r, q \leqslant \infty$ e $-\infty < s < \infty$, definimos o Espaço de modulação-Lorentz, $M^{p,r}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$, como

$$M^{p,r}_{q,s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

onde

$$\| f \|_{M^{p,r}_{q,s}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \| \square_k f \|^q_{(p,r)} \right)^{\frac{1}{q}} & , \ 1 \leqslant q < \infty \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^s \| \square_k f \|_{(p,r)} & , \ q = \infty, \end{cases}$$

com o símbolo $\langle k \rangle$ representando o peso $(1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Observação 2.2. *(i) O espaço $M^{p,r}_{q,s}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach (ver [5] Lema 2.2).*

(ii) Em espaços de modulação-Lorentz, vale a seguinte desigualdade

$$\| \square_k f \|_{(p_2,r)} \leqslant C \| \square_k f \|_{(p_1,r)} \ , \ k \in \mathbb{Z}^n \ , \ 0 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty \ e \ 1 \leqslant r \leqslant \infty. \tag{2.2}$$

onde $C > 0$ não depende de k. De fato, seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi = 1$ em uma vizinhança de $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - k| \leqslant \sqrt{n}\}$. Assim,

$$(\square_k f)^\wedge = \varphi(\square_k f)^\wedge \Rightarrow \square_k f = (\varphi)^\vee \star \square_k f$$

Tome $q \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p_1} = 1 + \dfrac{1}{p_2}$. Note que, como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\varphi^\vee \in L^{(q,\infty)}$.

Agora, aplicando a desigualdade de Young para os espaços de Lorentz(Ver página 25) obtemos,

$$\begin{aligned}
\| \square_k f \|_{(p_2,r)} &= \| (\varphi)^\vee \star \square_k f \|_{(p_2,r)} \\
&\leqslant C \| (\varphi)^\vee \|_{(q,r)} \| \square_k f \|_{(p_1,r)} \\
&\leqslant C \| \square_k f \|_{(p_1,r)} \quad ,
\end{aligned}$$

com $C > 0$ dependendo apenas de p_1, p_2, q e r.

(ii) Seja χ a função característica do conjunto $\{k \in \mathbb{Z}^n; |k| \leqslant 3\sqrt{n}\}$ e denotemos $\chi(k) = \chi_k$. Nos resultados desse capítulo sempre que utilizarmos χ_k estaremos nos referindo a função assim definida.

Exemplo 2.3. *Seja $\alpha > 0$ e considere o espaço $M_{q,s}^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ com $p \geqslant 2$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Então*

$$|\cdot|^{-\alpha} \in M_{q,s}^{p,\infty}, \tag{2.3}$$

desde que

$$\begin{cases}
q(\alpha - n) + n - 1 < 0 & , \text{ se } s = 0, q < \infty \\
s < \dfrac{n(q-1)}{q} - \alpha + \dfrac{1}{q} & , \text{ se } s \in \mathbb{R}^*, q < \infty \\
\alpha < n & , \text{ se } s = 0 \text{ e } q = \infty.
\end{cases}$$

Seja $k \in \mathbb{Z}^n$ e $1 < r < p'$ tal que

$$r(\alpha - n) + n \geqslant 0$$

Aplicando a desigualdade de Hausdorff-Young para L^p-fraco (ver página 25) obtemos

$$\begin{aligned}
\| \square_k |\cdot|^{-\alpha} \|_{(p,\infty)} &= \| [\varphi_k (|\cdot|^{-\alpha})^\wedge]^\vee \|_{(p,\infty)} \\
&\leqslant C \| \varphi_k |\cdot|^{\alpha - n} \|_{(p',\infty)} \\
&= C \sup_{0<|E|<\infty} |E|^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{r}} \left(\int_E |\varphi_k| \cdot |^{\alpha-n}|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leqslant C \sup_{0<|E|<\infty} |E|^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{r}} \left(\int_{E \cap B(k,\sqrt{n})} |\cdot|^{r(\alpha-n)} \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant C \begin{cases}
\left(\dfrac{(3\sqrt{n})^{r(\alpha-n)+n}}{r(\alpha - n) + n} \right) \sup\limits_{0<|E|<\infty} |E \cap B(k, \sqrt{n})|^{\frac{1}{p'}} & , |k| \leqslant 3\sqrt{n} \\
(|k| - \sqrt{n})^{\alpha - n} \sup\limits_{0<|E|<\infty} |E \cap B(k, \sqrt{n})|^{\frac{1}{p'}} & , |k| > 3\sqrt{n} \text{ e } \alpha < n \\
(|k| + \sqrt{n})^{\alpha - n} \sup\limits_{0<|E|<\infty} |E \cap B(k, \sqrt{n})|^{\frac{1}{p'}} & , |k| > 3\sqrt{n} \text{ e } \alpha > n,
\end{cases}$$

Primeiro suponha $q = \infty$, $s = 0$ e $\alpha < n$. Logo

$$\begin{aligned}\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \square_k | \cdot |^{-\alpha} \|_{(p,\infty)} &\leqslant C + \sup_{|k| > 3\sqrt{n}} |B(k, \sqrt{n})|^{\frac{1}{p'}} (|k| \pm \sqrt{n})^{(\alpha - n)} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Agora, para $q < \infty$ temos

$$\begin{aligned}\| \, | \cdot |^{-\alpha} \|^q_{M^{p,\infty}_{q,s}} &\leqslant C(\sum_{|k| \leqslant 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{sq} |B(k, \sqrt{n})|^{\frac{q}{p'}} \\ &+ \sum_{|k| > 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{sq} |B(k, \sqrt{n})|^{\frac{q}{p'}} (|k| \pm \sqrt{n})^{q(\alpha - n)}) \\ &\leqslant C \left(\sum_{|k| \leqslant 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{sq} + \sum_{|k| > 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{sq} (|k| \pm \sqrt{n})^{q(\alpha - n)} \right),\end{aligned}$$

onde $C > 0$ não depende de k.

Se $s = 0$ então como

$$q(\alpha - n) + n - 1 < 0$$

temos

$$\begin{aligned}\| \, | \cdot |^{-\alpha} \|^q_{M^{p,\infty}_{q,0}} &\leqslant C + \sum_{|k| > 3\sqrt{n}} (|k| \pm \sqrt{n})^{q(\alpha - n)} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Agora suponha $s > 0$. Tome $\beta > 1$ tal que

$$\beta < \frac{1}{s}[\frac{n(q-1)}{q} - \alpha + \frac{1}{q}].$$

Logo

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{(m \pm \sqrt{n})^{\beta}} = 0$$

e então podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$M > 3\sqrt{n} \text{ e } m \leqslant C(m \pm \sqrt{n})^{\beta} \text{ , } \forall m \geqslant M.$$

Assim

$$\begin{aligned}\sum_{|k| < M} \langle k \rangle^{sq} + \sum_{|k| \geqslant M} \langle k \rangle^{sq} (|k| \pm \sqrt{n})^{q(\alpha - n)} &\leqslant C(C_1 + \sum_{|k| \geqslant M} (|k| \pm \sqrt{n})^{\beta sq + q(\alpha - n)} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Para o caso $s < 0$ basta tomar $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta > \max\{1, \frac{1}{s}[\frac{n(q-1)}{q} - \alpha + \frac{1}{q}]\}$$

e de maneira análoga ao caso $s > 0$ obtemos que

$$\| \, | \cdot |^{-\alpha} \|_{M^{p,\infty}_{q,s}} < \infty.$$

■

Os dois primeiros resultados nos mostram que a norma definida para os espaços de Modução-Lorentz não depende da partição escolhida e nos trás algumas inclusões básicas entre esses espaços. Resultados análogos para espaços de Modulação foram feito em [37].

Proposição 2.4. *Sejam $\{\varphi_k\}$ e $\{\psi_k\}$ satisfazendo as condições da definição 2.1. Então $\{\varphi_k\}$ e $\{\psi_k\}$ definem semi-normas equivalentes em $M^{p,r}_{q,s}$.*

Demonstração: Primeiramente, observamos a seguinte identidade que segue das propriedades da transformada de Fourier,

$$(m\widehat{f})^{\vee}(x) = e^{2\pi ixk}[m(\cdot + k)(e^{-2\pi iky}f(y))^{\wedge}]^{\vee}(x). \tag{2.4}$$

Denotemos por conveniência,

$$\Box_k^{\varphi} f = [\varphi_k \widehat{f}]^{\vee} \text{ e } \Box_k^{\psi} f = [\psi_k \widehat{f}]^{\vee}$$

Para cada $k \in Z^n$ fixo temos,

$$\| \Box_k^{\varphi} f \|_{(p,r)} \leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_{k-i}^{\psi} (\Box_k^{\varphi} f) \|_{(p,r)} \chi_{k-i}$$

Mas pela identidade (2.4),

$$\| \Box_{k-i}^{\psi} (\Box_k^{\varphi} f) \|_{(p,r)} = \| [\varphi_k(\cdot + k)\psi_{k-i}(\cdot + k)(e^{-2\pi iyk} f(y))^{\wedge}]^{\vee} \|_{(p,r)}$$

Assim, aplicando (1.17), obtemos

$$\begin{aligned} \| \Box_{k-i}^{\psi} (\Box_k^{\varphi} f) \|_{(p,r)} &\leqslant C \| \varphi \|_{H_2^{\sigma}} \| [\psi_{k-i}(\cdot + k)\widehat{f(\cdot + k)}]^{\vee} \|_{(p,r)} \\ &\leqslant C \| \Box_{k-i}^{\psi} f \|_{(p,r)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \| \Box_k^{\varphi} f \|_{(p,r)}^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_{k-i}^{\psi} f \|_{(p,r)} \chi_{k-i} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \| \Box_k^{\psi} f \|_{(p,r)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

De maneira análogo provamos a desigualdade contrária, concluíndo assim a equivalência.

■

Proposição 2.5. *Sejam* $1 \leqslant p, p_1, p_2, q, q_1, q_2, r \leqslant \infty$ *e* $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. *Então, temos as seguintes inclusões contínuas:*

(i) Se $p_1 \leqslant p_2$, $q_1 \leqslant q_2$ *e* $s_1 \geqslant s_2$, *então*

$$M^{p_1,r}_{q_1,s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{p_2,r}_{q_2,s_2}(\mathbb{R}^n). \tag{2.5}$$

(ii) Se $q_1 \geqslant q_2$ *e* $s_1 - s_2 > n(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1})$, *então*

$$M^{p,r}_{q_1,s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{p,r}_{q_2,s_2}(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

Demonstração:

Demonstração de (i) Por (2.2) temos,

$$\| \Box_k f \|_{(p_2,r)} \leqslant C \| \Box f \|_{(p_1,r)}$$

Logo, como $s_1 \geqslant s_2$, podemos estimar

$$\langle k \rangle^{s_2} \| \Box_k f \|_{(p_2,r)} \leqslant \langle k \rangle^{s_1} \| \Box_k f \|_{(p_1,r)} \ ,$$

e então

$$\| \langle k \rangle^{s_2} \| \Box_k f \|_{(p_2,r)} \|_{l^{q_2}} \leqslant \| \langle k \rangle^{s_1} \| \Box_k f \|_{(p_1,r)} \|_{l^{q_2}} \ .$$

Desde que $l^{q_1} \subset l^{q_2}$, para $q_1 \leqslant q_2$,

$$\| \langle k \rangle^{s_2} \| \Box_k f \|_{(p_2,r)} \|_{l^{q_2}} \leqslant C \| \langle k \rangle^{s_1} \| \Box_k f \|_{(p_1,r)} \|_{l^{q_1}} \ .$$

Ou seja,

$$\| f \|_{M^{p_2,r}_{q_2,s_2}} \leqslant C \| f \|_{M^{p_1,r}_{q_1,s_1}} \ .$$

Demonstração de (ii) Pela desigualdade de Holder para os epaços de Lorentz (Ver página 25), temos que

$$\begin{aligned}
\| f \|_{M^{p,r}_{q_2,s_2}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_2 q_2} \| \Box_k f \|^{q_2}_{(p,r)} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\langle k \rangle^{s_1} \| \Box_k f \|_{(p,r)} \langle k \rangle^{s_2 - s_1})^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 q_1} \| \Box_k f \|^{q_1}_{(p,r)} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{\frac{(s_2 - s_1) q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1 q_2}} \\
&= \| f \|_{M^{p,r}_{q_1,s_1}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{\frac{(s_2 - s_1) q_1 q_2}{q_1 - q_2}} \right)^{\frac{q_1 - q_2}{q_1 q_2}} .
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{\frac{(s_2-s_1)q_1q_2}{q_1-q_2}} \lesssim \sum_{i=0}^{\infty}\langle i\rangle^{n-1+\frac{(s_2-s_1)q_1q_2}{q_1-q_2}},$$

e a série do lado direito é convergente para $s_1 - s_2 > n(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1})$. Assim,

$$\| f \|_{M^{p,r}_{q_2,s_2}} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q_1,s_1}} .$$

■

Como visto nas preliminares, os espaços de Besov possuem propriedades importantes de inclusões continuas com os espaços $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ como foi provado em [49]. Para espaços de modulação-Lorentz podemos com algumas adaptações obter as seguintes inclusões:

Proposição 2.6. *Sejam* $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$,$1 \leqslant q \leqslant \infty$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *Então*

(i) Se $r \geqslant p$ *então* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{p,r}_{q,s}$.

(ii)$M^{p,r}_{q,s} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Demonstração: (i) Seja

$$P_N(\phi) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1 + |\xi|)^N \sum_{k=0}^{N} |\widehat{\phi}(\xi)| ,$$

com $N \in \mathbb{N}$ qualquer. Conforme [49] $P_N(\phi)$ é uma semi-norma em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por (2.6) temos:

$$M^{p,r}_{\infty,s_0} \hookrightarrow M^{p,r}_{q,s} \text{ , se } s_0 - s > \frac{n}{q}$$

Assim é suficiente considerarmos apenas o caso $q = \infty$.

Seja

$$P_N(\phi) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1 + |\xi|)^N \sum_{k=0}^{N} |\widehat{\phi}(\xi)| ,$$

com $N \in \mathbb{N}$, semi-normas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aplicando (1.11) e (1.13), temos

$$\begin{aligned} \| \square_k f \|_{(p,r)} &= \| [\varphi_k \widehat{f}]^\vee \|_{(p,r)} \\ &\leqslant C \| [\varphi_k \widehat{f}]^\vee \|_{(p,p)} \\ &\leqslant C \| [\varphi_k \widehat{f}]^\vee \|_p \\ &\leqslant C \| (1 + |\cdot|)^M [\varphi_k \widehat{f}]^\vee \|_\infty, \end{aligned}$$

para $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Mas,

$$\begin{aligned}
\| (1+|\cdot|)^M[\varphi_k\widehat{f}]^\vee \|_\infty &\leqslant \sum_{j=0}^{M} \| (\frac{d^j}{d\xi^j}[\varphi_k\widehat{f}])^\vee \|_\infty \\
&\leqslant C\sum_{j=0}^{M} \| \frac{d^j}{d\xi^j}[\varphi_k\widehat{f}] \|_1 \\
&\leqslant C\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^2\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{d^j}{d\xi^j}[\varphi_k(\xi)\widehat{f}(\xi)]\right| \\
&\leqslant C\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^{2+s}\sum_{j=0}^{M}|(\widehat{f})^{(j)}(\xi)|\right) \\
&\cdot \left(\sup_{\xi\in supp\varphi_k}(1+|\xi|)^{-s}\sum_{j=0}^{M}|\varphi_k^{(j)}(\xi)|\right) \\
&\leqslant C(1+|k|)^{-s}P_N(f),
\end{aligned}$$

com $N \geqslant \max\{k, 2+s\}$.

Logo,

$$\| \square_k f \|_{(p,r)} \leqslant C(1+|k|)^{-s}P_N(f)\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

Então tomando a norma em $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ obtemos,

$$\| f \|_{M^{p,r}_{\infty,s}} \leqslant CP_N(f).$$

(ii) Seja $f \in M^{p,r}_{q,s}$. Dado $\psi \in \mathcal{S}$ denotemos por $f(\psi)$ o valor do funcional f aplicado em ψ, aplicando (1.11) e a desigualdade de Holder obtemos

$$\begin{aligned}
|f(\psi)| &= |\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(\varphi_k\widehat{f})^\vee(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}(\varphi_{k-j}\widehat{\psi})^\vee\chi_{k-j})| \\
&\leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\| \square_k f \|_{(\infty,\infty)}\| \square_{k-j}\psi \|_1\ \chi_{k-j} \\
&\leqslant C\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\| \square_k f \|_{(p,r)}\| \square_{k-j}\psi \|_1\ \chi_{k-j} \\
&\leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{-s}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\| \square_{k-j}\psi \|_{(1,1)}\ \chi_{k-j}\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}}\| \psi \|_{M^{1,1}_{q',-s}} \\
&\leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}},
\end{aligned}$$

já que pelo item (i) temos que $\mathcal{S} \hookrightarrow M^{1,1}_{q',-s}$. Portanto, $f \in \mathcal{S}'$.

$\blacksquare$

Propriedades de produto são importante para o estudo de equações. Para os espaços de modulação existem propriedades interessantes para limitar a norma do produto como pode ser visto em [37]. De forma análoga podemos lidar com o produto nos espaços de modulação-Lorentz e dar condições para que esse espaço seja uma álgebra multiplicativa.

Proposição 2.7. *(Estimativa do Produto) Sejam* $1 \leqslant p_0, r_0, q_0, p_i, q_i, r_i \leqslant \infty$*, para* $j = 1, \ldots, m$*,* $m \in \mathbb{N}$*,* $s \geqslant 0$*. Suponha que*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_0}, \frac{1}{r_0} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_i} \ e \ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{q_i} = m - 1 + \frac{1}{q_0}.$$

Então

$$\| \prod_{i=1}^{m} u_i \|_{M^{p_0,r_0}_{q_0,s}} \leqslant C \prod_{i=1}^{m} \| u_i \|_{M^{p_i,r_i}_{q_i,s}} . \tag{2.7}$$

Demonstração: Mostraremos o resultado para $m = 2$ e o caso $m > 2$ segue por indução. Usando as propriedades da partição da unidade obtemos,

$$\Box_k fg = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} \Box_k (\Box_i f \Box_j g) \chi_{k-i-j}.$$

Assim, utilizando (1.17) e a desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned}
\| \Box_k fg \|_{(p_0,r_0)} &\leqslant C \sum_{i,j \in \mathbb{Z},} \| \Box_k (\Box_i f \Box_j g) \|_{(p_0,r_0)} \chi_{k-i-j} \\
&\leqslant C \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_i f \Box_j g \|_{(p_0,r_0)} \chi_{k-i-j} \\
&\leqslant C \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_i f \|_{(p_1,r_1)} \| \Box_j g \|_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i-j}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\| fg \|_{M^{p_0,r_0}_{q_0,s}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq_0} \| fg \|^{q_0}_{(p_0,r_0)} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leqslant C \left(\sum_{k ß \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^s \| \Box_i f \|_{(p_1,r_1)} \| \Box_j g \|_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i-j} \right)^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leqslant C (\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k - i - j|)^s \| \Box_i f \|_{(p_1,r_1)} \\
&\cdot \ \| \Box_j g \|_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i-j})^{q_0})^{\frac{1}{q_0}} \\
&+ C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} |i|^s \| \Box_i f \|_{(p_1,r_1)} \| \Box_j g \|_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i-j} \right)^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&+ C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} |j|^s \| \Box_i f \|_{(p_1,r_1)} \| \Box_j g \|_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i-j} \right)^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&=: I + II + III.
\end{aligned}$$

Calculemos separadamente estimativas para (I), (II) e (III). Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
I &\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}(1+|\mu-j|)^s \parallel \Box_{k-\mu} f \parallel_{(p_1,r_1)}\parallel\parallel \Box_j g \parallel_{(p_2,r_2)} \chi_{\mu-j}\right)^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\parallel \Box_k f \parallel^{q_1}_{(p_1,r_1)}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\parallel \Box_j g \parallel_{(p_2,r_2)}(1+|k-j|)^s\right)^{q_2}\chi_{k-j}\right)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\leqslant C\parallel f \parallel_{M^{p_1,r_1}_{q_1,0}}\parallel g \parallel_{M^{p_2,r_2}_{q_2,0}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^s\chi_k\right)\\
&\leqslant C\parallel f \parallel_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}}\parallel g \parallel_{M^{p_2,r_2}_{q_2,s}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
II &\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}(1+|k-\mu|)^s \parallel \Box_{k-\mu} f \parallel_{(p_1,r_1)}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\parallel\parallel \Box_j g \parallel_{(p_2,r_2)} \chi_{\mu-j}\right)^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^{sq_1}\parallel \Box_k f \parallel^{q_1}_{(p_1,r_1)}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\parallel \Box_j g \parallel_{(p_2,r_2)}\right)^{q_2}\chi_{k-j}\right)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\leqslant C\parallel f \parallel_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}}\parallel g \parallel_{M^{p_2,r_2}_{q_2,0}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\chi_k\right)\\
&\leqslant C\parallel f \parallel_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}}\parallel g \parallel_{M^{p_2,r_2}_{q_2,s}}
\end{aligned}
$$

De maneira analoga a prova da estimativa de (II), provamos que

$$III \leqslant C \parallel f \parallel_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}}\parallel g \parallel_{M^{p_2,r_2}_{q_2,s}} .$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\parallel fg \parallel_{M^{p_0,r_0}_{q_0,s}} &\leqslant C(I+II+III)\\
&\leqslant C\parallel f \parallel_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}}\parallel g \parallel_{M^{p_2,r_2}_{q_2,s}} .
\end{aligned}
$$

■

Proposição 2.8. *Sejam* $1 \leqslant p, r, q \leqslant \infty$ *e* $s > \dfrac{n}{q'}$. *Então*

$$\parallel fg \parallel_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \parallel f \parallel_{M^{p,r}_{q,s}}\parallel g \parallel_{M^{p,r}_{q,s}} . \tag{2.8}$$

Demonstração: Note que

$$\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}=\frac{1}{p}\ ,\ \frac{1}{r}\leqslant\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\ ,\ \frac{1}{1}+\frac{1}{q}=(2-1)+\frac{1}{q}\ \text{e}\ s>(1-\frac{1}{q}).$$

Assim, de maneira análoga ao feito na demonstração de (2.7) e utilizando (2.5), (2.6) obtemos

$$\begin{aligned}\| fg \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant C(\| f \|_{M^{2p,r}_{q,s}} \| g \|_{M^{2p,r}_{1,0}} + \| g \|_{M^{2p,r}_{q,s}} \| f \|_{M^{2p,r}_{1,0}}) \\ &\leqslant C(\| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| g \|_{M^{p,r}_{1,0}} + \| g \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| f \|_{M^{p,r}_{1,0}}) \\ &\leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| g \|_{M^{p,r}_{q,s}} .\end{aligned}$$

■

Inclusões do tipo sobolev são muito úteis e aparecem no estudo de propriedades de diversos espaços clássicos, em [45] essas inclusões são provadas para espaços de Besov e espaços de Triebel-Lizorkin. O resultado a seguir mostra que esse tipo de inclusão também é valida para os espaços $M^{p,r}_{q,s}$.

Proposição 2.9. *Sejam* $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant r_0 \leqslant r_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $s_1, s_0 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$$

Então

$$M^{p_0,r_0}_{q,s_0} \hookrightarrow M^{p_1,r_1}_{q,s_1} \tag{2.9}$$

Demonstração: Seja $p_2 > 1$ tal que $\dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_2} - 1$. Aplicando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}\| f \|_{M^{p_1,r_1}_{q,s_1}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 q} \| \square_k f \|^q_{(p_1,r_1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 q} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \| (\varphi_{k-j} \varphi_k \widehat{f})^{\vee} \|^q_{(p_1,r_1)} \chi_{k-j} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 q} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \| \varphi^{\vee}_{k-j} \|^q_{(p_2,\infty)} \| \square_k f \|_{(p_0,r_0)} \chi_{k-j} \right)^{\frac{1}{q}} .\end{aligned}$$

Analisemos separadamente $\| \varphi^{\vee}_{k-j} \|_{(p_2,\infty)}$. Se $p_2 > 2$ aplicando a Desigualdade de Hausdorff-Young obtemos

$$\begin{aligned}\| \varphi^{\vee}_{k-j} \|_{(p_2,\infty)} &\leqslant C \| \varphi^{\vee}_{k-j} \|_{p_2} \\ &\leqslant C \| \varphi_{k-j} \|_{p'_2} \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-(k-j))|^{p'_2} dx \right)^{\frac{1}{p'_2}} \\ &= C \left(\int_{B(0,1)} |\varphi(\sqrt{n}x)|^{p'_2} (\sqrt{n})^n dx \right)^{\frac{1}{p'_2}} \\ &\leqslant C (\sqrt{n})^{n(1-\frac{1}{p_2})} \\ &\leqslant C \langle k \rangle^{n(1-\frac{1}{p_2})},\end{aligned}$$

com $C > 0$ suficientemente grande não dependendo de k.

Agora, se $p_2 < 2$ aplicando (1.4) e a desigualdade de Hausdorff-Young temos

$$\begin{aligned}
\| \varphi_{k-j}^{\vee} \|_{(p_2,\infty)} &\leqslant C \| \varphi_{k-j}^{\vee} \|_1^{\frac{2}{p_2}-1} \| \varphi_{k-j}^{\vee} \|_2^{2-\frac{2}{p_2}} \\
&\leqslant C \| \varphi_{k-j} \|_2^{2-\frac{2}{p_2}} \\
&\leqslant C(\sqrt{n})^{\frac{n}{2}(2-\frac{2}{p_2})} \\
&\leqslant C\langle k \rangle^{n(1-\frac{1}{p_2})},
\end{aligned}$$

com $C > 0$ suficientemente grande não dependendo de k.

Logo

$$\begin{aligned}
\| f \|_{M^{p_1,r_1}_{q,s_1}} &\leqslant C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{(s_1+n-\frac{n}{p_2})q} \| \Box_k f \|^q_{(p_0,r_0)} \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \chi_{k-j} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_0 q} \| \Box_k f \|^q_{(p_0,r_0)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \| f \|_{M^{p_0,r_0}_{q,s_0}}
\end{aligned}$$

■

2.2 Ação de alguns operadores e Interpolação

Iniciaremos essa seção com dois resultados importantes sobre a ação de convoluções nos espaços $M^{p,r}_{q,s}$.

Proposição 2.10. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leqslant p, r, q, p_1, p_2, r_1, r_2, q_1, q_2 \leqslant \infty$ tais que*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} + 1 \ , \ \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \ , \ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}.$$

Então

$$\| f \star g \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| f \|_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}} \| g \|_{M^{p_2,r_2}_{q_2,0}} \ . \tag{2.10}$$

para toda $f \in M^{p_1,r_1}_{q_1,s}$ e $g \in M^{p_2,r_2}_{q_2,0}$. Além disso, se $s > 0$ então

$$\| f \star g \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| f \|_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}} \| g \|_{M^{p_2,r_2}_{q_2,s}}, \tag{2.11}$$

para toda $f \in M^{p_1,r_1}_{q_1,s}$ e $g \in M^{p_2,r_2}_{q_2,s}$.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{Z}^n$ temos

$$\begin{aligned} \Box_k f \star g &= (\varphi_k (f \star g)^\wedge)^\vee \\ &= (\varphi_k \widehat{f} \widehat{g})^\vee \\ &= \left(\varphi_k \widehat{f} \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \varphi_{k-i} \widehat{g} \right)^\vee \chi_{k-i} \\ &= (\varphi_k \widehat{f})^\vee \star \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^n} (\varphi_{k-i} \widehat{g}) \chi_{k-i} \right)^\vee , \end{aligned}$$

em $supp\varphi_k$. Assim, aplicando a desigualdade de Young (ver página 25) vemos que

$$\| \Box_k f \star g \|_{(p,r)} \leqslant C \| \Box_k f \|_{(p_1,r_1)} \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_{k-i} g \|_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i}.$$

Agora utilizando a desigualdade de Holder (Ver página 25) obtemos

$$\begin{aligned} \| f \star g \|_{M^{p,r}_{q,s}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \| f \star g \|^q_{(p,r)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\langle k \rangle^s \| \Box_k f \|_{(p_1,r_1)} \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_{k-i} g \|_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq_1} \| \Box_k f \|^{q_1}_{(p_1,r_1)} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_{k-i} g \|^{q_2}_{(p_2,r_2)} \chi_{k-i} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}} \| g \|_{M^{p_2,r_2}_{q_2,0}} . \end{aligned}$$

Agora, se $s > 0$ então de (2.5) segue que

$$\begin{aligned} \| f \star g \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant C \| f \|_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}} \| g \|_{M^{p_2,r_2}_{q_2,0}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s}} \| g \|_{M^{p_2,r_2}_{q_2,s}} . \end{aligned}$$

■

Definição 2.11. *Para $0 < \gamma < n$ definimos o operador*

$$T_\gamma f(x) = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\gamma} dy = V_\gamma \star f(x),$$

com $V_\gamma(x) = \pm |x|^{-\gamma}$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Podemos extender o operador T para o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ fazendo

$$\langle T_\gamma f, \varphi \rangle = \langle f, T_\gamma \varphi \rangle,$$

para toda $f \in \mathcal{S}'$ e para toda $\varphi \in \mathcal{S}$.

Proposição 2.12. *Sejam $0 < \gamma < n$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $1 < p_1 < p_2 < \infty$ com*
$$\frac{1}{p_1} + \frac{\gamma}{n} - 1 = \frac{1}{p_2}.$$
Então
$$\| T_\gamma f \|_{M^{p_2,r}_{q,s}} \leqslant C \| f \|_{M^{p_1,r}_{q,s}}, \tag{2.12}$$
para toda $f \in M^{p_1,r}_{q,s}$.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{Z}^n$, aplicando a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev para espaços de Lorentz (ver página 25), obtemos

$$\begin{aligned} \| \Box_k T_\gamma f \|_{(p_2,r)} &= \| (\varphi_k (V_\gamma \star f)^\wedge)^\vee \|_{(p_2,r)} \\ &= \| (\varphi_k \widehat{V_\gamma} \widehat{f})^\vee \|_{(p_2,r)} \\ &= \| V_\gamma \star (\Box_k f) \|_{(p_2,r)} \\ &\leqslant C \| \Box_k f \|_{(p_1,r)} . \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \| T_\gamma f \|_{M^{p_2,r}_{q,s}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \| \Box_k f \|^q_{(p_2,r)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \| \Box_k f \|^q_{(p_1,r)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C \| f \|_{M^{p_1,r}_{q,s}} . \end{aligned}$$

■

Em espaços como espaço de Besov e espaços de Triebel-Lizorkin o estudo do parâmetro s foi feito em [45] através do estudo do operador ∂_k. No próximo resultado mostramos como esse operador afeta o parâmetro nos espaços $M^{p,r}_{q,s}$ e nos da uma desigualdade que será útil ao trabalharmos as não-linearidades das equações que iremos trabalhar no capítulo 3.

Proposição 2.13. *Sejam $1 \leqslant p, r, q \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Para $k = 1, 2, \ldots, n$ o operador diferencial $\partial_k = \partial_{x_k} : M^{p,r}_{q,s} \longrightarrow M^{p,r}_{q,s-1}$ é contínuo.*

Demonstração: Para cada $j \in \mathbb{Z}^n$ fixo temos que

$$\begin{aligned} \Box_j \partial_k f &= (\varphi_j (\partial_k f)^\wedge)^\vee \\ &= (\varphi_j \xi_k \widehat{f})^\vee \\ &= \left(\varphi_j \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \varphi_{j-i} \xi_k \widehat{f} \chi_{j-i} \right)^\vee \\ &= \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \varphi_{j-i} \xi_k \chi_{j-i} \right)^\vee \star (\Box_j f). \end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}\| \partial_k f \|_{M^{p,r}_{q,s-1}} &\leqslant C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{q(s-1)} \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n}\varphi_{j-i}\xi_k\chi_{j-i}\right)^{\vee} \right\|^q_{(1,\infty)} \| \Box_j f \|^q_{(p,r)}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= C\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{-q}\varphi_{j-i}\xi_k\chi_{j-i}\right)^{\vee} \right\|^q_{(1,\infty)} (\langle j\rangle^{sq} \| \Box_j f \|^q_{(p,r)})\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Note agora que, se $\alpha = (\delta_{ij})_{j=1}^n$ então

$$(\varphi_{j-i}\xi_k)^{\vee}(x) = (\varphi_{j-i}\xi_k)^{\wedge}(-x) = \frac{1}{2\pi i}\partial^{\alpha}\widehat{\varphi_{j-i}}(-x).$$

Além disso, $\langle j\rangle^{-q}\widehat{\varphi_{j-i}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}^n$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\partial^{\alpha}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{-q}\widehat{\varphi_{j-i}}\chi_{j-i}\right)(-x)| \leqslant C(1+|x|)^{-N} \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-N} < \infty,$$

com C independente de i e j.

Assim

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{-q}\varphi_{j-i}\xi_k\chi_{j-i}\right)^{\vee} \right\|_{(1,\infty)} &\leqslant \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{-q}\varphi_{j-i}\xi_k\chi_{j-i}\right)^{\vee} \right\|_1\\ &\leqslant \| (1+|x|)^{-N} \|_1\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Portanto

$$\| \partial_k f \|_{M^{p,r}_{q,s-1}} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} . \tag{2.13}$$

■

Definição 2.14. *Seja $\lambda > 0$. Definimos o operador dilatação por*

$$U_{\lambda}f(x) = f(\lambda x).$$

O efeito da dilatação na norma dos espaços é muito importante nos estudo de EDP's, em [54] é mostrado a limitação do operador U_λ para os espaços de α-Modulação. Aplicando algumas ideias lá desenvolvidas podemos análisar como o operador U_λ age nos espaços de modulação-Lorentz.

Lema 2.15. *(Ver [44] pág. 16) Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $s > 0$ e $\lambda > 0$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$C^{-1}\lambda^{\frac{-n}{p}}(1\wedge\lambda^s) \| f \|_{H^s_p} \leqslant \| U_\lambda f \|_{H^s_p} \leqslant C\lambda^{\frac{-n}{p}}(1\vee\lambda^s) \| f \|_{H^s_p} . \tag{2.14}$$

Proposição 2.16. *Sejam* $1 \leqslant p, r, q \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ *e* $s_0 > \dfrac{n}{2}$, $\lambda > 0$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\| U_\lambda f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C\lambda^{-n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{s}{n}\right)}(1 \vee \lambda^{s_0})(1 \vee \lambda^{-n})^{1-\frac{1}{q}} \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} . \tag{2.15}$$

Demonstração: Denotemos por $\square_{k,\lambda}$ o operador pseudo-diferencial com símbolo $\varphi_k(\lambda\cdot)$. Para cada $l \in \mathbb{Z}^n$ definimos o conjunto

$$\Lambda(l, \lambda) = \{k \in \mathbb{Z}^n : \square_{k,\lambda}\square_l f \neq 0\}.$$

Como $supp\varphi_k(\lambda\cdot) = \lambda^{-1}supp\varphi_k$ podemos considerar que o número de elementos de $\Lambda(l, \lambda)$ não supera $1 \vee \lambda^{-n}$. Além disso, para $k \in \Lambda(l, \lambda)$ temos

$$\lambda(l_j - \sqrt{n}) < (k_j + \sqrt{n}) \ , \ (k_j - \sqrt{n}) < \lambda(l_j + \sqrt{n}), \tag{2.16}$$

para $j = 1, \ldots, n$.

Logo, podemos ver que

$$k \in \Lambda(l, \lambda) \Leftrightarrow l \in \Lambda(k, l)$$

e

$$\langle l \rangle \preceq 1 \vee \lambda^{-1} \Leftrightarrow \langle k \rangle \preceq 1 \vee \lambda.$$

Considere o conjunto

$$\mathbb{R}^n_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leqslant |x_j|, i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}.$$

Se $\langle l \rangle \gg 1 \vee \lambda^{-1}$, sem perda de generalidade, podemos assumir que l pertence a algum $\mathbb{R}^n_j$ quando $l_j > 0$, para algum j. Por (2.17) vemos que

$$\langle k \rangle \succeq \lambda \langle l \rangle.$$

Já se $l_j < 0$ para todo j, utilizando (2.17) $\times$ (-1), obtemos o mesmo resultado. Reciprocamente, para $k \in \Lambda(l, \lambda) \cap \mathbb{R}^n_j$ por (2.17) temos

$$\langle k \rangle \preceq \lambda \langle l \rangle.$$

Então concluímos que

$$\langle k \rangle \sim \lambda \langle l \rangle.$$

Note ainda que aplicando mudança de variáveis obtemos

$$(\square_k U_\lambda f)(x) = (\square_{k,\lambda} f)(\lambda x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Assim, para cada k fixo, aplicando (1.17) e (2.14) temos que

$$\begin{aligned} \| \square_k U_\lambda \|_{(p,r)} &\leqslant \lambda^{-\frac{n}{p}} \| \square_{k,\lambda} f(\cdot\lambda) \|_{(p,r)} \\ &\leqslant C\lambda^{-\frac{n}{p}} \sum_{l\in\Lambda(k,\lambda)} \| \square_{k,\lambda}\square_l f \|_{(p,r)} \\ &\leqslant C\lambda^{-\frac{n}{p}} \sum_{l\in\Lambda(k,\lambda)} \| (\varphi_k)_\lambda \|_{H_2^s} \| \square_l f \|_{(p,r)} \\ &\leqslant C\lambda^{-\frac{n}{p}-\frac{n}{2}}(1 \vee \lambda^{s_0}) \sum_{l\in\Lambda(k,\lambda)} \| \square_l f \|_{(p,r)} . \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \| U_\lambda f \|_{M_{q,s}^{p,r}}^q &\leqslant C\lambda^{-nq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)}(1 \vee \lambda^{s_0})^q \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{qs} \left(\sum_{l\in\Lambda(k,\lambda)} \| \square_l f \|_{(p,r)} \right)^q \\ &\leqslant C\lambda^{-nq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+qs}(1 \vee \lambda^{s_0})^q (1 \vee \lambda^{-n})^{q-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{l\in\Lambda(k,\lambda)} \langle l\rangle^{qs} \| \square_l f \|_{(p,r)}^q \right) \\ &\leqslant C\lambda^{-nq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{s}{n}\right)}(1 \vee \lambda^{s_0})^q (1 \vee \lambda^{-n})^{\left(1-\frac{1}{q}\right)q} \| f \|_{M_{q,s}^{p,r}}^q . \end{aligned}$$

Portanto

$$\| U_\lambda f \|_{M_{q,s}^{p,r}} \leqslant C\lambda^{-n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{s}{n}\right)}(1 \vee \lambda^{s_0})(1 \vee \lambda^{-n})^{\left(1-\frac{1}{q}\right)} \| f \|_{M_{q,s}^{p,r}} .$$

■

Definição 2.17. *Seja $b \in \mathbb{R}$. Definimos o operador de Bessel e denotamos J_b, o operador pseudo-diferencial dado por*

$$(J_b f)^\wedge(\xi) = \langle\xi\rangle^b \widehat{f}(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sabemos que para espaços de Besov vale $J_b(B_{p,q}^s) = B_{p,q}^{s-b}$, como foi provado em [45]. Vamos mostrar que a ação do operador nos espaços de modulação-Lorentz é similar. Para isso precisaremos de alguns resultados preliminares que serão dados a seguir.

Lema 2.18. *(Ver [7])Existe uma partição da unidade $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ satisfazendo a definição 2.1 (ver página 35) e tal que*

$$|\partial^\beta \varphi_k| \leqslant C_\beta,$$

para todo multi-índice β e $k \in \mathbb{Z}^n$, com C_β independente de k.

Proposição 2.19. *Sejam L o maior inteiro anterior a $\dfrac{n}{2}$ e $\sigma \in C^L(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$|\partial^\beta \sigma(\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{b-|\beta|\rho},$$

para $|\beta| \leqslant L$, $b \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Seja T um multiplicador de Fourier dado por

$$(Tf)^\wedge = \sigma\widehat{f} .$$

Então podemos extender T para um operador limitado

$$T : M^{p,r}_{q,s} \longrightarrow M^{p,r}_{q,s-b},$$

para $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ e $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$.

Demonstração: Seja $\{\varphi_k\}$ uma partição da unidade como no Lema anterior. Para cada $k \in \mathbb{Z}^n$ definimos

$$\Psi_k = \sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} \varphi_k \chi_{k-k'}.$$

Assim

$$|\partial^\beta \Psi_k(\xi)| \leqslant C \ , \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

com $C > 0$ independente de k.

Defina

$$\sigma_k(\xi) = \langle k \rangle^{-b} \sigma(\xi) \Psi_k(\xi).$$

Temos

$$\begin{aligned} |\partial^\beta \sigma_k(\xi)| &\leqslant \langle k \rangle^{-b} \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial^\gamma \sigma(\xi)| |\partial^{\beta-\gamma} \Psi_k(\xi)| \\ &\leqslant C \langle k \rangle^{-b} \sum_{\gamma \leqslant \beta} \langle \xi \rangle^{b-|\gamma|\rho} \\ &\leqslant C \langle k \rangle^{-b} \langle \xi \rangle^{b}. \end{aligned}$$

com C dependendo apenas de β.

Mais ainda, para $\xi \in supp \Psi_k$ temos

$$\langle k \rangle \sim \langle \xi \rangle \text{ e } |\xi - k|^n \leqslant C|B(k,R)| \sim \sqrt{n}^n,$$

com $R \sim 3\sqrt{n}$, e então

$$1 \leqslant C|\xi - k|^{-|\beta|}.$$

Logo

$$\begin{aligned} |\partial^\beta \sigma_k(\xi)| &\leqslant C \\ &\leqslant C|\xi - k|^{-|\beta|}. \end{aligned}$$

Agora aplicando o Teorema de Hormander-Michlin para multiplicadores de Fourier (conforme [30]), aplicado para $\tilde{\sigma_k}(\xi) = \sigma_k(\xi + k)$, vemos que σ_k se extende a um multiplicador limtiado em L^p com $1 < p < \infty$, como limitação independente de k. Daí, aplicando o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz (conforme [31], pág. 56) podemos extender para $L^{(p,r)}$.

Logo, como $\Psi_k(\xi) = 1$ em $supp\varphi_k$, temos

$$\begin{aligned} \| (\varphi_k \sigma \widehat{f})^{\vee} \|_{(p,r)} &\leqslant \| (\langle k \rangle^b \sigma_k \varphi_k \widehat{f})^{\vee} \|_{(p,r)} \\ &\leqslant C \langle k \rangle^b \| (\varphi_k \widehat{f})^{\vee} \|_{(p,r)} . \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \| Tf \|^q_{M^{p,r}_{q,s}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{qs} \| (\sigma \varphi_k \widehat{f})^{\vee} \|^q_{(p,r)} \\ &\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{q(s+b)} \| (\varphi_k \widehat{f})^{\vee} \|^q_{(p,r)} \\ &= C \| f \|^q_{M^{p,r}_{q,s+b}} . \end{aligned}$$

■

Corolário 2.20. *Sejam $b \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Então, $J_b(M^{p,r}_{q,s}) = M^{p,r}_{q,s-b}$, no sentido que*

$$\| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \simeq \| J_b f \|_{M^{p,r}_{q,s-b}}, \tag{2.17}$$

para toda $f \in M^{p,r}_{q,s}$.

Demonstração: Aplicando a proposição anterior para $T = J_b$ e $T = J_{-b}$ temos que os operadores

$$J_b : M^{p,r}_{q,s} \longrightarrow M^{p,r}_{q,s-b}$$

e

$$J_{-b} : M^{p,r}_{q,s-b} \longrightarrow M^{p,r}_{q,s}$$

são limitados. Assim dada $f \in M^{p,r}_{q,s}$ temos que

$$\| J_b f \|_{M^{p,r}_{q,s-b}} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} .$$

Por outro lado, como $(J_b)^{-1} = J_{-b}$ então

$$\begin{aligned} \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} &= \| (J_b)^{-1} J_b f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &= \| J_{-b} J_b f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C \| J_b f \|_{M^{p,r}_{q,s-b}} . \end{aligned}$$

Assim, obtemos o resultado.

■

Agora vamos fazer um estudo da interpolação complexa para os espaços $M^{p,r}_{q,s}$. Assim como feito para espaços de α-Modulação em [54] obteremos um resultado similar.

Definição 2.21. *(1) Seja $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}$. Dizemos que uma função $f : S \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é analítica se:*

(i)$\forall z \in \overline{S}$, $f(z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

(ii)$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto, $(\varphi \widehat{f}(x,z))^\vee$ é uma função uniformemente contínua e limitada em $\mathbb{R}^n \times \overline{S}$.

(iii)$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto, $(\varphi \widehat{f})^\vee(x,z)$ é analítica em S para todo x fixo em $\mathbb{R}^n$

Denotamos por $A(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas funções $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$-analíticas.

(2) Sejam A_0 e A_1 espaços quase-Banach e $0 < \theta < 1$. Definimos o espaço

$$F(A_0, A_1) = \{\varphi(z) \in A(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \varphi(l + it) \in A_l, l = 0, 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$e \ \| \varphi(z) \|_{F(A_0,A_1)} < \infty\},$$

onde

$$\| \varphi(z) \|_{F(A_0,A_1)} = \max \sup_{l=0,1; t\in\mathbb{R}} \| \varphi(l + it) \|_{A_l} .$$

A partir desse espaço podemos definir o seguinte espaço:

$$(A_1, A_0)_\theta = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \exists \varphi(z) \in F(A_0, A_1); f = \varphi(\theta)$$

$$e \ \| f \|_{(A_0,A_1)_\theta} < \infty\},$$

onde

$$\| f \|_{(A_0,A_1)_\theta} = \inf\{\| \varphi(\theta) \|_{F(A_0,A_1)} : \varphi(\theta) = f, \varphi \in F(A_0, A_1)\}.$$

A seguir enunciaremos alguns resultados sobre os espaço definidos acima que podem ser encontrados em [54] para mais detalhes.

Proposição 2.22. *O espaço $((A_0, A_1)_\theta, \| \cdot \|_{(A_0,A_1)_\theta})$ é quase-Banach.*

Proposição 2.23. *Para toda $f \in (A_0, A_1)_\theta$ temos que*

$$\| f \|_{(A_0,A_1)_\theta} = \inf\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \| \varphi(it) \|_{A_0}^{1-\theta} \sup_{t\in\mathbb{R}} \| \varphi(1 + it) \|_{A_1}^{\theta} : \varphi(z) \in F(A_0, A_1), \varphi(\theta) = f\}.$$

Proposição 2.24. *Seja T um operador multilinear contínuo de*

$$A_0^{(1)} \times A_0^{(2)} \times \ldots \times A_0^{(m)} \ em \ B_0$$

e de

$$A_1^{(1)} \times A_1^{(2)} \ldots \times A_1^{(m)} \ em \ B_1,$$

satisfazendo

$$\| T(f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}) \|_{B_0} \leqslant C_0 \prod_{j=1}^{m} \| f^{(j)} \|_{A_0^{(j)}}$$

e

$$\| T(f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}) \|_{B_1} \leqslant C_0 \prod_{j=1}^{m} \| f^{(j)} \|_{A_1^{(j)}},$$

para toda $f^{(j)} \in A_0^{(j)} \cap A_1^{(j)}$. *Então* T *é contínuo de* $(A_0^{(1)}, A_1^{(1)})_\theta \times \ldots \times (A_0^{(m)}, A_1^{(m)})_\theta$ *em* $(B_0, B_1)_\theta$ *com norma no máximo* $C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}$, *desde que* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Antes de enunciarmos e provarmos a propriedade de interpolação precisaremos de dois lemas que serão essenciais na demonstração, os quais enunciaremos a seguir.

Lema 2.25. *(Lema das três linhas de Doestsch, ver [45] pág. 194) Seja* $\theta \in (0,1)$. *Então para toda função analítica* F *em* S *e contínua em* $\overline{S}$, *satisfazendo*

$$\sup_{z \in \overline{S}} e^{-a|Im(z)|} \log |F(z)| < \infty$$

para algum $a \in (0, \pi)$, *temos*

$$|F(\theta)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |F(it)| \frac{\mu_0(t)}{1-\theta} dt \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(1+it)| \frac{\mu_1(t)}{\theta} dt \right)^{\theta}$$

onde μ_0 *e* μ_1 *são definidas por*

$$\mu_0 = \frac{\operatorname{sen}(\pi\theta)}{2[\cosh(\pi t) - \cos(\pi t)]} \text{ e } \mu_1(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\theta)}{2[\cosh(\pi t) + \cos(\pi t)]}$$

com, $\| \mu_0 \|_1 = 1 - \theta$ *e* $\| \mu_1 \|_1 = \theta$. *Em particular,*

$$|F(\theta)| \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(it)|^{1-\theta} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(1+it)|^{\theta}$$

O próximo lemas nos dara uma desigualdade importante baseada em funções maximais definidas a partir da partição da unidade $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$. Para isso precisaremos da seguinte definição:

Definição 2.26. *Seja* $b > 0$ *e* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Para cada* $k \in \mathbb{Z}^n$ *definimos a função maximal,*

$$(\varphi_k f)_b^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Box_k f(x-y)|}{1+|y|^b} \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.27. *Note que* $(\varphi_k f)_b^*(x) \geqslant \Box_k f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 2.28. *Sejam* $1 \leqslant p < \infty$,$1 \leqslant r \leqslant \infty$ *e* $b > \dfrac{1}{\min\{p,q\}}$. *Então:*

$$\| (\varphi_k f)_b^* \|_{(p,r)} \leqslant C \| \square_k f \|_{(p,r)} \tag{2.18}$$

para toda $f \in L^{(p,r)}$ *e* $k \in \mathbb{Z}^n$.

***Demonstração**: Como* $(\square_k f)^\wedge$ *tem suporte compacto, aplicando o Teorema 1.4.1 em [49] obtemos que*

$$\| (\varphi_k f)_b^* \|_\sigma \leqslant C \| \square_k f \|_\sigma,$$

para todo $\sigma > 0$. *Logo, basta aplicarmos o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz e concluímos o resultado.*

■

Proposição 2.29. *(Interpolação Complexa) Sejam* $1 \leqslant p, p_0, p_1 < \infty$, $1 \leqslant r, r_0, r_1, q, q_0, q_1 \leqslant \infty$ *e* $0 < \theta < 1$ *tais que*

$$s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1 \ , \ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{1}{p_1} \ , \ \frac{1}{r} \leqslant \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1} \ , \ \frac{1}{r} \leqslant \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1} \ , \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Além disso, se $r = \infty$ *então* $r_0 = r_1 = \infty$ *e se* $r < \infty$ *então*

$$\frac{r}{p} \leqslant \min\{\frac{r_0}{p_0}, \frac{r_1}{p_1}\}.$$

Nestas condições vale que

$$(M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}, M^{p_1,r_1}_{q_1,s_1})_\theta = M^{p,r}_{q,s}.$$

Demonstração: Primeiramente iremos provar que

$$M^{p,r}_{q,s} \subset (M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}, M^{p_1,r_1}_{q_1,s_1})_\theta.$$

Para tal basta provar que existe $\phi(z) \in A(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\phi(\theta) = \phi(\cdot, \theta) = f \text{ e } \| \phi(l+it) \|_{M^{p_l,r_l}_{q_l,s_l}} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \ , \ l = 0,1.$$

Seja $z \in \overline{S}$, escrevemos

$$s(z) = (1-z)s_0 + zs_1 \ , \ \frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \ , \ \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}.$$

Tome $\psi_k := \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi_l \chi_{k-l}$ e então segue que $\psi_k = 1$ em $supp\varphi_k$. Para toda $f \in M^{p,r}_{q,s}$, definimos

$$\phi(x,z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left[\psi_k \left(\langle k \rangle^{s-s(z)} \| \square_k f \|_{(p,r)}^{1-\frac{p}{p(z)}} (\square_k f)^{\frac{p}{p(z)}} \right)^\wedge \right]^\vee (x).$$

Assim

$$\phi(z) \in A(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ e } \phi(\theta) = \phi(\cdot, \theta) = f.$$

Considere $z = it$. Para cada $j \in \mathbb{Z}^n$ temos que

$$
\begin{aligned}
\Box_j \phi(x,it) &\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s-s(it)} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)}^{1-\frac{p}{p(it)}} [\varphi_j \psi_k (\Box_k f)^{\frac{p}{p(it)}})^{\wedge}]^{\vee}(x)\chi_{k-j} \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s-s(it)} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)}^{1-\frac{p}{p(it)}} \int_{\mathbb{R}^n} [(\varphi_j)^{\vee} \star (\psi_k)^{\vee}](y) \\
&\cdot \quad ((\Box_k f)^{\frac{p}{p(it)}})(x-y) dy \chi_{k-j} \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s-s(it)} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)}^{1-\frac{p}{p(it)}} [(\varphi_k f)_b^*(x)]^{Re(\frac{p}{p(it)})} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi)^{\vee} \star (\varphi)^{\vee}(y)|(1+|y|^b)^{Re(\frac{p}{p(it)})} dy \chi_{k-j} \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s-s(it)} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)}^{1-\frac{p}{p(it)}} [(\varphi_k f)_b^*(x)]^{Re(\frac{p}{p(it)})} \chi_{k-j},
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com a constante $C > 0$ independente de k, j e z. Tomando a norma do espaço $L^{(p_0,r_0)}$ e aplicando (2.18) e (1.11) obtemos

$$
\begin{aligned}
\parallel \Box_j \phi(\cdot,it) \parallel_{(p_0,r_0)} &\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{Re(s-s(it))} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)}^{Re(1-\frac{p}{p(it)})} \parallel (\varphi_k f)_b^*(x)]^{Re(\frac{p}{p(it)})} \parallel_{(p_0,r_0)} \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s-s_0} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)}^{1-\frac{p}{p_0}} \parallel (\varphi_k f)_b^*(x) \parallel_{(p,\frac{r_0 p}{p_0})}^{\frac{p}{p_0}} \chi_{k-j} \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s-s_0} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)} \chi_{k-j},
\end{aligned}
$$

onde b é um número real tal que $b > \dfrac{1}{\min\{p,q\}}$. Tome $\tilde{q}$ tal que

$$1 + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{1}{q}.$$

Agora, multiplicando a desigualdade por $\langle j\rangle^{s_0}$,tomando a norma de l^{q_0} e aplicando a desigualdade de Young para séries concluímos que

$$
\begin{aligned}
\parallel \phi(\cdot,it) \parallel_{M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}} &\leqslant C \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \langle j\rangle^{s_0 q_0} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s-s_0} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)} \chi_{k-j} \right)^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leqslant C \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s} \parallel \Box_k f \parallel_{(p,r)} \chi_{k-j} \right)^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \chi_j \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \langle j\rangle^{sq} \parallel \Box_j f \parallel_{(p,r)}^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant C \parallel f \parallel_{M^{p,r}_{q,s}} .
\end{aligned}
$$

De maneira análoga mostramos a desigualdade para $z = 1 + it$.

Reciprocamente, vamos mostrar que $(M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}, M^{p_1,r_1}_{q_1,s_1})_\theta \subset M^{p,r}_{q,s}$. Dada $f \in (M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}, M^{p_1,r_1}_{q_1,s_1})_\theta$, se $\phi \in A(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\phi(\theta) = f$, aplicando o Lema das três linhas de

Doetsh obtemos duas funções positivas $u_0(\theta,t)$ e $u_1(\theta,t)$ em $(0,1)\times\mathbb{R}$ satisfazendo

$$|\Box_k f| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} \Box_k\varphi(it)\frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}} \Box_k\varphi(1+it)\frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta}dt\right)^{\theta},$$

com

$$\frac{1}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}}\mu_0(\theta,t)dt = \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}}\mu_1(\theta,t)dt = 1.$$

Agora, aplicando a norma de $L^{(p,r)}$ na desigualdade acima e utilizando as desigualdades de Holder e do tipo Minkowski (Ver página 26), temos

$$\begin{aligned}
\| \Box_k f \|_{(p,r)} &\leqslant \| \int_{\mathbb{R}} \Box_k\phi(it)\frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt \|^{1-\theta}_{(p_0,r_0)} \| \int_{\mathbb{R}} \Box_k\phi(1+it)\frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta}dt \|^{\theta}_{(p_1,r_1)} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} \| \Box_k\phi(it) \|_{(p_0,r_0)} \frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt\right)^{1-\theta} \\
&\cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \| \Box_k\phi(1+it) \|_{(p_1,r_1)} \frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta}dt\right)^{\theta}.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Holder para séries obtemos

$$\begin{aligned}
\| f \|^q_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{sq}\left(\left(\int_{\mathbb{R}} \| \Box_k\phi(it) \|_{(p_0,r_0)} \frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt\right)^{1-\theta}\right)^q \\
&\left(\left(\int_{\mathbb{R}} \| \Box_k\phi(1+it) \|_{(p_1,r_1)} \frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta}dt\right)^{\theta}\right)^q.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{s_0q_0}\left(\int_{\mathbb{R}} \| \Box_k\phi(it) \|_{(p_0,r_0)} \frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt\right)^{q_0}\right)^{\frac{1-\theta}{q_0}} \\
&\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{s_1q_1}\left(\int_{\mathbb{R}} \| \Box_k\phi(1+it) \|_{(p_1,r_1)} \frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta}dt\right)^{q_1}\right)^{\frac{\theta}{q_1}} \\
&\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \| \varphi(it) \|^{1-\theta}_{M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \| \varphi(1+it) \|^{\theta}_{M^{p_1,r_1}_{q_1,s_1}}.
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de ínfimo concluímos que

$$\| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| f \|_{(M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}, M^{p_1,r_1}_{q_1,s_1})_\theta}.$$

Portanto $(M^{p_0,r_0}_{q_0,s_0}, M^{p_1,r_1}_{q_1,s_1})_\theta \subset M^{p,r}_{q,s}$.

■

2.3 Relações entre espaços clássicos e o espaço $M^{p,r}_{q,s}$

Nesta seção vamos obter relações entre os espaços de modulação-Lorentz e espaços de Sobolev generalizado e espaços de Besov. Para espaços de Modulação essas inclusões foram estudadas em [53] e várias das ideias la desenvolvidas podem ser aplicadas para nosso espaço.

Definição 2.30. *Para cada $k \in \mathbb{Z}^n$ definimos Q_k como o cubo unitário de centro em k.*

Lema 2.31. *Seja $1 \leqslant q \leqslant \infty, 2 \leqslant r \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Então*

$$\| f \|_{M^{2,r}_{q,s}} \leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{sq} \| \chi_{Q_k} \widehat{f} \|_2^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.19}$$

Demonstração: Aplicando (1.11), (1.13) e a desigualdade de Hausdorff-Young (ver página 25) temos

$$\begin{aligned} \| \square_k f \|_{(2,r)} &\leqslant \| \square_k f \|_{(2,2)} \\ &\leqslant C \| \square_k f \|_2 \\ &\leqslant C \| \varphi_k \widehat{f} \|_2 \\ &\leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \| \chi_{Q_{k-i}} \widehat{f} \|_2 \, \chi_{k-i}, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n$.

Tomando a norma em $l^q(\mathbb{Z}^n)$ obtemos o resultado.

■

Proposição 2.32. *Sejam $1 \leqslant p, r, q \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Temos:*

(i) Se $s > n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$, $r \geqslant 2$ e $0 < q < 2$ então

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{2,r}_{q,0}(\mathbb{R}^n) \tag{2.20}$$

(ii) Se $1 \leqslant q \leqslant 2$, $1 < p < 2$ e $s > 0$ então

$$M^{p,r}_{q,s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \tag{2.21}$$

(iii) Se $s < n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$, $2 < q \leqslant \infty$ e $1 < p < 2$ então

$$M^{p,r}_{q,0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \tag{2.22}$$

Demonstração: Primeiramente vamos demonstrar (2.20). Observe que existe no máximo $O(i^{n-1})$ elementos $k \in \mathbb{Z}^n$ tais que

$$|k_1| + \ldots + |k_n| = i \ .$$

Utilizando (2.19) e a desigualdade de Holder para séries, obtemos

$$\begin{aligned}
\| f \|^q_{M^{2,r}_{q,0}} &\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \chi_{Q_k} \widehat{f} \|^q_2 \right) \\
&\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-sq} \| (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \chi_{Q_k} \widehat{f} \|^q_2 \right) \\
&\leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{\frac{-2sq}{2-q}} \right)^{\frac{2-q}{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \chi_{Q_k} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \|^2_2 \right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leqslant C \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|k|=i} (1+|k|)^{\frac{-2sq}{2-q}} \right)^{\frac{2-q}{2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \chi_{Q_k} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \|^2_2 \right)^{\frac{q}{2}} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty} (1+i)^{\frac{-2sq}{2-q} - 1 + n} \right)^{\frac{2-q}{2}} \| f \|^q_{H^s} \ .
\end{aligned}$$

Como $s > n\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2}\right)$ então

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} (1+i)^{\frac{-2sq}{2-q} - 1 + n} \right)^{\frac{2-q}{2}} < \infty,$$

e assim

$$\| f \|_{M^{2,\infty}_{q,0}} \leqslant C \| f \|_{H^s} \ .$$

Agora provemos (2.21). Utilizando (1.1), (1.2), a desigualdade de Hausdorff-Young e (1.14), temos

$$\begin{aligned}
\| f \|_{H^s} &\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \varphi_k (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \|^2_2 \\
&\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{2s} \| \varphi_k \widehat{f} \|^2_2 \\
&\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{2s} \| \varphi_k \widehat{f} \|^{\frac{1-\frac{2}{p'}}{1-\frac{1}{p'}}}_{(1,\infty)} \| \varphi_k \widehat{f} \|^{\frac{1}{1-\frac{1}{p'}}}_{(p',\infty)} \\
&\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{2s} \| \varphi_k \widehat{f} \|^2_{(p',\infty)} \\
&\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{2s} \| \square_k f \|^2_{(p,\infty)} \\
&\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{2s} \| \square_k f \|^2_{(p,r)} \\
&\leqslant C \| f \|^2_{M^{p,r}_{q,s}} \ .
\end{aligned}$$

Assim

$$\| f \|_{H^s} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} .$$

Finalmente provemos (2.22). De forma análoga aos cálculos feitos acima obtemos

$$\| f \|_{H^s} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{2,s}} .$$

Como $s < n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)$ e $q > 2$ então por (2.6) temos que

$$M^{p,r}_{q,0} \hookrightarrow M^{p,r}_{2,s}$$

e assim

$$\| f \|_{H^s} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,0}} .$$

■

Proposição 2.33. *Sejam* $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ *e* $\varepsilon > 1$.

(i) Se $q < 1$ *então*

$$M^{p,r}_{q,0} \hookrightarrow B^0_{\varepsilon p,q}. \tag{2.23}$$

(ii) Se $q \geqslant 1$ *então*

$$M^{p,r}_{q,n\left(1-\frac{1}{q}\right)} \hookrightarrow B^0_{\varepsilon p,q}. \tag{2.24}$$

(iii) Se $1 \leqslant q < 2$ *e* $r \geqslant 2$ *então*

$$B^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}_{2,q} \hookrightarrow M^{2,r}_{q,0}. \tag{2.25}$$

(iv) Se $2 \leqslant q \leqslant \infty$ *e* $r \geqslant 2$ *então*

$$M^{2,r}_{q,n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \hookrightarrow B^0_{2\varepsilon,q}. \tag{2.26}$$

Demonstração: Seja $a_k = (2^{k-1} - \sqrt{n}) \vee 0$, $b_k = 2^{k+1} + \sqrt{n}$. Como

$$supp\varphi_i \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - i| \leqslant \sqrt{n}\} \text{ e } supp\delta_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}\},$$

temos que

$$\Delta_k(\Box_i f) = 0 \ , \ |i| \notin [a_k, b_k].$$

Além disso, podemos observar que o anel $\{\xi \in \mathbb{R}^n : a_k \leqslant |\xi| \leqslant b_k\}$ contém no máximo $O(2^{kn})$ cubos unitários.

Primeiramente mostremos (2.23). Agora, utilizando (1.17), (1.1), (2.2) e (1.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Delta_k f \|_{\varepsilon p}^q &\leqslant \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} \| \Delta_k(\Box_i f) \|_{\varepsilon p} \right)^q \\
&\leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} \| \Box_i f \|_{\varepsilon p}^q \\
&\leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} \left(\| \Box_i f \|_{(p,\infty)}^{\frac{\frac{1}{\varepsilon p} - \frac{1}{(\varepsilon+1)p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{(\varepsilon+1)p}}} \| \Box_i f \|_{((\varepsilon+1)p,\infty)}^{\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{\varepsilon p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{(\varepsilon+1)p}}} \right)^q \\
&\leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} \| \Box_i f \|_{(p,\infty)}^q \\
&\leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} \| \Box_i f \|_{(p,r)}^q .
\end{aligned}$$

Então, somando em k, concluímos

$$\| f \|_{B^0_{\varepsilon p, q}} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q,0}}$$

Agora mostremos (2.24). Analogamente ao feito em (i) obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Delta_k f \|_{\varepsilon p}^q &\leqslant \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} \| \Delta_k(\Box_i f) \|_{\varepsilon p} \right)^q \\
&\leqslant \sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} 2^{kn(q-1)} \| \Delta_k(\Box_i f) \|_{\varepsilon p}^q \\
&\leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} 2^{kn(q-1)} \| \Box_i f \|_{(p,r)}^q .
\end{aligned}$$

Observe que, para $|i| \in [a_k, b_k]$ temos $2^k \backsim |i|$, com $C > 0$ independente de k e i. Logo

$$\| \Delta_k f \|_{\varepsilon p}^q \leqslant C \sum_{i \in \mathbb{Z}^n, |i| \in [a_k, b_k]} \langle i \rangle^{n(q-1)} \| \Box_i f \|_{(p,r)}^q .$$

Tomando a norma em $l^q(\mathbb{Z})$ obtemos

$$\| f \|_{B^0_{\varepsilon p, q}} \leqslant C \| f \|_{M^{p,r}_{q, n\left(1 - \frac{1}{q}\right)}} .$$

Finalmente provemos (2.24). Utilizando (2.19), para algum $L \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
\| f \|^q_{M^{2,r}_{q,0}} &\leqslant C\left(\sum_{|k|\leqslant 2^L} \| \chi_{Q_k}\widehat{f} \|_2^q + \sum_{k=L}^{\infty} \sum_{i\in\mathbb{Z}^n,|i|\in[a_k,b_k]} \| \chi_{Q_i}\widehat{f} \|_2^q\right)\\
&\leqslant C\left(\| f \|_2^q + \sum_{k=L}^{\infty} 2^{kn(1-\frac{q}{2})}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n,|i|\in[a_k,b_k]}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{Q_i}\widehat{f}|^2dx\right)^{\frac{q}{2}}\right)\\
&\leqslant C\left(\| f \|_2^q + \sum_{k=L}^{\infty} 2^{kn(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})q} \| \chi_{(2^{k-2},2^{k+1})}\widehat{f} \|_2^q\right)\\
&\leqslant C \| f \|^q_{B^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}_{2,q}}.
\end{aligned}$$

A demostração de (2.26) segue com raciocínio análogo ao feito para (2.25).

■

Proposição 2.34. *Sejam* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$*,* $q > p \wedge p'$ *e* $\varepsilon > 0$*. Então*

$$M^{p,\infty}_{q,\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^0_{\varepsilon p,q}, \tag{2.27}$$

onde $\sigma(p,q) = \max\left\{0, n\left(\frac{1}{p\wedge p'} - \frac{1}{q}\right)\right\}$.

Demonstração: Utilizando (2.24) e (2.26) obtemos,

$$M^{p,\infty}_{\infty,n} \hookrightarrow B^0_{\varepsilon p,\infty}\ ,\ 1\leqslant p\leqslant\infty$$

$$M^{2,\infty}_{q,n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \hookrightarrow B^0_{2\varepsilon,q}\ ,\ 2\leqslant q\leqslant\infty.$$

Tomando $p = 1, 2, \infty$ e $q = \infty$ temos que

$$M^{1,\infty}_{\infty,n} \hookrightarrow B^0_{\varepsilon,\infty}, \tag{2.28}$$

$$M^{2,\infty}_{\infty,\frac{n}{2}} \hookrightarrow B^0_{2\varepsilon,\infty} \tag{2.29}$$

e

$$M^{\infty,\infty}_{\infty,n} \hookrightarrow B^0_{\infty,\infty}. \tag{2.30}$$

Agora, aplicamos a propriedade de Interpolação Complexa (ver página 55) da seguinte forma

- Para $1 < p < 2$, utilizamos (2.28), (2.29) e escolhemos $\theta = \frac{2}{p} - 1$.
- Para $p > 2$, utilizamos (2.29), (2.30) e escolhemos $\theta = \frac{2}{p}$.

obtendo assim, em ambos os casos, a seguite inclusão contínua

$$M^{p,\infty}_{\infty,\frac{n}{p\wedge p'}} \hookrightarrow B^0_{p\varepsilon,\infty} \ , \ 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{2.31}$$

Além disso, novamente aplicando (2.24),(2.26) e (2.5), temos

$$M^{1,\infty}_{1,0} \hookrightarrow M^{p,\infty}_{1,0} \hookrightarrow B^0_{p\varepsilon,1} \ , \ 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{2.32}$$

e

$$M^{2,\infty}_{2,0} \hookrightarrow B^0_{2\varepsilon,2}. \tag{2.33}$$

Para concluir a demonstração vamos analisar separadamente três condições para p e q.

- Caso 1: $1 < p < q < 2$

Tomando $p = 1$ em (2.32) e utilizando (2.33), (2.5) obtemos

$$M^{1,\infty}_{1,\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^0_{\varepsilon,1}$$

e

$$M^{2,\infty}_{2,\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^0_{2\varepsilon,2}.$$

Aplicando a propriedade de Interpolação complexa nas inclusões acima, sendo para $\theta = \frac{2}{q} - 1$ nos espaços a esquerda e $\theta = \frac{2}{p} - 1$ a direita temos que

$$M^{q,\infty}_{q,\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^0_{\varepsilon p,p}.$$

Mas $l^p \subset l^q$ e por (2.2) segue que

$$M^{p,\infty}_{q,\sigma(p,q)} \hookrightarrow M^{q,\infty}_{q,\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^0_{p\varepsilon,p} \hookrightarrow B^0_{p\varepsilon,q}.$$

- Caso 2: $q > p > 2$

Por (2.31), (2.33) e (2.5) temos

$$M^{\infty,\infty}_{\infty,\frac{n}{p\wedge p'}} \hookrightarrow B^0_{\infty,\infty}$$

e

$$M^{2,\infty}_{2,\frac{n}{p\wedge p'}-\frac{n}{2}} \hookrightarrow B^0_{2\varepsilon,2}.$$

Aplicando a propriedade de Interpolação complexa para, $\theta = \frac{2}{p}$ nos espaços a esquerda e $\theta = \frac{2}{p}$ a direita, obtemos

$$M^{q,\infty}_{q,\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^0_{p\varepsilon,p}.$$

Então analogamente ao feito no caso 1 obtemos (2.27).

- Caso 3: $q > 2 > p > 1$

Seja $1 < \delta < p$. Aplicando a propriedade de Interpolação complexa para (2.32) e (2.33), sendo $\theta = \dfrac{2}{p} - 1$ nos espaços a esquerda e $\theta = \dfrac{2}{\delta} - 1$ a direita, obtemos

$$M^{p,\infty}_{p,0} \hookrightarrow B^0_{\delta\varepsilon,\delta}.$$

Assim, aplicando novamente interpolação para a inclusão acima e (2.31), temos

$$M^{q,\infty}_{q,\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^0_{p\varepsilon,p},$$

e de maneira análoga aos casos anteriores obtemos (2.27).

■

Proposição 2.35. *Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 1$. Então*

$$M^{p,\infty}_{q,s+\sigma(p,q)} \hookrightarrow B^s_{p\varepsilon,q}. \tag{2.34}$$

Demonstração: De maneira análoga as inclusões (2.24) e (2.26) provamos que

$$M^{p,\infty}_{q,s+n(1-\frac{1}{q})} \hookrightarrow B^s_{\varepsilon p,q}$$

e

$$M^{2,\infty}_{q,s+n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \hookrightarrow B^s_{2\varepsilon,q}\ ,\ 2 \leqslant q \leqslant \infty.$$

Assim, basta seguir o raciocínio da proposição anterior e obtemos o resultado desejado.

■

Lema 2.36. *Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Então*

$$B^{s+\frac{n}{q}}_{p,q} \hookrightarrow M^{p,\infty}_{q,s}. \tag{2.35}$$

Demonstração: Seja $L > 0$ suficientemente grande. Temos

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{sq} \parallel \Box_k f \parallel^q_{p,\infty} &\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 2^L} \langle k\rangle^{sq} \parallel \Box_k f \parallel^q_p \\ &+ C \sum_{j=L}^{\infty} \sum_{|k|\in[2^{j-1},2^j)} \langle k\rangle^{sq} \parallel \Box_k f \parallel^q_p \\ &=: C(I + II). \end{aligned}$$

Analisando (I) vemos que

$$
\begin{aligned}
I &\leqslant \sum_{|k|\leqslant 2^L} \sum_{j=0}^{L+1} \langle k\rangle^{sq} \parallel \square_k \Delta_j f \parallel_p^q \\
&\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 2^L} \sum_{j=0}^{L+1} 2^{jsq} \parallel \Delta_j f \parallel_p^q \\
&\leqslant C \parallel f \parallel_{B^s_{p,q}}^q .
\end{aligned}
$$

Como o conjunto $\{k \in \mathbb{Z}^n : |k| \in [2^{j-1}, 2^j)\}$ tem no máximo $O(2^{jn})$ elementos podemos ver que

$$
\begin{aligned}
II &\leqslant C \sum_{j=L}^{\infty} \sum_{|k|\in[2^{j-1},2^j)} \langle k\rangle^{sq} \parallel \square_k \sum_{l=-4}^{4} \Delta_{j+l} f \parallel_p \\
&\leqslant C \sum_{j=L}^{\infty} 2^{jsq} 2^{nj} \left(\sum_{l=-4}^{4} \parallel \Delta_{j+l} f \parallel_p \right)^q \\
&\leqslant C \sum_{l=-4}^{4} \sum_{j=L}^{\infty} 2^{jq(s+\frac{n}{q})} \parallel \Delta_{j+l} f \parallel_p^q .
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\parallel f \parallel_{M^{p,\infty}_{q,s}} &\leqslant C \parallel f \parallel_{B^s_{p,q}} + C \left(\sum_{l=-4}^{4} \sum_{j=L}^{\infty} 2^{jq(s+\frac{n}{q})} \parallel \Delta_{j+l} f \parallel_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant C \parallel f \parallel_{B^{s+\frac{n}{q}}_{p,q}} + C \sum_{l=-4}^{4} \left(\sum_{j=L}^{\infty} 2^{jq(s+\frac{n}{q})} \parallel \Delta_{j+l} f \parallel_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant C \parallel f \parallel_{B^{s+\frac{n}{q}}_{p,q}} .
\end{aligned}
$$

■

Proposição 2.37. *Sejam* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *Então*

$$
B^{s+\tau(p,q)}_{p,q} \hookrightarrow M^{p,\infty}_{q,s}, \tag{2.36}
$$

onde $\tau(p,q) = \max\left\{0, n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p \vee p'}\right)\right\}$.

Demonstração: Consideraremos apenas o caso $s = 0$ pois para $s \neq 0$ o raciocínio é análogo. Vamos dividir a demonstração em quatro casos.

- Caso 1: $1 < p < q < 2$

Utilizando (2.25), (2.35) e as propriedade de inclusão dos espaços de Besov (ver página 32) obtemos

$$
B^{\frac{n}{2}}_{1,1} \hookrightarrow M^{1,\infty}_{1,0}
$$

e

$$B_{2,2}^{\frac{\frac{n}{q}-\frac{n}{2}}{2-\frac{2}{q}}} \hookrightarrow B_{2,2}^{0} \hookrightarrow M_{2,0}^{2,\infty}.$$

Aplicando a propriedade de Interpolação Complexa, com $\theta = \dfrac{2}{q} - 1$ nos espaços a esquerda e $\theta = \dfrac{2}{p} - 1$ a direita, temos

$$B_{q,q}^{\frac{2n}{q}-n} \hookrightarrow M_{p,0}^{p,\infty}. \tag{2.37}$$

Como $p < q$ então pelas propriedades de inclusão dos espaços de Besov

$$B_{p,q}^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{2n}{q}-n} \hookrightarrow B_{q,q}^{\frac{2n}{q}-n}. \tag{2.38}$$

Além disso, $l^p \subset l^q$ e então

$$M_{p,0}^{p\infty} \hookrightarrow M_{q,0}^{p,\infty} \tag{2.39}$$

Assim, unindo (2.37), (2.38) e (2.39) obtemos o resultado.

- Caso 2: $1 < q < p < 2$

  Por (2.25), (2.35) obtemos

$$B_{1,1}^{\frac{n}{2}} \hookrightarrow M_{1,0}^{1,\infty}$$

e

$$B_{2,2}^{\frac{\frac{n}{q}-\frac{n}{2}}{2-\frac{2}{p}}} \hookrightarrow B_{2,2}^{0} \hookrightarrow M_{2,0}^{2,\infty}.$$

Aplicando a propriedade de Interpolação Complexa, com $\theta = \dfrac{2}{p} - 1$ nos espaços a esquerda e $\theta = \dfrac{2}{q} - 1$ a direita, temos

$$B_{p,p}^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p'}} \hookrightarrow M_{q,0}^{q,\infty}.$$

Mas, $l^q \subset l^p$ e por (2.5) segue que

$$B_{p,q}^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p'}} \hookrightarrow B_{p,p}^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p'}} \hookrightarrow M_{q,0}^{q,\infty} \hookrightarrow M_{q,0}^{p,\infty}.$$

- Caso 3: $1 < p < 2 < q$

  Seja $\delta > 0$ tal que

$$1 < \delta < q' < 2 \text{ e } 1 < \delta < p < 2.$$

Por (2.25), (2.35) obtemos

$$B_{1,1}^{\frac{n}{2}} \hookrightarrow M_{1,0}^{1,\infty}$$

e

$$B_{2,2}^{0} \hookrightarrow M_{2,0}^{2,\infty}$$

. Aplicando interpolação, para $\theta = \dfrac{2}{p} - 1$ nos espaços a esquerda e $\theta = \dfrac{2}{\delta} - 1$, e utilizando (2.5) temos que

$$B^0_{p,q} \hookrightarrow B^0_{p,p'} \hookrightarrow M^{\delta,\infty}_{\delta',0} \hookrightarrow M^{p,\infty}_{q,0}.$$

Se $q > p'$ então $\tau = 0$ e segue o resultado. Caso contrário, pelas propriedades de inclusão de espaços de Besov temos

$$B^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p'}}_{p,q} \hookrightarrow B^0_{p,q} \hookrightarrow M^{p,\infty}_{q,0}.$$

- Caso 4: $p > 2$

Neste caso temos $p \vee p'$ e assim analisando separadamente os casos

$$1 < p' < q < 2 \ , \ 1 < q < p' < 2 \text{ e } 1 < p' < 2 < q,$$

com o mesmo raciocínio dos casos 1,2 e 3 obtemos o resultado.

■

2.4 Operador composição

Nesta seção estamos interessados em estudar a composição de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$. Esse tipo de operador foi estudado para espaços de Besov-Triebel-Lizorkin em [44] e baseado na teoria la desolvida podemos analisar o operador em espaços de Modulação-lorentz. Para isso vamos precisar impor sobre f a condição de que ela seja uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, distribuições desse tipo são conhecidas como distribuições regulares. Denotaremos o conjunto das distribuições $f \in M^{p,r}_{q,s}$ tais que f é uma distribuição regular por $\mathbf{M}^{p,r}_{q,s}$, neste espaço consideraremos a norma $\| \cdot \|_{M^{p,r}_{q,s}}$ já definida anteriormente.

2.4.1 As classes $Lip\mu$ e o operador I^{μ}_{k}

Nosso objetivo será calcular uma estimativa para o operador composição $f \longmapsto g(f)$ com $g \in Lip\mu$ nos espaços $\mathbf{M}^{p,r}_{q,s}$. Esse tipo de estimativa foi calculada em [44] para espaços de Besov e poderemos aplicar algumas ideias lá desevolvidas para nosso espaço. Mas para isso vamos precisar de algumas definições e resultados preliminares que podem ser encontrados em [44, pág. 316].

Definição 2.38. *Sejam $\mu > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $0 < \alpha \leqslant 1$ tais que $\mu = N + \alpha$. Definimos o seguinte espaço de funções:*

$$Lip\mu = \{f \in C^{N,loc}(\mathbb{R}); f^{(j)}(0) = 0, j = 1, \ldots, N \ e \ \sup_{t_0 \neq t_1} \frac{|f^{(N)}(t_1) - f^{(N)}(t_0)|}{|t_0 - t_1|^{\alpha}} < \infty\} \ .$$

Considere também

$$\| f \|_{Lip\mu} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sup_{t \neq 0} \frac{|f^{(j)}(t)|}{|t|^{\mu - j}} \right) + \sup_{t_0 \neq t_1} \frac{f^{(N)}(t_1) - f^{(N)}(t_0)|}{|t_0 - t_1|^{\alpha}}.$$

Observação 2.39. *(i) $\| \cdot \|_{Lip\mu}$ não define uma norma, mais usaremos a mesma notação de norma.*

(ii) Se $f \in Lip\mu$ então $\| f \|_{Lip\mu} < \infty$.

(iii) O espaço $Lip\mu$ não é monotono com respeito a μ, isto pode ser visto do fato de que $f(t) = |t|^{\mu} \in Lip\mu$ mas $f \notin Lip(\mu - \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Lema 2.40. *Seja $G \in C^{N,loc}(\mathbb{R})$ para algum $N \in \mathbb{N}$, com $G \in Lip\alpha$ para algum $0 < \alpha \leqslant 1$. Se $\mu = N + \alpha$ então:*

$$H_N(t) = G(t) - \sum_{j=1}^{N} \frac{G^{(j)}(0)}{j!} t^j \in Lip\mu$$

Em particular, se $G \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ então $H_N \in Lip\mu$ para todo μ tal que $N < \mu \leqslant N + 1$ e para todo N fixo.

Agora vamos definir o operador I_k^{μ} e obter uma estimativa para ele no espaço $\mathbf{M}_{q,s}^{p,\infty}$.

Definição 2.41. *Sejam $k \in \mathbb{Z}^n$, $\mu > 0$ e $f \in L_{loc}^{\max\{1,\mu\}}$. Definimos o operador I_k^{μ} por:*

$$I_k^{\mu}(x) = \int_{|z| \leqslant \langle k \rangle} |f(x+z) - f(x)|^{\mu} dz$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para estimar este operador precisaremos de uma norma equivalente para $\mathbf{M}_{q,s}^{p,\infty}$ baseada em funções maximais definidas a partir da partição da unidade $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$.

Definição 2.42. *Seja $b > 0$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}^n$ definimos a função maximal,*

$$(\varphi_k f)_b^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Box_k f(x-y)|}{1 + |y|^b} \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.43. *Note que $(\varphi_k f)_b^*(x) \geqslant \Box_k f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Proposição 2.44. *(Ver [50])Sejam $0 < p < \infty$, $0 < q, r \leqslant \infty$ e $b > \dfrac{n}{\min\{p,q\}}$. Então*

$$\| \{ \langle k \rangle^s \| (\varphi_k f)_b^* \|_{p,r} \} \|_{l^q} \tag{2.40}$$

é uma norma equivalente a $\| \cdot \|_{M_{q,s}^{p,r}}$ em $M_{q,s}^{p,r}$.

De posse desse resultado podemos calcular a estimativa do operador I_k^μ.

Lema 2.45. *Sejam* $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ *e* $\mu > 0$ *tais que*

$$0 < s < \mu$$

Então existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\| \{\langle k\rangle^{-s+n} \| I_k^\mu f \|_{p,r}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \|_{l^q} \leqslant C \| f \|^\mu_{M^{p\mu,r\mu}_{q\mu,\frac{n}{\mu}}} \tag{2.41}$$

para toda $f \in L^{\max\{1,\mu\}}_{loc}$ *com*

$$f(\cdot) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \Box_j f(\cdot) \ \textit{em} \ L^\mu_{loc}$$

Demonstração: Provaremos apenas o resultado para $q < \infty$. O caso $q = \infty$ é analogo, apenas com as modificações necessárias.

Vamos dividir a demonstração em dois passos.

<u>*Passo*1</u>: Para cada $h \in \mathbb{R}^n$ definimos:

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} f(x + (m-l)h) \ , \ m = 1, 2, \ldots$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}^n$ e $|h| \leqslant \langle k\rangle$ temos

$$\begin{aligned} |\Delta_h^1[\varphi_{k+m}\widehat{f}]^\vee(x)| &= \left|\sum_{l=0}^1 (-1)^l [\varphi_{k+m}\widehat{f}]^\vee(x + (1-l)h)\right| \\ &\leqslant 2 \sup_{|y|\leqslant\langle k\rangle} |[\varphi_{k+m}\widehat{f}]^\vee(x-y)|. \end{aligned}$$

Mas para $y \in B(k, \sqrt{n})$ e $b > 0$ sabemos que

$$C\frac{\langle k\rangle^b}{1+|y|^b} \geqslant 1,$$

com C dependendo apenas de n e b. Assim

$$\begin{aligned} |\Delta_h^1[\varphi_{k+m}\widehat{f}]^\vee(x)| &\leqslant C\langle k\rangle^b \sup_{y\in B(k,\sqrt{n})} \frac{[\varphi_{k+m}\widehat{f}]^\vee(x-y)|}{1+|y|^b} \\ &\leqslant C\langle k\rangle^b (\varphi_{k+m}f)^*_b(x) \ , \ \forall m \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

<u>*Passo*2</u>: Pela definição de f temos

$$\langle k\rangle^{-s+n} \| I_k^\mu f \|_{(p,r)} = \langle k\rangle^{-s} \| \int_{|z|\leqslant\langle k\rangle} \left|\Delta_z^1\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} [\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee(x)\right)\right|^\mu dz \|_{(p,r)} \ .$$

Agora como $s > 0$ podemos escolher λ, a e ε em $\mathbb{R}$ tais que

$$0 < \lambda < 1 \ , \ a > \frac{n}{\mu \min\{p,q\}} \text{ e } \mu\left(\frac{s}{\mu} - a(1-\lambda)\right) \geqslant 2\varepsilon > 0.$$

Logo, utilizando a estimativa do Passo 1 e a função maximal de Hardy-Little-Wood obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|\leqslant\langle k\rangle} \left|\Delta_z^1\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee(x)\right)\right|^\mu dz &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^\varepsilon \int_{|z|\leqslant\langle k\rangle} |\Delta_z^1[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee(x)|^\mu dz \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^\varepsilon \left(\sup_{|y|\leqslant\langle k+j\rangle} |\Delta_z^1[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee(x-y)|\right)^{\mu(1-\lambda)} \\
&\quad \cdot \left(\int_{|z|\leqslant\langle k+j\rangle} |\Delta_z^1[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee(x)|^{\mu\lambda}\right) \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^\varepsilon \langle k+j\rangle^n (M(|\Delta_z^1[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee(\cdot)|^{\mu\lambda})(x) \cdot \\
&\quad \langle k\rangle^{a\mu(1-\lambda)}(\varphi_{k+j}f)_a^*(x)^{\mu(1-\lambda)}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Holder (ver página 25) e (1.15) temos

$$\begin{aligned}
\langle k\rangle^{-s+n} \parallel I_k^\mu f \parallel_{(p,r)} &\leqslant C\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{\varepsilon+a\mu(1-\lambda)-s} \parallel M(|\langle k+j\rangle^{\frac{n}{\mu}}[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee(\cdot)|^{\mu\lambda}) \cdot \\
&\quad ((\langle k+j\rangle^{\frac{n}{\mu}}(\varphi_{k+j}f)_a^*)^{\mu(1-\lambda)} \parallel_{(p,r)} \\
&\leqslant C\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{\varepsilon+a\mu(1-\lambda)-s} \parallel |\langle k+j\rangle^{\frac{n}{\mu}}[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee|^{\mu\lambda} \parallel_{(\frac{p}{\lambda},\frac{r}{\lambda})} \cdot \\
&\quad \parallel (\langle k+j\rangle^{\frac{n}{\mu}}(\varphi_{k+j}f)_a^*)^{\mu(1-\lambda)} \parallel_{(\frac{p}{1-\lambda},\frac{r}{1-\lambda})} \\
&\leqslant C\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{\varepsilon+a\mu(1-\lambda)-s} \parallel \langle k+j\rangle^{\frac{n}{\mu}}[\varphi_{k+j}\widehat{f}]^\vee \parallel_{(p\mu,r\mu)}^{\mu\lambda} \cdot \\
&\quad \parallel \langle k+j\rangle^{\frac{n}{\mu}}(\varphi_{k+j}f)_a^* \parallel_{(p\mu,r\mu)}^{\mu(1-\lambda)} .
\end{aligned}$$

Agora, aplicando as desigualdades de Young (ver página 25), de Holder para séries e (2.40) obtemos

$$\begin{aligned}
\parallel \{\langle k\rangle^{-s+n} \parallel I_k^\mu f \parallel_{(p,r)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \parallel_{l^q} &\leqslant C\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{\varepsilon+a(1-\lambda)-s} \parallel \{\langle k\rangle^{n\lambda} \parallel \square_k f \parallel_{(p\mu,r\mu)}^{\mu\lambda}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \parallel_{l^{\frac{q}{\lambda}}} \cdot \\
&\quad \parallel \{\langle k\rangle^{n(1-\lambda)} \parallel (\varphi_k f)_a^* \parallel_{(p\mu,r\mu)}^{\mu(1-\lambda)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \parallel_{l^{\frac{q}{1-\lambda}}} \\
&\leqslant C \parallel f \parallel_{M_{q\mu,\frac{n}{\mu}}^{p\mu,r\mu}}^{\mu} \sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{\varepsilon+a(1-\lambda)-s}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\varepsilon + a\mu(1-\lambda) - s < -n,$$

e então

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\langle j\rangle^{\varepsilon+a(1-\lambda)-s} < \infty.$$

Portanto

$$\| \{\langle k\rangle^{-s+n} \| I_k^\mu f \|_{(p,r)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \|_{l^q} \leqslant C \| f \|^\mu_{M^{p\mu,r\mu}_{q\mu,\frac{n}{\mu}}} .$$

∎

De posse dos resultados feitos até aqui podemos podemos finalmente calcular a estimativa para o operador $f \longmapsto G(f)$ com $G \in Lip\mu$.

Teorema 2.46. *Sejam $\mu > 1$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$0 < s < \min\{\frac{n}{p}, \mu, \frac{n}{2}\} \ , \ \mu\left(\frac{n}{p} - s\right) < n$$

$$t = \frac{n}{s + \mu\left(\frac{n}{p} - s\right)} \ \ e \ \frac{n}{\mu} < s$$

Considere também $G \in Lip\mu$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| G(f) \|_{M^{t,r}_{1,s}} \leqslant C \| f \|^\mu_{M^{p,r}_{1,s}} \| G \|_{Lip\mu}, \tag{2.42}$$

para toda $f \in \mathbf{M}^{p,\infty}_{1,s}$.

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em 3 passos.

<u>*Passo* 1</u>: Seja $\mu = N + \alpha$, com $N \in \mathbb{N}$ e $0 < \alpha \leqslant 1$. Usando expanção de Taylor obtemos

$$\begin{aligned}
[\varphi_k \widehat{f}]^\vee(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k)^\vee(y-x) \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{G^{(l)} f(y)}{l!} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (-1)^{l-j} (f(x))^j (f(y))^{l-j} \right) dx + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k)^\vee(y-x) \left(\frac{1}{(N-1)!} \int_{f(y)}^{f(x)} (v - f(y))^{N-1} G^{(N)}(v) dv \right) dx \\
&=: \left(\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{l} T_{1,k,l,j}(y) \right) + T_{2,k}(y).
\end{aligned}$$

Agora nos passos 2 e 3 iremos calcular separadamente estimativas para $T_{1,k,l,j}$ e $T_{2,k}$.

<u>*Passo* 2</u>: Para cada $0 < j < l \leqslant N$, aplicando desigualdade de Holder e (1.11) temos que

$$\begin{aligned}
\| T_{1,k,l,j} \|_{(t,r)} &\leqslant C \| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k)^\vee(y-x) G^{(l)}(f(y))(f(x))^j (f(y))^{l-j} dx \|_{(t,r)} \\
&\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k)^\vee(y-x)(f(x))^j |f(y)|^{\mu-j} dx \|_{(t,r)} \\
&\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \| |f|^{\mu-j} \|_{(p_1,\infty)} \| (\varphi_k)^\vee \star f^j \|_{(p_2,r)} \\
&\leqslant C \| f \|^{\mu-j}_{(p_1(\mu-j),r)} \| (\varphi_k)^\vee \star f^j \|_{(p_2,r)}
\end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$. Podemos escolher:

$$\frac{1}{p_1} = \frac{(\mu - j)(\frac{n}{p} - s)}{n} \text{ e } \frac{1}{p_2} = \frac{s + j(\frac{n}{p} - s)}{n}$$

Assim,usando a Inclusão de Sobolev para espaços modulação-Lorentz (ver (2.9)) temos que

$$\begin{aligned} \| f \|_{(p_1(\mu-j),r)} &\leqslant C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_k f \|_{(p_1(\mu-j),r)} \\ &= C \| f \|_{M_{1,0}^{p_1(\mu-j),r}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}, \end{aligned}$$

já que

$$\frac{n}{p_1(\mu - j)} = \frac{n}{p} - s \text{ e } p \leqslant p_1(\mu - j).$$

Logo obtemos

$$\| \langle k \rangle^s \| T_{1,k,l,j} \|_{(t,r)} \|_{l^1(\mathbb{Z}^n)} \leqslant C \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}^{\mu-j} \| f^j \|_{M_{1,s}^{p_2,r}} . \tag{2.43}$$

<u>*Afirmação*</u>: $\| f^j \|_{M_{1,s}^{p_2,r}} \leqslant C \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}^j$. De fato, mostraremos o resultado para $j = 2$ e para $j > 2$ basta aplicar indução. Seja $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\sigma}.$$

De maneira análoga a demonstração da Estimativa do Produto obtemos:

$$\| f^2 \|_{M_{1,s}^{p_2,r}} \leqslant C \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}} \| f \|_{M_{1,0}^{\sigma,r}} .$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{n}{p} + \left(\frac{n}{p} - s \right) &\leqslant \left(\frac{n}{p} - s \right) + \left(\frac{n}{p} - s \right) + s \\ &= \frac{n}{p_2} \\ &= \frac{n}{p} + \frac{n}{\sigma}. \end{aligned}$$

E então utilizando a inclusão de Sobolev para Espaços de modulação-Lorentz,

$$\| f \|_{M_{1,0}^{\sigma,r}} \leqslant C \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \| f^2 \|_{M_{1,s}^{p_2,r}} &\leqslant C \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}} \| f \|_{M_{1,0}^{\sigma,r}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}^2 . \end{aligned}$$

Agora, utilizando a afirmação em (2.43) obtemos

$$\| \langle k \rangle^s \| T_{1,k,l,j} \|_{(t,r)} \|_{l^1(\mathbb{Z}^n)} \leqslant C \| f \|^{\mu}_{M^{p,r}_{1,s}} . \tag{2.44}$$

Suponha $j = 0$. Então aplicando (1.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\| T_{1,k,l,0} \|_{(t,r)} &\leqslant C \| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k)^{\vee}(y-x) \frac{G^{(l)}(f(y))}{|f(y)|^{\mu-l}} |f(y)|^{\mu} \|_{(t,r)} \\
&\leqslant C\varphi_k(0) \| G \|_{Lip\mu} \| (\varphi_k)^{\vee} \star |f|^{\mu} \|_{(t,r)} \\
&\leqslant C\varphi_k(0) \| G \|_{Lip\mu} \| |f|^{\mu} \|_{(t,r)} \\
&\leqslant C\varphi_k(0) \| G \|_{Lip\mu} \| f \|^{\mu}_{(t\mu,r\mu)} \\
&\leqslant C\varphi_k(0) \| G \|_{Lip\mu} \| f \|^{\mu}_{M^{\mu t,r}_{1,0}} \\
&\leqslant C\varphi_k(0) \| G \|_{Lip\mu} \| f \|^{\mu}_{M^{\mu t,r}_{1,\frac{s}{\mu}}} .
\end{aligned}$$

Mas, como $t = \dfrac{n}{s + \mu(\frac{n}{p} - s)}$ então

$$\frac{n}{\mu t} - \frac{s}{\mu} = \frac{n}{p} - s \text{ e } \mu t \geqslant p.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^s \| T_{1,k,l,0} \|_{(t,r)} &\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \| f \|_{M^{\mu t,r}_{1,\frac{s}{\mu}}} \\
&\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \| f \|^{\mu}_{M^{p,r}_{1,s}},
\end{aligned}$$

concluindo assim o passo 2.

<u>*Passo 3*</u>: Neste passo vamos lidar com o termo $T_{2,k}$. Temos

$$\begin{aligned}
| \int_{f(y)}^{f(x)} (v - f(y))^{N-1} G^{(N)}(v) dv | &= | \int_{f(y)}^{f(x)} (v - f(y))^{N-1} (G^{(N)}(v) - G^{(N)}(f(y)) dv \\
&\quad + \frac{(f(x) - f(y))^N}{N} G^{(N)}(f(y)) | \\
&\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} (\int_{f(y)}^{f(x)} |v - f(y)|^{N-1+\alpha} dv \\
&+ \frac{|f(y) - f(x)|^{\mu}}{N} t) \\
&\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \frac{|f(x) - f(y)|^{\mu}}{\mu} + \frac{|f(x) - f(y)|^{\mu}}{N}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\| T_{2,k} \|_{(t,r)} \leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k)^{\vee}(y-x) |f(x) - f(y)|^{\mu} dx \|_{(t,r)} \tag{2.45}$$

Pelas propriedades da partição da unidade $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ temos:

$$\begin{aligned}
|(\varphi_k)^{\vee}(z)| &= |(\varphi)^{\vee}(z-k)| \\
&\leqslant C|(\varphi)^{\vee}(z)| \\
&\leqslant C(1 + |z|)^{-N},
\end{aligned}$$

onde C não depende de k e N é um número natural qualquer. Logo, utilizando essa propriedade em (2.45) e aplicando a desigualdade de Young para séries obtemos

$$\begin{aligned}
\| \{\langle k\rangle^s \| T_{2,k} \|_{(t,r)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \|_{l^1} &\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^s \| \int_{|z|\leqslant\langle k\rangle} (1+|z|)^{-N}|f(y)-f(y+z)|^\mu dz + \\
&\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \int_{\langle k\rangle\leqslant|z|\leqslant\langle k-j\rangle} (1+|z|)^{-M}|f(y)-f(y-z)|^\mu dz \|_{(t,r)} \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^s \| I_k^\mu \|_{(t,r)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^s \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-N}\langle k-j\rangle^M \\
&\quad \| I_{k-j}^\mu \|_{(t,r)} \\
&\leqslant C \| \{\langle k\rangle^s \| I_k^\mu \|_{(t,r)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \|_{l^1} + \\
&\quad C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{(s-N)} \right) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^M \| I_k^\mu \|_{(t,r)} \right).
\end{aligned}$$

Tome $s_0, s_1 < \mu$, $N, M \in \mathbb{N}$ tais que

$$s = n - s_0 \ , \ s - N < -n \text{ e } M = n - s_1.$$

Assim

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{(s-N)} < \infty,$$

e podemos aplicar (2.41) e (1.11) obtendo

$$\begin{aligned}
\| \{\langle k\rangle^s \| T_{2,k} \|_{(t,r)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \|_{l^1} &\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \| f \|^\mu_{M^{t\mu,r\mu}_{\mu,\frac{n}{\mu}}} \\
&\leqslant C \| G \|_{Lip\mu} \| f \|^\mu_{M^{p,r}_{1,s}},
\end{aligned}$$

já que $t\mu \geqslant p$, $\mu \geqslant 1$ e $\dfrac{n}{\mu} \leqslant s$.

Finalmente, unindo as estimativas obtidas nos passos 2 e 3 obtemos o resultado desejado.

■

2.4.2 Composição com séries de potência

Nesta sub-seção vamos considerar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j, \tag{2.46}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ é uma série de potências com raio de convergência $0 < \sigma \leqslant \infty$.

Vamos calcular duas estimativas para $g(f)$ em espaços de modulação-Lorentz que serão essenciais para a demonstração dos teoremas de existência e unicidade no capítulo 3.

Lema 2.47. *Sejam* $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$ *e* $s \geqslant 0$. *Assuma ainda que* $s > \dfrac{n}{q'}$, *se* $q > 1$. *Para toda* $f \in \mathbf{M}^{p,r}_{q,s}$ *com* $\| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} < \sigma$ *temos que*

$$g(f) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j f_j \in M^{p,r}_{q,s}$$

e existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\| g(f) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \, \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,s}}, \tag{2.47}$$

com C *independente de* f.

Demonstração: Note que nas condições do lema, segue de (2.7) e (2.8) que o espaço $M^{p,r}_{q,s}$ é uma álgebra multiplicativa. Logo, para cada $j \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \| a_j f^j \|_{M^{p,r}_{q,s}} &= |a_j| \, \| f^j \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C|a_j| \, \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,s}} . \end{aligned}$$

Assim

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \| a_j f_j \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant c \sum_{j=1}^{+\infty} |a_j| \, \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,s}} .$$

Como $\| f \|_{M^{p,r}_{q,s}} < \sigma$ então a série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |a_j| \, \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,s}}$$

é convergente, o que implica que a série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j f^j$$

é absolutamente convergente em $M^{p,r}_{q,s}$.

Como o espaço $M^{p,r}_{q,s}$ é um espaço de Banach segue que a série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j f_j$$

é convergente em $M^{p,r}_{q,s}$ e então

$$g(f) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j f^j \in M^{p,r}_{q,s}.$$

Agora provemos (2.47). Para cada $N \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} \| \sum_{j=1}^{N} a_j f^j \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant \sum_{j=1}^{N} |a_j| \, \| f^j \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \, \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,s}} . \end{aligned}$$

Fazendo N tender a infinito, como $\sum_{j=1}^{N} a_j f^j$ converge para $g(f)$ em $M^{p,r}_{q,s}$, obtemos

$$\| g(f) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \, \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,s}} .$$

■

Lema 2.48. *Sejam* $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$ *e* $s \geqslant 0$. *Assuma ainda que* $s > \dfrac{n}{q'}$, *se* $q > 1$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\| g(u) - g(v) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| u - v \|_{M^{p,r}_{q,s}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j-1} |a_j| \, \| u \|^{j-1-l}_{M^{p,r}_{q,s}} \| v \|^{l}_{M^{p,r}_{q,s}} \right), \tag{2.48}$$

para todas $u, v \in \mathbf{M}^{p,\infty}_{q,s}$ *com* $\| u \|_{M^{p,r}_{q,s}}, \| v \|_{M^{p,r}_{q,s}} < \sigma$.

Demonstração: Para cada $j \geqslant 1$ temos

$$a_j(x^j - y^j) = \sum_{l=0}^{j-1} a_j (x - y) x^{j-1-l} y^l$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Assim

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{j-1} a_j (x - y) x^{j-1-l} y^l$$

é absolutamente convergente para $x, y \in (-\sigma, \sigma)$.

Agora aplicando (2.7) e (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \| a_j(u^j - v^j) \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant C |a_j| \, \| \sum_{l=0}^{j-1} (u - v) u^{j-1-l} v^l \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C |a_j| \sum_{l=0}^{j-1} \| u - v \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| u \|^{j-1-l}_{M^{p,r}_{q,s}} \| v \|^{l}_{M^{p,r}_{q,s}} . \end{aligned}$$

Assim de maneira análoga ao lema anterior obtemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j (u^j - v^j)$$

converge em $M^{p,r}_{q,s}$. Além disso

$$g(u) - g(v) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (u^j - v^j).$$

Agora, para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\| \sum_{j=1}^{N} a_j (u^j - v^j) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| u - v \|_{M^{p,r}_{q,s}} \sum_{j=1}^{N} |a_j| \sum_{l=0}^{j-1} \| u \|^{j-1-l}_{M^{p,r}_{q,s}} \| v \|^{l}_{M^{p,r}_{q,s}},$$

e fazendo N tender a infinito obtemos (2.48)

■

3 Equações Elípticas não-lineares em espaços de modulação-Lorentz

Considere a equação

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u = V(x)u + g(u, \nabla u) + f \tag{3.1}$$

com $n \geqslant 3$, $0 < \alpha < n$ e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ com condições adicionais a serem dadas posteriormente. Primeiramente vamos considerar a equação (3.1) no caso em que a função g depende apenas de u, isto é, $g(u, \nabla u) = \tilde{g}(u)$. Posteriormente, na última seção deste capítulo, estudaremos alguns casos da equação (3.1) com g dependendo de ∇u. Por conveniência, vamos representar $\tilde{g}(u)$ por $g(u)$.

Procedendo formalmente e aplicando o operador $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$ na equação acima, obtemos que se u é solução da equação então u satisfaz a equação integral

$$u = C\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u) + f]\right). \tag{3.2}$$

Se u satisfizer a equação (3.2) dizemos que u é uma solução integral da equação (3.1).

3.1 Análise de Escalonamento

Considere o operado Ψ definido por

$$\Psi(u) = C\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u) + f]\right). \tag{3.3}$$

Seja $w(x) = \lambda^a u(\lambda x)$ com $\lambda > 0$ e $a \in \mathbb{R}$. Suponha inicialmente que g é homogênea de grau ρ. Então

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(w)\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} g(\lambda^a u(\lambda y))dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \lambda^{a\rho} g(u(\lambda y))dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-\lambda^{-1}z|^{n-\alpha}} \lambda^{\rho a-n} g(u(z))dz \\
&= \frac{\lambda^{a\rho-n}}{\lambda^{-n+\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda x - z|^{n-\alpha}} g(u(z))dz \\
&= \lambda^{a\rho-\alpha}\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(u)\right)(\lambda x).
\end{aligned}$$

Agora suponhamos que V é homogênea de grau b. Assim

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot)w\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} V(y)\lambda^a u(\lambda y))dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \lambda^{a-b} V(\lambda y)u(\lambda y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-\lambda^{-1}z|^{n-\alpha}} \lambda^{a-b-n} V(z)u(z)dz \\
&= \frac{\lambda^{a-b-n}}{\lambda^{-n+\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda x - z|^{n-\alpha}} V(z)u(z)dz \\
&= \lambda^{a-b-\alpha}\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot)u\right)(\lambda x).
\end{aligned}$$

Para finalizar se f é homogênea de grau $r \in \mathbb{R}$ então de maneira análoga aos cálculos feitos acima concluímos que

$$\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f\right)(x) = \lambda^{-r-\alpha}\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f\right)(\lambda x).$$

Para determinarmos o índice de escalonamento da nossa equação precisamos que r, b, ρ, a e α satisfação as seguintes condições

$$-r-\alpha = a\rho - \alpha \text{ e } a\rho - \alpha = a - b - \alpha.$$

Daí, segue que

$$r = -a\rho \text{ e } b = a(1-\rho).$$

Assim

$$\Psi(w) = C\lambda^{a\rho-\alpha}\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u) + f]\right)(\lambda \cdot).$$

Finalmente fazemos

$$a = a\rho - \alpha \Rightarrow a = \frac{-\alpha}{1-\rho}.$$

Logo, definindo

$$u_\lambda(\cdot) = \lambda^{\frac{\alpha}{\rho-1}} u(\lambda \cdot),$$

tem-se que se u é solução de (3.2) então u_λ também é, desde que V seja homogênea de grau $-\alpha$, g seja homogênea de grau ρ e f seja homogênea de grau $\dfrac{-\alpha\rho}{\rho-1}$.

3.2 Resultados de existência e unicidade

Teorema 3.1. *Sejam $n \geqslant 3$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\rho > 2$ e $0 < \alpha < n$ satisfazendo*

$$0 < s < \min\{\alpha, \rho - 1\}\ ,\ \rho\left(\frac{n}{p} - s\right) < n\ ,\ \frac{n}{\rho} < s\ ,\ s \leqslant \frac{n}{p} - \frac{\alpha}{\rho-1} \text{ e } \frac{n}{\alpha} \geqslant p. \tag{3.4}$$

Considere $g \in Lip\rho$ em (3.1). Então, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, se $f \in \mathbf{M}_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}$ e $V \in \mathbf{M}_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}$ satisfazem

$$\| f \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}} \leqslant \delta_1 \ \text{e} \ \| V \|_{M_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}} \leqslant \delta_2$$

então existe uma única $u \in B = \{u \in M_{1,s}^{p,r}; \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} \leqslant \varepsilon\}$ solução integral de (3.1). Além disso, a solução u depende continuamente de f e V, isto é, se $u_1, u_2 \in B$ são soluções integrais de (3.1) obtidas através de f_1, V_1 e f_2, V_2, respectivamente, então existem constantes positivas η, γ independentes de f_i, V_i e u_i tais que

$$\| u_1 - u_2 \|_B \leqslant \gamma \| f_1 - f_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}} + \eta \| V_1 - V_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}} . \tag{3.5}$$

Observação 3.2. *Podemos utilizar este resultado para a função $g(x) = |x|^\rho$, obtendo existência e unicidade de solução para a equação*

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = V(x)u + |u|^\rho + f \ , \ \text{em } \mathbb{R}^n.$$

A seguir apresentamos resultados para uma classe de não-linearidades que permite somas infinitas de potências; mais precisamente, consideramos não-linearidades do tipo composição $g(u)$ com condições sobre a série de Taylor de g.

Teorema 3.3. *Sejam $n \geqslant 3$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$, $s \geqslant 0$ e $0 < \alpha < n$. Assuma também que $s > \dfrac{n}{q'}$ quando $q > 1$. Considere g dada por*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j,$$

onde $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ é uma série de pontência com raio de convergência $0 < \sigma \leqslant \infty$. Então, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, se $f, V \in \mathbf{M}_{q,s}^{p,\infty}$ satisfazem

$$\| f \|_{M_{q,s}^{p,\infty}} \leqslant \delta_1 \ \text{e} \ \| V \|_{M_{q,s}^{p,\infty}} \leqslant \delta_2$$

então existe uma única $u \in B = \{u \in M_{q,s}^{p,r}; \| u \|_{M_{q,s}^{p,r}} \leqslant \varepsilon\}$ solução integral de (3.1). Além disso, a solução u obtida depende continuamente de f e V, isto é, se $u_1, u_1 \in B$ soluções brandas de (3.1) obtidas através de f_1, V_1 e f_2, V_2, respectivamente, então existem constantes positivas η, γ independentes de f_i, V_i e u_i tais que

$$\| u_1 - u_2 \|_X \leqslant \eta \| f_1 - f_2 \|_{M_{q,s}^{p,r}} + \gamma \| V_1 - V_2 \|_{M_{q,s}^{p,r}} . \tag{3.6}$$

Observação 3.4. *Podemos utilizar este resultado para as funções $g(x) = xe^x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x \cos x$. Este resultado cobre também os casos em que g é uma função polinomial, em particular podemos destacar o caso em que $g(x) = x^m$ com $m \in \mathbb{N}$, isto é, a equação*

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = Vu + u^m + f \ , \ \text{em } \mathbb{R}^n, \tag{3.7}$$

com $0 < \alpha < n$ e $m \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.3 obtemos uma única $u \in \{v \in M^{p,r}_{q,s}; \| v \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant \varepsilon\}$ solução integral de (3.7). Note ainda que o resultado obtido se aplica para o caso $m > \dfrac{n+2}{n-2}$, caso considerado super-crítico quando se obtem a solução por métodos variacionáis e como veremos na seção 3.5 a solução obtida será positiva quado V e f forem positivas.

3.3 Estimativas para os termos da formulação integral (3.2)

Lema 3.5. *Sejam $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$, $s \geqslant 0$ e $0 < \alpha < n$. Assuma também que $s > \dfrac{n}{q'}$ quando $q > 1$.*

(i) Se $V \in M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}$ então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot)(u-v) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| V \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} \| u - v \|_{M^{p,r}_{1,s}} . \tag{3.8}$$

para toda $u, v \in M^{p,r}_{1,s}$.

(ii) Se $V \in M^{p,r}_{q,s}$ então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot)(u-v) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| V \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| u - v \|_{M^{p,r}_{q,s}} . \tag{3.9}$$

para toda $u, v \in M^{p,r}_{q,s}$.

Demonstração: Primeiro mostremos a estimativa (3.8). Aplicando (2.12) e (2.7) temos

$$\begin{aligned} \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot)(u-v) \|_{M^{p,r}_{1,s}} &\leqslant C \| V(\cdot)(u-v) \|_{M^{\frac{np}{n+\alpha p},r}_{1,s}} \\ &\leqslant C \| V \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} \| u - v \|_{M^{p,r}_{1,s}} . \end{aligned}$$

Agora provemos (3.9). Por (2.11),(2.3), (2.8) obtemos

$$\begin{aligned} \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot) u \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant \| |\cdot|^{\alpha-n} \|_{M^{1,\infty}_{\infty,0}} \| V(\cdot)(u-v) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C \| V \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| u \|_{M^{p,r}_{q,s}} . \end{aligned}$$

■

Lema 3.6. *Sejam $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $s \geqslant 0$, $0 < \alpha < n$ e $\rho > 2$. Considere também $g \in Lip\rho$.*

(i) Se

$$0 < s < \min\{\frac{n}{p}, \rho\} \ , \ \rho(\frac{n}{p} - s) < n \ ,$$

$$\frac{n}{\rho} < s \ e \ s \leqslant \frac{n}{p} + \frac{\alpha}{1-\rho}$$

então existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(u) \|_{M_{1,s}^{p,r}} \leqslant C \| g \|_{Lip\rho} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}}, \tag{3.10}$$

para toda $u \in \mathbf{M}_{1,s}^{p,r}$.

(ii) Se

$$0 < s < \min\{\alpha, \rho - 1\} \ , \ (\rho - 1)(\alpha - s) < n \ ,$$

$$\frac{n}{\rho - 1} < s \ e \ \frac{n}{\alpha} \geqslant p$$

então existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star (g(u) - g(v)) \|_{M_{1,s}^{p,r}} \leqslant C \| g \|_{Lip\rho} \| u - v \|_{M_{1,s}^{p,r}} \left(\| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| v \|_{M_{1,s}^{p,r}} \right)^{\rho - 1}. \tag{3.11}$$

para toda $u, v \in \mathbf{M}_{1,s}^{p,r}$.

Demonstração: Primeiro provemos (i). Aplicando (2.12), (2.2) e (2.42) temos que

$$\begin{aligned} \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(u) \|_{M_{1,s}^{p,r}} &\leqslant \| g(u) \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}} \\ &\leqslant C \| g(u) \|_{M_{1,s}^{t,r}} \\ &\leqslant C \| g \|_{Lip\rho} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}}^{\rho}, \end{aligned}$$

onde $t = \dfrac{n}{s + \rho(\frac{n}{p} - s)}$.

Agora provemos (ii). Como $g \in Lip\rho$ então $g' \in Lip(\rho - 1)$ e vale que

$$g(u) - g(v) = \int_0^1 (u - v) g'(t(u - v) + v) dt.$$

Assim, aplicando (2.12), (2.7), (2.2) e (2.42) obtemos

$$
\begin{aligned}
\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star (g(u)-g(v)) \|_{M^{p,r}_{1,s}} &\leqslant C \| g(u)-g(v) \|_{M^{\frac{np}{n+\alpha p},r}_{1,s}} \\
&= \| \int_0^1 (u-v)g'(t(u-v)+v)dt \|_{M^{\frac{np}{n+\alpha p},r}_{1,s}} \\
&\leqslant C \int_0^1 \| (u-v)g'(t(u-v)+v) \|_{M^{\frac{np}{n+\alpha p},r}_{1,s}} dt \\
&\leqslant C \int_0^1 \| u-v \|_{M^{p,r}_{1,s}} \| g'(t(u-v)+v) \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} dt \\
&\leqslant C \| u-v \|_{M^{p,r}_{1,s}} \int_0^1 \| g'(t(u-v)+v) \|_{M^{\tilde{t},r}_{1,s}} dt \\
&\leqslant C \| u-v \|_{M^{p,r}_{1,s}} \\
&\cdot \int_0^1 \left(\| t(u-v) \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} + \| v \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} \right)^{\rho-1} dt \\
&\leqslant C \| u-v \|_{M^{p,r}_{1,s}} \left(\| (u-v) \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} + \| v \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} \right)^{\rho-1} \\
&\leqslant \| u-v \|_{M^{p,r}_{1,s}} \left(\| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} + \| v \|_{M^{p,r}_{1,s}} \right)^{\rho-1},
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{t} = \dfrac{n}{s(\rho-1)(\alpha-s)}$.

■

Lema 3.7. *Sejam $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$ e $s \geqslant 0$. Assuma támbem que $s > \dfrac{n}{q'}$ se $q > 1$. Considere também uma função g dada por*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j,$$

onde $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ é uma série de potência com raio de convergência $\sigma > 0$. Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(u) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \| u \|^j_{M^{p,r}_{q,s}} \tag{3.12}$$

e

$$\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star (g(u)-g(v)) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant C \| u-v \|_{M^{p,r}_{q,s}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j-1} \| u \|^{j-1-l}_{M^{p,r}_{q,s}} \| v \|^{l}_{M^{p,r}_{q,s}} \right), \tag{3.13}$$

para toda $u, v \in \mathbf{M}^{p,r}_{1,s}$ tais que $\| u \|_{M^{p,r}_{q,s}}, \| v \|_{M^{p,r}_{q,s}} < \sigma$.

Demonstração: Aplicando (2.10),(2.3),(2.47) temos

$$\begin{aligned}\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(u) \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant C \| \, |\cdot|^{\alpha-n} \|_{M^{1,\infty}_{\infty,0}} \| g(u) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \| u \|^{j}_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \| u \|^{j}_{M^{p,r}_{q,s}} .\end{aligned}$$

O que conclui a primeira estimativa. Agora, segue de (2.10), (2.3) e (2.48) que

$$\begin{aligned}\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star (g(u)-g(v)) \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant \| \, |\cdot|^{\alpha-n} \|_{M^{1,\infty}_{\infty,0}} \| g(u)-g(v) \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \| u^j - v^j \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &= C \sum_{j=1}^{\infty} \| (u-v) \sum_{l=0}^{j-1} u^{j-1-l} v^l \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\ &\leqslant C \| u-v \|_{M^{p,r}_{1,s}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j-1} \| u \|^{j-1-l}_{M^{p,r}_{q,s}} \| v \|^{l}_{M^{p,r}_{q,s}} \right),\end{aligned}$$

provando assim a segunda estimativa.

■

3.4 Demonstração dos Teoremas 3.1 e 3.3

Primeiro demonstremos o teorema 3.1. Vamos considerar o operador Ψ como

$$\Psi(u) = C \left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u) + f] \right),$$

com $0 < \alpha < n$ e $g \in Lip\rho$. Precisamos mostrar que $\Psi(B) \subset B$ e que ele é uma contração em B. Antes de iniciar a demonstração vale salientar que os indíces satisfazerem as condições (3.4) implica na validade das condições necessárias para aplicar (3.10) e (3.11). Sejam também $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\varepsilon < \frac{1}{2^{\frac{\rho}{\rho-1}} C^{\frac{1}{\rho-1}}} \ , \ \delta_2 \leqslant \frac{1}{2C} - (2\varepsilon)^{\rho-1} \text{ e } \delta_1 + \delta_2 \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{C} - \varepsilon^{\rho} \tag{3.14}$$

onde C é a maior constante obtida nas estimativas (3.10), (3.11), (3.8), (3.11) e (3.14). Aplicando (3.8), (3.10) e utilizando (3.14), dada $u \in B$ obtemos

$$\begin{aligned}\| \Psi(u) \|_B &\leqslant C \left[\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(u) \|_{M^{p,r}_{1,s}} + \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot)u \|_{M^{p,r}_{1,s}} + \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f \|_{M^{p,r}_{1,s}} \right] \\ &\leqslant C \left(\| g \|_{Lip\rho} \| u \|^{\rho}_{M^{p,r}_{1,s}} + \| V \|_{M^{\frac{n}{\alpha},r}_{1,s}} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} + \| f \|_{M^{\frac{np}{n+\alpha p},r}_{1,s}} \right) \\ &\leqslant C(\varepsilon^{\rho} + \delta_2 \varepsilon + \delta_1) \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, $\Psi(u) \in B$ e assim concluímos a primiera parte da demonstração. Agora mostremos que Ψ é uma contração em B. Dadas $u, v \in B$ usando (3.8), (3.11) e (3.14) temos que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_B &\leqslant C\left(\| V(u-v) \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}} + \| g(u) - g(v) \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}} \right) \\
&\leqslant C(\| V \|_{M_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}} \| u - v \|_{M_{1,s}^{p,r}} \\
&+ \| u - v \|_{M_{1,s}^{p,r}} (\| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| v \|_{M_{1,s}^{p,r}})^{\rho-1}) \\
&\leqslant C[(2\varepsilon)^{\rho-1} + \delta_2] \| u - v \|_B \\
&\leqslant \frac{1}{2} \| u - v \|_B \, .
\end{aligned}$$

Assim, Ψ é uma contração em B. Portanto, aplicando o Teorema do Ponto fixo de Banach existe uma única $u \in B$ tal que $\Psi(u) = u$, isto é,

$$u = C\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u) + f] \right)$$

e então u é solução integral de (3.1). Analogamente ao feito acima podemos ver que

$$\begin{aligned}
\| u_1 - u_2 \|_B &\leqslant C(\| V_1 - V_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}} \| u_1 \|_B + \| V_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}} \| u_1 - u_2 \|_B \\
&\quad + \| u_1 - u_2 \|_B (\| u_1 \|_B + \| u_2 \|_B) + \| f_1 - f_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}}) \\
&\leqslant C(\varepsilon \| V_1 - V_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}} + \delta_2 \| u_1 - u_2 \|_B + (2\varepsilon)^{\rho-1} \| u_1 - u_2 \|_B \\
&+ \| f_1 - f_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}})
\end{aligned}$$

Assim

$$[1 - C(\delta_2 + (2\varepsilon)^{\rho-1})] \| u_1 - u_2 \|_B \leqslant C\varepsilon \| V_1 - V_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{n}{\alpha},r}} + C \| f_1 - f_2 \|_{M_{1,s}^{\frac{np}{n+\alpha p},r}} \, .$$

Como

$$C(\delta_2 + (2\varepsilon)^{\rho-1}) \leqslant \frac{1}{2},$$

então tomando

$$\eta = \frac{C\varepsilon}{1 - C(\delta_2 + (2\varepsilon)^{\rho-1})} \text{ e } \gamma = \frac{C}{1 - C(\delta + (2\varepsilon)^{\rho-1})}$$

obtemos a dependência da solução de f e V.

Finalmente provemos o Teorema 3.3. Considere agora o operador Ψ com $0 < \alpha < n$ e g sendo dada por

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$$

onde $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ é uma série de potência com raio de convergência $0 < \sigma \leqslant \infty$. Vamos mostrar que $\Psi(B) \subset B$ e que ele é uma contração em B. Sejam $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\varepsilon < \max \sigma, 1 \, , \; \frac{1}{1-\varepsilon} + \delta_2 \varepsilon + \delta_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{C} \text{ e } \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \delta_2 \leqslant \frac{1}{2C}, \tag{3.15}$$

onde $C > 0$ é a maior constante obtida nas estimativas (3.8), (3.12), (3.9) e (3.13).

Aplicando (3.9) e (3.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) \|_B &\leqslant C\left[\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star g(u) \|_{M^{p,r}_{q,s}} + \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star V(\cdot)u \|_{M^{p,r}_{q,s}} + \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f \|_{M^{p,r}_{q,s}}\right] \\
&\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{\infty} \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,s}} + \| V \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| u \|_{M^{p,\infty}_{q,s}} + \| f \|_{M^{p,r}_{q,s}}\right) \\
&\leqslant C\left(\delta_1 + \delta_2\varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j\right) \\
&\leqslant C\left[\frac{1}{1-\varepsilon} + \delta_2\varepsilon + \delta_1\right] \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\Psi(u) \in B$ e assim concluímos a primiera parte da demonstração. Agora mostremos que Ψ é uma contração em B. Dadas $u, v \in B$ usando (3.9) e (3.13) temos que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_B &\leqslant C \| |\cdot|^{\alpha-n} \|_{M^{1,r}_{\infty,0}} \left(\| V(u-v) \|_{M^{p,r}_{q,s}} + \| g(u) - g(v) \|_{M^{p,r}_{q,s}}\right) \\
&\leqslant C(\| V \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| u - v \|_{M^{p,r}_{q,s}} \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j-1} \| u \|^{j-1-l}_{M^{p,r}_{q,s}} \| v \|^l_{M^{p,r}_{q,s}} \| u - v \|_{M^{p,r}_{q,s}}) \\
&\leqslant C \| u - v \|_B \left[\delta_2 + \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)\varepsilon^{j-1}\right] \\
&\leqslant C \| u - v \|_B \left[\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \delta_2\right] \\
&\leqslant \frac{1}{2} \| u - v \|_B .
\end{aligned}$$

Assim, Ψ é uma contração em B. Portanto, aplicando o Teorema do Ponto fixo de Banach existe uma única $u \in B$ tal que $\Psi(u) = u$, isto é,

$$u = C\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u) + f]\right)$$

e então u é solução integral de (3.1). Para a dependencia contínua de f e V note que

$$\begin{aligned}
\| u_1 - u_2 \|_B &\leqslant C(\| V_1 - V_2 \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| u_1 \|_B + \| V_2 \|_{M^{p,r}_{q,s}} \| u_1 - u_2 \|_B \\
&+ \| u_1 - u_2 \|_B \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{j-1} \| u_1 \|^{j-1-l}_{M^{p,r}_{1,s}} \| u_2 \|^l_{M^{p,r}_{q,s}}\right) + \| f_1 - f_2 \|_{M^{p,r}_{q,s}}) \\
&\leqslant C(\varepsilon \| V_1 - V_2 \|_{M^{p,r}_{q,s}} + \left(\delta_2 + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\right) \| u_1 - u_2 \|_B + \| f_1 - f_2 \|_{M^{p,r}_{q,s}}).
\end{aligned}$$

Assim

$$[1 - C(\delta_2 + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}] \| u_1 - u_2 \|_B \leqslant \varepsilon \| V_1 - V_2 \|_{M^{p,r}_{q,s}} + \| f_1 - f_2 \|_{M^{p,r}_{q,s}} .$$

Como

$$C(\delta_2 + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}) \leqslant \frac{1}{2},$$

então tomando

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{1 - C(\delta_2 + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2})} \text{ e } \eta = \frac{1}{1 - C(\delta + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2})}$$

obtemos o resultado.

3.5 Propriedades da solução

Nos próximos resultados obteremos algumas propriedades das soluções obtidas nos teoremas de existência e unicidade. As propriedades são válidas para os dois casos $g \in Lip\rho$ e g como série de potência, desde que as condições necessárias para a existência das soluções e as hipóteses sobre g sejam satisfeitas, porém nas demonstrações trabalharemos apenas o caso $g \in Lip\rho$ já que para o outro caso a prova é análoga apenas com as modificações necessárias.

Definição 3.8. *Uma distribuição $u \in \mathcal{S}'$ é dita homogênea de grau a se*

$$\langle u, \phi(x) \rangle = t^a \langle u, t^n \phi(tx) \rangle \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \text{ e } t > 0,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

Teorema 3.9. *(Homogeneidade) Suponha que g é homogênea de grau ρ, V é homogênea de grau $-\alpha$ e f é homogênea de grau $\dfrac{-\alpha\rho}{\rho - 1}$. Então a solução u é homogênea de grau $\dfrac{-\alpha}{\rho - 1}$.*

Demonstração: Considere a sequência de Picard

$$u_1 = C\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f$$

$$u_j = \Psi(u_{j-1}),$$

para $j = 2, 3, \ldots$. Sabemos que $u_j \to u$ em $M^{p,r}_{q,s}$. Como f é homogênea então

$$u_1(x) = \lambda^{\frac{\alpha\rho}{\rho-1} - \alpha} C(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f)(\lambda x),$$

para todo $\lambda > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

Agora, usando que g e V támbem são homegêneas, como feito na seção de Análise de Scalling, obtemos

$$u_2(x) = \lambda^{\frac{\alpha}{\rho-1}} u_2(\lambda \cdot).$$

Demaneira análoga, utilizando indução sobre j mostramos que

$$u_j(\cdot) = \lambda^{\frac{\alpha}{\rho-1}} u_j(\lambda \cdot),$$

para todo j, ou seja, u_j é homogênea de grau $\dfrac{-\alpha}{\rho-1}$.

Agora, como $M^{p,r}_{q,s} \hookrightarrow \mathcal{S}'$ então $u_j \to u$ em $\mathcal{S}'$ e

$$\langle u_j, \phi\rangle = \lambda^{\frac{-\alpha}{\rho-1}}\langle u_j, \lambda^n\phi(\lambda\cdot)\rangle \ , \ x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \ , \ \lambda > 0$$

então

$$\begin{aligned}\langle u, \phi\rangle &= \lim_{j\to\infty}\langle u_j, \phi\rangle \\ &= \lambda^{\frac{-\alpha}{\rho-1}} \lim_{j\to\infty}\langle u_j, \lambda^n\phi(\lambda\cdot)\rangle \\ &= \lambda^{\frac{-\alpha}{\rho-1}}\langle u, \lambda^n\phi(\lambda\cdot)\rangle \ , \ \forall\lambda > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^n - \{0\},\end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$. Assim, u é homogênea de grau $\dfrac{-\alpha}{\rho-1}$.

■

Definição 3.10. *Dizemos que uma distribuição u é radial se*

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \phi \circ \tau\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$ e para toda τ rotação no $\mathbb{R}^n$ que deixe a origem fixa, ou seja, τ pertencente ao conjunto de matrizes ortogonais de $\mathbb{R}^n$, o qual denotamos por $SO(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.11. *(Simetria radial) Suponha que g,f e V são distribuições radiais. Então a solução u é radial.*

Demonstração: Considere a seguência de Picard

$$\begin{aligned} u_1 &= C\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f \\ u_j &= \Psi(u_{j-1}),\end{aligned}$$

para $j = 2, 3, \ldots$.

É fácil ver que u_1 é radial. Agora, como produto, convolução e composição de funções radiais então

$$u_2 = C\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [Vu_1 + g(u_1) + f]$$

é radial. Com esse raciocínio e aplicando indução sobre j temos que u_j é radial para todo j.

Seja $\tau \in SO(\mathbb{R}^n)$. Logo, como para toda $\phi \in \mathcal{S}$ tem-se $\phi \circ \tau \in \mathcal{S}$ então

$$\begin{aligned}\langle u, \phi\circ\tau\rangle &= \lim_{j\in\to}\langle u_j, \phi\circ\tau\rangle \\ &= \lim_{j\in\to}\langle u_j, \phi\rangle \\ &= \langle u, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, u é radial.

■

Agora vamos mostrar que a solução obtida no teorema de existência e unicidade também satisfaz (3.1) no sentido de distribuições.

Teorema 3.12. *Seja u solução integral de* (3.1) *obtida no teorema 3.1. Então*

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u = V(x)u + g(u) + f$$

vale no sentido de distribuições.

Demonstração: Seja $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty$. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle u(x), (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\rangle &= \langle C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}(g(u)+Vu+f)(y)dy, (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\langle C\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}, (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi(x)\rangle\right)(g(u)+V(u)f)(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\langle\delta_y,\varphi\rangle(g(u)+Vuf)(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)(g(u)+Vu+f)(y))dy \\
&= \langle g(u)+Vu+f,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Logo

$$\langle(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u,\varphi\rangle = \langle g(u)+Vu+f,\varphi\rangle,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty$. Assim, u satisfaz (3.1) no sentido de distribuições.

■

Definição 3.13. *Uma distribuição u é dita não-negativa se*

$$\langle u,\phi\rangle \geqslant 0,$$

sempre que $\phi \geqslant 0$ em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.14. *(Positividade) Suponha que $g \geqslant 0$ em $\mathbb{R}$, V e f distribuições não-negativas. Então u é não-negativa. Mais ainda, se f é positiva então u é positiva.*

Demonstração: Considere a seguência de Picard

$$u_1 = C\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f$$

$$u_j = \Psi(u_{j-1}),$$

para $j = 2, 3, \ldots$.

É fácil ver que u_1 é não-negativa. Agora, como produto, convolução e composição de funções não-negativas são não-negativas então

$$u_2 = C\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [Vu_1 + g(u_1) + f]$$

é não-negativa. Com esse raciocínio e aplicando indução sobre j temos que u_j é não-negativa para todo j. Assim

$$\begin{aligned} \langle u, \phi\rangle &= \lim_{j\to\infty}\langle u_j, \phi\rangle \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

pois $\langle u_j, \phi\rangle \geqslant 0$, para toda $\phi \geqslant 0$ e para todo j.

Portanto, u é não-negativa. Agora suponha f positiva. Como u satisfaz (3.2) temos

$$u = C\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u) + f]\right).$$

Sendo f positiva temos que

$$(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star f)$$

é positiva. Como $\dfrac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(u)]$ é não-negativa segue que u é positiva.

■

3.6 Análise de outros casos de não-linearidades $g(u, \nabla u)$

Nesta seção iremos abordar outros três casos de não-linearidades, separados em sub-seções e denominados Caso 1, Caso 2 e Caso 3. No primeiro vamos considerar $g(x) = x|x|^{\rho-1}$, onde, utilizando uma particularidade dessa não-linearidade e a estimativa da composição com funções $Lip(\rho - 1)$ em espaços de modulação-Lorentz, conseguiremos obter a existência de solução. Nos últimos dois casos, vamos considerar não-linearidades dependendo de ∇u que não foram cobertas nos resultados das seções precedentes.

3.6.1 Caso 1

Considere $g(x) = x|x|^{\rho-1}$. Neste primeiro caso vamos analisar a equação

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u = Vu + u|u|^{\rho-1} + f \text{ , em } \mathbb{R}^n, \tag{3.16}$$

com $n \geqslant 3$, $0 < \alpha < n$ e $\rho > 2$.

Considere

$$\Psi(u) = C_n\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [Vu + u|u|^{\rho-1} + f]$$

e $M_{1,s}^{p,r}$ com $1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant r \leqslant \infty$ e $s \geqslant 0$.

Neste caso vamos usar uma obordagem diferente da usada caso geral para estimar o operador Ψ. Utilizando (2.10) e (2.3) podemos calcular as estimativas necessárias para aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach sem impor condições sobre α o que aumenta o *range* do resultado de existência que vamos obter. Então se $u \in \mathbf{M}_{1,s}^{p,r}$ aplicando (2.12), (2.3), (2.7),(2.5) e (2.42) obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) \|_{M_{1,s}^{p,r}} &\leqslant C \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \|_{M_{\infty,0}^{1,\infty}} [\| Vu \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| u|u|^{\rho-1} \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}] \\
&\leqslant C[\| V \|_{M_{1,s}^{2p,r}} \| u \|_{M_{1,s}^{2p,r}} + \| u \|_{M_{1,s}^{2p,r}} \| |u|^{\rho-1} \|_{M_{1,s}^{2p,r}} + \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}) \\
&\leqslant C[\| V \|_{M_{1,s}^{p,r}} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| u \|_{M_{1,s}^{2p,r}} \| |u|^{\rho-1} \|_{M_{1,s}^{t,r}} + \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}) \\
&\leqslant C[\| V \|_{M_{1,s}^{p,r}} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| u \|^{\rho}_{M_{1,s}^{p,r}} + \| f \|_{M_{1,s}^{p,r}}),
\end{aligned}$$

onde $t = \dfrac{n}{s + \rho(\frac{n}{p} - s)}$ e desde que

$$0 < s < \min\{\frac{n}{p}, \frac{n}{2}, \rho - 1\}, (\rho - 1)(\frac{n}{p} - s) < n \text{ e } \frac{n}{\rho - 1} < s. \tag{3.17}$$

Agora se $u, v \in \mathbf{M}_{1,s}^{p,r}$ temos que

$$u|u|^{\rho-1} - v|v|^{\rho-1} = \int_0^1 (\rho)(u-v)|t(u-v) + v|^{\rho-1} dt$$

e assim de maneira análoga ao feito na primeira estimativa obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} &\leqslant C \left(\| V(u-v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| u|u|^{\rho-1} - v|v|^{\rho-1} \|_{M_{1,s}^{p,r}} \right) \\
&= C \left(\| V(u-v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| \int_0^1 \rho(u-v)|t(u-v) + v|^{\rho-1} dt \|_{M_{1,s}^{p,r}} \right) \\
&\leqslant C \| V \|_{M_{1,s}^{p,r}} \| (u-v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} \\
&+ \int_0^1 \| (u-v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} \| |t(u-v) + v|^{\rho-1} \|_{M_{1,s}^{t,r}} dt \\
&\leqslant C \| (u-v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} (\| V \|_{1,s}^{p,r} \\
&+ \int_0^1 (t \| u - v \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| v \|_{M_{1,s}^{p,r}})^{\rho-1} dt) \\
&\leqslant \| (u-v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} C \left(\| V \|_{1,s}^{p,r} + (\| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| v \|_{M_{1,s}^{p,r}})^{\rho-1} \right),
\end{aligned}$$

desde que (3.17) seja satisfeito.

De posse dessas estimativas obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.15. *(Existência e unicidade) Sejam $n \geqslant 3$, $1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant r \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\rho > 2$ e $0 < \alpha < n$ satisfazendo (3.17). Então, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, se $f, V \in M_{1,s}^{p,r}$ satisfazem*

$$\| f \|_{M_{1,s}^{p,r}} \leqslant \delta_1 \ \text{ e } \ \| V \|_{M_{1,s}^{p,r}} \leqslant \delta_2$$

então existe uma única $u \in B = \{u \in M_{1,s}^{p,r}; \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} \leqslant \varepsilon\}$ solução integral de (3.16).

Demonstração: De forma análoga as demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.3 aplicando as estimativas obtidas acima, mostramos que Ψ é uma contração em B e então pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach obtemos o resultado desejado.

■

3.6.2 Caso 2

Considere uma função g dada por

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x^{2j},$$

onde $\sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x^{2j}$ é uma série de potência com raio de convergência $0 < \sigma \leqslant \infty$. Vamos considerar a seguinte equação

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = Vu + g(|\nabla u|) + f \text{ , em } \mathbb{R}^n, \tag{3.18}$$

com $n \geqslant 3$, $0 < \alpha < n$. Seja $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$ e $s \geqslant 0$. Considere o operador Ψ definido por

$$\Psi(u) = C\left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [V(x)u + g(|\nabla u|) + f]\right),$$

com $u \in \mathbf{M}_{q,s}^{p,r}$.

Suponha que $q = 1$ e $s > 1$. Dada $u \in \mathbf{M}_{1,s}^{p,r}$, aplicando (2.10) temos

$$\| \Psi(u) \|_{M_{1,s}^{p,r}} \leqslant C \left\| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \right\|_{M_{\infty,s}^{1,\infty}} [\| Vu \|_{M_{1,0}^{p,r}} + \| g(|\nabla u|) \|_{M_{1,0}^{p,r}} + \| f \|_{M_{1,0}^{p,r}}]$$

Mas

$$g(|\nabla u|) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{2j} |\nabla u|^{2j},$$

e então tomando $f = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u)^2$, segue de (2.5), (2.7) e (2.13) que

$$\begin{aligned}
\| a_{2j} |\nabla u|^{2j} \|_{M_{1,0}^{p,r}} &= |a_{2j}| \, \| f^j \|_{M_{1,0}^{p,r}} \\
&\leqslant C|a_j| \, \| f \|_{M_{1,0}^{p,r}}^j \\
&\leqslant C|a_j| (\sum_{i=1}^{n} \| \partial_{x_i} u \|_{M_{1,s-1}^{p,r}}^2)^j \\
&\leqslant C|a_j| (C_1 \sum_{i=1}^{n} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}}^2)^j \\
&\leqslant C|a_j| (\sqrt{nC_1} \, \| u \|_{M_{1,s-1}^{p,r}})^{2j},
\end{aligned}$$

para todo $j \geqslant 1$. Assim

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \| a_{2j}|\nabla u|^{2j} \|_{M^{p,r}_{1,0}} \leqslant C \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{2j}|(\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}})^{2j},$$

e com raciocínio análogo a (2.47) temos que $g(|\nabla u|) \in M^{p,r}_{1,0}$ e vale a estimativa

$$\| g(|\nabla u|) \|_{M^{p,r}_{1,0}} \leqslant C \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{2j}|(\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}})^{2j},$$

desde que $\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} < \sigma$.

Logo, aplicando (2.3), (2.5) e (2.7) obtemos

$$\| \Psi(u) \|_{M^{p,r}_{1,s}} \leqslant C[\| V \|_{M^{p,r}_{1,0}} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} + \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{2j}|(\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}})^{2j} + \| f \|_{M^{p,r}_{1,0}}],$$

desde que $1 < s < \dfrac{\alpha+1}{2}$.

Agora, dados $u, v \in \mathbf{M}^{p,r}_{1,s}$ de forma análoga ao feito acima e utilizando o raciocínio de (2.48) mostramos que

$$\begin{aligned} \| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M^{p,r}_{1,s}} &\leqslant C \| u - v \|_{M^{p,r}_{1,s}} [\| V \|_{M^{p,r}_{1,0}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2j-1} |a_{2j}|(\sqrt{nC_1} \\ &\cdot \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}})^{2j-1-l}(\sqrt{nC_1} \| v \|_{M^{p,r}_{1,s}})^{l}], \end{aligned}$$

desde que $\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}}, \sqrt{nC_1} \| v \|_{M^{p,r}_{1,s}} < \sigma$.

Utilizando as duas estimativas obtidas para Ψ obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.16. *(Existência e unicidade) Sejam $n \geqslant 3$, $1 \leqslant p < \infty$,$1 \leqslant r \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < n$. Assuma ainda que $1 < s < \dfrac{\alpha+1}{2}$.*

Existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, se $f, V \in \mathbf{M}^{p,r}_{1,0}$ satisfazem

$$\| f \|_{M^{p,r}_{1,0}} \leqslant \delta_1 \ e \ \| V \|_{M^{p,r}_{1,0}} \leqslant \delta_2$$

então existe uma única $u \in B = \{u \in M^{p,r}_{1,s}; \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} \leqslant \varepsilon\}$ solução integral de (3.18).

Demonstração: Usando as estimativas obtidas acima e seguindo o raciocínio da demonstração do Teorema 3.3 temos que Ψ é uma contração em B e o resultado segue do Teorema do Ponto fixo de Banach.

■

Agora consideremos $q > 1$ e $s > 0$ tais que

$$\frac{n}{q'} + 1 < s < \frac{\alpha+1}{2} \text{ e } q < n.$$

Dada $u \in \mathbf{M}^{p,r}_{1,s}$ aplicando (2.10) temos

$$\| \Psi(u) \|_{M^{p,r}_{1,s}} \leqslant C \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \|_{M^{1,\infty}_{\infty,s}} [\| Vu \|_{M^{p,r}_{q,0}} + \| g(|\nabla u|) \|_{M^{p,r}_{q,0}} + \| f \|_{M^{p,r}_{q,0}}].$$

Tome $w > \frac{n}{q'}$ tal que $s > w+1$. Para cada $j \geqslant 1$ aplicando (2.5), (2.7) e (2.13) obtemos

$$\begin{aligned}
\| a_{2j}|\nabla u|^{2j} \|_{M^{p,r}_{q,0}} &\leqslant |a_{2j}| \| f^j \|_{M^{p,r}_{1,w}} \\
&\leqslant C|a_j| \| f \|^j_{M^{p,r}_{q,w}} \\
&\leqslant C|a_j| (\sum_{i=1}^{n} \| \partial_{x_i} u \|^2_{M^{p,r}_{1,w}})^j \\
&\leqslant C|a_j| (C_1 \sum_{i=1}^{n} \| u \|^2_{M^{p,r}_{1,w+1}})^j \\
&\leqslant C|a_j| (\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}})^{2j}
\end{aligned}$$

e então

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \| a_{2j}|\nabla u|^{2j} \|_{M^{p,r}_{q,0}} \leqslant C \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{2j}| (\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{q,s}})^{2j}.$$

Com raciocínio análogo a (2.47) temos que $g(|\nabla u|) \in M^{p,r}_{q,0}$ e vale a estimativa

$$\| g(|\nabla u|) \|_{M^{p,r}_{q,0}} \leqslant C \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{2j}| (\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{q,s}})^{2j},$$

desde que $\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{q,s}} < \sigma$. Além disso, dados $u, v \in \mathbf{M}^{p,r}_{1,s}$ de forma análoga ao feito acima e utilizando o raciocínio de (2.48) mostramos que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M^{p,r}_{q,s}} &\leqslant C \| u - v \|_{M^{p,r}_{q,s}} [\| V \|_{M^{p,r}_{q,0}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2j-1} |a_{2j}| (\sqrt{nC_1} \\
&\cdot \| u \|_{M^{p,r}_{q,s}})^{2j-1-l} (\sqrt{nC_1} \| v \|_{M^{p,r}_{q,s}})^l],
\end{aligned}$$

desde que $\sqrt{nC_1} \| u \|_{M^{p,r}_{q,s}}, \sqrt{nC_1} \| v \|_{M^{p,r}_{q,s}} < \sigma$.

De posse das estimativas calculadas acima obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.17. *(Existência e unicidade) Sejam $n \geqslant 3$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < n$. Assuma ainda que $\frac{n}{q'} + 1 < s < \frac{\alpha+1}{2}$ e $q < n$.*

Existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, se $f, V \in \mathbf{M}^{p,r}_{q,0}$ satisfazem

$$\| f \|_{M^{p,r}_{q,0}} \leqslant \delta_1 \text{ e } \| V \|_{M^{p,r}_{q,0}} \leqslant \delta_2$$

então existe uma única $u \in B = \{u \in M^{p,r}_{q,s}; \| u \|_{M^{p,r}_{q,s}} \leqslant \varepsilon\}$ solução integral de (3.18).

3.6.3 Caso 3

Neste último caso vamos analisar a seguinte equação

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = Vu + |\nabla u|^{\rho} + f \ , \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{3.19}$$

com $n \geqslant 3$, $0 < \alpha < n$ e $\rho > 2$. Considere

$$\Psi(u) = C_n \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \star [Vu + |\nabla u|^{\rho} + f]$$

e $\mathbf{M}_{1,s}^{p,\infty}$ com $1 \leqslant p < \infty$,$1 \leqslant r \leqslant \infty$ e $s \geqslant 0$. Então se $u \in \mathbf{M}_{1,s}^{p,\infty}$ temos que

$$|\nabla u|^{\rho} = (\sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u)^2)^{\frac{\rho}{2}}$$

e aplicando (2.12),(2.3), (2.7),(2.13),(2.5) e (2.42) obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) \|_{M_{1,s}^{p,r}} &\leqslant C \| \frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} \|_{M_{\infty,s}^{1,\infty}} [\| Vu \|_{M_{1,0}^{p,r}} + \| |\nabla u|^{\rho} \|_{M_{1,0}^{p,r}} + \| f \|_{M_{1,0}^{p,r}}] \\
&\leqslant C[\| V \|_{M_{1,0}^{2p,r}} \| u \|_{M_{1,0}^{2p,r}} + \| | \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u)^2 |^{\frac{\rho}{2}} \|_{M_{1,s-1}^{t,r}} + \| f \|_{M_{1,0}^{p,r}}] \\
&\leqslant C[\| V \|_{M_{1,0}^{p,r}} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u)^2 \|_{M_{1,s-1}^{p,r}}^{\frac{\rho}{2}} + \| f \|_{M_{1,0}^{p,r}}) \\
&\leqslant C[\| V \|_{M_{1,0}^{p,r}} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + (\sum_{k=1}^{n} \| \partial_k u \|_{M_{1,s-1}^{p,r}})^{\rho} + \| f \|_{M_{1,0}^{p,r}}) \\
&\leqslant C[\| V \|_{M_{1,0}^{p,r}} \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| u \|_{M_{1,s}^{p,r}}^{\rho} + \| f \|_{M_{1,0}^{p,r}}),
\end{aligned}$$

onde $t = \dfrac{n}{(s-1) + \frac{\rho}{2}(\frac{n}{p} - (s-1))}$ e desde que

$$0 < s-1 < \min\{\frac{n}{p}, \frac{n}{2}, \frac{\rho}{2}\}, \frac{\rho}{2}(\frac{n}{p} - (s-1)) < n \text{ e } \frac{2n}{\rho} < (s-1) \text{ e } s < \frac{\alpha+1}{2}. \tag{3.20}$$

Agora se $u, v \in \mathbf{M}_{1,s}^{p,r}$ de maneira análoga ao feito na primeira estimativa obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M_{1,s}^{p,r}} &\leqslant C \left(\| V(u-v) \|_{M_{1,0}^{p,r}} + \| |\nabla u|^{\rho} - |\nabla v|^{\rho} \|_{M_{1,0}^{p,r}} \right) \\
&\leqslant C \left(\| V \|_{1,0}^{p,r} \| u - v \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| |\nabla u|^{\rho} - |\nabla v|^{\rho} \|_{M_{1,s-1}^{t,r}} \right).
\end{aligned}$$

Como $g(\cdot) = |\cdot|^{\frac{\rho}{2}} \in Lip\dfrac{\rho}{2}$ então de maneira análoga ao feito no caso geral segue que

$$\begin{aligned}
\| |\nabla u|^{\rho} - |\nabla v|^{\rho} \|_{M_{1,s-1}^{t,r}} &\leqslant C \| (\sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u)^2) - (\sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} v)^2) \|_{M_{1,s-1}^{p,r}} \\
&\cdot \quad (\| \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} u)^2 \|_{M_{1,s-1}^{p,r}} + \| \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} v)^2 \|_{M_{1,s-1}^{p,r}})^{\frac{\rho}{2}-1} \\
&\leqslant C(\| u \|_{M_{1,s}^{p,r}}^2 + \| v \|_{M_{1,s}^{p,r}}^2)^{\frac{\rho}{2}-1} \\
&\cdot \quad (\sum_{i=1}^{n} \| \partial_{x_i}(u-v) \|_{M_{1,s-1}^{p,r}} \| \partial_{x_i}(u+v) \|_{M_{1,s-1}^{p,r}}) \\
&\leqslant C(\| u \|_{M_{1,s}^{p,r}}^2 + \| v \|_{M_{1,s}^{p,r}}^2)^{\frac{\rho}{2}-1} (\| u \|_{M_{1,s}^{p,r}} + \| v \|_{M_{1,s}^{p,r}}) \\
&\cdot \quad \| u - v \|_{M_{1,s}^{p,r}} .
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M^{p,r}_{1,s}} &\leqslant \| u - v \|_{M^{p,r}_{1,s}} C(\| V \|^{p,r}_{1,0} + (\| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} + \| v \|_{M^{p,r}_{1,s}})^{\frac{\rho}{2}-1} \\ &\cdot \quad (\| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} + \| v \|_{M^{p,r}_{1,s}})), \end{aligned}$$

desde que (3.20) seja satisfeito.

De posse dessas estimativas obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.18. *(Existência e unicidade) Sejam* $n \geqslant 3$, $1 \leqslant p < \infty$,$1 \leqslant r \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\rho > 2$ *e* $0 < \alpha < n$ *satisfazendo* (3.20)*. Existem* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *tais que, se* $f, V \in M^{p,r}_{1,0}$ *satisfazem*

$$\| f \|_{M^{p,r}_{1,0}} \leqslant \delta_1 \ \text{e} \ \| V \|_{M^{p,r}_{1,0}} \leqslant \delta_2$$

então existe uma única $u \in B = \{u \in M^{p,r}_{1,s}; \| u \|_{M^{p,r}_{1,s}} \leqslant \varepsilon\}$ *solução integral de* (3.19)*.*

Demonstração: Analogamente aos teoremas de existência anteriores aplicando as estimativas mostramos que Ψ é uma contração em B e então pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach obtemos o resultado desejado.

■

4 Problema de Valor de Fronteira em $\mathbb{R}^n_+$ em Espaços de Fourier-Besov

Dada uma função u definida em $\mathbb{R}^n_+$ vamos indicar $u = u(x', x_n)$ com $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n > 0$. Inicialmente consideraremos o seguinte problema de fronteira:

$$\begin{cases} -\Delta u = K_1(\partial^\beta u)^a & , \text{ em } \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = V(x')u + K_2 u^b + f(x') & , \text{ em } \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $n \geqslant 3$, a, b são números inteiros positivos, η é o vertor normal exterior a fronteira de $\mathbb{R}^n_+$, K_1, K_2 são constantes e ∂^β é definido a partir da transformada de Fourier nas $n-1$ primeiras variáveis por

$$(\partial^\beta u)^\wedge(\xi', x_n) = (2\pi|x'|)^\beta(\widehat{u})(\xi', x_n),$$

para todo $x_n > 0$ e $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Para obter uma formulação funcional adequada em variáveis de Fourier, vamos proceder de forma semelhante à [12] e [13] onde os autores estudaram uma classe de PVF em $\mathbb{R}^n_+$ no contexto dos espaços PM^a.

Procedendo de maneira formal podemos aplicar a transformada de Fourier, nas $n-1$ primeiras variáveis, em (4.1) obtendo então

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2(\widehat{u})}{\partial x_n^2}(\xi', x_n) + 4\pi^2|\xi'|^2(\widehat{u})(\xi', x_n) = [K_1(\partial^\beta u)^a]^\wedge(\xi', x_n) \\ \dfrac{\partial(\widehat{u})}{\partial x_n}(\xi', 0) = [Vu(\cdot, 0)]^\wedge(\xi') + (K_2 u^b)^\wedge(\xi', 0) + (\widehat{f})(\xi'). \end{cases} \tag{4.2}$$

Note que o problema acima, para cada ξ' fixo, se resume a uma EDO de segunda ordem na variável x_n em $(0, \infty)$ com condições de fronteira em $x_n = 0$. Resolvendo o problema obtemos a seguinte equação integral equivalente a (4.2):

$$\widehat{u}(\xi', x_n) = \int_0^\infty G(\xi', x_n, t)(K_1(\partial^\beta u)^a)^\wedge(\xi', t)dt \tag{4.3}$$

$$+G(\xi', x_n, 0)[(Vu(\cdot, 0))^\wedge(\xi') + (K_2 u^b)^\wedge(\xi', 0) + \widehat{f}(\xi')],$$

onde

$$G(\xi', x, t) = \frac{e^{-2\pi|\xi'||x+t|} + e^{-2\pi|\xi'||x-t|}}{4\pi|\xi'|},$$

com $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, $x \geqslant 0$ e $t \in \mathbb{R}$, G é a função de Green associada a (4.2) (ver [46] para mais detalhes).

Observação 4.1. *Substituindo a condição de contorno de Neumann em (4.1) pela condição de Robin*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u = V(x')u + K_2 u^b + f(x'),$$

obtemos de maneira análoga a equação integral (4.3) com uma nova função de Green $\tilde{G}$ dada por

$$\tilde{G}(\xi', x, t) = \frac{(2\pi|\xi'| + \lambda)e^{-2\pi|\xi'||x+t|} + (2\pi|\xi'| - \lambda)e^{-2\pi|\xi'||x-t|}}{(8\pi^2|\xi'|^2 + \lambda|\xi'|)}.$$

Pórem nos dois casos vale que

$$|G(\xi', x, t)| \leqslant \frac{1}{2\pi|\xi'|}e^{-2\pi|\xi'||x-t|} \text{ e } |\tilde{G}(\xi', x, t)| \leqslant \frac{1}{2\pi|\xi'|}e^{-2\pi|\xi'||x-t|},$$

e dessa forma podemos de maneira análoga obter resultados para (4.1) nos dois casos.

Vemos pela equação obtida que é necessário estudarmos os valores na fronteira de $\mathbb{R}^n_+$. Mas como vamos trabalhar com espaços de funções de baixa regularidade e que em geral não possuem traço, teremos que considerar $u_{|\mathbb{R}^n_+}$ e $u_{|\partial\mathbb{R}^n_+}$ como funções independentes e podemos então estudar a equação (4.3) da seguinte forma

$$\begin{cases} \widehat{u_1}(\xi', x_n) = \displaystyle\int_0^\infty G(\xi', x_n, t)(K_1(\partial^\beta u_1)^a)^\wedge(\xi', t)dt \\ +G(\xi', x_n, 0)[(Vu_2)(\xi')]^\wedge + (K_2 u_2^b)^\wedge(\xi') + \widehat{f}(\xi')] \\ \widehat{u_2}(\xi') = \displaystyle\int_0^\infty G(\xi', 0, t)(K_1(\partial^\beta u_1)^a)^\wedge(\xi', t)dt \\ +G(\xi', 0, 0)[(Vu_2)^\wedge(\xi') + (K_2 u_2^b)^\wedge(\xi') + \widehat{f}(\xi')] \end{cases} \tag{4.4}$$

Com regularidade suficiente teremos que u_2 é o traço de u_1 em $\partial\mathbb{R}^n_+$. Para facilitar o tratamento de (4.4) vamos escrevê-lo na forma de uma equação funcional. Para isso, definimos os seguintes operadores, via transformada de Fourier,

$$I(u_1, u_2) = (I_1(u_1), I_2(u_2)) \text{ com}$$

$$\widehat{I}_1(u_1) = \int_0^\infty G(\xi', x_n, t)(K_1(\partial^\beta u_1)^a)^\wedge(\xi', t)dt$$

$$e \tag{4.5}$$

$$\widehat{I}_2(u_2) = \int_0^\infty G(\xi', 0, t)(K_1(\partial^\beta u_1)^a)^\wedge(\xi', t)dt$$

$$N(u_1, u_2) = (N_1(u_1), N_2(u_2)) \text{ com}$$

$$\widehat{N_1}(u_1) = G(\xi', x_n, 0)(Vu_2)^\wedge(\xi') \text{ e } \widehat{N_2}(u_2) = G(\xi', 0, 0)(Vu_2)^\wedge(\xi') \tag{4.6}$$

$$T(u_1, u_2) = (T_1(u_1), T_2(u_2)) \text{ com}$$

$$\widehat{T}_1(u_1) = G(\xi', x_n, 0)(K_2 u_2^b)^\wedge(\xi') \text{ e } \widehat{T}_2(u_2) = G(\xi', 0, 0)(K_2 u_2^b)^\wedge(\xi') \tag{4.7}$$

$L(u_1, u_2) = (L_1(u_1), L_2(u_2))$ com

$$\widehat{L_1}(u_1) = G(\xi', x_n, 0)\widehat{f}(\xi') \text{ e } \widehat{L_2}(u_2) = G(\xi', 0, 0)\widehat{f}(\xi') \tag{4.8}$$

Logo, podemos expressar (4.4) por meio da seguinte equação funcional

$$u = I(u) + N(u) + T(u) + L(u), \tag{4.9}$$

onde $u = (u_1, u_2)$.

Agora vamos definir o espaço de funções onde iremos estudar a existência de solução para (4.9). Para tal vamos precisar antes definir um novo espaço baseado nos espaços de Fourier Besov (ver página 32):

Definição 4.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ e $d > 0$ e considere o espaço do tipo Chemin-Lerner, $\mathcal{L}^r_d FB^s_{p,q}$, formado pelas funções u mensuráveis tais que*

$$\| u \|_{\mathcal{L}^r_d FB^s_{p,q}} < \infty,$$

onde

$$\| u \|_{\mathcal{L}^r_d FB^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sjq} \| x_n^d \| \widehat{\phi}_j \widehat{u}(\xi', x_n) \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \|^q_{L^r(0,\infty)} \right)^{\frac{1}{q}} & , \ se\ q < \infty \\ \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sj} \| x_n^d \| \widehat{\phi}_j \widehat{u}(\xi', x_n) \|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \|_{L^r(0,\infty)} & , \ se\ q = \infty. \end{cases}$$

A seguir teremos duas proposições que serão muito importantes na demonstração do resultado principal deste capítulo.

Proposição 4.3. *Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $d > 0$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ com $s_1 < s_2$. Então para todo $\theta \in (0, 1)$ temos*

$$\| \cdot \|_{FB^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}_{p,q}} \leqslant \| \cdot \|^{1-\theta}_{FB^{s_1}_{p,q}} \| \cdot \|^{\theta}_{FB^{s_2}_{p,q}} \tag{4.10}$$

e

$$\| \cdot \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}_{p,q}} \leqslant \| \cdot \|^{1-\theta}_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p,q}} \| \cdot \|^{\theta}_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_2}_{p,q}} . \tag{4.11}$$

Demonstração: Vamos demonstrar a primeira estimativa e a segunda segue de forma análogo. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$2^{[(1-\theta)s_1+\theta s_2]jq} \| \widehat{\phi}_j \widehat{u} \|^q_p = (2^{s_1 j} \| \widehat{\phi}_j \widehat{u} \|_p)^{(1-\theta)q} \cdot (2^{s_2 j} \| \widehat{\phi}_j \widehat{u} \|_p)^{\theta q}.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Holder para séries obtemos o resultado.

■

Proposição 4.4. *Sejam $1 \leqslant p_1, p_2, q \leqslant \infty$ com $p_1 < p_2$, $d > 0$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\frac{n-1}{p_1} + s_1 = \frac{n-1}{p_2} + s_2.$$

Então

$$FB^{s_2}_{p_2,q} \subset FB^{s_1}_{p_1,q} \text{ e } \mathcal{L}^\infty_d FB^{s_2}_{p_2,q} \subset \mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,q}, \tag{4.12}$$

sendo as inclusões contínuas.

Demonstração: Para a primeira inclusão veja [4]. A segunda segue diretamente da primeira e da definição do espaço.

■

Proposição 4.5. *Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $d > 0$.*

(i)(Ver [36]) Dada $u \in FB^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n-1})$ definimos $u_\lambda = \lambda^\gamma u(\lambda \cdot)$. Se

$$s + \gamma - (n-1) + \frac{(n-1)}{p} = 0 \tag{4.13}$$

então

$$\| u \|_{FB^s_{p,q}} \lesssim \| u_\lambda \|_{FB^s_{p,q}} \lesssim \| u \|_{FB^s_{p,q}} .$$

(ii) Dada $u \in \mathcal{L}^r_d FB^s_{p,q}$ definimos $u_\lambda = \lambda^\gamma u(\lambda \cdot)$. Se

$$s + \gamma - (n-1) + \frac{(n-1)}{p} - d - \frac{1}{r} = 0 \tag{4.14}$$

então

$$\| u \|_{\mathcal{L}^r_d FB^s_{p,q}} \lesssim \| u_\lambda \|_{\mathcal{L}^r_d FB^s_{p,q}} \lesssim \| u \|_{\mathcal{L}^r_d FB^s_{p,q}} .$$

Finalmente podemos definir nosso espaço de interesse para o estudo da equação funcional. Para $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $d > 0$ e $1 \leqslant p_1, p_2, q \leqslant \infty$, definimos o espaço

$$X^{s_1,s_2}_{p_1,p_2,q,d} = \mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,q} \times FB^{s_2}_{p_2,q}(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{4.15}$$

com a norma

$$\| (u_1, u_2) \|_{X^{s_1,s_2}_{p_1,p_2,q}} =: \| u_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,q}} + \| u_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,q}} . \tag{4.16}$$

4.1 Análise de Escalonamento

Sejam $w_1(\xi', x_n) = \lambda^\gamma u_1(\lambda\xi, \lambda t)$ e $w_2(\xi') = \lambda^\gamma u_2(\lambda\xi')$ com (u_1, u_2) solução de (4.9). Formalmente, temos que

$$I_1(w_1)(\xi', x_n) \;=\; \lambda^{a(\gamma+\beta)-2} I_1(u)(\lambda(\xi', x_n)) \text{ e } I_2(w_2)(\xi') \;=\; \lambda^{a(\gamma+\beta)-2} I_2(u_2)(\lambda\xi').$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
[\partial^\beta w]^\wedge \star [\partial^\beta w]^\wedge(\xi', t) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lambda^{2(\gamma-n+1)}(\widehat{u})(\lambda^{-1}\xi' - \lambda^{-1}y, \lambda t)(2\pi)^{2\beta}|\xi' - y|^\beta |y|^\beta \\
&\cdot \quad (\widehat{u})(\lambda^{-1}y, \lambda t)dy \\
&= \lambda^{2(\gamma-n+1)}(2\pi)^{2\beta} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\widehat{u})(\lambda^{-1}\xi' - z, \lambda t)|\xi' - \lambda z|^\beta |\lambda z|^\beta \\
&\cdot \quad (\widehat{u})(z, \lambda t)\lambda^{n-1}dz \\
&= \lambda^{2(\gamma-n+1)}\lambda^{2\beta+n-1}[\partial^\beta u]^\wedge \star [\partial^\beta u]^\wedge(\lambda^{-1}\xi', \lambda t).
\end{aligned}$$

Então, com raciocínio análogo e aplicando indução sobre a obtemos

$$[(\partial^\beta w_1)^a]^\wedge(\xi', t) = \lambda^{a(\gamma+\beta)-n+1} = [(\partial^\beta u_1)^a]^\wedge(\lambda^{-1}\xi', \lambda t).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\widehat{I}_1(w_1)(\xi', x_n) &= \int_0^\infty G(\xi', x_n, t)(K_1(\partial^\beta w_1)^a)^\wedge(\xi', t)dt \\
&= \lambda^{a(\gamma+\beta)-n+1} \int_0^\infty G(\xi', x_n, t)(K_1(\partial^\beta u_1)^a)^\wedge(\lambda^{-1}\xi', \lambda t)dt \\
&= \lambda^{a(\gamma+\beta)-n+1} \int_0^\infty \lambda^{-1}G(\lambda^{-1}\xi', \lambda x_n, s)(K_1(\partial^\beta u_1)^a)^\wedge(\lambda^{-1}\xi', s)\lambda^{-1}ds \\
&= \lambda^{a(\gamma+\beta)-n-1}\widehat{I}_1(u_1)(\lambda^{-1}\xi', \lambda x_n)
\end{aligned}$$

e então aplicando a transformada de Fourier inversa obtemos a primeira igualdade. A segunda segue de maneira análoga

Com raciocínio análogo ao feito acima podemos mostrar que

$$N_1(w_1)(\xi', x_n) = \lambda^{\gamma-h_1-1}N_1(u_2)(\lambda\xi') \text{ e } N_2(w_2)(\xi') = \lambda^{\gamma-h_1}N_1(u_2)(\lambda\xi'),$$

$$T^1_{K_2}(w_1)(\xi', x_n) = \lambda^{b\gamma-1}T^2_{K_2}(u_2)(\lambda\xi') \text{ e } T^1_{K_2}(w_2)(\xi') = \lambda^{b\gamma}T^1_{K_2}(u_2)(\lambda\xi')$$

e

$$L_1(w_1)(\xi', x_n) = \lambda^{-h_2-1}L_1(u_1)(\lambda(\xi', x_n)) \text{ e } L_2(w_2)(\xi') = \lambda^{-h_2-1}L_2(u_2)(\lambda\xi'),$$

desde que V e f sejam homogêneas de graus h_1 e h_2, respectivamente. Para obter o escolamento da equação, precisaremos que

$$\gamma = a(\gamma+\beta) - 2 = \gamma - h_1 - 1 = b\gamma - 1 = -h_2 - 1, \tag{4.17}$$

ou, equivalentemente, basta tomar

$$\gamma = \frac{2 - a\beta}{a-1}, h_1 = -1, h_2 = \frac{a(\beta-1)-1}{a-1}, (b-a)\gamma = a\beta - 1. \tag{4.18}$$

Portanto, sobre essas condições temos que

$$((u_1)_\lambda, (u_2)_\lambda) = \lambda^{\frac{2-a\beta}{a-1}}(u_1(\lambda\cdot), u_2(\lambda\cdot))$$

é solução de (4.9) sempre que (u_1, u_2) for solução.

4.2 Resultados

4.2.1 Existência e unicidade

Sejam $n \geqslant 3$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ e $d > 0$. Considere o espaço (ver página 99)

$$X = X^{s_1,s_2}_{p_1,p_2,\infty,d}. \tag{4.19}$$

Sejam também $a, b \geqslant 2$ números inteiros, $\beta \geqslant 0$ e defina $\tilde{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}$ por

$$\tilde{s} = (n-1) - \frac{n-1}{p_1} - 1 \text{ e } \overline{s} = (n-1) - \frac{(n-1)}{p_1} - 1 - \frac{2-a\beta}{a-1}. \tag{4.20}$$

Teorema 4.6. *Sejam $n \geqslant 3$, $a, b \geqslant 2$ números inteiros, com $b \geqslant \frac{a+1}{2}$, e $\beta \geqslant 0$ e $\gamma > 0$ satisfazendo (4.18). Considere támbem $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ e $d > 0$ tais que*

$$(a+1)d < 1, d < \frac{2-\beta}{a-1}, s_1 - d + \frac{(n-1)}{p_1} = s_2 + \frac{(n-1)}{p_2} = (n-1) - \gamma,$$

$$s_1 > 2 - (a-1)d \text{ e } s_2 > 2 - ad.$$

Sejam $\tilde{s}, \overline{s} \in \mathbb{R}$ e X definidos como em (4.20) e (4.19), respectivamente.

Existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, se $f \in FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}$ e $V \in FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}$ satisfazem

$$\| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}} \leqslant \delta_1 \text{ e } \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \leqslant \delta_2$$

então existe um único $(u_1, u_2) \in B_X = \{(u_1, u_2) \in X \ ; \ \| (u_1, u_2) \|_X \leqslant \varepsilon\}$ solução da formulação integral (4.9). Além disso, a solução (u_1, u_2) depende continuamente de f e V, isto é, se $(u_1, u_2), (w_1, w_2) \in B_X$ soluções de (4.9) obtidas através de f_1, V_1 e f_2, V_2, respectivamente, então existem constantes positivas $\eta, \zeta > 0$ independentes de f_i, V_i, u_i e w_i tais que

$$\| u_1 - u_2 \|_X \leqslant \zeta \| f_1 - f_2 \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}} + \eta \| V_1 - V_2 \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} . \tag{4.21}$$

Observação 4.7. *Note que o Teorema 4.6 possui um range não-vazio para $\beta \geqslant 0$. De fato, utilizando (4.17) e (4.18), temos que*

$$\beta = \frac{2b-a-1}{b-1}.$$

Se $\beta > 0$ então $b > \frac{a+1}{2}$ e segue que $0 < \beta < 2$. Dessa forma, podemos tomar $d > 0$ satisfazendo

$$(a+1)d < 1 \text{ e } d < \frac{2-\beta}{a-1}.$$

Considere n, p_1, p_2 tais que

$$(n-1) - \frac{n-1}{p_1} > a\left(\frac{2-\beta}{a-1} - d\right)$$

e

$$(n-1) - \frac{n-1}{p_1} > a\left(\frac{2-\beta}{a-1} - d\right).$$

Logo, se s_1 e s_2 são tomados de forma que

$$s_1 - d + \frac{(n-1)}{p_1} = s_2 + \frac{(n-1)}{p_2} = (n-1) - \gamma,$$

com γ satisfazendo (4.17), então temos

$$s_1 > 2 - (a-1)d \text{ e } s_2 > 2 - ad,$$

garantindo assim que todas as condições do Teorema 4.6 sejam satisfeitas. Se $\beta = 0$ teremos $b = \dfrac{a+1}{2}$ e neste caso escolhemos $a \geqslant 3$ um número inteiro ímpar. Logo, de forma análoga ao feito acima, tomando $d > 0$ satisfazendo

$$(a+1)d < 1 \text{ e } d < \frac{2}{a-1},$$

podemos tomar s_1 e s_2 satisfazendo as condições do Teorema 4.6.

4.2.2 Regularidade

Para o estudo da regularidade da solução do problema (4.9) vamos precisar definir outro espaço de funções. Considere o espço $H_d^{1,s}(\mathbb{R}^n_+)$ definido por

$$H_d^{1,s} = \{f : (0,\infty) \longrightarrow H^{1,s}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ Bochner mensurável } ; \ \| f \|_{H_d^{1,s}} < \infty\},$$

onde

$$\| f \|_{H_d^{1,s}} = ess \sup_{x_n > 0} x_n^d \| (1 + |\cdot|^s)\widehat{f}(x_n, \cdot) \|_1 .$$

Finalmente, considere $\mathcal{H}_d^{1,s} = H_d^{1,s} \times H^{1,s}$ com a norma

$$\| (u_1, u_2) \|_{\mathcal{H}_d^{1,s}} = \| u_1 \|_{H_d^{1,s}} + \| u_2 \|_{H^{1,s}} .$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.8. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Sobre as mesmas hipóteses do Teorema 4.1, suponha também que $a \geqslant 4$, $b < a$, $\beta < 1 - ad$ e $s \geqslant \beta$.*

Existem $\varepsilon > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, se $f \in FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty} \cap H^{1,s}$ e $V \in FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty} \cap H^{1,s}$ satisfazem

$$\| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty} \cap H^{1,s}} \leqslant \delta_1 \text{ e } \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty} \cap H^{1,s}} \leqslant \delta_2$$

então existe uma única solução $(u_1, u_2) \in \tilde{B}_X = \{(u_1, u_2) \in X \cap \mathcal{H}_d^{1,s} \ ; \ \| (u_1, u_2) \|_X + \| (u_1, u_2) \|_{\mathcal{H}_d^{1,s}} \leqslant \varepsilon\}$ da formulação integral (4.9). Mais ainda:

(i) Para cada $x_n > 0$ temos que $u_1(\cdot, x_n) \in C_0^{[s+1-\beta-(a-1)d]}(\mathbb{R}^{n-1})$.

(ii) $u_2 \in C_0^{[s+1]}(\mathbb{R}^{n-1})$.

4.3 Estimativas para os termos da formulação (4.9)

Considere os espaços

$$Y = \mathcal{L}_d^\infty FB^{s_1}_{p_1,\infty} \text{ e } Z = FB^{s_2}_{p_2,\infty}. \tag{4.22}$$

Observação: Sejam $w, v \in \mathcal{S}' - \mathcal{P}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$ arbitrários. Pela fórmula do paraproduto temos

$$\begin{aligned} wv &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_{k-3}v\Delta_k w + \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_{k-3}w\Delta_k v + \sum_{l,k\in\mathbb{Z}} \sum_{|l-k|\leqslant 2} \Delta_l w \Delta_k v \\ &=: A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Então, para cada $j \in \mathbb{Z}$

$$\| \widehat{\phi}_j (wv)^\wedge \|_p \leqslant \| \widehat{\phi}_j \widehat{A_1} \|_p + \| \widehat{\phi}_j \widehat{A_2} \|_p + \| \widehat{\phi}_j \widehat{A_3} \|_p \ .$$

Mas

$$supp \widehat{A_1} \subset \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \ ; \ 2^{k-2} \leqslant |\xi'| 2^{k+2}\}$$

e

$$supp \sum_{|l-k|\leqslant 2} \widehat{\phi}_l \widehat{w} \star \widehat{\phi}_k \widehat{v} \subset \{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \ ; \ 0 < |\xi'| < 2^{l+4}\}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \| \widehat{\phi}_j (wv)^\wedge \|_p &\leqslant \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} \| \widehat{\phi}_l \widehat{v} \star \widehat{\phi}_k \widehat{w} \|_p + \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} \| \widehat{\phi}_l \widehat{w} \star \widehat{\phi}_k \widehat{v} \|_p \\ &+ \sum_{|j-l|<5} \sum_{|k-l|\leqslant 2} \| \widehat{\phi}_l \widehat{w} \star \widehat{\phi}_k \widehat{v} \|_p + \sum_{l=j-3}^{\infty} \sum_{|k-l|\leqslant 2} \| \widehat{\phi}_l \widehat{w} \star \widehat{\phi}_k \widehat{v} \|_p \\ &=: B_1 + B_2 + B_3 + B_4. \end{aligned}$$

Note que se considerarmos o produto zvw de forma análoga ao feito acima temos

$$\begin{aligned} \| \widehat{\phi}_j (zvw)^\wedge \|_p &\leqslant \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} \| \widehat{\phi}_l \widehat{z} \star \widehat{\phi}_k \widehat{vw} \|_p + \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} \| \widehat{\phi}_l \widehat{vw} \star \widehat{\phi}_k \widehat{z} \|_p \\ &+ \sum_{|j-l|<5} \sum_{|k-l|\leqslant 2} \| \widehat{\phi}_l \widehat{z} \star \widehat{\phi}_k \widehat{vw} \|_p + \sum_{l=j-3}^{\infty} \sum_{|k-l|\leqslant 2} \| \widehat{\phi}_l \widehat{z} \star \widehat{\phi}_k \widehat{vw} \|_p \\ &=: B_1 + B_2 + B_3 + B_4. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3} \| \widehat{\phi}_l\widehat{z} \star \widehat{\phi}_k\widehat{vw} \|_p \\
&\leqslant \sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3}\sum_{|m-k|\leqslant 3}\sum_{\eta=-\infty}^{m-3} \| \widehat{\phi}_\eta\widehat{w} \star \widehat{\phi}_m\widehat{v} \|_p \\
&+ \sum_{|m-k|\leqslant 3}\sum_{\eta=-\infty}^{m-3} \| \widehat{\phi}_\eta\widehat{v} \star \widehat{\phi}_m\widehat{w} \|_p \\
&+ \sum_{|k-m|<5}\sum_{|m-\eta|\leqslant 2} \| \widehat{\phi}_{eta}\widehat{w} \star \widehat{\phi}_m\widehat{v} \|_p + \sum_{m=k-3}^{\infty}\sum_{|\eta-m|\leqslant 2} \| \widehat{\phi}_\eta\widehat{w} \star \widehat{\phi}_m\widehat{v} \|_p \\
&=: B_1^1 + B_1^2 + B_1^3 + B_1^4.
\end{aligned}$$

Da mesma forma pode-se obter

$$B_i \leqslant B_i^1 + B_i^2 + B_i^3 + B_i^4,$$

para $i = 2, 3$ e 4.

Lema 4.9. *Sejam $s_1 \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 2$ um número inteiro, $1 < p_1 < \infty$, $d > 0$ e $\beta \geqslant 0$ tais que*

$$\frac{2-\beta}{a-1} - d > 0,\ (a-1)d < 1,\ s_1 > 2-(a-1)d$$

e

$$s_1 - d + \frac{n-1}{p_1} = (n-1) - \frac{2-a\beta}{a-1} \tag{4.23}$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| I_1(u_1) - I_1(w_1) \|_Y \leqslant \| u_1 - w_1 \|_Y \sum_{i=0}^{a-1} \| u_1 \|_Y^{a-1-i} \| w_1 \|_Y^i, \tag{4.24}$$

para toda $u_1, w_1 \in Y$.

Demonstração: Vamos supor inicialmente $a = 2$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$2^{s_1 j} \| \widehat{\phi}_j(\xi') \int_0^\infty G(\xi', x_n, t)[K_1(\partial^\beta u_1)^2)^\wedge - K_1(\partial^\beta w_1)^2)^\wedge(\xi', t)dt \|_{p_1} \leqslant C2^{(s_1-1)j}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|} \| \widehat{\phi}_j[\partial^\beta(u_1-w_1)\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge(\xi', t) \|_{p_1} dt.$$

Considerando $w = \partial^\beta(u_1 - w_1)(\cdot, t)$, $v = \partial^\beta(u_1 + w_1)(\cdot, t)$ e $p = p_1$ como na observação feita na página 103, obtemos

$$2^{s_1 j} \| \widehat{\phi}_j(\xi') \int_0^\infty G(\xi', x_n, t)[K_1(\partial^\beta u_1)^2)^\wedge - K_1(\partial^\beta w_1)^2)^\wedge(\xi', t)dt \|_{p_1} \leqslant C2^{(s_1-1)j}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)dt.$$

Vamos analisar separadamente cada parcela da soma. Temos

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}B_1dt &\leqslant C2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]l}\\
&\cdot \ \| \widehat{\phi}_l(u_1-w_1)^\wedge \|_{p_1}\| \widehat{\phi}_k(u_1+w_1)^\wedge \|_{p_1} 2^{k\beta}\\
&\leqslant C2^{(s_1-1)j}\parallel u_1-w_1\parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\int_0^\infty t^{-d}e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\\
&\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{k[2-d-\beta]}2^{k\beta}\parallel \widehat{\phi}_k(u_1+w_1)^\wedge \|_{p_1}\\
&\leqslant C\parallel u_1-w_1\parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\int_0^\infty t^{-2d}e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}dt\\
&\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(s_1-1)j}2^{k[2-d]}\sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_k(u_1+w_1)^\wedge \|_{p_1}.
\end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente a intregal. Note que, para $M<1$ vale

$$e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}(2\pi|\xi'||x_n-t|)^M<1$$

e então:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{-2d}e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}dt &\leqslant \int_0^\infty t^{-2d}(2\pi|\xi'||x_n-t|)^{-M}dt\\
&\leqslant C2^{-jM}\left(\int_0^{x_n} t^{-2d}(|x_n-t|)^{-M}dt+\int_{x_n}^\infty t^{-2d}(|x_n-t|)^{-M}dt\right)\\
&= C2^{-jM}x_n^{1-\tilde{d}-M}(\int_0^1 s^{-2d}(|1-s|)^{-M}ds\\
&+ \int_0^1 w^{2d-2+M}(|1-w|)^{-M}dw)\\
&= 2^{-jM}x_n^{1-M-2d}(\beta(1-2d,1-M)+\beta(2d+M-1,1-M))\\
&\leqslant C2^{-jM}x_n^{1-M-2d},
\end{aligned}$$

onde usamos as seguintes mudanças de variáveis $t=x_ns$ e $t=\dfrac{x_n}{w}$, e precisamos que $1-2d>0$, $1-M>0$ e $2d+M-1>0$ para que as funções Beta sejam convergentes. Logo, tomando $M+2d-1=d$, obtemos

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}B_1 &\leqslant C\parallel u_1-w_1\parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} x_n^{-d}\sum_{|k-j|\leqslant 3}2^{(s_1-1-M)j}2^{k[2-d]}\\
&\cdot \ \sup_{t>0} t^d\parallel \widehat{\phi}_k(u_1+w_1)^\wedge \|_{p_1}\\
&\leqslant C\parallel u_1-w_1\parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} x_n^{-d}\sum_{|k-j|\leqslant 3}2^{(s_1-1-M)(j-k)}2^{s_1k}\\
&\cdot \ \sup_{t>0} t^d\parallel \widehat{\phi}_k(u_1+w_1)^\wedge \|_{p_1}.
\end{aligned}$$

De forma análoga ao feito para B_1 obtemos que

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}B_2 &\leqslant C2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3}2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]l}\\
&\cdot \;\|\,\widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge\,\|_{p_1}\|\,\widehat{\phi}_k(u_1-w_1)^\wedge(\cdot,t)\,\|_{p_1}\,2^{k\beta}\\
&\leqslant C\,\|\,u_1+w_1\,\|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\,x_n^{-d}\sum_{|k-j|\leqslant 3}2^{(s_1-1-M)(j-k)}2^{s_1 k}\\
&\cdot\;\sup_{t>0}t^d\,\|\,\widehat{\phi}_k(u_1-w_1)^\wedge\,\|_{p_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}B_3 &\leqslant C2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\sum_{|l-j|<5}\sum_{|k-l|\leqslant 2}2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]k}\\
&\cdot\;\|\,\widehat{\phi}_k(u_1-w_1)^\wedge(\cdot,t)\,\|_{p_1}\|\,\widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge\,\|_{p_1}\,2^{l\beta}\\
&\leqslant C\,\|\,u_1-w_1\,\|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\,x_n^{-d}\sum_{|l-j|<5}2^{(s_1-1-M)(j-l)}2^{s_1 l}\\
&\cdot\;\sup_{t>0}t^d\,\|\,\widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge\,\|_{p_1},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}B_4 &\leqslant C2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\sum_{l=j-3}^{\infty}\sum_{|k-l|\leqslant 2}2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]k}\\
&\cdot\;\|\,\widehat{\phi}_k(u_1-w_1)^\wedge\,\|_{p_1}\|\,\widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge\,\|_{p_1}\,2^{l\beta}\\
&\leqslant C\,\|\,u_1-w_1\,\|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\,x_n^{-d}\sum_{l=j-3}^{\infty}2^{(s_1-1-M)(j-l)}2^{s_1 l}\\
&\cdot\;\sup_{t>0}t^d\,\|\,\widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge\,\|_{p_1}\,.
\end{aligned}$$

Logo, multiplicando por x_n^d, tomando o supremo em $x_n>0$ nas estimativas, tomando o supremo em $j\in\mathbb{Z}$ e aplicando a desigualdade de Young no $l^\infty(\mathbb{Z})$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|\,I_1(u_1)-I_1(w_1)\,\|_Y &\leqslant C\,\|\,u_1-w_1\,\|_Y\|\,u_1+w_1\,\|_Y\\
&\leqslant C\,\|\,u_1-w_1\,\|_Y\,(\|\,u_1\,\|_Y+\|\,w_1\,\|_Y).
\end{aligned}$$

Note que o fato de

$$2-d-\beta>0 \text{ e } s_1>2-d$$

é essencial para a convergência das séries nas estimativas envolvendo B_1,B_2 e B_4.

Agora consideremos $a=3$. Neste caso

$$(\partial^\beta u_1)^3-(\partial^\beta w_1)^3=\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)^2+\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)(\partial^\beta w_1)$$

$$+\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta w_1)^2$$

e assim

$$2^{s_1 j} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi') \int_0^\infty G(\xi', x_n, t)[K_1(\partial^\beta u_1)^3)^\wedge - K_1(\partial^\beta w_1)^3)^\wedge(\xi', t)dt \parallel_{p_1} \leqslant C2^{(s_1-1)j}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1 - w_1)(\partial^\beta u_1)^2 \parallel_{p_1} + \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1 - w_1)(\partial^\beta u_1)(\partial^\beta w_1) \parallel_{p_1}$$

$$+ \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1 - w_1)(\partial^\beta w_1)^2 \parallel_{p_1} dt =: (1) + (2) + (3).$$

Calculemos uma estimava para (2). Considere $z = \partial^\beta(u_1 - w_1)$, $v = \partial^\beta u_1$, $w = \partial^\beta w_1$ e $p = p_1$ na observação. Vamos estimar a parcela B_1 e as outras parcelas podem ser estimadas de forma análoga. Temos

$$2^{(s_1-1)j} \int_0^\infty e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} B_1 dt \leqslant C2^{(s_1-1)j} \int_0^\infty e^{-2\pi 2^j |x_n - t|}(B_1^1 + B_2^1 + B_3^1 + B_4^1)dt.$$

Vamos analisar separadamente cada parcela da soma.

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j} \int_0^\infty e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} B_1^1 dt \leqslant\ & C2^{(s_1-1)j} \int_0^\infty e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1) - \frac{(n-1)}{p_1} + \beta]l} \\
& \cdot \parallel \widehat{\phi}_l(u_1 - u_2)^\wedge \parallel_{p_1} \sum_{|m-k|\leqslant 3} \sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{[(n-1) - \frac{(n-1)}{p_1} + \beta]\eta} \\
& \cdot \parallel \widehat{\phi}_\eta \widehat{u}_1 \parallel_{p_1} 2^{m\beta} \parallel \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \parallel_{p_1} dt \\
\leqslant\ & C2^{(s_1-1)j} \parallel u_1 - w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \parallel u_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \\
& \cdot \int_0^\infty t^{-3d} e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{k[1-d-\frac{1}{2}\beta]} \sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{m[1-d+\frac{1}{2}\beta]} \\
& \cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \parallel_{p_1} \\
\leqslant\ & Cx_n^{1-3d-M} \parallel u_1 - w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \parallel u_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \\
& \cdot 2^{(j-k)(s_1-1-M)} 2^{k[2-2d-1-M]} \sum_{|m-k|\leqslant 3} 2^{(k-m)s_1} 2^{ms_1} \\
& \cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \parallel_{p_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j} \int_0^\infty e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} B_1^2 dt \leqslant\ & C2^{(s_1-1)j} \int_0^\infty e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1) - \frac{(n-1)}{p_1} + \beta]l} \\
& \cdot \parallel \widehat{\phi}_l(u_1 - u_2)^\wedge \parallel_{p_1} \sum_{|m-k|\leqslant 3} \sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{[(n-1) - \frac{(n-1)}{p_1} + \beta]\eta} \\
& \cdot \parallel \widehat{\phi}_\eta \widehat{w_1} \parallel_{p_1} 2^{m\beta} \parallel \widehat{\phi}_m \widehat{u}_1 \parallel_{p_1} dt \\
\leqslant\ & Cx_n^{1-3d-M} \parallel u_1 - w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \parallel w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \\
& \cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_1-1-M)} 2^{k[2-2d-1-M]} \sum_{|k-m|\leqslant 3} 2^{(k-m)s_1} 2^{ms_1} \\
& \cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_m \widehat{u}_1 \parallel_{p_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}B_1^3 dt &\leqslant C2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3}2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]l}\\
&\cdot \ \| \widehat{\phi}_l(u_1-u_2)^\wedge \|_{p_1}\sum_{|m-k|<5}\sum_{|\eta-m|\leqslant 2}2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]\eta}\\
&\cdot \ \| \widehat{\phi}_\eta\widehat{u_1}\|_{p_1} 2^{m\beta}\| \widehat{\phi}_m\widehat{w_1}\|_{p_1} dt\\
&\leqslant Cx_n^{1-3d-M}\| u_1-w_1\|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\| u_1\|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\\
&\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3}2^{(j-k)(s_1-1-M)}2^{k[2-2d-1-M]}\sum_{|k-m|<5}2^{(k-m)s_1}2^{ms_1}\\
&\cdot \ \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m\widehat{w_1}\|_{p_1},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
2^{(s_1-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}B_1^4 dt &\leqslant Cx_n^{1-3d-M}\| u_1-w_1\|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\| u_1\|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}}\\
&\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3}2^{(j-k)(s_1-1-M)}2^{k[2-2d-1-M]}\sum_{m=k-3}^{\infty}2^{(k-m)s_1}2^{ms_1}\\
&\cdot \ \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m\widehat{u_1}\|_{p_1} .
\end{aligned}$$

De forma análoga estimamos B_2,B_3 e B_4. Logo, basta tomarmos $M=1-2d$ e obtemos

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}2^{(s_1-1)j}\sup_{x_n>0}x_n^d\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\| \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)(\partial^\beta w_1)\|_{p_1} dt$$

$$\leqslant C\| u_1-w_1\|_Y\| u_1\|_Y\| w_1\|_Y,$$

desde que

$$1-d-\frac{1}{\beta}2>0 \text{ e } s_1>2-2d.$$

Seguindo o mesmo raciocínio provamos que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}2^{(s_1-1)j}\sup_{x_n>0}x_n^d\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\| \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)^2\|_{p_1} dt$$

$$\leqslant C\| u_1-w_1\|_Y\| u_1\|_Y\| w_1\|_Y$$

e

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}2^{(s_1-1)j}\sup_{x_n>0}x_n^d\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j|x_n-t|}\| \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta w_1)^2\|_{p_1} dt$$

$$\leqslant C\| u_1-w_1\|_Y\| u_1\|_Y\| w_1\|_Y .$$

Assim

$$\| I_1(u_1)-I_1(w_1)\|_Y\leqslant\| u_1-w_1\|_Y\sum_{i=0}^{2}\| u_1\|_Y^{2-i}\| w_1\|_Y^i .$$

Seguindo esse raciocínio e aplicando indução sobre a obtemos o resultado.

$\blacksquare$

Lema 4.10. *Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 2$ um número inteiro, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $d > 0$ e $\beta \geqslant 0$ tais que*

$$\frac{2-\beta}{a-1} - d > 0,\ (a-1)d < 1\,,\ s_2 > 2 - ad$$

e

$$s_1 - d + \frac{n-1}{p_1} = s_2 + \frac{(n-1)}{p_2} = (n-1) - \frac{2-a\beta}{a-1} \tag{4.25}$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| I_2(u_2) - I_2(w_2) \|_Z \leqslant \| u_1 - w_1 \|_Y \sum_{i=0}^{a-1} \| u_1 \|_Y^{a-1-i} \| w_1 \|_Y^i, \tag{4.26}$$

para toda $(u_1, u_2), (w_1, w_2) \in X$.

Demonstração: Suponha inicialmente $a = 2$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$2^{s_2 j} \| \widehat{\phi}_j(\xi') \int_0^\infty G(\xi', 0, t)[K_1(\partial^\beta u_1)^2)^\wedge - K_1(\partial^\beta w_1)^2)^\wedge(\xi', t)dt \|_{p_2} \leqslant C 2^{(s_1-1)j}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t} \| \widehat{\phi}_j[\partial^\beta(u_1 - w_1)\partial^\beta(u_1 + w_1)]^\wedge(\xi', t) \|_{p_2} dt.$$

Considerando $w = \partial^\beta(u_1 - w_1)(\cdot, t)$, $v = \partial^\beta(u_1 + w_1)(\cdot, t)$ e $p = p_1$ como na observação feita na página 103 obtemos

$$2^{s_2 j} \| \widehat{\phi}_j(\xi') \int_0^\infty G(\xi', 0, t)[K_1(\partial^\beta u_1)^2)^\wedge - K_1(\partial^\beta w_1)^2)^\wedge(\xi', t)dt \|_{p_1} \leqslant C 2^{(s_2-1)j}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)dt.$$

Vamos analisar separadamente cada parcela da soma. Temos

$$\begin{aligned}
2^{(s_2-1)j} \int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t} B_1 dt &\leqslant C 2^{(s_2-1)j} \| u_1 - w_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \int_0^\infty t^{-2d} e^{-2\pi 2^j t} dt \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{k[2-d-\beta]} \\
&\cdot\ 2^{k\beta} \sup_{t>0} \| \widehat{\phi}_k(u_1 + w_1)^\wedge \|_{p_2} \\
&\leqslant C \| u_1 - w_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \\
&\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(s_2-2+2d)(j-k)} 2^{k[s_2+d]} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_k(u_1 + w_1)^\wedge \|_{p_2},
\end{aligned}$$

onde fazendo $s = 2\pi 2^j t$ segue que

$$\int_0^\infty t^{-2d} e^{-2\pi 2^j t} dt \leqslant C 2^{j(2d-1)} \Gamma(1-2d) \leqslant C 2^{j(2d-1)}.$$

$$\begin{aligned}
2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}B_2dt &\leqslant C2^{(s_2-1)j} \parallel u_1+w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \int_0^\infty t^{-2d}e^{-2\pi 2^j t}\sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{k[2-d-\beta]} \\
&\cdot \quad 2^{k\beta}\sup_{t>0} \parallel \widehat{\phi}_k(u_1-w_1)^\wedge \parallel_{p_2} \\
&\leqslant C \parallel u_1+w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \\
&\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(s_2-2+2d)(j-k)}2^{k[s_2+d]}\sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_k(u_1-w_1)^\wedge \parallel_{p_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}B_3dt &\leqslant C2^{(s_2-1)j} \parallel u_1-w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \int_0^\infty t^{-2d}e^{-2\pi 2^j t}\sum_{|l-j|<5} 2^{k[2-d-\beta]} \\
&\cdot \quad 2^{k\beta}\sup_{t>0} \parallel \widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge \parallel_{p_2} \\
&\leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \\
&\cdot \sum_{|l-j|<5} 2^{(s_2-2+2d)(j-k)}2^{k[s_2+d]}\sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge \parallel_{p_2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}B_4dt &\leqslant C2^{(s_2-1)j} \parallel u_1-w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \int_0^\infty t^{-2d}e^{-2\pi 2^j t}\sum_{l=j-3}^{\infty} 2^{l[2-d-\beta]} \\
&\cdot \quad 2^{l\beta}\sup_{t>0} \parallel \widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge \parallel_{p_2} \\
&\leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \\
&\cdot \sum_{l=j-3}^{\infty} 2^{(s_2-2+2d)(j-l)}2^{l[s_2+d]}\sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_l(u_1+w_1)^\wedge \parallel_{p_2} .
\end{aligned}$$

Logo, tomando o supremo em $j\in\mathbb{Z}$, aplicando a desigualdade de Young no $l^\infty(\mathbb{Z})$ e (4.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\parallel I_2(u_2)-I_2(w_2) \parallel_Z &\leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_Y \parallel u_1+w_1 \parallel_Y \\
&\leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_Y (\parallel u_1 \parallel_Y + \parallel w_1 \parallel_Y).
\end{aligned}$$

Note que o fato de

$$2-d-\beta>0 \text{ e } s_2>2-2d$$

é essencial para a convergência das séries nas estimativas envolvendo B_1,B_2 e B_4. Suponha agora $a=3$. Assim

$$2^{s_2j} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\int_0^\infty G(\xi',0,t)[K_1(\partial^\beta u_1)^3)^\wedge - K_1(\partial^\beta w_1)^3)^\wedge(\xi',t)dt \parallel_{p_2}\leqslant C2^{(s_2-1)j}$$

$$\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)^2 \parallel_{p_2} + \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)(\partial^\beta w_1) \parallel_{p_2}$$

$$+ \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta w_1)^2 \parallel_{p_2} dt =: (1)+(2)+(3).$$

Vamos estimar (2). Considere $z = \partial^\beta(u_1 - w_1)$, $v = \partial^\beta u_1$, $w = \partial^\beta w_1$ e $p = p_1$ na observação. Vamos estimar a parcela B_1 e as outras parcelas podem ser estimadas de forma análoga. Temos

$$2^{s_2 j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t} B_1 dt \leqslant C2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}(B_1^1 + B_2^1 + B_3^1 + B_4^1)dt.$$

Vamos analisar separadamente cada parcela da soma. Temos

$$\begin{aligned}
2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t} B_1^1 dt &\leqslant C2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}\sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]l}\\
&\cdot \ \| \widehat{\phi}_l(u_1-u_2)^\wedge \|_{p_1}\sum_{|m-k|\leqslant 3}\sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]\eta} \| \widehat{\phi}_\eta \widehat{u_1} \|_{p_1}\\
&\cdot \ 2^{m\beta} \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \|_{p_2}\, dt\\
&\leqslant C2^{(s_2-1)j} \| u_1 - w_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \| u_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \int_0^\infty t^{-3d} e^{-2\pi 2^j t}\\
&\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{k[1-d-\frac{1}{2}\beta]}\sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{m[1-d+\frac{1}{2}\beta]}\sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \|_{p_2}\\
&\leqslant C \| u_1 - w_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \| u_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_2-2+3d)}\\
&\cdot \sum_{|m-k|\leqslant 3} 2^{(k-m)(1-d-\frac{\beta}{2}+s_2-2+3d)} 2^{m(s_2+d)}\sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \|_{p_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t} B_1^2 dt &\leqslant C2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}\sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]l}\\
&\cdot \ \| \widehat{\phi}_l(u_1-u_2)^\wedge \|_{p_1}\sum_{|m-k|\leqslant 3}\sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]\eta} \| \widehat{\phi}_\eta \widehat{w_1} \|_{p_1}\\
&\cdot \ 2^{m\beta} \| \widehat{\phi}_m \widehat{u_1} \|_{p_2}\, dt\\
&\leqslant C \| u_1 - w_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \| w_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_2-2+3d)}\\
&\cdot \sum_{|k-m|\leqslant 3} 2^{(k-m)(1-d-\frac{\beta}{2}+s_2-2+3d)} 2^{m(s_2+d)}\sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{u_1} \|_{p_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t} B_1^3 dt &\leqslant C2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}\sum_{|k-j|\leqslant 3}\sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]l}\\
&\cdot \ \| \widehat{\phi}_l(u_1-u_2)^\wedge \|_{p_1}\sum_{|m-k|<5}\sum_{|\eta-m|\leqslant 2} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}+\beta]\eta} \| \widehat{\phi}_\eta \widehat{u_1} \|_{p_1}\\
&\cdot \ 2^{m\beta} \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \|_{p_2}\, dt\\
&\leqslant C \| u_1 - w_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \| u_1 \|_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_2-2+3d)}\\
&\cdot \sum_{|k-m|<5} 2^{(k-m)(1-d-\frac{\beta}{2}+s_2-2+3d)} 2^{m(s_2+d)}\sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \|_{p_2},
\end{aligned}$$

e

$$2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j t}B_1^4 dt \leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \parallel u_1 \parallel_{\mathcal{L}^\infty_d FB^{s_1}_{p_1,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_2-2+3d)} \cdot \sum_{m=k-3}^{\infty} 2^{(k-m)(1-d-\frac{\beta}{2}+s_2-2+3d)} 2^{m(s_2+d)} \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_m \widehat{w_1} \parallel_{p_2}.$$

De forma análoga estimamos B_2,B_3 e B_4. Logo, tomando o supremo em $j\in\mathbb{Z}$, aplicando a desigualdade de Young no $l^\infty(\mathbb{Z})$ e (4.12)

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)(\partial^\beta w_1) \parallel_{p_2} dt$$
$$\leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_Y \parallel u_1 \parallel_Y \parallel w_1 \parallel_Y,$$

desde que

$$1-d-\frac{1}{\beta}2>0 \text{ e } s_2>2-3d.$$

Seguindo o mesmo raciocínio provamos que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta u_1)^2 \parallel_{p_2} dt$$
$$\leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_Y \parallel u_1 \parallel_Y \parallel w_1 \parallel_Y$$

e

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(s_2-1)j}\int_0^\infty e^{-2\pi 2^j} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')\partial^\beta(u_1-w_1)(\partial^\beta w_1)^2 \parallel_{p_2} dt$$
$$\leqslant C \parallel u_1-w_1 \parallel_Y \parallel u_1 \parallel_Y \parallel w_1 \parallel_Y.$$

Assim

$$\parallel I_2(u_2)-I_2(w_2) \parallel_Z \leqslant \parallel u_1-w_1 \parallel_Y \sum_{i=0}^{2} \parallel u_1 \parallel_Y^{2-i} \parallel w_1 \parallel_Y^i.$$

Seguindo esse raciocínio e aplicando indução sobre a obtemos o resultado.

■

Lema 4.11. *Sejam $s_1,s_2\in\mathbb{R}$, $b\geqslant 2$ um número inteiro, $1<p_1<\infty$, $d>0$ e $\beta\geqslant 0$ tais que*

$$s_1>1+d \text{ e } s_1-d+\frac{n-1}{p_1}=s_2+\frac{(n-1)}{p_2}=(n-1)-\frac{1}{b-1} \tag{4.27}$$

Então existe uma constante $C>0$ tal que

$$\parallel T_1(u_1)-T_1(w_1) \parallel_Y \leqslant \parallel u_2-w_2 \parallel_Z \sum_{i=0}^{b-1} \parallel u_2 \parallel_Z^{b-1-i} \parallel w_2 \parallel_Z^i, \tag{4.28}$$

para toda $(u_1,u_2),(w_1,w_2)\in X$.

Demonstração: Suponha inicialmente $b = 2$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$2^{s_1 j} \parallel \widehat{\phi}_j(\xi')G(\xi', x_n, 0)(K_2(u_2)^2)^\wedge - (K_2(w_2)^2)^\wedge(\xi') \parallel_{p_1} \leqslant C2^{(s_1-1)j}$$

$$e^{-2\pi 2^j x_n} \parallel \widehat{\phi}_j[(u_2 - w_2)(u_2 + w_2)]^\wedge \parallel_{p_1}.$$

Considerando $w = u_2 - w_2$, $v = u_2 + w_2$ e $p = p_1$ como na observação feita na página 103 obtemos

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1)j} e^{-2\pi 2^j x_n} \parallel \widehat{\phi}_j[(u_2 - w_2)(u_2 + w_2)]^\wedge \parallel_{p_1} &= 2^{(s_1-1)j} e^{-2\pi 2^j x_n} \frac{(2\pi 2^j x_n)^d}{(2\pi 2^j x_n)^d} \\ &\cdot \parallel \widehat{\phi}_j[(u_2 - w_2)(u_2 + w_2)]^\wedge \parallel_{p_1} \\ &\leqslant C2^{(s_1-d-1)j} x_n^{-d}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4). \end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente cada parcela da soma. Temos

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_1 dt &\leqslant C2^{(s_1-1-d)j} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}]l} \parallel \widehat{\phi}_l(u_2 - w_2)^\wedge \parallel_{p_2} \\ &\cdot \parallel \widehat{\phi}_k(u_2 + w_2) \parallel_{p_1} \\ &\leqslant C2^{(s_1-1-d)j} \parallel u_2 - w_2 \parallel_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^k \parallel \widehat{\phi}_k(u_2 + w_2)^\wedge \parallel_{p_1} \\ &\leqslant C \parallel u_2 - w_2 \parallel_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(s_1-1-d)(j-k)} 2^{k[s_1-d]} \\ &\cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_k(u_2 + w_2)^\wedge \parallel_{p_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_2 &\leqslant C \parallel u_2 + w_2 \parallel_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(s_1-1-d)(j-k)} 2^{(s_1-d)k} \\ &\cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_k(u_2 - w_2)^\wedge \parallel_{p_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_3 &\leqslant C \parallel u_2 - w_2 \parallel_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|l-j|<5} 2^{(s_1-1-d)(j-l)} 2^{(s_1-d)l} \\ &\cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_l(u_2 + w_2)^\wedge \parallel_{p_1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_4 &\leqslant C \parallel u_2 - w_2 \parallel_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{l=j-3}^{\infty} 2^{(s_1-1-d)(j-l)} 2^{(s_1-d)l} \\ &\cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_l(u_2 + w_2)^\wedge \parallel_{p_1} \end{aligned}$$

Logo, multiplicando por x_n^d, tomando o supremo em $x_n > 0$, tomando o supremo em $j \in \mathbb{Z}$, aplicando a desigualdade de Young no $l^\infty(\mathbb{Z})$ e (4.12) obtemos

$$\begin{aligned} \| T_1(u_1) - T_1(w_1) \|_Y &\leqslant C \| u_2 - w_2 \|_Z \| u_2 + w_2 \|_Z \\ &\leqslant C \| u_2 - w_2 \|_Z (\| u_2 \|_Z + \| w_2 \|_Z), \end{aligned}$$

desde que $s_1 > 1 + d$.

Agora consideremos $b = 3$. Neste caso

$$2^{s_1 j} \| \widehat{\phi}_j(\xi')G(\xi', x_n, 0)[K_2(u_2)^3)^\wedge - K_1(w_2)^3)^\wedge \|_{p_1} \leqslant C2^{(s_1-1-d)j} x_n^{-d}$$

$$\| \widehat{\phi}_j(u_2 - w_2)(u_2)^2 \|_{p_1} + \| \widehat{\phi}_j(u_2 - w_2)u_2 w_2 \|_{p_1} + \| \widehat{\phi}_j(u_2 - w_2)(w_2)^2 \|_{p_1}$$

$$=: (1) + (2) + (3).$$

Calculemos uma estimava para (2). Considere $z = u_2 - w_2$, $v = u_2$, $w = w_2$ e $p = p_1$ na observação (ver página 103). Vamos estimar a parcela B_1 e as outras parcelas podem ser estimadas de forma análoga. Temos

$$2^{(s_1-1-d)j} x_n^{-d} B_1 \leqslant C2^{(s_1-1-d)j} x_n^{-d}(B_1^1 + B_2^1 + B_3^1 + B_4^1).$$

Vamos analisar separadamente cada parcela da soma. Temos

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_1^1 &\leqslant C2^{(s_1-1-d)j} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}]l} \| \widehat{\phi}_l(u_2 - w_2)^\wedge \|_{p_2} \\ &\cdot \sum_{|m-k|\leqslant 3} \sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}]\eta} \| \widehat{\phi}_\eta \widehat{u_2} \|_{p_2} \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_2} \|_{p_1} \, dt \\ &\leqslant C2^{(s_1-1-d)j} \| u_2 - w_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \| u_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \\ &\cdot \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{k\frac{1}{2}} \sum_{\eta=-\infty}^{m-3} 2^{m\frac{1}{2}} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_2} \|_{p_1} \\ &\leqslant C \| u_2 - w_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \| u_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_1-1-d)} \\ &\cdot \sum_{|m-k|\leqslant 3} 2^{(k-m)(s_1-d-\frac{1}{2})} 2^{m(s_1-d)} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_2} \|_{p_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_1^2 &\leqslant C \| u_2 - w_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \| w_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_1-1-d)} \\ &\cdot \sum_{|k-m|\leqslant 3} 2^{(k-m)(s_1-d-\frac{1}{2})} 2^{m(s_1-d)} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{u_2} \|_{p_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_1^3 &\leqslant C \| u_2 - w_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \| u_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_1-1-d)} \\ &\cdot \sum_{|k-m|<5} 2^{(k-m)(s_1-d-\frac{1}{2})} 2^{m(s_1-d)} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_m \widehat{w_2} \|_{p_1} \end{aligned}$$

e

$$2^{(s_1-1-d)j}B_1^4 \leqslant C \parallel u_2 - w_2 \parallel_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \parallel u_2 \parallel_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_1-1-d)} \cdot \sum_{m=k-3}^{\infty} 2^{(k-m)(s_1-d-\frac{1}{2})}2^{m(s_1-d)} \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi}_m \widehat{w_2} \parallel_{p_1} .$$

De forma análoga estimamos B_2,B_3 e B_4. Logo

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \sup_{x_n>0} x_n^d 2^{(s_1-1-d)j} x_n^{-d} \parallel \widehat{\phi}_j(u_2 - w_2)u_2w_2 \parallel_{p_1}$$

$$\leqslant C \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z \parallel u_2 \parallel_Z \parallel w_2 \parallel_Z,$$

desde que $s_1 > 1 + d$.

Seguindo o mesmo raciocínio mostramos a estimativa para (1) e (3). Assim

$$\parallel T_1(u_1) - T_1(w_1) \parallel_Y \leqslant \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z \sum_{i=0}^{2} \parallel u_2 \parallel_Z^{2-i} \parallel w_2 \parallel_Z^i .$$

Seguindo esse raciocínio e aplicando indução sobre b obtemos o resultado.

■

Lema 4.12. *Sejam $s_2 \in \mathbb{R}$, $b \geqslant 2$ um número inteiro, $1 < p_1 < \infty$, $d > 0$ e $\beta \geqslant 0$ tais que*

$$s_2 > 1 \text{ e } s_2 + \frac{(n-1)}{p_2} = (n-1) - \frac{1}{b-1} \tag{4.29}$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\parallel T_2(u_2) - T_2(w_2) \parallel_Y \leqslant \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z \sum_{i=0}^{b-1} \parallel u_2 \parallel_Z^{b-1-i} \parallel w_2 \parallel_Z^i, \tag{4.30}$$

para toda $u_2, w_2 \in Z$.

Demonstração: Suponha $b = 2$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$2^{s_2 j} \parallel \widehat{\phi}_j G(\xi', 0, 0)(K_2(u_2)^2)^\wedge - (K_2(w_2)^2)^\wedge \parallel_{p_1}$$

$$\leqslant C2^{(s_2-1)j} \parallel \widehat{\phi}_j[(u_2 - w_2)(u_2 + w_2)]^\wedge \parallel_{p_1},$$

e assim com o mesmo raciocínio de (4.28) obtemos o resultado.

■

Lema 4.13. *Sejam $s_1, s_2, \tilde{s} \in \mathbb{R}$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $d > 0$ tais que*

$$s_1 > 1 + d,\ s_1 - d + \frac{n-1}{p_1} = s_2 + \frac{(n-1)}{p_2} = (n-1) - 1 \ e\ \tilde{s} = (n-1) - \frac{n-1}{p_1} - 1 \quad (4.31)$$

Seja $V \in FB^{\tilde{s}}_{p_1,\infty}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| N_1(u_1) - N_1(w_1) \|_Y \leqslant \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_1,\infty}} \| u_2 - w_2 \|_Z, \quad (4.32)$$

para toda $(u_1, u_2), (w_1, w_2) \in X$.

Demonstração: Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$2^{s_1 j} \| \widehat{\phi}_j G(\xi', x_n, 0)(Vu_2)^\wedge - (Vw_2)^\wedge \|_{p_1} \leqslant C 2^{(s_1-1-d)j} x_n^{-d} \| \widehat{\phi}_j [V(u_2 - w_2)]^\wedge \|_{p_1}$$

.

Considerando $w = V$, $v = u_2 - w_2$ e $p = p_1$ como na observação feita na página 103 obtemos

$$2^{(s_1-1-d)j} x_n^{-d} \| \widehat{\phi}_j [V(u_2 - w_2)]^\wedge \|_{p_1} \leqslant C 2^{(s_1-d-1)j} x_n^{-d} (B_1 + B_2 + B_3 + B_4).$$

Vamos analisar separadamente cada parcela da soma. Temos

$$\begin{aligned} 2^{(s_1-1-d)j} B_1 dt &\leqslant C 2^{(s_1-1-d)j} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}]l} \| \widehat{\phi}_l \widehat{V} \|_{p_2} \| \widehat{\phi}_k (u_2 - w_2) \|_{p_1} \\ &\leqslant C 2^{(s_1-1-d)j} \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^k \| \widehat{\phi}_k (u_2 - w_2)^\wedge \|_{p_1} \\ &\leqslant C \| u_2 - w_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(s_1-1-d)(j-k)} 2^{k[s_1-d]} \\ &\cdot \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_k (u_2 - w_2)^\wedge \|_{p_1}, \end{aligned}$$

$$2^{(s_1-1-d)j} B_2 \leqslant C \| u_2 - w_2 \|_{FB^{s_2}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(s_1-1-d)(j-k)} 2^{(s_1-d)k} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_k \widehat{V} \|_{p_1},$$

$$2^{(s_1-1-d)j} B_3 \leqslant C \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \sum_{|l-j|<5} 2^{(s_1-1-d)(j-l)} 2^{(s_1-d)l} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_l (u_2 - w_2)^\wedge \|_{p_1}$$

e

$$2^{(s_1-1-d)j} B_4 \leqslant C \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \sum_{l=j-3}^{\infty} 2^{(s_1-1-d)(j-l)} 2^{(s_1-d)l} \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi}_l (u_2 - w_2)^\wedge \|_{p_1} .$$

Logo, multiplicando por x_n^d, tomando o supremo em $x_n > 0$, tomando o supremo em $j \in \mathbb{Z}$, aplicando a desigualdade de Young no $l^\infty(\mathbb{Z})$ e (4.12) obtemos

$$\| N_1(u_1) - N_1(w_1) \|_Y \leqslant C \| V \|_{FB_{p_2,\tilde{s}}} \| u_2 - w_2 \|_Z,$$

desde que $s_1 > 1 + d$.

■

Lema 4.14. *Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 < p_1, p_2 < \infty$, $d > 0$ tais que*

$$s_2 > 1,\ s_2 + \frac{(n-1)}{p_2} = (n-1) - 1 \ e\ \tilde{s} = (n-1) - \frac{n-1}{p_1} - 1 \tag{4.33}$$

Considere $\tilde{s}$ definido como em (4.20). Seja $V \in FB^{\tilde{s}}_{p_1,\infty}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| N_2(u_2) - N_2(w_2) \|_Z \leqslant \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_1,\infty}} \| u_2 - w_2 \|_Z, \tag{4.34}$$

para toda $(u_1, u_2), (w_1, w_2) \in X$.

Demonstração: Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$2^{s_1 j} \| \widehat{\phi}_j G(\xi', 0, 0)(Vu_2)^\wedge - (Vw_2)^\wedge \|_{p_1} \leqslant C 2^{(s_1-1)j} \| \widehat{\phi}_j [V(u_2 - w_2)]^\wedge \|_{p_1},$$

e então de forma análoga a (4.32) obtemos o resultado.

■

Lema 4.15. *Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 < p_1, p_2 < \infty$,$a \geqslant 2$,$\beta \geqslant 0$, $d > 0$ tais que*

$$s_1 - d + \frac{n-1}{p_1} = s_2 + \frac{(n-1)}{p_2} = (n-1) - \frac{2 - a\beta}{a-1} \tag{4.35}$$

$$e\ \overline{s} = (n-1) - \frac{(n-1)}{p_1} - 1 - \frac{2-a\beta}{a-1}.$$

Seja $f \in FB^{\overline{s}}_{p_1,\infty}$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| L_1(u_1) \|_Y \leqslant \| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_1,\infty}} \tag{4.36}$$

e

$$\| L_2(u_2) \|_Y \leqslant \| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_1,\infty}} \tag{4.37}$$

para toda $(u_1, u_2) \in X$.

Demonstração: Para cada $j \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} 2^{s_1 j} \| \widehat{\phi}_j G(\xi', x_n, 0) \widehat{f} \|_{p_1} &\leqslant C 2^{(s_1-1-d)j} x_n^{-d} \| \widehat{\phi}_j \widehat{f} \|_{p_1} \\ &= C 2^{\overline{s} j} x_n^{-d} \| \widehat{\phi}_j \widehat{f} \|_{p_1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2^{s_2 j} \| \widehat{\phi}_j G(\xi', 0, 0) \widehat{f} \|_{p_1} &\leqslant C 2^{(s_2-1)j} \| \widehat{\phi}_j \widehat{f} \|_{p_1} \\ &= C 2^{\overline{s} j} \| \widehat{\phi}_j \widehat{f} \|_{p_1} . \end{aligned}$$

■

Lema 4.16. *Sejam $\beta \geqslant 0$, $s, s_1 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$, $a \geqslant 2$ um número inteiro e $d > 0$. Suponha que $ad < 1, s \geqslant \beta$ e (4.23) sejam satisfeitas.*

Então existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$\| I_1(u_1) - I_1(w_1) \|_{H^{1,s}_d} \leqslant C \frac{1}{R^{2-\beta-(a-1)d}} \| u_1 - w_1 \|_{H^{1,s}_d} \sum_{i=0}^{a-1} \| u_1 \|^{a-1-i}_{H^{1,s}_d} \| w_1 \|^{i}_{H^{1,s}_d} \tag{4.38}$$

$$+(1 + R^s) \| u_1 - w_1 \|_Y \sum_{i=0}^{a-1} \| u_1 \|^{a-1-i}_Y \| w_1 \|^i_Y,$$

para toda $u_1, w_1 \in Y \cap H^{1,s}_d$.

Demonstração: Suponha inicialmente $a = 2$. Temos

$$\begin{aligned} \| I_1(u_1) - I_1(w_1) \|_{H^{1,s}_d} &= \| (1 + |\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi', x_n, t)[K_1(\partial^\beta u_1)^2 - (\partial^\beta w_1)^2]^\wedge dt \|_1 \\ &\leqslant \int_{|\xi'| \leqslant R} |(1 + |\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi', x_n, t)[K_1 \partial^\beta (u_1 - w_1) \\ &\cdot \ \partial^\beta (u_1 + w_1)]^\wedge dt| d\xi' \\ &+ \int_{|\xi'| > R} |(1 + |\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi', x_n, t)[K_1 \partial^\beta (u_1 - w_1) \\ &\cdot \ \partial^\beta (u_1 + w_1)]^\wedge dt| d\xi' \\ &:= (1) + (2). \end{aligned}$$

Primeiro analisemos a integral (1). Temos

$$\begin{aligned} (1) &\leqslant C(1 + R^s) \int_{|\xi'| \leqslant R} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} |\widehat{\phi}_j G(\xi', x_n, t)[\partial^\beta (u_1 - w_1) \partial^\beta (u_1 + w_1)]^\wedge | dt d\xi' \\ &\leqslant C(1 + R^s) \sum_{j \leqslant 1 + \log_2 R} \int_0^{+\infty} \| \widehat{\phi}_j 2^{-j} e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} [\partial^\beta (u_1 - w_1) \partial^\beta (u_1 + w_1)]^\wedge \|_{p_1} dt \\ &\cdot \ 2^{[(n-1) - \frac{(n-1)}{p_1}]j}. \end{aligned}$$

Tomando $w = \partial^\beta (u_1 - w_1)(\cdot, t)$, $v = \partial^\beta (u_1 + w_1)(\cdot, t)$ e $p = p_1$, como na observação feita na página 103, para cada j fixo obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} 2^{-j} e^{-2\pi 2^j |x_n - t|} B_1 dt &\leqslant 2^{-s_1 j} x_n^{-d} \| u_1 - w_1 \|_Y \sum_{|k-j| \leqslant 3} 2^{(j-k)(s_1 - 2 + d)} 2^{k s_1} \\ &\cdot \ \sup_{t > 0} t^d \| \widehat{\phi_k} (u_1 + w_1)^\wedge \|_{p_1} \\ &\leqslant C 2^{-s_1 j} x_n^{-d} \| u_1 - w_1 \|_Y (\| u_1 \|_Y + \| w_1 \|_Y). \end{aligned}$$

De forma análoga estimamos B_2, B_3 e B_4. Assim

$$\int_{|\xi'| \leqslant R} |(1 + |\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi', x_n, t)[K_1 \partial^\beta (u_1 - w_1) \partial^\beta (u_1 + w_1)]^\wedge dt| d\xi'$$

$$\leqslant C(1+R^s)x_n^{-d} \parallel u_1 - w_1 \parallel_Y (\parallel u_1 \parallel_Y + \parallel w_1 \parallel_Y) \sum_{j\leqslant 1+\log_2 R} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}-s_1]j}$$

$$\leqslant C(1+R^s)x_n^{-d} \parallel u_1 - w_1 \parallel_Y (\parallel u_1 \parallel_Y + \parallel w_1 \parallel_Y).$$

Agora analisemos a integral (2). Considere $l = 1-\beta-(a-1)d$ e então

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\leqslant \quad C\frac{1}{R}\int_{|\xi'|>R}\int_0^{+\infty} e^{-2\pi|\xi'||x_n-t|}\langle\xi'\rangle^s|[\partial^\beta(u_1-w_1)\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge|dtd\xi' \\
&\leqslant \quad C\frac{1}{R^{l+1}}\int_{|\xi'|>R}\int_0^{+\infty}\frac{1}{|x_n-t|^{l+\beta}}\langle\xi'\rangle^{s-\beta}|[\partial^\beta(u_1-w_1)]^\wedge\star[\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge|dtd\xi' \\
&\leqslant \quad C\frac{1}{R^{l+1}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{|x_n-t|^{l+\beta}} \parallel \langle\xi'\rangle^{s-\beta}|\xi'|^\beta(u_1-w_1)^\wedge \parallel_1 \parallel \langle\xi'\rangle^{s-\beta}|\xi'|^\beta(u_1+u_2)^\wedge \parallel_1 dt \\
&\leqslant \quad C\frac{1}{R^{l+1}} \parallel u_1-w_1 \parallel_{H_d^{1,s}} \parallel u_1+w_1 \parallel_{H_d^{1,s}} \int_0^{+\infty}\frac{t^{-2d}}{|x_n-t|^{l+\beta}}dt \\
&\leqslant \quad x_n^{-d}C\frac{1}{R^{l+1}} \parallel u_1-w_1 \parallel_{H_d^{1,s}} \parallel u_1 \parallel_{H_d^{1,s}} \parallel w_1 \parallel_{H_d^{1,s}} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{|\xi'|>R}|(1+|\xi'|^s)\int_0^{+\infty} G(\xi',x_n,t)[K_1\partial^\beta(u_1-w_1)\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge dt|d\xi'$$

$$\leqslant Cx_n^{-d}\frac{1}{R^{l+1}} \parallel u_1-w_1 \parallel_{H_d^{1,s}} \parallel u_1 \parallel_{H_d^{1,s}} \parallel w_1 \parallel_{H_d^{1,s}},$$

e unindo as estimativas das duas integrais obtemos o resultado.

Para $a \geqslant 3$ de forma análoga aplicando indução sobre a obtemos o resultado.

■

Lema 4.17. *Sejam $\beta \geqslant 0$, $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$, $a \geqslant 2$ um número inteiro e $d > 0$. Assuma que $(a+1)d < 1, s \geqslant \beta$ e (4.25) sejam satisfeitas.*

Então existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$\parallel I_2(u_2) - I_2(w_2) \parallel_{H^{1,s}} \leqslant C\frac{1}{R^{2-\beta-ad}} \parallel u_1 - w_1 \parallel_{H_d^{1,s}} \sum_{i=0}^{a-1} \parallel u_1 \parallel_{H_d^{1,s}}^{a-1-i} \parallel w_1 \parallel_{H_d^{1,s}}^i \tag{4.39}$$

$$+(1+R^s) \parallel u_1 - w_1 \parallel_Y \sum_{i=0}^{a-1} \parallel u_1 \parallel_Y^{a-1-i} \parallel w_1 \parallel_Y^i,$$

para toda $(u_1,u_2),(w_1,w_2) \in X \cap \mathcal{H}_d^{1,s}$.

Demonstração: Suponha $a = 2$. Temos

$$
\begin{aligned}
\| I_2(u_2) - I_2(w_2) \|_{H^{1,s}_d} &= \| (1+|\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi',0,t)[K_1(\partial^\beta u_1)^2 - (\partial^\beta w_1)^2]^\wedge dt \|_1 \\
&\leqslant \int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi',0,t)[K_1\partial^\beta(u_1-w_1) \\
&\cdot \ \partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge dt| d\xi' \\
&+ \int_{|\xi'|> R} |(1+|\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi',0,t)[K_1\partial^\beta(u_1-w_1) \\
&\cdot \ \partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge dt| d\xi' \\
&:= (1) + (2).
\end{aligned}
$$

Vamos analizar primeiro a integral (1). Temos

$$
\begin{aligned}
(1) &\leqslant C(1+R^s) \int_{|\xi'|\leqslant R} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} |\widehat{\phi}_j G(\xi',0,t)[\partial^\beta(u_1-w_1)\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge| dt d\xi' \\
&\leqslant C(1+R^s) \sum_{j\leqslant 1+\log_2 R} \int_0^{+\infty} \| \widehat{\phi}_j 2^{-j} e^{-2\pi 2^j t}[\partial^\beta(u_1-w_1)\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge \|_{p_2} dt \\
&\cdot \ 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}]j}.
\end{aligned}
$$

Considerando $w = \partial^\beta(u_1 - w_1)(\cdot,t)$, $v = \partial^\beta(u_1+w_1)(\cdot,t)$ e $p = p_1$, como na observação feita na página 103, para cada j fixo obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} 2^{-j} e^{-2\pi 2^j t} B_1 dt &\leqslant 2^{-s_2 j} \| u_1 - w_1 \|_Y \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_2-2+2d)} 2^{k(s_2+d)} \\
&\cdot \ \sup_{t>0} t^d \| \widehat{\phi_k}(u_1+w_1)^\wedge \|_{p_2} \\
&\leqslant C 2^{-s_2 j} \| u_1 - w_1 \|_Y (\| u_1 \|_Y + \| w_1 \|_Y).
\end{aligned}
$$

De forma análoga estimamos B_2, B_3 e B_4. Assim

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi',0,t)[K_1\partial^\beta(u_1-w_1)\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge dt| d\xi' \\
&\leqslant C(1+R^s) \| u_1 - w_1 \|_Y (\| u_1 \|_Y + \| w_1 \|_Y) \sum_{j\leqslant 1+\log_2 R} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}-s_2]j} \\
&\leqslant C(1+R^s) \| u_1 - w_1 \|_Y (\| u_1 \|_Y + \| w_1 \|_Y).
\end{aligned}
$$

Agora analisemos a integral (2). Tome $\gamma = 1 - \beta - (a+1)d$. Então

$$
\begin{aligned}
(2) &\leqslant C\frac{1}{R} \int_{|\xi'|>R} \int_0^{+\infty} e^{-2\pi|\xi'|t} \langle \xi' \rangle^s |[\partial^\beta(u_1-w_1)\partial^\beta(u_1+w_1)]^\wedge| dt d\xi' \\
&\leqslant C\frac{1}{R^{\gamma+1}} \| u_1 - w_1 \|_{H^{1,s}_d} \| u_1 + w_1 \|_{H^{1,s}_d} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\pi R t}}{t^{\gamma+\beta+2d}} dt \\
&\leqslant C\frac{1}{R^{2-\beta-2d}} \| u_1 - w_1 \|_{H^{1,s}_d} \| u_1 \|_{H^{1,s}_d} \| w_1 \|_{H^{1,s}_d} .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\int_{|\xi'|>R} |(1+|\xi'|^s) \int_0^{+\infty} G(\xi',0,t)[K_1 \partial^\beta (u_1 - w_1)\partial^\beta (u_1 + w_1)]^\wedge dt| d\xi'$$
$$\leqslant C \frac{1}{R^{2-\beta-2d}} \parallel u_1 - w_1 \parallel_{H^{1,s}_d} \parallel u_1 \parallel_{H^{1,s}_d} \parallel w_1 \parallel_{H^{1,s}_d},$$

e obtemos o resultado.

Para $a \geqslant 3$ o resultado segue de maneira análoga aplicando indução sobre a.

$\blacksquare$

Lema 4.18. *Sejam $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_2, p_2 \leqslant \infty$, $a \geqslant 2$ um número inteiro e $d > 0$. Considere $\tilde{s}$ como em (4.20). Suponha que $ad < 1$ e (4.31) sejam satisfeitas. Seja $V \in FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}$.*

Então existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$\parallel N_1(u_1) - N_1(w_1) \parallel_{H^{1,s}_d} \leqslant C \frac{1}{R^{d+1}} \parallel V \parallel_{H^{1,s}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_{H^{1,s}} \tag{4.40}$$
$$+ (1+R^s) \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z$$

para toda $(u_1, u_2), (w_1, w_2) \in X \cap \mathcal{H}^{1,s}_d$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\parallel N_1(u_1) - N_1(w_1) \parallel_{H^{1,s}_d} &= \parallel (1+|\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)[V(u_2 - w_2)]^\wedge \parallel_1 \\
&\leqslant \int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)[V(u_2 - w_2)]^\wedge| d\xi' \\
&+ \int_{|\xi'|>R} |(1+|\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)[V(u_2 - w_2)]^\wedge| d\xi' \\
&:= (1) + (2).
\end{aligned}$$

Vamos analizar separadamente as integrais (1) e (2). Temos

$$(1) \leqslant C(1+R^s) \sum_{j \leqslant 1+\log_2 R} \parallel \widehat{\phi}_j 2^{-j} e^{-2\pi 2^j x_n} [V(u_2 - w_2)]^\wedge \parallel_{p_1} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}]j}.$$

Tomando $w = V$, $v = u_2 - w_2$ e $p = p_2$, como na observação feita na página 103, para cada j fixo obtemos

$$\begin{aligned}
2^{-j} e^{-2\pi 2^j x_n} B_1 &\leqslant 2^{-s_1 j} x_n^{-d} \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{(j-k)(s_1-d-1)} 2^{k(s_1-d)} \\
&\cdot \sup_{t>0} t^d \parallel \widehat{\phi_k} (u_2 - w_2)^\wedge \parallel_{p_1} \\
&\leqslant C 2^{-s_1 j} x_n^{-d} \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z .
\end{aligned}$$

De forma análoga estimamos B_2, B_3 e B_4. Assim

$$\int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',x_n,0)[V(u_2-w_2)]^\wedge|d\xi'$$

$$\leqslant C(1+R^s)x_n^{-d} \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2-w_2 \parallel_Z \sum_{j\leqslant 1+\log_2 R} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}-s_1]j}$$

$$\leqslant C(1+R^s)x_n^{-d} \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2-w_2 \parallel_Z .$$

Agora analisemos a integral (2). Note que

$$\begin{aligned}(2) \quad &\leqslant \quad C\frac{1}{R}\int_{|\xi'|>R} e^{-2\pi|\xi'|x_n}\langle\xi'\rangle^s|[V(u_2-w_2)]^\wedge|dtd\xi' \\ &\leqslant \quad x_n^{-d}C\frac{1}{R^{d+1}} \parallel V \parallel_{H^{1,s}_d} \parallel u_2-w_2 \parallel_{H^{1,s}_d} .\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{|\xi'|>R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',x_n,0)[V(u_2-w_2)]^\wedge|d\xi'$$

$$\leqslant x_n^{-d}C\frac{1}{R^{d+1}} \parallel V \parallel_{H^{1,s}_d} \parallel u_2-w_2 \parallel_{H^{1,s}_d} .$$

■

Lema 4.19. *Sejam $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$, $a \geqslant 2$ um número interio e $d > 0$. Considere $\tilde{s}$ como em (4.20). Suponha que $ad < 1$ e (4.33) sejam satisfeitas. Seja $V \in FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}$.*

Então existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$\parallel N_2(u_2)-N_2(w_2) \parallel_{H^{1,s}} \leqslant C\frac{1}{R} \parallel V \parallel_{H^{1,s}} \parallel u_2-w_2 \parallel_{H^{1,s}} \tag{4.41}$$

$$+(1+R^s) \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2-w_2 \parallel_Z$$

para toda $u_2, w_2 \in Z \cap H^{1,s}$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}\parallel N_1(u_1)-N_1(w_1) \parallel_{H^{1,s}} \quad &= \quad \parallel (1+|\xi'|^s)G(\xi',0,0)[V(u_2-w_2)]^\wedge \parallel_1 \\ &\leqslant \quad \int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',0,0)[V(u_2-w_2)]^\wedge|d\xi' \\ &+ \quad \int_{|\xi'|>R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',0,0)[V(u_2-w_2)]^\wedge|d\xi' \\ &:= \quad (1)+(2).\end{aligned}$$

Vamos analizar separadamente as integrais (1) e (2). Note que

$$(1) \quad \leqslant \quad C(1+R^s) \sum_{j\leqslant 1+\log_2 R} \parallel \widehat{\phi}_j 2^{-j}[V(u_2-w_2)]^\wedge \parallel_{p_2} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}]j}.$$

Considerando $w = V$, $v = u_2 - w_2$ e $p = p_2$, como na observação feita na página 103, para cada j fixo obtemos

$$2^{-j}B_1 \leqslant C2^{-s_2 j} \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z .$$

De forma análoga estimamos B_2, B_3 e B_4. Assim

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',0,0)[V(u_2-w_2)]^\wedge|d\xi' \\
&\leqslant C(1+R^s) \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z \sum_{j\leqslant 1+\log_2 R} 2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}-s_2]j} \\
&\leqslant C(1+R^s) \parallel V \parallel_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z .
\end{aligned}$$

Agora analisemos a integral (2). Temos

$$\begin{aligned}
(2) &\leqslant C\frac{1}{R}\int_{|\xi'|>R} \langle\xi'\rangle^s |[V(u_2-w_2)]^\wedge| dt d\xi' \\
&\leqslant C\frac{1}{R} \parallel V \parallel_{H^{1,s}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_{H^{1,s}}
\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',0,0)[V(u_2-w_2)]^\wedge|d\xi' \\
&\leqslant C\frac{1}{R} \parallel V \parallel_{H^{1,s}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_{H^{1,s}} .
\end{aligned}$$

■

Lema 4.20. *Sejam $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$, $a, b \geqslant 2$ números inteiros e $d > 0$. Assuma que $ad < 1$ e (4.27) sejam satisfeitas.*

Então existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$\parallel T_1(u_1) - T_1(w_1) \parallel_{H^{1,s}_d} \leqslant C\frac{1}{R^{l+1}} \parallel u_2 - w_2 \parallel_{H^{1,s}} \sum_{i=0}^{b-1} \parallel u_2 \parallel^{b-1-i}_{H^{1,s}} \parallel w_2 \parallel^i_{H^{1,s}} \tag{4.42}$$

$$+(1+R^s) \parallel u_2 - w_2 \parallel_Z \sum_{i=0}^{b-1} \parallel u_2 \parallel^{b-1-i}_Z \parallel w_2 \parallel^i_Z ,$$

para toda $(u_1, u_2), (w_1, w_2) \in X \cap \mathcal{H}^{1,s}_d$.

Demonstração: Suponha inicialmente $b = 2$. Temos

$$\begin{aligned}
\parallel T_1(u_1) - T_1(w_1) \parallel_{H^{1,s}_d} &= \parallel (1+|\xi'|^s)G(\xi',x_n,0)[(u_2)^2 - (w_2)^2]^\wedge \parallel_1 \\
&\leqslant \int_{|\xi'|\leqslant R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',x_n,0)[(u_2-w_2)(u_2+w_2)]^\wedge|d\xi' \\
&+ \int_{|\xi'|>R} |(1+|\xi'|^s)G(\xi',x_n,0)[(u_2-w_2)(u_2+w_2)]^\wedge|d\xi' \\
&:= (1) + (2).
\end{aligned}$$

Vamos analizar separadamente as integrais (1) e (2). Temos que

$$\begin{aligned}(1) &\leqslant C(1+R^s)\int_{|\xi'|\leqslant R}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}_jG(\xi',x_n,0)[(u_2-w_2)(u_2+w_2)]^\wedge|d\xi'\\ &\leqslant C(1+R^s)\sum_{j\leqslant 1+\log_2 R}\|\widehat{\phi}_j2^{-j}e^{-2\pi 2^jx_n}[(u_2-w_2)(u_2+w_2)]^\wedge\|_{p_1}dt2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}]j}.\end{aligned}$$

Tomando $w=(u_2-w_2)$, $v=(u_2+w_2)$ e $p=p_1$, como na observação feita na página 103, para cada j fixo obtemos

$$2^{-j}e^{-2\pi 2^jx_n}B_1dt \leqslant C2^{-s_1j}x_n^{-d}\|u_2-w_2\|_Z(\|u_2\|_Z+\|w_2\|_Z).$$

De forma análoga estimamos B_2, B_3 e B_4. Assim

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi'|\leqslant R}|(1+|\xi'|^s)G(\xi',x_n,0)[(u_2-w_2)(u_2+w_2)]^\wedge|d\xi'\\ &\leqslant C(1+R^s)x_n^{-d}\|u_2-w_2\|_Z(\|u_2\|_Z+\|w_2\|_Z)\sum_{j\leqslant 1+\log_2 R}2^{[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}-s_1]j}\\ &\leqslant C(1+R^s)x_n^{-d}\|u_2-w_2\|_Z(\|u_2\|_Z+\|w_2\|_Z).\end{aligned}$$

Agora analisemos a integral (2). Note que

$$\begin{aligned}(2) &\leqslant C\frac{1}{R}\int_{|\xi'|>R}e^{-2\pi Rx_n}\langle\xi'\rangle^s[(u_2-w_2)(u_2+w_2)]^\wedge|d\xi'\\ &\leqslant x_n^{-d}C\frac{1}{R^{d+2}}\|u_2-w_2\|_{H^{1,s}}\|u_2\|_{H^{1,s}}\|w_2\|_{H^{1,s}},\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}&\int_{|\xi'|>R}|(1+|\xi'|^s)G(\xi',x_n,0)[(u_2-w_2)(u_2+w_2)]^\wedge|d\xi'\\ &\leqslant x_n^{-d}C\frac{1}{R^{d+2}}\|u_2-w_2\|_{H^{1,s}}\|u_2\|_{H^{1,s}}\|w_2\|_{H^{1,s}}.\end{aligned}$$

De forma análoga aplicando indução sobre b obtemos o resultado para $b\geqslant 3$.

■

Lema 4.21. *Sejam $s,s_1,s_2\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p_1,p_2\leqslant\infty$, $a,b\geqslant 2$ números inteiros e $d>0$. Suponha que $ad<1$ e (4.29) sejam satisfeitas.*

Então existem constantes $C,R>0$ tais que

$$\|T_2(u_2)-T_2(w_2)\|_{H^{1,s}}\leqslant C\frac{1}{R}\|u_2-w_2\|_{H^{1,s}}\sum_{i=0}^{b-1}\|u_2\|_{H^{1,s}}^{b-1-i}\|w_2\|_{H^{1,s}}^{i} \tag{4.43}$$

$$+(1+R^s)\|u_2-w_2\|_Z\sum_{i=0}^{b-1}\|u_2\|_Z^{b-1-i}\|w_2\|_Z^{i},$$

para toda $u_2,w_2\in Z\cap H_d^{1,s}$.

Demonstração: Análogo a estimativa (4.42).

■

Lema 4.22. *Sejam $\beta \geqslant 0$, $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$, $a \geqslant 2$ um número inteiro e $d > 0$. Considere $\overline{s}$ como em (4.20). Assuma que $ad < 1$ e as condições (4.35) sejam satisfeitas. Seja $f \in FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}$.*

Então existem constantes $C, R > 0$ tais que

$$\| L_1(u_1) \|_{H^{1,s}_d} \leqslant C\frac{1}{R^{d+2}} \| f \|_{H^{1,s}} + (1 + R^s) \| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}} \tag{4.44}$$

e

$$\| L_2(u_2) \|_{H^{1,s}} \leqslant C\frac{1}{R} \| f \|_{H^{1,s}} + (1 + R^s) \| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}}, \tag{4.45}$$

para toda $(u_1, u_2) \in X \cap \mathcal{H}^{1,s}_d$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \| L_1(u_1) \|_{H^{1,s}_d} &= \| (1 + |\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)\widehat{f} \|_1 \\ &\leqslant \int_{|\xi'| \leqslant R} |(1 + |\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)\widehat{f}| d\xi' \\ &+ \int_{|\xi'| > R} |(1 + |\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)\widehat{f}| d\xi' \\ &:= (1) + (2). \end{aligned}$$

Vamos analizar separadamente as integrais (1) e (2). Note que

$$\begin{aligned} (1) &\leqslant C(1 + R^s) \sum_{j \leqslant 1 + \log_2 R} \| \widehat{\phi}_j 2^{-j} e^{-2\pi 2^j x_n} \widehat{f} \|_{p_1} dt 2^{[(n-1) - \frac{(n-1)}{p_1}]j} \\ &\leqslant (1 + R^s) x_n^{-d} \| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}}, \end{aligned}$$

e então

$$\int_{|\xi'| \leqslant R} |(1 + |\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)\widehat{f}| d\xi' \leqslant C(1 + R^s) x_n^{-d} \| f \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}} .$$

Agora analisemos (2). Temos

$$\begin{aligned} (2) &\leqslant C\frac{1}{R} \int_{|\xi'| > R} e^{-2\pi R x_n} \langle \xi' \rangle_s |\widehat{f}| d\xi' \\ &\leqslant x_n^{-d} C \frac{1}{R^{d+2}} \| f \|_{H^{1,s}}, \end{aligned}$$

e assim

$$\int_{|\xi'| > R} |(1 + |\xi'|^s) G(\xi', x_n, 0)\widehat{f}| d\xi' \leqslant C x_n^{-d} C \frac{1}{R^{d+2}} \| f \|_{H^{1,s}} .$$

De forma análoga provamos (4.45).

■

4.4 Demonstração dos Teoremas 4.6 e 4.8

Considere os espaços Y, Z, X como definidos nas páginas 103 e 99. Defina os operadores

$$\Psi_1(u) = I_1(u) + N_1(u) + T_1(u) + L_1(u) \ , \forall u \in Y$$

e

$$\Psi_2(v) = I_2(v) + N_2(v) + T_2(v) + L_2(v) \ , \forall v \in Z.$$

Assim, podemos definir o operador $\Psi(u,v) = (\Psi_1(u), \Psi_2(v))$ em X (ver página 99) com

$$\| \cdot \|_X = \| \cdot \|_{X^{s_1,s_2}_{p_1,p_2,\infty,d}} .$$

Primeiro provaremos o Teorema 4.6. Sejam $\varepsilon, \delta_1, delta_2 > 0$ tais que

$$a\varepsilon^{a-1} + b\varepsilon^{b-1} < \frac{1}{4C} \ , \delta_2 \leqslant \frac{1}{4C} - a\varepsilon^{a-1} + b\varepsilon^{b-1} \text{ e } \delta_1 + \delta_2\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2C} - \varepsilon^a - \varepsilon^b. \tag{4.46}$$

onde $C > 0$ é a maior constante obtida nas estimativas (4.24) á (4.37). Precisamos provar que $\Psi(B_X) \subset B_X$ e que Ψ é uma contração em B_X. Sejam $(u_1,u_2),(w_1,w_2) \in B_X$. Aplicando (4.24) á (4.37) e (4.46) temos

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u_1,u_2) \|_X &\leqslant C(\| (u_1,u_2) \|_X^a + \| (u_1,u_2) \|_X^b + \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \| (u_1,u_2) \|_X \\
&+ \| f \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}}) \\
&\leqslant C(\varepsilon^a + \varepsilon^b + \delta_2\varepsilon + \delta_1) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, $\Psi(u_1,u_2) \subset B_X$. Agora, segue de forma análoga que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u_1,u_2) - \Psi(w_1,w_2) \|_X &\leqslant C \| (u_1-w_1, u_2-w_2) \|_X (\sum_{i=0}^{a-1} \| (u_1,u_2) \|_X^{a-1-i} \\
&\cdot \| (w_1,w_2) \|_X^i + \sum_{i=0}^{b-1} \| (u_1,u_2) \|_X^{b-1-i} \| (w_1,w_2) \|_X^i \\
&+ \| V \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}}) \\
&\leqslant \| (u_1-w_1, u_2-w_2) \|_{B_X} C(\delta_2 + \sum_{i=0}^{a-1} \varepsilon^{a-1} + \sum_{i=0}^{b-1} \varepsilon^{b-1}) \\
&\leqslant \frac{1}{4} \| (u_1-w_1, u_2-w_2) \|_{B_X} .
\end{aligned}$$

Então, Ψ é uma contração B_X e pelo Teorema do Ponto fixo de Banach existe um único $(u_1,u_2) \in B_X$ tal que

$$\Psi(u_1,u_2) = (u_1,u_2).$$

Portanto, (u_1, u_2) é uma solução de (4.9). Agora mostremos (4.21). De forma análoga ao feito acima segue que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u_1,u_2) - \Psi(w_1,w_2) \|_X &\leqslant 4C \| (u_1-w_1, u_2-w_2) \|_X (\sum_{i=0}^{a-1} \| (u_1,u_2) \|_X^{a-1-i} \\
&\cdot \| (w_1,w_2) \|_X^i + \sum_{i=0}^{b-1} \| (u_1,u_2) \|_X^{b-1-i} \| (w_1,w_2) \|_X^i) \\
&+ C \| V_1 \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} \| (u_1-w_1, u_2-w_2) \|_X + C \| w_2 \|_Z \\
&\cdot \| V_1 - V_2 \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} + C \| f_1 - f_2 \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}} \\
&\leqslant \| (u_1-w_1, u_2-w_2) \|_X \, 4C(\sum_{i=0}^{a-1} \varepsilon^{a-1} + \sum_{i=0}^{b-1} \varepsilon^{b-1} + \delta_2) \\
&+ C\varepsilon \| V_1 - V_2 \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}} + C \| f_1 - f_2 \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}} .
\end{aligned}$$

Assim

$$[1 - 4C(\delta_2 + a\varepsilon^{a-1} + b\varepsilon^{b-1})] \| (u_1,u_2) - (w_1,w_2) \|_X \leqslant C\varepsilon \| V_1 - V_2 \|_{FB^{\tilde{s}}_{p_2,\infty}}$$

$$+ C \| f_1 - f_2 \|_{FB^{\overline{s}}_{p_2,\infty}}$$

e então tomando

$$\eta = \frac{C\varepsilon}{1 - 4C(\delta_2 + a\varepsilon^{a-1} + b\varepsilon^{b-1})} \text{ e } \zeta = \frac{C}{1 - 4C(\delta_2 + a\varepsilon^{a-1} + b\varepsilon^{b-1})},$$

obtemos a dependência da solução de f e V.

Agora provemos o Teorema 4.8. Seja $l = 1 - \beta - (a-1)d$. Considere $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\left[\frac{1}{R^{l+1}} + \frac{1}{R^{2-\beta-ad}} + 2(1+R^s)\right](a-1)\varepsilon^{a-1} + \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + 2(1+R^s)\right]$$

$$((b-1)\varepsilon^{b-1} + \delta_1 + \delta_2) \leqslant \frac{1}{4C}, \tag{4.47}$$

com ε e δ_1, δ_2 satisfazendo as condições (4.46). Da mesma forma que acima temos que mostrar que $\Psi(\tilde{B}_X) \subset \tilde{B}_X$ e que Ψ é uma contração em $\tilde{B}_X$. Aplicando (4.38) á (4.45) obtemos que

$$\| \Psi(u_1,u_2) \|_{\mathcal{H}^{1,s}_d} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\| \Psi(u_1,u_2) - \Psi(w_1,w_2) \|_{\mathcal{H}^{1,s}_d} \leqslant \frac{1}{4} \| (u_1,u_2) - (w_1,w_2) \|_{\mathcal{H}^{1,s}_d},$$

para todos $(u_1,u_2), (w_1,w_2) \in \mathcal{H}^{1,s}_d$.

Então,

$$\| \Psi(u_1,u_2) \|_{\tilde{B}_X} \leqslant \varepsilon$$

e

$$\| \Psi(u_1,u_2) - \Psi(w_1,w_2) \|_{\tilde{B}_X} \leqslant \frac{1}{2} \| (u_1,u_2) - (w_1,w_2) \|_{\tilde{B}_X},$$

para todo $(u_1,u_2),(w_1,w_2) \in \tilde{B}_X$, e o resultado segue do Teorema do Ponto fixo de Banach. Para finalizar o teorema seja α um multi-índice qualquer. Sendo $u = (u_1,u_2)$ a solução obtida nos teoremas 4.6 e 4.8 sabemos que

$$\widehat{u_1} = (I_1(u_1))^\wedge + (N_1(u_1))^\wedge + (T_1(u_1))^\wedge + (L_1(u_1))^\wedge$$

e

$$\widehat{u_2} = (I_2(u_2))^\wedge + (N_2(u_2))^\wedge + (T_2(u_2))^\wedge + (L_2(u_2))^\wedge.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \| [\partial^\alpha u_1(\cdot,x_n)]^\wedge \|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} &\leqslant C \| \,|\cdot|^{|\alpha|} [u_1(\cdot,x_n)]^\wedge \|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leqslant \int_{|\xi'|\leqslant R} |\cdot|^{|\alpha|}[u_1(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi' + \int_{|\xi'|>R} |\cdot|^{|\alpha|}[u_1(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi'. \end{aligned}$$

De forma análoga ao feito nas estimativas (4.38) à (4.45) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|\xi'|\leqslant R} |\cdot|^{|\alpha|}[u_1(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi' &\leqslant C(u,V,f) x_n^{-d} \sum_{j\leqslant 1+\log_2 R} 2^{j[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_1}-s_1+|\alpha|]} \\ &+ 2^{j[(n-1)-\frac{(n-1)}{p_2}-s_2+|\alpha|]} \\ &\leqslant C x_n^{-d}, \end{aligned}$$

desde que $\gamma - d + |\alpha| > 0$.

Agora analisemos a segunda parte da integral. Para $a = 2$, tomando $l = 1-d-\beta$, de forma análoga ao feito em (4.38) para $w_1 = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|\xi'|\leqslant R} |\cdot|^{|\alpha|}[I_1(u_1)(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi' &\leqslant C \int_{|\xi'|>R} \frac{\langle \xi' \rangle^s}{\langle \xi' \rangle^s |\xi'|^{1-|\alpha|}} \int_0^{+\infty} e^{-2\pi|\xi'||x_n-t|} \\ &\cdot \ |[\partial^\beta(u_1)\partial^\beta(u_1)]^\wedge| dt d\xi' \\ &\leqslant C \frac{1}{R^{l+1+s-|\alpha|}} \int_{|\xi'|>R} \int_0^{+\infty} \frac{1}{|x_n-t|^{l+\beta}} \langle \xi' \rangle^{s-\beta} \\ &\cdot \ |[\partial^\beta(u_1)]^\wedge \star [\partial^\beta(u_1)]^\wedge| dt d\xi' \\ &\leqslant x_n^{-d} C \frac{1}{R^{l+1+s-|\alpha|}} \| u_1 \|^2_{H^{1,s}_d}, \end{aligned}$$

desde que $l+1+s-|\alpha| \geqslant 0$, ou seja, $|\alpha| \leqslant 2-\beta-d+s$. Seguindo o mesmo raciocínio para $a \geqslant 2$ temos

$$\int_{|\xi'|\leqslant R} |\cdot|^{|\alpha|}[I_1(u_1)(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi' \leqslant C x_n^{-d} C \frac{1}{R^{l+1+s-|\alpha|}} \| u_1 \|^a_{H^{1,s}_d},$$

desde que $|\alpha| \leqslant 2-\beta-(a-1)d+s$. Agora, de forma análoga ao feito acima e usando as estimativas desenvolvidas em (4.39) á (4.45) para $w_2 = 0$ obtemos

$$\int_{|\xi'|\leqslant R} |\cdot|^{|\alpha|}[N_1(u_1)(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi' \leqslant C x_n^{-d} C \frac{1}{R^{d+1+s-|\alpha|}} \| V \|_{H^{1,s}} \| u_2 \|_{H^{1,s}},$$

$$\int_{|\xi'|\leqslant R} |\cdot|^{|\alpha|}[T_1(u_1)(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi' \leqslant Cx_n^{-d}C\frac{1}{R^{d+2+s-|\alpha|}} \parallel u_2 \parallel^b_{H^{1,s}},$$

e

$$\int_{|\xi'|\leqslant R} |\cdot|^{|\alpha|}[L_1(u_1)(\cdot,x_n)]^\wedge d\xi' \leqslant Cx_n^{-d}C\frac{1}{R^{d+2+s-|\alpha|}} \parallel f \parallel_{H^{1,s}},$$

supondo que $|\alpha| \leqslant s+2+d$. Assim, para cada $x_n > 0$ fixo temos que $[\partial^\alpha u_1(\cdot,x_n)] \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ e consequentemente concluímos que $u_1(\cdot,x_n) \in C_0^{[s+2-\beta-(a-1)d]}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Agora para u_2 seguindo o mesmo raciocínio mostramos que

$$\parallel [\partial^\alpha u_2]^\wedge \parallel_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} < +\infty,$$

desde que $|\alpha| \leqslant s+2-\beta-ad$ e $|\alpha| \leqslant s+1$. Dessa forma, como $\beta < 1-ad$ temos que $u_2 \in C_0^{[s+1]}(\mathbb{R}^{n-1})$ e então conluímos a demonstração de (i) e (ii) do teorema 4.8.

4.5 Simetria axial

Nesta seção iremos demonstrar uma propriedade da solução obtida de (4.9). Para isso, vamos considerar validas todas condições do Teorema 4.1 e 4.2 (ver página 101) e iremos utilizar os operadores definidos na página 97 e o espaço

$$X = \mathcal{L}_d^\infty FB^{s_1}_{p_1,\infty} \times FB^{s_2}_{p_2,\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$$

como definido na página 99.

Teorema 4.23. *Suponha que f e V sejam radiais e seja $u = (u_1,u_2)$ solução de (4.9) obtida a partir de f e V. Então para toda rotação τ em torno do eixo $\{x_n = 0\}$, temos que $u = u \circ \tau$ em X, ou seja, u é invariante sobre rotações em torno do eixo $\{x_n = 0\}$.*

Demonstração: Primeiramente observamos que a função ϕ tomada na definição dos espaços de Fourier-Besov pode ser tomada sendo radial (ver [35]). Considere os operadores

$$\Psi_1(u) = I_1(u) + N_1(u) + T_1(u) + L_1(u)$$

e

$$\Psi_2(v) = I_2(v) + N_2(v) + T_2(v) + L_2(v),$$

e a sequência de Picard

$$(u_1^1, u_2^1) = (L_1(u_1^1), L_2(u_2^1))$$

e

$$(u_1^j, u_2^j) = (\Psi_1(u_1^{j-1}), \Psi_2(u_2^{j-1})),$$

para $j = 2, 3, \ldots$. Como f é radial então $\widehat{f}$ também é radial. Além disso vale

$$G(\tau(\xi'), x, t) = G(\xi', x, t),$$

para todo $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, x \geqslant 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Então

$$L_1(u_1^1)(\tau(\xi'), x_n) = L_1(u_1^1)(\xi', x_n) \text{ e } L_2(u_2^1 \circ \tau)(\xi') = L_2(u_2^1)(\xi'),$$

para todo $x_n > 0$ e todo $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Logo

$$(u_1^1)(\tau(\cdot), x_n) = (u_1^1)(\cdot, x_n) \text{ e } (u_2^1 \circ \tau)(\cdot) = (u_2^1)(\cdot),$$

para todo $x_n > 0$. Agora, como transformada de fourier de função radial é radial, multiplicação de funções radiais é radial, V é radial e

$$(\partial^\beta u \circ \tau)^\wedge = (\partial^\beta u)^\wedge \circ \tau$$

temos que

$$(u_1^2)(\tau(\cdot), x_n) = (u_1^2)(\cdot, x_n) \text{ e } (u_2^2 \circ \tau)(\cdot) = (u_2^2)(\cdot),$$

para todo $x_n > 0$.

Continuando com esse raciocínio e aplicando indução sobre j obtemos

$$(u_1^j)(\tau(\cdot), x_n) = (u_1^2)(\cdot, x_n) \text{ e } (u_2^j \circ \tau)(\cdot) = (u_2^2)(\cdot),$$

para todo $x_n > 0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$.

Agora observe que, dada $f \in FB^s_{p,q}$, como ϕ é radial temos

$$\begin{aligned}
\| \widehat{\phi}_j (f \circ \tau)^\wedge \|_p &= \| (\widehat{\phi}_j \circ \tau)(f \circ \tau)^\wedge \|_p \\
&= \| (\widehat{\phi}_j \circ \tau)(\hat{f} \circ \tau) \|_p \\
&= \| (\widehat{\phi}_j \hat{f}) \circ \tau \|_p \\
&= \| \widehat{\phi}_j \hat{f} \|_p
\end{aligned}$$

e assim segue que $\| f \circ \tau \|_{FB^s_{p,q}} = \| f \|_{FB^s_{p,q}}$. Aplicando isso para a norma do espaço X segue facilmente que

$$\| (v(\tau(\cdot), \cdot), w \circ \tau) \|_X = \| (v, w) \|_X,$$

para toda $(v, w) \in X$.

Sabemos do teorema de existência e unicidade que a sequência de Picard (u_1^j, u_2^j) converge para (u_1, u_2) em X. Assim

$$\begin{aligned}
\| (u_1,u_2) - (u_1(\tau(\cdot),\cdot), u_2\circ\tau) \|_X &\leqslant \| (u_1,u_2) - (u_1^j,u_2^j) \|_X \\
&+ \| (u_1^j,u_2^j) - (u_1(\tau(\cdot),\cdot), u_2\circ\tau) \|_X \\
&= \| (u_1,u_2) - (u_1^j,u_2^j) \|_X \\
&+ \| (u_1^j(\tau(\cdot),\cdot), u_2^j\circ\tau) - (u_1(\tau(\cdot),\cdot), u_2\circ\tau) \|_X \\
&= \| (u_1,u_2) - (u_1^j,u_2^j) \|_X \\
&+ \| [(u_1^j - u_1)(\tau(\cdot),(\cdot)), (u_2^j - u_2)\circ\tau) \|_X \\
&= 2 \| (u_1,u_2) - (u_1^j,u_2^j) \|_X \ .
\end{aligned}$$

Fazendo j tender a infinito obtemos $u = u\circ\tau$. Portanto, segue que u é invariante sobre rotações em torno do eixo $\{x_n = 0\}$.

■

5 Conclusão e algumas ideias para projetos futuros

Para finalizar, vamos dar um apanhado geral dos resultados obtidos bem como indicar possíveis investigações futuras para cada um dos problemas abordados. Nosso primeiro problema abordado foi

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u = V(x)u + g(u, \nabla u) + f, \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

onde obtivemos a existência de solução nos espaços modulação-Lorentz $M^{p,r}_{q,s}$ impondo certas condições para os índices p, r, q e s. Tratamos inicialmente não-linearidades g dependendo apenas de u. No Teorema 3.1 obtivemos a existência de solução integral no espaço $M^{p,r}_{1,s}$ para $g \in Lip\rho$, onde futuramente podemos investigar a existência de solução para $q > 1$. No Teorema 3.2 obtivemos a existência de solução integral no espaço $M^{p,r}_{q,s}$ para funções g que se escrevem como séries de potências com raio de convergência positiva. Neste caso precisamos impor condições sobre os índices de forma que espaço $M^{p,r}_{q,s}$ fosse uma álgebra múltiplicativa, pois dessa forma conseguimos estimar as normas das potências u^m conforme m tomava valores cada vez maiores. Seguindo essa linha, uma possibilidade de investigação futura é estudar a existência de solução para o caso em que g é uma função polinomial sem necessariamente impor que o espaço seja uma álgebra multiplicativa. Por fim analisamos casos onde a não-linearidade g depende de ∇u e obtivemos nos Teoremas 3.16 e 3.17 a existência de solução integral para a não-linearidade $g(|\nabla u|)$ para funções g escritas como séries de potência de termos pares e por último no Teorema 3.18 a existência de solução para a não-linearidade $|\nabla u|^\rho$ nos espaços $M^{p,r}_{1,s}$.

Nosso segundo problema abordado foi o P.V.F.

$$\begin{cases} -\Delta u = K_1(\partial^\beta u)^a & , \text{ in } \mathbb{R}^n_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = V(x')u + K_2 u^b + f(x') & , \text{ in } \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{5.2}$$

onde usando algumas idéias desenvolvidas em [12, 13] obtivemos uma formulação integral equivalente a (5.2) aplicando a transformada de Fourier apenas nas primeiras $n-1$ variáveis. Desta forma, usando argumentos de *scalling* e espaços críticos do tipo Chamin-Lerner baseados nos espaços de Fourier-Besov, conseguimos obter no Teorema 4.6 a existência e unicidade de solução para (5.2). Obtivemos também no Teorema 4.8 propriedades de regularidade para a solução utilizando os espaços $H^{1,s}$ desde que os dados V e f fossem suficientemente regulares. Utilizando essa abordagem podemos futuramente investigar existência de soluções para P.V.F. poli-harmônicos com diferentes condições de fronteira. Além de investigar a existência de soluções integrais para o P.V.F. (5.2) em outros espaços baseados em variáveis de Fourier, tais como os espaços Fourier-Besov-Morrey.

Referências

1 ALMEIDA, M. F. de; LIMA, L. S. M. Nonlinear boundary problem for Harmonic functions in higher dimensional Euclidean half-spaces. *preprint*, arXiv:1807.04122, 2018.

2 AMANN, H.; CRANDALL, M. On some existence theorems for semilinear equations. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 27, p. 779–790, 1978.

3 AZORERO, J. G.; ALONSO, I. P. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. *Journal of Differential Equations*, v. 144(2), p. 441–476, 1998.

4 ALMEIDA, M. F.; FERREIRA, L. C. F.; LIMA, L. S. M. Uniform global well-posedness of the Navier-Stokes-Coriolis system in a new critical space. *Math. Z.*, v. 287, p. 735–750, 2017.

5 BHIMANI, D. G. Global Cauchy Problems for the Klein-Gordon, Wave and fractional Schrodinger equation with Hartree nonlinearity on Modulation Spaces. *Mathematics Subject Classification*, v. 35L71, 35Q55, 42B35 (primary), 35A01 (secondary), 2010.

6 BOCCARDO, L.; MURAT, F.; PUEL, J. P. R´esultats d'existence pour certains probl'emes elliptiques quasilin´eaires. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4)*, v. 11, p. 213–235, 1984.

7 BORUP, L.; NIELSEN, M. Boundedness for Pseudodifferential Operators on Multivariative α-Modulation Spaces. *Ark. Mat. 44*, v. 2, p. 241–259, 2006.

8 BERGH, J.; LOFSTROM, J. *Interpolation Spaces: An introduction.* 1. ed. [S.l.]: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. x+207 pp. 46M35.

9 BARZA, S.; KOLYADA, V.; SORIA, J. Sharp constants relatedes to the triangle inequality in Lorentz Spaces. *Transaction of the american mathematical society*, v. 361, 2009.

10 CHIPOT, M.; SHAFRIR, I.; FILA, M. On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions. *Adv. Differential Equations 1*, no. 1, p. 91–110, 1996.

11 CHOQUET-BRUHAT, Y.; LERAY, J. Sur le probl'eme de Dirichlet, quasilin´eaire, d'ordre 2. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser.*, A-B 274, p. 81–85, 1972.

12 CASTANEDA-CENTURION, N. F. *Alguns problemas elípticos não homogêneos via transformada de Fourier.* Tese de doutorado. [S.l.]: Unicamp, 2015.

13 CASTANEDA-CENTURION, N. F.; FERREIRA, L. C. F. On singular elliptic boundary value problems via a harmonic analysis approach. *to appear in J. Differential Equations*, 2021.

14 DUPAIGNE, L.; GHERGU, M.; RADULESCU, V. Lane-Emden-Fowler equations with convection and singular potential. *J. Math. Pures Appl. (9)*, v. 87, p. 563581, 2007.

15 EVANS, L. C. *Partial differential equations: Graduate studies in mathematics*. 2. ed. [S.l.]: American mathematical society, 1998.

16 FERREIRA, L. C. F.; MONTENEGRO, M. A Fourier approach for nonlinear equations with singular data. *Israel Journal of Mathematics*, v. 193, p. 83–107, 2013.

17 FELLI, V.; PISTOIA, A. Existence of blowing-up solutions for a nonlinear elliptic equation with Hardy potential and critical growth. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 31(1), p. 21–56, 2006.

18 FELLI, V.; MARCHINI, E. M.; TERRACINI, S. On Schrodinger operators with multipolar inverse-square potentials. *Journal of Functional Analysis*, v. 250(2), p. :265–316, 2007.

19 FELLI, V.; TERRACINI, S. Elliptic equations with multi-singular inverse-square potentials and critical nonlinearity. *Comm. Partial Differential Equations 31*, no. 1-3, p. 469–495, 2006.

20 FILA, M.; QUITTNER, P. Radial positive solutions for a semilinear elliptic equation with a gradient term. *Adv. Math. Sci. Appl.*, v. 2.1, p. 39–45, 1993.

21 FEICHTINGER, H. G. Modulation spaces on locally Abelian groups. *Updated version appeared in Proceedings of International Conference on Wavelets and Applications*, p. 99–140, 2002.

22 FEICHTINGER, H. G. Modulation spaces: looking back and ahead. *Sampl. Theory Signal Image Process. 5*, no. 2, p. 109–140, 2006.

23 FERREIRA, L. C. F.; MEDEIROS, E. S.; MONTENEGRO, M. On the Laplace equation with a supercritical nonlinear Robin boundary condition in the half-space. *Calc. Var.*, v. 47, p. 667–682, 2013.

24 FERREIRA, L.; CASTANEDA-CENTURION, N. F. A Fourier Analysis Approach to Elliptic Equations with Critical Potentials and Nonlinear Derivative Terms. *Milan Journal of Mathematics*, v. 85, p. 187–213, 2017.

25 FERREIRA, L. C. F.; MESQUITA, C. A. A. S.; MONTENEGRO, M. Existence and Symmetries for Elliptic Equations with Multipolar Potentials and Polyharmonic Operators. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 62, 2013.

26 FERREIRA, L. C. F.; MONTENEGRO, M. Existence and asymptotic behavior for elliptic equations with singular anisotropic potentials. *J. Differential Equations*, v. 250, p. 2045–2063, 2011.

27 FERREIRA, L. C. F.; LIMA, L. S. M. Self-similar solutions for active scalar equations in Fourier-Besov-Morrey spaces. *Monatsh. Math. 175*, no. 4, p. 491–509, 2014.

28 GEORGIEV, S. G. *Theory of Distributions*. 1. ed. [S.l.]: Springer International Publishing,Cham, 2015. viii+218 pp. ISBN: 978–3–319–19526–1.

29 GHERGU, M.; RăDULESCU, V. Multiparameter bifurcation and asymptotics for the singular Lane-Emden-Fowler equation with a convection term. *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, v. 135(A), p. 61–84, 2005.

30 GRAFAKOS, L.; SI, Z. The Hormander multiplier theorem for multilinear operators. *J. Reine Angew. Math.*, v. 668, p. 133–147, 2012.

31 GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 3. ed. [S.l.]: Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2014. xviii+638 pp. ISBN: 978–1–4939–1193–6.

32 GROCHENIG, K. *Foundations of time-frequency analysis*. 1. ed. [S.l.]: Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. xvi+359 pp. ISBN: 0–8176–4022–3 42–02.

33 HU, B. Nonexistence of a positive solution of the Laplace equation with a nonlinear boundary condition. *Differential Integral Equations 7*, no. 2, p. 301–313, 1994,(Reviewer: Gary M. Lieberman).

34 KAZDAN, J. L.; KRAMER, R. J. Invariant criteria for existence of solutions to second-order quasilinear equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 31, p. 619–645, 1978.

35 KONIECZNY, P.; YONEDA, T. On dispersive effect of the Coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations. *J. Differential Equations 250*, no. 10, p. 3859–3873, 2011.

36 LIU, Q.; ZHAO, J. Global well-posedness for the generalized magneto-hydrodynamic equations in the critical Fourier-Herz spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 420 no. 2, p. 1301–1315, 2014.

37 IWABUCHI, T. Navier-Stokes equations and nonlinear heat equations in modulation spaces with negative derivative indices. *J. Differential Equations*, v. 248, p. 1972–2002, 2010.

38 IWABUCHI, T. Global well-posedness for Keller-Segel system in Besov type spaces. *J. Math. Anal. Appl. 379*, no. 2, p. 930–948, 2011.

39 MIGNOT, F.; PUEL, J. P. Sur une classe de probl‘emes non lin´eaires avec non lin´eairit´e—positive, croissante, convexe. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 5, p. 791–836, 1980.

40 RUIZ, D.; SúAREZ, A. Existence and uniqueness of positive solution of a logistic equation with nonlinear gradient term. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A (3)*, v. 137, p. 555–566, 2007.

41 IWABUCHI, T.; TAKADA, R. Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type. *J. Funct. Anal.*, v. 267, p. 1321–1337, 2014.

42 ERLIN, R.; RAFEIRO, H. *An introductory course in Lebesgue spaces*. [S.l.]: CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, [Cham], 2016. xii+461 pp. ISBN: 978–3–319–30032–0; 978–3–319–30034–4 46–02.

43 RABINOWITZ, P. H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society*, Providence, RI, p. 1986. viii+100 pp., ISBN: 0–8218–0715–3.

44 RUNST, T.; SICKEL, W. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*. 1. ed. [S.l.]: Walter de Gruyter · Berlin · New York, 1996.

45 SAWANO, I. *Theory of Besov Spaces*. 1. ed. [S.l.]: Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2018. xxiii+945 pp. ISBN: 978–981–13–0835–2.

46 STAKGOLD, I.; HOLST, M. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. 3rn edition. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., Hoboken–New Jersey, 2011.

47 STEIN, E. M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. 1. ed. [S.l.]: Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. xiv+695 pp. ISBN: 0–691–03216–5.

48 STRUWE, M. Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. *Springer-Verlag, Berlin*, v. 1990, p. . xiv+244 pp., ISBN: 3–540–52022–8.

49 TRIEBEL, H. *Theory of function spaces*. Reprint of 1983 edition. [S.l.]: Modern Birkhäuser Classics,Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010. 285 pp. ISBN: 978–3–0346–0415–4.

50 TRIEBEL, H. Modulation Spaces on the Euclidean n-Space. *Zeitschrift für Ana1ysis und Hire Anwendungen Bd. 2(5)*, v. 8, p. 443–457, 1983.

51 XUE, H.; SHAO, X. Existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic problem with a gradient term. *Nonlinear Anal.*, v. 71, p. 3113–3118, 2009.

52 ZHANG, Z.; YU, J. On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 32, p. 916–927, 2000.

53 WANG, B.; HUDZIK, H. The global Cauchy problem for nls and nlkg with small rough data. *J. Differential Equations*, v. 232, p. 36–73, 2007.

54 WANG, B.; HAN, J. α-modulation spaces (i) scaling, embedding and algebraic properties. *J. Math. Soc. Japan*, v. 66, p. 1315–1373, 2014.

55 WILLEM, M. Minimax theorems. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, v. 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, p. 1996. x+162 pp., ISBN: 0–8176–3913–6.

56