



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

RENATA PIVA GOMES

Derivada fracionária zeta-Hilfer em escalas temporais e aplicações

Campinas

2024

Renata Piva Gomes

Derivada fracionária zeta-Hilfer em escalas temporais e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa

Coorientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Renata Piva Gomes e orientada pelo Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G585d Gomes, Renata Piva, 1996-
Derivada fracionária zeta-Hilfer em escalas temporais e aplicações /
Renata Piva Gomes. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: José Vanterler da Costa Sousa.

Coorientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas
(UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Derivada fracionária de Hilfer. 2. Escalas temporais. 3. Existência de
solução (Equações diferenciais fracionárias). 4. Unicidade de solução
(Equações diferenciais fracionárias). I. Sousa, José Vanterler da Costa, 1985-
II. Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de, 1962-. III. Universidade Estadual de
Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Zeta-Hilfer fractional derivative on time scales and applications

Palavras-chave em inglês:

Hilfer fractional derivative

Times scales

Existence of solution (Fractional differential equations)

Uniqueness of solution (Fractional differential equations)

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

José Vanterler da Costa Sousa [Orientador]

Felix Silva Costa

Daniela dos Santos de Oliveira

Data de defesa: 28-06-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0002-5962-0661>

- Currículo Lattes do autor: <https://lattes.cnpq.br/8264828901753304>

**Dissertação de Mestrado defendida em 28 de junho de 2024 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). JOSÉ VANTERLER DA COSTA SOUSA

Prof(a). Dr(a). FELIX SILVA COSTA

Prof(a). Dr(a). DANIELA DOS SANTOS DE OLIVEIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

A Deus por me dar força, esperança e sabedoria para continuar seguindo meus objetivos mesmo diante dos obstáculos.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa, a quem tenho imensa admiração e gratidão, agradeço pela oportunidade de orientação, pela paciência, dedicação, incentivo e exemplo. A realização deste trabalho e, conseqüentemente, de um sonho não seria possível sem essa orientação, obrigada professor.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira pela oportunidade, dedicação, contribuição e exemplo.

Aos membros da banca, Profa. Dra. Daniela dos Santos de Oliveira e Prof. Dr. Felix Silva Costa, pela disponibilidade, ensinamentos, discussões e contribuições para este trabalho.

À minha família e amigos por serem meu porto seguro, me dando todo o apoio, amor, compreensão e incentivo necessários para seguir em frente.

Ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira por me apresentar ao cálculo fracionário, pela paciência e ensinamentos durante o mestrado mesmo nos períodos mais difíceis.

Aos professores do curso de licenciatura em matemática do IFSP, campus São Paulo, pelos ensinamentos, apoio e incentivo para continuar meus estudos, em especial, ao Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos que me direcionou ao mestrado na Unicamp e me apresentou ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.

Aos professores e amigos do Imecc-Unicamp por todo o aprendizado dentro e fora de sala de aula que contribuíram para minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho, inicialmente, temos como objetivo apresentar um estudo detalhado sobre a derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais, abordando algumas propriedades clássicas encontradas na literatura. Em particular, discutimos alguns casos a partir da escolha da função $\zeta(\cdot)$. Além disso, apresentamos alguns exemplos e comentários sobre as dificuldades encontradas quando trabalhamos com operadores fracionários em escalas temporais. Por outro lado, motivado pela derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais e por um problema de Cauchy clássico, apresentamos uma versão fracionária em escalas temporais com a condição inicial em termos da integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a função $\zeta(\cdot)$. Nesse sentido, por meio da teoria de pontos fixos, investigamos a existência, unicidade e controlabilidade de soluções do problema fracionário proposto.

Palavras-chave: Derivada fracionária ζ -Hilfer, Escalas Temporais, Equações Diferenciais Fracionárias, Existência e Unicidade, Controlabilidade.

Abstract

In this work, initially, we aim to present a detailed study on the ζ -Hilfer fractional derivative on times scales, addressing some classic properties found in the literature. In particular, we discuss some cases based on the choice of the function $\zeta(\cdot)$. Furthermore, we present some examples and comments about the difficulties encountered when working with fractional operators on times scales. On the other hand, motivated by the ζ -Hilfer fractional derivative on temporal scales and by a classical Cauchy problem, we present a fractional version on temporal scales with the initial condition in terms of the Riemann-Liouville fractional integral with respect to the function $\zeta(\cdot)$. In this sense, through the theory of fixed points, we investigate the existence, uniqueness and controllability of solutions to the proposed fractional problem.

Keywords: ζ -Hilfer Fractional Derivative, Time Scales, Fractional Differential Equations, Existence and Uniqueness, Controllability.

Sumário

Introdução	9
1 Conceitos Preliminares	15
1.1 Espaços de Funções	15
1.2 Funções Especiais	18
1.3 Integral e Derivada em Escalas Temporais	20
2 Cálculo ζ-Fracionário	28
2.1 Integral Fracionária ζ -Riemann-Liouville	28
2.1.1 Teoremas e Propriedades	30
2.1.2 Caso particular: Potência	31
2.2 Derivada Fracionária ζ -Hilfer	33
2.2.1 Teoremas e Propriedades	35
2.3 ζ -Riemann-Liouville $\times$ ζ -Caputo $\times$ ζ -Hilfer	39
3 Derivada Fracionária ζ-Hilfer em Escalas Temporais	41
4 Equações Diferenciais Fracionárias: Existência e Unicidade	53
5 Controlabilidade de Soluções	59
6 Conclusões e Próxima Etapa	65
 REFERÊNCIAS	 66

Introdução

O que é uma integral fracionária? O que é uma derivada fracionária? Em outras palavras, mais precisamente, o que é o cálculo fracionário e, por que estudá-lo? O estudo de operadores não-locais do tipo fracionário possui uma longa tradição, motivada tanto pela curiosidade matemática quanto por aplicações no mundo real. Em 30 de Setembro de 1695, uma audaciosa e profética resposta, dava-se início ao cálculo de ordem não inteira, popularizado como cálculo fracionário (MILLER; ROSS, 1993). Historicamente, o cálculo fracionário teve início através de uma carta entre Leibniz e seu amigo l'Hospital, a qual continha uma questão envolvendo uma possível generalização da derivada de ordem inteira. A priori, Leibniz não tinha uma resposta concreta sobre o questionamento, no entanto, uma resposta corajosa e clara, afirmando que um dia “essa fração”, iria gerar várias consequências importantes. Hoje, podemos notar a importância do cálculo fracionário em inúmeras áreas, desde problemas envolvendo questões analíticas, até questões sobre modelagem matemática (BAYOUR; TORRES, 2016; CHIDOUH et al., 2017; KHAN et al., 2022; MATAR et al., 2021; SOUSA; OLIVEIRA; MAGNA, 2017; TUAN; MOHAMMADI; REZAPOUR, 2020).

O cálculo fracionário é uma generalização da diferenciação e integração ordinária para ordem arbitrária (não inteira). O assunto é tão antigo quanto o cálculo da diferenciação e remonta à época em que Leibniz, Gauss e Newton inventaram esse tipo de cálculo. Durante três séculos, a teoria do cálculo fracionário se desenvolveu como um campo puramente teórico, útil apenas para matemáticos. Hoje em dia, o cálculo fracionário atrai muitos cientistas e engenheiros. Existem diversas aplicações deste fenômeno matemático em mecânica, física, química, teoria de controle e assim por diante (HERRMANN, 2011; OLDHAM; SPANIER, ; PODLUBNY, 1998). Após esse episódio, que a maioria dos autores considera o nascimento do cálculo fracionário, vários matemáticos famosos contribuíram para o desenvolvimento do cálculo fracionário (HILFER, 2000; MILLER; ROSS, 1993; SAMKO, 1993): Abel, Fourier, Liouville, Grünwald, Letnikov, Caputo, Riemann, Riesz, dentre outros.

É natural utilizar equações diferenciais, sejam elas ordinárias ou parciais, para descrever fenômenos naturais. No entanto, não é trivial e muito menos simples obter sucesso. Dentre um dos motivos, é a quantidade de parâmetros envolvidos no sistema, e outras questões de cada fenômeno envolvido. Nesse sentido, uma forma de tentar minimizar tal problema, é usar a ferramenta “cálculo fracionário”, uma vez que hoje é um campo de pesquisa bem consolidado com muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento, o que é interessante e importante por apresentar resultados mais refinados e condizentes com a realidade (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; LAKSHMIKANTHAM; LEELA;

DEVI, 2009; OSLER, 1971; OSLER, 1970; SOUSA et al., 2021; SOUSA; FREDERICO; OLIVEIRA, 2020; SOUSA; OLIVEIRA; MAGNA, 2017).

Nos últimos anos, as aplicações via derivadas fracionárias tem chamado a atenção de inúmeros pesquisadores, de diversas áreas do conhecimento, particularmente durante os dois anos em que o mundo enfrentou a pandemia do COVID-19 (TUAN; MOHAMMADI; REZAPOUR, 2020). Nesse sentido, entra o papel fundamental dos modelos utilizando equações diferenciais fracionárias, ou seja, tentar melhorar e fornecer resultados mais próximos da realidade quando comparado ao caso clássico. Em 2022 Khan et al. (KHAN et al., 2022) discutiram um interessante trabalho sobre um modelo matemático fracionário de tuberculose na China e apresentaram simulações numéricas que mostram a aplicabilidade dos esquemas. No mesmo ano, Etemad et al. (ETEMAD et al., 2022), usando a derivada fracionária de Caputo, investigaram um modelo do vírus AHIN1/09. É notável a importância e as consequências que as equações diferenciais que envolvem derivadas fracionárias fornecem quando usadas para discutir problemas teóricos e práticos. Para outros trabalhos interessantes que discutem fenômenos naturais, veja (MATAR et al., 2021; MOHAMMADI et al., 2021) e as referências neles contidas. Embora seja uma área bem consolidada, existem ainda inúmeros problemas em aberto e caminhos a serem desvendados (AGHAYAN; ALFI; MACHADO, 2021a; AGHAYAN; ALFI; MACHADO, 2021b; HASSANI; MACHADO; MEHRABI, 2021; LOPES; MACHADO, 2021). Um caminho de pesquisa que recentemente tem despertado o interesse de alguns matemáticos consiste em investigar o cálculo fracionário em escalas temporais (AHMADKHANLU; JAHANSHAH, 2012; AMMI; TORRES, 2018; BELAID et al., 2019; BENKHETTOU; HAMMOUDI; TORRES, 2016; KUMAR; MALIK, 2019; KUMAR; MALIK, 2021; MALIK; KUMAR, 2020; TORRES, 2021; WILLIAMS, 2012; YAN; SUN; HAN, 2016; ZHU; WU, 2015).

Uma escala de tempo (ou escala temporal) é qualquer subconjunto fechado não vazio em $\mathbb{R}$. A teoria das escalas temporais é uma área de pesquisa relativamente nova, introduzida no doutorado de Stefan Hilger em 1988 (HILGER, 1988). Seu objetivo era unificar a teoria das equações de diferenças e a teoria das equações diferenciais. Desde então, tem sido extensivamente estudada em vários aspectos por vários autores (BOHNER; GUSEINOV, 2007; BOHNER; PETERSON, 2001a; BOHNER; PETERSON, 2003; HILGER, 1990; PETERSON; THOMPSON, 2006; THOMPSON, 2008). Por outro lado, Bastos em sua tese de doutorado, dedicou-se a discutir a ideia de unificar o cálculo fracionário e o cálculo em escalas temporais. Recentemente, ∇ -derivadas, Δ -derivadas e cálculo fracionário simétrico em subconjuntos fechados não vazios em $\mathbb{R}$, foram introduzidos e desenvolvidos em (BENKHETTOU; CRUZ; TORRES, 2015; BENKHETTOU; CRUZ; TORRES, 2016a). Especialmente, em (BENKHETTOU; HASSANI; TORRES, 2016), quando Nadia Benkhettou, Salima Hassani e Delfim F. M. Torres apresentaram um cálculo fracionário de escala temporais adaptável, que forneceram uma extensão natural do cálculo

conformável, diferente das abordagens realizadas nos trabalhos (BENKHETTOU; CRUZ; TORRES, 2015; BENKHETTOU; CRUZ; TORRES, 2016a).

Em 2007, Atici e Eloe investigaram o q -cálculo fracionário em escalas temporais quântica (ATICI; ELOE, 2007). Os autores apresentaram um estudo sobre algumas propriedades do q -cálculo fracionário e investigaram a transformada q -Laplace. Em 2011, Bastos et al. (BASTOS, 2011) investigaram uma classe de derivadas fracionárias em escalas temporais usando a transformada de Laplace inversa. O estudo das integrais fracionárias ζ -Riemann–Liouville em relação a uma função ζ em escalas de tempo foi iniciado por Mekhalfi e Torres em 2017 (MEKHALFI; TORRES, 2017). Eles introduziram operadores fracionários generalizados em escalas de tempo de uma função em relação a outra função ζ , além de realizar algumas aplicações às equações dinâmicas. Em 2018, Harikrishnana et al. (HARIKRISHNANA; M.; KANAGARAJAN, 2018) propôs o operador fracionário ζ -Hilfer em escalas temporais dado por

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}g(x) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha);\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma;\zeta}g(\tau) \quad (1)$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$ e ${}^{\mathbb{T}}\Delta = \frac{d}{d\tau}$ (HARIKRISHNANA; M.; KANAGARAJAN, 2018). No entanto, Sousa et al. (SOUSA et al., 2023) notaram que a Eq.(1) não estava bem definida, isto é, de acordo a definição da derivada fracionária ζ -Hilfer. Ao invés de considerar ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{\zeta} = \left(\frac{\Delta}{\zeta^{\Delta}(x)} \right)$, os autores consideraram ${}^{\mathbb{T}}\Delta = \frac{d}{d\tau}$, o que é um erro. Basta notar que o termo ${}^{\mathbb{T}}\Delta = \frac{d}{d\tau}$ é inconsistente, escolhendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $\beta \rightarrow 0$ ou $\beta \rightarrow 1$, para o qual não se obtém a derivada fracionária ζ -Riemann–Liouville ou a derivada fracionária ζ -Caputo, conforme desejado.

A seguir vamos descrever de forma sucinta cada capítulo a fim de tornar claro quais são os objetivos abordados neste trabalho.

No Capítulo 1, vamos apresentar alguns conceitos fundamentais de espaços de funções e suas respectivas normas. Por outro lado, discutimos os conceitos de transformada de Laplace e do produto de convolução. Nesse sentido, uma classe de funções especiais e comentários, são apresentados. Faremos, também, o estudo das integrais e derivadas em escalas temporais, de modo particular, apresentaremos algumas propriedades que são de suma importância para a elaboração deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentaremos uma estrutura para o cálculo fracionário com respeito a outra função $\zeta(\cdot)$. Para isso, primeiramente, abordaremos o conceito fundamental de integral fracionária ζ -Riemann–Liouville à esquerda e apresentamos alguns casos particulares, isto é, Riemann–Liouville, Riemann, Liouville e Hadamard. Por outro lado, introduzimos a função $\Phi_{\alpha,\zeta}(\cdot)$, que contém como caso particular, a função de Gel’fand–Shilov e discutimos propriedades fundamentais para a integral fracionária ζ -Riemann–Liouville. Nesse sentido, a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann–Liouville é

calculada, em particular, alguns resultados que envolvem as funções de Mittag-Leffler e de Wright e, exemplos de função potência são abordados. Por outro lado, motivados pelas integrais fracionárias ζ -Riemann-Liouville e as derivadas fracionária de Hilfer, apresentamos um estudo sobre a derivada fracionária ζ -Hilfer e propriedades. Nessa sequência, alguns casos particulares e discussões envolvendo a derivada fracionária de Caputo, em particular, sobre o cálculo das funções de Mittag-Leffler e Wright, são apresentadas. Por fim, apresentamos outros resultados envolvendo a derivada fracionária ζ -Hilfer e alguns exemplos, bem como discussões pertinentes dos resultados estudados.

Na literatura existem vários trabalhos (dissertações e teses) envolvendo abordagens sobre os Capítulos 1 e Capítulo 2. O trabalho aqui realizado, é o primeiro que terá uma abordagem sobre derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais em universidades brasileiras. Assim, destacamos que os principais objetivos deste trabalho podem ser descritos nos seguintes capítulos:

Primeiramente, no Capítulo 3, apresentamos uma extensão para a derivada fracionária ζ -Hilfer no sentido de escalas temporais e discutimos algumas propriedades essenciais na formulação de uma derivada fracionária. Além disso, algumas propriedades para a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville são fornecidas. Em particular, investigamos a regra de Leibniz, a transformada de Laplace e integração por partes para as integrais e derivadas fracionárias em escalas temporais, respectivamente no sentido de ζ -Riemann-Liouville e ζ -Hilfer. Durante o capítulo, sempre procuramos deixar claro, alguns pontos essenciais que diferenciam as derivadas fracionárias clássicas e as derivadas fracionárias em escalas temporais.

Um dos problemas ao trabalhar com soluções de equações diferenciais fracionárias em escalas temporais, é a restrição de resultados, uma vez que a área ainda está em construção. Por exemplo, resultados de existência, unicidade, estabilidade e controlabilidade de soluções de equações diferenciais fracionárias, impedem discutir problemas mais sofisticados. A fim de contribuir e fornecer novos resultados sobre equações diferenciais fracionárias em escalas temporais, Sousa et al. (SOUSA et al., 2023), consideraram uma nova classe de equações diferenciais fracionárias em escalas temporais dadas por

$$\begin{cases} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha,\beta;\zeta}y(t) = g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) f(t, y(t)), & t \in [0, 1] = J \subseteq \mathbb{T}, \\ {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{1-\gamma;\zeta}y(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

onde ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\cdot)$ é a derivada fracionária de ζ -Hilfer em escalas temporais de ordem α ($0 < \alpha < 1$), e tipo $0 \leq \beta \leq 1$ e $f : J \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função rd-contínua. Além disso, $g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) := \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha)}{B(\alpha, \gamma - \alpha)}$, onde $B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha)$ e $B(\alpha, \gamma - \alpha)$ com $0 < \alpha < 1$, $\gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha)$, são as funções Beta em escalas temporais e a função Beta clássica, respectivamente.

O Capítulo 4 é dedicado a investigar resultados de existência e unicidade de

soluções para o Problema (2). Em outras palavras, estamos interessados na discussão dos seguintes resultados:

Teorema 1. *Suponha que $J = [0, 1] \subseteq \mathbb{T}$. Então, o Problema (2) tem uma solução única em J se a função $f(t, y(t))$ é uma função contínua densa à direita para o qual existe $M > 0$ tal que $|f(t, y(t))| < M$ em J e a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

vale para algum $L > 0$ e para todo $t \in J$ e $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. *Suponha que $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua densa à direita tal que exista $M > 0$ com $|f(t, y)| \leq M$ para todo $t \in J, y \in \mathbb{R}$. Então, o Problema (2) tem solução em J .*

No entanto, antes de abordar os principais resultados do Capítulo 4, vamos provar que discutir a solução do problema fracionário de valor inicial Problema (2), é equivalente a fazer uma abordagem sobre a sua equação integral. Para obter as provas dos **Teorema 32** e **Teorema 33**, faremos o uso de resultados discutidos nos capítulos anteriores, em particular, do teorema de Arzelà-Ascoli. Além disso, faremos comentários sobre alguns casos particulares e exemplos a partir da escolha dos parâmetros $\alpha, \beta; \zeta$ e da função $f(\cdot, y(\cdot))$.

Até o Capítulo 4, tivemos interesse em investigar a existência e unicidade de soluções para o Problema (2). No entanto, fomos motivados a estudar mais uma propriedade relacionada ao Problema (2), isto é, a controlabilidade de soluções. Para isso, adicionaremos um operador B e uma função de controle u no Problema (2), o que resulta em

$$\begin{cases} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha, \beta; \zeta} y(t) = g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha)(f(t, y(t)) + Bu(t)), & t \in [0, 1] = J \subseteq \mathbb{T}, \\ {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{1-\gamma; \zeta} y(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é assumido como um operador linear limitado e a função de controle u pertence a $L^2(J, \mathbb{R})$. As demais condições sobre o Problema (3), são as mesmas impostas para o Problema (2). Além disso, vamos considerar as seguintes hipóteses:

(A₁) Seja $f : J \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua à direita.

(A₂) Existe $M > 0$ em $[0, 1] = J \subset \mathbb{T}$ tal que $|f(t, y(t))| \leq M$.

(A₃) Seja $D = \{x \in C_{1-\gamma}(J, \mathbb{R}) : \|x\|_{C_{1-\gamma}} \leq \rho\}$.

(A₄) O operador linear $\mathscr{W}u : L^2(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\mathscr{W}_\alpha u = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} (Bu)(s) \Delta s$$

tem operadores invertíveis limitados $(\mathcal{W}_\alpha u)^{-1}$, que assumem valores em $L^2(J, \mathbb{R})$, $\text{Ker}/\mathcal{W}_\alpha$, e existem constantes positivas M_W tais que $\|(\mathcal{W}_\alpha)^{-1}\| \leq M_W$. Também, B é um operador contínuo de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e existe uma constante positiva M_B tal que $\|B\| \leq M_B$.

Por fim, o Capítulo 5, é destinado a apresentar um estudo sobre a controlabilidade de soluções do Problema (3). Para isso, utilizaremos novamente uma equação integral equivalente ao Problema (3). Em outras palavras, estamos interessados no seguinte resultado:

Teorema 3. *Se todas as condições (A_1) – (A_4) são satisfeitas, então o Problema (3) é controlável em J , desde que*

$$M \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \quad (4)$$

onde $g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) := \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)}{B(\gamma - 1, 1 - \gamma)}$ com $0 < \alpha < 1$, $\gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha)$.

De modo geral, deve-se notar que os resultados apresentados neste trabalho, são interessantes e não triviais mesmo nos casos particulares de: (i) a derivada fracionária ζ -Hilfer (obtida escolhendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$); (ii) o caso clássico de ordem inteira (obtido com $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $\alpha = 1$); e (iii) o cálculo da escalas temporais padrão (obtido considerando $\alpha = 1$). Além disso, para escolhas particulares concretas da função ζ , obtemos novas formulações envolvendo derivadas fracionárias em escalas temporais. Isso abre novas direções de investigação e discussão. Finalizamos o trabalho com comentários sobre os resultados apresentados e trabalhos futuros para um possível doutorado.

1 Conceitos Preliminares

1.1 Espaços de Funções

No presente capítulo, estamos interessados em apresentar alguns conceitos fundamentais de espaços de funções e suas respectivas normas. Por outro lado, discutimos os conceitos de transformada de Laplace e do produto de convolução. Nesse sentido, uma classe de funções especiais e comentários são apresentados. Além disso, abordamos o estudo das integrais e derivadas em escalas temporais, de modo particular, apresentaremos algumas propriedades que são de suma importância para a elaboração deste trabalho.

Definição 1. (SOUSA; LIMA; TAVARES, 2023) *Seja Ω um conjunto mensurável com $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções p -integráveis no sentido de Lebesgue, dado por*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f(t)|^p dt < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2. (SOUSA; LIMA; TAVARES, 2023) *Denotamos o espaço $L^\infty(\Omega)$ das funções reais mensuráveis limitadas, dado por*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{t \in \Omega} |f(t)|^p < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|^p.$$

Sejam $[a, b]$ ($0 < a < b < \infty$) um intervalo finito sobre o semieixo $\mathbb{R}^+$ e $C([a, b], \mathbb{R})$, $AC^n([a, b], \mathbb{R})$, $C^n([a, b], \mathbb{R})$, o espaço das funções contínuas, absolutamente contínuas n -vezes, diferenciavelmente contínuas n -vezes sobre $[a, b]$, respectivamente.

Definição 3. (SOUSA; OLIVEIRA, 2018b; SOUSA; KUCHE; OLIVEIRA, 2019) *A norma do espaço das funções contínuas f sobre $[a, b]$ é definida por*

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Definição 4. *O espaço das funções absolutamente contínuas n -vezes é dado por*

$$AC^n[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f^{(n-1)} \in AC([a, b]) \}.$$

Definição 5. O espaço ponderado $C_{\gamma;\zeta}([a, b], \mathbb{R})$ das funções f sobre $(a, b]$ é definido por

$$C_{\gamma;\zeta}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}; (\zeta(t) - \zeta(a))^\gamma f(t) \in C[a, b]\}, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

com a norma

$$\|f\|_{C_{\gamma;\zeta}([a, b], \mathbb{R})} = \|(\zeta(t) - \zeta(a))^\gamma f(t)\|_{C[a, b]} = \max_{t \in [a, b]} |(\zeta(t) - \zeta(a))^\gamma f(t)|.$$

Definição 6. (SOUSA; OLIVEIRA, 2018b; SOUSA; KUCCHE; OLIVEIRA, 2019) O espaço ponderado $C_{\gamma;\zeta}^n([a, b], \mathbb{R})$ das funções f sobre $(a, b]$ é definido por

$$C_{\gamma;\zeta}^n([a, b], \mathbb{R}) = \{f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f(t) \in C^{n-1}[a, b]; f^{(n)}(t) \in C_{\gamma;\zeta}[a, b]\}, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

com a norma

$$\|f\|_{C_{\gamma;\zeta}^n[a, b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_{C[a, b]} + \|f^{(n)}\|_{C_{\gamma;\zeta}[a, b]}.$$

Para $n = 0$, temos, $C_{\gamma;\zeta}^0([a, b], \mathbb{R}) = C_{\gamma;\zeta}([a, b], \mathbb{R})$.

Note que, $C_{\gamma_1;\zeta}^n(a, b) \subset AC^n[a, b]$ e $C_{\gamma_1;\zeta}^n[a, b] \subset C_{\gamma_2;\zeta}^n[a, b]$ com $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < 1$.

Agora consideremos a transformada de Laplace, que é uma ferramenta muito poderosa para resolver equações diferenciais. Sua descoberta é atribuída ao matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

Definição 7. (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de valores reais e ζ uma função crescente tal que $\zeta(0) = 0$. Então a transformada de Laplace da função f com respeito a ζ é definida por

$$\mathcal{L}_\zeta\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-s\zeta(t)} \zeta'(t) f(t) dt \quad (1.1)$$

para todo $s \in C$ tal que a integral é convergente. Aqui $\mathcal{L}_\zeta(\cdot)$ denota a transformada de Laplace com respeito a função ζ , que chamamos de transformada generalizada de Laplace.

Note que, escolhendo a função $\zeta(t) = t$ na Eq.(1.1), obtemos a transformada de Laplace clássica dada por (JARAD; ABDELJAWAD, 2020)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (1.2)$$

Corolário 1. (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) Se $f(t)$ é uma função cuja transformada de Laplace clássica é $F(s)$, então a transformada de Laplace generalizada da função $f \circ \zeta = f(\zeta(t))$ também é $F(s)$:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_\zeta[f(\zeta(t))] = F(s).$$

O objetivo de introduzir a transformada de Laplace generalizada foi pela necessidade de obter uma solução analítica para equações diferenciais fracionárias lineares que envolvem a função ζ .

Definição 8. (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser de ordem $\zeta(t)$ -exponencial se existem constantes não-negativas M, c, T tais que $|f(t)| \leq M e^{c\zeta(t)}$ para $t \geq T$.*

Teorema 4. (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Se $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes e é de ordem $\zeta(t)$ -exponencial, então sua transformada generalizada de Laplace existe para $s > c$.*

Uma das ferramentas mais importantes, associadas à transformada de Laplace, é o produto de convolução entre funções definidas em intervalos finitos $I = [0, \tau] \subset [0, \infty)$, que é um caso particular de produtos de composição considerados pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940). Este é um produto de convolução bastante comum na teoria das equações integrais de Volterra de primeiro tipo (ver por exemplo (ASANOV, 1998)).

Definição 9. (KREYSZIG, 1991) *Seja $\tau \in (0, \infty)$ e considere duas funções mensuráveis $f : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, \tau] \rightarrow X$ onde X é um espaço de Banach. Definimos a convolução em $[0, \tau]$ entre as funções f e g como*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \text{ para todo } t \in [0, \tau]$$

sempre que a integral acima existir.

Observação 1. (KREYSZIG, 1991) *Seja $\tau \in (0, \infty)$. Considere as funções mensuráveis $f, g : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [0, \tau] \rightarrow X$. Assumindo que todas as integrais existem, podemos provar que*

1. $f * g = g * f$.
2. $(f * g) * h = g * (f * h)$.

Teorema 5. (KREYSZIG, 1991) *Sejam $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ funções do tipo exponencial. Então, a função $f * g : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é do tipo exponencial.*

A seguir, um resultado sobre medida de não compacidade, importante da discussão de problemas de controlabilidade de soluções.

Lema 1. (SOUSA; BENCHOHRA; N'GUÉRÉKATA, 2020) *Sejam Q_1 e Q_2 dois conjuntos limitados no espaço de Banach X . Então:*

1. $\mu(Q_1) = 0$ se e somente se $\overline{Q_1}$ é compacto.

2. $\mu(Q_1) = \mu(\overline{Q_1})$.
3. $Q_1 \subset Q_2$ implica que $\mu(Q_1) \leq \mu(Q_2)$.
4. $\mu(Q_1 + Q_2) \leq \mu(Q_1) + \mu(Q_2)$.

1.2 Funções Especiais

As funções especiais desempenham um papel fundamental na matemática e na física, de modo especial, no cálculo fracionário. As aplicações envolvendo tais funções têm sido alvo de estudo no campo das equações diferenciais fracionárias e aplicações. Esta função transcendental, chamada função gama e representada por $\Gamma(x)$, despertou o interesse de alguns dos matemáticos mais proeminentes de todos os tempos. A sua história, nomeadamente documentada por Philip J. Davis (1923 - hoje) num artigo, ver (DAVIS, 1959), que lhe valeu o Prêmio Chauvenet de 1963, reflete muitos dos principais desenvolvimentos na matemática desde o século XVIII.

Motivados, essencialmente, pelo sucesso das aplicações das funções de Mittag-Leffler em diversas áreas da ciência e da engenharia, discutimos este assunto apenas para as versões de um e dois parâmetros e alguns comentários relevantes. Durante as últimas duas décadas, esta função ganhou destaque após cerca de nove décadas de sua descoberta pelo matemático sueco Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler (1846-1927).

Definição 10. (OLIVEIRA, 2005) (Função Gama) *Definimos a função gama pela seguinte integral imprópria*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

para x e t reais, exceto os inteiros negativos.

Note que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{Z}_+^*$. Em particular se $x = n$ um inteiro não negativo, então vale $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$, já que $\Gamma(1) = 0! = 1$ (OLIVEIRA, 2005).

Observamos que outra função matemática útil no cálculo fracionário é a função Beta. Esta função foi descoberta e estudada pelo matemático e físico suíço Leonard Euler (1707-1783) e pelo matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) há mais de 200 anos e recebeu o nome do matemático, físico e astrônomo francês, Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856). A importância desta função reside no fato de partilhar uma forma caracteristicamente semelhante à integral fracionária de muitas funções, particularmente polinômios da forma t^α .

Definição 11. (OLIVEIRA, 2005) (Função Beta) *A função beta é definida através da integral dada por*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \text{ onde } p > 0, q > 0.$$

Esta função satisfaz as seguintes propriedades: $B(p, q) = B(q, p)$ e $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

A função Mittag-Leffler emerge naturalmente na solução de equações integrais de ordem fracionária e equações diferenciais de ordem fracionária. Especialmente, ela é relevante nas investigações que envolvem a generalização fracionária da equação cinética, passeios aleatórios, voos de Levy, transporte superdifusivo e no estudo de sistemas complexos (GORENFLO et al., 2014; GORENFLO; MAINARDI, 2012). Aqui vamos apresentar a definição da função de Mittag-Leffler clássica em forma de somatório. No entanto, o comportamento assintótico das funções de Mittag-Leffler desempenha um papel crucial na interpretação da solução de diversos problemas físicos relacionados à reação fracionária, relaxação fracionária, difusão fracionária e reação-difusão fracionária em sistemas complexos. Para uma leitura mais detalhada sobre outras formulações das funções de Mittag-Leffler, veja os trabalhos (IKEHATA, 2004; MACROBERT, 1955; PARIS, 2002).

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro $\mathbb{E}_\alpha(t)$, com $\alpha \in \mathbb{C}$, onde $\text{Re}(\alpha) > 0$ é dada por (IKEHATA, 2004; MACROBERT, 1955; PARIS, 2002)

$$\mathbb{E}_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.3)$$

Tomando $\alpha = 1$ na Eq.(1.3), temos a função exponencial, como caso particular, isto é, $\mathbb{E}_1(t) = e^t$.

Vale ressaltar que, embora a função de Mittag-Leffler $\mathbb{E}_\alpha(t)$ seja uma generalização da função exponencial, existe um problema quando envolve o conceito de semigrupo, isto é, $e^t e^s = e^{t+s}$. No caso, para a função de Mittag-Leffler, não podemos garantir que $\mathbb{E}_\alpha(t)\mathbb{E}_\alpha(s) = \mathbb{E}_\alpha(t+s)$ (PENG; LI, 2010). Uma forma de tentar contornar tal problema, é utilizar aproximação via integrais (PENG; LI, 2012).

Definição 12. (IKEHATA, 2004; MACROBERT, 1955; PARIS, 2002) *a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\alpha) > 0$ e $\text{Re}(\beta) > 0$, é dada por*

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (1.4)$$

Quando $\beta = 1$, temos $\mathbb{E}_{\alpha,1}(t) = \mathbb{E}_\alpha(t)$. Existem outras formulações de funções de Mittag-Leffler, de três, quatro e multi-parâmetros, que podem ser discutidas e consultadas nos trabalhos (GORENFLO et al., 2014; TEODORO, 2014).

Outro tipo de função especial é a função de Wright.

Definição 13. (WRIGHT, 1933; WRIGHT, 1935a; WRIGHT, 1935b) *Sejam $\lambda > -1$ e $\mu \in \mathbb{C}$. A função de Wright, denotada por $\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z)$, é dada pela representação em série*

complexa e convergente em todo o plano complexo

$$\mathbb{W}_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}.$$

Definição 14. (MAINARDI, 2022) Seja $\alpha \in (0, 1)$. A função de Mainardi ($M_\alpha(z)$) é dada por

$$M_\alpha(z) = \mathbb{W}_{-\alpha, 1-\alpha}(z).$$

Finalmente apresentamos algumas propriedades da função Mainardi e a relacionamos com a função Mittag-Leffler. O seguinte resultado também pode ser encontrado em (NETO, 2013).

Proposição 1. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $-1 < r, \infty$, $\lambda > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. A função de Mainardi $M_\alpha(z)$ tem as seguintes propriedades:

1. $M_\alpha(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$.
2. $\int_0^\infty t^r M_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}.$
3. $\mathcal{L}(\alpha t M_\alpha(t))(z) = \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(-z).$
4. $\mathcal{L}(M_\alpha(t))(z) = \mathbb{E}_\alpha(-z).$
5. $\mathcal{L}(\alpha t^{-(1+\alpha)} M_\alpha(t^{-\alpha}))(\lambda) = e^{-\lambda^\alpha}.$

Demonstração. Veja (GORENFLO; MAINARDI, 2012; MAINARDI, 2022). □

1.3 Integral e Derivada em Escalas Temporais

O cálculo em escalas de tempo foi introduzido para unificar a análise contínua e discreta (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b). Como normalmente esperado, quando generalizamos alguma teoria, perdemos algumas propriedades interessantes. Um dos conceitos básicos com os quais os pesquisadores devem se preocupar ao lidar com equações diferenciais, cálculo variacional e assim por diante, em escalas de tempo, é a regra da cadeia. Uma escala de tempo é um subconjunto fechado arbitrário e não vazio de $\mathbb{R}$. Assim, os números reais e os números naturais são exemplos de escalas de tempo. Nesta seção, estamos interessados em realizar um estudo detalhado sobre derivadas e integrais em escalas temporais, e discutir algumas propriedades, exemplos e comentários. O objetivo é elucidar uma parte dessa teoria, antes de iniciar a abordagem do tema central deste trabalho.

Definição 15. (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b) *Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é um subconjunto fechado arbitrário não vazio dos números reais.*

Definição 16. (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b) *Para $\xi \in \mathbb{T}$, define-se o operador de salto para frente $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ por*

$$\sigma(\xi) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > \xi\}.$$

Definição 17. (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b) *O operador de salto para trás $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ é definido por*

$$\rho(\xi) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < \xi\}.$$

Segundo Bastos (BASTOS, 2012), temos a seguinte classificação de pontos: um ponto $t \in \mathbb{T}$ é chamado denso à direita, se $\sigma(t) = t$; disperso à direita, se $\sigma(t) > t$; denso à esquerda se $\rho(t) = t$ ou disperso à esquerda se $\rho(t) < t$. Um ponto t é dito isolado se $\rho(t) < t < \sigma(t)$ e denso se $\rho(t) = t = \sigma(t)$.

Ao longo deste trabalho, fazemos a suposição geral de que a e b são pontos em $\mathbb{T}$. Muitas vezes assumimos $a \leq b$. Definimos então o intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{T}$ por

$$[a, b] := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}.$$

Intervalos abertos e intervalos semiabertos são definidos de acordo. Note que $[a, b]^k = [a, b]$ se b for denso à esquerda e $[a, b]^k = [a, b) = [a, \rho(b)]$ se b for disperso à esquerda.

Além disso, definimos $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$, se $\max \mathbb{T}$ é finito e, $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$, se existe um finito $\min \mathbb{T}$.

Para $0 \leq \gamma \leq 1$ definimos o espaço ponderado $C_{1-\gamma, \zeta}(J, \mathbb{R})$ das funções contínuas f no intervalo finito $J = [0, 1] \subset \mathbb{T}$ dada por (SOUSA et al., 2023)

$$C_{1-\gamma, \zeta}[0, 1] = \left\{ f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : (\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} f(t) \in C([0, 1]) \right\}$$

com a norma

$$\|f\|_{C_{1-\gamma, \zeta}[0, 1]} = \|(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} f(t)\|_{C_{[0, 1]}}.$$

Definição 18. (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b) (Função Beta em escala temporal) *Definimos a função Beta em escala temporal por $B_{a,b}^{\mathbb{T}}(p, q) = \int_a^b (s - a)^{q-1} (b - s)^{p-1} \Delta s$, para $p, q > 0$.*

Proposição 2. (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b) A função $B_{a,b}^{\mathbb{T}}(p, q)$ satisfaz a desigualdade $B_{a,b}^{\mathbb{T}}(p, q) \geq B(p, q)(b - a)^{p+q-1}$ para $p, q > 0$, onde $B(p, q)$ é a função Beta clássica.

A derivada faz uso do conjunto $\mathbb{T}^\kappa$, que é a derivada temporal $\mathbb{T}$ da seguinte forma: se $\mathbb{T}$ tem M máximo à esquerda, então $\mathbb{T}^\kappa := \mathbb{T} \setminus \{M\}$; caso contrário, $\mathbb{T}^\kappa := \mathbb{T}$.

Definição 19 (Delta derivada). (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b) Admita que $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e seja $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Então definimos f^Δ sendo um número (desde que exista) com a propriedade que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança U de t , isto é, $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$, tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)(\sigma(s) - t)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in U.$$

Chamamos de f^Δ , a delta derivada da função f em t .

Além disso, dizemos que f é delta diferenciável sobre $\mathbb{T}^\kappa$ desde que f^Δ exista para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$. A função $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ é então a delta derivada de f sobre $\mathbb{T}^\kappa$.

Exemplo 1. (BOHNER; PETERSON, 2001b) Se $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por $f(t) = \alpha$ para todo $t \in \mathbb{T}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então $f^\Delta(t) = 0$. Isto é claro, porque para qualquer $\varepsilon > 0$, temos

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - 0(\sigma(s) - t)| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in U,$$

vale para todo $\varepsilon > 0$.

A seguir, apresentaremos dois resultados que geram algumas importantes e úteis propriedades sobre a derivada.

Teorema 6. (BOHNER; PETERSON, 2001b) Admita que $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Então

1. A soma $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

2. Para qualquer constante α , $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t).$$

3. O produto $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(f.g)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t).$$

4. Se $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, então $\frac{1}{f}$ é diferenciável em t com

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5. Se $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em t e

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Teorema 7. (BOHNER; PETERSON, 2001b) Admita que $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e seja $t \in \mathbb{T}^k$. Então, temos:

1. Se f é diferenciável em t , então f é contínua em t .

2. Se f é contínua em t e t é espalhado à direita, então f é diferenciável em t com

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

onde $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

3. Se f é denso à direita, então f é diferenciável em t se, e somente se, o limite

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe como um número finito. Neste caso

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. Se f é diferenciável em t , então

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

A seguir, vamos apresentar um exemplo interessante sobre alguns casos particulares, a partir da escolha de $\mathbb{T}$.

Exemplo 2. Considere os dois casos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Assim, temos;

1. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então **Teorema 7.(3)** garante que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $t \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}, \text{ existe}$$

isto é, se f é diferenciável (no sentido ordinário) em t . Neste caso, temos que

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

2. Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, então o **Teorema 7.(2)** garante que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ é delta diferenciável em $t \in \mathbb{Z}$ com

$$f^\Delta(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

onde Δ é o operador de diferença à direita usual definido pela última equação acima.

A seguir vamos apresentar alguns resultados para a delta derivada. No entanto, não faremos suas respectivas provas, mas podem ser consultadas no trabalho (BOHNER; PETERSON, 2001b).

Teorema 8. (BOHNER; PETERSON, 2001b)(Regra da Cadeia) *Admita que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é delta diferenciável sobre $\mathbb{T}^k$, e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então, existe c no intervalo real $[t, \sigma(t)]$ com*

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c))g^\Delta(t).$$

Outra versão para a regra da cadeia será apresentada no seguinte teorema.

Teorema 9. (BOHNER; PETERSON, 2001b)(Regra da Cadeia) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e suponha $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é delta diferenciável. Então, $f \circ g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é delta diferenciável e a fórmula*

$$(f \circ g)^\Delta(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^\Delta(t))dh \right\} g^\Delta(t)$$

é válida.

Teorema 10. (BOHNER; PETERSON, 2001b)(Teorema do Valor Médio) *Sejam f e g funções reais definidas sobre $\mathbb{T}$, ambas diferenciáveis em D . Então*

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t), \text{ para todo } t \in D$$

implica

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r), \text{ para todo } \tau, s \in \mathbb{T}, r \leq s.$$

Teorema 11. (BOHNER; PETERSON, 2001b)(Fórmula de Leibniz) *Seja $S_k^{(n)}$ o conjunto que consiste em todas as strings possíveis de comprimento n , contendo exatamente k vezes σ e $n - k$ vezes Δ . Se*

$$f^\Delta \text{ existe para todo } \Lambda \in S_k^{(n)}$$

então

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^\Lambda \right) g^{\Delta^k}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Os resultados apresentados acima, são todos no contexto de escalas temporais $\mathbb{T}$. No entanto, podemos escolher $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e obter os clássicos resultados discutidos em $\mathbb{R}$. No Capítulo 4, vamos discutir uma versão de derivada fracionária em escalas temporais que detém de uma ampla classe de possíveis casos particulares.

Antes de iniciar a discussão da integral em escalas temporais, introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 20. (BOHNER; PETERSON, 2001b) *Uma função $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada regularizada desde que seus limites do lado direito existam (finitos) em todos os pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e seus limites do lado esquerdo existam (finitos) em todos os pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$.*

Definição 21. (BOHNER; PETERSON, 2001b) *Uma função $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada rd-contínua desde que seja contínua em pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e seus limites do lado esquerdo existam (finitos) em pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$. O conjunto de funções rd-contínuas f será denotado neste trabalho por*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

O conjunto de funções $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ que são diferenciáveis e cuja derivada é rd-contínua é denotada por

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Agora, vamos apresentar a integral em escalas temporais.

Definição 22. (AGARWAL; BOHNER, 1999; ANASTASSIOU, 2010; BOHNER; PETERSON, 2001b) *Seja $[a, b]$ um intervalo limitado fechado em $\mathbb{T}$. Uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de antiderivada delta da função $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ desde que F seja contínua em $[a, b]$, delta diferenciável em $[a, b)$, e $F^\Delta(t) = f(t)$ para todo $t \in [a, b)$. Então, definimos a integral Δ de f por*

$$\int_a^b f(t) \Delta t := F(b) - F(a).$$

Algumas propriedades sobre a integral em escalas temporais são apresentadas a seguir.

Teorema 12. *Se $a, b, c, \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C_{rd}$, então*

1. $\int_a^b (f(t) + g(t)) \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t;$
2. $\int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t;$

3. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t;$
4. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t;$
5. $\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t;$
6. $\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t;$
7. $\int_a^a \Delta t = 0.$

Demonstração. Veja (BOHNER; PETERSON, 2001b). □

Proposição 3. *Suponha que $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$ e $f(t)$ sejam contínuos em $[a, b]$. Então,*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a) - a]f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t.$$

Demonstração. Veja (BOHNER; PETERSON, 2001b). □

Proposição 4. *Suponha que $\mathbb{T}$ seja uma escala de tempo e f seja uma função contínua crescente em $[a, b]$. Se F é a extensão de f ao intervalo real $[a, b]$ dado por*

$$F(s) := \begin{cases} f(s) & \text{se } s \in \mathbb{T}, \\ f(t) & \text{se } s \in (t, \sigma(t)) \nsubseteq \mathbb{T}, \end{cases}$$

então

$$\int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b F(t)dt.$$

Demonstração. Veja (BOHNER; PETERSON, 2001b). □

Para finalizar, a seção, as definições de transformada de Laplace em escala temporais e sua inversa, são apresentadas.

Definição 23. (MEKHALFI; TORRES, 2017) *Para $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, a escala temporal ou transformada generalizada de f , denotado por ${}^{\mathbb{T}}\mathcal{L}[f]$ ou $F(z)$, é dada por*

$${}^{\mathbb{T}}\mathcal{L}[f](z) = F(z) := \int_0^\infty f(t)\zeta^\sigma(t)\Delta t,$$

onde $\zeta(t) = e_{\theta z}(t, 0)$ ($\zeta^\sigma(t) = e_{\theta z}(\sigma(t))$), isto é,

$${}^{\mathbb{T}}\mathcal{L}[f](z) = F(z) := \int_0^\infty f(t)e_{\theta z}(\sigma(t))\Delta t.$$

Teorema 13. (MEKHALFI; TORRES, 2017)(Inversão da transformada) *Suponha que $F(z)$ seja analítica na região $Re_\mu(z) > Re_\mu(c)$ e $F(z) \rightarrow 0$ como $|z| \rightarrow \infty$ nesta região. Além disso, suponha que $F(z)$ tem um número finito de polos regressivos de ordem finita $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ e $\tilde{F}_\mathbb{R}(z)$ é a transformada da função $\tilde{f}(t)$ em $\mathbb{R}$ que corresponde à transformada $F(z) = F_\mathbb{T}(z)$ de $f(t)$ em $\mathbb{T}$. Se*

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |\tilde{F}_\mathbb{R}(z)| |dz| < \infty,$$

então

$$f(t) = \sum_{i=1}^n Res_{z=z_i} e_z(t, 0) F(z)$$

tem transformada $F(z)$ para todo z com $Re(z) > c$.

O mesmo comentário realizado para a derivada em escala temporal quando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, também é válido para a integral. Isto é, se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $t \in \mathbb{R}$ se, e somente se, f é integrável (no sentido ordinário) em t .

2 Cálculo ζ -Fracionário

A motivação para escrever este capítulo, vem da derivada fracionária ζ -Hilfer de ordem $n - 1 < \alpha < n$ e tipo $0 \leq \beta \leq 1$, introduzida em 2018 por Sousa e Oliveira (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a). O objetivo é apresentar de forma sucinta uma breve introdução aos operadores fracionários que envolvem a função implícita denominada ζ . Além disso, a partir da escolha da função ζ e dos parâmetros, como α e β , é possível obter uma ampla classe de operadores fracionários (integrais e derivadas) já existentes na literatura. Geralmente, as particulares escolhas, são de funções conhecidas como $\zeta(t) = t$, $\zeta(t) = t^\rho$ com $\rho > 0$ e $\zeta(t) = \ln(t)$. No entanto, é possível formular novas versões de operadores fracionários e discutir as propriedades de tais operadores e verificar se são importantes ou não para seus objetivos. Por exemplo, quando queremos discutir problemas de difusão envolvendo a variável temporal, a derivada fracionária que melhor se encaixa, é a de Caputo, dado que a derivada fracionária de Caputo de uma função constante é zero e as condições iniciais envolvendo a equação diferencial fracionária são usuais e, quando queremos trabalhar na variável espacial, a derivada fracionária de Riesz é a melhor devido suas propriedades relacionadas à transformada de Fourier. As demais são tanto importantes quantos essas mencionadas. Outro exemplo, é a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov, uma vez que é a melhor indicada para trabalhar com problemas numéricos, pois sua formulação foi introduzida a partir de uma série, permitindo uma aproximação numérica da derivada onde o truncamento é obtido rapidamente. Cada derivada fracionária tem sua peculiaridade e importância. Nesse sentido, apresentaremos algumas propriedades, exemplos e aplicações, a fim de elucidar as definições apresentadas.

2.1 Integral Fracionária ζ -Riemann-Liouville

Nesta seção, estamos interessados em apresentar o conceito de integral fracionária ζ -Riemann-Liouville e alguns resultados interessando oriundos do cálculo fracionário. Além do anterior, a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville é calculada, em particular, alguns resultados que envolvem as funções de Mittag-Leffler e de Wright e exemplos de função potência são abordados.

Primeiramente, vamos apresentar a definição da integral fracionária ζ -Riemann-Liouville.

Definição 24. (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) *Seja (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ um intervalo finito ou infinito da reta real, $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $f \in L^1((a, b), \mathbb{R})$. Sejam $\zeta(t)$ uma função crescente e monótona positiva sobre $(a, b]$, com a derivada contínua $\zeta'(t)$ sobre (a, b) . A integral fracionária à esquerda de uma função f , de ordem α , com respeito a*

outra função ζ sobre $[a, b]$ é dada por

$$I_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \zeta'(\tau) (\zeta(t) - \zeta(\tau))^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

A integral fracionária ζ -Riemann-Liouville à direita define-se de modo análogo.

Note que a partir da escolha de $\zeta(t) = t$ na Eq.(2.1), temos a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Definição 25. (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) *Sejam $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) um intervalo finito sobre o eixo real $\mathbb{R}$ e $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. A integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α , com $\alpha > 0$, é definida por*

$${}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a. \quad (2.2)$$

Escolhendo a função $\zeta(t) = t$ e $a = -\infty$, substituindo na Eq.(2.1), obtemos a integral fracionária de Liouville, dada por

$${}_LI_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Tomando $\zeta(t) = t$ e $a = \xi$ na Eq.(2.1), obtemos a integral fracionária de Riemann, dada por

$${}_RI_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > \xi.$$

Por outro lado, para $\zeta(t) = \ln t$ na Eq.(2.1), temos a integral fracionária de Hadamard, dada por

$${}^HI_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{1}{\tau} \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Agora, escolhendo $a = 0$ na Eq.(2.2), temos

$$I^{\alpha} f(t) = {}^{RL}I_{0+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Existem outras formulações de integrais fracionárias que podem ser consultados nos trabalhos (ERDÉLYI, 1975; KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; OLIVEIRA; MACHADO, 2014). Tais formulações de integrais fracionárias, são casos particulares da integral fracionária ζ -Riemann-Liouville, e para uma leitura mais detalhada, sugerimos as seguintes referências (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; SOUSA; OLIVEIRA, 2018a).

2.1.1 Teoremas e Propriedades

Considere a seguinte função, fundamental para a propriedade de semigrupo,

$$\Phi_{\alpha;\zeta}(t) = \begin{cases} \frac{\zeta(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

onde $\zeta(\cdot)$ é um função crescente e monótona positiva. Em particular, para $\zeta(t) = t$ na Eq.(2.4), obtemos a função de Gel'fand-Shilov (OLIVEIRA, 2014).

Utilizando convolução de funções (DEBNATH; BHATTA, 2014) e a Eq.(2.4), temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha;\zeta}(t) * g(t) &= \int_0^t g(t-\tau) \Phi_{\alpha}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\zeta(t) - \zeta(\tau))^{\alpha-1} g(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tomando $g(t) = \zeta'(t)f(t)$ na Eq.(2.5), segue que

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha;\zeta}(t) * (\zeta'(t)f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta'(\tau) (\zeta(t) - \zeta(\tau))^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= I_{0+}^{\alpha;\zeta} f(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por outro lado, para $\zeta(t) = t$ na Eq.(2.6), obtemos a seguinte convolução e consequentemente, a integral fracionária de Riemann-Liouville

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}(t) * (f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= I_{0+}^{\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Propriedade 1. (Linearidade) *Sejam $f, g \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ tais que existam as integrais fracionárias $I_{a+}^{\alpha;\zeta} f(\cdot)$ e $I_{a+}^{\alpha;\zeta} g(\cdot)$ com $\alpha > 0$. Se $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ com $\beta > 0, \gamma > 0$, então*

$$I_{a+}^{\alpha;\zeta} (\beta f(t) + \lambda g(t)) = \beta I_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) + \lambda I_{a+}^{\alpha;\zeta} g(t). \quad (2.7)$$

Demonstração. Veja (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). $\square$

Propriedade 2. (Semigrupo) *Sejam $I_{a+}^{\alpha;\zeta} f(\cdot), I_{a+}^{\beta;\zeta} f(\cdot)$ integrais fracionárias ζ -Riemann-Liouville de ordem α e β , respectivamente, com $\alpha > 0, \beta > 0$, então*

$$I_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) I_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) = I_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) I_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) = I_{a+}^{\beta+\alpha;\zeta} f(t). \quad (2.8)$$

Demonstração. Veja (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). $\square$

Teorema 14. *Seja $f(t) \in L^1((a, \infty), \mathbb{R})$ e $\zeta(t)$ uma função crescente e monótona positiva tal que exista o operador $I_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t)$ com $\alpha > 0$ e $t > a$, então*

$$I_{a+}^{\alpha;\zeta} [\zeta(t)f(t)] = \zeta(t) I_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) - \alpha I_{a+}^{\alpha+1;\zeta} f(t).$$

Demonstração. Veja (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). $\square$

Teorema 15. *Seja $f \in L^1((0, \infty), \mathbb{R})$ tal que exista a integral fracionária $I_{0+}^\alpha f(\cdot)$ com $\alpha > 0$, então*

$$\mathcal{L}[I_{0+}^\alpha f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha},$$

onde $s > 0$ e $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$.

Demonstração. Veja (TEODORO, 2014). $\square$

Teorema 16. *Suponha $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Então usando a representação em série e a integral fracionária de Riemann-Liouville, temos*

$$I_{0+}^\alpha t^{\gamma-1} \mathbb{E}_{\beta, \gamma}(bt^\beta) = t^{\alpha+\gamma-1} \mathbb{E}_{\beta, \alpha+\gamma}(bt^\beta), \quad (2.9)$$

onde $\mathbb{E}_{p,q}(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Em particular, se $b \neq 0$ e $\alpha = \beta$, temos

$$I_{0+}^\alpha t^{\gamma-1} \mathbb{E}_{\alpha, \gamma}(bt^\alpha) = \frac{t^{\gamma-1}}{b} \left(\mathbb{E}_{\alpha, \gamma}(bt^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \right).$$

Demonstração. Veja (OLIVEIRA, 2014; GORENFLO et al., 2014). $\square$

Teorema 17. *Suponha $\beta > -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Então, usando a representação em série e a integral fracionária de Riemann-Liouville, temos*

$$I_{0+}^\alpha t^{\gamma-1} \mathbb{W}_{\beta, \gamma}(bt^\beta) = t^{\alpha+\gamma-1} \mathbb{W}_{\beta, \alpha+\gamma}(bt^\beta),$$

onde $\mathbb{W}_{p,q}(\cdot)$ é a função de Wright.

Demonstração. Veja (GORENFLO et al., 2014). $\square$

2.1.2 Caso particular: Potência

Sejam $\alpha > 0$ e $\delta > 0$. Se $f(x) = (\zeta(x) - \zeta(a))^{\delta-1}$, então

$$I_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha + \delta)} (\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha+\delta-1}.$$

Alguns casos particulares.

1. Tomando $\zeta(t) = t$, temos

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha + \delta)} t^{\alpha+\delta-1}.$$

2. Para $\zeta(t) = \ln t$, temos

$$I_{1+}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha + \delta)} (\ln t)^{\alpha + \delta - 1}.$$

3. Escolhendo $\delta = 1$, temos

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Observação 2. Na literatura existem inúmeras definições de integrais fracionárias que foram introduzidas ao longo desses últimos anos, em particular, diversas propriedades foram apresentadas conforme destacadas nos trabalhos. A integral fracionária ζ -Riemann-Liouville conforme apresentada nessa subseção, ela admite uma ampla classe de casos particulares, a partir da escolha da função ζ . Além disso, todas as propriedades dos seus respectivos casos particulares, também são válidas. Para maiores detalhes, veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a).

Teorema 18. Seja $\alpha \in (0, 1)$. A integração por partes para a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville é dada por

$$\int_a^b (I_a^{\alpha; \zeta} \varphi(t)) \phi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) \zeta'(t) I_b^{\alpha; \zeta} \left(\frac{\phi(t)}{\zeta'(t)} \right) dt,$$

onde $\zeta'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$.

Por fim, apresentaremos dois resultados de suma importância na discussão da regra de Leibniz generalizada.

Lema 2. Seja $(a, b]$ com $-\infty \leq a < b \leq \infty$ sendo um intervalo em $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $\zeta(t)$ uma função não-decrescente positiva em Λ , cuja derivada é contínua em (a, b) . Então,

$$I_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} f^{(n)}(t) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \quad (2.10)$$

onde $f^{(n)}$ é a n -ésima derivada de ordem inteira e $t > a$.

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2019). □

Lema 3. Seja $(a, b]$ com $-\infty \leq a < b \leq \infty$ sendo um intervalo em $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $\zeta(t)$ uma função não-decrescente e positiva em Λ , cuja derivada é contínua em (a, b) . A integral fracionária do produto de duas funções é dada por

$$I_{a+}^{\alpha; \zeta} (fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} f^{(k)}(t) I_{a+}^{\alpha+k; \zeta} g(t).$$

onde $f^{(k)}$ é a k -ésima derivada de ordem inteira e $t > a$.

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2019). □

2.2 Derivada Fracionária ζ -Hilfer

O objetivo desta seção, é realizar um estudo sobre a derivada fracionária ζ -Hilfer e propriedades (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a). Nesse sentido, abordaremos alguns casos particulares e discussões envolvendo a derivada fracionária de Caputo, em particular, sobre o cálculo das funções de Mittag-Leffler e Wright. Por fim, apresentamos outros resultados envolvendo a derivada fracionária ζ -Hilfer e alguns exemplos, bem como discussões pertinentes dos resultados estudados.

Conforme discutiremos no Capítulo 3, a derivada fracionária ζ -Hilfer, serviu como motivação para a elaboração de outro operador fracionário em outro contexto. Então, para tais fins, vamos primeiramente apresentar sua respectiva definição.

Definição 26. (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a) *Seja $n - 1 < \alpha < n$ com $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ um intervalo tal que $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $f, \zeta \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ duas funções tais que ζ é crescente e $\zeta'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. A derivada fracionária ζ -Hilfer à esquerda ${}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta}(\cdot)$ de ordem α e tipo $0 \leq \beta \leq 1$, é definida por*

$${}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(t) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha); \zeta} \left(\frac{1}{\zeta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha); \zeta} f(t). \quad (2.11)$$

Como podemos notar, no Capítulo 1 não apresentamos os espaços ponderados envolvendo a derivada fracionária ζ -Hilfer, uma vez que ainda não tínhamos definido. Nesse sentido, a fim de tornar consistente e bem estruturado o trabalho, apresentaremos tais definições.

Definição 27. (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a) *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$. O espaço ponderado $C_{\gamma; \zeta}^{\alpha, \beta}([a, b], \mathbb{R})$ é definido por*

$$C_{\gamma; \zeta}^{\alpha, \beta}[a, b] = \left\{ f \in C_{\gamma; \zeta}[a, b] : {}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f \in C_{\gamma; \zeta}[a, b] \right\},$$

com $\gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha)$.

Definição 28. *Seja $0 \leq \gamma < 1$. O espaço ponderado $C_{\gamma; \zeta}^{1-\gamma}[a, b]$ é definido por*

$$C_{\gamma; \zeta}^{1-\gamma}[a, b] = \left\{ f \in C_{\gamma; \zeta}[a, b] : {}^H\mathfrak{D}_{a+}^{1-\gamma; \zeta} f \in C_{\gamma; \zeta}[a, b] \right\},$$

com $\gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha)$.

Note que, das Eq.(27) e Eq.(28) concluímos que $C_{\gamma; \zeta}^{1-\gamma}[a, b] \subset C_{\gamma; \zeta}^{\alpha, \beta}[a, b]$ (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a).

A derivada fracionária ζ -Hilfer Eq.(2.11), pode ser escrita da seguinte forma

$${}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(t) = I_{a+}^{\gamma-\alpha; \zeta} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma; \zeta} f(t) \quad (2.12)$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$, $I_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta}(\cdot)$ dado pela Eq.(2.1) e $\mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\zeta}(\cdot)$ a derivada fracionária ζ -Riemann-Liouville. A definição da derivada fracionária ζ -Hilfer à direita, define-se de modo análogo.

Note que, tomando o limite $\alpha \rightarrow n^-$, $n \in \mathbb{N}$, em ambos os lados da Eq.(2.11), obtemos

$$D^n f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^H \mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\beta;\zeta} f(t),$$

isto é, a n -ésima derivada.

Alguns casos particulares serão apresentados, a partir da derivada fracionária ψ -Hilfer (ALMEIDA, 2017; KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; SOUSA; OLIVEIRA, 2018a).

- A derivada fracionária ζ -Riemann-Liouville, segue do limite $\beta \rightarrow 0$, em ambos os lados da Eq.(2.11) e é escrita como

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) = \left(\frac{1}{\zeta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha;\zeta} f(t), \quad (2.13)$$

onde $I_{a+}^{n-\alpha;\zeta}(\cdot)$ é dada pela Eq.(2.1) (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

- A derivada fracionária ζ -Caputo, segue do limite $\beta \rightarrow 1$ na Eq.(2.11) e é escrita como

$${}^C D_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) = I_{a+}^{n-\alpha;\zeta} \left(\frac{1}{\zeta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n f(t), \quad (2.14)$$

onde $I_{a+}^{n-\alpha;\zeta}(\cdot)$ é dada pela Eq.(2.1) (ALMEIDA, 2017).

- A derivada fracionária de Riemann-Liouville, segue da escolha de $\zeta(t) = t$ e do limite $\beta \rightarrow 0$ na Eq.(2.11) e é escrita como

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t), \quad (2.15)$$

onde $I_{a+}^{n-\alpha}(\cdot)$ é dada pela Eq.(2.3) (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

- A derivada fracionária de Caputo à esquerda, segue da escolha de $\zeta(t) = t$ e tomando o limite $\beta \rightarrow 1$ na Eq.(2.11), e é escrita como

$${}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = I_{a+}^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \quad (2.16)$$

onde $I_{a+}^{n-\alpha}(\cdot)$ é dada pela Eq.(2.3) (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). Além disso, se $\alpha = 0$, temos $\mathcal{D}_{a+}^0 = I$, onde I é operador identidade.

Para as definições das respectivas derivadas fracionárias à direita, isto é, das Eq.(2.13), Eq.(2.14), Eq.(2.15) e Eq.(2.16), sugerimos as referências (ALMEIDA, 2017; SOUSA; OLIVEIRA, 2018a).

Observação 3. Outra maneira de escrever os operadores fracionários com respeito a função ζ , é através de relações de conjugação, isto é, da seguinte forma

$${}^{RL}_c I_{\zeta(t)}^\alpha = Q_\zeta \circ {}^{RL}_{\zeta(c)} I_t^\alpha \circ Q_\zeta^{-1},$$

$${}^{RL}_c D_{\zeta(t)}^\alpha = Q_\zeta \circ {}^{RL}_{\zeta(c)} D_t^\alpha \circ Q_\zeta^{-1}$$

e

$${}_c D_{\zeta(t)}^\alpha = Q_\zeta \circ {}^C_{\zeta(c)} D_t^\alpha \circ Q_\zeta^{-1}$$

onde Q_ζ é o operador de composição a direita com ζ :

$$Q_\zeta(f) = f \circ \zeta, \text{ ou seja } (Q_\zeta f)(t) = f(\zeta(t)). \quad (2.17)$$

Os operadores fracionários apresentados na **Observação Eq.(3)**, são muito importantes na discussão de propriedades da transformada de Fourier com respeito a função implícita ζ , de modo especial, na formulação do Laplaciano fracionário generalizado.

2.2.1 Teoremas e Propriedades

A seguir alguns resultados para a derivada fracionária ζ -Hilfer à esquerda. Para uma leitura sobre os resultados à direita, veja (ALMEIDA, 2017; OLIVEIRA, 2014; GORENFLO et al., 2014; ISHTEVA, 2005; TEODORO, 2014; SOUSA; OLIVEIRA, 2018a; SOUSA; OLIVEIRA, 2019).

Propriedade 3. (Linearidade) *Sejam $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq 1$ e $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$. Sejam $f, g \in C_{\gamma, \zeta}^n([a, b], \mathbb{R})$ tais que existam ${}^H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(\cdot)$ e ${}^H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} g(\cdot)$. A derivada fracionária ζ -Hilfer é um operador linear, isto é,*

$${}^H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} [\lambda f(t) + \phi g(t)] = \lambda {}^H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(t) + \phi {}^H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} g(t). \quad (2.18)$$

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a). □

Propriedade 4. *Sejam $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta \leq 1$ e $f \in C_{\gamma, \zeta}^n([a, b], \mathbb{R})$, temos*

$${}^H \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} I_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = f(t). \quad (2.19)$$

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a). □

Note que, ao escolher a função $\zeta(t) = \ln t$ e tomando o limite $\beta \rightarrow 0$, em ambos os lados da Eq.(2.19), obtemos a identidade para a derivada fracionária de Hadamard. Por outro lado, escolhendo $\zeta(t) = t$ e tomando o limite $\beta \rightarrow 1$, em ambos os lados da Eq.(2.19), obtemos a identidade para a derivada fracionária de Caputo.

No estudo da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, a lei dos expoentes nem sempre é válida (OLIVEIRA, 2014). Por outro lado, o **Teorema 19** garante a lei dos expoentes para a derivada fracionária de Caputo, com algumas condições convenientes.

Teorema 19. *Se $a < b$ e $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, tal que exista algum $l \in \mathbb{N}$ com $l \leq k$ e $\beta, \beta + \alpha \in [l - 1, l]$. Então, vale*

$${}^C \mathcal{D}_{a+}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{a+}^\beta f(t) = {}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(t).$$

Demonstração. Veja (OLIVEIRA, 2014). □

Corolário 2. *Seja $f \in C_\zeta^{n-1}[a, t)$ tal que $f^{[i]}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ são de ordem ζ -exponencial. Seja $f^{[n]}$ uma função contínua por parte no intervalo $[a, T]$. Então, a transformada de Laplace generalizada de $f^{[n]}(t)$ existe e*

$$\mathcal{L}_\zeta\{f^{[n]}(t)\}(s) = s^n \mathcal{L}_\zeta\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} (f^{[k]})(a). \quad (2.20)$$

Demonstração. Veja (JARAD; ABDELJAWAD, 2020). □

O próximo passo, é apresentar a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo será discutida a seguir.

Teorema 20. *Sejam $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ e a função $f(\cdot)$ tal que exista ${}^C \mathcal{D}_{0+}^\alpha f(\cdot)$. A transformada de Laplace da derivada de Caputo é dada por*

$$\mathcal{L}[{}^C \mathcal{D}_{0+}^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

Demonstração. Veja (OLIVEIRA, 2014). □

A ideia do próximo resultado, é apresentar uma propriedade importante no estudo de equações diferenciais que envolve derivadas fracionárias, nesse caso particular, a derivada fracionária ζ -Hilfer que tem importância na solução de modelos de crescimento populacional (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a; SOUSA; OLIVEIRA, 2019).

Lema 4. *Dado $\lambda > 0$, $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leq \beta \leq 1$. Considere a função $f(t) = \mathbb{E}_\alpha(\lambda(\zeta(t) - \zeta(a))^\alpha)$, onde $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro. Então,*

$${}^H \mathcal{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(t) = \lambda f(t). \quad (2.21)$$

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a). □

Note que, para $\alpha = 1$ na função de Mittag-Leffler de um parâmetro, temos a função exponencial $f(t) = e^{\lambda t}$. Nesse sentido, segue que é solução da Eq.(2.21), no caso clássico.

Para um estudo mais detalhado da derivada fracionária ζ -Hilfer, propriedades, teoremas e generalizações, pode-se encontrar na referência (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a).

A seguir, apresentamos dois exemplos, o primeiro envolvendo a função potência generalizada envolvendo a função $\zeta(t)$ e o segundo sobre o cálculo da função constante. Além do anterior, comentários sobre as diferenças entre as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville, são apresentados. Veja também outros exemplos sobre propriedades de derivadas fracionárias (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

Lema 5. Dado $\delta \in \mathbb{R}$, considere a função $f(t) = (\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-1}$, onde $\delta > n$. Então, para $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leq \beta \leq 1$, temos

$${}^H\mathcal{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)} (\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-\alpha-1}. \quad (2.22)$$

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a). $\square$

Para $\zeta(t) = t$ e no limite $\beta \rightarrow 1$, em ambos os lados da Eq.(2.22), obtemos (TEODORO, 2014)

$${}^C\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta-\alpha)} t^{\delta-\alpha-1}. \quad (2.23)$$

É natural pensar que a derivada de uma constante é zero. No entanto, a partir da introdução do cálculo fracionário, essa afirmação depende do tipo de derivada fracionária. Vide por exemplo, na escolha de $\zeta(t) = t$, $\delta = 1$ e aplicando o limite $\beta \rightarrow 0$, temos

$$\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

ou seja, não é zero

Por outro lado, para $k \in \mathbb{R}$, temos

$${}^C\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} k = 0, \quad \alpha > 0.$$

Neste caso, usando a derivada de Caputo Eq.(2.16), obtemos como resultado zero.

Até o momento, apresentamos a definição da derivada fracionária ζ -Hilfer e algumas propriedades básicas, a saber: linearidade, caso inteiro, identidade e lei dos expoentes.

Mas o que de fato é uma derivada fracionária? Existe algum critério para classificar se um determinado operador é fracionário ou não? Diante do exposto sobre a derivada fracionária ζ -Hilfer, podemos considerar ser um operador fracionário? Em 2015, Tenreiro e Ortigueira (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2015), propuseram o critério para classificar se um operador é considerado fracionário, ou seja:

1. A derivada fracionária é um operador linear;
2. A derivada fracionária de ordem zero de uma função é a própria função, $D^0 f(t) = f(t)$;

3. Quando a ordem é um inteiro, a derivação fracionária deve produzir o mesmo resultado da derivação ordinária;
4. A lei dos expoentes, $D^\alpha D^\beta f(t) = D^{\alpha+\beta} f(t)$, é satisfeita para $\alpha \leq 0$ e $\beta \leq 0$;
5. Vale a generalização da regra de Leibniz,

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^k f(t) D^{\alpha-k} g(t). \quad (2.24)$$

No entanto, existem derivadas que são consideradas fracionárias mas não satisfazem o critério, por exemplo, a de Caputo. Mas é uma das mais importantes. Nesse sentido, em 2019 Sousa e Oliveira (SOUSA; OLIVEIRA, 2019) propuseram a chamada regra de Leibniz tipo I e II que abrange praticamente todas as formulações de derivadas fracionárias. As duas versões da regra de Leibniz tipo I e II, são apresentadas a seguir.

Teorema 21. (Regra de Leibniz tipo I). *Seja $0 < \alpha < 1$, $\Lambda = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) um intervalo, $\zeta \in C(\Lambda, \mathbb{R})$ uma função crescente tal que $\zeta'(t) \neq 0$ para $t \in \Lambda$ e $f, g \in C(\Lambda, \mathbb{R})$. Então, temos*

$$\begin{aligned} {}^{\mathbf{H}}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta}(fg)(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\xi}{m-l} \binom{\alpha-\xi}{l} f^{(n)}(t) {}^{\mathbf{RL}}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-m; \zeta} g(t) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\xi}{k} I_{a+}^{\xi+k; \zeta} g(a) f^{(k)}(a) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\xi-\alpha}}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2019). □

Teorema 22. (Regra de Leibniz tipo II). *Seja $0 < \alpha < 1$, $\Lambda = [a, b]$ um intervalo ($-\infty \leq a < b \leq \infty$), $\zeta \in C(\Lambda, \mathbb{R})$ uma função não-crescente tal que $\zeta'(t) \neq 0$ para $t \in \Lambda$, e $f, g \in C(\Lambda, \mathbb{R})$. Então, temos que*

$${}^{\mathbf{H}}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta}(fg)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} f^{(m)}(t) {}^{\mathbf{H}}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha-m, \beta; \zeta} g(t) + \Omega_{f,g}(\alpha, \beta, a) \quad (2.26)$$

com

$$\Omega_{f,g}(\alpha, \beta, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\xi}{k} I_{a+}^{\xi+k; \zeta} g(a) (f^{(k)}(t) - f^{(k)}(a)) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\xi-\alpha}}{\Gamma(\beta - \alpha\beta)}.$$

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2019). □

Teorema 23. *Seja $\zeta(\cdot)$ uma função monótona crescente e positiva sobre o intervalo $I = [a, b]$ e com derivada contínua $\zeta'(\cdot) \neq 0$ sobre (a, b) . Se $0 < \alpha < 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$, então*

$$\int_a^b {}^H \mathfrak{D}_a^{\alpha, \beta; \zeta} \varphi(t) \phi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) \zeta'(t) {}^H \mathfrak{D}_T^{\alpha, \beta; \zeta} \left(\frac{\phi(t)}{\zeta'(t)} \right) dt \quad (2.27)$$

para qualquer $\varphi \in C^1$ e $\phi \in C^1$ satisfazendo as condições de contorno $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$.

Demonstração. Veja (SOUSA; LIMA; TAVARES, 2023). $\square$

2.3 ζ -Riemann-Liouville $\times$ ζ -Caputo $\times$ ζ -Hilfer

Vamos aqui, apresentar algumas relações de algumas derivadas fracionárias com respeito a função ζ e, conseqüentemente, alguns casos particulares.

Note que,

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = \left(\frac{1}{\zeta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha; \zeta} f(t) \neq I_{a+}^{n-\alpha; \zeta} \left(\frac{1}{\zeta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n f(t) = {}^C D_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t). \quad (2.28)$$

Para $\zeta(t) = t$ e tomando o limite $\beta \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 1$, nos lados direito e esquerdo da Eq.(2.28), nesse sentido, temos

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha; \zeta} f(t) \neq I_{a+}^{n-\alpha; \zeta} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = {}^C D_{a+}^{\alpha} f(t).$$

Agora, tomando $f(t) = t^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$ e $t > 0$, segue que $I_{0+}^{\alpha} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} t^{\alpha-1} = 0$ e $\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} t^{\alpha-1} = t^{\alpha-1}$.

O **Teorema 24**, é uma relação entre as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville, no caso particular $\zeta(t) = t$. É possível obter outras relações a partir da escolha da função $\zeta(t)$.

Teorema 24. *Se $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ e $\alpha > 0$, então*

$${}^C D_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha; \zeta} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\zeta(t) - \zeta(a))^k f_{\zeta}^{[k]}(a) \right],$$

$$\text{com } f_{\zeta}^{[k]} := \left(\frac{1}{\zeta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^k.$$

Demonstração. Veja (ALMEIDA, 2017). $\square$

Uma relação interessante motivada pelo **Teorema 24**, é dada por (OLIVEIRA, 2014)

$$\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(t) = {}^C \mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0). \quad (2.29)$$

A derivada fracionária ζ -Hilfer Eq.(2.11) com a seguinte função $g(t) = I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\zeta} f(t)$, pode ser escrita da seguinte forma

$${}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) = I_{a+}^{n-\mu;\zeta} \left(\frac{1}{\zeta'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n g(t),$$

com $\mu = n(1 - \beta) + \beta\alpha$. Também, temos a opção de escrever em termo da derivada fracionária ζ -Caputo, isto é,

$$\begin{aligned} {}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) &= {}^C D_{a+}^{\mu;\zeta} g(t) \\ &= {}^C D_{a+}^{\mu;\zeta} \left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\zeta} f(t) \right], \end{aligned} \quad (2.30)$$

com $\mu = n(1 - \beta) + \beta\alpha$.

Por fim, para finalizar o capítulo, uma relação entre as derivadas fracionárias, ζ -Hilfer e ζ -Riemann-Liouville.

Teorema 25. *Seja $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \beta \leq 1$. Se $f \in C_{\gamma,\zeta}^n([a, b], \mathbb{R})$, então*

$${}^H\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) = \mathcal{D}_{a+}^{n-\beta(n-\alpha);\zeta} \left[I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\zeta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^k}{k!} \mathcal{D}_{a+,k}^{\gamma;\zeta} f(a) \right]$$

$$\gamma = \alpha + \beta(k - \alpha).$$

Demonstração. Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018a). □

3 Derivada Fracionária ζ -Hilfer em Escalas Temporais

A teoria de operadores fracionários é, de fato, de suma importância e de grande relevância para as diversas áreas do conhecimento. Ao longo dos últimos anos, propor novos operadores fracionários, muitas vezes motivados por problemas físicos ou não, tem sido alvo de estudo e tem chamado atenção, não somente pelo seu efeito de memória, por possibilitar generalizações de operadores, mas por descrever melhor fenômenos reais em suas análises. No entanto, ao propor um novo operador fracionário, é essencial que sua definição seja bem fundamentada e respaldada por propriedades básicas. Além disso, é importante que ele seja acompanhado de aplicações que elucidem sua importância. Partindo de uma equação dinâmica linear, Bastos et al. ([BASTOS; TORRES, 2011](#)) introduziram a noção de derivada de ordem fracionária em escalas temporais, envolvendo resultados análogos discutidos para operadores de Riemann-Liouville em escalas temporais ([BASTOS, 2012](#); [BASTOS; FERREIRA; TORRES, 2010](#); [BASTOS; FERREIRA; TORRES, 2011](#)). Nesse contexto, após esse trabalho pioneiro, o estudo do cálculo fracionário em escalas temporais tornou-se um tema de pesquisa popular. Para mais detalhes consulte ([BAYOUR; TORRES, 2016](#); [BENKHETTOU; CRUZ; TORRES, 2016b](#); [BENKHETTOU; CRUZ; TORRES, 2015](#); [NWAEZE; TORRES, 2017](#)) e suas referências.

Por outro lado, quando o assunto é aplicação real, mencionamos o estudo de canais iônicos de cálcio que são retardados com injeção de quelante de cálcio Ácido Etilenoglicol Tetra-acético ([GAO, 2013](#)). Na verdade, inúmeras aplicações físicas de problemas de valor inicial fracionário em diferentes escalas temporais ([SUN; ABDELJAWAD; ALZABUT, 2013](#)). Por exemplo, equações diferenciais fracionárias que governam o comportamento de materiais viscoelásticos com memória e o fenômeno de fluência foram propostas em ([CHIDOUH et al., 2017](#)) para a escala temporal contínua $\mathbb{T} = \mathbb{R}$; equações de diferenças fracionárias em temporais discretas $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, com $h > 0$, ou $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}}$, com relevância na descrição de diversos fenômenos físicos, são estudadas em ([ABDELJAWAD; BALEANU, 2011](#); [MOHAN, 2014](#)). Existem inúmeras aplicações envolvendo problemas de derivadas fracionárias em escalas temporais. No entanto, não é tarefa simples e fácil, saber qual melhor derivada fracionária em escala temporal para utilizar na formulação de um problema físico. Nesse sentido, em 2023, Sousa et al. ([SOUSA et al., 2023](#)) motivados pela derivada fracionária ζ -Hilfer e pela derivada em escalas temporais, unificaram as duas áreas, propuseram uma nova derivada e estenderam alguns resultados. Neste capítulo, dedicamos a discutir cuidadosamente a formulação do operador fracionário ζ -Hilfer em escalas temporais e algumas propriedades de suma importância para a continuação deste

trabalho.

Antes de apresentar a definição de derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais, precisamos apresentar o conceito de integral fracionária ζ -Riemann-Liouville introduzida por Mekhali e Torres em (MEKHALFI; TORRES, 2017).

Definição 29. (MEKHALFI; TORRES, 2017) *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{T}$ e f uma função integrável em $[a, b]$. Além disso, seja ζ uma função monótona crescente tendo uma derivada delta ζ^Δ com $\zeta^\Delta(t) \neq 0$ para qualquer $t \in [a, b]$ com $0 < \alpha < 1$. Então, a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville em escala temporal de ordem α da função f em relação a ζ é definida por*

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\delta, \zeta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s) \Delta s. \quad (3.1)$$

A primeira observação a ser feita em relação a Eq.(3.1), é que ao tomar $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, obtemos a definição da integral fracionária ζ -Riemann-Liouville (Veja **Definição 24**).

Definição 30. (SOUSA et al., 2023) *Seja $n - 1 < \alpha < n$ com $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $\mathbb{T}$ seja uma escala temporal, $[a, b]$ um intervalo de $\mathbb{T}$ e $f, \zeta \in C^n([a, b])$ sejam duas funções tais que ζ é uma função monótona crescente tendo uma derivada delta ζ^Δ com $\zeta^\Delta(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. A derivada fracionária ζ -Hilfer em escala temporal de ordem α e tipo $0 \leq \beta \leq 1$ é dada por*

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(t) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\beta(n-\alpha); \zeta} \left(\frac{\Delta}{\zeta^\Delta(t)} \right)^{(n)} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma; \zeta} f(t) \quad (3.2)$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$.

Observação 4. Tomando o limite $\beta \rightarrow 0$ em ambos os lados da Eq.(3.2), obtemos a derivada fracionária ζ -Riemann-Liouville em escala temporal dada por

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = \left(\frac{\Delta}{\zeta^\Delta(t)} \right)^{(n)} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha; \zeta} f(t). \quad (3.3)$$

Observação 5. Tomando o limite $\beta \rightarrow 1$ em ambos os lados da Eq.(3.2), temos a derivada fracionária ζ -Caputo em escala temporal dada por

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\alpha; \zeta} \left(\frac{\Delta}{\zeta^\Delta(t)} \right)^{(n)} f(t). \quad (3.4)$$

Observação 6. Note que Eq.(3.2) pode ser escrito como

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(t) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha; \zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\gamma; \zeta} f(t)$$

e

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha, \beta; \zeta} f(t) = {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\mu; \zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma; \zeta} f(t)$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$ e $\mu = n(1 - \beta) + \beta\alpha$, onde ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha; \zeta}(\cdot)$ e ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\gamma; \zeta}(\cdot)$ são definidas por Eq.(3.1) e Eq.(3.3), respectivamente.

Observação 7. Com escolhas particulares de ζ obtemos uma ampla classe de derivadas fracionárias em escalas temporais. Por exemplo, consideremos a derivada fracionária ζ -Hilfer em escala temporal e função $\kappa(t) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\zeta} f(t)$. Neste caso, temos

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\mu;\zeta} \left(\frac{\Delta}{\zeta^{\Delta}(t)} \right)^{(n)} \kappa(t)$$

com $\mu = n(1 - \beta) + \beta\alpha$.

Observação 8. Escolhendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos uma ampla classe de casos particulares como já discutido para a derivada fracionária ζ -Hilfer. Além disso, um caso clássico, é dado quando $\alpha = 1$ e $\zeta(t) = t$, obtemos a derivada clássica.

Antes de passar para o estudo de algumas propriedades básicas, vale ressaltar que o estudo de operadores fracionários em escalas temporais, perdem algumas propriedades conforme vamos destacar a seguir. Tais propriedades, dependendo do tipo de problema que estamos interessados em discutir, é necessário impor alguma condição.

Proposição 5. Para qualquer funções integráveis f, g em $[a, b]$, a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville em escalas temporais satisfaz

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} ({}^{\mathbb{T}}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t))) = \lambda_1 {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) + \lambda_2 {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} g(t)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

A partir da escolha da função $\zeta(\cdot)$, temos que a **Proposição 5**, é válida para todos seus respectivos casos particulares.

O próximo resultado é sobre a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville que não satisfaz a soma de potência.

Proposição 6. Para qualquer função integrável f em $[a, b]$, a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville em escalas temporais satisfaz

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) \geqslant {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha+\beta;\zeta} f(t)$$

para qualquer $\alpha, \beta > 0$.

Demonstração. Usando Eq.(3.1) da **Definição 29**, temos

$$\begin{aligned} & {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \left({}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} h(s) \right) \Delta s \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s \zeta^{\Delta}(\tau) (\zeta(s) - g(\tau))^{\beta-1} f(\tau) \Delta \tau \right) \Delta s \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \zeta^{\Delta}(\tau) (\zeta(s) - g(\tau))^{\beta-1} f(\tau) \Delta \tau \Delta s. \end{aligned}$$

Agora, trocamos a ordem de integração do teorema de Fubini para obter

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\int_\tau^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \zeta^\Delta(\tau) (\zeta(s) - g(\tau))^{\beta-1} \Delta s \right) f(\tau) \Delta \tau. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r = \frac{\zeta(s) - g(\tau)}{\zeta(t) - g(\tau)}$, $r \in \mathbb{R}$, temos

$\Delta r = \frac{\zeta^\Delta(s)}{\zeta(t) - \zeta(\tau)} \Delta s$; quando $s \rightarrow \tau$ temos $r \rightarrow 0$; e quando $s \rightarrow t$ temos $r \rightarrow 1$. Então,

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_\tau^t \zeta^\Delta(s) \left(1 - \frac{\zeta(s) - g(\tau)}{\zeta(t) - g(\tau)} \right)^{\alpha-1} \zeta^\alpha(t, \tau) \Delta s \right] f(\tau) \Delta \tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} \zeta^\alpha(t, \tau) \Delta r \right] f(\tau) \Delta \tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} \Delta r \int_a^t (\zeta(t) - g(\tau))^{\alpha+\beta-1} \zeta^\Delta(\tau) f(\tau) \Delta \tau \\ &= \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (\zeta(t) - g(\tau))^{\alpha+\beta-1} \zeta^\Delta(\tau) f(\tau) \Delta \tau \\ &\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (\zeta(t) - g(\tau))^{\alpha+\beta-1} \zeta^\Delta(\tau) f(\tau) \Delta \tau, \end{aligned}$$

onde $\zeta^\alpha(t, \tau) := (\zeta(t) - g(\tau))^{\alpha-1} \zeta^\Delta(\tau) (\zeta(s) - g(\tau))^{\beta-1}$ e

$\zeta^\beta(t, \tau) := (\zeta(t) - g(\tau))^{\alpha-1} \zeta^\Delta(\tau) (\zeta(t) - g(\tau)) r^{\beta-1} (\zeta(t) - g(\tau))^{\beta-1}$.

A prova está completa. $\square$

Como acabamos de provar, o operador integral fracionário em escalas temporais não satisfaz a soma de potência. Nesse sentido, a pergunta natural que surge é a seguinte: será se existe uma função peso $g^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta)^{\mathbb{T}}$ que o torna possível essa igualdade, isto é, $\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) = g^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta)^{\mathbb{T}} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha+\beta;\zeta} f(t)$? A resposta, é dada pela seguinte observação.

Observação 9. *Assumindo a primeira parte da prova do Teorema 6, temos*

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) &= \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (\zeta(t) - g(\tau))^{\alpha+\beta-1} \zeta^\Delta(\tau) f(\tau) \Delta \tau \\ &= \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (\zeta(t) - g(\tau))^{\alpha+\beta-1} \zeta^\Delta(\tau) f(\tau) \Delta \tau \\ &= g^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta)^{\mathbb{T}} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha+\beta;\zeta} f(t), \end{aligned}$$

onde $B(\alpha, \beta)$ é a função Beta clássica e $g^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta) := \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}$.

Como consequência da **Observação 9**, tomando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos $\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} \mathbb{I}_{a+}^{\beta;\zeta} f(t) = \mathbb{I}_{a+}^{\alpha+\beta;\zeta} f(t)$.

Lema 6. *Seja $n - 1 \leq \gamma < n$ e $t \in C_\gamma[a, b]$. Então, $\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(a) = \lim_{t \rightarrow a+} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = 0$, $n - 1 \leq \gamma < \alpha$.*

Demonstração. Primeiro, temos que $\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) \in C_\gamma[a, b]$ é limitado. Desde que $f \in C_\gamma[a, b]$, então $(\zeta(x) - \zeta(a))^\gamma f(t)$ é contínua sobre $[a, b]$ e então

$$\left| (\zeta(t) - \zeta(a))^\gamma f(t) \right| < M \quad \Rightarrow \quad |f(t)| < \left| (\zeta(t) - \zeta(a))^{-\gamma} \right| M, \quad (3.5)$$

$t \in [a, b]$, para alguma constante positiva M . Tomando $\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta}(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(3.5), temos

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) \right| &< \left| \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} (\zeta(t) - \zeta(a))^{-\gamma} \right| M \\ &= M \frac{\Gamma(n - \gamma)}{\Gamma(\alpha + n - \gamma)} (\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha - \gamma}. \end{aligned}$$

Como $\gamma < \alpha$, o lado direito tende para 0 assim como t tende para $a+$. Portanto, tem-se

$$\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(a) = \lim_{t \rightarrow a+} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(t) = 0$$

e o resultado está provado. $\square$

Teorema 26. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e ζ monótonos com uma derivada delta ζ^Δ com $\zeta^\Delta(x) \neq 0$ para todos $x \in [a, b]$. A integral fracionária ζ -Riemann-Liouville em escalas temporais é um operador limitado dado por*

$$\left\| \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f \right\|_{C_{\gamma, \zeta}} \leq L \|f\|_{C_{\gamma, \zeta}}$$

$$\text{com } L = \frac{(\zeta(b) - \zeta(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Demonstração. Usando Eq.(3.1) da **Definição 29** e **Proposição 4**, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f \right\|_{C_{\gamma, \zeta}} &= \max_{x \in [a, b]} \left| (\zeta(x) - \zeta(a))^\gamma \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} f(x) \right| \\ &= \max_{x \in [a, b]} \left| (\zeta(x) - \zeta(a))^\gamma \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s) \Delta s \right| \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} |(\zeta(x) - \zeta(a))^\gamma f(x)| \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \right| \\ &= \|f\|_{C_{\gamma, \zeta}} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \right| \\ &\leq \frac{\|f\|_{C_{\gamma, \zeta}} (\zeta(b) - \zeta(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha) \alpha} \\ &= \frac{(\zeta(b) - \zeta(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f\|_{C_{\gamma, \zeta}} \\ &= L \|f\|_{C_{\gamma, \zeta}}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } L = \frac{(\zeta(b) - \zeta(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

$\square$

A seguir vamos apresentar a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville em escalas temporais em termos de somatório, a fim de discutir a integral fracionária do produto de duas funções.

Lema 7. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala de tempo, $(a, b]$ com $-\infty \leq a < b \leq \infty$ um intervalo em $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$, e $\zeta(x)$ seja uma função monótona crescente e positiva no sentido Δ cuja derivada é contínua em $(a, b]$. Então,*

$$\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} f^{\Delta(n)}(x) \frac{(\zeta(x) - \zeta(a))^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \quad (3.6)$$

onde $f^{\Delta(n)}(\cdot)$ é a n -ésima derivada em escalas temporais $\mathbb{T}$ e $x > a$.

Demonstração. Vamos considerar f da seguinte forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\Delta(n)}(x)}{n!} (\zeta(t) - \zeta(x))^n. \quad (3.7)$$

Tomando $\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta}(\cdot)$ em ambos os lados de Eq.(3.7), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \zeta^{\Delta}(t) (\zeta(x) - \zeta(t))^{\alpha-1} f(t) \Delta t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \zeta^{\Delta}(t) (\zeta(x) - \zeta(t))^{\alpha-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\Delta(n)}(x)}{n!} (\zeta(t) - \zeta(x))^n \right) \Delta t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\Delta(n)}(x)}{n!} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \zeta^{\Delta}(t) (\zeta(x) - \zeta(t))^{\alpha+n-1} \Delta t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\Delta(n)}(x)}{n!} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\zeta(x) - \zeta(a))^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \Gamma(\alpha + n). \end{aligned}$$

Levando em conta a identidade

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n \alpha \Gamma(n - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(n + 1)},$$

temos

$$\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1} (-\alpha) \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(n + 1)} = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n + 1)}.$$

Concluimos que

$$\mathbb{T}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} f^{\Delta(n)}(x) \frac{(\zeta(x) - \zeta(a))^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha + n + 1)}$$

e a prova está completa. $\square$

Agora, apresentamos a regra de Leibniz associada à integral fracionária ζ -Riemann-Liouville em escalas temporais.

Teorema 27. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala de tempo, $(a, b]$ com $-\infty \leq a < b \leq \infty$ um intervalo de $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$, e $\zeta(t)$ seja uma função monótona crescente e positiva no sentido Δ cuja derivada é contínua em $(a, b]$. A integral fracionária esquerda do produto de duas funções é dada por*

$$\mathbb{T}I_{a+}^{\alpha; \zeta}(fh)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{\Delta(k)}(t) \mathbb{T}I_{a+}^{\alpha; \zeta}h(t),$$

onde $f^{\Delta(k)}$ é a k -ésima derivada em escalas temporais $\mathbb{T}$ e $t > a$.

Demonstração. Sejam f e h satisfazendo a condição do **Lema 7**. Então, de Eq.(3.6) segue que

$$\mathbb{T}I_{a+}^{\alpha; \zeta}(fh)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{m} (fh)^{\Delta(m)}(t) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha + m + 1)}.$$

Usando a regra de Leibniz,

$$(fh)^{\Delta(m)}(t) = \sum_{k=0}^m f^{\Delta(k)}(t) h^{\Delta(m-k)}(t)$$

com $m \in \mathbb{N}$ e $f, h \in C^m([a, b])$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}I_{a+}^{\alpha; \zeta}(fh)(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{\Delta(k)}(t) h^{\Delta(m-k)}(t) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha + m + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{\Delta(k)}(x) \sum_{m=k}^{\infty} \binom{-\alpha}{m} \binom{m}{k} h^{\Delta(m-k)}(t) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha + m + 1)}. \end{aligned}$$

Considerando $n = m - k$ e usando a identidade

$$\binom{-\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} = \binom{-\alpha}{k} \binom{-(\alpha+k)}{n}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}I_{a+}^{\alpha; \zeta}(fh)(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{\Delta(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} h^{\Delta(n+k-k)}(t) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha + n + k + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{\Delta(k)}(t) \binom{-\alpha}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-(\alpha+k)}{n} h^{\Delta(n)}(t) \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\alpha+n+k}}{\Gamma(\alpha + n + k + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} f^{\Delta(k)}(t) \mathbb{T}I_{a+}^{\alpha+k; \zeta}h(t) \end{aligned}$$

e a prova está completa. $\square$

Os resultados discutidos acima são válidos quando escolhermos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pois já são conhecidos. O que vale destacar é que podemos escolher uma ampla classe de possíveis resultados como casos particulares, sem restringir a $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, isto é, basta escolher uma função $\zeta(\cdot)$, como já observamos em outras ocasiões. Existem outras propriedades para a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville, no entanto, precisamos antes apresentar o conceito de derivada fracionária ζ -Hilfer e discutir algumas propriedades.

Proposição 7. *Seja $0 \leq \alpha \leq 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$. Então,*

$$(1) \quad {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 h(t)) = \lambda_1 {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) + \lambda_2 {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} h(t), \text{ onde } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-1} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta - \alpha)}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-\alpha-1}, \quad \delta > 1.$$

Demonstração. (1) Usando o fato de que ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}_{RL}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta} f(t)$ e porque ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta}(\cdot)$ e ${}^{\mathbb{T}}_{RL}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta}(\cdot)$ são lineares, temos que ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\cdot)$ também é linear.

$$(2) \quad \text{Lembrando que } {}^{\mathbb{T}}_{RL}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-1} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta - \alpha)}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-\alpha-1} \text{ e}$$

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-1} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta + \alpha)}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta+\alpha-1},$$

obtemos

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-1} &= {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}_{RL}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-1} \\ &= {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} \left\{ \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta - \gamma)}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-\gamma-1} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta - \alpha)}(\zeta(t) - \zeta(a))^{\delta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Portanto, a prova está completa. $\square$

Observação 10. *Em particular, dado $1 \leq k \in \mathbb{N}$, e como $\delta > 1$, temos ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\zeta(t) - \zeta(a))^k = \frac{k!}{\Gamma(k - 1 - \alpha)}(\zeta(t) - \zeta(a))^{k-\alpha}$. Por outro lado, para $1 > k \in \mathbb{N}_0$, temos ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\zeta(t) - \zeta(a))^k = 0$.*

Teorema 28. *Se $f \in C^n[a, b]$, $n - 1 < \alpha < n$, e $0 \leq \beta \leq 1$, então*

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) &= g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) g^{\mathbb{T}}(\gamma - n, n - \gamma) f(t) \\ &\quad - g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) \sum_{k=1}^n \frac{(\zeta(x) - \zeta(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma - k + 1)} f_{\zeta}^{\Delta(n-k)} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma;\zeta} f(a). \end{aligned}$$

Demonstração. Usando a identidade

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} f(t) = g^{\mathbb{T}}(\alpha, \beta) {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha+\gamma;\zeta} f(t), \quad (3.8)$$

temos

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) = g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} {}^{\mathbb{T}}_{RL}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta} f(t) \quad (3.9)$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n - \alpha)$. Realizando a integração por partes n -vezes, temos

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} {}^{\mathbb{T}}_{RL}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta} f(t) = g^{\mathbb{T}}(\gamma - n, n - \gamma) f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma - k + 1)} f_{\zeta}^{\Delta(n-k)} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma;\zeta} f(a).$$

Usando Eq.(3.8) e Eq.(3.9), concluímos que

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) &= g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) g^{\mathbb{T}}(\gamma - n, n - \gamma) f(t) \\ &- g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) \sum_{k=1}^n \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma - k + 1)} f_{\zeta}^{\Delta(n-k)} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma;\zeta} f(a), \end{aligned}$$

onde

$$f_{\zeta}^{\Delta(n)} := \left(\frac{\Delta}{\zeta^{\Delta}(t)} \right)^n f(t),$$

$g^{\mathbb{T}}(p, q) = \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(p, q)}{B(p, q)}$ e $B_{0,1}^{\mathbb{T}}(p, q)$ e $B(p, q)$ são as funções Beta em escalas temporais e a função Beta clássica. Nesse sentido, a prova está concluída. $\square$

Observação 11. 1. Tomando $n = 1$ no **Teorema 28**, temos

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) &= g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) f(t) \\ &- g^{\mathbb{T}}(\alpha, \gamma - \alpha) \frac{(\zeta(x) - \zeta(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{1-\gamma;\zeta} f(a). \end{aligned}$$

2. Tomando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ no **Teorema 28**, temos

$$\mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} \Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f(t) = f(t) - \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \mathbb{I}_{a+}^{1-\gamma;\zeta} f(a).$$

Proposição 8. Para qualquer função integrável h em $[a, b]$ tem-se

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) = g^{\mathbb{T}}(\gamma - n, n - \gamma) f(t).$$

Demonstração. Pela definição de ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\cdot)$, e usando a **Proposição 6**, **Lema 6** e **Teorema 28**, podemos escrever

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha;\zeta} f(t) &= {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} f(t) \\ &= g^{\mathbb{T}}(\gamma - n, n - \gamma) f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(\zeta(t) - \zeta(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma - k + 1)} f_{\zeta}^{\Delta(n-k)} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{n-\gamma;\zeta} f(a) \\ &= g^{\mathbb{T}}(\gamma - n, n - \gamma) f(t). \end{aligned}$$

A prova está completa. $\square$

Observação 12. Escolhendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ na **Proposição 8**, obtemos $\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} \mathbb{I}_{a+}^{\gamma;\zeta} f(t) = f(t)$.

Teorema 29. A derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais é um operador limitado para todos $n - 1 < \alpha < n$ e $0 \leq \beta \leq 1$ com

$$\left\| {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} f \right\|_{C_{\gamma,\zeta}} \leq L \left\| f^{\Delta(n)} \right\|_{C_{\gamma,\zeta}^n}.$$

Demonstração. Lembrando que ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}f(x) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta}f(x)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}f \right\|_{C_{\gamma,\zeta}} &= \left\| {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta}f(x) \right\| \\
&\leq \frac{\left\| {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta}f \right\|_{C_{\gamma,\zeta}}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \max_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x \zeta^\Delta(t) (\zeta(x) - \zeta(t))^{\gamma-\alpha-1} \Delta t \right| \\
&\leq \frac{(\zeta(b) - \zeta(a))^{\gamma-\alpha}}{(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \left\| {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\gamma;\zeta}f \right\|_{C_{\gamma,\zeta}} \\
&\leq \frac{(\zeta(b) - \zeta(a))^{\gamma-\alpha}}{(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\left\| f^{\Delta(n)} \right\|_{C_{\gamma,\zeta}^n}}{\Gamma(n-\gamma)} \max_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x \zeta^\Delta(t) (\zeta(x) - \zeta(t))^{n-\gamma-1} \Delta t \right| \\
&\leq \frac{(\zeta(b) - \zeta(a))^{n-\alpha}}{(n-\gamma)(\gamma-\alpha)\Gamma(n-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)} \left\| f^{\Delta(n)} \right\|_{C_{\gamma,\zeta}^n},
\end{aligned}$$

o que comprova o resultado pretendido. $\square$

Teorema 30. *Seja $f \in C^1([a, b])$, $\alpha \geq 0$, $\delta \geq 0$ e $0 \leq \beta \leq 1$. Então,*

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\delta;\zeta}f(t) = g^{\mathbb{T}}(1-\alpha, \delta) g^{\mathbb{T}}(\gamma-\alpha, \gamma-\delta) \mathbb{I}_{a+}^{2\gamma-\alpha-\delta;\zeta}f(t)$$

com $\alpha \geq \delta \geq 0$.

Demonstração. Começamos notando que

$$\begin{aligned}
{}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\delta;\zeta}f(t) &= \left(\frac{\Delta}{\zeta^\Delta(x)} \right) {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{1-\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\delta;\zeta}f(t) \\
&= g^{\mathbb{T}}(1-\alpha, \delta) {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha-\delta;\zeta}f(t).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando a relação

$${}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta}f(t) = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha-\delta;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha;\zeta}f(t)$$

com $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$ e Eq.(3.10), temos que

$$\begin{aligned}
{}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha,\beta;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\delta;\zeta}f(t) &= {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\gamma-\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{a+}^{\alpha;\zeta} {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\delta;\zeta}f(t) \\
&= g^{\mathbb{T}}(1-\alpha, \delta) g^{\mathbb{T}}(\gamma-\alpha, \gamma-\delta) \mathbb{I}_{a+}^{2\gamma-\alpha-\delta;\zeta}f(t),
\end{aligned}$$

o que prova a igualdade pretendida. $\square$

Para finalizar o capítulo, vamos abordar o conceito de transformada de Laplace em escalas temporais e a integração por partes apenas para a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville.

Seja $p \in R(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Definimos a função exponencial por

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_a^t x_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right).$$

Definição 31. Seja $f, \zeta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que ζ é uma função crescente não negativa com $\zeta(0) = 0$. Então, a transformada generalizada de escala de tempo de f em relação a ζ é definida por

$${}^{\mathbb{T}}\mathcal{L}[f](z) = F(z) := \int_0^\infty f(t)\zeta^\Delta(t)\zeta^\sigma(t)\Delta t,$$

onde $\zeta(\zeta(t)) = e_{\theta z}(\zeta(t), 0)$ ($\zeta^\sigma(\zeta(t)) = e_{\theta z}(\sigma(\zeta(t)))$), isto é,

$${}^{\mathbb{T}}\mathcal{L}[f](z) = F(z) := \int_0^\infty f(t)\zeta^\Delta(t)e_{\theta z}(\sigma(\zeta(t)))\Delta t.$$

A seguir, provamos uma fórmula de integração por partes para a integral fracionária ζ -Riemann-Liouville em escalas de tempo.

Teorema 31. Seja $\alpha > 0$, $p, q \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$, onde $p \neq 1$ e $q = 1 + n$ no caso em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$. Além disso, temos

$${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta}(L_p) = \left\{ f : f = {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta}g, g \in L_p(a, b) \right\}.$$

A seguinte fórmula de integração por partes é válida: se $\varphi \in L_p(a, b)$ e $\phi \in L_q(a, b)$, então

$$\int_a^b \left({}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} \phi(t) \right) \varphi(t) \Delta t = \int_a^b \phi(t) \zeta^\Delta(t) {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{b-}^{\alpha; \zeta} \left(\frac{\varphi(t)}{\zeta^\Delta(t)} \right) \Delta t$$

onde $\zeta^\Delta(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Demonstração. Se $\varphi \in L_p(a, b)$ e $\phi \in L_q(a, b)$, então, de Eq.(3.1) da **Definição 29**, segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b \left({}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{a+}^{\alpha; \zeta} \phi(t) \right) \varphi(t) \Delta t &= \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \phi(s) \Delta s \right) \varphi(t) \Delta t \\ &= \int_a^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \phi(t) \zeta^\Delta(t) (\zeta(s) - \zeta(t))^{\alpha-1} \varphi(t) \Delta t \\ &= \int_a^b \phi(t) \zeta^\Delta(t) {}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_{b-}^{\alpha; \zeta} \left(\frac{\varphi(t)}{\zeta^\Delta(t)} \right) \Delta t. \end{aligned}$$

□

Duas consequências importantes do **Teorema 31** são:

1. Para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, obtemos o caso clássico fracionário.
2. Quando $\zeta(t) = t$, obtemos uma versão em escalas temporais fracionária.

Claro, é ampla a classe de possíveis casos particulares que podemos discutir.

Finalizamos, esse capítulo com os objetivos alcançados. Todos os resultados existentes na literatura que envolvem a derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais, sem resume ao trabalho realizado por Sousa et al. ([SOUSA et al., 2023](#)). Como o trabalho foi publicado em 2023, existem algumas propriedades e problemas em aberto. Por outro lado, no próximo capítulo, faremos utilizaremos as ideias discutidas aqui, para investigar a existência e unicidade de soluções para um problema de valor inicial.

4 Equações Diferenciais Fracionárias: Existência e Unicidade

Neste capítulo, vamos apresentar os resultados de existência e unicidade de soluções para o Problema (2) introduzido via derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais. Para obter os resultados, faremos o uso de resultados discutidos nos capítulos anteriores, em particular, do teorema de Arzelà-Ascoli. Nesse sentido, faremos comentários sobre alguns casos particulares e exemplos a partir da escolha dos parâmetros α, β, ζ e da função $f(\cdot, y(\cdot))$.

Antes de abordar os principais resultados, vamos provar que discutir a solução do Problema (2) é equivalente a abordar sua equação integral.

Lema 8. *Seja $0 < \alpha < 1$, $J \subseteq \mathbb{T}$, e $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $y(t)$ é uma solução do Problema (2) se, e somente se, esta função é uma solução de*

$$y(t) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s, \quad (4.1)$$

onde $g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) := \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)}{B(\gamma - 1, 1 - \gamma)}$ com $\gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha)$.

Demonstração. Aplicando o operador ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{\alpha;\zeta}(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(2), usando a condição inicial e o **Teorema 28**, temos

$$y(t) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s. \quad (4.2)$$

Por outro lado, aplicando o operador ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha,\beta;\zeta}(\cdot)$ em ambos os lados de Eq.(4.2), e usando a **Proposição 8**, obtemos

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha,\beta;\zeta} y(t) &= {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha,\beta;\zeta} \left(\frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right) \\ &= f(t, y(t)). \end{aligned}$$

Agora, tomando ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{1-\gamma;\zeta}(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(4.2) e usando o **Lema 6**, obtemos ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{1-\gamma;\zeta} y(0) = 0$. Assim, completamos a prova. $\square$

A seguir vamos fazer observações de suma importância sobre o **Lema 8**.

Observação 13. *Como visto no Capítulo 3, algumas propriedades de operadores fracionários não são mais válidas quando trabalhadas em escalas temporais. O problema se estende*

para as equações diferenciais quando se pretende abordar sua equação integral conforme o **Lema 8**. Para obter Eq.(4.1), a condição inicial do nosso Problema (2), deve ser nula, caso contrário não seria possível.

Observação 14. Outro ponto que merece destaque, é que para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos a equação integral, bem como o Problema (2) na versão da derivada fracionária ζ -Hilfer. Para esse tipo de problema, não necessariamente precisamos impor que a condição inicial seja nula ou encontrar uma melhor condição que satisfaça a equação integral.

Teorema 32. Suponha que $J = [0, 1] \subseteq \mathbb{T}$. Então, o Problema (2) tem uma solução única em J se a função $f(t, y(t))$ é uma função rd-contínua para o qual existe $M > 0$ tal que $|f(t, y(t))| < M$ em J e a condição de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

vale para algum $L > 0$ e para todo $t \in J$ e $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja S o conjunto de funções contínuas densas e $J \subseteq \mathbb{T}$. Para $y \in S$, defina

$$\|y\|_{C_{1-\gamma, \zeta}} = \sup_{t \in J} \|(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} y(t)\|_C.$$

Observe que S é um espaço de Banach. Defina o subconjunto $S_\zeta(\rho)$ e o operador Θ por

$$S_\zeta(\rho) = \{x \in S : \|x_s\|_{C_{1-\gamma, \zeta}} \leq \rho\}$$

e

$$\Theta(y) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s,$$

respectivamente.

Usando a **Proposição 3**, temos

$$\begin{aligned} |(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} \Theta(y(t))| &= \left| \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right| \\ &\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \Delta s \\ &\leq M \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s. \end{aligned}$$

Desde que $\zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1}$ seja uma função crescente, pela **Proposição 4**, segue que

$$\int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \leq \int_0^t \zeta'(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds.$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
 |(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} \Theta(y(t))| &\leq M \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta'(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
 &= \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^\alpha}{\alpha} (\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} \\
 &\leq M \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{\Gamma(\alpha + 1)},
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\Theta y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} \leq M \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Agora, considere

$$\rho = M \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)}.$$

Temos que Θ é um operador de $S_\zeta(\rho)$ para $S_\zeta(\rho)$. Além disso, para $x, y \in S_\zeta(\rho)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\|(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} (\Theta x(t) - \Theta y(t))\| \\
 &\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \Delta s \\
 &\leq L \frac{\|x - y\|_\infty (\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \\
 &\leq L \frac{\|x - y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} (\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta'(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
 &= L \frac{\|x - y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{\alpha} \\
 &\leq L \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^\alpha}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} \|x - y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Aplicando o sup para $t \in [0, 1]$ de ambos os lados de Eq.(4.3) e usando a definição da norma no espaço ponderado, temos

$$\|\Theta x - \Theta y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} \leq L \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^\alpha}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} \|x - y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}}. \tag{4.4}$$

Se $L \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^\alpha}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} < 1$, então temos uma contração e assim obtemos a existência e unicidade desejada de solução para o Problema (2). $\square$

Observação 15. 1. Tomando o limite $\beta \rightarrow 0$ em Problema (2), obtemos um problema de derivada fracionária ζ -Caputo em escalas temporais. Usando o Teorema 32, uma solução para tal problema existe e é única.

2. Tomando $\beta \rightarrow 1$ no Problema (2), obtemos um problema correspondente em escalas temporais no sentido da derivada fracionária ζ -Riemann-Liouville. Nas condições do **Teorema 32**, concluímos que tal problema admite uma solução única.

3. A partir da escolha de $\zeta(\cdot)$, obtemos uma ampla classe de casos particulares para o Problema (2), para os quais nosso **Teorema 32** fornece uma condição suficiente para a existência de uma solução única.

4. Além disso, também vale destacar que tomando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, temos o resultado válido para a teoria de operadores fracionários ζ -Hilfer.

Teorema 33. *Suponha que $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua densa à direita tal que exista $M > 0$ com $|f(t, y)| \leq M$ para todo $t \in J, y \in \mathbb{R}$. Então o Problema (2) tem solução em J .*

Demonstração. A prova deste resultado será discutida em quatro etapas.

Etapas 1: Θ é contínua.

Considere a sequência y_n tal que $y_n \rightarrow y$ em $C(J, \mathbb{R})$. Então, para cada $t \in J$, segue que

$$\begin{aligned}
 & |(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}(\Theta(y_n)(t) - \Theta(y)(t))| \\
 & \leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \Delta s \\
 & \leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \sup_{s \in J} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \Delta s \\
 & \leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_{C_{1-\gamma, \zeta}}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \\
 & \leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_{C_{1-\gamma, \zeta}}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta'(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
 & \leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_{C_{1-\gamma, \zeta}}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} (\zeta(1) - \zeta(0))^\alpha.
 \end{aligned}$$

Como f é uma função contínua, obtemos que

$$\|\Theta y_n - \Theta y\|_{C_{1-\gamma, \zeta}} \leq \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^\alpha}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_{C_{1-\gamma, \zeta}} \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$.

Etapas 2: A aplicação Θ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados em $C(J, \mathbb{R})$.

Para isso, basta mostrar que para qualquer ρ , existe uma constante positiva ℓ tal que para cada $y \in B_\rho = \{y \in C_{1-\gamma, \zeta}(J, \mathbb{R}) : \|y\|_{C_{1-\gamma, \zeta}} \leq \rho\}$ temos $\|\Theta y\|_{C_{1-\gamma, \zeta}} \leq \ell$.

Na verdade, por hipótese, para cada $t \in J$ temos

$$\begin{aligned}
\|(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} \Theta y(t)\| &\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \Delta s \\
&\leq M \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \\
&\leq M \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta'(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)} \\
&= \ell.
\end{aligned}$$

Etapas 3: A aplicação Θ envia conjuntos limitados em conjuntos equicontínuos de $C(J, \mathbb{R})$.

Sejam $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ e B_ρ um conjunto limitado de $C(J, \mathbb{R})$ como na **Etapas 2**, e $y \in B_\rho$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
&|(\Theta y)(t_2) - (\Theta y)(t_1)| \\
&\leq \frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t_1) - \zeta(s))^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \Delta s \\
&\quad - \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \Delta s \\
&\leq M \frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \zeta^{\Delta}(s) [(\zeta(t_1) - \zeta(s))^{\alpha-1} - (\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1}] \Delta s \\
&\quad + M \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \\
&\leq M \frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \zeta'(s) [(\zeta(t_1) - \zeta(s))^{\alpha-1} - (\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1}] ds \\
&\quad + M \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \zeta'(s) (\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
&\leq M \frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} [(\zeta(t_2) - \zeta(t_1))^{\alpha} + (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{\alpha} - (\zeta(t_2) - \zeta(0))^{\alpha}] \\
&\quad + M \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} (\zeta(t_2) - \zeta(t_1))^{\alpha} \\
&= \frac{2M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(t_2) - \zeta(0))^{\alpha} [(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma} - (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}] \\
&\quad + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma} \\
&\times ((\zeta(t_1) - \zeta(0))^{\alpha} - (\zeta(t_2) - \zeta(0))^{\alpha}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

com $t_1 \rightarrow t_2$. Nesse sentido, temos que o operador $\Theta : C_{1-\gamma, \zeta}(J, \mathbb{R}) \rightarrow C_{1-\gamma, \zeta}(J, \mathbb{R})$ é contínuo e completamente contínuo (consequência das **Etapas 1 a 3** e Teorema de Arzelà-Ascoli).

Etapas 4: O conjunto $\Omega = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda \Theta(y); 0 < \lambda < 1\}$ é limitado.

Seja $y \in \Omega$. Então, $y = \lambda \Theta(y)$ para algum $0 < \lambda < 1$. Assim, para cada $t \in J$, resulta que

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right].$$

Assim, concluímos através da estimativa na **Etapa 2**. Nesse sentido, Θ possui um ponto fixo, portanto uma solução para o Problema (2) (consequência do teorema do ponto fixo de Schauder). $\square$

Exemplo 3. Considere $f(t, y(t)) = 1 - y(t)$, $\beta = 1$ e $\zeta(t) = t$ no Problema (2), temos o seguinte caso particular dado por

$$\begin{cases} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^\alpha y(t) = g^{\mathbb{T}}(\alpha, 1 - \alpha) (1 - y(t)), & t \in [0, 1] = J \subseteq \mathbb{T}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^\alpha(\cdot)$ é a derivada fracionária de Caputo em escalas temporais de ordem $0 < \alpha < 1$. Por outro lado, basta tomar $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e, assim teremos o exemplo para a derivada fracionária de Caputo clássica.

Exemplo 4. Considere $f(t, y(t)) = y(t)$, $\beta = 1$ e $\zeta(t) = t^\rho$ com $\rho > 0$ no problema Eq.(2), temos o seguinte caso particular dado por

$$\begin{cases} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^\alpha y(t) = g^{\mathbb{T}}(\alpha, 1 - \alpha) y(t), & t \in [0, 1] = J \subseteq \mathbb{T}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^\alpha(\cdot)$ é a derivada fracionária de Caputo-Katugampola em escalas temporais de ordem $0 < \alpha < 1$. Por outro lado, basta tomar $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e, assim teremos o exemplo para a derivada fracionária de Caputo-Katugampola clássica.

Por fim, vamos apresentar um exemplo envolvendo o caso da derivada clássica em escalas temporais.

Exemplo 5. Considere $f(t, y(t)) = y^2(t)$, $\alpha = 1$ e $\zeta(t) = t$ no problema Eq.(2), temos o seguinte caso particular dado por

$$\begin{cases} {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+} y(t) = g^{\mathbb{T}}(1, 0) y^2(t), & t \in [0, 1] = J \subseteq \mathbb{T}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}(\cdot)$ é a derivada em escalas temporais.

Motivados pelos **Teorema 32** e **Teorema 33**, segue que as Eq.(4.5), Eq.(4.6) e a Eq.(4.7) dos exemplos acima, admitem uma única solução. Para outros casos particulares, basta escolher β, α, ζ e a função $f(t, y(t))$.

5 Controlabilidade de Soluções

A teoria de controle é uma área da matemática aplicada que desenvolve a análise e o projeto de sistemas de controle, ou seja, sistemas em que a ação de uma entrada pode influenciar na obtenção de um comportamento desejado. O conceito de controlabilidade, introduzido por Kalman (KALMAN, 1960), foi inicialmente utilizado para o estudo de controle ótimo.

Este capítulo é destinado a abordar a controlabilidade das soluções para o Problema (3). Para isso, inicialmente, apresentamos o conceito de controlabilidade e a equação integral equivalente ao problema a ser discutido.

Definição 32. Dizemos que o Problema (3) é controlável em J se, para qualquer valor inicial y_0 e qualquer valor final $\bar{y}$, existe uma função contínua densa à direita por partes $u \in L^2(J, U)$ tal que a solução y do Problema (3) satisfaz $y(1) = \bar{y}$.

Assim como utilizamos uma equação integral para discutir a existência e unicidade de soluções, seguiremos o mesmo caminho agora para obter a controlabilidade de soluções. Então, temos o seguinte resultado.

Teorema 34. Uma função $f \in C(J, \mathbb{R})$ é uma solução do Problema (3) se, e somente se, essa função é uma solução da seguinte equação integral

$$y(t) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} (f(s, y(s)) + (Bu)(s)) \Delta s, \\ t \in [0, 1] = J \subset \mathbb{T}.$$

Demonstração. Aplicando o operador ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{\alpha; \zeta}(\cdot)$ de ambos os lados do Problema (3), usando a condição inicial ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{1-\gamma; \zeta}y(0) = 0$ e o Teorema 28, temos

$$y(t) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} (f(s, y(s)) + (Bu)(s)) \Delta s. \quad (5.1)$$

Por outro lado, aplicando o operador ${}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha, \beta; \zeta}(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(5.1), e usando a Proposição 8, obtemos

$$\begin{aligned} & {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha, \beta; \zeta}y(t) \\ &= {}^{\mathbb{T}}\Delta_{0+}^{\alpha, \beta; \zeta} \left(\frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} (f(s, y(s)) + (Bu)(s)) \Delta s \right) \\ &= f(t, y(t)) + (Bu)(t). \end{aligned}$$

Então, tomando ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{1-\gamma; \zeta}(\cdot)$ em ambos os lados da Eq.(5.1) e usando o Lema 6, temos ${}^{\mathbb{T}}\mathbb{I}_0^{1-\gamma; \zeta}y(0) = 0$. A prova está completa. $\square$

Lema 9. Admita que as condições (A_1) – (A_4) sejam satisfeitas e $y(0) \in \mathbb{R}$ um ponto arbitrário. Então, a solução $y(t)$ do Problema (3) em $[0, 1]$ é definida pela função de controle

$$u(t) = (\mathcal{W}_\alpha)^{-1} \left[y_1 - \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right],$$

$t \in [0, 1]$. Além disso, a função de controle $u(t)$ tem uma estimativa $\|u(t)\| \leq M_u^\circ$ onde

$$M_u^\circ = |y_1| + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(t) - \zeta(0))^\alpha.$$

Demonstração. Seja $y(t)$ uma solução do Problema (3) em $[0, 1] \subset \mathbb{T}$ definida pela Eq.(4.2). Então, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} [f(s, y(s)) + (Bu)(s)] \Delta s \\ &= \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \\ &\quad + \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} B(\mathcal{W}_\alpha)^{-1} \\ &\quad \left[y_1 - \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(\xi) (\zeta(t) - \zeta(\xi))^{\alpha-1} f(\xi, y(\xi)) \Delta \xi \right] \Delta s \\ &= \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \\ &\quad + \mathcal{W}_\alpha (\mathcal{W}_\alpha)^{-1} \left[y_1 + \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(\xi) (\zeta(t) - \zeta(\xi))^{\alpha-1} f(\xi, y(\xi)) \Delta \xi \right] \\ &= y_1. \end{aligned}$$

Nesse sentido, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| (\mathcal{W}_\alpha)^{-1} \left(y_1 - \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right) \right| \\ &\leq |(\mathcal{W}_\alpha)^{-1}| \left(|y_1| + \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \Delta s \right) \\ &\leq M_W^\circ \left(|y_1| + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^\Delta(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \Delta s \right) \\ &\leq M_W^\circ \left(|y_1| + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta'(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \right) \\ &= M_W^\circ \left(|y_1| + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(t) - \zeta(0))^\alpha \right) \\ &= M_u^\circ. \end{aligned}$$

Portanto, a prova está completa. $\square$

Agora, temos condições provar que a solução do Problema (3) é controlável.

Teorema 35. *Se todas as condições (A_1) - (A_4) são satisfeitas, então o Problema (3) é controlável em J , desde que*

$$M \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma-1, 1-\gamma)\Gamma(\alpha+1)} < 1 \quad (5.2)$$

onde $g^{\mathbb{T}}(\gamma-1, 1-\gamma) := \frac{B_{0,1}^{\mathbb{T}}(\gamma-1, 1-\gamma)}{B(\gamma-1, 1-\gamma)}$ com $0 < \alpha < 1$, $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$.

Demonstração. Considere o subconjunto $D_{\zeta,\delta} \subseteq C_{1-\gamma,\zeta}(J, \mathbb{R})$ dado por:

$$D_{\zeta,\delta} = \{x \in C_{1-\gamma,\zeta}(J, \mathbb{R}) : \|x\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} \leq \delta\}.$$

Definimos o operador $K : D_{\zeta,\delta} \rightarrow D_{\zeta,\delta}$ como

$$(Ky)(t) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma-1, 1-\gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} (f(s, y(s)) + (Bu)(s)) \Delta s.$$

Note que o operador K é bem definido e os pontos fixos de K são soluções do Problema (3). De fato, $x \in D_{\zeta,\delta}$ é uma solução do Problema (3) se, e somente se, é uma solução da equação do operador $x = Kx$. Portanto, a existência de uma solução do Problema (3) é equivalente a determinar a constante positiva δ tal que K tem um ponto fixo em $D_{\zeta,\delta}$. Decompomos o operador K em dois operadores K_1 e K_2 , $K = K_1 + K_2$ em $D_{\zeta,\delta}$, onde

$$(K_1y)(t) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma-1, 1-\gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} Bu(s) \Delta s, \quad t \in [0, 1] = J \subset \mathbb{T}$$

e

$$(K_2y)(t) = \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma-1, 1-\gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, u(s)) \Delta s.$$

Etapa 1: O operador K_1 é uma aplicação de $D_{\zeta,\delta}$ em si mesmo. Para cada $t \in J$ e $x \in D_{\zeta,\delta}$,

segue do **Lema 9** que

$$\begin{aligned}
& \| (g(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} (K_1 x)(t) \| \\
&= \left\| \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} (Bu)(s) \Delta s \right\| \\
&\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \|B\| \|u(s)\| \Delta s \\
&\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} M_B \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} M_W^{\circ} \\
&\quad \times \left(|y_1| + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(s) - \zeta(0))^{\alpha} \right) \Delta s \\
&\leq \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} M_W^{\circ} M_B \left(|y_1| + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(1) - \zeta(0))^{\alpha} \right) \\
&\quad \int_0^t \zeta'(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} M_W^{\circ} M_B \left(|y_1| + \frac{M}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)} (\zeta(1) - \zeta(0))^{\alpha} \right) \\
&\leq \delta,
\end{aligned}$$

o que implica que $\|K_1 y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} \leq \delta$. Assim, K_1 é uma aplicação de $D_{\zeta,\delta}$ em si mesmo.

Etapla 2: O operador K_2 é contínuo. Seja $\{y_n\}$ uma sequência em $D_{\zeta,\delta}$ satisfazendo $y_n \rightarrow y$ conforme $n \rightarrow \infty$. Então, para cada $t \in J$, temos que

$$\begin{aligned}
& \| (\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma} ((K_2 y_n)(t) - (K_2 y)(t)) \|_C \\
&\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| \Delta s \\
&\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} \int_0^t g'(s) (\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \|f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))\| ds \\
&\leq \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma) \Gamma(\alpha + 1)}.
\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, sabemos que $\|K_2 y_n - K_2 y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Isso significa que K_2 é contínuo.

Etapla 3: Agora provamos que $K_2(D_{\zeta,\delta}) \subset D_{\zeta,\delta}$. Esse resultado é provado por contradição, supondo que existe uma função $\eta(\cdot) \in D_{\zeta,\delta}$ tal que $\|(K_2 \eta)\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} > \delta$. Assim, para cada

$t \in J$ temos

$$\begin{aligned}
\delta &< \|(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}(K_2\eta)(t)\| \\
&\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \|f(s, \eta(s))\| \Delta s \\
&\leq \frac{(\zeta(t) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \zeta'(s)(\zeta(t) - \zeta(s))^{\alpha-1} \|f(s, \eta(s))\| ds \\
&\leq M \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} \delta.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por δ , e tomando o limite conforme $K \rightarrow \infty$, temos

$$M \frac{(\zeta(1) - \zeta(0))^{1-\beta(1-\alpha)}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} \geq 1,$$

o que contradiz a desigualdade (5.2). Isso mostra que $K_2(D_{\zeta,\delta}) \subset D_{\zeta,\delta}$.

Etapa 4: Agora mostramos que $K_2(D_{\zeta,\delta})$ é limitado e equicontínuo. Da **Etapa 3**, é claro que $K_2(D_{\zeta,\delta})$ é limitado. Resta provar que $K_2(D_{\zeta,\delta})$ é equicontínuo. De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\|(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma}(K_2y)(t_2) - (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}(K_1y)(t_1)\| \\
= &\left\| \frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t_1) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right\| \\
\leq &\left\| \frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma} - (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right\| \\
&+ \left\| \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma} \int_{t_1}^{t_2} \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right\| \\
&+ \left\| \frac{1}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma} \int_0^{t_1} \zeta^{\Delta}(s)(\zeta(t_1) - \zeta(s))^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s \right\| \\
\leq &\frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma} - (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} M \int_0^{t_2} g'(s)(\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} M \int_{t_1}^{t_2} \zeta'(s)(\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} M \int_0^{t_1} \zeta'(s)[(\zeta(t_2) - \zeta(s))^{\alpha-1} - (\zeta(t_1) - \zeta(s))^{\alpha-1}] ds \\
\leq &\frac{(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{1-\gamma} - (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} M(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{\alpha} \\
&+ \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} M(\zeta(t_2) - \zeta(t_1))^{\alpha} \\
&+ \frac{(\zeta(t_1) - \zeta(0))^{1-\gamma}}{g^{\mathbb{T}}(\gamma - 1, 1 - \gamma)\Gamma(\alpha + 1)} M[(\zeta(t_2) - \zeta(0))^{\alpha} - (\zeta(t_1) - \zeta(0))^{\alpha}] \rightarrow 0
\end{aligned}$$

conforme $t_2 \rightarrow t_1$. Segue que $\|K_2 y - K_1 y\|_{C_{1-\gamma,\zeta}} \rightarrow 0$ conforme $t_2 \rightarrow t_1$. Assim, temos que $K_2(D_{\zeta,\delta})$ é equicontínuo.

Como consequência das **Etapa 2** e **Etapa 4**, e fazendo o uso do Teorema de Arzelà-Ascoli, temos que K_2 é compacto. Nesse sentido, novamente usando as **Etapa 1**, **Etapa 4** e o **Lema 1**, concluímos que $K = K_1 + K_2$ é contínuo e leva conjunto limitado em conjunto limitado. Além disso, $\mu(K_2(D_{\zeta,\delta})) = 0$ dado que $K_2(D_{\zeta,\delta})$ é relativamente compacto. Segue da inclusão $K_1(D_{\zeta,\delta}) \subset D_{\zeta,\delta}$ e da igualdade $\mu(K_2(D_{\zeta,\delta})) = 0$ que

$$\mu(K(D_{\zeta,\delta})) \leq \mu(K_1(D_{\zeta,\delta})) + \mu(K_2(D_{\zeta,\delta})) \leq \mu(D_{\zeta,\delta})$$

para todo conjunto limitado $D_{\zeta,\delta}$ de $C_{1-\gamma,\zeta}(J, \mathbb{R})$ com $\mu(D_{\zeta,\delta}) > 0$. Dado $K(D_{\zeta,\delta}) \subset D_{\zeta,\delta}$ para o conjunto convexo, fechado e limitado $D_{\zeta,\delta}$ of $C_{1-\gamma,\zeta}(J, \mathbb{R})$, todas as condições do teorema do ponto fixo de Sadovskii (veja (LIU et al., 2005)) são satisfeitas e concluímos que o operador K tem um ponto fixo $x \in D_{\zeta,\delta}$ que é uma solução do Problema (3) com $y(1) = y_1$. Portanto, o Problema (3) é controlável em J . $\square$

6 Conclusões e Próxima Etapa

Neste trabalho, apresentamos detalhadamente um estudo sobre a derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais e discutimos propriedades importantes no cálculo fracionário. Cumpre salientar, que ao longo do trabalho, procuramos sempre destacar a relevância e importância dos resultados, de modo especial, deixar claro que na teoria clássica do cálculo fracionário diversos resultados são válidos, no entanto quando envolve a teoria de análise em escalas temporais, isso nem sempre acontece. Isso ficou claro no Capítulo 3. Por outro lado, motivados pela derivada fracionária ζ -Hilfer em escalas temporais, apresentamos uma nova classe de equações diferenciais fracionárias e investigamos a existência e unicidade de soluções por meio de resultados clássicos da teoria e do teorema de Arzelà-Ascoli. No entanto, para isso notamos que trabalhar com equação integral é equivalente a abordar diretamente o problema. Nesse sentido, comentários e discussões de alguns casos particulares foram apresentados. Por fim, discutimos a controlabilidade de soluções para o Problema (3), de modo análogo ao Capítulo 4, utilizando a equação integral correspondente ao problema. Entretanto, nesse caso, investigamos a controlabilidade de solução, através do teorema do ponto fixo de Sadovskii.

Desse modo, esperamos que o estudo apresentado neste presente trabalho, possa contribuir para o desenvolvimento de novos resultados, gerando assim o crescimento dessa nova área envolvendo o cálculo fracionário em escalas temporais, em especial, envolvendo as equações diferenciais. Para trabalhos futuros, podemos pensar em discutir dependência contínua dos dados iniciais e atratividade de soluções para o Problema (2).

Referências

- ABDELJAWAD, T.; BALEANU, D. Caputo q -fractional initial value problems and a q -analogue Mittag–Leffler function. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Elsevier, v. 16, n. 12, p. 4682–4688, 2011. Citado na página 41.
- AGARWAL, R. P.; BOHNER, M. Basic calculus on time scales and some of its applications. *Results in Math.*, Springer, v. 35, n. 1-2, p. 3–22, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 22 e 25.
- AGHAYAN, Z. S.; ALFI, A.; MACHADO, J. A. T. Lmi-based stability analysis of fractional order systems of neutral type with time varying delays under actuator saturation. *Comput. and Appl. Math.*, Springer, v. 40, n. 4, p. 142, 2021. Citado na página 10.
- _____. Observer-based control approach for fractional-order delay systems of neutral type with saturating actuator. *Math. Meth. Appl. Sci.*, Wiley Online Library, v. 44, n. 11, p. 8554–8564, 2021. Citado na página 10.
- AHMADKHANLU, A.; JAHANSHAHI, M. On the existence and uniqueness of solution of initial value problem for fractional order differential equations on time scales. *Bull. Iranian Math. Soc.*, Iranian Mathematical Society (IMS), v. 38, n. 1, p. 241–252, 2012. Citado na página 10.
- ALMEIDA, R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Commun. Nonl. Sci. Numer. Simulat.*, Elsevier, v. 44, p. 460–481, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 39.
- AMMI, M. R. S.; TORRES, D. F. M. Existence and uniqueness results for a fractional Riemann–Liouville nonlocal thermistor problem on arbitrary time scales. *J. King Saud Univer.-Sci.*, Elsevier, v. 30, n. 3, p. 381–385, 2018. Citado na página 10.
- ANASTASSIOU, G. A. Principles of delta fractional calculus on time scales and inequalities. *Math. Computer Model.*, Elsevier, v. 52, n. 3-4, p. 556–566, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 22 e 25.
- ASANOV, A. *Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind*. [S.l.]: VSP, 1998. v. 11. Citado na página 17.
- ATICI, F. M.; ELOE, P. W. Fractional q -calculus on a time scale. *J. Nonlinear Math. Phys.*, Taylor & Francis, v. 14, n. 3, p. 341–352, 2007. Citado na página 11.
- BASTOS, D. M. a. D. F. M. T. N. R. O. Fractional derivatives and integrals on time scales via the inverse generalized Laplace transform. *Int. J. Math. Comput.*, Taylor & Francis, v. 11, n. 11, p. 1–9, 2011. Citado na página 11.
- BASTOS, D. M. N. R. O.; TORRES, D. F. M. Fractional derivatives and integrals on time scales via the inverse generalized Laplace transform. In: SPRINGER. [S.l.], 2011. v. 11, p. 1–9. Citado na página 41.

- BASTOS, N. R. O. Fractional calculus on time scales. *arXiv:1202.2960*, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 41.
- BASTOS, N. R. O.; FERREIRA, R. A. C.; TORRES, D. F. M. Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations. *Disc. Cont. Dyn. Sys.*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 29, n. 2, p. 417–437, 2010. Citado na página 41.
- _____. Discrete-time fractional variational problems. *Signal Proc.*, Elsevier, v. 91, n. 3, p. 513–524, 2011. Citado na página 41.
- BAYOUR, B.; TORRES, D. F. M. Complex-valued fractional derivatives on time scales. In: SPRINGER. *Differential and Difference Equations with Applications: ICDDEA, Amadora, Portugal, May 2015, Selected Contributions 3*. [S.l.], 2016. p. 79–87. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 41.
- BELAID, M.; ARDJOUNI, A.; BOULARES, H.; DJOUDI, A. Stability by Krasnoselskii's fixed point theorem for nonlinear fractional dynamic equations on a time scale. *Honam Math. J.*, The Honam Mathematical Society, v. 41, n. 1, p. 51–65, 2019. Citado na página 10.
- BENKHETTOU, N.; CRUZ, A. M. C.; TORRES, D. F. M. A fractional calculus on arbitrary time scales: fractional differentiation and fractional integration. *Signal Proc.*, Elsevier, v. 107, p. 230–237, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- _____. Nonsymmetric and symmetric fractional calculi on arbitrary nonempty closed sets. *Math. Meth. Appl. Sci.*, Wiley Online Library, v. 39, n. 2, p. 261–279, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- BENKHETTOU, N.; CRUZ, A. M. C. B.; TORRES, D. F. M. Nonsymmetric and symmetric fractional calculi on arbitrary nonempty closed sets. *Math. Meth. Appl. Sci.*, Wiley Online Library, v. 39, n. 2, p. 261–279, 2016. Citado na página 41.
- BENKHETTOU, N.; CRUZ, A. M. C. B. da; TORRES, D. F. M. A fractional calculus on arbitrary time scales: fractional differentiation and fractional integration. *Signal Proc.*, Elsevier, v. 107, p. 230–237, 2015. Citado na página 41.
- BENKHETTOU, N.; HAMMOUDI, A.; TORRES, D. F. M. Existence and uniqueness of solution for a fractional Riemann–Liouville initial value problem on time scales. *J. King Saud Univ.-Sci.*, Elsevier, v. 28, n. 1, p. 87–92, 2016. Citado na página 10.
- BENKHETTOU, N.; HASSANI, S.; TORRES, D. F. M. A conformable fractional calculus on arbitrary time scales. *J. King Saud Univ.-Sci.*, Elsevier, v. 28, n. 1, p. 93–98, 2016. Citado na página 10.
- BOHNER, M.; GUSEINOV, G. S. The convolution on time scales. In: HINDAWI. *Abst. Appl. Anal.* [S.l.], 2007. v. 2007. Citado na página 10.
- BOHNER, M.; PETERSON, A. *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. Citado na página 10.
- _____. *Dynamic Equations on Time Scales, Birkh.* [S.l.]: user Verlag, Basel, Switzerland, 2001. Citado 7 vezes nas páginas 20, 21, 22, 23, 24, 25 e 26.

_____. Advances in dynamic equations on time scales birkhauser inc. *Boston: MA*, 2003. Citado na página 10.

CHIDOUH, A.; GUEZANE-LAKOUD, A.; BEBBOUCHI, R.; BOUARICHA, A.; TORRES, D. F. M. Linear and nonlinear fractional voigt models. In: SPRINGER. *Theory and Applications of Non-integer Order Systems: 8th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications, Zakopane, Poland*. [S.l.], 2017. p. 157–167. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 41.

DAVIS, P. J. Leonhard Euler’s integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton Abramowitz. *The Amer. Math. Monthly*, Taylor & Francis, v. 66, n. 10, p. 849–869, 1959. Citado na página 18.

DEBNATH, L.; BHATTA, D. *Integral Transforms and Their Applications*. [S.l.]: CRC Press, Boca Raton, Florida, 2014. Citado na página 30.

ERDÉLYI, A. Fractional integrals of generalized functions. In: *In: Fract. Calc. and Its Appl.* [S.l.]: Springer, 1975. p. 151–170. Citado na página 29.

ETEMAD, S.; AVCI, I.; KUMAR, P.; BALEANU, D.; REZAPOUR, S. Some novel mathematical analysis on the fractal–fractional model of the AH1N1/09 virus and its generalized Caputo-type version. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 162, p. 112511, 2022. Citado na página 10.

GAO, S.-L. Fractional time scale in calcium ion channels model. *Inter. J. Biomathe.*, World Scientific, v. 6, n. 04, p. 1350023, 2013. Citado na página 41.

GORENFLO, R.; KILBAS, A. A.; MAINARDI, F.; SERGEI, S. V. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. [S.l.]: Springer, Berlin, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 19, 31 e 35.

GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Parametric subordination in fractional diffusion processes. In: *Fractional Dynamics: Recent Advances*. [S.l.]: World Scientific, 2012. p. 229–263. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

HARIKRISHNANA, S.; M., R. Í.; KANAGARAJAN, K. An arbitrary order differential equations on times scale. *Universal J. Math. Appl.*, Emrah Evren KARA, v. 1, n. 4, p. 262–266, 2018. Citado na página 11.

HASSANI, H.; MACHADO, J. A. T.; MEHRABI, S. An optimization technique for solving a class of nonlinear fractional optimal control problems: application in cancer treatment. *Appl. Math. Modell.*, Elsevier, v. 93, p. 868–884, 2021. Citado na página 10.

HERRMANN, R. *Fractional calculus: an introduction for physicists*. [S.l.]: World Scientific, 2011. Citado na página 9.

HILFER, R. *Applications of fractional calculus in physics*. [S.l.]: World scientific, 2000. Citado na página 9.

HILGER, S. Ein makettenkalkul mit anwendung auf zentrumsmanigfaltigkeiten (ph. d thesis), universitt wurzburg.-1988. 1988. Citado na página 10.

_____. Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results Math.*, Springer, v. 18, n. 1-2, p. 18–56, 1990. Citado na página 10.

- IKEHATA, M. Mittag-Leffler's function and extracting from Cauchy data. *Contem. Math.*, Providence, RI: Amer. Math. Soc., v. 348, p. 41–52, 2004. Citado na página 19.
- ISHTEVA, M. *Properties and applications of the Caputo fractional operator*. Tese (Tese de Doutorado) — Dept. of Math., Universität Karlsruhe, Sofia, 2005. Citado na página 35.
- JARAD, F.; ABDELJAWAD, T. Generalized fractional derivatives and Laplace transform. *Disc. Cont. Dyn. Sys.-S*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-S, v. 13, n. 3, p. 709–722, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 36.
- KALMAN, R. E. On the general theory of control systems. In: *Proceedings first international conference on automatic control, Moscow, USSR*. [S.l.: s.n.], 1960. p. 481–492. Citado na página 59.
- KHAN, H.; ALAM, K.; GULZAR, H.; ETEMAD, S.; REZAPOUR, S. A case study of fractal-fractional tuberculosis model in china: Existence and stability theories along with numerical simulations. *Math. Comput. Simul.*, Elsevier, v. 198, p. 455–473, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. [S.l.]: elsevier, 2006. v. 204. Citado 8 vezes nas páginas 9, 10, 28, 29, 30, 31, 34 e 37.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17. Citado na página 17.
- KUMAR, V.; MALIK, M. Existence, uniqueness and stability of nonlinear implicit fractional dynamical equation with impulsive condition on time scales. *Nonauon. Dyn. Sys.*, De Gruyter Open, v. 6, n. 1, p. 65–80, 2019. Citado na página 10.
- _____. Controllability results of fractional integro-differential equation with non-instantaneous impulses on time scales. *IMA J. Math. Control Infor.*, Oxford University Press, v. 38, n. 1, p. 211–231, 2021. Citado na página 10.
- LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S.; DEVI, J. V. Theory of fractional dynamic systems. (*No Title*), 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- LIU, L.; GUO, F.; WU, C.; WU, Y. Existence theorems of global solutions for nonlinear Volterra type integral equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, Elsevier, v. 309, n. 2, p. 638–649, 2005. Citado na página 64.
- LOPES, A. M.; MACHADO, J. A. T. Multidimensional scaling analysis of generalized mean discrete-time fractional order controllers. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Elsevier, v. 95, p. 105657, 2021. Citado na página 10.
- MACROBERT, T. M. *Higher transcendental functions*. [S.l.]: Nature Publishing Group UK London, 1955. Citado na página 19.
- MAINARDI, F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. [S.l.]: World Scientific, 2022. Citado na página 20.
- MALIK, M.; KUMAR, V. Existence, stability and controllability results of coupled fractional dynamical system on time scales. *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, Springer, v. 43, p. 3369–3394, 2020. Citado na página 10.

- MATAR, M. M.; ABBAS, M. I.; ALZABUT, J.; KAABAR, M. K. A.; ETEMAD, S.; REZAPOUR, S. H. Investigation of the p -Laplacian nonperiodic nonlinear boundary value problem via generalized Caputo fractional derivatives. *Adv. Differ. Equ.*, SpringerOpen, v. 2021, n. 1, p. 1–18, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- MEKHALFI, K.; TORRES, D. F. M. Generalized fractional operators on time scales with application to dynamic equations. *The European Phys. J. Special Topics*, Springer, v. 226, n. 16-18, p. 3489–3499, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 11, 26, 27 e 42.
- MILLER, K. S.; ROSS, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. 1993. Citado na página 9.
- MOHAMMADI, H.; KUMAR, S.; REZAPOUR, S.; ETEMAD, S. A theoretical study of the Caputo–Fabrizio fractional modeling for hearing loss due to Mumps virus with optimal control. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 144, p. 110668, 2021. Citado na página 10.
- MOHAN, J. J. Variation of parameters for nabla fractional difference equations. *Novi Sad J. Math*, v. 44, n. 2, p. 149–159, 2014. Citado na página 41.
- NETO, P. M. C. *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013. Citado na página 20.
- NWAEZE, E. R.; TORRES, D. F. M. Chain rules and inequalities for the BHT fractional calculus on arbitrary times cales. *Arabian J. Math.*, Springer, v. 6, n. 1, p. 13–20, 2017. Citado na página 41.
- OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. The fractional calculus, academic press, new york, 1974. Citado na página 9.
- OLIVEIRA, D. dos Santos de. *Derivada fracionária e as funções de Mittag-Leffler*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Imecc-Unicamp, Campinas, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 30, 31, 35, 36 e 39.
- OLIVEIRA, E. C. d. *Funções especiais com aplicações*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2005. Citado na página 18.
- OLIVEIRA, E. C. d.; MACHADO, J. A. T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Math. Prob. Eng. ID 238459*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, p. 6, 2014. Citado na página 29.
- ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. A. T. What is a fractional derivative? *J. Comput. Phys.*, Elsevier, v. 293, p. 4–13, 2015. Citado na página 37.
- OSLER, T. J. Leibniz rule for fractional derivatives generalized and an application to infinite series. *SIAM J. Appl. Math.*, SIAM, v. 18, n. 3, p. 658–674, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- _____. Taylor’s series generalized for fractional derivatives and applications. *SIAM J. Math. Anal.*, SIAM, v. 2, n. 1, p. 37–48, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

- PARIS, R. B. Exponential asymptotics of the Mittag-Leffler function. *Proc. Royal Soc. London. Series A: Math. Phys. Engin. Sci.*, The Royal Society, v. 458, n. 2028, p. 3041–3052, 2002. Citado na página 19.
- PENG, J.; LI, K. A note on property of the Mittag-Leffler function. *J. Math. Anal. Appl.*, Elsevier, v. 370, n. 2, p. 635–638, 2010. Citado na página 19.
- _____. A novel characteristic of solution operator for the fractional abstract Cauchy problem. *J. Math. Anal. Appl.*, Elsevier, v. 385, n. 2, p. 786–796, 2012. Citado na página 19.
- PETERSON, A.; THOMPSON, B. Henstock–Kurzweil delta and nabla integrals. *J. Math. Anal. Appl.*, Elsevier, v. 323, n. 1, p. 162–178, 2006. Citado na página 10.
- PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. [S.l.]: Elsevier, 1998. Citado na página 9.
- SAMKO, S. G. Fractional integrals and derivatives. *Theory and applications*, Gordon and Breach, 1993. Citado na página 9.
- SOUSA, J. V. d. C.; BENCHOHRA, M.; N’GUÉRÉKATA, G. M. Attractivity for differential equations of fractional order and ψ -Hilfer type. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, De Gruyter, v. 23, n. 4, p. 1188–1207, 2020. Citado na página 17.
- SOUSA, J. V. d. C.; FREDERICO, G. S. F.; OLIVEIRA, E. C. d. ψ -hilfer pseudo-fractional operator: new results about fractional calculus. *Comput. Appl. Math.*, Springer, v. 39, n. 4, p. 254, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- SOUSA, J. V. d. C.; KUCCHE, K. D.; OLIVEIRA, E. C. d. Stability of ψ -Hilfer impulsive fractional differential equations. *Appl. Math. Lett.*, Elsevier, v. 88, p. 73–80, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- SOUSA, J. V. d. C.; LIMA, K. B.; TAVARES, L. S. Existence of solutions for a singular double phase problem involving a ψ -Hilfer fractional operator via Nehari manifold. *Qual. Theory Dyn. Sys.*, Springer, v. 22, n. 3, p. 1–26, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 39.
- SOUSA, J. V. d. C.; OLIVEIRA, D. S.; FREDERICO, G. S. F.; TORRES, D. F. M. Existence, uniqueness, and controllability for Hilfer differential equations on times scales. *Math. Meth. Appl. Sci.*, Wiley Online Library, 2023. Citado 6 vezes nas páginas 11, 12, 21, 41, 42 e 52.
- SOUSA, J. V. d. C.; OLIVEIRA, E. C. d. On the ψ -Hilfer fractional derivative. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Elsevier, v. 60, p. 72–91, 2018. Citado 9 vezes nas páginas 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37 e 40.
- SOUSA, J. V. d. C.; OLIVEIRA, E. C. D. Ulam–Hyers stability of a nonlinear fractional Volterra integro-differential equation. *Appl. Math. Lett.*, Elsevier, v. 81, p. 50–56, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- SOUSA, J. V. d. C.; OLIVEIRA, E. C. d. Leibniz type rule: ψ -Hilfer fractional operator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Elsevier, v. 77, p. 305–311, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 38.

- SOUSA, J. V. d. C.; OLIVEIRA, E. C. d.; MAGNA, L. A. Fractional calculus and the ESR test. *AIMS Math.*, Springer, v. 2, n. 4, p. 692–705, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- SOUSA, J. V. d. C.; SANTOS, M. N. N. dos; COSTA, E. da; MAGNA, L. A.; OLIVEIRA, E. C. d. A new approach to the validation of an ESR fractional model. *Comput. Appl. Math.*, Springer, v. 40, p. 1–20, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- SOUSA, J. Vanterler da C.; OLIVEIRA, E. C. d. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ -Hilfer operator. *Differ. Equ. Appl.*, Springer, v. 11, p. 87–106, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- SUN, S.; ABDELJAWAD, T.; ALZABUT, J. Recent developments and applications on discrete fractional equations and related topics. *Disc. Dyn. Nature S.*, Hindawi, v. 2013, 2013. Citado na página 41.
- TEODORO, G. S. *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Imecc-Unicamp, Campinas, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 19, 31, 35 e 37.
- THOMSON, B. Henstock-Kurzweil integrals on time scales. *Panam. Math. J.*, PANAMERICAN MATHEMATICAL JOURNAL INTERNATIONAL, v. 18, n. 1, p. 01, 2008. Citado na página 10.
- TORRES, D. F. M. Cauchy's formula on nonempty closed sets and a new notion of Riemann–Liouville fractional integral on time scales. *Appl. Math. Lett.*, Elsevier, v. 121, p. 107407, 2021. Citado na página 10.
- TUAN, N. H.; MOHAMMADI, H.; REZAPOUR, S. A mathematical model for COVID-19 transmission by using the Caputo fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 140, p. 110107, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- WILLIAMS, P. A. Fractional calculus on time scales with Taylor's theorem. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, Springer, v. 15, p. 616–638, 2012. Citado na página 10.
- WRIGHT, E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities. *J. London Math. Soc.*, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 71–79, 1933. Citado na página 19.
- _____. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. *Proc. London Math. Soc.*, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 257–270, 1935. Citado na página 19.
- _____. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. *J. London Math. Soc.*, Oxford University Press, v. 1, n. 4, p. 286–293, 1935. Citado na página 19.
- YAN, R. A.; SUN, S. R.; HAN, Z. L. Existence of solutions of boundary value problems for Caputo fractional differential equations on time scales. *Bull. Iranian Math. Soc.*, Iranian Mathematical Society (IMS), v. 42, n. 2, p. 247–262, 2016. Citado na página 10.
- ZHU, J.; WU, L. Fractional Cauchy problem with Caputo nabla derivative on time scales. In: HINDAWI. *Abstr. Appl. Anal.* [S.l.], 2015. v. 2015. Citado na página 10.