UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

PEDRO PFARRIUS BARBASSA

Esquema singular de folheações por curvas

Campinas
2024

Pedro Pfarrius Barbassa

Esquema singular de folheações por curvas

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim

Coorientador: Alan do Nascimento Muniz

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Pedro Pfarrius Barbassa e orientada pelo Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

B232e

Barbassa, Pedro Pfarrius, 1999-
Esquema singular de folheações por curvas / Pedro Pfarrius Barbassa. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim.
Coorientador: Alan do Nascimento Muniz.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Folheações (Matemática). 2. Distribuições de codimensão 1. 3. Singularidades (Matemática). I. Jardim, Marcos Benevenuto, 1973-. II. Muniz, Alan do Nascimento. III. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Singular scheme of foliations by curves
Palavras-chave em inglês:
Foliations (Mathematics)
Codimension one distributions
Singularities (Mathematics)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Alan do Nascimento Muniz [Coorientador]
Maurício Barros Corrêa Júnior
Thiago Fassarella do Amaral
Data de defesa: 31-07-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-2074-060X
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0296745035450172

Dissertação de Mestrado defendida em 31 de julho de 2024 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ALAN DO NASCIMENTO MUNIZ

Prof(a). Dr(a). MAURÍCIO BARROS CORRÊA JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). THIAGO FASSARELLA DO AMARAL

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família que sempre apoiou as minhas decisões.

Ao meu orientador, Marcos Benevenuto Jadim, por ter meu auxiliado e guiado durante esse período. Ao meu coorientador, Alan do Nascimento Muniz, por toda ajuda e tempo gasto retirando minhas dúvidas.

Também gostaria de agradecer a todos os colegas, professores e funcionários do IMECC, que fazem com que tudo funcione.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta dissertação temos como objetivo estudar o esquema singular de folheações por curvas. De forma mais específica, queremos encontrar casos em que o esquema singular determina a folheação unicamente, isto é, folheações com o mesmo esquema singular são isomorfas. Também queremos estudar folheações em $\mathbb{P}^2$, com o objetivo de encontrar condições para quando um subesquema 0-dimensional de $\mathbb{P}^2$ é o esquema singular de uma folheação e se existe um subesquema do esquema singular que determina completamente a folheação.

Palavras-chave: Distribuições. Folheações. Esquema Singular.

Abstract

In this dissertation, our aim is to study the singular scheme of foliations by curves. More specifically, we aim to identify cases where the singular scheme uniquely determines the foliation, meaning that foliations with the same singular scheme are isomorphic. We also aim to study foliations on $\mathbb{P}^2$, with the goal of finding conditions for when a 0-dimensional subscheme of $\mathbb{P}^2$ is the singular scheme of a foliation and whether there exists a subscheme of the singular scheme that completely determines the foliation.

Keywords: Distributions. Foliations. Singular Scheme.

Sumário

Introdução

A teoria de folheações se tornou uma área da matemática aproximadamente em 1940, com os trabalhos de Ehresmann e Reeb iniciado com [Ehresmann e Reeb 1944]. A ideia inicial dessa teoria era juntar topologia diferencial com equações diferenciais ordinárias. Uma folheação é uma decomposição da variedade em subvariedades de mesma dimensão utilizando submersões. O núcleo dos diferenciais dessas submersões define um subfibrado do fibrado tangente da variedade, ou seja, uma distribuição. Pelo teorema de integrabilidade de frobenius, obtemos condições suficientes e necessárias para uma distribuição ser uma folheação:

Teorema (Frobenius)**.** *Uma distribuição $T \subset TX$ define uma folheação, se e somente se, $[T, T] \subset T$.*

Essa teoria se desenvolveu muito rápido com o passar dos anos. Na geometria algébrica, a definição foi modificada um pouco, no qual foi considerado subfeixes do feixe tangente, não necessariamente subfibrados.

A unicidade do esquema singular foi inicialmente estudada em [Gómez-Mont e Kempf 1989], onde os autores mostraram que o esquema singular de folheações por curvas com singularidades isoladas quando reduzido é único. Em [Campillo e Olivares 1999], foi demonstrado que a hipótese do esquema singular ser reduzido pode ser descartada. Em [Giraldo e Pan-Collantes 2010] foi considerado o caso de folheações de codimensão 1 em $\mathbb{P}^3$ e no trabalho mais recente [Araujo e Corrêa 2014], foi estudado o caso de morfismos de feixes localmente livres mais gerais, com aplicações à distribuições de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n$.

No primeiro capítulo, vamos introduzir conceitos básicos de geometria algébrica que iremos utilizar ao longo deste texto, que serão as classes de Chern e estabilidade de feixes. Os conceitos que utilizaremos e não estão na dissertação, se encontram nos 3 primeiros capítulos de [Hartshorne 2013]. Para as classes de Chern, a principal referência que vamos utilizar será [Eisenbud e Harris 2016], e para estabilidade de feixes usaremos [Okonek et al. 1980] e [Huybrechts e Lehn 2010].

No segundo capítulo, definiremos os principais conceitos desta dissertação. Vamos definir distribuições e folheações utilizando a teoria de feixes, mostrando algumas propriedades básicas delas. Para distribuições, vamos seguir [Calvo-Andrade, Corrêa e Jardim 2020]. Seguiremos [Corrêa, Jardim e Marchesi 2023] para folheações por curvas e [Brunella 2015] para folheações em superfícies.

No terceiro capítulo, temos como objetivo encontrar casos em que o esquema singular de uma folheação por curvas com singularidades isoladas determina completamente a folheação, isto é, folheações com mesmo esquema singular serão iguais. Seguiremos [Campillo e Olivares 2003] e [Araujo e Corrêa 2014].

No quarto capítulo, trataremos de folheações em $\mathbb{P}^2$ com dois objetivos. Um deles sendo condições suficientes e necessárias para quando um subesquema 0-dimensional de $\mathbb{P}^2$ seja o esquema singular de uma folheação. O outro será encontrar um subesquema do esquema singular de uma folheação que determina completamente a folheação. Para o primeiro objetivo utilizamos [Campillo e Olivares 2001] e no segundo seguiremos [Campillo e Olivares 2007].

No último capítulo, mostraremos uma aplicação à teoria de códigos. Vamos considerar códigos em $\mathbb{P}^2$ sobre um corpo finito, avaliados nos pontos singulares de uma folheação e com isso obtemos a dimensão do código e um valor mínimo da sua distância, sendo útil para a construção de códigos com uma distância mínima fixada. Neste capítulo, seguiremos o artigo [Campillo, Farran e Pisabarro 2007].

1 Preliminares

1.1 Introdução às classes de Chern

Nesta seção queremos construir as classes de Chern de um feixe localmente livre e mostrar algumas aplicações. Iremos utilizar as referências [Fulton 2013], [Eisenbud e Harris 2016] e [Vainsencher 2012].

1.1.1 Anel de Chow

Para $d \geqslant 0$ e X um esquema, vamos denotar $Z_d(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades fechadas irredutíveis de X de dimensão d. Os elementos de $Z_d(X)$ serão chamados de d-ciclos. Os ciclos são escritos da forma $\alpha = \sum n_i Y_i$ onde Y_i são subvariedades de dimensão d e $n_i \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, temos um grupo graduado pela dimensão $Z(X) = \bigoplus_{d=0}^{\dim(X)} Z_d(X)$.

Também é útil considerar o ciclo associado a um subesquema fechado. Se Z é um subesquema fechado de dimensão r em X, sejam $Y_1, \ldots, Y_t$ as suas componentes irredutíveis que possuem dimensão r, definimos o ciclo associado à Z por $\sum n_i Y_i$, onde n_i é o comprimento do anel local $\mathcal{O}_{Z,y_i}$ do ponto genérico y_i de Y_i em Z.

Para constuirmos o grupo de chow, precisamos de uma relação de equivalência entre ciclos.

Definição 1.1. *Seja $Rat(X) \subset Z(X)$ o subgrupo gerado pelas diferenças da forma*

$$(W \cap (\{t_0\} \times X)) - (W \cap (\{t_1\} \times X)),$$

onde $t_0, t_1 \in \mathbb{P}^1$ e W é uma subvariedade de $\mathbb{P}^1 \times X$ que não está contida em nenhuma fibra $\{t\} \times X$. Dizemos que dois ciclos são racionalmente equivalentes se sua diferença pertence à $Rat(X)$.

Definição 1.2. *O grupo de Chow de X é o quociente*

$$A(X) = Z(X)/Rat(X),$$

cujos elementos são classes de ciclos módulo equivalência racional. Se $Y \in Z(X)$ é um ciclo, denotamos por $[Y] \in A(X)$ a sua classe de equivalência.

Também teremos uma graduação para o grupo de Chow.

Proposição 1.3. *Seja X um esquema, então o grupo de chow de X é gradudado pela dimensão*

$$A(X) = \bigoplus_{d=0}^{\dim(X)} A_d(X),$$

onde $A_d(X)$ é o grupo das classes de equivalência racional dos d-ciclos.

Demonstração. Se $W \subset \mathbb{P}^1 \times X$ é uma variedade irredutível que não está contida em nenhuma fibra, então em um aberto afim $W \cap (\mathbb{A}^1 \times X) \subset W$ e o esquema $W \cap (\{t_0\} \times X)$ é definido pelo anulamento de um único divisor não nulo $t - t_0$, assim as componentes possuem todas codimensão 1 em W. Consequentemente, todas as variedades na equivalência racional definida por W possuem a mesma dimensão. Logo temos uma graduação pela dimensão. □

Agora, para construirmos o anel de Chow, precisamos de um produto em $A(X)$ e para tal serão necessários as próximas definições.

Definição 1.4. *Seja X uma variedade suave irredutível e A, B subvariedades. Dizemos que A e B são transversais em $p \in A \cap B$ se*

$$T_pA + T_pB = T_pX.$$

Dizemos que A e B são genericamente transversais se forem transversais no ponto genérico de cada componente irredutível de $A \cap B$.

Podemos estender essa terminologia para ciclos, dois ciclos $A = \sum n_i A_i$ e $B = \sum m_j B_j$ são genericamente transversais se cada A_i é genericamente transversal a cada B_j.

Ser genericamente transversal implica que a interseção terá codimensão esperada, isto é, cada componente terá codimensão codim(A) + codim(B). Para A, B genericamente transversais e irredutíveis, definimos

$$[A].[B] = [A \cap B].$$

Podemos generalizar o produto acima para ciclos: considere dois ciclos $\alpha = \sum n_i A_i$ e $\beta = \sum m_j B_j$ genericamente transversais, assim A_i e B_j são genericamente transversais. Definimos

$$[\alpha].[\beta] = \sum_{i,j} n_i m_j [A_i \cap B_j]$$

Teorema 1.5 (Moving Lemma)**.** *Seja X uma variedade suave quase projetiva. Então:*

(i) Para cada $\alpha, \beta \in A(X)$, existem $A, B \in Z(X)$ genericamente transversais tais que $\alpha = [A]$ e $\beta = [B]$.

(ii) A classe $[A \cap B]$ é independente da escolha dos ciclos A e B.

Demonstração. A demonstração do teorema se encontra em [Fulton 2013, Seção 11.4] ou [Eisenbud e Harris 2016, Apêndice A]. $\square$

O teorema acima garante que temos um produto bem definido em $A(X)$, já que o produto não depende do representante. Dessa forma, $A(X)$ é um anel graduado comutativo, associativo e com unidade a classe fundamental $[X]$.

Escrevendo $A^p(X) = A_{n-p}(X)$, ou seja, trocado dimensão por codimensão, então nosso produto irá somar os graus $A^p(X) \times A^l(X) \to A^{p+l}(X)$ e assim vamos considerar a graduação

$$A(X) = \bigoplus_{d=0}^{\dim(X)} A^d(X)$$

Pela definição, já podemos descrever algumas componentes do anel:

(i) Se X é irredutível, então $A^0(X)$ é gerado pela classe fundamental $[X]$, considerando X como uma subvariedade de codimensão 0 de si mesmo. Assim $A^0(X) \cong \mathbb{Z}$.

(ii) $A^1(X)$ é gerado por classes de divisores de Weil. Como X é suave, são divisores de Cartier. Nesse caso, equivalência racional será equivalência linear. Consequentemente $A^1(X) \cong \text{Pic}(X)$.

(iii) $A^n(X)$ é gerado por classes de pontos. Dois pontos P e Q vão ser racionalmente equivalentes se existir uma cadeia de curvas (não necessariamente racionais) em X, na qual a interseção delas liga os pontos P e Q.

(iv) $A^d(X) = 0$, para $d > \dim(X)$.

Exemplo 1.6 (Espaço Afim)**.** $A(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z}.[\mathbb{A}^n]$.

Seja $Y \subset \mathbb{A}^n$ uma subvariedade própria e considere coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ de forma que a origem não pertença à Y. Seja

$$W' = \{(t, tz) \in (\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}) \times \mathbb{A}^n \mid z \in Y\} = V(\{f(z/t) \mid f(z) \text{ se anula em } Y\})$$

A fibra de W' em um ponto $t \in \mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ será tY, isto é, a imagem de Y pelo automorfismo de $\mathbb{A}^n$ dado por multiplacação por t. Seja $W \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n$ o fecho de W' em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n$. Note que como W' é irredutível, W também será. A fibra de W em $t = 1$ é apenas Y, por outro lado, como a origem não pertence à Y, existe polinômio $g(z)$ que anula em Y e possui termo constante não nulo c. A função $G(t, z) = g(z/t)$ em $(\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}) \times \mathbb{A}^n$ extende para uma função em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n$ com valor constante c na fibra do infinito. Portanto a fibra de W no infinito é vazia, ou seja, Y é racionalmente equivalente a zero.

1.1.2 Propriedades do anel de Chow

Para calcular o anel de Chow, temos resultados semelhantes a sequência de Mayer-Vietoris e da excisão.

Teorema 1.7. *Seja X um esquema.*

1. *(Mayer-Vietoris) Se X_1 e X_2 são subesquemas fechados de X, então existe uma sequência exata à direita*

$$A(X_1 \cap X_2) \to A(X_1) \oplus A(X_2) \to A(X_1 \cup X_2) \to 0.$$

2. *(Excissão) Se $Y \subset X$ é um subesquema fechado e $U = X \backslash Y$ é o seu complemento, então a inclusão e restrição de ciclos dá uma sequência exata à direita*

$$A(Y) \to A(X) \to A(U) \to 0.$$

Uma outra ferramenta que podemos utilizar é a estratificação de um esquema X.

Definição 1.8. *Seja X um esquema e $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma coleção de subesquemas localmente fechados de X. Dizemos que $\mathcal{U}$ é uma estratificação de X, se a união disjunta de $\mathcal{U}$ for X e o fecho de cada U_i é união de alguns U_j. A estratificação é afim quando cada U_i é isomorfo a um espaço afim, e quase-afim quando for isomorfo a um aberto afim.*

Teorema 1.9. *Seja X um esquema que admite uma estratificação quase-afim $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Então $A(X)$ é gerado pelas classes $[\overline{U_i}]$. Ainda mais, se a estratificação for afim, então $[\overline{U_i}]$ formam uma base de $A(X)$ como um $\mathbb{Z}$-módulo livre.*

Demonstração. A demonstração se encontra em [Eisenbud e Harris 2016, Proposição 1.17]. □

Quando X for uma variedade projetiva suave sobre um corpo algebricamente fechado, por [Eisenbud e Harris 2016, Proposição 1.21], temos uma única função bem-definida

$$\deg : A^n(X) \to \mathbb{Z}$$

no qual leva um 0-ciclo na soma dos seus coeficientes. Assim, não fazemos distinção entre $c_n(\mathcal{E})$ e $\deg(c_n(\mathcal{E}))$, quando $\mathrm{rk}(\mathcal{E}) = \dim(X)$.

Exemplo 1.10 (Espaço Projetivo). *$A(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H]/H^{n+1}$, onde $H \in A^1(\mathbb{P}^n)$ é a classe de hiperplano.*

De fato, seja $\{p\} \subset \mathbb{P}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{P}^n$ os subespaços. Temos a estratificação afim $U_i = \mathbb{P}^i \backslash \mathbb{P}^{i-1}$, aplicando o Teorema 1.9 vemos que $A^k(\mathbb{P}^n)$ é gerado pela classe $\mathbb{P}^{n-k}$, portanto é gerado por $(n-k)$-plano $L \subset \mathbb{P}^n$. Do mapa grau, obtemos que $A^n(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, e como um $(n-k)$-plano L intersecta um k-plano M em um único ponto, multiplicação por $[M]$ induz um mapa sobrejetivo $A^k(\mathbb{P}^n) \to A^n(\mathbb{P}^n)$. Consequentemente, $A^k(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ para cada k. Um $(n-k)$-plano $L \subset \mathbb{P}^n$ é a interseção transversal de k hiperplanos, assim

$$[L] = H^k$$

Por último, como uma subvariedade $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimensão $n-k$ e grau d intersecta um k-plano transversalmente em d pontos, temos que $\deg([X] \cdot H^{n-k}) = d$. Como $\deg(H^n) = 1$, concluímos que $[X] = dH^k$.

Uma última definição importante sobre o anel de Chow para definirmos as classes de Chern será o pull-back dos ciclos, gerado por um morfismo entre variedades.

Definição 1.11. *Seja $f\colon Y \to X$ um morfismo de variedades suaves. Dizemos que uma subvariedade $A \subset X$ é genericamente transversal à f, se a pré-imagem $f^{-1}(A)$ é reduzida e $\operatorname{codim}_Y(f^{-1}(A)) = \operatorname{codim}_X(A)$.*

Teorema 1.12. *Seja $f\colon Y \to X$ um morfismo de variedades suaves. Então existe um único mapa de grupos $f^*\colon A^d(X) \to A^d(Y)$, tal que quando $A \subset X$ for uma variedade genericamente transversal à f, temos*

$$f^*([A]) = [f^{-1}(A)].$$

Demonstração. A demonstração se encontra em [Eisenbud e Harris 2016, Teorema 1.23]. □

1.1.3 Classes de Chern

Dado $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre de posto r em X, vamos definir as classes de Chern de $\mathcal{E}$ como elementos $c_i(\mathcal{E}) \in A^i(X)$, seguindo o próximo teorema:

Teorema 1.13. *Existe uma única maneira de associar a cada feixe localmente livre $\mathcal{E}$ em uma variedade projetiva suave X a classe $c(\mathcal{E}) = c_0(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}) + \cdots + c_r(\mathcal{E}) \in A(X)$ de uma maneira que:*

(i) Para cada feixe invertível $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, a sua classe de Chern será $c(\mathcal{L}) = 1 + D$, com $c_1(\mathcal{L}) = D$.

(ii) Se $s_0, \ldots, s_{r-i}$ são seções globais de $\mathcal{E}$ e o seu lugar de degeneração Z onde são linearmente dependentes possui codimensão i, então $c_i(\mathcal{E}) = [Z] \in A^i(X)$.

(iii) (Fórmula de Whitney) Se

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

for uma sequência exata curta de feixes localmente livres em X, então temos que $c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{E})c(\mathcal{G})$.

(iv) Se $\varphi : Y \to X$ for um morfismo de variedades suaves, então

$$\varphi^*(c(\mathcal{E})) = c(\varphi^*(\mathcal{E})).$$

Note que do item (ii), se s for uma seção global de $\mathcal{E}$ com Z esquema de zeros de codimensão r, então $c_r(\mathcal{E}) = [Z]$.

Corolário 1.14. *Suponha que $\mathcal{E}$ é a soma de feixes invertíveis $\mathcal{L}_i$ ou de forma mais geral possui uma filtração cujos quocientes são feixes invertíveis $\mathcal{L}_i$. Então*

$$c(\mathcal{E}) = \prod c(\mathcal{L}_i) = \prod (1 + c_1(\mathcal{L}_i)).$$

Demonstração. Basta aplicar a fórmula de Whitney repetidas vezes. □

Teorema 1.15 (Splitting Principle)**.** *Qualquer propriedade que é válida para classes de chern de feixes localmente livres que se decompõe como soma de feixes invertíveis, é válido no caso geral.*

O Teorema 1.15 facilita muito encontrar propriedades para o cálculo das classes de Chern. É uma consequência imediata do próximo teorema.

Teorema 1.16. *Seja X uma variedade suave e $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre de posto r em X. Então existe uma variedade suave Y e um morfismo $\varphi\colon Y \to X$ com as seguintes propriedades:*

1. *O pullback $\varphi^*\colon A(X) \to A(Y)$ é injetivo;*
2. *O pullback $\varphi^*\mathcal{E}$ adimite uma filtração*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{r-1} \subset \mathcal{E}_r = \varphi^*\mathcal{E}$$

de subfeixes localmente livres $\mathcal{E}_i \subset \varphi^*\mathcal{E}$, cujos quocientes $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ são feixes invertíveis.

A construção das classes de Chern no Teorema 1.13 e a demonstração do Teorema 1.16, podem ser encontradas em [Eisenbud e Harris 2016][Seção 5.3].

Antes de considerarmos as propriedades gerais, tome $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ feixes invertíveis, então temos a identidade,

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{M})$$

que segue do item (i) no Teorema 1.13. Considere $\mathcal{E}$ localmente livre de posto r:

- Então $c_i(\mathcal{E}) = 0$ para $i > r$. De fato, suponha que $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{L}_i$ com $\mathcal{L}_i$ feixe invertível, então $c(\mathcal{L}_i) = 1 + c_1(\mathcal{L}_i)$ e
$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r}(1 + c_1(\mathcal{L}_i))$$
não possui termos com grau maior que r.

- $c_i(\mathcal{E}^*) = (-1)^i c_i(\mathcal{E})$ para cada $i = 1, \dots, r$. Suponha que $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{L}_i$ com $\mathcal{L}_i$ feixe invertível, então $c(\mathcal{L}_i) = 1 + c_1(\mathcal{L}_i)$,
$$c(\mathcal{E}^*) = \prod(1 + c_1(\mathcal{L}_i^*)) = \prod(1 - c_1(\mathcal{L}_i))$$
e consequentemente $c_i(\mathcal{E}^*) = (-1)^i c_i(\mathcal{E})$.

- $c_1(\det(\mathcal{E})) = c_1(\mathcal{E})$, onde $\det(\mathcal{E}) = \bigwedge^r \mathcal{E}$. Suponha que $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{L}_i$ com $\mathcal{L}_i$ feixe invertível, então $\det(\mathcal{E}) = \bigotimes \mathcal{L}_i$ e
$$c_1(\det(\mathcal{E})) = \sum c_1(\mathcal{L}_i) = c_1(\mathcal{E}).$$

Proposição 1.17. *Considere $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre de posto r e $\mathcal{L}$ um feixe invertível em uma variedade projetiva suave X. Então*
$$c_p(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{l=0}^{p} \binom{r-l}{p-l} c_l(\mathcal{E}) c_1(\mathcal{L})^{p-l}.$$

Demonstração. Primeiro, vamos supor que $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{M}_i$, onde $\mathcal{M}_i$ são feixes invertíveis e seja $\alpha_i = c_1(\mathcal{M}_i) \in A^1(X)$. Consequentemente
$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=0}^{r}(1 + \alpha_i).$$
Isso implica que as classes de Chern de $\mathcal{E}$ são dadas pelos polinômios simétricos elementares em α_i, ou seja,
$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{E}) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \\ c_2(\mathcal{E}) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \alpha_i \alpha_j \\ &\vdots \\ c_r(\mathcal{E}) &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r. \end{aligned}$$
Denotando a primeira classe de chern $\beta = c_1(\mathcal{L})$ e como $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L} = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{M}_i \otimes \mathcal{L}$, pela fórmula de Whitney
$$c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \prod_{i=0}^{r}(1 + \alpha_i + \beta). \tag{1.1}$$

Portanto, podemos expressar o produto como um polinômio em β e pelos polinômios simétricos elementares em α_i. Segue que

$$\begin{aligned}
c_1(\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}) &= \sum_{i=0}^{r}(\alpha_i+\beta) = c_1(\mathcal{E}) + rc_1(\mathcal{L})\\
c_2(\mathcal{E}\otimes\mathcal{L}) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r}(\alpha_i+\beta)(\alpha_j+\beta)\\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r}\alpha_i\alpha_j + (r-1)\beta\sum_{i=0}^{r}\alpha_i + \binom{r}{2}\beta^2\\
&= c_2(\mathcal{E}) + (r-1)c_1(\mathcal{L})c_1(\mathcal{E}) + \binom{r}{2}c_1(\mathcal{L})^2.
\end{aligned}$$

Para o caso geral, basta considerarmos (1.1) e pegar os termos de grau l nos α_i e os termos de grau $p-l$ em β

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{r}(1+\alpha_i+\beta) &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant r}(1+\beta)^{p-l}\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_l}\\
&= \sum_{l} c_l(\mathcal{E})(1+\beta)^{p-l}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.18. *No espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, já foi mostrado no Exemplo 1.10 que $A(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H]/H^{n+1}$, onde H representa a classe de um hiperplano. Considere o feixe invertível $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Assim,*

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = H \in A^1(\mathbb{P}^n).$$

Da mesma forma,

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = d.H \in A^1(\mathbb{P}^n).$$

Agora considere a sequência de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^n \longrightarrow 0.$$

Como $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 1$ e $c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1}) = (1+H)^{n+1}$, pela fórmula de Whitney

$$c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1}) = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})c(\mathrm{T}\mathbb{P}^n) = c(\mathrm{T}\mathbb{P}^n)$$

e, consequentemente,

$$c(\mathrm{T}\mathbb{P}^n) = (1+H)^{n+1}.$$

De forma mais explícita,

$$c_k(\mathrm{T}\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{k}H^k \in A^k(\mathbb{P}^n). \tag{1.2}$$

Exemplo 1.19. *Considere X uma variedade suave projetiva e o seu feixe tangente $TX = \Omega_X^*$. Pelas propriedades das classes de Chern*

$$c_1(TX) = -c_1(\Omega_X) = -c_1(\det \Omega_X) = -c_1(\omega_X).$$

Portanto $c_1(TX) = -K_X \in A^1(X)$, onde K_X é o divisor canônico. Se X_d for uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^n$, então o seu feixe canônico será $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(d-n-1)$ e portanto

$$c_1(TX_d) = -c_1(\mathcal{O}_X(d-n-1)) = (n+1-d)h \in A^1(X), \tag{1.3}$$

onde $h = H\big|_{X_d}$ é a restrição do hiperplano em X_d.

Exemplo 1.20. *Seja X uma hipersuperfície de grau d em $\mathbb{P}^3$. Considere a sequência conormal*

$$0 \longrightarrow TX \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3\big|_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow 0.$$

Pelo Exemplo 1.18, sabemos que $c(\mathrm{T}\mathbb{P}^3\big|_X) = (1+h)^4$ e $c(\mathcal{O}_X(d)) = 1+dh$, onde $h = H\big|_X$ é a restrição da classe hiperplano e $\deg(h^2) = d$. Pela fórmula de Whitney:

$$c(\mathrm{T}\mathbb{P}^3\big|_X) = c(\mathcal{O}_X(d))c(TX).$$

Segue que:

$$\begin{aligned} c(TX) &= (1+h)^4(1+dh)^{-1} = (1+4h+6h^2)(1-dh+d^2h^2) \\ &= 1 + (4-d)h + (6-4d+d^2). \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} c_1(TX) &= (4-d)h \in A^1(X), \\ c_2(TX) &= (6-4d+d^2)h^2 \in A^2(X). \end{aligned}$$

1.2 Conceitos de feixes

Nesta seção, introduziremos algumas propriedades e definições sobre feixes que vamos utilizar ao longo deste texto, principalmente no próximo capítulo, e que não estão contidas nos 3 primeiros capítulos de [Hartshorne 2013]. As principais referências que usaremos serão [Huybrechts e Lehn 2010] e [Okonek et al. 1980].

1.2.1 Conceitos gerais

Definição 1.21. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente em um esquema X. Definimos o conjunto de singularidades do feixe $\mathcal{F}$ por:*

$$S(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \text{ não é livre sobre } \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

Note que, o conjunto $S(\mathcal{F})$ também é dado por

$$S(\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Supp}(\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)). \tag{1.4}$$

Dessa forma, o feixe $\mathcal{F}$ é localmente livre em $X \backslash S(F)$. Supondo que X é irredutível, definimos o posto do feixe por

$$\mathrm{rk}(\mathcal{F}) = \mathrm{rk}\left(\mathcal{F}|_{X\backslash S(\mathcal{F})}\right).$$

Definição 1.22. *Um feixe coerente $\mathcal{F}$ em um esquema X é livre de torção, se cada $\mathcal{F}_x$ é um $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo livre de torção, i.e, $fa = 0$ com $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ e $a \in \mathcal{F}_x$ implica que $f = 0$ ou $a = 0$.*

Corolário 1.23. *O conjunto de singularidades de um feixe livre de torção $S(\mathcal{F})$ possui codimensão $\geqslant 2$.*

Demonstração. A demonstração se encontra em [Okonek et al. 1980, Página 75]. □

Definição 1.24. *Um feixe coerente $\mathcal{F}$ em um esquema X é dito reflexivo, se o mapa natural $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ for um isomorfismo.*

Uma observação importante é que o mapa $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ é injetivo, se e somente se, $\mathcal{F}$ é livre de torção.

Proposição 1.25. *Se um feixe coerente $\mathcal{F}$ em um esquema integral noetheriano pode ser colocado em uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

onde $\mathcal{E}$ é localmente livre e $\mathcal{G}$ é livre de torção, então $\mathcal{F}$ é um feixe reflexivo.

Demonstração. Suponha que existe um sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

com $\mathcal{E}$ localmente livre e $\mathcal{G}$ livre de torção. Então $\mathcal{F}$ é livre de torção, e como o núcleo do mapa natural $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ é o subfeixe de torção de $\mathcal{F}$, então o mapa é injetivo. Por outro lado, $\mathcal{E}$ é localmente livre, por isso também é reflexivo, assim $\mathcal{F}^{**} \subset \mathcal{E}$. Consequentemente, o quociente $\mathcal{F}^{**}/\mathcal{F}$, que é um feixe de torção, é um subfeixe de $\mathcal{G}$ que é livre de torção. Logo, o quociente é nulo e, assim, $\mathcal{F}$ é reflexivo. □

Até o final dessa seção, vamos considerar que X é uma variedade projetiva suave sobre um corpo algebricamente fechado.

Lema 1.26. *Todo feixe reflexivo de posto 1 em X é localmente livre.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [Hartshorne 1980, Proposição 1.9] ou [Okonek et al. 1980, Lema 1.1.15] □

Definição 1.27. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe livre de torção de posto r em X. Definimos o determinante de $\mathcal{F}$ por:*

$$\det(\mathcal{F}) = \Big(\bigwedge^{r} \mathcal{F}\Big)^{**},$$

que pelo Lema 1.26 será um feixe invertível, ou seja, $\det(\mathcal{F}) \in \mathrm{Pic}(X)$.

Com a definição acima, dado um feixe livre de torção $\mathcal{F}$, definimos a sua primeira classe de Chern por $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\det(\mathcal{F}))$. Também, temos as seguintes propriedades do determinante:

1. $\det(\mathcal{E}^*) \cong \det(\mathcal{E})^*$
2. Dada uma sequência exata

   $$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

   temos isomorfismo $\det(\mathcal{E}) \cong \det(\mathcal{F}) \otimes \det(\mathcal{G})$.

Lema 1.28. *Todo feixe livre de torção de posto 1 em X é isomorfo à um feixe de ideais torcido por um feixe invertível.*

Demonstração. Considere $\mathcal{E}$ um feixe livre de torção de posto 1. Como $\mathcal{E}$ é livre de torção, então o mapa $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{**}$ é injetivo. Assim, temos um sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**} \longrightarrow Q_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema 1.26, sabemos que $\mathcal{E}^{**}$ é localmente livre, assim temos uma nova sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow Q_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0. \tag{1.5}$$

Portanto, temos um quociente $\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow Q_{\mathcal{E}}$. Porém, o único quociente que $\mathcal{O}_X$ admite são feixes estruturais de subesquemas, ou seja, $Q_{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_Z$ para algum $Z \subset X$. De (1.5), obtemos que $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \cong \mathcal{I}_Z$. Logo, $\mathcal{E} \cong \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$.

□

Lema 1.29. *Seja $Z \subset X$ um subesquema de codimensão $\geqslant 2$ e $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. Então, temos o isomorfismo* $\det(\mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}) \cong \mathcal{L}$.

Demonstração. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

Tensorizando-a por $\mathcal{L}$ e tomando o determinante

$$\mathcal{L} = \det(\mathcal{L}) \cong \det(\mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}) \otimes \det(\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}).$$

Como $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L})$ possui codimensão $\geqslant 2$, por [Huybrechts e Lehn 2010, 1.1.17] segue que $\det(\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_X$. Logo,

$$\det(\mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}) \cong \mathcal{L}.$$

□

Outro resultado que vamos utilizar será a fórmula de Bott no espaço projetivo [Okonek et al. 1980, Página 4] :

$$h^p(\mathbb{P}^n, \Omega^k_{\mathbb{P}^n}(s)) = \begin{cases} \binom{s+n-k}{s}\binom{s-1}{k}, & \text{para } p = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ e } s > k \\ 1, & \text{para } s = 0 \text{ e } 0 \leqslant k = p \leqslant n \\ \binom{-s+k}{-s}\binom{-s-1}{n-k}, & \text{para } p = n,\ 0 \leqslant k \leqslant n \text{ e } s < k-n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde denotamos $\Omega^k_{\mathbb{P}^n} = \bigwedge^k(\Omega_{\mathbb{P}^n})$.

1.2.2 Feixes μ-estáveis

Nosso objetivo será encontrar uma maneira de calcular quando um feixe é simples, isto é, não possui endomorfismo não-trivial. Para tal, vamos utilizar o conceito de estabilidade de um feixe.

Definição 1.30. *Seja $\mathcal{E}$ um feixe livre de torção em X e H um divisor amplo. Então definimos a inclinação de $\mathcal{E}$ com respeito à H por*

$$\mu_H(\mathcal{F}) = \frac{\deg(c_1(\mathcal{F}) \cdot H^{n-1})}{\mathrm{rk}(\mathcal{F})}.$$

Neste texto, não queremos enfatizar a dependência do divisor amplo H, portanto denotamos a inclinação simplesmente por $\mu(\mathcal{F})$. No caso $X = \mathbb{P}^n$, então H será a classe hiperplana.

Definição 1.31. *Dizemos que um feixe coerente $\mathcal{F}$ é μ-estável, se para cada subfeixe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ com $0 < \mathrm{rk}(\mathcal{F}') < \mathrm{rk}(\mathcal{F})$, temos que $\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$. Também, será μ-semiestável se $\mu(\mathcal{F}') \leqslant \mu(\mathcal{F})$.*

Lema 1.32. *Seja $\phi\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ um morfismo não-nulo. Se um dos feixes for μ-estável e $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{E}_2)$, então ϕ é um monomorfismo ou genericamente um epimorfismo.*

Demonstração. A imagem $I = \mathrm{Im}(\phi) \subset \mathcal{E}_2$ é um quociente livre de torção de $\mathcal{E}_1$ com $\mathrm{rk}(I) > 0$, pois ϕ é não-nulo. Se

$$\mathrm{rk}(I) < \mathrm{rk}(\mathcal{E}_2) \quad \text{e} \quad \mathrm{rk}(I) < \mathrm{rk}(\mathcal{E}_1),$$

então teríamos que

$$\mu(I) \leqslant \mu(\mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_1) < \mu(I), \quad \text{se } \mathcal{E}_1 \text{ é } \mu\text{-estável;}$$
$$\mu(I) < \mu(\mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_1) \leqslant \mu(I), \quad \text{se } \mathcal{E}_2 \text{ é } \mu\text{-estável.}$$

Ambos são absurdos. Consequentemente, temos que

$$\mathrm{rk}(I) = \mathrm{rk}(\mathcal{E}_2) \quad \text{ou} \quad \mathrm{rk}(I) = \mathrm{rk}(\mathcal{E}_1).$$

No primeiro caso, ϕ será um monomorfismo. No último caso, ϕ será um epimorfismo em $X \backslash S(\mathrm{coker}(\phi))$. □

Corolário 1.33. *Seja $\phi\colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ um morfismo não-nulo entre feixes μ-semiestáveis com $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_1) = \mathrm{rk}(\mathcal{E}_2)$ e $c_1(\mathcal{E}_1) = c_1(\mathcal{E}_2)$. Se um dos feixes for μ-estável, então ϕ é um isomorfismo.*

Demonstração. Pelo lema anterior, temos que ϕ é um monomorfismo e portanto $\det(\phi)\colon \det(\mathcal{E}_1) \to \det(\mathcal{E}_2)$ também será. Como $c_1(\mathcal{E}_1) = c_1(\mathcal{E}_2)$, então $\det(\phi)$ será um isomorfismo e consequentemente ϕ também será. □

Proposição 1.34. *Seja $\mathcal{E}$ um feixe μ-estável. Então $\mathcal{E}$ é um feixe simples, isto é, $\mathrm{End}(\mathcal{E}) \cong k$.*

Demonstração. Seja $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ um endomorfismo não-nulo, e $x \in X$. Considere o isomorfismo nas fibras $\phi(x)\colon \mathcal{E}(x) \to \mathcal{E}(x)$, como k é algebricamente fechado, tome $\lambda \in k$ um autovalor não-nulo do isomorfismo $\phi(x)$. Definimos a aplicação

$$\phi - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$$

que será um isomorfismo ou aplicação nula. Como λ é um autovalor, a aplicação acima não pode ser um isomorfismo. Logo, obtemos o resultado. □

Podemos verificar se um feixe é μ-estável pelo quociente, seguindo o próximo teorema.

Teorema 1.35. *Seja $\mathcal{E}$ um feixe livre de torção em X. Então $\mathcal{E}$ é μ-estável (semiestável), se e somente se, $\mu(\mathcal{G}) > \mu(\mathcal{E})$ ($\mu(\mathcal{G}) \geqslant \mu(\mathcal{E})$) para cada quociente livre de torção $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ com $0 < \mathrm{rk}(\mathcal{G}) < \mathrm{rk}(\mathcal{E})$.*

Demonstração. A demonstração se encontra em [Okonek et al. 1980, Teorema 1.2.2]. □

Proposição 1.36. *Seja $\mathcal{E}$ um feixe livre de torção. Então $\mathcal{E}$ é μ-(semi) estável, se e somente se, $\mathcal{E}^*$ for μ-(semi) estável.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{E}$ não é μ-estável. Pelo Teorema 1.35, existe um quociente $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ com $\mathcal{G}$ livre de torção e $\mu(\mathcal{G}) \leqslant \mu(\mathcal{E})$. Dualizando o morfismo do quociente, temos $\mathcal{G}^* \hookrightarrow \mathcal{E}^*$ e $\mu(\mathcal{G}^*) \geqslant \mu(\mathcal{E}^*)$ pois $\mu(\mathcal{E}^*) = -\mu(\mathcal{E})$, assim $\mathcal{E}^*$ não é μ-estável.

Agora, suponha que $\mathcal{E}^*$ não é μ-estável. Novamente temos um quociente $\mathcal{E}^* \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ livre de torção, tal que $\mu(\mathcal{G}) \leqslant \mu(\mathcal{E}^*)$. Obtemos mapa $\phi : \mathcal{G}^* \hookrightarrow \mathcal{E}^{**}$, denotando $\mathcal{K} := \ker(\phi)$ e $\mathcal{I} := \mathrm{Im}(\phi)$, temos um diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{E}^{**} \arrow[r] & Q_{\mathcal{E}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{E}$ é livre de torção, temos que $\mathrm{Supp}(\mathcal{I}) \subset \mathrm{Supp}(Q_{\mathcal{E}})$ possui codimensão $\geqslant 2$. Consequentemente, $\mu(\mathcal{G}^*) = \mu(\mathcal{K})$. Logo, $\mu(\mathcal{E}) \leqslant \mu(\mathcal{G}^*) = \mu(\mathcal{K})$, ou seja, $\mathcal{E}$ não é μ-estável. □

Exemplo 1.37. *O feixe tangente de uma hipersuperfície X_d de grau d em $\mathbb{P}^3$ é μ-estável quando $d \geqslant 3$ e $\mathrm{Pic}(X_d) \cong \mathbb{Z}$.*

De fato, é mais simples mostrarmos que o seu dual Ω_{X_d} é μ-estável e consequentemente TX_d também será, pela Proposição 1.36. Utilizando 1.3 sabemos que

$$c_1(\Omega_{X_d}) = -c_1(TX_d) = (d-4)h \in A^1(X_d)$$

e que Ω_{X_d} possui posto 2. Então a inclinação será

$$\mu(\Omega_{X_d}) = \frac{d-4}{2}.$$

Para um feixe $\mathcal{L} \subset \Omega_{X_d}$ de posto $r = 1$, temos que $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(k)$, ou seja, $c_1(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{O}_X(k)) = kh$. Como $\deg(h^2) = d$, sua inclinação será

$$\mu(\mathcal{L}) = \frac{\deg(c_1(\mathcal{L}) \cdot h)}{r} = kd$$

Note que dar um morfismo $\mathcal{O}_X(l) \to \Omega_{X_d}$ é a mesma coisa que dar uma seção não nula de $H^0(X_d, \Omega_{X_d}(-l))$ e, como $2 = \min\{l \in \mathbb{Z} \mid H^0(X_d, \Omega_{X_d}(l)) \neq 0\}$, a maior inclinação possível para $\mathcal{L}$ seria $k = -2$. Porém, como $d \geqslant 3$, então

$$\mu(\mathcal{L}) = -2d < \frac{d-4}{2} = \mu(\Omega_{X_d})$$

Logo Ω_{X_d} é μ-estável e consequentemente o seu dual TX_d também será.

2 Folheações

Neste capítulo, daremos uma introdução dos conceitos básicos da teoria de distribuições e folheações na geometria algébrica. Seguimos as referências [Calvo-Andrade, Corrêa e Jardim 2020], [Corrêa, Jardim e Marchesi 2023] na parte de distribuições e folheações por curvas e [Brunella 2015] para folheações em superfícies.

2.1 Distribuições

Seja X uma variedade projetiva suave de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado k.

Definição 2.1. *Uma distribuição $\mathcal{F}$ de dimensão p (ou codimensão $n-p$) em X é definida por uma sequência exata curta,*

$$0 \longrightarrow T_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varphi} TX \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

onde $T_{\mathcal{F}}$ é um feixe coerente de posto p, e $N_{\mathcal{F}}$ é um feixe livre de torção de posto $n-p$.

Chamamos $N_{\mathcal{F}}$ e $T_{\mathcal{F}}$ de feixe normal e feixe tangente da distribuição $\mathcal{F}$, respectivamente. Também, chamamos o dual $N_{\mathcal{F}}^*$ de feixe conormal. Uma propriedade imediata que segue da Proposição 1.25, é que o feixe tangente $T_{\mathcal{F}}$ de qualquer distribuição $\mathcal{F}$ é reflexivo.

Definição 2.2. *Dizemos que duas distribuições $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ definidas por $\varphi\colon T_{\mathcal{F}} \to TX$ e $\varphi'\colon T_{\mathcal{F}'} \to TX$, respectivamente, são isomorfas se existir um isomorfismo $\beta : T_{\mathcal{F}} \to T_{\mathcal{F}'}$ tal que $\varphi' \circ \beta = \varphi$.*

Podemos definir uma distribuição por uma seção global da seguinte forma. Considere $\mathcal{F}$ uma distribuição de dimensão p em X dada pelo mapa $\varphi\colon T_{\mathcal{F}} \to TX$. Tomando a potência exterior máxima $\bigwedge^p \varphi\colon \det(T_{\mathcal{F}}) \to \bigwedge^p TX$, obtemos uma seção induzida $\omega_{\mathcal{F}} \in H^0\Big(X, \bigwedge^p TX \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^*\Big)$.

Agora, considere um isomorfismo $\beta\colon T_{\mathcal{F}} \to T_{\mathcal{F}'}$ entre duas distribuições $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$, tomando a potência exterior máxima $\wedge^p(\varphi') \circ \det(\beta) = \wedge^p\varphi$. Como $\det(T_{\mathcal{F}}) \cong \det(T_{\mathcal{F}'})$, então $\det(\beta) = \lambda\mathrm{id}$ para algum $\lambda \in k^*$, e consequentemente $\wedge^p(\varphi) = \lambda \wedge^p(\varphi')$. Dessa forma, temos igualdade nas seções globais $\omega_{\mathcal{F}} = \lambda\omega_{\mathcal{F}'}$. Portanto, toda classe de isomorfismo de distribuições de dimensão p em X, induz um elemento de

$$\mathbb{P}H^0(X, \bigwedge^p TX \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^*)$$

que será o espaço das distribuições de dimensão p em X. A construção acima pode ser feita de uma forma dual, utilizando o isomorfismo canônico

$$\bigwedge^p TX \cong \Omega_X^{n-p} \otimes \omega_X^* \ , \text{ para } 1 \leqslant p \leqslant n,$$

onde ω_X é o feixe canônico e $\Omega_X^{n-p} = \bigwedge^{n-p} \Omega_X$. Dessa forma, temos igualdade

$$\mathbb{P}H^0(X, \bigwedge^p TX \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^*) = \mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^{n-p} \otimes \det(N_{\mathcal{F}})). \tag{2.2}$$

Construimos o esquema singular de uma distribuição de dimensão p, por considerando o mapa dual $\varphi^* \colon \Omega_X \to T_{\mathcal{F}}^*$ e tomando a potência exterior máxima $\wedge^p(\varphi^*) \colon \Omega_X^p \to \det(T_{\mathcal{F}})^*$, a imagem de tal morfismo será um feixe de ideais $\mathcal{I}_Z$ torcido por $\det(T_{\mathcal{F}})^*$, onde $Z \subset X$ é um subesquema fechado que será o esquema singular da distribuição, assim $Z = \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Uma seção $\omega \in H^0(X, \Omega_X^{n-p} \otimes \mathcal{L})$ define uma distribuição de dimensão p e com $\det(N_{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}$, se para $p \in X \backslash \text{Sing}(\omega)$ existe uma vizinhança U de p e 1-formas $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}$ em U tais que

$$\omega\big|_U = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-p}.$$

Nesse caso, dizemos que ω é localmente decomponível fora do lugar singular, ou simplesmente LDS.

Como TX é localmente livre, sabemos que $\mathcal{E}xt^q(TX, \mathcal{O}_X) = 0$ para todo $q \geqslant 1$. Portanto, ao dualizar a sequência exata (2.1), obtemos isomorfismos

$$\mathcal{E}xt^q(T_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{E}xt^{q+1}(N_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X), \text{ para } q \geqslant 1 \tag{2.3}$$

Uma outra observação que fazemos é que, o esquema singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ sempre coincide com o conjunto singular do feixe normal $N_{\mathcal{F}}$, seguindo (1.4).

Proposição 2.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição de dimensão p em X. Se $T_{\mathcal{F}}$ for localmente livre, então o esquema singular Z de $\mathcal{F}$ coincide como conjunto com o lugar de degeneração de φ.*

Demonstração. Se $T_{\mathcal{F}}$ for localmente livre, então $\mathcal{E}xt^q(T_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X) = 0$ para todo $q \geqslant 1$, portanto dos isomorfismos (2.3) obtemos que $\mathcal{E}xt^q(N_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X) = 0$ para $q \geqslant 2$. Por (1.4)

$$\begin{aligned} \text{Sing}(N_{\mathcal{F}}) &= \bigcup_{q=1}^{n} \text{Supp}(\mathcal{E}xt^q(N_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X)) \\ &= \text{Supp}(\mathcal{E}xt^1(N_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X)) \\ &= \{x \in X \mid \varphi(x) \text{ não é injetivo}\} \end{aligned}$$

□

2.1.1 Distribuições de codimensão 1

Vamos considerar o caso de distribuições de dimensão $p = n - 1$ em X, ou seja, codimensão 1. Então, o feixe normal $N_{\mathcal{F}}$ é livre de torção e possui posto 1. Logo, pelo Lema 1.28, $N_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ e $Z \subset X$ será o esquema singular da distribuição.

Uma distribuição $\mathcal{F}$ em X de codimensão 1, será definida por uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TX \longrightarrow \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L} \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

e nesse caso $\mathcal{L} \cong \omega_X^* \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^*$. Assim, por (2.2), como $p = n - 1$, uma distribuição de codimensão 1 define uma seção global $\omega \in H^0(X, \Omega_X \otimes \omega_X^* \otimes \det(T_{\mathcal{F}})^*)$, ou seja, $\omega \in H^0(X, \Omega_X \otimes \mathcal{L})$, e seções múltiplas vão definir distribuições isomorfas. Note que $N_{\mathcal{F}}^*$ é localmente livre e pela notação acima $N_{\mathcal{F}}^* \cong \mathcal{L}^*$, assim podemos definir a distribuição pelo mapa $N_{\mathcal{F}}^* \to \Omega_X$.

Lema 2.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição de codimensão 1. Se $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre, então o esquema singular possui codimensão pura 2.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição de codimensão 1 em X e Z o seu esquema singular. Como $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre, então sabemos que

$$\mathcal{E}xt^q(T_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}_X) = 0, \text{ para } q \geqslant 1.$$

Do isomorfismo (2.3) e utilizando que $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L}$,

$$\mathcal{E}xt^q(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X) = 0, \text{ para } q \geqslant 2.$$

Da sequência exata,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0,$$

obtemos que,

$$\mathcal{E}xt^{q+1}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{E}xt^q(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X), \text{ para } q \geqslant 1,$$

ou seja,

$$\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X) = 0, \text{ para } q \geqslant 3.$$

Por [Huybrechts e Lehn 2010, Proposição 1.1.10], como $\mathcal{O}_Z$ é puro, então Z possui codimensão pura 2. □

2.2 Folheações

Definição 2.5. *Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão p em X é uma distribuição de dimensão p integrável, isto é, uma distribuição*

$$0 \longrightarrow T_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varphi} TX \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

na qual o feixe tangente é fechado pelo colchete de Lie para campos vetoriais, ou seja, $[\varphi(T_{\mathcal{F}}), \varphi(T_{\mathcal{F}})] \subset \varphi(T_{\mathcal{F}})$.

Podemos verificar a diferença entre distribuições e folheações pela condição de integrabilidade de $\omega \in H^0(X, \Omega_X^{n-p} \otimes \det(N_{\mathcal{F}}))$. A condição de integrabilidade pode ser descrita da seguinte forma: Seja $U \subset X$ um aberto e $\omega \in \Gamma(U, \Omega_X^k)$. Para $p \in U \backslash \mathrm{Sing}(\omega)$ existe uma vizinhança $V \in p$, com $V \subset U$ e 1-formas $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \Gamma(V, \Omega_X)$ tal que

$$\omega\big|_V = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k.$$

Assim, ω satisfaz a condição de integrabilidade, se e somente se,

$$d\eta_j \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k = 0$$

para cada $j = 1, \ldots, k$.

2.2.1 Folheações por curvas

Considere $\mathcal{F}$ uma distribuição de dimensão 1 em X. Então, $T_{\mathcal{F}}$ é reflexivo e possui posto 1, pelo Lema 1.26, segue que $T_{\mathcal{F}}$ é localmente livre. A sua imagem será gerada localmente por um único campo vetorial e portanto seu colchete de Lie será nulo, logo a distribuição é integrável. Vamos chamar de folheação por curvas uma distribuição de dimensão 1.

Definição 2.6. *Uma folheação por curvas $\mathcal{F}$ em X é definida por uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow TX \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

onde $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ e $N_{\mathcal{F}}$ é um feixe livre de torção de posto $n-1$.

Uma folheação por curvas $\mathcal{F}$, definida por $\mathcal{L} \hookrightarrow TX$, vai induzir uma seção não-nula $\omega_{\mathcal{F}} \in H^0(X, TX \otimes \mathcal{L}^*)$. Seções múltiplas, vão definir folheações por curvas isomorfas. Dessa forma, o espaço de folheações por curvas com feixe tangente $\mathcal{L}$ será

$$\mathbb{P}H^0(X, TX \otimes \mathcal{L}^*). \tag{2.6}$$

O esquema singular da folheação $\mathcal{F}$ coincidirá com o esquema de zeros da seção $\omega_{\mathcal{F}}$, que será relembrado na Seção 3.1. Também podemos aplicar a Proposição 2.3 e assim sabemos que $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ possui codimensão $\geqslant 2$ pelo Corolário 1.23.

A relação entre o feixe tangente e o normal se dá tomando o determinante na sequência exata

$$\det(N_{\mathcal{F}}) \cong \omega_X^* \otimes \mathcal{L}^*.$$

Portanto, o mais interessante seria estudar folheações por curvas com feixe tangente fixado.

Lema 2.7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas em uma variedade projetiva suave X. Se $N^*_{\mathcal{F}}$ é localmente livre, então o esquema singular possui codimensão pura 2.*

Demonstração. A demonstração é análogo ao caso do Lema 2.4. □

Dada uma folheação por curvas $\mathcal{F}$ com feixe tangente $\mathcal{L}$ e seção associada $v \in H^0(X, TX \otimes \mathcal{L}^*)$. Vamos dizer que $\mathcal{F}$ possui singularidades isoladas quando o esquema singular Sing($\mathcal{F}$) for 0-dimensional. Nesse caso, vamos denotar com letra minúscula sing($\mathcal{F}$) a quantidade de pontos no esquema singular, contando as multiplicidades.

2.3 Folheações de (Co)dimensão 1 em $\mathbb{P}^n$

Já vimos que o feixe tangente de uma folheação por curvas é um feixe invertível, e como Pic($\mathbb{P}^n$) $\cong \mathbb{Z}$, então $T_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Pelo dual da sequência de Euler:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^n \longrightarrow 0. \tag{2.7}$$

Ao tomar a cohomologia na sequência exata, e utilizando os anulamentos da cohomologia do feixe estrutural torcido de $\mathbb{P}^n$ [Hartshorne 2013, Capítulo 3; Teorema 5.1], obtemos que

$$-1 = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid H^0(\mathbb{P}^n, \mathrm{T}\mathbb{P}^n(k)) \neq 0). \tag{2.8}$$

Definição 2.8. *Uma folheação por curvas de grau r em $\mathbb{P}^n$, é definida por um morfismo*

$$\varphi\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-r+1) \to \mathrm{T}\mathbb{P}^n.$$

Dessa forma, uma folheação por curvas de grau r é definida por uma seção global de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1))$, que por (2.8) é garantido que $r \geqslant 0$. Pela sequência (2.7)

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r-1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))^{\oplus n+1} \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1)) \longrightarrow 0.$$

O último mapa é sobrejetivo, assim toda seção de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1))$ é imagem de uma seção de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))^{\oplus n+1}$, ou seja, toda folheação por curvas de grau r em $\mathbb{P}^n$ pode ser definida por um campo vetorial homogêneo afim

$$V = \sum_{i=1}^{n+1} V_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $V_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r))$ é um polinômio homogêneo de grau r. Dois campos V e V' definem a mesma folheação, se a sua diferença pertence ao núcleo do último mapa, que é igual a imagem do primeiro mapa (campo radial), dessa forma

$$V - V' = g.R,$$

onde $g \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r-1))$ é um polinômio homogêneo de grau $r-1$ e $R = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ é o campo radial.

Proposição 2.9. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas de grau $r \geqslant 0$ em $\mathbb{P}^n$ com singularidades isoladas. Então,*

$$\text{sing}(\mathcal{F}) = r^n + r^{n-1} + \cdots + r + 1.$$

Demonstração. Considere $v \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1))$ a seção associada à folheação $\mathcal{F}$. Seja Z o esquema de zeros de v, que também será o esquema singular de $\mathcal{F}$. Como Z é 0-dimensional, ou seja, possui codimensão n, então pelo Teorema 1.13

$$c_n(\mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1)) = [Z].$$

Dessa forma, $\deg(c_n(\mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1)))$ será a quantidade de pontos, contando as multiplicidades. Utilizando o Exemplo 1.18, proposição 1.17 e que $\deg(H^n) = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\text{sing}(\mathcal{F}) = \deg(c_n(\mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1))) &= \sum_{i=o}^{n} \binom{n-i}{n-i} c_i(\mathrm{T}\mathbb{P}^n) c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r-1))^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (r-1)^{n-i} = \frac{r(r-1)^n(\frac{r}{r-1})^n - 1}{r-1} = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \\
&= r^n + r^{n-1} + \cdots + r + 1.
\end{aligned}$$

□

Uma distribuição $\mathcal{F}$ de codimensão 1 possui feixe conormal $N^*_{\mathcal{F}}$ invertível, assim $N^*_{\mathcal{F}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Pela sequência de Euler:

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0 \tag{2.9}$$

e o mesmo processo do feixe tangente

$$2 = \min\{k \in Z \mid H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(k) \neq 0).$$

Definição 2.10. *Uma distribuição de codimensão 1 e grau r em $\mathbb{P}^n$ é definida por um morfismo*

$$\varphi \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-r-2) \to \Omega_{\mathbb{P}^n}.$$

Também será definida por uma seção global de $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(r+2))$. Para $r \geqslant 0$, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(r+2)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r+1))^{\oplus n+1} \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r+2)) \longrightarrow 0.$$

Consequentemente, toda seção global de $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(r+2))$ induz uma única seção de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r+1))^{\oplus n+1}$, que pertence ao núcleo do último mapa, sendo contração pelo campo radial. Em outras palavras, podemos representar uma distribuição de codimensão 1 e grau r, por uma 1-forma afim

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} A_i dx_i,$$

onde cada A_i é um polinômio homogêneo de grau $r+1$ e que tal forma satisfaz a condição de Euler (núcleo da contração)

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_{n+1}x_{n+1} = 0.$$

Uma distribuição como acima será uma folheação se a 1-forma ω satisfaz a condição de integrabilidade, ou seja, ω é integrável se e somente se

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

Temos um teorema específico que garante quando uma distribuição não será folheação.

Teorema 2.11. *Seja $\mathcal{F}$ uma distribuição de codimensão 1 em $\mathbb{P}^3$ de grau $r > 0$ com $T_{\mathcal{F}}$ localmente livre. Se $\operatorname{Sing}(\mathcal{F})$ for suave e conexo, então $\mathcal{F}$ não é integrável.*

Demonstração. A demonstração se encontra em [Calvo-Andrade, Corrêa e Jardim 2020, Teorema 3.11]. □

Agora, considere $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave de grau d com $\operatorname{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. Vamos relacionar distribuições de codimensão 1 em X com as em $\mathbb{P}^n$. Dada a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0,$$

tensorizando-a por $\Omega_{\mathbb{P}^n}$ temos uma nova sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(-d) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}\big|_X \longrightarrow 0.$$

Relacionando a sequência anterior com a sequência normal de X,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-d) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}\big|_X \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0,$$

obtemos o seguinte diagrama em $\mathbb{P}^n$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \Omega_{\mathbb{P}^n}(-d) \arrow[d] & & \\
 & & \Omega_{\mathbb{P}^n} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(-d) \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{P}^n}\big|_X \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_X \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Pelo lema da serpente, podemos completar o diagrama acima da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{P}^n}(-d) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega_{\mathbb{P}^n}(-d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{\mathbb{P}^n} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(-d) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{\mathbb{P}^n}\big|_X \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

O objetivo é saber se temos um mapa sobrejetor $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) \to H^0(X, \Omega_X(l))$ para qualquer $l \in \mathbb{Z}$. Para tal, vamos utilizar a sequência exata da primeira coluna para calcular a cohomologia feixe $K(l)$ e da segunda linha para garantir a existência do mapa. Assim, considere:

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(l-d) \longrightarrow K(l) \longrightarrow \mathcal{O}_X(l-d) \longrightarrow 0.$$

Tomando a cohomologia

$$\cdots \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_X(l-d)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(l-d)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, K(l)) \longrightarrow 0.$$

Pela fórmula de Bott, sabemos que $H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(l-d)) = 0$ para $l \neq d$ e $H^1(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$. Consequentemente, $H^1(\mathbb{P}^n, K(l)) = 0$ para $l \neq d$. Agora, considere

$$0 \longrightarrow K(l) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(l) \longrightarrow \Omega_X(l) \longrightarrow 0,$$

tomando a cohomologia e considerando $l \neq d$,

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, K(l)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_X(l)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, K(l)) = 0.$$

Consequentemente, temos um mapa sobrejetor $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(l)) \to H^0(X, \Omega_X(l))$ para $l \neq d$. Como uma distribuição de codimensão 1 e grau r em $\mathbb{P}^n$ é definida por uma seção $\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(r+2))$ e uma distribuição de codimensão 1 e grau r em X será uma seção $\omega' \in H^0(X, \Omega_X(r+2))$. Logo, temos um mapa sobrejetor

$$H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}(r+2)) \twoheadrightarrow H^0(X, \Omega_X(r+2)) \text{ para todo } r \neq d-2.$$

Proposição 2.12. *Seja $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave de grau d, com $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. Então, toda distribuição de codimensão 1 e grau $r \neq d-2$ em X é a restrição de uma distribuição de codimensão 1 e mesmo grau em $\mathbb{P}^n$.*

2.4 Folheações em superfícies

Nesta seção, introduziremos as notações e propriedades de folheações por curvas em superfícies, ou seja, em variedades de dimensão 2. Nesse caso, as únicas distribuições possíveis são folheações por curvas que também terão codimensão 1. Utilizando a teoria que definimos nas seções anteriores,

Definição 2.13. *Uma folheação $\mathcal{F}$ em uma superfície S, é definido por uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow T_{\mathcal{F}} \longrightarrow TS \longrightarrow \mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{L} \longrightarrow 0,$$

onde $T_{\mathcal{F}}, \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ e Z é o esquema singular de $\mathcal{F}$.

A principal relação entre os feixes $T_{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{L}$ se dá pelo isomorfismo

$$\omega_S \cong T_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{L}^* \tag{2.10}$$

onde ω_S é o feixe canônico da superfície.

Sabemos que Z possui codimensão $\geqslant 2$, assim temos duas possíveis situações: $Z = \varnothing$ que será chamada de folheação regular ou Z é um esquema 0-dimensional.

Proposição 2.14. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma superfície S. Então, temos a igualdade*

$$\mathrm{sing}(\mathcal{F}) = c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(T_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(\omega_S) + c_2(TS).$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.13, sabemos que uma seção $s \in H^0(S, TS \otimes \mathcal{L}^*)$ com singularidades isoladas possui esquema de zeros equivalente a $c_2(TS \otimes \mathcal{L}^*)$. Pela Proposição 1.17,

$$\begin{aligned} c_2(TS \otimes \mathcal{L}^*) &= c_1(\mathcal{L}^*)c_1(\mathcal{L}^*) + c_1(\mathcal{L}^*)c_1(TS) + c_2(TS) \\ &= c_1(\mathcal{L})c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{L})c_1(\omega_S) + c_2(TS). \end{aligned}$$

No caso em que $\mathcal{L} = T_{\mathcal{F}}$, então $Z(s) = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, consequentemente,

$$\mathrm{sing}(\mathcal{F}) = c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(T_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(\omega_S) + c_2(TS).$$

□

Uma consequência imediata da proposição acima, é que se $\mathcal{F}$ for uma folheação regular, então

$$c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(T_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(\omega_S) + c_2(TS) = 0$$

Temos alguns exemplos de superfícies que não admitem folheações regulares:

Exemplo 2.15. *Considere $S = \mathbb{P}^2$. Da Proposição 2.9, uma folheação de grau $r \geqslant 0$ em $\mathbb{P}^2$ possui $r^2 + r + 1$ singularidades. Logo, toda folheação em $\mathbb{P}^2$ possui singularidades.*

Exemplo 2.16 (Superfície K3)**.** *Suponha que S é uma superfície $K3$, ou seja, $\omega_S \cong \mathcal{O}_S$ e $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Em [Huybrechts 2016, Página 13], utilizando Teorema de Hirzebruch–Riemann–Roch é obtido que $c_2(TS) = 24$, além disso*

$$c_1(\omega_S) = c_1(\mathcal{O}_S) = 0.$$

Considere $\mathcal{F}$ uma folheação em S. Então

$$c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(T_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(\omega_S) + c_2(TS) = c_1(T_{\mathcal{F}})^2 + 24 \neq 0$$

Logo, toda folheação em uma superfície K3 possui singularidades.

Uma classificação de folheações regulares em superfícies complexas compactas foi feita em [Brunella 1997]. Uma superfície S admitir uma folheação regular, impõe restrições topológicas. Assim, estamos mais interessados nas singularidades do que na falta delas.

Considere o caso em que $\mathrm{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}$. Definimos o número τ_S por

$$\tau_S := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid H^0(S, TS(k)) \neq 0\}, \tag{2.11}$$

ou seja, para $k < \tau_S$ temos que $H^0(S, TS(k)) = 0$. Portanto, vamos definir o feixe tangente de uma folheação em S por $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_S(-r - \tau_S)$ e assim a seção associada $v \in H^0(S, TS(r + \tau_S))$ estará definida para $r \geqslant 0$. Do isomorfismo (2.10), temos

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}} &\cong T^*_{\mathcal{F}} \otimes \omega^*_S \\ &\cong \mathcal{O}_S(r + \tau_S) \otimes \mathcal{O}_S(-K_S). \end{aligned}$$

Definição 2.17. *Seja S uma superfície com $\mathrm{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}$. Uma folheação de grau r em S é definida por uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-r - \tau_S) \longrightarrow TS \longrightarrow \mathcal{I}_Z(r + \tau_S - K_S) \longrightarrow 0,$$

onde Z é o esquema singular.

Exemplo 2.18. *Considere X uma hipersuperfície de grau $d = 4$ em $\mathbb{P}^3$, com $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. Portanto, seu feixe canônico será $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(d-4) = \mathcal{O}_X$ e pela sequência exata*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

obtemos que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, ou seja, X será uma superfície K3. Do isomorfismo $TX \cong \Omega_X \otimes \omega_X \cong \Omega_X$, garantimos que $\tau_X = 2$. Assim, uma folheação $\mathcal{F}$ de grau r em X é definida pela sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-r-2) \longrightarrow TX \longrightarrow \mathcal{I}_Z(r+2) \longrightarrow 0$$

Do Exemplo 2.16 e que $\deg(h^2) = 4$, onde $h = H\big|_X$, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{sing}(\mathcal{F}) &= c_1(T_{\mathcal{F}})^2 + 24 = c_1(\mathcal{O}_X(-r-2))^2 + 24 \\ &= 4(-r-2)^2 + 24 = 4(r+2)^2 + 24 \\ &= 4r^2 + 16r + 40 \end{aligned}$$

ou seja, uma folheação de grau r possui $4r^2 + 16r + 40$ pontos singulares.

3 Folheações determinadas unicamente pelo esquema singular

Neste capítulo, estudaremos os casos em que o esquema singular determina completamente a folheação por curvas, ou seja, duas folheações por curvas com o mesmo esquema singular serão isomorfas e portanto vão definir a mesma classe no espaço das folheações por curvas (2.6).

3.1 Zeros de seções

Seja $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre em um esquema X e considere $x \in X$ um ponto qualquer. Vamos chamar a fibra de $\mathcal{E}$ em x o $k(x)$-espaço vetorial $\mathcal{E}(x)$, onde

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x \cong \mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x).$$

Se $U \subseteq X$ é um conjunto aberto contendo x e $s \in \Gamma(U, \mathcal{E})$ é uma seção sobre U, vamos denotar por $s(x)$ a imagem do germe $s_x \in \mathcal{E}_x$ na fibra $\mathcal{E}(x)$.

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre em um esquema X e seja $s \in H^0(X, \mathcal{E})$ uma seção global. Definimos o conjunto de zeros de s por*

$$Z(s) = \{x \in X \mid s(x) = 0\}.$$

Note que o conjunto $Z(s)$ é um conjunto fechado de X e podemos definir uma estrutura canônica de esquema. Podemos ver uma seção global $s \in H^0(X, \mathcal{E}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{E})$ como um morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $s\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$. Considerando o mapa dual

$$s^* : \mathcal{E}^* \to \mathcal{O}_X,$$

a imagem de s^* é um feixe de ideais de $\mathcal{O}_X$. Tal feixe de ideais é associado à $Z(s)$ que pela relação 1-1 entre subesquemas fechados e feixes de ideais, obtemos que $Z(s)$ possui uma estrutura de subesquema fechado.

3.2 Seções com singularidades isoladas

Nesta seção vamos seguir os resultados do artigo [Campillo e Olivares 2003]. Dizemos que uma seção $s \in H^0(X, \mathcal{E})$ de um feixe localmente livre possui singularidades isoladas, se o seu esquema de zeros $Z(s)$ é 0-dimensional. Também, fixado um feixe amplo $\mathcal{L}$ e $\mathcal{E}$ localmente livre, vamos utilizar a notação $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes r}$ para $r \geqslant 0$ e $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E} \otimes (\mathcal{L}^*)^{\otimes |r|}$ para $r < 0$.

Teorema 3.2. *Seja X uma variedade projetiva suave de dimensão $n \geqslant 2$, com um feixe amplo $\mathcal{L}$ e seja $\mathcal{E}$ um feixe localmente livre de posto n. Existe um inteiro r_0 tal que, para cada $r \geqslant r_0$, temos que*

Dada uma seção global $s \in H^0(X, \mathcal{E}(r))$ com singularidades isoladas:

1. *Uma seção global $s' \in H^0(X, \mathcal{E}(r))$ satisfaz $Z(s') \supseteq Z(s)$ se e somente se $s' = \varphi(s)$, para algum endomorfismo $\varphi \in H^0(X, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*) \cong \boldsymbol{End}(\mathcal{E})$.*

2. *Em particular, se $\mathcal{E}$ for simples, então $Z(s') \supseteq Z(s)$ se e somente se $s' = \lambda s$ para algum $\lambda \in k^*$. Portanto, a classe $[s] \in \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{E}(r)))$ é unicamente determinada pelo seu esquema singular.*

Demonstração. Fixe $s \in H^0(X, \mathcal{E}(r))$ com singularidades isoladas e considere o complexo de Koszul

$$\mathcal{C}_* \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \\ \mathcal{J}_Z \longrightarrow 0 \end{cases}$$

associado a $Z = Z(s)$. Que é dado por um complexo de feixes

$$0 \to \bigwedge^n \mathcal{E}^*(-nr) \xrightarrow{\bar{s_n}} \dots \xrightarrow{\bar{s_3}} \bigwedge^2 \mathcal{E}^*(-2r) \xrightarrow{\bar{s_2}} \mathcal{E}^*(-r) \xrightarrow{\bar{s_1}} \begin{cases} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\bar{s_0}} \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0 \\ \mathcal{J}_Z \longrightarrow 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Como Z possui codimensão n, o complexo será exato. Agora, considere $\mathcal{C}_* \otimes \mathcal{E}(r)$ obtido tensorizando a sequência (3.1) por $\mathcal{E}(r)$. Para simplificar a notação, vamos denotar

$$\mathcal{G}^q = \bigwedge^q \mathcal{E}^*(-qr) \otimes \mathcal{E}, \quad \text{para} \quad q = 1, \dots, n;$$

com isso,

$$\mathcal{G}^q(r) = \bigwedge^q \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}(r - qr) = \bigwedge^q \mathcal{E}^*((1-q)r) \otimes \mathcal{E}, \quad \text{para} \quad q = 1, \dots, n.$$

Em particular, $\mathcal{G}^1(r) = \mathcal{E}^*(-r) \otimes \mathcal{E}(r) = \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} = \mathcal{G}^1$. Também, como $\mathcal{O}_Z \otimes \mathcal{E}(r) = \mathcal{E}(r)\big|_Z$ (feixe restrito ao esquema Z), segue que $\mathcal{C}_* \otimes \mathcal{E}(r)$ é da seguinte forma

$$0 \to \mathcal{G}^n(r) \xrightarrow{s_n} \dots \xrightarrow{s_3} \mathcal{G}^2(r) \xrightarrow{s_2} \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{s_1} \mathcal{E}(r) \xrightarrow{s_0} \mathcal{E}(r)\big|_Z \to 0. \tag{3.2}$$

Podemos quebar a sequência exata acima em sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^0(r) \longrightarrow \mathcal{E}(r) \xrightarrow{s_0} \mathcal{E}(r)\big|_Z \longrightarrow 0, \quad \text{para} \quad p = 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^1(r) \longrightarrow \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{s_1} \mathcal{K}^0(r) \longrightarrow 0, \quad \text{para} \quad p = 1;$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^p(r) \longrightarrow \mathcal{G}^p(r) \xrightarrow{s_p} \mathcal{K}^{p-1}(r) \longrightarrow 0, \quad \text{para} \quad p = 2, \dots, n-2;$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^n(r) \longrightarrow \mathcal{G}^{n-1}(r) \xrightarrow{s_{n-1}} \mathcal{K}^{n-2}(r) \longrightarrow 0, \quad \text{para} \quad p = n-1;$$

identificando os feixes $\mathcal{K}^{n-1}(r)$ e $\mathcal{G}^n(r)$ pelo mapa injetivo s_n. A parte relevante da sequência exata da cohomologia associada para $p = 0$, é dada por

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}^0(r)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}(r)) \xrightarrow{s_0^0} H^0(X, \mathcal{E}(r)\big|_Z) \rightarrow \dots \tag{3.3}$$

para $p = 1$, por

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}^1(r) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{s_1^0} H^0(X, \mathcal{K}^0(r)) \xrightarrow{\delta_1^0} \tag{3.4}$$

$$\xrightarrow{\delta_1^0} H^1(X, \mathcal{K}^1(r) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}^0(r)) \longrightarrow \dots \tag{3.5}$$

para $2 \leqslant p \leqslant n-2$, por

$$\dots \longrightarrow H^{p-2}(X, \mathcal{K}^p(r)) \longrightarrow H^{p-2}(X, \mathcal{G}^p(r)) \xrightarrow{s_p^{p-2}} H^{p-2}(X, \mathcal{K}^{p-1}(r)) \xrightarrow{\delta_p^{p-2}} \tag{3.6}$$

$$\xrightarrow{\delta_p^{p-2}} H^{p-1}(X, \mathcal{K}^p(r)) \longrightarrow H^{p-1}(X, \mathcal{G}^p(r)) \xrightarrow{s_p^{p-1}} H^{p-1}(X, \mathcal{K}^{p-1}(r)) \xrightarrow{\delta_p^{p-1}} \tag{3.7}$$

$$\xrightarrow{\delta_p^{p-1}} H^{p}(X, \mathcal{K}^p(r)) \longrightarrow H^{p}(X, \mathcal{G}^p(r)) \longrightarrow H^{p}(X, \mathcal{K}^{p-1}(r)) \longrightarrow \dots \tag{3.8}$$

por último, para $p = n-1$, por

$$\dots \longrightarrow H^{n-3}(X, \mathcal{G}^n(r)) \longrightarrow H^{n-3}(X, \mathcal{G}^{n-1}(r)) \xrightarrow{s_{n-1}^{n-3}} H^{n-3}(X, \mathcal{K}^{n-2}(r)) \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-3}} \tag{3.9}$$

$$\xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-3}} H^{n-2}(X, \mathcal{G}^n(r)) \longrightarrow H^{n-2}(X, \mathcal{G}^{n-1}(r)) \xrightarrow{s_{n-1}^{n-2}} H^{n-2}(X, \mathcal{K}^{n-2}(r)) \xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-2}} \tag{3.10}$$

$$\xrightarrow{\delta_{n-1}^{n-2}} H^{n-1}(X, \mathcal{G}^n(r)) \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{G}^{n-1}(r)) \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{K}^{n-2}(r)) \longrightarrow \dots \tag{3.11}$$

Para provarmos a afirmação 1, seja $s' \in H^0(X, \mathcal{E}(r))$ um seção global tal que $Z(s') \supseteq Z(s)$. Por construção, ambas as seções s, s' pertencem ao núcleo do mapa s_0^0 em (3.3). Como o mapa s_1^0 em (3.4) é da forma $s_1^0(\varphi) = \varphi(s)$, é suficiente mostrar que existe um inteiro r_0 tal que s_0^1 é um isomorfismo para cada $r \geqslant r_0$. De (3.4), essa condição é equivalente a

$$H^0(X, \mathcal{K}^1(r)) = H^1(X, \mathcal{K}^1(r)) = 0, \text{ para algum } \ r \geqslant r_0.$$

Perseguindo os diagramas nas sequências (3.6) e (3.9), a condição acima é válida, se existe um r_0 tal que

$$H^p(X, \mathcal{G}^q(r)) = 0, \text{ para } \ r \geqslant r_0, \ 2 \leqslant q \leqslant n, \ q-2 \leqslant p \leqslant q-1. \tag{3.12}$$

A existência de um r_0 é garantida por [Hartshorne 2013, Capítulo 3 Proposição 5.3]. Com isso demonstramos a afirmação 1 e a afirmação 2 é uma consequência direta de 1. □

Note que o teorema acima é válido para qualquer feixe localmente livre de posto igual a dimensão da variedade. Em particular, podemos aplicá-lo ao caso em que a seção define uma folheação por curvas, ou seja, $\mathcal{E} = TX$ e $T_{\mathcal{F}} = (\mathcal{L}^{\otimes r})^*$

Corolário 3.3. *Seja X uma variedade projetiva suave com feixe tangente simples e $\mathcal{L}$ um feixe amplo. Existe um inteiro r_0, tal que para cada $r \geqslant r_0$, dada uma folheação por curvas $\mathcal{F}$ com $T_{\mathcal{F}} = (\mathcal{L}^{\otimes r})^*$ e singularidades isoladas, se existe $\mathcal{F}'$ outra folheação por curvas com mesmo feixe tangente tal que* $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}') \supseteq \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, *então $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.*

Vamos encontrar o valor de r_0 no caso em que $X = \mathbb{P}^n$, assim $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Note que, a demonstração do Teorema 3.2 pode ser resumida em garantir o anulamento da cohomologia em (3.12).

Proposição 3.4. *Seja $n \geqslant 2$. Seja $\mathcal{G}^q(r) = (\bigwedge^q \Omega_{\mathbb{P}^n}) \otimes \mathrm{T}\mathbb{P}^n((1-q)r)$, onde $r \geqslant 1$ e $1 \leqslant q \leqslant n$. Então $H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^q(r)) = 0$ se $p < q$, exceto $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^1(r))$ que é 1-dimensional.*

Demonstração. Primeiro, o feixe tangente $\mathrm{T}\mathbb{P}^n$ é μ-estável e consequentemente é simples, segue que

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^1(r)) = H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathrm{T}\mathbb{P}^n) \cong \mathbf{End}(\mathrm{T}\mathbb{P}^n) \cong k,$$

ou seja, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^1(r))$ é 1-dimensional. Agora, vamos mostrar o anulamento das outras cohomologias. Considere a sequência de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^n \longrightarrow 0.$$

Tensorizando a sequência por $\Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r)$, onde $r > 0$ e $2 \leqslant q \leqslant n$

$$0 \longrightarrow \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r) \longrightarrow \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r+1)^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{G}^q(r) \longrightarrow 0.$$

Tomando a cohomologia

$$\cdots \to H^p(\mathbb{P}^n, \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r+1))^{\oplus n+1} \to H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^q(r)) \to H^{p+1}(\mathbb{P}^n, \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r)) \to \dots$$

Pela fórmula de Bott, os termos da esquerda e direita se anulam quando $1 \leqslant p < q-1$, $2 \leqslant q \leqslant n$ e $p < q$. Assim, precisamos verificar apenas os casos $p = 0$ e $p = q-1$ com $2 \leqslant q \leqslant n$. Para $p = 0$,

$$H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r+1)) = 0, \text{ pois } (1-q)r+1 < q,$$

$$H^1(\mathbb{P}^n, \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r)) = 0, \text{ pois } 2 \leqslant q \leqslant n.$$

Logo,

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^q(r)) = 0, \text{ para } 2 \leqslant q \leqslant n \text{ e } r \geqslant 1.$$

Para $p = q-1$,

$$H^{q-1}(\mathbb{P}^n, \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r+1)) = 0, \text{ para } 2 \leqslant q \leqslant n,$$

$$H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^q_{\mathbb{P}^n}((1-q)r)) = 0, \text{ pois } (1-q)r \neq 0.$$

Logo,

$$H^{q-1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}^q(r)) = 0, \text{ para } 2 \leqslant q \leqslant n \text{ e } r \geqslant 1,$$

e com isso terminamos. $\square$

Na Definição 2.8, uma folheação por curvas em $\mathbb{P}^n$ será uma seção global de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathrm{T}\mathbb{P}^n(r-1))$ e não de $H^0(\mathbb{P}^n, \mathrm{T}\mathbb{P}^n(r))$. Assim, o r_0 obtido acima será $r_0 = 2$ ao invés de 1.

Teorema 3.5. *Seja $n \geqslant 2$ e $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas de grau $r \geqslant 2$ com singularidades isoladas em $\mathbb{P}^n$. Se $\mathcal{F}'$ for outra folheação por curvas de grau r com* $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}') \supseteq \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$*, então $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.*

O caso $r = 0$ também é válido no teorema acima, pela Proposição 2.9 uma folheação de grau $r = 0$ possui apenas 1 ponto singular. Fixando um ponto $p \in \mathbb{P}^n$ a única folheação singular somente nesse ponto será o campo radial saindo dele.

3.3 Esquema singular em hipersuperfícies

Seguindo o artigo [Araujo e Corrêa 2014], temos um teorema mais forte generalizando o Teorema 3.2, no qual não se reduz apenas ao caso de singularidades isoladas e do posto do feixe ser igual a dimensão da variedade.

Teorema 3.6. *Seja X uma variedade projetiva suave, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ feixes localmente livres em X de posto e e g, respectivamente. Seja $\varphi \colon \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ um morfismo genericamente sobrejetivo, denote $\omega_\varphi \in H^0\Big(X, \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G})\Big)$ a seção global associada e Z o seu esquema de zeros. Suponha que são válidas as condições:*

- *Z possui codimensão pura $e - g + 1$;*
- *para cada $i \in \{1, \dots, e-g\}$*

$$H^i\Big(X, \bigwedge^{g}(\mathcal{E}^*) \otimes \bigwedge^{g+i} \mathcal{E} \otimes S_i(\mathcal{G}^*)\Big) = 0.$$

Se $\omega \in H^0\Big(X, \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G})\Big)$ tal que $\omega\big|_Z = 0$, então existe um endomorfismo $\alpha \in \mathrm{End}\Big(\bigwedge^g(\mathcal{E}^*)\Big)$ tal que $\omega = \alpha \circ \omega_\varphi$.

Demonstração. Seja $\omega_\varphi \in H^0(X, \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G}))$ a seção global associada ao morfismo sobrejetivo genérico $\varphi \colon \mathcal{E} \to \mathcal{G}$, e Z o seu zero esquema. A condição de que Z possui codimensão pura $e - g + 1$ permite que consideremos a resolução de Eagon-Northcott de $\mathcal{O}_Z$, [Eisenbud 2013, A.2.6]. Tensorizando a sequência por

$\bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G})$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \bigwedge^e \mathcal{E} \otimes S_{e-g}(\mathcal{G}^*) \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \bigwedge^{e-1} \mathcal{E} \otimes S_{e-g-1}(\mathcal{G}^*) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \bigwedge^{g+1} \mathcal{E} \otimes \mathcal{G}^* \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \bigwedge^g \mathcal{E} \longrightarrow \\ \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G}) \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G})\Big|_Z \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Definindo $\mathcal{M}_i := \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \bigwedge^i \mathcal{E} \otimes S_{i-g}(\mathcal{G}^*)$ para $g \leqslant i \leqslant e$, podemos quebar a sequência acima em sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_e \longrightarrow \mathcal{M}_{e-1} \longrightarrow \mathcal{F}_{e-g} \longrightarrow 0; \tag{3.13}$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{i-g+2} \longrightarrow \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{F}_{i-g+1} \longrightarrow 0; \tag{3.14}$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow 0; \tag{3.15}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G}) \longrightarrow \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G})\Big|_Z \longrightarrow 0. \tag{3.16}$$

Por suposição $\omega \in H^0(X, \bigwedge^g(\mathcal{E}^*) \otimes \det(\mathcal{G}))$ é tal que $\omega\big|_Z = 0$. Segue da última sequência que ω vem de um elemento de $H^0(X, \mathcal{F}_1)$. Vamos mostrar que $H^1(X, \mathcal{F}_2) = 0$. Assim, a sequência (3.15) implica que existe um elemento $\alpha \in \mathrm{End}(\bigwedge^g(\mathcal{E})^*) \cong H^0(X, \bigwedge^g(\mathcal{E})^* \otimes \bigwedge^g \mathcal{E}) = H^0(X, \mathcal{M}_g)$ tal que $\omega = \alpha \circ \omega_\varphi$.

Por suposição

$$H^i(X, \mathcal{M}_{g+i}) = 0$$

para $1 \leqslant i \leqslant e-g$. Aplicando cohomologia na sequência (3.14), os anulamentos acima garantem que temos inclusões

$$H^i(X, \mathcal{F}_{i+1}) \subset H^{i+1}(X, \mathcal{F}_{i+2})$$

para $1 \leqslant i \leqslant e-g-2$. Por outro lado, aplicando cohomologia na sequência (3.13), temos

$$H^{e-g-1}(X, \mathcal{F}_{e-g}) = 0.$$

Por indução descendente, obtemos que $H^1(X, \mathcal{F}_2) = 0$, e consequentemente temos o resultado. □

Podemos utilizar o Teorema 3.6 no dual do morfismo que define uma folheação $\varphi\colon T_{\mathcal{F}} \to TX$, para obter condições de quando o esquema singular determina a folheação. Vamos considerar o caso de uma superfície S. Assim, uma folheação $\mathcal{F}$ será definida pelo mapa dual $\Omega_S \to \mathcal{L}^*$ com $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S)$.

Teorema 3.7. *Seja S uma superfície com feixe tangente simples e seja $\varphi^* : \Omega_S \to \mathcal{L}^*$ uma folheação em S, denote $\omega_\varphi \in H^0(S, TS \otimes \mathcal{L}^*)$ a seção global associada e Z o seu esquema singular. Suponha que são válidas as condições:*

- *Z possui codimensão pura 2 (singularidades isoladas);*
- *$H^1(S, TS \otimes \omega_S \otimes \mathcal{L}) = 0$.*

Se $\omega \in H^0(S, TS \otimes \mathcal{L}^*)$ é tal que $\omega\big|_Z = 0$, então existe $\lambda \in k^* \cong End(TS)$ tal que $\omega = \lambda\omega_\varphi$.

Como todas as folheações que possuem singularidades em uma superfície tem singularidades isoladas, então na prática o que será preciso fazer para verificar se o esquema singular determina a folheação, é garantir o anulamento da cohomologia.

Exemplo 3.8. *Considere X uma hipersuperfície de grau $d \geqslant 3$ em $\mathbb{P}^3$ tal que* $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$. *Do Exemplo 1.37, sabemos que o feixe tangente é μ-estável e consequentemente será simples. Uma folheação em X terá feixe tangente $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$, assim $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(-r - \tau_X)$ para $r \geqslant 0$ e τ_X definido em (2.11). Da sequência exata normal:*

$$0 \longrightarrow TX \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{P}^3\big|_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow 0 \tag{3.17}$$

obtemos que $\tau_X \geqslant -1$. O feixe canônico será $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(d-4)$, portanto o anulamento da cohomolgia do Teorema 3.7 será

$$H^1(X, TX \otimes \mathcal{O}_X(d-4) \otimes \mathcal{O}_X(-r-\tau_X)) = H^1(X, TX(d-4-r-\tau_X)) = 0$$

Tensorizando a sequência 3.17 por $\mathcal{O}_X(d-4-r-\tau_X)$, denotando $l := d-4-r-\tau_X$ e tomando cohomologia

$$\cdots \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d+l)) \longrightarrow H^1(X, TX(l)) \longrightarrow H^1(X, \mathrm{T}\mathbb{P}^3\big|_X(l)) \longrightarrow 0$$

Se considerarmos que $2d-4-\tau_X < r$, então $H^0(X, \mathcal{O}_X(2d-4-r-\tau_X)) = 0$. Dessa forma, garantimos os isomorfismos

$$\begin{aligned} H^1(X, TX(d-4-r-\tau_X)) &\cong H^1(X, \mathrm{T}\mathbb{P}^3\big|_X(d-4-r-\tau_X)) \\ &\cong H^1(X, \Omega_{\mathbb{P}^3}\big|_X(r+\tau_X)) = 0 \text{ para } r+\tau_X \neq 0 \end{aligned}$$

O segundo isomorfismo é consequência da dualidade de Serre [Hartshorne 2013, Capítulo 3; Corolário 7.7]. Como $d \geqslant 3$, então $2 \leqslant 2d-4 < r+\tau_X$, assim $r+\tau_X \neq 0$.

Dessa forma, seguindo a Definição 2.17 e pelo Teorema 3.7 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.9. *Seja X uma hipersuperfície suave em $\mathbb{P}^3$ de grau $d \geqslant 3$ e com* $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}$*. Então, toda folheação de grau $r \geqslant 2d - 3 - \tau_X$ é determinada unicamente pelo seu esquema singular.*

Seguindo o Exemplo 2.18, quando $d = 4$, temos que $\tau_X = 2$, assim toda folheação de grau $r \geqslant 3$ é determinada unicamente pelo esquema singular.

Note que o Exemplo 3.8 concorda com o Corolário 3.3, e obtemos o valor explícito para quando a folheação começa a ter esquema singular único. Note que, o Teorema 3.7 não garante nada quando $r \leqslant 2d - 4 - \tau_X$.

Uma outra aplicação do Teorema 3.6, seria garantir que distribuições de codimensão 1 e grau $\geqslant 1$ com singularidades isoladas em $\mathbb{P}^n$, são determinadas unicamente pelo esquema singular, demonstrado em [Araujo e Corrêa 2014, Teorema 1.4].

4 Esquema singular de folheações em $\mathbb{P}^2$

4.1 Folheações em $\mathbb{P}^2$

Seguindo a Seção 2.3, uma folheação de grau $r \geqslant 0$ em $\mathbb{P}^2$ é definida por um morfismo $\varphi\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r+1) \to \mathrm{T}\mathbb{P}^2$, que define uma seção global $\omega_\varphi \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathrm{T}\mathbb{P}^2(r-1))$. Podemos representar a seção ω_φ por um campo vetorial

$$v = V_1\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + V_3\frac{\partial}{,}\partial z$$

onde V_1, V_2, V_3 são polinômios homogêneos de grau r. Uma folheação em $\mathbb{P}^2$ também possui codimensão 1, assim será definida por um morfismo $\psi\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-2) \to \Omega_{\mathbb{P}^2}$, que define uma seção global $\omega_\psi \in H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}(r+2))$. Podemos representar a seção ω_ψ por uma 1-forma polinomial homogênea

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz, \tag{4.1}$$

que satisfaz a condição de Euler

$$xA + yB + zC = 0,$$

onde A, B, C são polinômios homogêneos de grau $r+1$, que não possuem componentes em comum. Temos compatibilidade na definição do grau pelo isomorfismo natural $\Omega_{\mathbb{P}^2} \cong \mathrm{T}\mathbb{P}^2 \otimes \omega_{\mathbb{P}^2}$ e pelo fato que $\omega_{\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$, assim $\mathrm{T}\mathbb{P}^2(r-1) \cong \Omega_{\mathbb{P}^2}(r+2)$, para $r \in \mathbb{Z}$.

Dado um campo vetorial $v = V_1\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + V_3\frac{\partial}{\partial z}$ definindo uma folheação, podemos recuperar a 1-forma (4.1) por

$$\Omega = \det\begin{pmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $r \geqslant 0$ em $\mathbb{P}^2$ e $\mathcal{I}_Z$ o feixe de ideais do esquema singular $Z = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Para cada $s \geqslant 0$ temos que*

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) = \begin{cases} 0, \text{ se } s \leqslant r \\ (t+1)(t+3), \text{ se } r+1 \leqslant s = r+1+t \leqslant 2r \\ \frac{1}{2}(s+1)(s+2) - (r^2+r+1), \text{ se } s > 2r \end{cases}$$

Demonstração. Considere o complexo de Koszul da seção associada à folheação $\omega \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathrm{T}\mathbb{P}^2(r-1))$, que será uma sequência exata:

$$0 \longrightarrow \bigwedge^2 (\mathrm{T}\mathbb{P}^2(r-1)^\vee) \longrightarrow (\mathrm{T}\mathbb{P}^2(r-1))^\vee \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2r-1) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}(1-r) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0.$$

Torcendo a sequência exata por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(s)$ e tomando cohomologia

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(s+(-2r-1))) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}(s+(1-r))) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) \longrightarrow 0.$$

Claramente, se $s \leqslant r$, então $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) = 0$. Vamos supor agora $r+1 \leqslant s = r+1+t \leqslant 2r$, ou seja, $s = r+1+t$ com $0 \leqslant t \leqslant r-1$:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t-r)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}(t+2)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) \longrightarrow 0.$$

Então, pela fórmula de Bott, $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) = h^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}(t+2)) = (t+1)(t+3)$. Por último, vamos supor que $s > 2r$. Então,

$$\begin{aligned}
h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) &= h^0(\mathbb{P}^2, \Omega_{\mathbb{P}^2}(s+(1-r))) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(s+(-2r-1))) \\
&= \binom{s+(1-r)+1}{s+(1-r)}\binom{s+(1-r)-1}{1} - \binom{2+s+(-2r-1)}{2} \\
&= (s-r+2)(s-r) - (s+1-2r)(2-2r)/2 \\
&= s^2 - 2sr + r^2 + 2s - 2r - (-2sr + s^2/2 + s/2 - r + 2r^2) \\
&= s^2/2 + 3s/2 - (r^2+r) = (s+1)(s+2)/2 - (r^2+r+1).
\end{aligned}$$

Com isso terminamos a demonstração. □

Uma demonstração alternativa pode ser encontrada em [Campillo e Olivares 2001, Teorema 3.2], no qual utilizam o Teorema de Cayley-Bacharach e polaridade de uma folheação, que será definida na próxima seção.

Dada uma folheação $\mathcal{F}$ de grau r definida pela 1-forma $\omega = Adx + Bdy + Cdz$, pelo teorema acima sabemos a dimensão de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s))$. Agora, queremos encontrar os geradores desse espaço vetorial.

Considere $R = k[x,y,z]$ o anel de polinômios e a sua graduação $R = \bigoplus_{s \geqslant 0} R_s$ (definimos $R_s = 0$ para $s < 0$). Seja $I = AR + BR + CR$ o ideal homogêneo gerado por A, B, C e seja $I = \bigoplus_{s \geqslant 0} I_s$ a sua graduação, onde $I_s = 0$ se $s \leqslant r$ e para $s = r+1+t$ $(t \geqslant 0)$ temos que $I_s = AR_t + BR_t + CR_t$.

Teorema 4.2. *Seja $\mathcal{I}_Z$ o feixe de ideais do esquema singular da folheação $\mathcal{F}$. Então, usando a notação acima, obtemos que*

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) = I_s$$

para cada $s \geqslant 0$.

Demonstração. Primeiro, como $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(s)) \supset I_s$, para mostrarmos a igualdade basta mostrar que possuem a mesma dimensão.

Seja $s = r+1+t$ com $t \geqslant 0$. Considere o submódulo homogêneo $M = \bigoplus_{s\geqslant 0} M_s$ do R-módulo livre $R^{\oplus 3}$, gerado pelas triplas (x, y, z) e (U, V, W). Então

$$M_t = \begin{cases} (x, y, z).R_{t-1}, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant r-1 \\ (x, y, z).R_{t-1} + (U, V, W).R_{t-r}, \text{ se } t \geqslant r. \end{cases}$$

Disso obtemos um complexo de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow R_{t-1} \bigoplus R_{t-r} \xrightarrow{\phi} R_t^{\oplus 3} \xrightarrow{\psi} M_s \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

no qual os mapas são dados por

$$\begin{aligned} \phi(F, G) &= (x, y, z).F + (U, V, W).G, \text{ onde } F \in R_{t-1} \text{ e } G \in R_{t-r} \\ \psi(L, M, N) &= LA + MB + NC, \text{ onde } L, M, N \in R_t. \end{aligned}$$

Note que $\text{Im}(\phi) = M_s \subset \ker(\psi)$. Vamos mostrar que o complexo (4.2) é uma sequência exata. Primeiro, claramente o mapa ψ é sobrejetivo e o mapa ϕ será injetivo já que a matriz $\begin{pmatrix} x & y & z \\ U & V & W \end{pmatrix}$ possui posto 2. Tome $(L, M, N) \in \ker(\psi)$, então

$$\det \begin{pmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ U & V & W \end{pmatrix} = 0.$$

Assim, existem formas primas P, T, Q tal que

$$P.(L, M, N) + T.(x, y, z) + Q.(U, V, W) = 0,$$

com $\deg(P) = \deg(T) + 1 - t = \deg(Q) + r - t$. Como as triplas A, B, C e x, y, z não possuem fator em comum, P divide ambos T e Q. Segue que $\deg(P) = 0$ e consequentemente $(L, M, N) \in \text{Im}(\phi)$. Logo o complexo é uma sequência exata e tomando a dimensão segue que

$$\dim(I_s) = \begin{cases} (t+1)(t+3), \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant r-1 \\ \dfrac{1}{2}(s+1)(s+2) - (r^2+r+1), \text{ se } t \geqslant r. \end{cases}$$

□

Com esse resultado, note que $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1))$ possui dimensão 3 e A, B, C são geradores, ou seja, são uma base do espaço vetorial. Com o próximo lema auxiliar, vamos mostrar que essa será a única base de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1))$ que define uma folheação no sentido de (4.1).

Lema 4.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ definida pela 1-forma $\omega = Adx + Bdy + Cdz$. Então:*

1. *(i) Se $D \mid A$ e $D \mid B$, então $D = \lambda z$ para algum $\lambda \in k^*$;*

   (ii) Se $D \mid A$ e $D \mid C$, então $D = \lambda y$ para algum $\lambda \in k^*$;

   (iii) Se $D \mid B$ e $D \mid C$, então $D = \lambda x$ para algum $\lambda \in k^*$.

2. *A, B e C são linearmente independentes.*

Demonstração. Para a parte 1, podemos assumir que D é irredutível. Suponha que $D \mid A$ e $D \mid B$, portanto $A = A_1 D$ e $B = B_1 D$. Aplicando a condição de Euler

$$0 = xA + yB + zC = D(xA_1 + yB_1) + zC \implies D(xA_1 + yB_1) = -zC.$$

Consequentemente $D \mid z$ ou $D \mid C$, como A, B e C não possuem componentes em comun, D não pode dividir C e assim segue que $D = \lambda z$ para algum $\lambda \in k^*$. Os outros dois casos são iguais.

A parte 2, segue do Teorema 4.2 no caso $t = 0$, ou seja, $s = r + 1$. □

Proposição 4.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ de grau $r \geqslant 2$ definida pela 1-forma $\omega = Adx + Bdy + Cdz$. Então, A, B, C é a única base (a menos de múltiplo) de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1))$ que satisfaz a condição de Euler.*

Demonstração. Seja $\{A', B', C'\}$ uma outra base satisfazendo a condição de Euler

$$xA' + yB' + zC' = 0.$$

Vamos mostrar que isso implicaria que $A' = \lambda A,\ B' = \lambda B,\ C' = \lambda C$ para algum $\lambda \in k^*$. Para tal, note que existe uma matriz não-singular $M = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ tal que

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Queremos mostrar que $M = \lambda Id$, para algum $\lambda \neq 0$. A partir da igualdade acima

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C \\ a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C \\ a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C \end{pmatrix}.$$

Pela condição de Euler para $\{A, B, C\}$, obtemos que $zC = -xA - yB$, consequentemente

$$zA' = (a_{11}z)A + (a_{12}z)B + a_{13}(zC) = (a_{11}z)A + (a_{12}z)B + a_{13}(-xA - yB)$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{11}z - a_{13}x)A + (a_{12}z - a_{13}y)B \\
zB' &= (a_{21}z)A + (a_{22}z)B + a_{23}(zC) = (a_{21}z)A + (a_{22}z)B + a_{23}(-xA - yB) \\
&= (a_{21}z - a_{23}x)A + (a_{22}z - a_{23}y)B \\
zC' &= (a_{31}z)A + (a_{32}z)B + a_{33}(zC) = (a_{31}z)A + (a_{32}z)B + a_{33}(-xA - yB) \\
&= (a_{31}z - a_{33}x)A + (a_{32}z - a_{33}y)B.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos aplicar essas igualdades na condição de Euler

$$xA' + yB' + zC' = 0$$

$$x(zA') + y(zB') + z(zC') = 0$$

$$QA + Q'B = 0,$$

onde

$$Q = -a_{13}x^2 - a_{23}xy + (a_{11} - a_{33})xz + a_{21}yz + a_{31}z^2$$

$$Q' = -a_{13}xy + a_{12}xz + (a_{22} - a_{33})yz - a_{23}y^2 + a_{32}z^2.$$

É suficiente provar que ambos Q e Q' são nulos, pois assim $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, portanto $M = \lambda Id$ para $\lambda \in k^*$ (M é não-singular). Note que se mostrarmos que são múltiplos um do outro, e pelo fato que A, B são linearmente independetes, então

$$0 = QA + Q'B = Q(A + \lambda' B) \implies Q = Q' = 0.$$

Resumindo, para mostrar que são nulos, vamos mostrar que são múltiplos um do outro. Temos também que $Q' \mid QA$ e $Q \mid Q'B$, nosso objetivo agora é mostrar que essas condições implicam que

$$Q' \mid Q \text{ ou } Q' \mid A \text{ e } Q \mid Q' \text{ ou } Q \mid B.$$

Note que se Q e Q' são irredutíveis, então obtemos o resultado automaticamente. Suponha que $Q = L_1L_2$ e $Q' = L_1'L_2'$, então o resultado também segue igual anteriormente se $L_i' \nmid L_j$ para $i, j = 1, 2$. Sem perda de generalidade, se $L_1' = L_1$, então teríamos pela equação $QA + Q'B = 0$ que A e B possuem uma componente em comun de grau $r + 1 - 1 = r \geqslant 2$, o que é um absurdo.
Agora, se $Q' \nmid Q$ então $Q \nmid Q'$, assim $A = Q'A'$ e $B = QB'$ para algum A' e B' de grau $r + 1 - 2 = r - 1$, porém isso implicaria que

$$0 = QA + Q'B = QQ'A' + QQ'B' = QQ'(A' + B') \implies A' = -B'$$

ou seja, A e B possuem uma componente em comun de grau $r - 1 \geqslant 1$. Isso pode ocorrer quando $r = 2$ (para $r \geqslant 3$ já obtemos o resultado final por contradição) e nesse caso $A = -\lambda_1 zQ'$ e $B = \lambda_1 zQ$. Para terminar, basta aplicar essas igualdades na condição de Euler

$$0 = xA + yB + zC = z(-\lambda_1 xQ' + \lambda_1 yQ + C) \implies C = \lambda_1(-xQ' + yQ)$$

$$C = \lambda_1 z(-a_{12}x^2 + (a_{11} - a_{22})xy - a_{32}xz + a_{21}y^2 + a_{31}yz).$$

Com isso, A, B e C possuem componente em comum, o que é um absurdo. Assim, Q e Q' são múltiplos um do outro e consequentemente são nulos. Logo, $M = \lambda Id$ para algum $\lambda \in k^*$. $\square$

A interpretação do resultado acima é o caso particular do Teorema 3.5 para $\mathbb{P}^2$. Pois, dada uma folheação $\mathcal{F}$ de grau $r \geqslant 2$ em $\mathbb{P}^2$ com esquema singular Z, se existisse uma outra folheação $\mathcal{F}'$ distinta de $\mathcal{F}$ cujo esquema singular fosse Z, então teríamos uma outra base de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1))$ que satisfaz a condição de Euler e pela proposição acima não existe.

Exemplo 4.5. *Um exemplo mostrando que no caso $r = 1$ não temos o mesmo resultado é a seguinte 1-forma:*

$$\Omega_t = yzdx - txzdy + (t-1)xydz \ \textit{ para cada } \ t \in k\backslash\{0, 1\}.$$

Assim, para cada $t \in k\backslash\{0,1\}$ temos uma folheação $\mathcal{F}_t$ que possui esquema singular com suporte em $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, $[0:0:1]$ e que não são iguais. Logo, obtemos um família de folheações distintas com o mesmo esquema singular.

4.2 Polaridade de uma folheação

Uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$ pode ser vista como, para $q \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ podemos atribuir a direção T_qL onde L é a folha de $\mathcal{F}$ que passa por q. Note que dar uma direção tangente em um ponto q é a mesma coisa que dar uma reta projetiva que passa por q, assim uma folheação em $\mathbb{P}^2$ consiste em atribuir uma reta $L_q = L_q(\mathcal{F})$ para cada $q \in \mathbb{P}^2 \backslash \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. O mapa racional

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{F}} \colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$$

dado por

$$q \mapsto [A(q) : B(q) : C(q)]$$

que envia $q \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ para o ponto de $\check{\mathbb{P}}^2$ correspondendo a reta L_q. Tal mapa é chamado de mapa polar de $\mathcal{F}$. Alguns autores também chamam de mapa de Gauss da folheação.

Definição 4.6. *Seja $f \colon X \to S$ um morfismo entre esquemas. A fibra esquemática em $s \in S$ é o produto fibrado $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(k(s))$, onde $k(s)$ é o corpo residual.*

Dada $\mathcal{F}$ uma folheação de grau r definida por um mapa racional $\Phi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^2$ e uma reta $\ell \in \check{\mathbb{P}}^2$ definida por $\ell = \{ax + by + cz = 0\}$, a sua fibra esquemática será $\Phi^*\ell = \{aA + bB + cC = 0\}$. Assim, a fibra esquemática de retas em $\check{\mathbb{P}}^2$ são curvas de grau $r + 1$ em $\mathbb{P}^2$. Para $q = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2$, denotaremos as curvas por $P_q = \Phi^*(ax + by + cz = 0)$ para cada ponto $q \in \mathbb{P}^2$, incluindo as singularidades. A curva P_q é chamada de polaridade de q relativa à $\mathcal{F}$ e sempre temos que q pertence ao suporte de P_q. Assim, o mapa

$$q \mapsto P_q$$

é linear no sentido que, como os P_q formam um sistema linear de dimensão 2 de curvas de grau $r + 1$ (chamado de rede), é um isomorfismo projetivo. A rede das curvas polares $(P_q)_{q\in\mathbb{P}^2}$ relativas a $\mathcal{F}$ é chamada de rede polar relativa a $\mathcal{F}$ e será denotada por $\Delta = \Delta(\mathcal{F})$.

Note que para cada $q \in \mathbb{P}^2$, o suporte da polaridade P_q consiste dos pontos singulares da folheação (já que $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ é exatamente os pontos de base da rede), junto com os pontos $q' \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ tais que $q' \in L_q$.

Tome dois pontos distintos $q, q' \in \mathbb{P}^2$ e L a reta que liga eles. Existem duas possibilidades:

1. Se L é uma reta invariante por $\mathcal{F}$, então as polaridades de cada ponto em L contém L e Φ envia L a um ponto.

2. Se L não é invariante, então as polaridades P_q e $P_{q'}$ se encontram em r pontos distintos dos pontos de base.

   (i) Se L é genérica, então os r pontos são todos distintos.

   (ii) Se L não é genérica, então os pontos na interseção fora dos pontos de base, contado com multiplicidades, é menor ou igual a r se $L \cap \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \varnothing$ e estritamente menor que r se $L \cap \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.

   em ambos os casos, o suporte de $P_q \cap P_{q'}$ está contido em $L \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$.

Definição 4.7. *Seja Γ um esquema 0-dimensional com anel de coordenadadas afins $A(\Gamma)$. Seja $\Gamma' \subset \Gamma$ um subesquema fechado e $I_{\Gamma'} \subset A(\Gamma)$ o seu ideal. O esquema residual Γ'' de Γ' em Γ é o esquema definido pelo ideal*

$$I_{\Gamma''} = \mathrm{Ann}(I_{\Gamma'}).$$

Quando consideramos o caso em que Γ é uma interseção completa local, temos que $I_{\Gamma'} = \mathrm{Ann}(I_{\Gamma''})$ e a propriedade $\ell(\Gamma') + \ell(\Gamma'') = \ell(\Gamma)$, onde ℓ é o comprimento do esquema.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $r \geqslant 0$, então o esquema singular $\Gamma_0 = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ está contido na interseção completa $\Gamma = P_q \cap P_{q'}$ de duas curvas polares genéricas, e será residual a um subesquema Γ_1 que será o complemento na interseção. Um fato importante a se considerar é que

$$\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma) - \ell(\Gamma_0) = (r+1)^2 - (r^2 + r + 1) = r.$$

Podemos tomar coordenadas $[x, y, z]$ de $\mathbb{P}^2$ de forma que a reta L é dada por $z = 0$ e não contém singularidades de $\mathcal{F}$. Em termos da 1-forma, isso significa que as polaridades P_q e $P_{q'}$ são dadas por A e B, respectivamente.

Com a construção acima, podemos estudar o esquema singular de uma folheação em $\mathbb{P}^2$ pelo seguinte teorema.

Teorema 4.8 (Cayley-Bacharach). *Seja X_1 e X_2 curvas em $\mathbb{P}^2$ de grau d_1 e d_2, respectivamente, e suponha que o subesquema $\Gamma = X_1 \cap X_2$ é 0-dimensional. Seja Γ_0 e Γ_1 subesquemas de Γ residuais um ao outro e defina $e := d_1 + d_2 - 3$. Se $s \leqslant e$ é um inteiro não nulo, então a dimensão da família de curvas de grau s contendo Γ_0 (módulo aquelas contendo todo Γ) é igual a falha de Γ_1 em impor condições independentes em curvas de grau complementar $e - s$. Em outras palavras*

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Gamma_0}(s)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Gamma}(s)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{\Gamma_1}(e - s))$$

Demonstração. A demonstração se encontra em [Eisenbud, Green e Harris 1996, Teorema CB7]. □

4.3 Esquemas de $\mathbb{P}^2$

Nesta seção, queremos dar condições suficientes e necessárias para que um subesquema 0-dimensional de $\mathbb{P}^2$ seja o esquema singular de uma folheação, seguindo [Campillo e Olivares 2001, Seção 4]. Iremos utilizar a notação $\ell(\mathcal{J}) = \ell(Z)$, onde $\ell(Z)$ é o comprimento do esquema 0-dimensional Z e $\mathcal{J}$ é seu feixe de ideais.

Proposição 4.9. *Seja $r \geqslant 1$ e seja $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ o feixe de ideais de um subesquema fechado de comprimento $r^2 + r + 1$. Então, $\mathcal{J}$ é o feixe de ideais do esquema singular de uma folheação de grau r, se e somente se, existirem 3 formas linearmente independentes $A, B, C \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$ sem fator em comum e 3 formas linearmente independentes $L, M, N \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ tais que $LA + MB + NC = 0$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.5 para o caso particular de $\mathbb{P}^2$ e da condição de Euler, que as condições são necessárias. Para mostrarmos que são suficientes, tome coordenadas X, Y, Z tal que $L = X, M = Y, N = Z$. A condição

$XA+YB+ZC=0$ mostra que a 1-forma $\Omega = Adx+Bdy+Cdz$ define uma folheação $\mathcal{F}$ de grau r, com a propriedade que o feixe de ideais $\mathcal{J}_0$ do esquema singular está contido em $\mathcal{J}$. Como $\ell(\mathcal{J}_0) = \ell(\mathcal{J})$, então $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$. □

Proposição 4.10. *Seja $s \geqslant 0$ e t inteiros, e seja $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ o feixe de ideais de um subesquema fechado com comprimento $\ell(\mathcal{J}) = s+1+t$. Então $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(s)) \leqslant t$ se $t \geqslant 0$, e $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(s)) = 0$ se $t \leqslant 0$.*

Demonstração. Primeiro, note que se $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}'$ com $\ell(\mathcal{J}) = \ell(\mathcal{J}')+1$, então da sequência exata

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{J}' \to Q \to 0,$$

obtemos que $0 \leqslant h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}') \leqslant h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}) \leqslant h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}')+1$. Assim, é suficiente provar a proposição para o caso $\ell(\mathcal{J}) = s+1$.

Vamos provar que $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(s)) = 0$ para $\ell(\mathcal{J}) = s+1$ por indução em s. Para $s = 0$ a afirmação é clara. Agora, para a parte indutiva, tome $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ com comprimento $\ell(\mathcal{J}) = s+1$, onde $s \geqslant 1$ e tome a cadeia de ideais:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}' = \mathcal{J}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{J}_{s+1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2},$$

tal que $\ell(\mathcal{J}_{j+1}) = \ell(\mathcal{J}_j)-1$. Como $\ell(\mathcal{J}') = s$, pela hipótese indutiva $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(s-1)) = 0$, o que significa que $\mathcal{J}'$ impõe condições independentes em curvas de grau $s-1$, ou, em outras palavras, para cada $i \geqslant 1$ as inclusões

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_i(s-1)) \subset H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_{i+1}(s-1))$$

são estritas. Podemos escolher $F_i \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_i(s-1))$ tal que $F_i \notin H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_{i+1}(s-1))$, para $i \geqslant 1$. Então, se L é uma forma linear cujo suporte não encontra Supp$(\mathcal{J}')$, obtemos que $F_i.L \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_i(s))$ e $F_i.L \notin H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_{i+1}(s-1))$ e consequentemente $\mathcal{J}'$ impõe condições independentes em formas de grau s. Para ver que $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(s)) = 0$, é suficiente provar que $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(s)) \subset H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(s))$ é uma inclusão estrita. Para tal, como $\ell(\mathcal{J}) = \ell(\mathcal{J}')+1$, segue que $\ell(\mathcal{J}_p) = \ell(\mathcal{J}'_p)$ para cada ponto $p \in$ Supp$(\mathcal{J})$, exceto em um único ponto q onde $\ell(\mathcal{J}_q) = \ell(\mathcal{J}'_q)+1$, e aqui ℓ representa o comprimento do ideal no anel local. Afirmamos que em um anel local noetheriano $(R, \mathfrak{m})$ e um ideal $J \subset R$ com $\ell(J) = j$, então $\mathfrak{m}^j \subset J$.

De fato, se $j = 1$ então a afirmação é verdadeira. Suponha que é válido para cada J' com $\ell(J') < j$ e seja J com $\ell(J) = j$. Se $\mathfrak{m}^j \not\subset J$, então $\ell(J+\mathfrak{m}^j) < j$ e pelo hipórese indutiva $m^{j-1} \subset J+\mathfrak{m}^j$. Consequentemente, também temos $\mathfrak{m}^{j-1} \subset J+\mathfrak{m}^{j+t}$ para cada $t \geqslant 0$. Aplicando o Teorema de Krull, $\mathfrak{m}^{j-1} \subset \cap_{t\geqslant 0}(J+\mathfrak{m}^{j+t}) = J$, contradição com a suposição inicial. Logo demonstramos a afirmação.

Com a afirmação, seja $s_p = \ell(\mathcal{J}'_p)$. Como $\mathfrak{m}^{s_q} \subset \mathcal{J}'_q$, então $\mathcal{J}'_q$ é gerado por polinômios de grau $\leqslant s_q$ em coordenadas afins em q. Também, $\mathcal{J}_q \subset \mathcal{J}'_q$ é uma inclusão estrita, existe uma forma de grau s_q $F_q \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'_q(s_q))$ com $F_q \notin H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_q(s_q))$. Por outro lado, para $p \neq q$ e $p \in \operatorname{Supp}(\mathcal{J})$, temos que $\mathfrak{m}^{s_p} \subset \mathcal{J}_p = \mathcal{J}'_p$, assim podemos encontrar uma forma $F_p \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_p(s_p))$ tal que F_p não encontra q. Então segue que $F = F_q \cdot \prod_{p \in \operatorname{Supp}(\mathcal{J})} F_p \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(s))$ e $F \notin H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(s))$. Com isso, termina a demonstração. □

Lema 4.11. *Seja $r \geqslant 2$, e seja $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ o feixe de ideais de uma interseção completa local de comprimento $\ell(\mathcal{J}) = r^2 + r + 1$ e assuma que existam duas formas $A, B \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$. Então $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+2)) \leqslant 8$.*

Demonstração. Seja Γ o subesquema dado pela interseção das curvas definidas por A e B, e seja $\mathcal{J}' = \operatorname{Ann}(\mathcal{J}/\mathcal{J}_\Gamma)$ o residual de $\mathcal{J}$ em $\mathcal{J}_\Gamma$. Sabemos que $\ell(\mathcal{J}') = r$. Pelo Teorema de Cayley-Bacharach e a proposição acima (aplicado à $\mathcal{J}'$ e $t = 2$):

$$\begin{aligned} h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+2)) &= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r-3)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_\Gamma(r-3)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r-3)) \\ &= h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r-3)) + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-3)) - r \\ &\leqslant 2 + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-3)) - r. \end{aligned}$$

Assim, $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+2)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+2)) + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r+2)) - (r^2 + r + 1) \leqslant 8.$ □

Teorema 4.12. *Seja $r \geqslant 2$, e seja $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ o feixe de ideais de uma interseção completa local de comprimento $\ell(\mathcal{J}) = r^2 + r + 1$. Então $\mathcal{J}$ é o feixe de ideais $\mathcal{J}_{\Gamma_0}$ do esquema singular $\Gamma_0 = \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$ de uma única folheação $\mathcal{F}$ de grau r em $\mathbb{P}^2$, se e somente se as duas condições são válidas:*

(i) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1)) \geqslant 3$*, e as formas em* $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$ *não possui fator em comum.*

(ii) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r)) = 0$ *para cada feixe de ideais* $\mathcal{J}' \supset \mathcal{J}$ *com comprimento* $\ell(\mathcal{J}') = r^2 + r$.

Demonstração. Se $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\Gamma_0}$, então já obtemos a condição (i) do Teorema 4.1. Para ver a condição (ii) é válida, assuma o contrário $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r)) \neq 0$ e $\ell(\mathcal{J}') = r^2 + r$ para algum $\mathcal{J}' \supset \mathcal{J}$. Tome uma forma não-nula D em $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r))$. Como $\mathcal{J}$ é uma interseção completa local, então o residual de $\mathcal{J}'$ em Γ_0, é o subesquema reduzido cujo suporte é um único ponto $q \in \operatorname{Supp}(\mathcal{J}) = \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$. Podemos tomar coordenadas $[X, Y, Z]$ de forma que $q = [0, 0, 1]$, então o subesquema residual possui feixe de ideais $\mathcal{M}_q$, cuja fibra em q são os germes em q das curvas dadas pelas equações X e Y. Isso implica que $XD, YD \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$, assim as três formas dadas por $A' = YD, B' = -XD, C' = 0$ formam uma solução em $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$ da condição de Euler. Porém, sabemos pela Proposição 4.4 que tal solução é única (a menos de múltiplo escalar), e consiste em três forma de grau $r+1$ que são k-linearmente independentes. Logo, obtemos um absurdo e consequentemente a condição (ii) é válida.

Para mostrarmos a volta, suponha que $\mathcal{J}$ satisfaz (i) e (ii). Segue da condição (i), que podemos tomar três formas linearmente independentes $A, B, C \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$ sem fator em comun. Pelo Lema 4.11, existem três formas lineares $L, M, N \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, não sendo todas simultaneamente zero, tal que $LA + MB + NC = 0$. Afirmamos que as formas L, M, N são linearmente independentes e com a Proposição 4.9 terminamos a demonstração.

Vamos demonstrar que a afirmação é válida. Suponha o contrário, que a dimensão do espaço gerado por L, M, N possui dimensão 1 ou 2. Se a dimensão for 1, digamos que L é o gerador, então $M = \lambda L$ e $N = \mu L$, para $\lambda, \mu \in k$, disso obtemos que $L(A + \lambda B + \mu C) = 0$, em contradição com o fato que A, B, C são linearmente independetes. Se a dimensão for 2, digamos que L e M são os geradores, assim $N = \lambda L + \mu M$, para $\lambda, \mu \in k$ e implica que

$$LA' + MB' = 0,$$

onde $A' = A + \lambda C$, $B' = B + \mu C \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$. A relação acima implica que, existe um forma de grau r não nula tal que $A' = MD$, $B' = -LD$. Seja $q \in \mathbb{P}^2$ o único ponto na interseção das retas L e M. Se $q \notin \mathrm{Supp}(\mathcal{J})$, então $D \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r))$ e consequentemente $D \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r))$, para qualquer feixe $\mathcal{J}' \supset \mathcal{J}$ com $\ell(\mathcal{J}') = r^2 + r$, em contradição com o item (ii). Portanto $q \in \mathrm{Supp}(\mathcal{J})$, porém nesse caso $D \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(r))$, onde $\mathcal{J}'$ é o residuo em $\mathcal{J}$ do feixe de ideais reduzido $\mathcal{M}_q$ com suporte em q. Como $\mathcal{J}$ é uma interseção completa local, então $\ell(\mathcal{J}') = r^2 + r + 1 - \ell(\mathcal{M}_q) = r^2 + r$, novamente uma contradição com o item (ii). Logo, provamos a afirmação e consequentemente o teorema. □

Lema 4.13. *Seja $j \geqslant 0$ e A', B', C' formas linearmente independentes de grau $j+1$, sem fator em comum. Seja $\mathcal{J}'$ o feixe de ideais gerado localmente pelos germes dessas formas em cada ponto de $\mathbb{P}^2$. Então temos que $\ell(\mathcal{J}') \leqslant j^2 + j + 1$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{J}_\Gamma$ o feixe de ideais das interseção de duas curvas genéricas na rede gerada pelas curvas de equações A', B', C'. Seja $\mathcal{J}''$ o residual de $\mathcal{J}'$ em $\mathcal{J}_\Gamma$. Temos que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(j+1)) \geqslant 3$ e,

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(j+1)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(j+1)) + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(j+1)) - \ell(\mathcal{J}_\Gamma) + \ell(\mathcal{J}''),$$

e pelo Teorema de Cayley-Bacharach

$$h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(j+1)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}''(j-2)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}''(j-2)) + h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(j-2)) - \ell(\mathcal{J}'').$$

Segue das relações acima que, $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}''(j-2)) \geqslant 1$ e consequentemente $\ell(\mathcal{J}'') \geqslant j$, pela Proposição 4.10. Isso prova que $\ell(\mathcal{J}') \leqslant j^2 + j + 1$. □

Teorema 4.14. *Seja $r \geqslant 2$, e seja $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ o feixe de ideais de uma interseção completa local de comprimento $\ell(\mathcal{J}) = r^2 + r + 1$. Então $\mathcal{J}$ é o feixe de ideais $\mathcal{J}_{\Gamma_0}$ do esquema singular $\Gamma_0 = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ de uma única folheação $\mathcal{F}$ de grau r em $\mathbb{P}^2$, se e somente se as duas condições são válidas:*

(i) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1)) \geqslant 3$*,*

(ii) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'_j(r-j)) = 0$ *para cada j com $0 \leqslant j < r$, e cada feixe de ideais $\mathcal{J}'_j \supset \mathcal{J}$ com comprimento* $\ell(\mathcal{J}'_j) = (r-j)(r+j+1)$.

Demonstração. Se $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\Gamma_0}$ para alguma folheação $\mathcal{F}$, então a condição (i) é válida e para $j = 0$ a condição (ii) é válida. Falta mostrar que a condição (ii) é válida para $0 < j < r$. De forma contrário, suponha que existe um forma não-nula $D \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'_j(r-j))$, para algum $\mathcal{J}'_j \supset \mathcal{J}$ com $\ell(\mathcal{J}'_j) = (r-j)(r+j+1)$ com $0 < j < r$. Seja P uma polaridade genérica no sentido que não possui componentente em comum com a curva Q definida por D. Para cada $q \in \mathrm{Supp}(\mathcal{J}'_j)$, como os germes em q das equações locais de P e Q pertencem à $\mathcal{J}'_j$, temos que a multiplicidade da interseção de P e Q em q é pelo menos igual a $\ell(\mathcal{J}'_{j,q})$. Fazendo q variar em $\mathrm{Supp}(\mathcal{J}'_j)$, obtemos que a interseção é pelo menos igual a $\ell(\mathcal{J}'_j) = (r-j)(r+j+1) > (r-j)(r+1)$, o que é uma contradição ao Teorema de Bezout. Logo a condição (ii) é válida.

Agora suponha que as condições (i) e (ii) são válidas para $\mathcal{J}$. O resultado segue do Teorema 4.12, se mostrarmos que $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1)))$ não possui curva no lugar de base. Como feito no Teorema 4.12, vamos usar (i) e (ii) e o caso $j = 0$ para obtermos 3 formas linearmente independentes $A, B, B \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r+1))$ e 3 formas linearmente independentes $L, M, N \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ tal que

$$LA + MB + NB = 0.$$

Se A, B, C são possuem fator em comum, então terminamos. Caso contrário, seja D o maior divisor comum dessas formas. Observe que seu grau deve ser $r-j$, para $0 < j < r$ e que $A = DA', B = DB', C = DC'$, para algumas formas A', B', C' de grau $j+1$. Seja $\mathcal{J}'$ o feixe de ideais associado a A', B', C', pelo Lema 4.13 $\ell(\mathcal{J}') \leqslant j^2 + j + 1$. Agora seja $\mathcal{J}''$ o residual de $\mathcal{J}$ em $\mathcal{J}' + \mathcal{J}$. Como $\mathcal{J}$ é uma interseção completa local, obtemos que $\ell(\mathcal{J}'') \geqslant r^2 + r + 1 - (j^2 + j + 1) = (r-j)(r+j+1)$. Considere um feixe de ideais $\mathcal{J}'_j \supset \mathcal{J}''$ com $\ell(\mathcal{J}'_j) = (r-j)(r+j+1)$. Então temos que $D \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}''(r-j))$ por construção e consequentemente $D \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'_j(r-j))$, o que é uma contradição com (ii). Logo, terminamos a demonstração. □

Podemos interpretar o teorema acima como: Dado um esquema zero dimensional $Z \subset \mathbb{P}^2$, que é uma interseção completa local e possui $r^2 + r + 1$ pontos contados com multiplicidade. Então Z será o esquema singular de uma folheação em $\mathbb{P}^2$, se e somente se:

(i) existem pelo menos 3 curvas de grau $r+1$ sem componentes em comum que passam em Z,

(ii) para cada subesquema $Z' \subset Z$ com $(r-j)(r+j+1)$ pontos, não existe curva de grau $r-j$ que passa por Z', onde $0 \leqslant j < r$.

4.4 Subesquema especial

No Teorema 3.5 mostramos que dada uma folheação com singularidades isoladas $\mathcal{F}$ de grau $r \geqslant 2$ em $\mathbb{P}^2$, o seu esquema singular $Z = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ é único. Um nova pergunta que surge com esse resultado, é se existe um subesquema $Z' \subset Z$ que define $\mathcal{F}$. Para encontrarmos esse subesquema, precisamos demonstrar condições para Z' definir $\mathcal{F}$.

Lema 4.15. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $r \geqslant 2$ em $\mathbb{P}^2$ com singularidades isoladas. Se Z' é um subesquema fechado de $Z = Sing(\mathcal{F})$ tal que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r+1)) = 3$, então Z' determina $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Da inclusão $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{I}_{Z'}$ obtemos um mapa injetivo

$$H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r+1))$$

entre espaços vetoriais de mesma dimensão, ou seja, é um isomorfismo. Consequentemente, os coeficientes A, B, C da 1-forma que define $\mathcal{F}$ pertence à $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r+1))$. Logo Z' define $\mathcal{F}$. □

Proposição 4.16. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação com singularidades isoladas e grau $r \geqslant 2$ em $\mathbb{P}^2$. Seja Z um subesquema fechado de $Sing(\mathcal{F})$ e Z' o seu subesquema residual em $Sing(\mathcal{F})$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = 3$,

(ii) $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = \ell(Z) + 3 - N_{r+1}$,

(iii) $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) = 0$,

onde $N_j = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(j)) = \binom{j+2}{2}$.

Demonstração. Tomando a cohomologia na sequência exata associada à Z, temos

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) + N_{r+1} - \ell(Z).$$

Disso segue as equivalências entre (i) e (ii). Para Z',

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) + N_{r-3} - \ell(Z').$$

Considere Z'' o residual de Z na interseção de duas curvas polares $\Gamma = P_q \cap P_{q'}$. Por construção Z'' consiste em Z' e r pontos alinhados na reta no infinito. Pelo Teorema de Cayley-Bacharach

$$h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z''}(r-2)) - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(r-2)) \tag{4.3}$$

$$= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z''}(r-2)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)). \tag{4.4}$$

O anulamento de $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(r-2))$ decorre do fato que Γ é a interseção completa de duas curvas de grau $r+1$ e portanto temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1-r-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-1) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma \longrightarrow 0,$$

tensorizando ela por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(r-2)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(r-2) \longrightarrow 0.$$

Tomando cohomologia, obtemos que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_\Gamma(r-2)) = 0$. Juntando (4.3) com as sequências associadas a Z e Z'

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) &= h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) + N_{r+1} - \ell(Z) \\ &= h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) + N_{r+1} - \ell(Z) \\ &= h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) + N_{r-3} - \ell(Z') + N_{r+1} - \ell(Z) \\ &= h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) + 3. \end{aligned}$$

Com isso temos a equivalência entre (i) e (iii). □

Agora, queremos aplicar a proposição acima ao caso $\ell(Z) = M_r = \dfrac{r}{2}(r+5)$

Lema 4.17. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação com singularidades isoladas e grau $r \geqslant 2$ em $\mathbb{P}^2$. Seja Z um subesquema fechado de Sing$(\mathcal{F})$ com $\ell(Z) = M_r$ e Z' o seu subesquema residual em Sing$(\mathcal{F})$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = 3$,

(ii) $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = 0$,

(iii) $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) = 0$,

(iv) $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) = 0$.

Demonstração. A equivalência dos 3 primeiros itens segue diretamente da Proposição 4.16. A equivalência de (iii) e (iv) ocorre por

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(r-3)) + N_{r-3} - \ell(Z')$$

junto com o fato que $\ell(Z') = r^2 + r + 1 - M_r = N_{r-3}$. □

Uma observação importante é a de que a condição (ii) acima diz que Z impõe condições independentes em formas de grau $r+1$. Agora, o resultado principal:

Teorema 4.18. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação com singularidades isoladas e grau $r \geqslant 2$ em $\mathbb{P}^2$, com esquema singular reduzido $\Gamma_0 = Sing(\mathcal{F})$. Então, existe um subesquema fechado Z de Γ_0 com $\ell(Z) = M_r$ e tal que $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = 0$. Consequentemente, Z determina a folheação $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{I}_0$ o feixe de ideais de Γ_0. Como $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_0(r+1)) = 3$, da sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_0} \longrightarrow 0$$

obtemos que $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_0(r+1)) = \dfrac{1}{2}(r-2)(r-1) = N_{r-3}$. Isso significa que Γ_0 impõe

$$N_{r+1} - 3 = r^2 + r + 1 - N_{r-3} = \frac{r}{2}(r+5)$$

condições em formas de grau $r+1$ e que precisamente N_{r-3} delas são linearmente dependentes. A existência do subesquema Z segue de um argumento de álgebra linear: como Γ_0 é reduzido, o seu suporte possui r^2+r+1 pontos fechados distintos, no qual cada ponto gera uma condição linear nos N_{r+1} coeficientes do espaço de formas de grau $r+1$. O posto desse sistema de equações é $\dfrac{r}{2}(r+5)$, consequentemente existe um subconjunto do número de condições que são linearmente independentes (e cujo resto das condições são dependentes) no espaço das formas de grau $r+1$. Assim, existe subesquema $Z \subset \Gamma_0$ cujo suporte possui $\dfrac{r}{2}(r+5)$ pontos fechados distintos que impõe condições indepedentes em formas de grau $r+1$. Portanto, $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(r+1)) = 0$ e pela equivalência do Lema 4.17 garantimos que Z determina $\mathcal{F}$. $\square$

O teorema acima garante que sempre existe um subesquema com menos pontos que Sing$(\mathcal{F})$ (quando reduzido) que determina completamente a folheação. Porém, não garantimos que tal subesquema é minimal, ou seja, não podemos afirmar se existe ou não um subesquema menor que o obtido acima definindo $\mathcal{F}$. Em [Campillo e Olivares 2021] os autores mostraram que nem toda folheação admite um subesquema minimal.

5 Códigos em singularidades de folheações

Neste capítulo, mostraremos uma aplicação da Teoria de Folheações em $\mathbb{P}^2$ feita no capítulo anterior, para a Teoria de Códigos. De forma resumida, vamos considerar códigos avaliados nos pontos singulares de folheações, seguindo a artigo [Campillo, Farran e Pisabarro 2007].

5.1 Introdução

Considere F um corpo finito com q elementos e $n > 0$. Sejam $P_1, \dots, P_n$ pontos no plano afim $\mathbb{A}^2 = F^2$ racionais sobre F e $m > 0$ um inteiro. Vamos denotar $F[x, y]_{\leqslant m}$ o espaço vetorial dos polinômios em duas variáveis com coeficientes em F e grau menor ou igual a m. Considere o mapa

$$E\colon F[x, y]_{\leqslant m} \to F^n$$

dado por

$$f \mapsto (f(P_1), \dots, f(P_n)).$$

Códigos corretores de erros lineares, ou simplesmente códigos, são os subespaços vetoriais C de F^n para algum $n > 0$, definimds pela imagem do mapa E. Os elementos de F^n são chamados palavras no alfabeto F. O código dado pela imagem do mapa E é chamado de código de avaliação de polinômios de grau até m nos pontos $P_1, \dots, P_n$.

Os principais parâmetros associados a um código C são o seu comprimento $n = n(C)$, sua dimensão $k = K(C)$ e sua distância mínima $d = d(C)$. O valor de n é apenas o comprimento das palavras consideradas. O valor de k é a dimensão de C como espaço vetorial. O inteiro d é o menor dos valores $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, com $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sendo palavras distintas em C e $d(-, -)$ representa a distância de Hamming, isto é, o número de lugares em que as palavras são distintas.

A Geometria Algébrica fornece técnicas para obter códigos adequados. Consiste em considerarmos uma variedade projetiva suave X sobre F, um divisor F-racional G e um conjunto de pontos racionais de X que não estão no suporte de G. Então, o código será a imagem do mapa de avaliação nos pontos considerados das funções no espaço vetorial $\mathcal{L}(G)$. Para códigos deste tipo, que são chamados de códigos AG, estimativas para a dimensão k são muitas vezes encontradas na Geometria Algébrica. Porém, estimativas para a distância mínima d existem em poucos casos. O caso mais relevante seria o código geométrico de Goppa, isto é, um código AG em que X é uma curva projetiva e nesse caso temos as estimativas

$$k \geqslant \deg(G) + 1 - g$$
$$d \geqslant n - \deg(G),$$

onde g é o gênero da curva. Estimativas para a distância mínima de códigos AG em variedades com dimensão maior que 1 é um problema em aberto.

Códigos de avaliação definidos no começo, são códigos AG em que a variedade é o plano projetivo $\mathbb{P}^2$, o divisor será mH, com H a reta no infinito e considerando os pontos afins P_i como pontos de avaliação. Neste caso, teríamos que $\mathcal{L}(mH) = F[x, y]_{\leqslant m}$ e o mapa de avaliação será E.

Vamos considerar códigos de avaliação em conjuntos de pontos singulares de uma folheação no plano projetivo e obter estimativas para a distância mínima desses códigos, dando origem a construção de novos códigos com distância mínima designada.

Seja V_k o espaço vetorial dos polinômios homogêneos em $F[x, y, z]$ de grau k, onde F corpo finito com q elementos. Considere pontos distintos $P_1, \ldots, P_n$ em $\mathbb{P}^2$ que são racionais sobre F. Definimos $W_k(P_1, \ldots, P_n) = \{f \in V_k \mid f(P_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, que é um subespaço vetorial já que $f(P_i) = 0$ impõe condições lineares em V_k. Vamos denotar por $s_k(P_1, \ldots, P_n)$ o número de condições linearmente dependentes nos $f(P_i) = 0$ definindo $W_k(P_1, \ldots, P_n)$. Então temos que

$$\dim(W_k(P_1, \ldots, P_n)) - s_k(P_1, \ldots, P_n) = \dim(V_k) - n. \tag{5.1}$$

Se H_1 e H_2 são hipersuperfícies de graus d_1 e d_2, respectivamente, que se intersectam em $d = d_1 d_2$ F-pontos racionais distintos $P_1, \ldots, P_d$, então o Teorema de Cayley-Bacharach fornece uma fórmula que é útil para calcular os valores de s_k em subconjuntos dos pontos acima. Então para $n < d_1 d_2$

$$\dim(W_{k'}(P_{n+1}, \ldots, P_d)) - \dim(W_{k'}(P_1, \ldots, P_d)) = s_k(P_1, \ldots, P_n), \tag{5.2}$$

onde $k' = d_1 + d_2 - 3 - k$, dado que $0 \leqslant k \leqslant d_1 + d_2 - 3$.

Em geral, precisamos considerar um subesquema zero dimensional de $\mathbb{P}^2$, dado por um feixe de ideais $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ tal que $\ell(\mathcal{I}_Z) = \ell(Z)$ é finito. O subesquema Z associado a $\mathcal{I}_Z$ será o sistema de pontos e podemos definir $W_k(Z)$ e $s_k(Z)$ como acima.

Se $\mathcal{I}_Z \supset \mathcal{I}_\Gamma$, onde Γ é a interseção completa de duas curvas de graus d_1 e d_2, dadas pelas equações F_1 e F_2. Seja Z' o residual de Z em Γ. Dessa forma, as equações (5.1) e (5.2) ficam da seguinte forma

$$\dim(W_k(Z)) - s_k(Z) = \dim(V_k) - \ell(Z)$$
$$\dim(W_{k'}(Z')) - \dim(W_{k'}(\Gamma)) = s_k(Z),$$

onde $k' = d_1 + d_2 - 3 - k$.

Podemos traduzir as equações acima utilizando cohomologia. Note que $H^0(\mathcal{I}_Z(k)) = W_k(Z)$, $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) = V_k$ e $h^1(\mathcal{I}_Z(k)) = s_k(Z)$.

Proposição 5.1. *Para qualquer sistema de pontos Z e $k \geqslant 0$ um inteiro, temos*

$$h^0(\mathcal{I}_Z(k)) - h^1(\mathcal{I}_Z(k)) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \ell(Z).$$

Proposição 5.2. *Se Z é um subesquema de uma interseção completa Γ de duas curvas de grau d_1 e d_2, e Z' é o complemento de Z em Γ, então para $0 \leqslant k \leqslant d_1 + d_2 - 3$ temos*

$$h^0(\mathcal{I}_{Z'}(k')) - h^0(\mathcal{I}_\Gamma(k')) = h^1(\mathcal{I}_Z(k)),$$

onde $k' = d_1 + d_2 - 3 - k$.

Note que, a Proposição 5.1 é simplesmente a aplicação da cohomologia na sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

e que $\ell(Z) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z(k))$. A Proposição 5.2 é o Teorema de Cayley-Bacharach.

Seja F um corpo finito com q elementos e $(x : y : z)$ coordenadas homogêneas do plano projetivo $\mathbb{P}^2$ sobre F. Como já foi visto, uma folheação de grau $r \geqslant 0$ em $\mathbb{P}^2$ é dada por uma 1-forma $\Omega = Adx + Bdy + Cdz$ (a menos de um múltiplo em F^*), onde A, B e C são polinômios homogêneos de grau $r+1$ sem fatores em comum que satisfazem a condição de Euler $Ax + By + Cz = 0$.

Vamos demonstrar um teorema sobre o esquema singular de uma folheação em $\mathbb{P}^2$, que vai auxiliar na próxima seção.

Teorema 5.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $r \geqslant 1$ e Z o seu esquema singular. Então*

1. *Para qualquer j, $1 \leqslant j \leqslant r-2$ e cada ideal $\mathcal{J}$ com $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{J}$ tal que $\ell(\mathcal{J}) = (r+1)(r-j)$, temos que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r-j)) = 0$;*

2. *Para cada ideal $\mathcal{J}$ com $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{J}$ com $\ell(\mathcal{J}) = (r+2)$, temos que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(1)) = 0$;*

3. *Para cada ideal $\mathcal{J}$ com $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{J}$ com $\ell(\mathcal{J}) = (r+1)$, temos que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(1)) = 0$ ou $Z(\mathcal{J})$ pertence à uma reta invariante por $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Assuma que C é um divisor de grau $r-j$ dado por um elemento não-nulo de $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r-j))$, onde $Z(\mathcal{J})$ é um subesquema de $Z(\mathcal{I})$ tal que $\ell(\mathcal{J}) = (r+1)(r-j)$. Tome um ponto geométrico $p \in \mathrm{Supp}(C)$ que não está em $Z(\mathcal{I})$. Então os elementos da rede polar passando por p formam um leque (sistema de dimensão

1), que é livre de curvas de base ou possui uma reta L como curva de base (nesse caso o leque consiste de exatamente as polaridades dos pontos em L).

Primeiro, suponha que C é irredutível. Então a curva C e uma polaridade genérica P do leque se intersectam propriamente exceto se $C = L$ é uma reta invariante. Se C não é uma reta invariante, o Teorema de Bezout implica que $(r+1)(r-j)$ é o máximo de pontos (contando multiplicidades) que pertencem à interseção de C e P. Em outras palavras, o esquema definido pela interseção das curvas possui comprimento $(r+1)(r-j)$. Como $p \in C \cap P$, temos $(r+1)(r-j)+1$ pontos, aqueles em $Z(\mathcal{J})$ junto com os em P, pertencendo a interseção de C e P. Isto é uma contradição, portanto tal C não existe. Se, caso contrário, $C = L$ é uma reta invariante, aplicando o mesmo argumento à interseção de L com uma polaridade genérica da rede, encontraríamos pelo menos $r+1$ pontos de $Z(\mathcal{I})$ pertencendo a L.

Agora, suponha que C é redutível. Então o mesmo argumento funciona quando C não possui uma reta invariante como componente. Se C possui retas invariantes como componentes, então novamente aplicando o argumento para as componentes de C chegamos a conclusão que C não existe. Será óbvio se alguma componente de C não for uma reta invariante. Caso C só possua retas invariantes como componentes, então a interseção de duas delas será um ponto singular de $\mathcal{F}$, e consequentemente no máximo $2r+1 < 2(r+1)$ pontos de $Z(\mathcal{I})$ podem pertencer a união das duas retas. Se C possui apenas uma componente múltipla que é uma reta invariante L, então L pode intersectar uma polaridade genérica da rede polar no máximo em $r+1$ pontos singulares, assim C não pode conter $(r+1)(r-j)$ pontos de $Z(\mathcal{I})$, sendo $r-j$ o grau de C.

A coleção de fatos acima mostra que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(r-j)) = 0$ caso $1 \leqslant j \leqslant r-2$ e $\ell(\mathcal{J}) = (r+1)(r-j)$ ou $j = r-1$ e $Z(\mathcal{J})$ pertence a uma reta projetiva invariante de $\mathcal{F}$, e que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(1)) = 0$ se $\ell(\mathcal{J}) = r+2$. Isso prova o teorema. $\square$

5.2 Resultados

Considere $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $r \geqslant 2$ em $\mathbb{P}^2$, sobre um corpo finito F com q elementos. Vamos supor que o esquema $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = Z$ é reduzido e racional sobre F, assim o seu suporte contem r^2+r+1 pontos distintos de $\mathbb{P}^2$ e todos são racionais sobre F. Esta suposição implica que $r \leqslant q$, e que o número de pontos racionais é dado por q^2+q+1. Vamos denotar por $P_1, \ldots, P_n$ os pontos em $Z \cap \mathbb{A}^2$ e l a cardinalidade de $Z \cap H$, com H a reta no infinito $z = 0$. Assim,

$$r^2 + r + 1 = n + l.$$

Seja m um inteiro que satisfaz $1 \leqslant m \leqslant 2r-2$ e denote por $E_m = E_m(\mathcal{F}, H)$

o código AG, dado pela avaliação de funções em $\mathcal{L}(mH) = F[x,y]_{\leqslant m}$ nos pontos racionais $P_1, \ldots, P_n$. Em outras palavras, E_m é a imagem do mapa linear

$$E\colon F[x,y]_{\leqslant m} \to F^n$$

dado por

$$f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)).$$

Utilizando a geometria do esquema singular de $\mathcal{F}$, obtemos fórmulas para a dimensão do código E_m e limites para a distância mínima. Note que o comprimento n dos códigos é dado por $n = r^2 + r + 1 - l \geqslant r^2$, do fato que $l \leqslant r + 1$ pelo Teorema 5.3. Vamos denotar $N_s = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(s)) = (s+1)(s+2)/2$,

Teorema 5.4. *Com as suposições e notações como acima, obtemos que*

$$k(E_m) = \begin{cases} N_m, \text{ para } 1 \leqslant m \leqslant r-1 \\ N_m - (m-r)(m-r+2) - \max(0, l+m+1-2r), \text{ para } r \leqslant m \leqslant 2r-2 \end{cases}$$

Demonstração. Primeiro, se $1 \leqslant m \leqslant r-1$ então o mapa $E : F[x,y]_{\leqslant m} \to F^n$ será injetivo, pois caso contrário teríamos uma curva C de grau m que passa por $n \geqslant r^2$ pontos de $Z = \text{Sing}(\mathcal{F})$, o que contradiz o Teorema 5.3 (note que $r \geqslant 2$). Isto implica que $k(E_m) = N_m$.

Agora, se $r \leqslant m \leqslant 2r-2$, denote por $\mathcal{J}$ o ideal dos pontos $P_1, \ldots, P_n$ e por $\mathcal{J}'$ o ideal dos pontos em $Z \cap \mathbb{A}^2$. Como $\text{Ker}(E) = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(m))$, então

$$k(E_m) = N_m - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(m)) = n - h^1(\mathcal{J}(m)),$$

onde a última igualdade segue da Proposição 5.1. Pelo Teorema de Cayley-Bacharach aplicado ao complemento na interseção completa de duas polaridades genéricas da rede, junto com o Teorema 5.3 obtemos que

$$h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(m)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}''(2r-m-1)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)),$$

onde $\mathcal{J}''$ representa o residual de $Z(\mathcal{J})$ na interseção nas polaridades genéricas. A última igualdade segue do fato que $Z(\mathcal{J}'') = Z(\mathcal{J}') \cup Z^*$, onde Z^* é o conjunto de r pontos que pertencem a uma reta, levando em conta que $2r-m-1 < r$. Da sequência exata de $Z(\mathcal{J}')$, deduzimos

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)) + N_{2r-m-2} - l.$$

Como os pontos em $Z(\mathcal{J}')$ são pontos distintos em uma reta, então

$$h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)) = 0$$

se $l \leqslant 2r-m-1$, e

$$h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)) = l-(2r-m-1)$$

se $l > 2r-m-1$. Juntando essas igualdades, obtemos que

$$\begin{aligned} k(E_m) &= n - h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(m)) = n - h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)) \\ &= n + l - N_{2r-m-2} - \max(0, l+m+1-2r) \\ &= N_m - (m-r)(m-r+2) - \max(0, l+m+1-2r). \end{aligned}$$

□

Teorema 5.5. *Com as suposições e notações como acima, obtemos que*

$$d(E_m) \geqslant \begin{cases} r^2 - l, \text{ para } m = 1 \\ (r+1)(r-m) - l + 2, \text{ para } 2 \leqslant m \leqslant r-1 \\ 2r - m - l, \text{ para } r \leqslant m \leqslant 2r-2 \text{ se } l < 2r-m-1 \\ 2r-m-1, \text{ para } r \leqslant m \leqslant 2r-2 \text{ se } l \geqslant 2r-m-1 \end{cases}$$

Demonstração. Se $w(\mathbf{c}) = d(\mathbf{c}, \mathbf{0})$ denota o peso da palavra $\mathbf{c}$, note que como o código é linear, a distância miníma será igual ao minímo dos valores $w(\mathbf{c})$ com $\mathbf{c}$ variando por todas as palavras não-nulas em E_m.

Primeiro, assuma que $1 \leqslant m \leqslant r-1$. Se $w = w(\mathbf{c})$ para uma palavra não-nula $\mathbf{c}$, então existe um divisor C de grau m passando por $n-w$ pontos de $Z(\mathcal{J})$. Do Teorema 5.3, segue que teríamos $n - w < (r+1)m$ se $m \geqslant 2$ e $n-w \leqslant r+1$ se $m = 1$. Por isso, obtemos a estimativa $d(E_1) \geqslant r^2 - l$ e $d(E_m) \geqslant (r+1)(r-m) - l + 2$ para $2 \leqslant m \leqslant r$.

Agora, assuma que $r-2 \leqslant m \leqslant 2r-2$. Prosseguimos da seguinte forma: se encontrarmos um inteiro positivo d tal que para cada ideal $\mathcal{K}$ com $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ e $\ell(\mathcal{K}) = n-d+1$ temos que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{K}(m)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}(m))$, então teríamos que $d(E_m) \geqslant d$. De fato, a prova da afirmação anterior segue do fato que, cada vez que um divisor de grau m passa pelos $n-d+1$ pontos de $Z(\mathcal{J})$, então também terá que passar por todos os P_i, e portanto o peso de todas as palavras será pelo menos d.

Da mesma forma que na demonstração anterior, podemos traduzir o problema utilizando esquemas residuais da seguinte forma: se encontrarmos um inteiro positivo d tal que para cada ideal $\mathcal{K}'$ com $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}' \subset \mathcal{J}'$ e $\ell(\mathcal{K}') = d-1+l$ temos que $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{K}'(2r-m-2))$, então $d(E_m) \geqslant d$. Se $l \geqslant 2r-m-1$, então os divisores de grau $2r-m-2$ contendo $Z(\mathcal{J}')$ devem conter a reta H, consequentemente a condição da afirmação significa que os pontos em $Z(\mathrm{Ann}(\mathcal{J}'/\mathcal{K}'))$ devem impor condições independentes em divisores de grau $2r-m-3$, isso é sempre garantido para valores de d com $d-1 \leqslant 2r-m-2$, ou seja, $d \leqslant 2r-m-1$. Se $l < 2r-m-1$, então temos $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}'(2r-m-2)) = 0$, assim a afirmação será $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{K}'(2r-m-2)) = 0$, o que é garantido se $d-1+l \leqslant 2r-m-2+1$, ou seja, $d \leqslant 2r-m-l$. Isso completa a prova do teorema. $\square$

Uma observação importante de se fazer é que essa cota que tivemos para a distância mínima pode ser melhorada em alguns casos particulares. Por exemplo, tome $m = 2r-4$ com $r \geqslant 4$ e $l < 2r-m-1 = 3$, (ou seja, $l = 0, 1, 2$) e pelo Teorema 5.5, $d(E_m) \geqslant 4-l$. Se assumirmos que não existe reta passando por 3 dos r^2+r+1 pontos, então para todo $\mathcal{K}' \supset \mathcal{J}'$ com $\ell(\mathcal{K}') = 5$ temos $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{K}'(2)) = 0$ (nesse caso $2r-m-2 = 2$). Assim, a condição de d no Teorema 5.5 funciona com $5 = d-1+l$ e, consequentemente, $d \geqslant 6-l$. Nesse caso, $n = r^2+r+1-l$, e pelo Teorema 5.4 a dimensão do código será $k = r^2+r-5$. Portanto, o código satisfaz $k+d = n$.

Por outro lado, tomando $m = 2r-5$ com $r \geqslant 5$ e $l \geqslant 2r-m-1$ = 4, (ou seja, $4 \leqslant l \leqslant r+1$) e pelo Teorema 5.5, $d(E_m) \geqslant 4$. Se assumirmos novamente que não existe uma reta passando por 3 dos $r^2+r+1-l$ pontos singulares afins, então $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{K}^*(2)) = 0$ para todo $\mathcal{K}' \supset \mathcal{J}$ com $\ell(\mathcal{K}^*) = 5$ (aqui $2r-m-3 = 2$ e $\mathcal{K}^* = \text{Ann}(\mathcal{K}'/\mathcal{J}')$). Nesse caso, $d-1 = 5$ e portanto $d = 6$ é um limite inferior para a distância mínima. Também, como $n = r^2+r+1-l$ e pelo Teorema 5.4 a dimensão do código será $k = r^2+r-5+l$, novamente temos que $k+d = n$.

O maior grau possível da folheação cujos pontos singulares que estamos considerando será $r = q$, relembrando que q é o número de elementos do corpo F. Nesse caso, a folheação terá como esquema singular todos os pontos racionais no plano projetivo. Tal folheação, será definida pela 1-forma

$$\Omega = yz(y^{q-1} - z^{q-1})dx + zx(z^{q-1} - x^{q-1})dy + xy(x^{q-1} - y^{q-1})dz$$

Por último, a principal aplicação do Teorema 5.5 é fabricar códigos com uma distância mínima já predeterminada. Assim, fixando $d(C)$ podemos construir C variando os paramêtros do Teorema 5.5, ou seja, variando q, r, l e m.

Referências

ARAUJO, C.; CORRÊA, M. On degeneracy schemes of maps of vector bundles and applications to holomorphic foliations. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 276, p. 505–515, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 9, 10, 40 e 43.

BRUNELLA, M. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. In: ELSEVIER. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*. [S.l.], 1997. v. 30, n. 5, p. 569–594. Citado na página 34.

_____. *Birational geometry of foliations*. [S.l.]: Springer, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 25.

CALVO-ANDRADE, O.; CORRÊA, M.; JARDIM, M. Codimension one holomorphic distributions on the projective three-space. *International Mathematics Research Notices*, Oxford University Press, v. 2020, n. 23, p. 9011–9074, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 9, 25 e 31.

CAMPILLO, A.; FARRAN, J. I.; PISABARRO, M.-J. Evaluation codes at singular points of algebraic differential equations. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Springer, v. 18, p. 191–203, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 59.

CAMPILLO, A.; OLIVARES, J. A plane foliation of degree different from 1 is determined by its singular scheme. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, Elsevier, v. 328, n. 10, p. 877–882, 1999. Citado na página 9.

_____. Polarity with respect ot a foliation and cayley-bacharach theorems. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG Berlin, Germany, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 10, 45 e 51.

_____. Sections with isolated singularities. *Mathematical Research Letters*, International Press of Boston, v. 10, n. 5, p. 651–658, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 36.

_____. Special subschemes of the scheme of singularities of a plane foliation. *Comptes rendus. Mathématique*, v. 344, n. 9, p. 581–585, 2007. Citado na página 10.

_____. Cayley–bacharach and singularities of foliations. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, Springer, v. 52, n. 3, p. 477–498, 2021. Citado na página 58.

CORRÊA, M.; JARDIM, M.; MARCHESI, S. Classification of the invariants of foliations by curves of low degree on the three-dimensional projective space. *Revista Matemática Iberoamericana*, v. 39, n. 5, p. 1641–1680, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 25.

EHRESMANN, C.; REEB, G. Sur le champs d'éléments de contact de dimension p completement integrable dans une variété continuement differentiable. *CR Acad. Sci. Paris*, v. 218, n. 955-957, p. 1, 1944. Citado na página 9.

EISENBUD, D. *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 150. Citado na página 40.

EISENBUD, D.; GREEN, M.; HARRIS, J. Cayley-bacharach theorems and conjectures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 33, n. 3, p. 295–324, 1996. Citado na página 51.

EISENBUD, D.; HARRIS, J. *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 9, 11, 13, 14, 15 e 16.

FULTON, W. *Intersection theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.

GIRALDO, L.; PAN-COLLANTES, A. J. On the singular scheme of codimension one holomorphic foliations in 3. *International Journal of Mathematics*, World Scientific, v. 21, n. 07, p. 843–858, 2010. Citado na página 9.

GÓMEZ-MONT, X.; KEMPF, G. Stability of meromorphic vector fields in projective spaces. *Comment. Math. Helv*, v. 64, n. 3, p. 462–473, 1989. Citado na página 9.

HARTSHORNE, R. Stable reflexive sheaves. *Mathematische annalen*, Springer, v. 254, n. 2, p. 121–176, 1980. Citado na página 21.

_____. *Algebraic geometry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 52. Citado 5 vezes nas páginas 9, 19, 29, 38 e 42.

HUYBRECHTS, D. *Lectures on K3 surfaces*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. v. 158. Citado na página 34.

HUYBRECHTS, D.; LEHN, M. *The geometry of moduli spaces of sheaves*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 9, 19, 22 e 27.

OKONEK, C.; SCHNEIDER, M.; SPINDLER, H.; GELFAND, S. *Vector bundles on complex projective spaces*. [S.l.]: Springer, 1980. v. 3. Citado 6 vezes nas páginas 9, 19, 20, 21, 22 e 24.

VAINSENCHER, I. *Characteristic Classes in Algebraic Geometry*. [S.l.]: UFMG, BH, November, 2012. Citado na página 11.