



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Faculdade de Engenharia Mecânica

Rafael Alexandrow Franchi Carniello

# **Controle Dependente de Estado de Sistemas Dinâmicos Afins Chaveados com Restrições de Tempo de Permanência**

Campinas

2025

Rafael Alexandrow Franchi Carniello

**Controle Dependente de Estado de Sistemas Dinâmicos  
Afins Chaveados com Restrições de Tempo de  
Permanência**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecatrônica.

Orientador: Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva

Coorientador: Prof. Dr. Matheus Souza

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Rafael Alexandrow Franchi Carniello, e orientada pelo Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva

Campinas

2025

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Vanessa Evelyn Costa - CRB 8/8295

C217c Carniello, Rafael Alexandrow Franchi, 2000-  
Controle dependente de estado de sistemas dinâmicos afins chaveados com restrições de tempo de permanência / Rafael Alexandrow Franchi Carniello. – Campinas, SP : [s.n.], 2025.

Orientador: Ely Carneiro de Paiva.  
Coorientador: Matheus Souza.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistemas de comutação. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Estabilidade. 4. Eletrônica de potência. I. Paiva, Ely Carneiro de, 1965-. II. Souza, Matheus, 1990-. III. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Informações complementares

**Título em outro idioma:** State-dependent control of switched affine dynamical systems with dwell time constraints

**Palavras-chave em inglês:**

Switching systems

Dynamical systems

Stability

Power electronics

**Área de concentração:** Mecatrônica

**Titulação:** Mestre em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Ely Carneiro de Paiva [Orientador]

Ricardo Miranda Martins

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

**Data de defesa:** 29-05-2025

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)**

ODS: 9. Inovação e infraestrutura

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-3037-7189>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9699531500054428>

**Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva, Presidente**

**Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins**

**Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira**

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

*Dedico esta dissertação à minha família e amigos.*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pelo dom da vida.

A minha família, que sempre me apoiou e incentivou em todas as etapas. Em especial, à minha mãe, Monica Franchi, pelo afeto e estímulo aos estudos. E aos meus avós, Raffaele Franchi e Tatiana Franchi, que sempre cuidaram tão bem de todos.

A todos os amigos que cruzaram comigo ao longo desta jornada universitária e fizeram dela mais feliz. Com destaque para Pedro Zottolo, Mateus Brites e Bruno Gonçalves.

Aos meus irmãos de vida, Christopher Poniktera e João Pedro Ungaro, que me acompanham desde a infância.

A minha namorada e melhor amiga, Ana Carolina da Silva, que me apoiou incondicionalmente nos últimos anos.

A todos os professores que fizeram parte de algum modo da minha formação.

Aos professores que me introduziram a pesquisa científica, Prof. Dr. Eduardo Abreu e Prof. Dr. João Florindo.

Sou grato, também, ao Prof. Dr. André Fioravanti, que me introduziu à docência.

Aos orientadores desta pesquisa, Prof. Dr. Ely de Paiva e Prof. Dr. Matheus Souza, pelo suporte ao longo do mestrado.

A todos os docentes e funcionários da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM), Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) e Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC).

A coordenação de pós-graduação da FEM e ao coordenador Prof. Dr. João Fogagnolo.

A Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), que se tornou meu segundo lar nos últimos anos.

Por fim, a todos que, de alguma forma, caminharam comigo nesta jornada, meu sincero agradecimento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

Esta dissertação aborda o problema de projeto de controladores dependentes de estados para sistemas dinâmicos afins com comutação a tempo contínuo com restrições de tempo de permanência. A primeira parte deste texto introduz ao leitor os principais conceitos e resultados da área. Em sequência, a formulação matemática do problema é apresentada, junto à sua motivação física. Então, os fundamentos sobre existência, unicidade e análise de estabilidade são desenvolvidos, partindo de sistemas dinâmicos contínuos até os sistemas dinâmicos chaveados. A partir disso, as principais contribuições do trabalho são exploradas. Em particular, a adição de restrições de tempo de permanência é propriamente tratada. Por fim, exemplos acadêmicos na área de eletrônica de potência ilustram a teoria desenvolvida, e são contrastados com outros resultados obtidos da literatura.

**Palavras-chaves:** Sistemas de comutação, sistemas dinâmicos, estabilidade, eletrônica de potência.

# Abstract

This dissertation addresses the problem of designing state-dependent controllers for continuous-time switched affine dynamical systems with dwell time constraints. The first part of this text introduces the reader to the main concepts and results of the area. Next, the mathematical formulation of the problem is presented, together with its physical motivation. Then, the fundamentals of existence, uniqueness and stability analysis are developed, starting from continuous dynamical systems to switched dynamical systems. From that, the main contributions of the work are explored. In particular, the addition of dwell-time constraints is properly treated. Finally, academic examples in the area of power electronics illustrate the theory developed, and are contrasted with other results obtained in the literature.

**Keywords:** Switching systems, dynamical systems, stability, power electronics.



*“Olhar para o céu e ver suas infinitas estrelas nos faz pensar: por que a raça humana  
acha que ela é grande coisa?”  
(Calvin e Haroldo)*

# Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Função absolutamente contínua. . . . .	21
Figura 2.2 – Exemplo de não simetria para a distância $\rho$ . . . . .	22
Figura 2.3 – Função multi-valorada semi-contínua superior. . . . .	23
Figura 2.4 – Modos deslizantes atrativos e repulsivos ao redor da região de deslizamento. . . . .	24
Figura 2.5 – Fluxo tubular. . . . .	27
Figura 2.6 – Simulação de um sistema globalmente uniformemente assintoticamente estável (GUAE). . . . .	30
Figura 2.7 – Curvas de nível de uma função de Lyapunov. . . . .	30
Figura 2.8 – Simulação de um sistema globalmente uniformemente finalmente limitado (GUFL). . . . .	32
Figura 3.1 – Esquemática de sistemas chaveados. . . . .	35
Figura 3.2 – Esquemática do chaveamento a tempo contínuo com restrições de tempo de permanência mínimos. . . . .	37
Figura 3.3 – Topologia do conversor CC-CC tipo <i>buck-boost</i> . . . . .	39
Figura 3.4 – Desligamento característico de um diodo de potência: Variação da corrente acima; Variação da tensão ao meio; Variação da potência abaixo. . . . .	40
Figura 3.5 – Capacidades dos dispositivos semicondutores de potência. . . . .	40
Figura 3.6 – Variação da tensão e corrente durante o desligamento de um BJT de potência para: Carga indutiva na figura à esquerda; Carga resistiva na figura à direita. . . . .	41
Figura 3.7 – Curva de eficiência versus frequência de chaveamento. . . . .	42
Figura 5.1 – Estados do sistema. . . . .	57
Figura 5.2 – Função de comutação. . . . .	57
Figura 5.3 – Plano de fase. . . . .	58
Figura 5.4 – Esquemática do conversor <i>buck-boost</i> . . . . .	59
Figura 5.5 – Pontos de equilíbrio atingíveis do conversor <i>buck-boost</i> . . . . .	60
Figura 5.6 – Estados do sistema. . . . .	60
Figura 5.7 – Função de comutação. . . . .	61
Figura 5.8 – Esquemática do motor de corrente contínua alimentado por um conversor tipo <i>buck-boost</i> . . . . .	62
Figura 5.9 – Estados do sistema. . . . .	63
Figura 5.10 – Função de comutação. . . . .	63

# Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Tabela de parâmetros dos conversores CC-CC. . . . .	59
Tabela 5.2 – Tabela de parâmetros do sistema. . . . .	62

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1	Notação Matemática	14
1.2	Organização da Dissertação	14
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>16</b>
2.1	Sistemas Contínuos	16
2.2	Sistemas Contínuos por Partes	20
2.3	Análise de Estabilidade de Lyapunov	25
<b>3</b>	<b>Apresentação do Problema</b>	<b>34</b>
3.1	Sistemas a Tempo Contínuo	34
3.2	Sistemas a Tempo Discreto	35
3.3	Sistemas a Tempo Contínuo com Restrições de Tempo de Permanência	36
3.4	Considerações Físicas	38
3.4.1	Sistemas Elétricos	38
3.4.2	Sistemas Mecânicos	41
<b>4</b>	<b>Controle de Sistemas Afins Chaveados</b>	<b>43</b>
4.1	Sistemas a Tempo Contínuo	43
4.2	Sistemas a Tempo Discreto	45
4.3	Restrições de Tempo de Permanência	47
4.3.1	Detalhes de Implementação	54
<b>5</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	<b>56</b>
5.1	Sistema Instável	56
5.2	Conversores tipo <i>Choppers</i>	58
5.2.1	Conversor <i>Buck-Boost</i>	59
5.3	Motor de Corrente Contínua	61
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>65</b>
	<b>Conclusão</b>	<b>65</b>
	<b>Referências</b>	<b>66</b>
	<b>APÊNDICE A Resultados Auxiliares em Análise Matricial</b>	<b>68</b>
A.1	Desigualdades Matriciais Lineares	68
	<b>APÊNDICE B Resultados Auxiliares em Análise Real</b>	<b>72</b>
B.1	Teoria da Medida	72

# 1 Introdução

Sistemas chaveados constituem uma classe especial de sistemas híbridos, caracterizados por terem um número finito de subsistemas e uma regra que orquestra a comutação entre eles. Uma das características intrínsecas destes sistemas é a possibilidade de estabilizar trajetórias, mesmo se todos os subsistemas forem instáveis. Assim, ao se projetar uma regra de comutação adequadamente, é esperado que se garanta estabilidade em malha fechada, e, se a regra for estritamente consistente, até melhore o desempenho global quando comparado a cada subsistema isoladamente (DEAECTO *et al.*, 2013). Muitos problemas em engenharia com dinâmicas complexas podem ser modelados como sistemas chaveados, que são responsáveis por uma ampla gama de aplicações, como, eletrônica de potência (DEAECTO *et al.*, 2010), controle automotivo e aeroespacial (BAILO-CAMARA *et al.*, 2008), sistemas controlados por redes (SOUZA *et al.*, 2014), entre outros. Essa flexibilidade é o principal fator que torna os sistemas chaveados um importante tópico na literatura científica nas últimas décadas. O leitor pode se direcionar para (LIBERZON, 2003; SUN; GE, 2005) e suas referências para uma visão geral da área.

Dentro desta subclasse, os sistemas chaveados afins tem grande importância para aplicações em conversores de potência CC-CC (CARDIM *et al.*, 2009). Cada subsistema apresenta um termo afim constante, o que cria um conjunto de pontos de equilíbrio no espaço de estados de grande interesse. Sendo assim, um dos maiores problemas na área é encontrar um conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis e projetar uma regra de comutação que governe as trajetórias de estado para um ponto desejado. Existem alguns resultados neste tópico para sistemas a tempo contínuo. Em particular, em (DEAECTO *et al.*, 2010), este problema é resolvido utilizando as chamadas funções de Lyapunov. A principal desvantagem gerada por estas condições de projeto é a ocorrência de um fenômeno indesejado chamado *chattering*, caracterizado pelo chaveamento arbitrariamente rápido e que, por conta deste fator, pode causar dano em componentes de dispositivos físicos. Este problema é considerado em apenas algumas referências da literatura, como (EGIDIO; DEAECTO, 2019; SOUZA *et al.*, 2017; DEAECTO; GEROMEL, 2017). Em (DEAECTO; GEROMEL, 2017), por exemplo, utiliza-se uma abordagem de amostragem dos dados para contornar o problema. Este método, porém, impõe uma restrição adicional: que o período de amostragem seja igual ao período de tempo de permanência. Isto leva a uma considerável redução da generalidade da regra de comutação a ser projetada.

O principal objetivo desta dissertação é o projeto de uma regra de estabilização sem *chattering*, dependente do estado, para sistemas dinâmicos afins chaveados

inspirado nas abordagens (SOUZA *et al.*, 2014; ARTAXO *et al.*, 2023; ALLERHAND; SHAKED, 2013). A regra de comutação a ser projetada deve também satisfazer restrições de tempo de permanência e atingir um desempenho desejado. Para isso, a região de atração é aproximada como um conjunto elipsoidal de volume mínimo. Além disso, é garantido a existência de um conjunto positivamente invariante exponencialmente estável. Ambos os resultados são modelados como problemas de otimização com restrições expressas em termos de desigualdades matriciais lineares (DMLs)<sup>1</sup>. Uma importante distinção desta abordagem é que o tempo de permanência e o período de amostragem não requerem igualdade. A relaxação apresentada neste trabalho, então, necessita de novos métodos.

## 1.1 Notação Matemática

A notação utilizada é padrão. Os símbolos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}_+$  denotam os conjuntos dos naturais, reais e reais não-negativos, respectivamente. O conjunto  $\langle N \rangle = \{1, \dots, N\}$  é composto pelos primeiros  $N$  números naturais. O ortante não negativo do  $\mathbb{R}^n$  é denotado por  $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ . A norma Euclidiana usual em  $\mathbb{R}^n$  é denotada por  $\|\cdot\|$  e, para algum  $x \in \mathbb{R}^n$  e algum  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ , define-se:

$$\text{dist}(x, \mathbb{X}) = \inf_{y \in \mathbb{X}} \|y - x\|.$$

Dado um conjunto  $\mathbb{X}$ , seu fecho é denotado por  $\overline{\mathbb{X}}$  e sua fronteira por  $\partial\mathbb{X}$ . O conjunto das matrizes reais  $m \times n$  é denotado por  $\mathbb{R}^{m \times n}$  e o conjunto dos vetores coluna reais  $n$ -dimensionais é denotado por  $\mathbb{R}^n$ . Para qualquer matriz  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$  refere-se à sua transposta. Para qualquer matriz simétrica  $X = X^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X \succ 0$  ( $X \succeq 0$ ) denota que  $X$  é definida positiva (semi-definida positiva), e  $(\star)$  refere-se a cada respectivo bloco simétrico. O cone das matrizes definidas positivas de ordem  $n$  é referido por  $\mathbb{S}_+^n$ . O espectro de uma matriz quadrada  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é denotado por  $\sigma(X)$ . A matriz  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é: Hurwitz, se a máxima parte real dos seus autovalores é negativa, i.e.,  $\max_{\lambda \in \sigma(X)} \Re(\lambda) < 0$ ; Schur, se o máximo autovalor em módulo está contido na bola unitária em torno da origem, i.e.,  $\max_{z \in \sigma(X)} |z| < 1$ ; e Metzler, se as entradas da não-diagonal são não-negativas, i.e.,  $x_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ .

## 1.2 Organização da Dissertação

Os capítulos deste trabalho estão estruturados da seguinte forma:

**Capítulo 2:** Neste capítulo, os fundamentos de existência, unicidade e análise de estabilidade são desenvolvidos, partindo dos sistemas dinâmicos contínuos até os sis-

<sup>1</sup> ou, em inglês, LMIs (*Linear Matrix Inequalities*).

temas dinâmicos chaveados. Isso se faz necessário para garantir que as soluções estejam bem postas para o problema que desejamos modelar.

**Capítulo 3:** Neste capítulo, são apresentadas as considerações físicas que motivam a adição de restrições de tempo de permanência, bem como a formulação matemática que modela os casos a tempo contínuo, discreto e com restrições de tempo de permanência.

**Capítulo 4:** Este é o primeiro capítulo de projeto da dissertação. Primeiro, são considerados os problemas de realimentação a tempo contínuo e a tempo discreto. Depois, estes resultados são generalizados para adicionar as restrições de tempo de permanência.

**Capítulo 5:** Neste último capítulo, os resultados apresentados são aplicados a exemplos numéricos. Em particular, são considerados conversores CC-CC, que naturalmente são sistemas afins chaveados.

**Conclusão:** Por fim, as principais contribuições da dissertação são retomadas e perspectivas de pesquisas futuras apresentadas.

**Apêndice A:** Este apêndice é dedicado aos resultados auxiliares em análise matricial. Em especial, para o tratamento de desigualdades matriciais lineares.

**Apêndice B:** Este apêndice é dedicado aos resultados em análise real. Em particular, na teoria de medida, que é utilizada de forma auxiliar durante a prova de boa colocação das soluções de sistemas com descontinuidades.

## 2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, são desenvolvidos os fundamentos de existência, unicidade e dependência das soluções para as equações diferenciais ordinárias que modelam os sistemas dinâmicos de interesse. Em particular, parte-se do caso a tempo contínuo, dado que, por hipótese, os subsistemas que compõem um sistema dinâmico chaveado não apresentam descontinuidades. Depois, tais resultados são generalizados para considerar descontinuidades de medida nula com relação à variável independente de tempo e saltos com relação à variável dependente de estados. Estas descontinuidades aparecem naturalmente nos conversores de eletrônica de potência, dado a presença de chaves no estado sólido que alteram a topologia do circuito ativo e são de grande interesse, pois permitem a existência de modos deslizantes.

Ao se considerar o problema de projeto de controladores com realimentação de estados para tais dispositivos, deve-se ressaltar que a presença de uma tensão de entrada constante caracteriza os sistemas dinâmicos como afins. Isto dificulta o atingimento de pontos de equilíbrio desejados pelo projetista, o que faz necessário definir os conceitos de estabilidade tanto para pontos, quanto para conjuntos invariantes. Ainda, como serão impostas restrições de tempo de permanência, dadas as características físicas de sistemas elétricos (ou mecânicos), será necessário complementar as definições com a caracterização das trajetórias de um dado sistema como finalmente limitadas.

### 2.1 Sistemas Contínuos

Primeiro, parte-se de uma pergunta elementar no contexto de equações diferenciais: “Quando uma equação diferencial tem soluções? E, se estas existem, quantas serão?”. Assim, para introduzir uma resposta, considere a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

com  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sendo uma função contínua em algum aberto  $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . A partir dos próximos teoremas, será provada a existência de soluções para tal equação, mesmo exigindo que  $x(t_0) = x_0$ , com  $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ , ou seja, para o seu problema de valor inicial (PVI). Note que isto não necessariamente é algo trivial. Ainda, será adotado que  $f^t : \gamma(0) \rightarrow \gamma(t)$  é o fluxo do sistema dinâmico, tal que  $\gamma(t)$  é uma solução para o PVI e  $\gamma(0) = x_0$ .

É interessante ressaltar que, ainda que o caso de primeira ordem possa parecer



trivial, é possível demonstrar que equações de ordem superior podem ser reduzidas ao caso de primeira ordem (KHALIL, 2002), o que justifica fortemente o estudo do problema em questão.

**Teorema 2.1 (Teorema de Peano)** *Suponha que  $f$  é contínua em  $t$  e  $x(t)$ . Então, para todo  $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$  existe algum intervalo aberto  $I$  e alguma solução  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  da equação diferencial (2.1) com  $t_0 \in I$  e  $\gamma(t_0) = x_0$ .*

**Prova** O leitor pode-se referir à (VIANA; ESPINAR, 2022) para a prova do Teorema 2.1.

**Exemplo 2.1** *O Teorema 2.1 garante a existência de soluções exigindo apenas a continuidade da função  $f(t, x)$ , porém não nos diz quantas são. Como exemplo, considere a seguinte equação diferencial com condição de valor inicial:*

$$\dot{x}(t) = (x(t))^{1/3}, \quad x(0) = 0. \quad (2.2)$$

*Note que a função  $f(t, x)$  é contínua em seus argumentos, assim, garante-se que existe alguma solução para o PVI. Pode-se verificar que tanto  $x_1(t) = (2t/3)^{3/2}$ , como  $x_2(t) \equiv 0$ , satisfazem tanto a equação diferencial quanto a condição de valor inicial.*

A não unicidade de soluções, como visto no exemplo 2.1, nos motiva a segunda pergunta fundamental: “Quando um sistema dinâmico tem solução única?”. O Teorema de Picard-Lindelöf, que será enunciado a seguir, garante a unicidade com uma condição adicional de regularidade sobre a função  $f(t, x)$ . A saber, a continuidade Lipschitz em relação à variável dependente  $x(t)$  localmente.

**Definição 2.1** *Uma função  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita localmente Lipschitz-contínua em  $x(t)$  se, para todo  $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ , existem  $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$  e  $L = L(t_0, x_0) > 0$ , tais que  $\overline{B_{\delta(t_0)} \times B_{\delta(x_0)}} \subset \mathcal{U}$  e a seguinte desigualdade:*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad (2.3)$$

*é válida para todo  $t \in \overline{B_{\delta(t_0)}}$  e quaisquer  $x_1, x_2 \in \overline{B_{\delta(x_0)}}$ . Ainda, se (2.3) é válido para qualquer  $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathcal{U}$ , então a função é dita globalmente Lipschitz-contínua.*

**Teorema 2.2 (Teorema de Picard)** *Suponha que  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua em  $t$  e localmente Lipschitz em  $x$ . Então, as seguintes afirmações são válidas:*

- para todo  $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$  existe algum intervalo aberto  $I$  e alguma solução  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  do problema de valor inicial (2.1) tal que  $t_0 \in I$  e  $\gamma(t_0) = x_0$ ;

- se  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  são soluções do problema de valor inicial (2.1) e existe  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  tal que  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$  então  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ .

**Prova** O leitor pode-se referir à (VIANA; ESPINAR, 2022) para a prova do Teorema 2.2.

**Exemplo 2.2** Considere a seguinte equação diferencial com condição de valor inicial:

$$\dot{x}(t) = -x^2, \quad x(0) = -1. \quad (2.4)$$

A função  $f(t, x) = -x^2$  é localmente Lipschitz para todo  $x \in \mathbb{R}$ . A solução única é:

$$x(t) = \frac{1}{t-1}, \quad (2.5)$$

e está definida apenas para o intervalo  $t \in [0, 1)$ . Quando  $t \rightarrow 1$ ,  $x(t)$  deixa qualquer conjunto compacto. Este fenômeno é denominado de escape em tempo finito.

A existência de uma solução local única não é suficiente para determinar a sua extensão para todo o  $\mathbb{R}^n$ , como visto no exemplo 2.2. Assim, ao se considerar diferentes domínios que tenham alguma intersecção, pode-se ordenar parcialmente as diferentes soluções obtidas para determinar aquela que existe por mais tempo. E, a partir da exigência de maior regularidade sobre a função  $f(t, x)$ , provar que esta existe globalmente.

**Definição 2.2** Dado uma equação diferencial na forma de (2.1), então, defina:

$$S(t_0, x_0) = \{\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma \text{ é solução de (2.1) com condição inicial } \gamma(t_0) = x_0\}. \quad (2.6)$$

Assim, dados dois elementos  $\gamma_1, \gamma_2 \in S(t_0, x_0)$ , diz-se que:

$$\gamma_1 \leq \gamma_2, \text{ se, e somente se, } I_1 \subset I_2 \text{ e } \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \text{ para todo } t \in I_1. \quad (2.7)$$

Em particular,  $\leq$  é uma relação de ordem parcial, pois pode acontecer que nem  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  nem  $\gamma_2 \leq \gamma_1$  ocorra. Então, diz-se que  $\gamma$  é solução maximal se  $\gamma$  é um elemento maximal de  $S(t_0, x_0)$ , ou seja, não existe  $\tilde{\gamma} \in S(t_0, x_0)$  tal que  $\gamma \leq \tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ .

**Lema 2.1** Seja  $\gamma : (a, b) \in \mathbb{R}^n$  uma solução máxima de  $\mathbb{R}^n$  num domínio  $\mathcal{U}$ . Então:

$$(t, \gamma(t)) \rightarrow \partial\mathcal{U}, \text{ quando } t \rightarrow a \text{ ou } t \rightarrow b. \quad (2.8)$$

**Teorema 2.3** Suponha que  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua em  $t$  e globalmente Lipschitz em  $x$ , com constante  $L$ . Então, as soluções maximais para (2.1) estão definidas em toda reta  $\mathbb{R}$ . Além disso:

$$\|\gamma_{t_0, x_0}(t) - \gamma_{t_0, y_0}(t)\| \leq e^{L|t-t_0|} \|x_0 - y_0\| \quad (2.9)$$

em que  $\gamma_{t_0, x_0}(t)$  e  $\gamma_{t_0, y_0}(t)$  são as soluções maximais com condições iniciais  $\gamma_{t_0, x_0}(t_0) = x_0$  e  $\gamma_{t_0, y_0}(t_0) = y_0$ , respectivamente.

**Prova** O leitor pode-se referir à (VIANA; ESPINAR, 2022) para a prova do Teorema 2.3.

Sendo assim, para que um problema de valor inicial na forma de (2.1) tenha solução global a função  $f(t, x)$  necessariamente precisa ser contínua em  $t$  e globalmente Lipschitz-contínua em  $x(t)$ . Ainda, é possível estabelecer uma relação de dependência contínua entre as soluções e sua condição de valor inicial e parâmetros.

**Teorema 2.4** *Seja  $\mathcal{V}$  um aberto em  $\mathbb{R}^{n+p+1}$  e  $G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x, \mu) \rightarrow G_\mu(t, x)$  uma função contínua em  $t$  e  $\mu$ , e localmente Lipschitz-contínua em  $x$ . Então, para todo  $(t_0, x_0, \mu_0) \in \mathcal{V}$ , existe  $\rho > 0$  tal que:*

- para todo  $(\bar{t}, \bar{x}, \mu) \in \overline{B_\rho(t_0)} \times \overline{B_\rho(x_0)} \times \overline{B_\rho(\mu_0)}$ , o domínio da solução  $\gamma_{\bar{t}, \bar{x}, \mu}$  da equação diferencial (2.1) com condição inicial  $\gamma_{\bar{t}, \bar{x}, \mu}(\bar{t}) = \bar{x}$  contém o intervalo  $[\bar{t} - \rho, \bar{t} + \rho]$ ;
- a função  $(t, \bar{t}, \bar{x}, \mu) \rightarrow \gamma_{\bar{t}, \bar{x}, \mu}(t)$  é contínua no domínio:

$$\mathcal{D} = \{(t, \bar{t}, \bar{x}, \mu) : t \in [\bar{t} - \rho, \bar{t} + \rho] \text{ e } (\bar{t}, \bar{x}, \mu) \in \overline{B_\rho(t_0)} \times \overline{B_\rho(x_0)} \times \overline{B_\rho(\mu_0)}\}. \quad (2.10)$$

**Prova** O leitor pode-se referir à (VIANA; ESPINAR, 2022) para a prova do Teorema 2.4.

Por fim, também pode-se estabelecer uma dependência com relação à regularidade das soluções, como enunciado a seguir.

**Teorema 2.5** *Seja  $\mathcal{V}$  um aberto em  $\mathbb{R}^{n+p+1}$  e  $G : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x, \mu) \rightarrow G_\mu(t, x)$  uma função de classe  $C^{k-1}$  na variáveis  $(t, x, \mu)$  e de classe  $C^k$  nas variáveis  $(x, \mu)$ . Então, para todo  $(t_0, x_0, \mu_0) \in \mathcal{V}$ , existe  $\rho > 0$  tal que:*

- a função  $(t, \mu) \rightarrow \gamma_\mu(t)$  é de classe  $C^k$  em  $[t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{B_\rho(\mu_0)}$ ;
- para cada  $\mu \in \overline{B_\rho(\mu_0)}$ , a função  $t \rightarrow \partial_\mu \gamma_\mu(t)$  é solução da equação diferencial linear:

$$\dot{Z} = \partial_x G_\mu(t, \gamma_\mu(t)) + \partial_\mu G_\mu(t, \gamma_\mu(t)), \quad (2.11)$$

para  $Z \in \mathbb{R}^{nd}$  e condição inicial  $Z(t_0) = 0$ .

**Prova** O leitor pode-se referir à (VIANA; ESPINAR, 2022) para a prova do Teorema 2.5.

## 2.2 Sistemas Contínuos por Partes

Os sistemas dinâmicos chaveados apresentam naturalmente descontinuidades em suas soluções, tal que os resultados clássicos apresentados na seção anterior não são suficientes nem mesmo para garantir a existência de soluções. Uma primeira generalização do Teorema de Peano pode ser obtida ao se relaxar a condição da solução  $\gamma(t)$  em ser continuamente diferenciável.

Considere a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (2.12)$$

com  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Seria possível encontrar uma função  $\gamma(t)$  definida em um intervalo real, tal que:

$$\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t)), \quad (2.13)$$

é válido para todo  $t$ , com exceção em um conjunto de medida nula? Para contornar tal problemática de descontinuidade com relação a variável depende  $t$ , Carathéodory buscou utilizar funções absolutamente contínuas que são Lebesgue integráveis.

**Definição 2.3** *Seja  $D$  um intervalo em  $\mathbb{R}$ . Uma função  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita absolutamente contínua se, para cada  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que:*

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta, \quad (2.14)$$

então,

$$\sum_k (f(y_k) - f(x_k)) < \epsilon. \quad (2.15)$$

**Definição 2.4** *As seguintes afirmações são definições equivalentes:*

- $f$  é absolutamente contínua;
- $f$  tem uma derivada  $f'$  Lebesgue integrável para quase todo ponto e:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad \forall x \in [a, b]; \quad (2.16)$$

- existe uma função Lebesgue mensurável  $g$  em  $[a, b]$  tal que:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad \forall x \in [a, b]; \quad (2.17)$$

Note que, se (2.16) e (2.17) são satisfeitas, então necessariamente  $g = f'$  para quase todo ponto. Além disso, a equivalência entre a primeira afirmação e (2.17) é conhecida como o teorema fundamental do cálculo integral de Lebesgue.

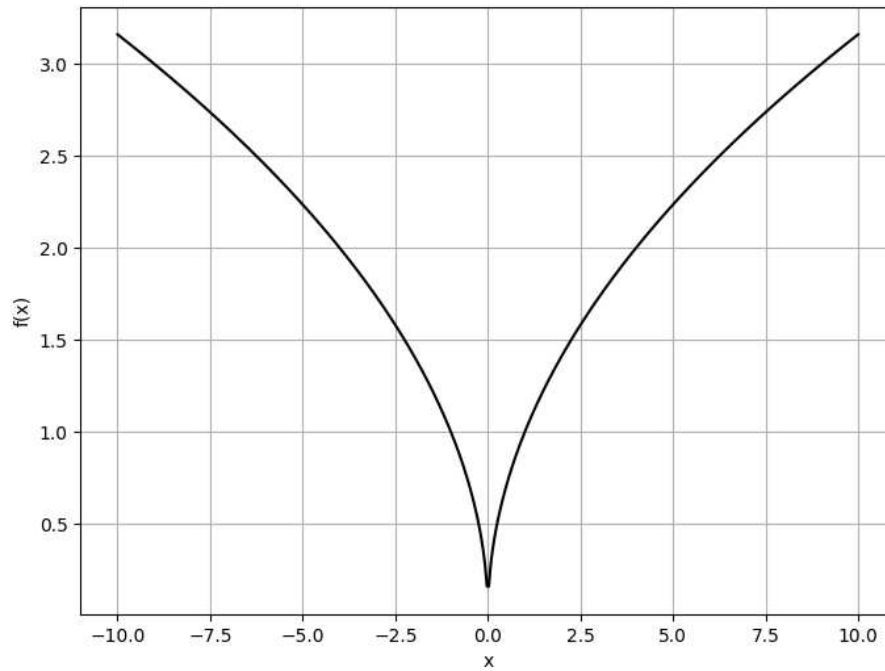


Figura 2.1 – Função absolutamente contínua.

**Exemplo 2.3** Para verificar a propriedade global da Definição 2.3, considere a seguinte função absolutamente contínua:

$$f(t, x) = |x|^{1/2}. \quad (2.18)$$

Seu gráfico está representado na figura 2.1. Note que, ao redor de  $x = 0$ ,  $f(t, x)$  não é diferenciável e as suas derivadas laterais não existem. Ainda, a continuidade absoluta implica a continuidade (local) no sentido usual, mas não a sua continuidade Lipschitz global.

**Teorema 2.6 (Teorema de Carathéodory)** Seja  $f(t, x) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , com  $\mathcal{U} : |t - t_0| \leq a \times |x - x_0| \leq b$ , para  $a, b > 0$ , e suponha que seja mensurável em  $t$ , para cada  $x$  fixado, e continua em  $x$ , para cada  $t$  fixado. Se existir uma função  $g(t)$  Lebesgue integrável no intervalo  $|t - t_0| \leq a$  tal que:

$$|f(t, x)| \leq g(t), \quad (t, x) \in \mathcal{U}, \quad (2.19)$$

então existe uma solução  $\gamma(t)$  para a equação diferencial (2.1) no sentido estendido em algum intervalo  $|t - t_0| \leq b$ , satisfazendo  $\gamma(t_0) = x_0$ .

**Prova** O leitor pode-se referir à (CODDINGTON; LEVINSON, 1955) para a prova do Teorema 2.6.

Por mais que o Teorema de Carathéodory tenha sido de grande importância histórica, principalmente por utilizar conceitos de teoria da medida para generalizar os

resultados clássicos que utilizavam a integração usual de Riemann, este resultado também é insuficiente para modelar sistemas chaveados. Tais sistemas apresentam uma regra de comutação que determina a ativação de um subsistema. Sendo assim, a função  $f(t, x)$  é multi-valorada e descontínua com relação à variável dependente de estados  $x(t)$ . Usualmente pede-se que a função de comutação seja semi-contínua superior.

**Definição 2.5** *Defini-se a distância  $\rho = \rho(C_1, C_2)$  entre dois conjuntos  $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$  por:*

$$\rho(C_1, C_2) = \sup_{x \in C_1} \text{dist}(x, C_2). \quad (2.20)$$

Note que, em geral, a distância  $\rho$  não é simétrica, i.e.,  $\rho(C_1, C_2) \neq \rho(C_2, C_1)$ , como pode-se visualizar na figura 2.2.

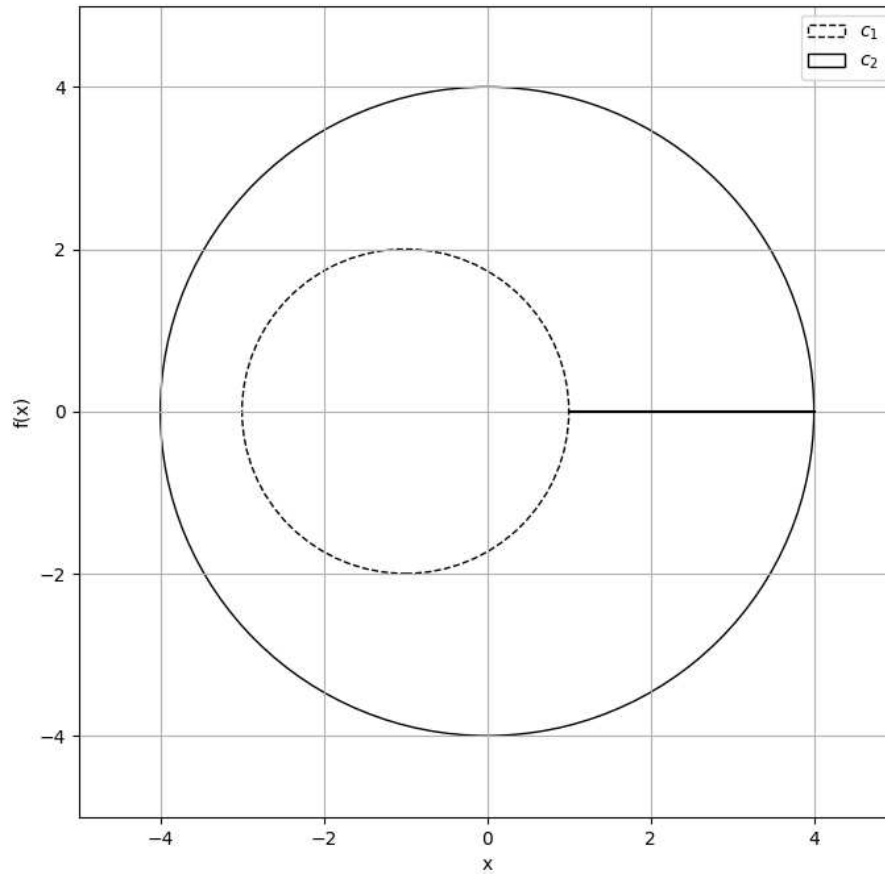


Figura 2.2 – Exemplo de não simetria para a distância  $\rho$ .

**Definição 2.6** *Uma função  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{n+1}}$  multivalorada é dita semi-contínua superior em um ponto  $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$  se  $(t, x) \rightarrow (t^*, x^*)$  implicar que:*

$$\rho(f(t, x), f(t^*, x^*)) \rightarrow 0. \quad (2.21)$$

**Exemplo 2.4** Considere a seguinte função multi-valorada semi-contínua superior:

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Seu gráfico está representando na figura 2.3. Para o caso mais simples em que considera-se a definição apenas para funções unívocas bastava definir  $f(x) = 1$ , quando  $x = 0$ .

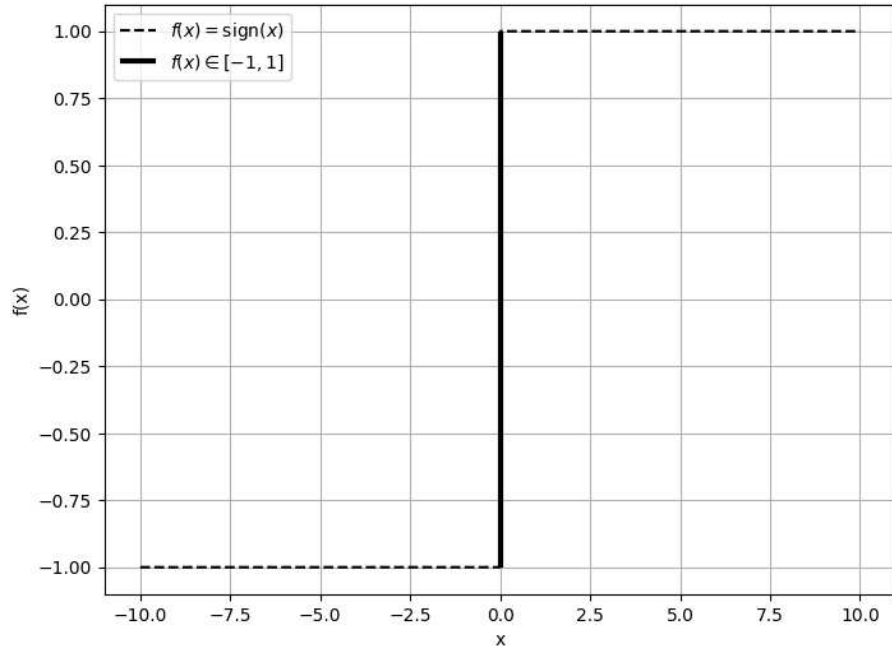


Figura 2.3 – Função multi-valorada semi-contínua superior.

Note que é possível modelar um sistema chaveado como a união por partes de sistemas contínuos. Deste modo, o interesse é definir os critérios de regularidade para que existam soluções. Ademais, como será considerado no capítulo 4, para se fazer o projeto da função de comutação é necessária a existência de modos deslizantes.

**Definição 2.7** Um sistema dinâmico contínuo por partes é dado pelo conjunto finito de equações diferenciais ordinárias, tal que:

$$\dot{x}(t) = f_i(x, \mu), \quad \forall x \in S_i, \quad (2.23)$$

em que  $\cup_i S_i = D \subset \mathbb{R}^n$  e cada  $S_i$  é não vazio. A interseção  $\Sigma_{ij} := \bar{S}_i \cap \bar{S}_j$  é ou uma variedade de dimensão  $\mathbb{R}^{n-1}$  na fronteira  $\partial S_i$  e  $\partial S_j$ , ou um conjunto vazio. Cada campo de vetores  $f_i$  é contínuo em relação a  $x$  e  $\mu$ . Em particular, cada fluxo  $\phi_i$  está bem definido nos dois lados da fronteira  $\partial S_j$ .

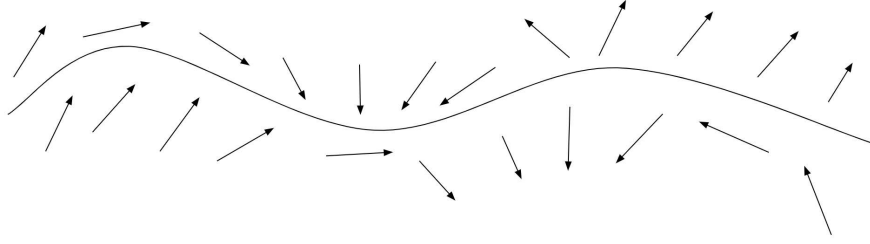


Figura 2.4 – Modos deslizantes atrativos e repulsivos ao redor da região de deslizamento.

**Definição 2.8** O grau de suavidade em um dado ponto  $x_0$  para um conjunto de chaveamento  $\Sigma_{ij}$  de um sistema dinâmico contínuo por partes na forma de (2.23) é a maior ordem  $r$  tal que a expansão em série de Taylor de  $\phi_i(t, x_0)$  e de  $\phi_j(t, x_0)$  com respeito a  $t$ , avaliada em  $t = 0$ , coincidem até os termos  $\mathcal{O}(t^{r-1})$ . Isto é, a primeira derivada parcial não nula com respeito a  $t$  da diferença  $[\phi_i(t, x_0) - \phi_j(t, x_0)]|_{t=0}$  é de ordem  $r$ .

**Definição 2.9** Uma fronteira descontínua  $\Sigma_{ij}$  é dita uniformemente descontínua em algum domínio  $D$  se o grau de descontinuidade do sistema é o mesmo para todo ponto  $x \in \Sigma_{ij} \cap D$ . Ainda, é dita uniformemente descontínua com grau  $m$  se a primeira derivada parcial  $f_i - f_j$  avaliada em  $\Sigma_{ij}$  é de ordem  $m - 1$ . Note que, se  $f_i - f_j \neq 0$  para  $x \in \Sigma_{ij} \cap D$  então o grau de suavidade é um, e o sistema é dito de Filippov.

**Exemplo 2.5** Considere um sistema dinâmico contínuo por partes geral com uma única fronteira  $\Sigma$  que pode ser escrita como o conjunto nulo de uma função suave  $h(x)$ , na forma de:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_1(t, x), & h(x) > 0, \\ f_2(t, x), & h(x) < 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

em que  $f_1(x) = f_2(x)$  se  $h(x) = 0$ .

**Definição 2.10** A região de deslizamento de um conjunto descontínuo de um sistema dinâmico na forma de (2.24) com grau um de suavidade uniforme é dado pela porção de  $h(x)$  para qual:

$$(h_x f_1) \cdot (h_x f_2) < 0. \quad (2.25)$$

Ou seja,  $h_x f_1$  (componente de  $f_1$  normal a  $h$ ) tem sinal oposto a  $h_x f_2$ . Logo, a fronteira é simultaneamente atrativa, ou repulsiva, dos dois lados. Note que, na maioria dos casos de interesse, a superfície de deslizamento é atrativa, como pode ser visualizado na figura 2.4, dado que se mover com modos deslizantes repulsivos não é possível para tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ .



Existem diversas abordagens que definem o movimento deslizante sobre a superfície (BERNARDO *et al.*, 2008). A principal delas foi proposta por Filipov, tal que, para o sistema dinâmico contínuo por partes na forma de (2.24), o vetor de deslizamento  $f_{12}$  é tomado como a seguinte combinação convexa:

$$f_{12} = (1 - \lambda)f_1 + \lambda f_2, \quad (2.26)$$

com  $0 \leq \lambda \leq 1$ . O resultado pode ser generalizado para sistemas com  $N$  equações, de forma que se define um sistema dinâmico contínuo por partes via inclusões diferenciais:

$$\dot{x} = f_\lambda(t, x), \quad (2.27)$$

para um dado vetor  $\lambda \in \Lambda$ , sendo:

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^N \mid \lambda \geq 0 \cap \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1\}, \quad (2.28)$$

ou seja, um simplex unitário padrão de dimensão  $N - 1$ .

**Teorema 2.7** *Seja  $f(t, x) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma função semi-contínua superior em cada ponto do conjunto  $\mathcal{U}$  definindo como:*

$$\mathcal{U} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}. \quad (2.29)$$

*em que  $a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . E, suponha que  $f(t, x)$  seja não vazia, compacta e convexa para  $(t, x) \in \mathcal{U}$ . E, existe  $K > 0$  tal que  $\rho(0, f(t, x)) < K$  para  $(t, x) \in \mathcal{U}$ . Então, existe  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolutamente contínua e definida pelo menos em  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , com  $\alpha = \min\{a, b/K\}$ , tal que  $x(t_0) = x_0$  e a inclusão:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (2.30)$$

*é válida para quase todo em  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .*

**Prova** O leitor pode-se referir à (FILIPPOV, 1967) para a prova do Teorema 2.7.

## 2.3 Análise de Estabilidade de Lyapunov

A análise de estabilidade tem suas origens nas investigações sobre o movimento de corpos celestes. O astrônomo francês Laplace, no final do século XVIII, e seu contemporâneo Lagrange, já discutiam aspectos relacionados à estabilidade no contexto da mecânica celeste, onde pequenas perturbações nas órbitas dos planetas podiam ter efeitos significativos. No final do século XIX, Henri Poincaré aprofundou essa análise ao

demonstrar que, em sistemas dinâmicos como o problema dos três corpos, a evolução orbital pode ser altamente sensível às condições iniciais (DARRIGOL, 2005).

Nesta seção, serão introduzidos conceitos sobre análise de estabilidade para sistemas dinâmicos contínuos no sentido de Lyapunov pelo método indireto (KHALIL, 2002). Esta abordagem permite fazer uma análise qualitativa sobre as trajetórias do sistema sem necessitar explicitamente de suas soluções ou de alguma aproximação. Para isto, considere um sistema dinâmico da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad (2.31)$$

em que  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função localmente Lipschitz, com  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Note que as propriedades de regularidade sobre a função  $f(t, x)$  são exigidas para garantir a existência e unicidade das soluções, como vistas no Teorema de Picard.

Em seguida, pode-se começar definindo aquele que talvez seja o objeto de maior interesse para a análise de estabilidade: o ponto de equilíbrio.

**Definição 2.11 (Ponto de Equilíbrio)** *Considere o sistema dinâmico dado por (2.31), então, um ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) do sistema dinâmico é um ponto  $x_e \in \mathbb{R}^n$  tal que:*

$$f(t, x_e) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Portanto, um ponto de equilíbrio é aquele em que a taxa de variação do sistema é zero, ou seja, a solução do sistema dinâmico não se altera em  $x_e$ . Os pontos de equilíbrio apresentam grande importância na análise qualitativa. É ao redor da dinâmica local de um ponto de equilíbrio em que existem alterações significativas das trajetórias do sistema. Assim, pode-se demonstrar, através do Teorema do Fluxo Tubular, que, qualquer trajetória longe dos pontos de equilíbrio, localmente não será significativamente deformada.

**Teorema 2.8** *Seja  $x_0 \in \mathcal{U}$  um ponto regular de um campo de vetores  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Então existem  $\epsilon > 0$ , uma vizinhança  $W$  de  $x_0$  e um difeomorfismo  $h : (-\epsilon, \epsilon)^n \rightarrow W$  de classe  $C^k$  tal que  $h(0) = x_0$  e a aplicação:*

$$(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \rightarrow h(t, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (2.33)$$

*é solução da equação diferencial na forma de (2.1), quando  $f(t, x) = f(x)$ , para todo  $(\xi_2, \dots, \xi_n) \in (-\epsilon, \epsilon)^{n-1}$ ;*

**Prova** O leitor pode-se referir à (VIANA; ESPINAR, 2022) para a prova do Teorema 2.8.

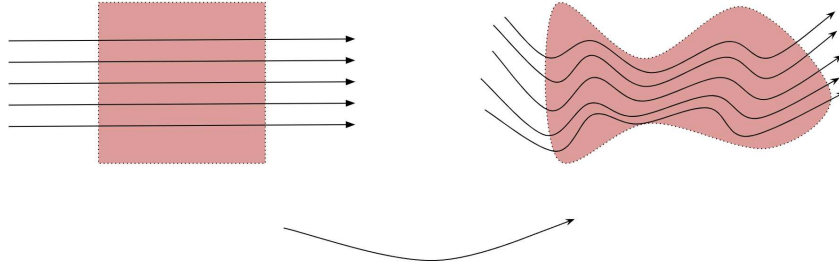


Figura 2.5 – Fluxo tubular.

Existem diversos conceitos de estabilidade para sistemas dinâmicos, sendo assim, faz-se necessário explicitar qual abordagem está sendo utilizada. A principal definição de interesse neste trabalho será a caracterização de pontos de equilíbrio e conjuntos positivamente invariantes como exponencialmente estáveis.

**Definição 2.12** O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito globalmente uniformemente assintoticamente estável (GUAE)<sup>1</sup> se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , independente de  $t_0$ , tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq \delta \implies \|x(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.34)$$

é válido para  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$  e, para cada par de números positivos  $\eta$  e  $c$ , existe  $T = T(\eta, c) > 0$ , tal que:

$$\|x(t)\| \leq \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \quad \forall \|x(t_0)\| \leq c. \quad (2.35)$$

**Definição 2.13** O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito exponencialmente estável se existirem constantes  $c$ ,  $k$  e  $\lambda$  tal que:

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall \|x(t_0)\| \leq c, \quad (2.36)$$

e dito globalmente exponencialmente estável (GEE)<sup>2</sup> se a desigualdade é satisfeita para qualquer estado inicial  $x(t_0)$ .

É possível redefinir tal conceito de estabilidade GUAE em sua forma clássica utilizando funções de comparação de classe  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{KL}$ . Isto é interessante para dar definições mais transparentes de estabilidade quando uma dada solução  $x(t)$ , começando em  $x(t_0)$ , depender de ambos  $t$  e  $t_0$ . Ou seja, para garantir que a estabilidade assintótica seja uniforme com relação à  $t_0$ .

<sup>1</sup> ou, em inglês, UGAS (*Uniformly Globally Asymptotically Stable*).

<sup>2</sup> ou, em inglês, GES (*Gloabally Exponentially Stable*).

**Definição 2.14** Uma função contínua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  é dita pertencente a classe  $\mathcal{K}$  se é estritamente crescente e  $\alpha(0) = 0$ . Ainda, se  $a = \infty$  e  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow \infty$ , então é dita pertencente a classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

**Definição 2.15** Uma função contínua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  é dita pertencente a classe  $\mathcal{KL}$  se, para cada  $s$  fixado,  $\beta(r, s)$  é pertencente a classe  $\mathcal{K}$  com respeito a  $r$  e, para cada  $r$  fixado, o mapeamento  $\beta(r, s)$  é decrescente com respeito a  $s$  e  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 2.6** Considere as funções de comparação:

- Função de classe  $\mathcal{K}$ :  $\alpha(t) = \tan^{-1}(t)$ .
- Função de classe  $\mathcal{K}_\infty$ :  $\alpha(t) = t^c$ , para  $c > 0$ .
- Função de classe  $\mathcal{KL}$ :  $\beta(x, t) = x/(kxt + 1)$ , para  $k > 0$ .

Sendo assim, pode-se provar a equivalência entre a definição de um ponto de equilíbrio GUAE em sua forma clássica da Definição 2.12 com sua definição utilizando funções de comparação, tal que enuncia-se o lema a seguir.

**Lema 2.2** O ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  do sistema dinâmico na forma de (2.31) é dito globalmente uniformemente assintoticamente estável se:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \leq t_0 \leq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c, \quad (2.37)$$

é válido para qualquer condição inicial  $x(t_0)$ .

**Prova** O leitor pode-se referir à (KHALIL, 2002) para a prova do Lema 2.2.

Para provar a estabilidade previamente apresentada de um dado ponto de equilíbrio será utilizado o conceito de função candidata de Lyapunov. Os teoremas que utilizam funções candidatas de Lyapunov dão condições suficientes de estabilidade. Ainda, não existe garantia de existência ou unicidade global para as mesmas. Sendo assim, encontrar uma função candidata de Lyapunov é um desafio complexo. Para sistemas mecânicos, ou elétricos, usualmente, a função candidata de Lyapunov  $V(t, x)$  representa a sua energia total. Matematicamente, será exigido que a função seja definida positiva ( $V(t, x) > 0$ ), e que sua derivada temporal seja definida negativa ( $\dot{V}(t, x) < 0$ ).

**Teorema 2.9** *Seja  $x_e = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema dinâmico na forma de (2.31) e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo a origem. Seja  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que:*

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad (2.39)$$

para qualquer  $t \in \mathbb{R}_+$  e qualquer  $x \in D$ , em que  $W_i$  são funções matriciais definidas positivas em  $D$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Ainda, se  $r$  e  $c$  são escolhidos tal que  $B_r = \{\|x\| \leq r\} \in D$  e  $c < \min_{\|x=r\|} W_1(x)$ , então toda trajetória começada em  $\{x \in B_r | W_2(x) < c\}$  satisfaz:

$$\|x\|(t) \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (2.40)$$

para alguma função  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$ . Finalmente, se  $D = \mathbb{R}^n$  e  $W_1(x)$  é radialmente ilimitada, então  $x_e$  é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

**Prova** O leitor pode-se referir à (KHALIL, 2002) para a prova do Teorema 2.9.

**Exemplo 2.7** *Considere o seguinte sistema dinâmico com condição de valor inicial:*

$$\dot{x}(t) = -10x(t), \quad x(0) = 1, \quad (2.41)$$

tal que se quer caracterizar a estabilidade do ponto de equilíbrio  $x_e = 0$ . Assim, seja a função candidata de Lyaunov quadrática  $V(t, x) = (1/2)x^2(t)$ , que é definida positiva e radialmente ilimitada. Então, sua derivada ao longo de  $x(t)$  é:

$$\dot{V}(t, x) = \dot{x}(t)x(t) = -10x^2(t) < 0, \quad (2.42)$$

para qualquer  $x(t) \in \mathbb{R}$ . Logo, pelo Teorema 2.9, a origem é GUAE e sua trajetória está representada na Figura 2.6.

Uma função  $V(t, x)$  que satisfaz o teorema 2.9 é dita função de Lyapunov. A superfície  $V(t, x) = c$ , para algum  $c > 0$ , é dita superfície de Lyapunov, ou curvas de nível da função de Lyapunov, como representada na figura 2.7. A condição de  $\dot{V}(t, x) < 0$  claramente garante que, quando uma trajetória atinge uma curva de nível  $V(t, x) = c$ , ela entra no conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(t, x) < c\}$  e nunca sairá novamente. Tais conjuntos são caracterizados como positivamente invariantes, pela definição a seguir.

**Definição 2.16** *Seja  $x(t)$  uma solução para o sistema dinâmico na forma de (2.31). Um ponto  $p$  é dito ponto limite positivo de  $x(t)$  se existe uma sequência única  $\{t_n\}$ , com  $\{t_n\} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $x(t_n) \rightarrow p$ . O conjunto de todos os pontos limite*

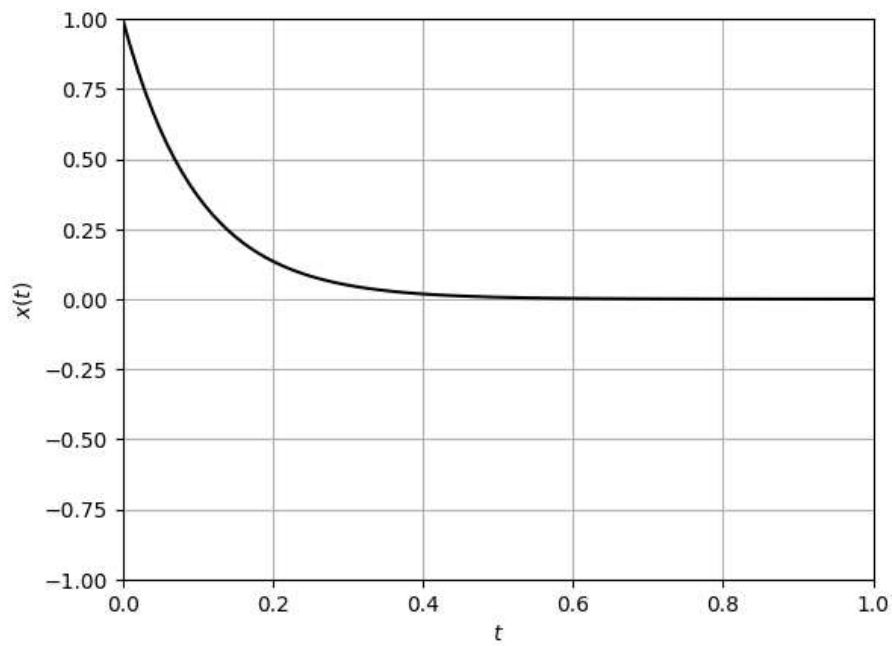


Figura 2.6 – Simulação de um sistema globalmente uniformemente assintoticamente estável (GUAE).

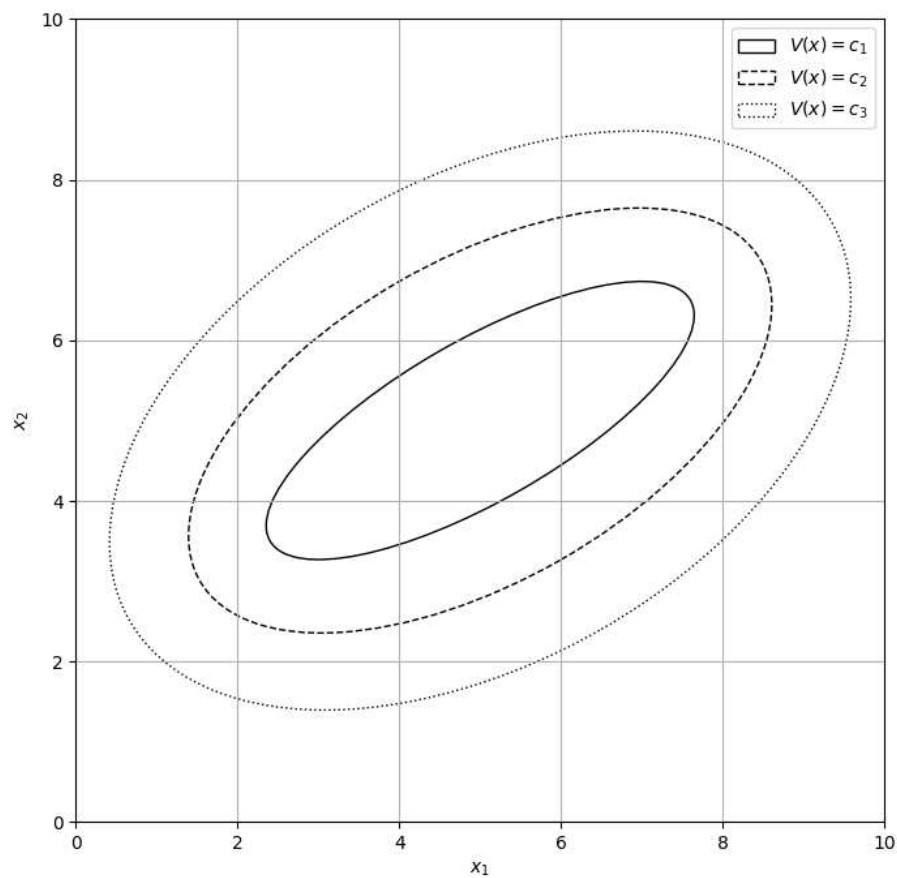


Figura 2.7 – Curvas de nível de uma função de Lyapunov.

positivos de  $x(t)$  é denominado conjunto limite de  $x(t)$ . Um conjunto  $\mathbb{X}$  é dito conjunto

invariante com respeito a (2.31) se:

$$x(0) \in \mathbb{X} \implies x(t) \in \mathbb{X}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

Ou seja, se uma solução pertence a  $\mathbb{X}$  em um dado instante de tempo, então esta solução pertencerá a  $\mathbb{X}$  para todo tempo futuro e passado. Em particular,  $\mathbb{X}$  é dito um conjunto positivamente invariante se:

$$x(0) \in \mathbb{X}, \quad x(t) \in \mathbb{X}, \forall t \geq 0. \quad (2.44)$$

Também é dito que  $x(t)$  se aproxima de  $\mathbb{X}$  quando  $t$  se aproxima do infinito, e para cada  $\epsilon > 0$  existe  $T > 0$  tal que:

$$\text{dist}(x(t), \mathbb{X}) < \epsilon, \quad \forall t > T. \quad (2.45)$$

Como será desenvolvido no próximo capítulo, nem sempre será possível estabilizar um sistema dinâmico afim chaveado exatamente em um ponto de equilíbrio desejado. Assim, será necessário apresentar novas definições que enfraquecem a noção de estabilidade para um ponto, a saber, a limitação e a estabilidade de um conjunto positivamente invariante.

**Definição 2.17** Um ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é dito globalmente uniformemente finalmente limitado (GUFL)<sup>3</sup> com limitante final  $b$ , se existirem constantes positivas  $b$  e  $c$ , independentes de  $t_0 \geq 0$ , e para cada  $a \in (0, c)$ , existe  $T = T(a, b) \geq 0$ , independente de  $t_0$ , tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq a \implies \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad (2.46)$$

é válido para qualquer  $a$  arbitrariamente grande.

**Teorema 2.10** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio que contém a origem e  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que:

$$\alpha_1(x) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(x), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \forall \|x\| \geq \mu > 0, \quad (2.48)$$

para qualquer  $t \in \mathbb{R}_+$  e qualquer  $x \in D$ , em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são funções de classe  $\mathcal{K}$  e  $W_3$  é uma função matricial definidas positivas em  $D$ . Tome  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$  e suponha que:

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (2.49)$$

<sup>3</sup> ou, em inglês, UGUB (Uniformly Globally Ultimate Bounded).

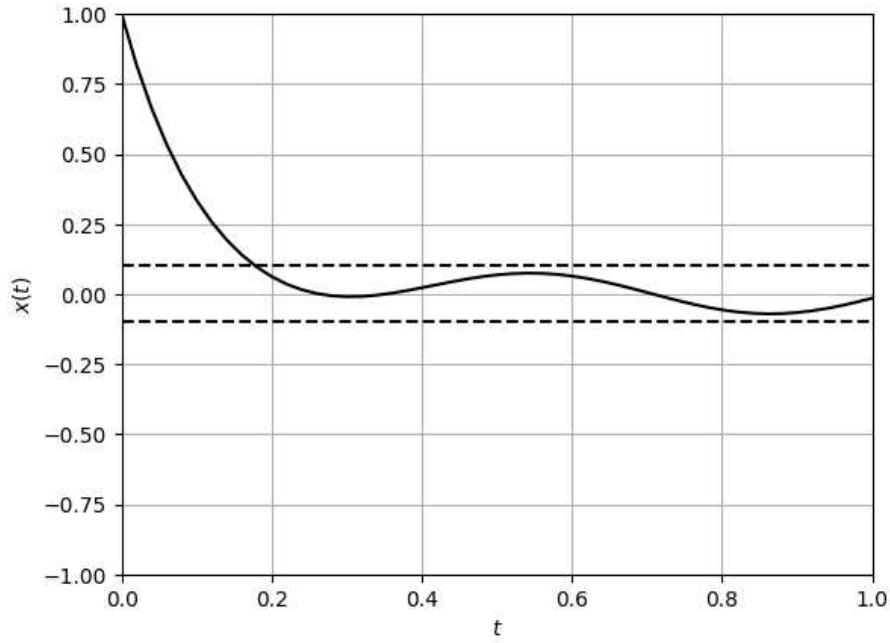


Figura 2.8 – Simulação de um sistema globalmente uniformemente finalmente limitado (GUFL).

Então, existe uma função  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  para toda condição inicial  $x(t_0)$ , satisfazendo  $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , e  $T \geq 0$  (independente de  $x(t_0)$  e  $\mu$ ) tal que a solução do sistema dinâmico na forma de (2.31) satisfaz:

$$\|x(t_0)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (2.50)$$

$$\|x(t)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (2.51)$$

Ainda, se  $D = \mathbb{R}^n$  e  $\alpha_1$  pertence a classe de funções  $\mathcal{K}_\infty$ , então tais desigualdades são válidas para qualquer condição inicial  $x(t_0)$ , sem restrição em quão grande  $\mu$  seja.

**Prova** O leitor pode-se referir à (KHALIL, 2002) para a prova do Teorema 2.10.

**Exemplo 2.8** Considere o seguinte sistema dinâmico com condição de valor inicial:

$$\dot{x}(t) = -10x(t) - \sin(10t), \quad x(0) = 1. \quad (2.52)$$

As definições de estabilidade e limitação apresentadas exibem comportamentos qualitativos distintos. As Figuras 2.6 e 2.8 ilustram distintas trajetórias. Caso o sistema dinâmico seja GUAE, as trajetórias dos estados tenderão ao ponto de equilíbrio para toda condição inicial. Já, caso o sistema dinâmico seja GUFL, a convergência para a origem não é garantida, podendo apenas garantir a convergência em tempo finito para um limitante final.

Portanto, com a limitação, é possível obter um limitante superior entre um ponto atingível e um ponto desejado. Assim, o projetista pode alterar tal majorante



conforme as especificidades de desempenho do projeto. Uma questão natural é como encontrar tal limitante a partir de funções de Lyapunov.

**Definição 2.18** *Um conjunto fechado positivamente invariante  $\mathbb{X}$  é dito assintoticamente estável se, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:*

$$x(0) \in B_\delta \implies x(t) \in B_\epsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.53)$$

$$\text{e } \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \mathbb{X}) = 0.$$

**Definição 2.19** *O conjunto positivamente invariante  $\mathbb{X}$  é dito globalmente uniformemente exponencialmente estável se existir  $c, \delta > 0$  tal que:*

$$\text{dist}(x(t), \mathbb{X}) \leq ce^{-\lambda t} \text{dist}(x(0), \mathbb{X}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.54)$$

Alguns comentários sobre as definições de estabilidade apresentadas:

- A convergência exponencial para um conjunto positivamente invariante na dinâmica do estado também garante que a dinâmica do estado seja globalmente uniformemente finalmente limitada, conforme definido em (KHALIL, 2002), ou uma estabilidade prática, conforme definido em (EGIDIO; DEAECTO, 2019).
- A estabilidade da dinâmica do estado pode ser prontamente relacionada à convergência da dinâmica de estado do sistema dinâmico para um limite definido em torno de um dado ponto de equilíbrio  $x_e \in \mathbb{X}_e$ .
- A região de atração de um conjunto positivamente invariante  $\mathbb{X}$ , denotado por  $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ , é definida como o conjunto de todas as condições iniciais  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  cujas soluções associadas  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , convergem para  $\mathbb{X}$ . Assim, nesta definição,  $\mathcal{R}_{\mathbb{X}} = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{X}$  para um atrator UES.

### 3 Apresentação do Problema

O objetivo deste capítulo é introduzir as considerações físicas, bem como a modelagem matemática, que embasam a adição de restrições de tempo de permanência para o projeto de função de comutação em sistemas dinâmicos afins chaveados. Primeiro, será explicitada a formulação matemática que modela o caso a tempo contínuo, que naturalmente apresenta o fenômeno de *chattering*. Depois, as modelagens para duas estratégias que contornam tal problemática são apresentadas: a tempo discreto e a tempo contínuo com restrições de tempo de permanência. Sendo que a última apresenta desempenho superior ao ser menos restritiva com relação ao projeto da função de comutação, como será desenvolvido no capítulo 4. Por fim, é feita uma breve discussão sobre as limitações de sistemas elétricos e mecânicos quando submetidos aos sinais descontínuos.

#### 3.1 Sistemas a Tempo Contínuo

Um sistema dinâmico afim chaveado a tempo contínuo, com função de comutação e respectivas condições iniciais, é dado por:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}, \quad x(t_0) = x_0, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0. \quad (3.1)$$

Uma esquematização de tal sistema está apresentada na Figura 3.1. Para um dado vetor  $\lambda \in \Lambda$ , e, assumindo que  $A_\lambda$  tenha posto completo, se não houver restrições de tempo de permanência por meio de *chattering*, pode-se atingir o seguinte conjunto de pontos de equilíbrio de *Filippov* (FILIPPOV, 1967):

$$\mathbb{X}_e := \{x_e \in \mathbb{R}^n | x_e = -A_\lambda^{-1}b_\lambda\}, \quad (3.2)$$

com  $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$ ,  $b_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i b_i$  e  $\Lambda$  definido como (2.28). Naturalmente, uma questão que surge é determinar se, para um dado ponto  $x^*$  existe  $\lambda^*$ , tal que  $x^* \in X_e$ . Este problema pode ser eficientemente resolvido aplicando o complemento de Schur em  $\|A_\lambda x^* + b_\lambda\|^2 < \mu$ . De fato, se a solução ótima de:

$$\arg \min_{\lambda \in \Lambda, \mu \in \mathbb{R}_+} \mu \quad (3.3)$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} \mu & \star \\ A_\lambda x^* + b_\lambda & I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.4)$$

for tal que  $\mu^* \approx 0$ , então  $\lambda^* \in \Lambda$  é tal que,  $x^* \approx A_{\lambda^*}^{-1}b_{\lambda^*} \in \mathbb{X}_e$ .

Com o objetivo de estabilizar o sistema em um ponto de equilíbrio desejado  $x_e$ , pode-se definir o erro como  $\xi(t) = x(t) - x_e$ , o que implica que  $\dot{\xi}(t) = \dot{x}(t)$ . Substituindo

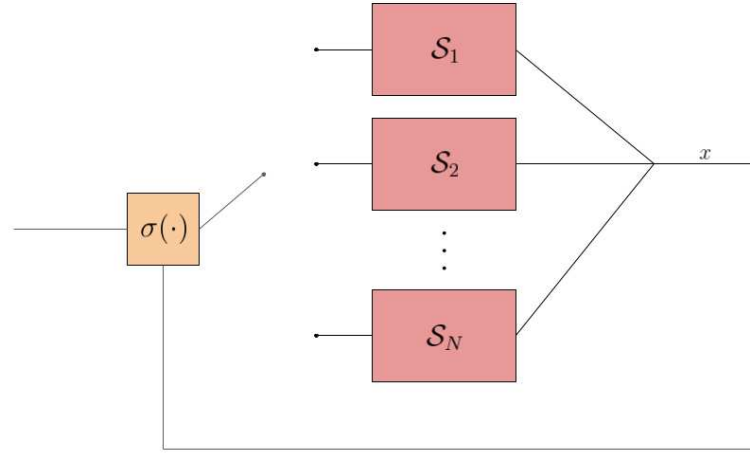


Figura 3.1 – Esquemática de sistemas chaveados.

no sistema afim, obtém-se:

$$\dot{\xi}(t) = A_{\sigma(t)}(\xi(t) + x_e) + b_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}\xi(t) + \ell_{\sigma(t)}, \quad (3.5)$$

com  $\ell_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}x_e + b_{\sigma(t)}$ .

## 3.2 Sistemas a Tempo Discreto

Para o caso de um sistema dinâmico afim chaveado a tempo discreto, com função de comutação e respectivas condições iniciais, tem-se:

$$x[k+1] = A_{\sigma[t_k]}x[k] + b_{\sigma[t_k]}, \quad x_0 = x[t_0], \quad \sigma_0 = \sigma[t_0]. \quad (3.6)$$

É possível obter o sistema discreto (3.6) a partir do sistema a tempo contínuo (3.10) aplicando um trem de impulsos em conjunto com um segurador de ordem zero (SOZ) (CHEN, 1999). Para o caso em que a amostragem é periódica, o tempo de discretização é  $h = t_{k+1} - t_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Assim, as matrizes discretas são:

$$A_{hi} = e^{hA_i}, \quad b_{hi} = \int_0^h e^{\tau A_i} b_i d\tau, \quad (3.7)$$

para cada  $i \in \langle N \rangle$ . Caso  $A_i$  tenha posto completo, então a integral matricial é  $b_{hi} = (A_{hi} - I)A_i^{-1}b_i$ .

Note que, diferentemente do caso a tempo contínuo, os pontos de equilíbrio de cada subsistema são dados por:

$$X_e := \{x_e \in \mathbb{R}^n | x_e = -(I - A_i)^{-1}b_i, \forall i \in \langle N \rangle\}. \quad (3.8)$$

não havendo garantia de estabilidade assintótica para a combinação convexa dos pontos, mesmo assumindo que  $A_i$  seja Schur. Isto segue devido ao período de amostragem limitar

a função de comutação, levando, no melhor dos casos, à uma estabilidade prática (XU; ZHAI, 2005), i.e., a existência de um limitante superior para a distância entre o ponto atingível e o ponto de equilíbrio desejado.

Com o objetivo de estabilizar o sistema em um ponto de equilíbrio desejado  $x_e$ , pode-se definir o erro como  $\xi[k] = x[k] - x_e$ , o que implica que  $\xi[k+1] = x[k+1] - x_e$ . Substituindo no sistema afim, obtém-se:

$$\xi[k+1] = A_{\sigma[t_k]}(\xi[k] + x_e) + b_{\sigma[t_k]} - x_e = A_{\sigma[t_k]}\xi[k] + \ell_{\sigma[t_k]}, \quad (3.9)$$

com  $\ell_{\sigma[t_k]} = (A_{\sigma[t_k]} - I)x_e + b_{\sigma[t_k]}$ .

### 3.3 Sistemas a Tempo Contínuo com Restrições de Tempo de Permanência

Um sistema dinâmico chaveado afim a tempo contínuo, com função de comutação e respectivas condições iniciais, é representado por:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}, \quad x(t_0) = x_0, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0. \quad (3.10)$$

Pode-se adicionar restrições de tempo de permanência  $\delta_k := t_k - t_{k-1}, k \in \mathbb{N}$ , em que a sequência de tempos de chaveamento  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é formada pelos tempos em que  $\sigma(t_k^-) \neq \sigma(t_k)$ . Dependendo do tipo da aplicação, pode-se considerar uma das três restrições de tempo de permanência:

- Tempo de permanência fixos: Neste caso, cada subsistema  $i \in \langle N \rangle$  é associado a algum tempo de permanência fixo  $h_i > 0$ , isto é,  $\delta_k = h_{\sigma(t_k)}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- Tempo de permanência mínimo: Ao invés de fixar tempos de permanência, algumas aplicações apenas requerem que a função de comutação fique ativada em algum subsistema  $i \in \langle N \rangle$  por, pelo menos, um tempo de permanência mínimo  $\tau_i > 0$ . Neste caso,  $\delta_k \geq \tau_{\sigma(t_k)}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- Tempo de permanência limitado: Uma generalização é incluir limitantes superiores e inferiores nos tempos de permanência, isto é,  $\delta_k \in [\tau_{\sigma(t_k)}, \nu_{\sigma(t_k)}]$  é válido para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Note que este caso inclui o primeiro quando  $\tau_i = \nu_i$ , e o segundo quando  $\nu_i \rightarrow \infty$  para todo  $i \in \langle N \rangle$ ;

Todos os casos apresentados anteriormente associam cada subsistema a um conjunto de tempos de permanência admissíveis  $\Delta_i$ . Assim,  $\delta_k \in \Delta_{\sigma(t_k)}$  deve ser válido para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Como apresentado anteriormente neste capítulo, os sistemas físicos de interesse apresentam limitações de operação que, se não respeitados, podem levar a danos ou falhas de equipamentos. Sendo assim, a restrição de tipo mínimo é a que garante a proteção dos dispositivos em aplicações reais e será adotada nas provas de estabilidade.

Note que este tipo de restrição garante uma generalidade maior da regra de comutação em comparação com a simples discretização. Primeiro, porque o tempo de permanência mínimo pode ser mantido distinto para cada subsistema, ao contrário do caso discretizado em que precisa-se adotar um passo de tempo como um múltiplo entre os tempos de permanência mínimos de cada subsistema, levando a um grande esforço computacional. Segundo, porque, após o tempo de permanência, a função de comutação será avaliada em um conjunto não enumerável de instantes de tempo, o que usualmente leva a um aumento de desempenho nas métricas de projeto do controlador. A Figura 3.2 esquematiza a segunda motivação.

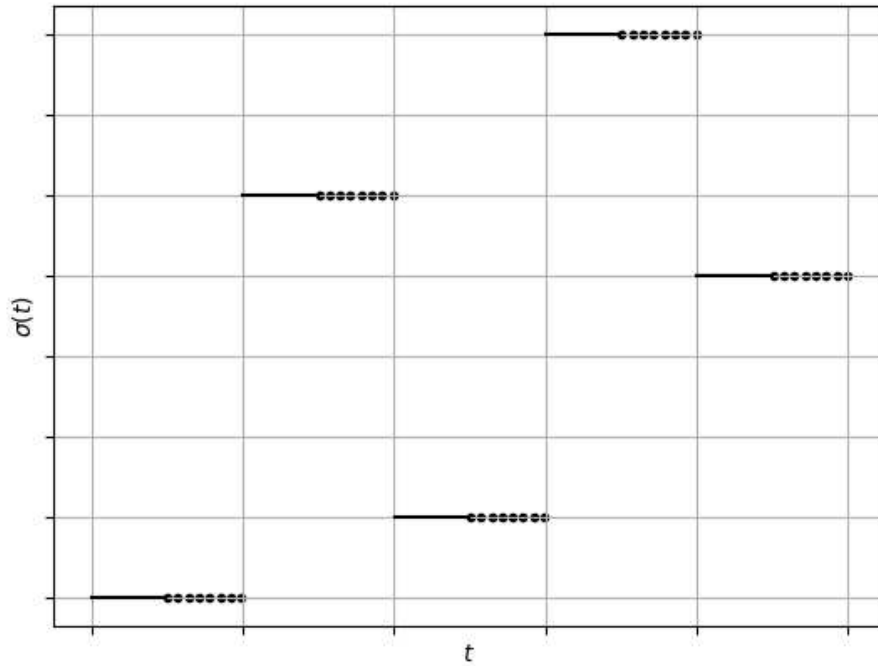


Figura 3.2 – Esquemática do chaveamento a tempo contínuo com restrições de tempo de permanência mínimos.

Com o objetivo de estabilizar o sistema em um ponto de equilíbrio desejado  $x_e$ , pode-se definir o erro como  $\xi(t) = x(t) - x_e$ , o que implica que  $\dot{\xi}(t) = \dot{x}(t)$ . Substituindo no sistema afim, obtém-se:

$$\dot{\xi}(t) = A_{\sigma(t)}(\xi(t) + x_e) + b_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}\xi(t) + \ell_{\sigma(t)}, \quad (3.11)$$

com  $\ell_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}x_e + b_{\sigma(t)}$ .

## 3.4 Considerações Físicas

### 3.4.1 Sistemas Elétricos

Os conversores CC-CC desempenham um papel fundamental na eletrônica moderna, permitindo a conversão eficiente de níveis de tensão contínua para atender às necessidades de diversos dispositivos e sistemas, desde eletrônicos portáteis até aplicações industriais e veiculares (BAILO-CAMARA *et al.*, 2008). Sua origem remonta aos primeiros reguladores lineares, mas seu desenvolvimento acelerou com a introdução dos conversores chaveados na década de 1950, impulsionado pelo avanço da eletrônica de potência e a crescente demanda por eficiência energética. Com a evolução dos semicondutores e técnicas de controle, os conversores CC-CC tornaram-se essenciais em fontes de alimentação, sistemas fotovoltaicos, carregadores de baterias, entre outras aplicações (ERICKSON; MAKSIMOVIĆ, 2020).

Para motivar a discussão em sistemas elétricos, considere um conversor CC-CC de tipo *buck-boost*, como representado na Figura 3.3. Tal circuito tem objetivo de manter constante, baixar ou elevar uma tensão de entrada  $u$ . A partir da teoria linear de circuitos (leis de Kirchoff), obtém-se a seguinte relação para tensão de saída  $V$  e sua respectiva corrente  $I$ :

$$\dot{V} = -\frac{1}{RC}V + \begin{cases} I/C, & S(t) = 0, \\ 0, & S(t) = 1, \end{cases}, \quad (3.12)$$

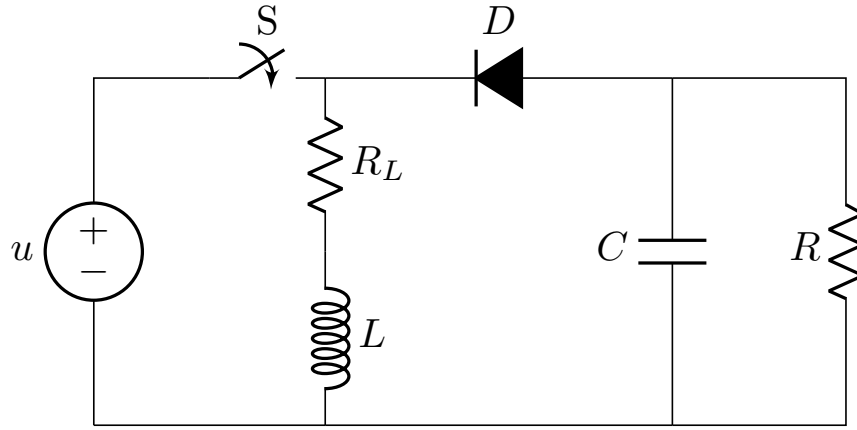
$$\dot{I} = -\frac{R_L I}{L} + \begin{cases} -V/L, & S(t) = 0, \\ u/L, & S(t) = 1, \end{cases} \quad (3.13)$$

em que  $C, u, L$  e  $R$  são valores positivos que representam a capacitância, tensão de entrada, indutância e resistência dos componentes, respectivamente. Ainda,  $S(t)$  representa a posição da chave, tal que para o valor zero a chave está aberta, e para o valor um a chave está fechada.

Dada uma tensão de referência  $V_r(t)$  que se deseja rastrear, então, é o projeto adequado da regra de comutação  $S(t)$  que mitigará o erro entre a tensão de saída  $V(t)$  e a desejada  $V_r(t)$ .

A estratégia mais usual para o projeto do controlador em conversores CC-CC é utilizar a modulação de largura de pulso (MLP)<sup>1</sup>, fixando uma frequência de chaveamento  $f$  que altera o tempo da chave ligada  $D$ . A partir de um comparador, entre a tensão de saída com um sinal periódico no formato dente de serra, define-se a seguinte regra de

<sup>1</sup> ou, em inglês, *pulse-width modulation* (PWM).

Figura 3.3 – Topologia do conversor CC-CC tipo *buck-boost*.

comutação  $S(t)$ :

$$S(t) = \begin{cases} 0, & V \geq V_r(t), \\ 1, & V < V_r(t). \end{cases} \quad (3.14)$$

Por mais que a estratégia ingênua do controlador MLP seja simples e amplamente utilizada sabe-se que a regra de comutação usualmente apresenta o chaveamento arbitrariamente rápido (ERICKSON; MAKSIMOVIĆ, 2020), fenômeno denominado por *chattering*. Em componentes elétricos, o efeito do *chattering* é altamente indesejado, pois pode levar à considerável perda de desempenho e, em últimas consequências, à queima dos dispositivos.

Para compreender a perda desempenho, dada uma alta frequência de chaveamento, pode-se começar analisando o tempo de recuperação do diodo. Tal dispositivo, junto a um transistor, formam a chave no estado sólido responsável pela escolha do subsistema ativo. A curva característica de um diodo no período de desligamento da chave é dada pela Figura 3.4.

Ao aplicar uma corrente reversa no diodo, a corrente chega ao valor zero e o dispositivo continua conduzindo no sentido contrário durante um tempo  $t_1$ , dado a presença de cargas armazenadas na camada de esgotamento. Ainda, existe um tempo  $t_2$  em que as cargas são removidas da camada do semicondutor. Portanto, o tempo de recuperação  $T$  é dado pela soma entre os tempos  $t_1$  e  $t_2$ .

Para a escolha do tipo de transistor utilizado em um dado conversor CC-CC, deve levar-se em consideração a corrente, tensão e frequência de chaveamento dimensionadas para o circuito. A Figura 3.5, retirada de (Sütő; NAGY, 2007), apresenta um resumo atual das capacidades dos dispositivos semicondutores de potência.

Pode-se exemplificar o comportamento de um transistor durante o chavea-

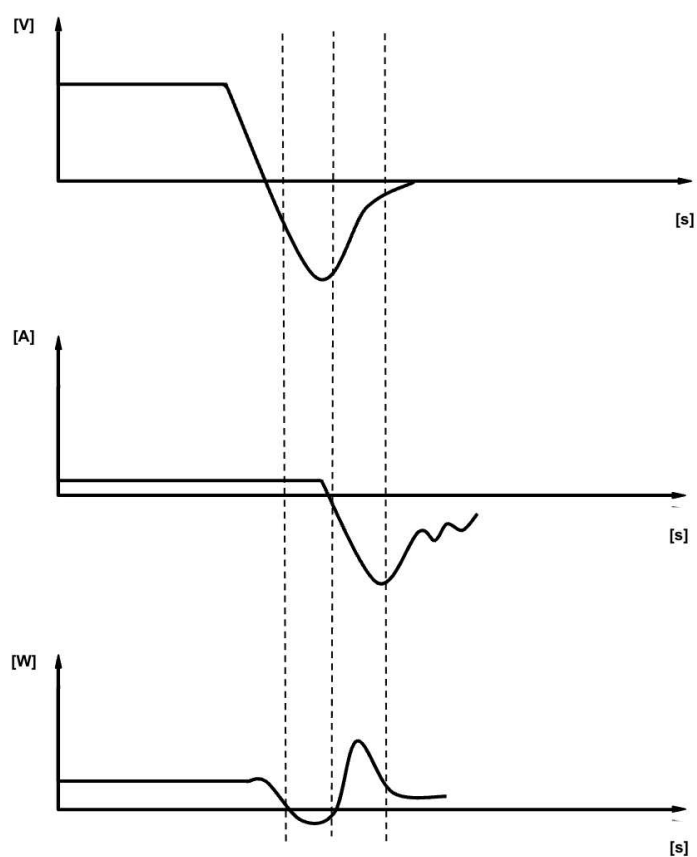


Figura 3.4 – Desligamento característico de um diodo de potência: Variação da corrente acima; Variação da tensão ao meio; Variação da potência abaixo.

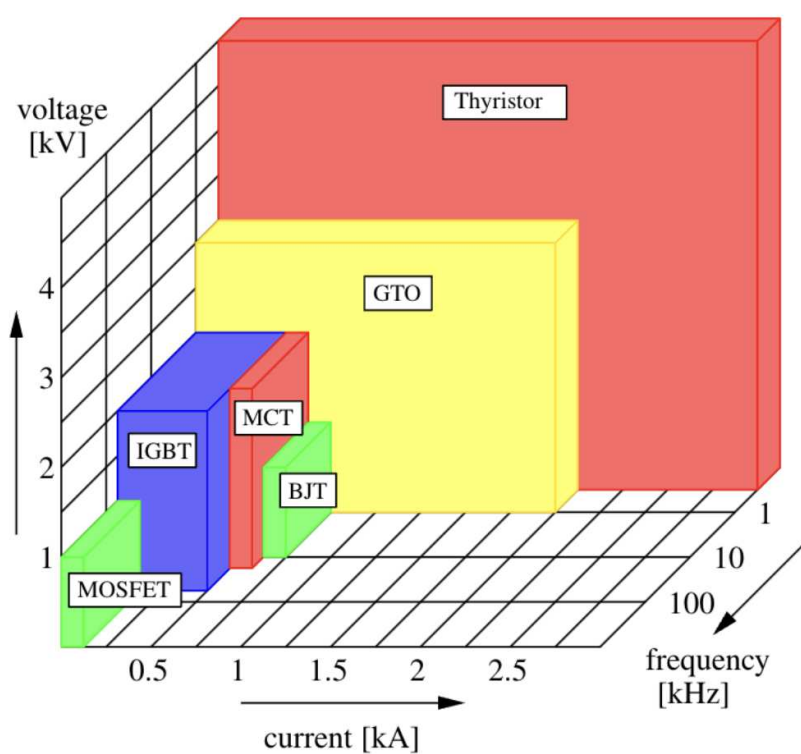


Figura 3.5 – Capacidades dos dispositivos semicondutores de potência.



mento considerando a curva característica de um BJT de potência para diferentes cargas, representado na Figura 3.6.

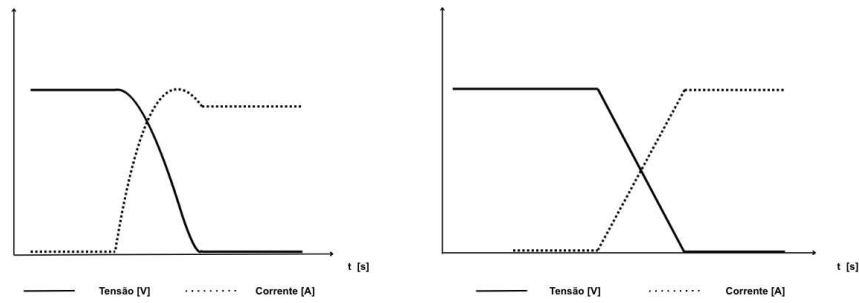


Figura 3.6 – Variação da tensão e corrente durante o desligamento de um BJT de potência para: Carga indutiva na figura à esquerda; Carga resistiva na figura à direita.

É possível verificar que o tipo de carga externa determina o tempo de saturação do transistor, tal que, para a carga resistiva, há um tempo maior de recuperação. Note que é usual nos conversores CC-CC fazer a transição entre cargas indutivas e resistivas, como exemplificado no conversor de tipo *buck-boost*. Assim, para minimizar perdas de chaveamento no BJT, deve-se aplicar inicialmente uma corrente alta para que o tempo de subida seja rápido e, em seguida, segurar a corrente como constante por um tempo no estado de saturação, minimizando o tempo em que a carga resistiva está ativa.

Levando em consideração o comportamento completo da chave, diodo e transistor, pode-se traçar a Figura 3.7, em que a eficiência do conversor atinge um máximo para um valor crítico de frequência de chaveamento.

O estudo detalhado dos comportamentos físicos de cada dispositivo está fora do escopo deste trabalho, mas, a partir da breve discussão feita, fica evidente a necessidade de se adicionar restrições de tempo de permanência nos modelos para controle.

### 3.4.2 Sistemas Mecânicos

Os sistemas mecânicos também podem ser modelados como sistemas contínuos por partes ou como sistemas dinâmicos chaveados. Alguns exemplos bem estabelecidos (BERNARDO *et al.*, 2008) incluem: o oscilador com fricção seca, o oscilador bilinear, os controladores por modos deslizantes, entre outros. Como o foco dos exemplos numéricos presentes neste trabalho é para conversores CC-CC, serão apenas pontuadas algumas considerações práticas que podem ocorrer nos atuadores mecânicos na presença do fenômeno de *chattering*. A saber:

- A primeira questão a se considerar é a saturação do sinal de controle (OGATA, 2010). Isto significa que a dinâmica dos atuadores mecânicos (válvulas pneumáticas,

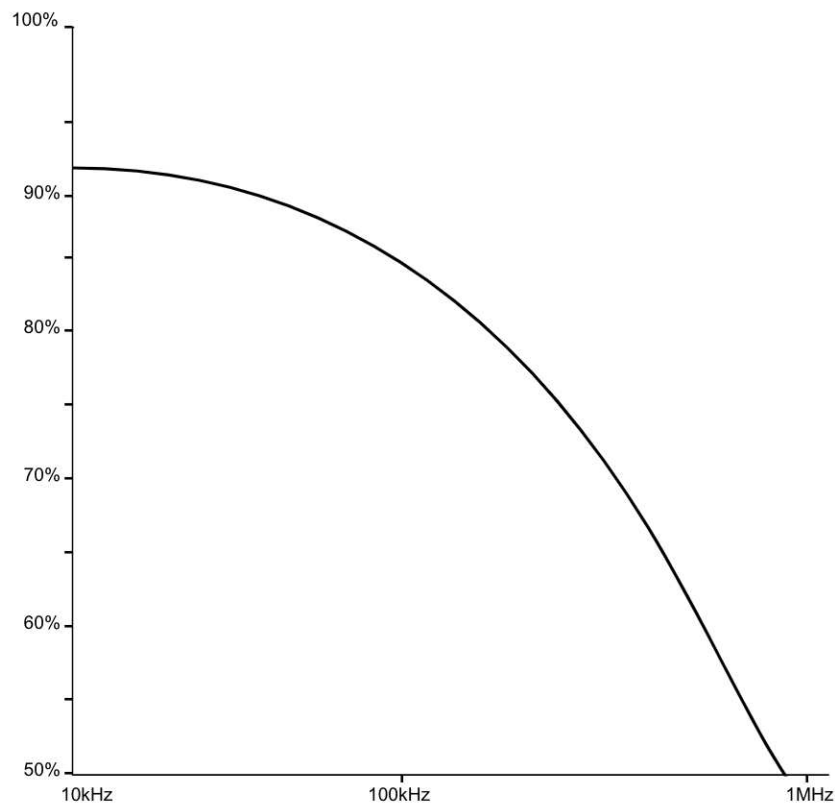


Figura 3.7 – Curva de eficiência versus frequência de chaveamento.

pistões hidráulicos, interruptores eletromecânicos, etc.) não respondem rápido o suficiente para o projeto de controle estipulado, levando a perda de desempenho, inatividade ou instabilidade;

- A segunda questão a se considerar é a fadiga dos elementos de máquina que compõem os atuadores mecânicos. Cada material apresenta um limite de deformação elástica, tal que para tensões elevadas os materiais apresentam alterações permanentes da sua microestrutura (CALLISTER, 2007). Com grandes frequências de chaveamento, os sinais descontínuos podem levar à fratura dos equipamentos;
- A terceira questão a se considerar é a amplificação da vibração nos dispositivos. Os atuadores mecânicos apresentam frequências de ressonância que, a partir de chaveamentos rápidos, pode-se transferir energia cinética as estruturas para além das cargas especificadas, potencialmente os danificando (MYKLESTAD, 2018).

## 4 Controle de Sistemas Afins Chaveados

Neste capítulo, será desenvolvida a análise de estabilidade para sistemas dinâmicos afins chaveados considerando os três tipos de modelagem apresentadas no capítulo anterior, a saber: a tempo contínuo, a tempo discreto e a tempo contínuo com restrições de tempo de permanência. Para o primeiro caso, os resultados de (DEAECTO *et al.*, 2010) serão reproduzidos considerando sistemas entrada-estado. Para o segundo caso, serão reproduzidos os resultados obtidos em (EGIDIO; DEAECTO, 2019). E, para o terceiro caso, os resultados apresentados são inéditos e considerados como a principal contribuição teórica deste trabalho.

### 4.1 Sistemas a Tempo Contínuo

A primeira abordagem considerada neste texto é baseado na função candidata de Lyapunov  $V : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  dado pela quadrática:

$$V(t) = \xi^\top(t) X \xi(t), \quad (4.1)$$

e na regra de comutação  $\sigma(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \langle N \rangle$  de tipo mínimo:

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \langle N \rangle} \xi^\top(t) X A_i \xi(t) + \xi^\top(t) X \ell_i. \quad (4.2)$$

Com as noções de estabilidade estabelecidas e a regra de comutação definida pode-se enunciar o teorema a seguir.

**Teorema 4.1** *Dado um sistema dinâmico na forma de (3.5) com  $\ell = 0$ , se existirem  $\lambda \in \Lambda$  e uma matriz definida positiva  $X \in \mathbb{S}_+^n$ , tais que:*

$$A_\lambda^\top X + X A_\lambda \prec 0, \quad (4.3)$$

*então, a função de comutação  $\sigma(t)$ , definida em (4.2), assegura que o ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  é globalmente uniformemente assintoticamente estável.*

**Prova** Analisando a estabilidade do sistema (3.5) via função candidata de Lyapunov,

como definida em (4.1), tem-se que:

$$\dot{V}(t) = \dot{\xi}^\top(t)X\xi(t) + \xi^\top(t)X\dot{\xi}(t) \quad (4.4)$$

$$= (A_{\sigma(t)}\xi(t))^\top X\xi(t) + \xi^\top(t)X(A_{\sigma(t)}\xi(t)) \quad (4.5)$$

$$= \xi(t)^\top (A_{\sigma(t)}^\top X + X A_{\sigma(t)})\xi(t) \quad (4.6)$$

$$= \min_{i \in \{N\}} \xi(t)^\top (A_i^\top X + X A_i)\xi(t) \quad (4.7)$$

$$= \min_{\lambda \in \Lambda} \xi(t)^\top (A_\lambda^\top X + X A_\lambda)\xi(t) \quad (4.8)$$

$$\leq 0, \quad (4.9)$$

é válido  $\forall x \neq 0$ , tal que  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Este resultado pode ser generalizado para conter o termo afim, de forma que pode-se enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 4.2** *Dado um sistema dinâmico na forma de (3.5) e um ponto de equilíbrio  $x_e$ , se existirem  $\lambda \in \Lambda$  e uma matriz definida positiva  $X \in \mathbb{S}_+^n$ , tais que:*

$$A_\lambda^\top X + X A_\lambda \prec 0, \quad (4.10)$$

$$A_\lambda x_e + b_\lambda = 0 \quad (4.11)$$

então, a função de comutação  $\sigma(t)$ , definida em (4.2), assegura que o ponto de equilíbrio  $x_e$  é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

**Prova** Analisando a estabilidade do sistema (3.5) via função candidata de Lyapunov, como definida em (4.1), tem-se que:

$$\dot{V}(t) = \dot{\xi}^\top(t)X\xi(t) + \xi^\top(t)X\dot{\xi}(t) \quad (4.12)$$

$$= (A_{\sigma(t)}\xi(t) + \ell_{\sigma(t)})^\top X\xi(t) + \xi^\top(t)X(A_{\sigma(t)}\xi(t) + \ell_{\sigma(t)}) \quad (4.13)$$

$$= \xi(t)^\top (A_{\sigma(t)}^\top X + X A_{\sigma(t)})\xi(t) + 2\ell_{\sigma(t)}^\top X\xi(t) \quad (4.14)$$

$$= \min_{i \in \{N\}} \xi(t)^\top (A_i^\top X + X A_i)\xi(t) + 2\ell_i^\top X\xi(t) \quad (4.15)$$

$$= \min_{\lambda \in \Lambda} \xi(t)^\top (A_\lambda^\top X + X A_\lambda)\xi(t) + 2\ell_\lambda^\top X\xi(t) \quad (4.16)$$

$$\leq 0, \quad (4.17)$$

é válida para todo  $x \neq 0$ , tal que  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Esta prova conclui os resultados de controle para sistemas afins chaveados a tempo contínuo sem restrições de tempo de permanência. Assim, ao se utilizar esta abordagem, será notado a presença de *chattering*. Com a simples adição da restrição

(4.11), foi possível passar do caso linear para o afim, retomando que, por definição,  $\ell_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)}x_e + b_{\sigma(t)}$ . Ainda, ao se considerar a medição de uma saída, seria possível calcular um custo garantido relacionado ao projeto da função de comutação. Como neste trabalho serão considerados apenas resultados para entrada-estado, referimos o leitor à (DEAECTO *et al.*, 2010), em que esta extensão é considerada.

## 4.2 Sistemas a Tempo Discreto

A segunda abordagem é baseada na função candidata de Lyapunov de tipo mínimo  $V : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dada por:

$$V[k] = \min_{i \in \langle N \rangle} \xi^\top[k] X_i \xi[k]. \quad (4.18)$$

Note que as curvas de nível da função de Lyapunov garantem a existência de um conjunto positivamente invariante, na forma:

$$\mathbb{V} := \bigcup_{i=1}^N \mathbb{V}_i = \bigcup_{i=1}^N \{\xi[k] \in \mathbb{R}^{n_x} | \xi^\top[k] X_i \xi[k] < r_i \leq r\}, \quad (4.19)$$

com  $r = \max_{i \in \langle N \rangle} r_i$ . A existência de um conjunto positivamente invariante garante que todas as trajetórias que entram no conjunto  $\mathbb{V}$ , em um dado instante de tempo  $K > 0$ , permanecem no mesmo  $\forall t_k \geq K$ , com  $k \in \mathbb{N}$ .

Com base na função candidata de Lyapunov definida acima, pode-se formular a regra de comutação  $\sigma[k] : \mathbb{N} \rightarrow \langle N \rangle$ :

$$\sigma[k] = \arg \min_{i \in \langle N \rangle} \xi^\top[k] X_i \xi[k]. \quad (4.20)$$

Com as noções de estabilidade estabelecidas e a regra de comutação definida pode-se enunciar o lema a seguir.

**Lema 4.1** *Dado um sistema dinâmico afim na forma de (3.9) e um respectivo ponto de equilíbrio  $x_e$ , se existirem uma matriz definida positiva  $W \in \mathbb{S}_+^n$ , funções matriciais suaves  $X_i : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{S}_+^n$ , um vetor  $\omega = Wc$ , e escalares  $\alpha_i > 0$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} \alpha_i X_i & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & \star & \star \\ \alpha_i X_i A_i & \alpha_i X_i \ell_i & \alpha_i X_i & \star \\ W & -\omega & 0 & W \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.21)$$

*então, a função de comutação  $\sigma[k]$  dependente de estado assegura que  $x_e$  é globalmente uniformemente estável para todo  $\xi \notin \mathfrak{E}$ , tal que:*

$$\mathfrak{E} = \{\xi[k] \in \mathbb{R}^n | (\xi[k] - c)^\top W (\xi[k] - c) \leq 1\}, \quad (4.22)$$

*centrado em  $c = W^{-1}\omega$ .*

**Prova** Analisando a estabilidade via variação entre instante de tempo da função candidata de Lyapunov:

$$\Delta V[k] = V[k+1] - V[k] \quad (4.23)$$

$$= (A_i \xi[k] + \ell_i)^\top X_i (A_i \xi[k] + \ell_i) - \xi^\top[k] X_i \xi[k] \quad (4.24)$$

$$= \xi^\top[k] (A_i^\top X_i A_i - X_i) \xi[k] + 2\ell_i^\top X_i A_i \xi[k] + \ell_i^\top X_i \ell_i \quad (4.25)$$

$$= \xi^\top[k] S_i \xi[k] + 2L_i^\top \xi[k] + \rho_i \quad (4.26)$$

com  $-S_i = A_i^\top X_i A_i - X_i$ ,  $L_i^\top = \ell_i^\top X_i A_i$  e  $\rho_i = \ell_i^\top X_i \ell_i$ . Assim, definindo o conjunto  $\mathcal{X} := \bigcup_{i=1}^N \mathcal{E}_i$  em que:

$$\mathcal{E}_i = \{(\xi[k] - c_i)^\top S_i (\xi[k] - c_i) \leq L_i^\top S_i^{-1} L_i + \rho_i\}, \quad (4.27)$$

tem-se que  $\Delta V[k] < 0$  para todo  $\xi[k] \notin \mathcal{X}$ . Isto implica que  $X$  é um conjunto de atração. Porém, como  $\mathcal{X}$  é não convexo, torna-se difícil minimizá-lo. Sendo assim, pode-se contornar tal fato encontrando o menor elipsoide que majora tal conjunto via *S-procedure*. Ainda, performando o complemento de Schur com relação as duas últimas linhas e colunas de (4.21), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ -c^\top W & c^\top W c - 1 \end{bmatrix} \leq \alpha_i \begin{bmatrix} S_i & \star \\ -L_i^\top & -\rho_i \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

com  $\alpha_i > 0$ . Em ambos os lados, pré multiplicando por  $[\xi^\top \ 1]$  e pós multiplicando pelo seu transposto, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\dot{V}(t) &= \alpha_i (\xi^\top(t) S_i(t) \xi(t) - 2L_i(t) \xi(t) + \rho_i) \\ &\geq (\xi^\top(t) W \xi(t) - 2c^\top W \xi(t) + c^\top W c - 1) \\ &\geq ((\xi(t) - c)^\top W (\xi(t) - c) - 1) \end{aligned}$$

Isto implica que  $\Delta V[k] \leq -\mathcal{K}[k]$  com  $\mathcal{K}[k] = (\xi[k] - c)^\top W (\xi[k] - c) - 1$ . Note que, para todo  $\xi[k] \notin \mathfrak{E} = \{\xi[k] \in \mathbb{R}^{n_x} | (\xi[k] - c)^\top W (\xi[k] - c) \leq 1\} \implies \mathcal{K}[k] > 0 \implies \Delta V[k] < 0$ . Ou seja, é um conjunto de atração convexo, logo, é possível minimizá-lo.  $\square$

O melhor conjunto de atração que satisfaz as condições do lema 4.1 pode ser obtido minimizando seu volume (BOYD *et al.*, 1994), tal que é equivalente ao problema de otimização:

$$\inf_{W, X_i, \omega, \alpha_i} -\ln(\det(W)), \quad \forall i \in \langle N \rangle, \quad (4.29)$$

sujeito à restrição (4.21).

**Teorema 4.3** *Dadas as matrizes  $X_i$ , e os escalares  $\alpha_i, \mu_{ji}$ , do Teorema 4.21. Se existirem escalares  $r, \alpha_i > 0$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} S_i & \star & \star & \star \\ 0 & r & \star & \star \\ \alpha_i X_i A_i & \alpha_i X_i \ell_i & \alpha_i X_i & \star \\ X_i & 0 & 0 & X_i \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

então, a função de comutação  $\sigma[k]$  com realimentação de estados assegura que o conjunto  $\mathbb{V}$ , dado por (4.19), é um conjunto positivamente invariante globalmente uniformemente finalmente limitado.

**Prova** Pela prova do lema 4.1, sabe-se que:

$$\Delta V[k] = \xi^\top[k] S_i \xi[k] + 2L_i^\top \xi[k] + \rho_i. \quad (4.31)$$

Então, definindo um conjunto positivamente invariante  $\mathbb{V}$  a partir das curvas de nível da função de Lyapunov, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X_i & \star \\ 0 & -r \end{bmatrix} \leq \gamma_i \begin{bmatrix} S_i & \star \\ -L_i^\top & -\rho_i \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

com  $r$  sendo o raio do conjunto  $\mathbb{V}$ . Em ambos os lados, pré multiplicando por  $[\xi^\top \ 1]$  e pós multiplicando pelo seu transposto, obtém-se:

$$\begin{aligned} -r &\leq -\xi_i^\top[k] X_i \xi_i[k] + \gamma_i (\xi^\top[k] S_i \xi[k] - 2L_i^\top(\tau) \xi[k] - \rho_i) \\ &= -\xi_i^\top[k] X_i \xi_i[k] - \Delta V[k] \\ &\leq -\xi_i^\top[k] X_i \xi_i[k]. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $r \geq \xi_i^\top[k] X_i \xi_i[k] = V[k]$ . Portanto, as soluções do sistema considerado serão globalmente uniformemente finalmente limitadas.  $\square$

O melhor conjunto positivamente invariante que satisfaz as condições do Teorema 4.3 pode ser obtido minimizando seu raio, tal que é equivalente ao problema de otimização:

$$r^* = \inf_{\gamma_i, X_i} r, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.33)$$

sujeito às restrições (4.30).

### 4.3 Restrições de Tempo de Permanência

Esta seção apresenta os principais resultados do trabalho. Nela, o problema de projetar um controlador sem *chattering* e dependente do estado é desenvolvido a partir

de uma função de Lyapunov de tipo mínimo (SOUZA *et al.*, 2014). Assim, ao considerar sistemas dinâmicos afins chaveados com restrição de tempo de permanência, primeiro, será provada a existência de estados que convergem uniformemente exponencialmente para o ponto de equilíbrio desejado por meio de uma aproximação do seu conjunto de atração. Depois, a partir das curvas de nível da função de Lyapunov, será provada a existência de um conjunto positivamente invariante uniformemente exponencialmente estável, que assegura que todas as soluções eventualmente entram em um conjunto compacto sem que o deixem após.

Definindo a função candidata de Lyapunov por partes  $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  de tipo mínimo dada por:

$$V(t) = \begin{cases} \xi^\top(t) X_{\sigma(t)}(t - t_k) \xi(t), & t \in [t_k, t_k + \tau), \\ \xi^\top(t) X_{\sigma(t)}(\tau) \xi(t), & t \in [t_k + \tau, t_{k+1}), \end{cases} \quad (4.34)$$

com  $t_{k+1} - t_k \geq \tau_{\sigma_k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , para funções matriciais suaves definidas positivas  $X_i : [0, \tau_i] \rightarrow \mathbb{S}_+^n$ ,  $i \in \langle N \rangle$  a serem determinadas. Além disso, as curvas de nível de  $V$  podem ser usadas para determinar um conjunto positivamente invariante (KHALIL, 2002) da forma:

$$\mathbb{V} := \bigcup_{i=1}^N \mathbb{V}_i \quad (4.35)$$

com  $\mathbb{V}_i := \{\xi(t) \in \mathbb{R}^n \mid \xi^\top(t) \mathfrak{X}_i \xi(t) < r\}$ , em que  $\mathfrak{X}_i \in \mathbb{S}_+^n$  e  $r \in \mathbb{R}$  são tais que:

$$\xi(t)^\top X_i(t) \xi(t) \leq \xi(t)^\top \mathfrak{X}_i \xi(t) < r. \quad (4.36)$$

Agora, introduzindo a regra de comutação dependente do estado a ser projetada. Primeiro, defini-se a função multivalorada:

$$\Sigma(\xi, i) := \{j \in \langle N \rangle \mid \xi^\top X_j(0) \xi \leq \xi^\top X_i(\tau_i) \xi\}.$$

Esta função auxiliar permite a definição recursiva da regra de comutação  $\sigma$ . De fato, dado um tempo de comutação  $t_k$  e um subsistema ativo associado  $\sigma(t_k) = \sigma_k$ , o próximo tempo de comutação é:

$$t_{k+1} := \inf_{t \geq t_k + \tau_{\sigma_k}} \{t \mid \Sigma(\xi(t), \sigma_k) \neq \emptyset\},$$

o primeiro tempo admissível no qual ocorre uma diminuição na função de Lyapunov na comutação. Portanto, a função de comutação  $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \langle N \rangle$  é dada por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_k, & t \in [t_k, t_{k+1}), \\ \sigma_{k+1} \in \Sigma(\xi(t_{k+1}), \sigma_k), & t = t_{k+1}, \end{cases} \quad (4.37)$$

para  $k \in \mathbb{N}$ . Sempre que  $\Sigma(\xi(t_{k+1}), \sigma_k)$  tem mais de um elemento, uma escolha típica para  $\sigma_{k+1}$  é dada por

$$\sigma_{k+1} \in \arg \min_{j \neq \sigma_k} \xi^\top(t_{k+1}) X_j(0) \xi(t_{k+1}). \quad (4.38)$$



Com as noções de estabilidade estabelecidas e a regra de comutação definida, o seguinte lema pode ser enunciado.

**Lema 4.2** *Dado um sistema dinâmico afim definido em (3.11) e seja  $x_e \in \mathbb{X}_e$  um ponto de equilíbrio desejado. Sejam também dados os tempos mínimos de permanência  $\tau_1, \dots, \tau_N > 0$ . Se existir uma matriz definida positiva  $W \in \mathbb{S}_+^n$ , funções matriciais suaves  $X_i : [0, \tau_i] \rightarrow \mathbb{S}_+^n$ , um vetor  $\omega \in \mathbb{R}^n$  e escalares  $\alpha_i, \beta_i, \mu_{ji} > 0$ ,  $i, j \in \langle N \rangle$ , tais que:*

$$\begin{bmatrix} \alpha_i(S_i(t)) & \star & \star \\ \alpha_i(-L_i^\top(t)) & 1 & \star \\ W & -\omega & W \end{bmatrix} \succ 0, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.39a)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_i(R_i(\tau_i)) & \star & \star \\ \beta_i(-L_i^\top(\tau_i)) & 1 & \star \\ W & -\omega & W \end{bmatrix} \succ 0, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.39b)$$

sejam válidos, com

$$S_i(t) = -(\dot{X}_i(t) + A_i^\top X_i(t) + X_i(t)A_i), \quad (4.39c)$$

$$R_i(t) = -(A_i^\top X_i(t) + X_i(t)A_i) + \sum_{j=1}^N \mu_{ji}(X_i(t) - X_j(0)), \quad (4.39d)$$

e  $L_i^\top(t) = \ell_i^\top X_i(t)$ , para  $i \in \langle N \rangle$ , então, para qualquer condição inicial  $x(0) = x_0$ , a função de comutação dependente de estados  $\sigma$  definida em (4.37) garante que a dinâmica do erro satisfaça:

$$\|\xi(t)\| \leq \kappa e^{-\delta t} \|\xi(0)\|, \quad (4.40)$$

para algum  $\kappa, \delta > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\xi(t) \notin \mathfrak{E}$ , com

$$\mathfrak{E} = \{\xi(t) \in \mathbb{R}^n | (\xi(t) - c)^\top W (\xi(t) - c) \leq 1\}, \quad (4.41)$$

em que  $c = W^{-1}\omega$ . Ou seja, o estado converge uniformemente exponencialmente para  $x_e$  fora do conjunto  $\mathfrak{E}$ .

**Prova** Observe primeiro que (4.39a) e (4.39b) são equivalentes, pelo Complemento de Schur, a:

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ -c^\top W & c^\top W c - 1 \end{bmatrix} \preceq \alpha_i \begin{bmatrix} S_i(t) & \star \\ -L_i^\top(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.42)$$

e

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ -c^\top W & c^\top W c - 1 \end{bmatrix} \preceq \beta_i \begin{bmatrix} R_i(\tau_i) & \star \\ -L_i^\top(\tau_i) & 0 \end{bmatrix}, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.43)$$

respectivamente. Como  $X_i$  são funções suaves definidas em um conjunto compacto, existe um  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que:

$$\begin{bmatrix} W + 2\alpha_i\delta X(t) & \star \\ -c^\top W & c^\top Wc - 1 \end{bmatrix} \preceq \alpha_i \begin{bmatrix} S_i(t) & \star \\ -L_i^\top(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\begin{bmatrix} W + 2\beta_i\delta X(t) & \star \\ -c^\top W & c^\top Wc - 1 \end{bmatrix} \preceq \beta_i \begin{bmatrix} R_i(\tau) & \star \\ -L_i^\top(\tau) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

é válido para todo  $i \in \langle N \rangle$ .

Seja  $V$  a função quadrática definida em (4.34) e seja  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência de tempos de comutação. Suponha que  $\xi(t_k) \notin \mathfrak{E}$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Note que, para  $t \in [t_k, t_k + \tau_{\sigma_k})$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2\dot{\xi}^\top(t)X_{\sigma_k}(t - t_k)\xi(t) + \xi^\top(t)\dot{X}_{\sigma_k}(t - t_k)\xi(t) \\ &= \xi^\top(t)(-S_{\sigma_k}(t))\xi(t) + 2L_{\sigma_k}^\top(t)\xi(t), \end{aligned} \quad (4.46)$$

com  $S_{\sigma_k}$  e  $L_{\sigma_k}$  conforme definido anteriormente. Portanto, pré e pós-multiplicando as desigualdades em (4.44) por  $[\xi^\top \ 1]$  e por sua transposta, respectivamente, e usando (4.46), pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\left(\xi^\top(t)S_{\sigma_k}(t)\xi(t) - 2L_{\sigma_k}(t)\xi(t)\right) \\ &\leq -\alpha_{\sigma_k}^{-1}(\xi^\top(t)W\xi(t) - 2c^\top W\xi(t) + c^\top Wc - 1) - 2\delta V(t) \\ &\leq -\alpha_{\sigma_k}^{-1}((\xi(t) - c)^\top W(\xi(t) - c) - 1) - 2\delta V(t). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Portanto, se  $\xi(t) \notin \mathfrak{E}$ , segue que:

$$\dot{V}(t) < -2\delta V(t) < 0. \quad (4.48)$$

Além disso, pela desigualdade de Grönwall-Bellman (KHALIL, 2002), a função de Lyapunov satisfaz:

$$V(t) \leq e^{-2\delta(t-t_k)}V(t_k),$$

para todo  $t \in [t_k, t_k + \tau_{\sigma_k})$  tal que  $\xi(t) \notin \mathfrak{E}$ .

Agora, analisando  $V$  em  $t = t_k + \tau_{\sigma_k}$ . Se  $t_{k+1} = t_k + \tau_{\sigma_k}$ , a definição de  $\sigma$  implica que  $V(t_k + \tau_{\sigma_k}) = V(t_{k+1}) \leq V(t_{k+1}^-)$ . Agora, se  $t_{k+1} > t_k + \tau_{\sigma_k}$ , tem-se que analisar o intervalo  $[t_k + \tau_{\sigma_k}, t_{k+1})$ . Assumindo que  $\xi(t_k + \tau_{\sigma_k}) \notin \mathfrak{E}$ , segue que, para  $t \in [t_k + \tau_{\sigma_k}, t_{k+1})$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\xi}^\top(t)X_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k})\xi(t) + \xi^\top(t)X_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k})\dot{\xi}(t) \\ &= \xi^\top(t)\mathbf{He}(X_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k})A_{\sigma_k})\xi(t) + 2\ell_{\sigma_k}^\top X_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k})\xi(t) \\ &< \xi^\top(t)(-R_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k}))\xi(t) + 2L_{\sigma_k}^\top(\tau_{\sigma_k})\xi(t), \end{aligned} \quad (4.49)$$

com  $R_{\sigma_k}$  e  $L_{\sigma_k}$  definidos anteriormente. A última desigualdade decorre da definição de  $\sigma$ , como  $\xi(t)X_j(0)\xi(t) > \xi(t)X_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k})\xi(t)$  é válida para todo  $j \in \langle N \rangle$  sempre que  $t \in [t_k + \tau_{\sigma_k}, t_{k+1})$ . Como antes, pré e pós-multiplicamos (4.45) por  $[\xi^\top \ 1]$  e por sua transposta, respectivamente, e usando (4.49), pode-se concluir que:

$$\dot{V}(t) < -\left(\xi^\top(t)(R_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k}))\xi(t) - 2L_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k})\xi(t)\right) \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} &< -\beta_{\sigma_k}^{-1}(\xi^\top(t)W\xi(t) - 2c^\top W\xi(t) + c^\top Wc - 1) - 2\delta V(t) \\ &< -\beta_{\sigma_k}^{-1}((\xi(t) - c)^\top W(\xi(t) - c) - 1) - 2\delta V(t). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Portanto, como antes, segue-se que  $\dot{V}(t) < -2\delta V(t) < 0$  e:

$$V(t) \leq e^{-2\delta(t-(t_k+\tau_{\sigma_k}))}V(t_k + \tau_{\sigma_k}), \quad (4.52)$$

para todo  $t \in [t_k + \tau, t_{k+1})$  para o qual  $\xi(t) \notin \mathfrak{E}$ .

Combinando os limites apresentados anteriormente, para algum  $\xi(0) \notin \mathfrak{E}$ :

$$V(t) \leq e^{-2\delta t}V(0), \quad (4.53)$$

enquanto  $\xi(t) \notin \mathfrak{E}$ . Então, dado que  $X_i$  são funções matriciais definidas positivas limitadas, existem constantes positivas  $k_1$  e  $k_2$  (HORN; JOHNSON, 2012) tais que:

$$k_1\|\xi(t)\|^2 \leq \xi^\top(t)X_i(t)\xi(t) \leq k_2\|\xi(t)\|^2, \quad (4.54)$$

é válido para todo  $t \in [0, \tau_i]$ , todo  $i \in \langle N \rangle$ , e qualquer  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ . Assim, segue-se que

$$\|\xi(t)\| \leq \kappa e^{-\delta t}\|\xi_0\|, \quad (4.55)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\xi(t) \notin \mathfrak{E}$  com  $\kappa = \sqrt{k_2 k_1^{-1}}$ , em que  $k_1$  e  $k_2$  são constantes positivas que satisfazem (4.54).  $\square$

Note que, de (4.39),  $\mathfrak{E}$  é um conjunto convexo que limita o atrator não convexo:

$$\mathbb{E} = \left(\bigcup_{i=1}^N \mathbb{E}_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathbb{F}_i\right) \quad (4.56)$$

dado pela união dos  $2N$  elipsoides:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi - \mu_i(t))^\top S_i(t)(\xi - \mu_i(t)) < \right. \\ \left. < \mu_i(t)^\top S_i(t)\mu_i(t), t \in [0, \tau_i] \right\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\mathbb{F}_i = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi - \nu_i)^\top R_i(\tau_i)(\xi - \nu_i) < \nu_i^\top R_i(\tau_i)\nu_i \right\}, \quad (4.58)$$

para o qual  $\mu_i(t) = S_i(t)^{-1}L_i(t)$  e  $\nu_i = R_i(\tau_i)^{-1}L_i(\tau_i)$ . O limite convexo é, portanto, necessário para minimizar o volume de  $\mathbb{E}$ .

Esta aproximação convexa permite minimizar seu volume. De fato, o melhor conjunto convexo que satisfaz as condições do Lema 1 é aquele com o menor volume possível (BOYD *et al.*, 1994), levando ao seguinte problema de otimização:

$$\inf_{W, X_i, \omega, \alpha_i, \beta_i, \mu_{ji}} \left\{ -\ln(\det(W)) \mid (4.39) \right\}, \quad (4.59)$$

que é convexo para um conjunto fixo de escalares  $\alpha_i, \beta_i, \mu_{ji}$ .

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo. Ele fornece um atrator UES para (3.11) com a função de comutação  $\sigma$  desenvolvida no Lema 4.2 explorando os conjuntos de níveis da função de Lyapunov.

**Teorema 4.4** *Dado o sistema dinâmico afim definido em (3.11) e sejam dadas as matrizes  $X_i(t) \in [0, \tau_i]$ , e os escalares  $\alpha_i, \beta_i, \mu_{ji}$ , do Lema 4.2. Sejam também dados os tempos de permanência mínimos  $\tau_1, \dots, \tau_N > 0$ . Se existem matrizes definidas positivas  $\mathfrak{X}_i$ , e escalares  $r, \gamma_i, \theta_i > 0$ , tais que*

$$\mathfrak{X}_i - X_i(t) \succeq 0, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.60a)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_i S_i(t) - \mathfrak{X}_i & \star \\ -\gamma_i L_i^\top(t) & r \end{bmatrix} \succ 0, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.60b)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_i R_i(\tau_i) - \mathfrak{X}_i & \star \\ -\theta_i L_i^\top(\tau_i) & r \end{bmatrix} \succ 0, \quad i \in \langle N \rangle, \quad (4.60c)$$

é válido, com  $S_i, R_i(\tau_i), L_i, i \in \langle N \rangle$ , como antes, então a função de comutação dependente do estado  $\sigma$  definida em (4.37) garante que o conjunto positivamente invariante  $\mathbb{V}$ , dado por (4.35), é um atrator UES para  $\mathcal{S}$ .

**Prova** Observe, primeiramente, que as condições (4.60) garantem que

$$\begin{bmatrix} X_i(t) & \star \\ 0 & -r \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} \mathfrak{X}_i & \star \\ 0 & -r \end{bmatrix} \preceq \gamma_i \begin{bmatrix} S_i(t) & \star \\ -L_i^\top(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} X_i(\tau_i) & \star \\ 0 & -r \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} \mathfrak{X}_i & \star \\ 0 & -r \end{bmatrix} \preceq \theta_i \begin{bmatrix} Z_i & \star \\ -L_i(\tau_i)^\top & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

vale para todo  $t \in [0, \tau_i]$  e todo  $i \in \langle N \rangle$ . Essas desigualdades implicam que  $\mathbb{V} \supset \mathbb{E}$ .

Será demonstrado que  $\mathbb{V}$  é positivamente invariante. Seja  $\xi(t) \in \mathbb{V}$  para algum  $t \in \mathbb{R}_+$ . Se  $\xi(t) \notin \mathbb{E}$ , então, do Lema 4.2, tem-se que  $\dot{V}(t) < 0$ , implicando que  $\xi$  é atraído para a origem.

Agora, considerando o caso em que  $\xi(t) \in \mathbb{E}$  e, considerando primeiro o caso em que  $\xi(t) \notin \mathbb{E}_{\sigma_k}$  para  $t \in [t_k, t_k + \tau_{\sigma_k})$  ou que  $\xi(t) \notin \mathbb{F}_{\sigma_k}$  para  $t \in [t_k + \tau_{\sigma_k}, t_{k+1})$ . Em

ambos os casos, do Lema 4.2, também temos que  $\dot{V}(t) < 0$ , implicando que  $\xi(t)$  é atraído para a origem. Agora, para o caso em que  $\xi(t) \in \mathbb{E}_{\sigma_k}$  e  $t \in [t_k, t_k + \tau_{\sigma_k})$ , (4.57) implica que:

$$\xi(t)^\top (-S_{\sigma_k}(t))\xi(t) + 2L_{\sigma_k}(t)^\top \xi(t) \geq 0. \quad (4.63)$$

Então, de (4.60a) e (4.60b), segue-se que pré e pós-multiplicando essas desigualdades por  $[\xi^\top \quad 1]$  e por sua transposta, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} r &\geq \xi(t)^\top \mathfrak{X}_{\sigma_k} \xi(t) - \gamma_{\sigma_k} (\xi(t)^\top S_{\sigma_k}(t) \xi(t) - 2L_{\sigma_k}(t)^\top \xi(t)) \\ &\geq \xi(t)^\top \mathfrak{X}_{\sigma_k} \xi(t). \end{aligned}$$

Isso mostra que  $r \geq \xi_{\sigma_k}(s)^\top \mathfrak{X}_{\sigma_k} \xi_{\sigma_k}(s) \geq V(s)$  vale para qualquer tempo futuro  $s$  neste intervalo de tempo. Agora, se  $t \in [t_k + \tau, t_{k+1})$  e  $\xi(t) \in \mathbb{F}_{\sigma_k}$ , (4.58) implica que:

$$\xi(t)^\top (-R_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k}))\xi(t) + 2L_{\sigma_k}(\tau_{\sigma_k})^\top \xi(t) \geq 0.$$

Como antes, essa desigualdade, junto com (4.60a) e (4.60c), implica que  $r \geq \xi_{\sigma_k}(s)^\top \mathfrak{X}_{\sigma_k} \xi_{\sigma_k}(s) \geq V(s)$  vale para qualquer tempo futuro  $s$  neste intervalo de tempo. Como em qualquer tempo de comutação a função de Lyapunov diminui, segue-se que  $\mathbb{V}$  é um conjunto positivamente invariante.

Além disso, dado que  $X_i$  são funções matriciais positivas definidas limitadas, existem constantes positivas  $k_1$  e  $k_2$ , tais que  $k_1 < k_2$  e:

$$k_1 \|\xi(t)\|^2 \leq \xi^\top(t) X_i(t) \xi(t) \leq k_2 \|\xi(t)\|^2, \quad (4.64)$$

é válido para todo  $t \in [0, \tau_i]$ , todo  $i \in \langle N \rangle$  e qualquer  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ . Agora, note que, para qualquer condição inicial  $\xi_0 = \xi(t_0) \notin \mathbb{V}$ , o ponto  $\bar{\xi}$  situado na fronteira do conjunto positivamente invariante  $\mathbb{V}$  que está mais próximo de  $\xi_0$  é tal que:

$$\|\xi_0\|^2 \geq \frac{1}{k_2} r \geq \frac{1}{k_2} \bar{\xi}^\top \mathfrak{X}_i \bar{\xi} \geq \frac{k_1}{k_2} \|\bar{\xi}\|^2. \quad (4.65)$$

Assim,  $\|\bar{\xi}\| \leq \eta \|\xi_0\|$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  com  $\eta = \sqrt{k_2 k_1^{-1}} > 1$ . Portanto, a distância de uma condição inicial para o conjunto invariante é tal que

$$\text{dist}(\xi_0, \mathbb{V}) = \|\xi_0 - \bar{\xi}\| \geq (\eta - 1) \|\xi_0\|. \quad (4.66)$$

Finalmente, podemos combinar este resultado com o limite fornecido pelo Lema 4.2 para concluir que:

$$\text{dist}(\xi(t), \mathbb{V}) \leq \|\xi(t)\| \leq \kappa e^{-\delta t} \|\xi_0\| \leq c e^{-\delta t} \text{dist}(\xi_0, \mathbb{V}), \quad (4.67)$$

é válido para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , para qualquer condição inicial  $\xi(0) = \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ , em que  $c = \kappa(\eta - 1)^{-1}$ .  $\square$

O melhor conjunto positivamente invariante que satisfaz as condições do Teorema pode ser obtido minimizando seu raio, de modo que seja equivalente ao problema de otimização convexo:

$$r^* = \inf_{\gamma_i, \theta_i, \mathbf{x}_i} \left\{ r \mid (4.60) \right\}.$$

### 4.3.1 Detalhes de Implementação

Esta breve subseção discute algumas considerações práticas e numéricas nas condições de projeto da função de comutação apresentadas nesta seção. Para esta discussão, o foco será no aspecto das formulações diferenciais para as condições de projeto.

Primeiro, note que as condições do Teorema 1 são não convexas, pois envolvem produtos das variáveis  $\{X_i, \alpha_i, \beta_i, \mu_{ji}\}$ . Uma maneira de contornar esta dificuldade (4.59) envolve uma busca de  $N^2 - N$  elementos na matriz de multiplicadores, além de  $2N$  escalares positivos. Sem perda de generalidade, pode-se assumir um dos escalares livres iguais a um, i.e.,  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_i = \alpha_i/\alpha_1, \forall i \in \langle N \rangle \setminus \{1\}$ . Ainda, é possível considerar uma solução sub-ótima para o problema e fixar todos os escalares livres iguais a um, i.e.,  $\alpha_i = 1, \forall i \in \langle N \rangle$ . Assim, para o caso de  $N = 2$ , resta apenas uma busca bidimensional, o que simplifica substancialmente o problema.

No entanto, mesmo quando esse conjunto de parâmetros decorrentes do *S procedure* são fixados, as desigualdades matriciais lineares diferenciais (DMLDs)<sup>1</sup> presentes em (4.59) são dependentes do tempo. Estas, podem ser eficientemente resolvidas tomando a função matricial de Lyapunov por partes e reformulando suas condições como desigualdades matriciais lineares (DMLs), como na abordagem desenvolvida em (ALLERHAND; SHAKED, 2013), tal que a discretização segue como:

$$\frac{X_{i,k+1} - X_{i,k}}{\delta_i} + A_i^\top X_{i,k} + X_{i,k} A_i^\top \prec 0, \quad (4.68)$$

$$\frac{X_{i,k+1} - X_{i,k}}{\delta_i} + A_i^\top X_{i,k+1} + X_{i,k+1} A_i^\top \prec 0, \quad (4.69)$$

com  $i \in \langle N \rangle$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  e  $\delta = \tau_i/K$ .

Uma outra abordagem possível é tomar as funções matriciais como uma função polinomial e utilizar a otimização de soma de quadrados (SdQ)<sup>2</sup> (PAPACHRISTODOULOU *et al.*, 2013). Assim, em qualquer um dos casos, as DMLDs podem ser eficientemente resolvidas para os parâmetros fixos.

Se a condição inicial do subsistema ativo  $\sigma_0 = \sigma(t_0) \in \langle N \rangle$  for considerada desconhecida, então, para uma dada condição inicial  $\xi_0 = \xi(t_0) \in \mathbb{R}^n$ , pode-se considerar:

$$\sigma(t_0) = \arg \min_{i \in \langle N \rangle} \{ \xi_0^\top X_i(t_0) \xi_0 \}. \quad (4.70)$$

<sup>1</sup> ou, em inglês, DLMIs (*Differential Linear Matrix Inequalities*).

<sup>2</sup> ou, em inglês, SoS (*Sum-of-Squares*).

Ainda, é possível considerar a condição inicial  $\xi_0$  como desconhecida. Para tal questão, observe que a desigualdade a seguir:

$$\xi_0^\top X_{\sigma_0}(t_0)\xi_0 = \mathbf{tr}(\xi_0^\top X_{\sigma_0}(t_0)\xi_0) \quad (4.71)$$

$$\leq \mathbf{tr}(X_{\sigma_0}(t_0))\|\xi_0\|^2 \quad (4.72)$$

é válida, como uma consequência do teorema de Rayleigh-Ritz (HORN; JOHNSON, 2012). Neste caso, o traço de  $X_{\sigma_0}(t_0)$  se torna a função objetivo.

## 5 Exemplos Numéricos

Neste capítulo, serão apresentados exemplos numéricos que validam a teoria de controle desenvolvida até então para os sistemas dinâmicos afins chaveados. Em particular, foram selecionados dois tipos de modelos: os sistemas que possuem uma propriedade matemática que ilustra alguma das características da estratégia proposta; e, os sistemas com propriedades físicas relevantes na área de eletrônica de potência, que naturalmente são descritos por sistemas dinâmicos afins chaveados.

### 5.1 Sistema Instável

Como primeiro exemplo numérico, considere o sistema estudado em (EGIDIO; DEAECTO, 2019), que define um sistema afim chaveado a tempo contínuo composto de  $N = 2$  subsistemas instáveis, com estados  $x = [x_1, x_2]$ , dados por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5.8 & -5.9 \\ -4.1 & -4.0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 \\ -0.3 & -5.0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

e condições iniciais  $x_0 = [-10, 5]$  e  $\sigma_0 = 1$ . Nesta referência, os autores resolvem um caso especial com período de amostragem uniforme igual ao tempo de permanência, tal que  $h = \tau = 0.5$ . Essa imposição leva a um elipsoide com volume  $\text{Vol}(\mathfrak{E}) = 19.54$ , conjunto invariante com raio  $r^* = 6.48$  e volume  $\text{Vol}(\mathbb{V}) = 28.23$ , um resultado relativamente conservador.

Deste modo, o objetivo é estabilizar o sistema ao redor da origem  $x_e = [0, 0]$ , sendo que este ponto não pertence ao conjunto  $X_e$ , o que normalmente não é adotado na literatura por sua dificuldade. Para evitar *chattering*, aplicou-se a formulação proposta no presente trabalho, tempo de permanência  $\tau_1 = \tau_2 = 0.5$ , e período de amostragem das DMLDs igual a  $d = \tau/8$ . O projeto da função de comutação  $\sigma(t)$  foi realizado por meio da resolução do problema (4.59) com os parâmetros  $\mu_{12} = 10^2$  e  $\mu_{21} = 10^{-1}$ . Por simplicidade, assumiu-se  $\alpha_i = \beta_i = 1, i = 1, 2$ . A simulação no intervalo  $t \in [0, 30]$ , com período de amostragem  $h = 10^{-3}$ , está ilustrada na Figura 5.1.

Com estes parâmetros, os resultados obtidos são: volume do elipsoide  $\text{Vol}(\mathfrak{E}) = 4.64$ , raios do conjunto invariante  $r^* = 5.23$  e volumes  $\text{Vol}(\mathbb{V}_1) = 3.62$  e  $\text{Vol}(\mathbb{V}_2) = 2.93$ . Este fato mostra que o desempenho não é bruscamente comprometido ao se impor



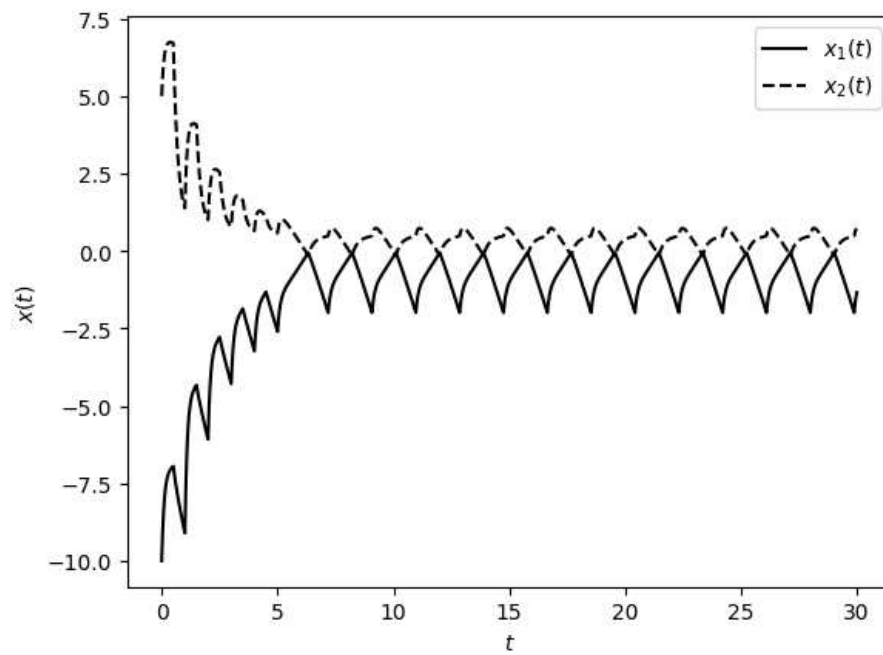


Figura 5.1 – Estados do sistema.

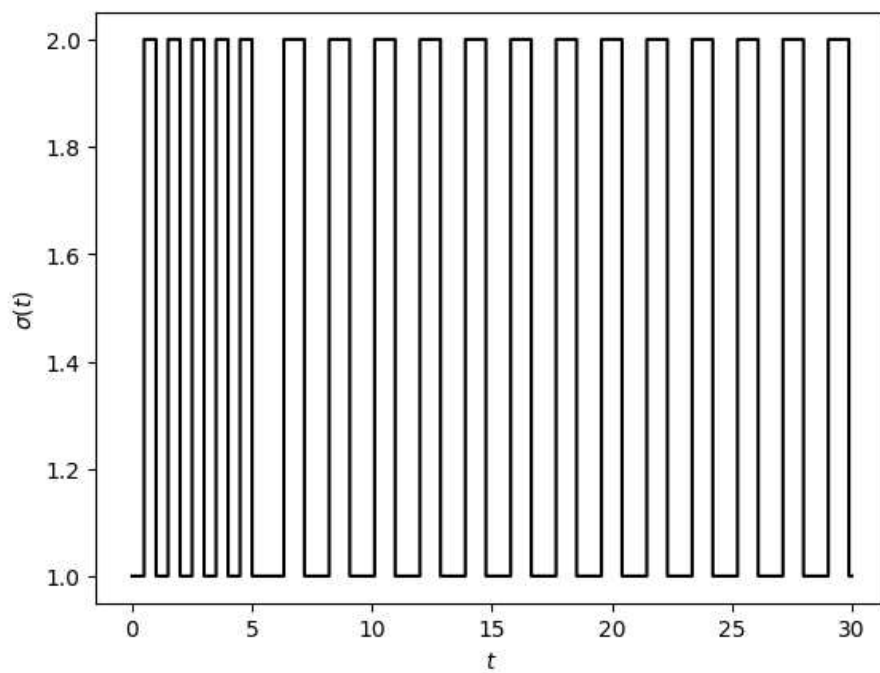


Figura 5.2 – Função de comutação.

restrições de tempo de permanência para evitar chaveamento, providenciado que essas novas restrições são adequadamente consideradas, o que é o caso sempre que as técnicas desenvolvidas neste trabalho são adotadas.

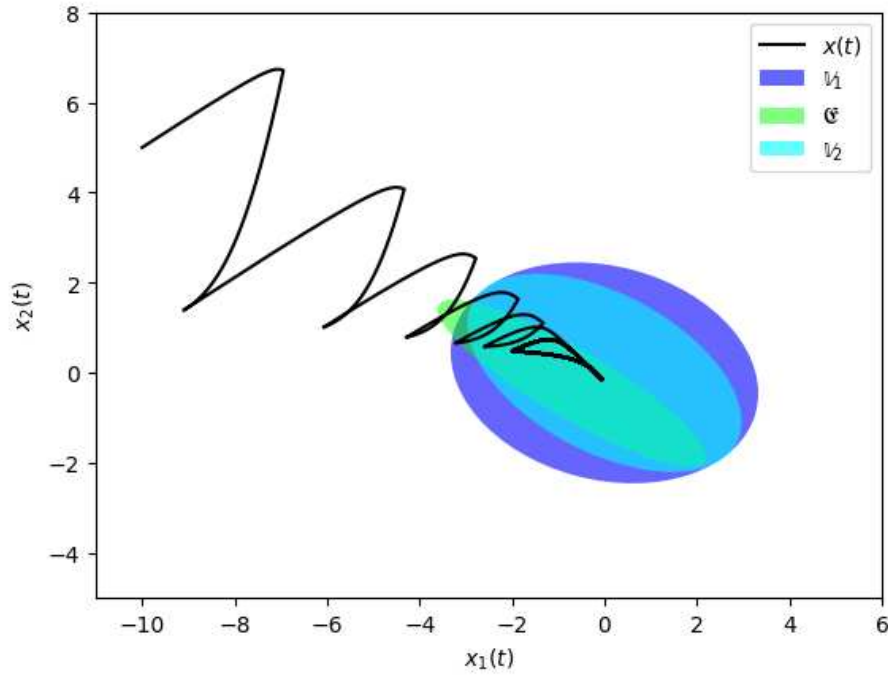


Figura 5.3 – Plano de fase.

## 5.2 Conversores tipo *Choppers*

O segundo exemplo numérico se concentra na aplicação da teoria desenvolvida para o principal conversor CC-CC não isolado, a saber: o conversor de tipo *buck-boost*, como estudado em (DEAECTO *et al.*, 2010). A topologia de circuito apresenta uma fonte de tensão constante na entrada, o que caracteriza o sistema dinâmico como afim, e apresenta um transistor, o que define o sistema dinâmico como chaveado, contendo dois subsistemas ( $N = 2$ ) distintos. Em cada instante de tempo a regra de comutação  $\sigma(t)$  decidirá qual subsistema será ativado para compor a evolução dos estados  $x(t) = [i_L, v_C]$ , sendo  $i_L$  a corrente no indutor e  $v_C$  a tensão no capacitor. Ainda, como uma distinção da abordagem original, e considerando a limitação prática de chaveamento destes dispositivos, serão consideradas restrições de tempo de permanência mínimo em cada subsistema  $\tau_i$ , com  $i \in \langle N \rangle$ , após os chaveamentos. Serão considerados os seguintes valores de parâmetros apresentados na tabela 5.1, com  $u$  sendo a fonte de tensão,  $R_L$  a resistência do indutor,  $L$  a indutância do conversor,  $C$  a capacitância do conversor e  $R$  a resistência da carga.

Quantidade	Valor	Unidade
$u$	100	V
$R_L$	2	$\Omega$
$L$	500	$\mu H$
$C$	470	$\mu F$
$R$	50	$\Omega$

Tabela 5.1 – Tabela de parâmetros dos conversores CC-CC.

### 5.2.1 Conversor *Buck-Boost*

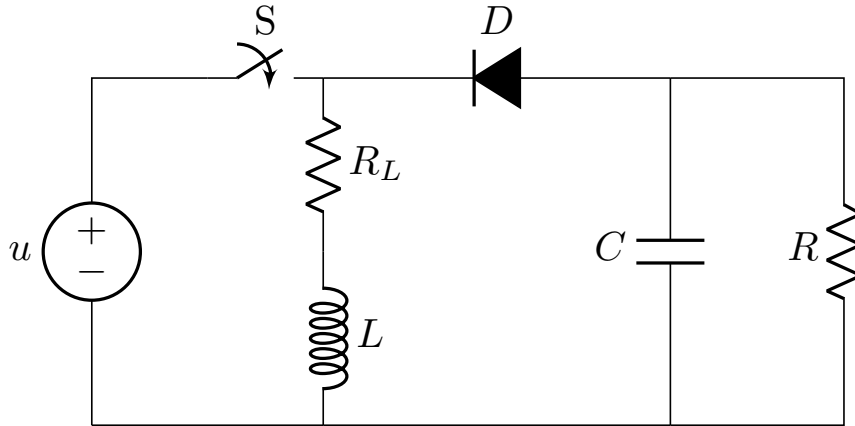
A topologia do conversor *buck-boost* está esquematizada na figura 5.4. Sua realização no espaço de estados, com  $x = [i_L, v_C]$ , é dada por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -R_L/L & 0 \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -R_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

O conjunto dos pontos de equilíbrio atingíveis é:

$$\mathbb{X}_e = \{(i_e, v_e) : 0 \leq v_e \leq Ri_e, v_e^2 + (R_L R)i_e^2 - (Ru)i_e + uv_e = 0\}. \quad (5.4)$$

Note que usualmente a resistência da carga é muito maior que a resistência do indutor, i.e.,  $R \gg R_L$ . Pode-se visualizar  $\mathbb{X}_e$  na Figura 5.5.

Figura 5.4 – Esquemática do conversor *buck-boost*.

O objetivo é estabilizar o sistema ao redor do ponto de equilíbrio  $x_e = [3.06, 80]$ . Para as condições iniciais dos estados e função de comutação foram fixadas  $x_0 = [0, 0]$  e  $\sigma_0 = 1$ , respectivamente. E os parâmetros físicos seguiram a tabela 5.1. Para evitar o efeito indesejado de *chattering*, foi aplicada a formulação proposta no presente trabalho, tempo de permanência  $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-5}$ , e período de amostragem das *DLMI*s igual a  $d = \tau/10$ . O projeto da função de comutação  $\sigma(t)$  seguiu o lema 4.2, tal que foi performedo um *grid search* bidimensional, encontrando  $\mu_{12} = 10^7$  e  $\mu_{21} = 10^{10}$ . Por simplicidade, foi

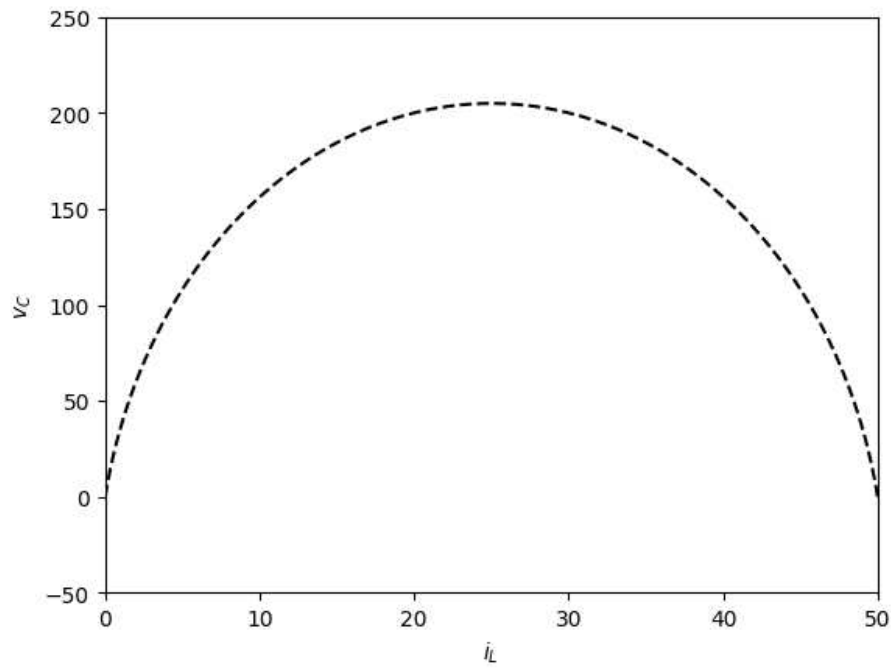


Figura 5.5 – Pontos de equilíbrio atingíveis do conversor *buck-boost*.

adotado  $\alpha_i = \beta_i = 1$ , com  $i = 1, 2$ . A simulação no intervalo  $t \in [0, 0.1]$ , com período de amostragem  $h = 10^{-6}$ , está ilustrada na figura 5.6 e a sua respectiva função de comutação em 5.7.

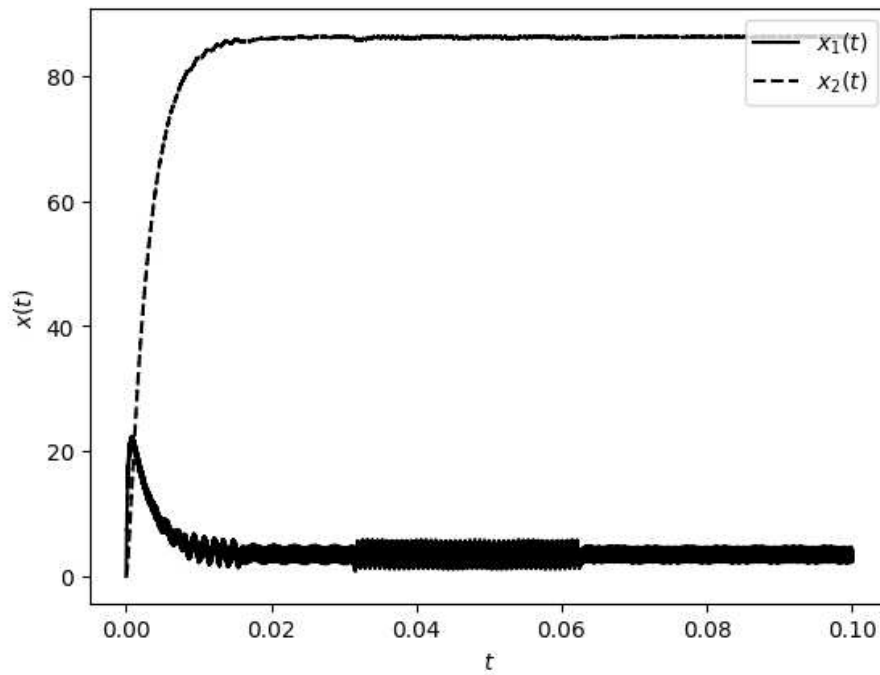


Figura 5.6 – Estados do sistema.

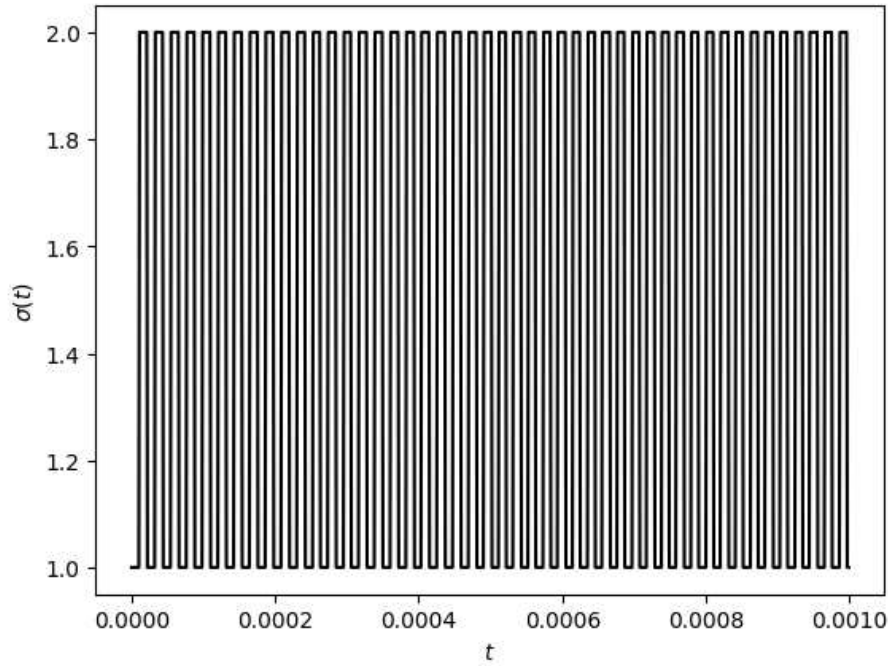


Figura 5.7 – Função de comutação.

### 5.3 Motor de Corrente Contínua

Para o terceiro exemplo numérico, será considerada a aplicação da teoria desenvolvida em um sistema físico com objetivo de controlar a velocidade de um motor CC, como estudado em (DEAECTO; GEROMEL, 2017). O dispositivo completo é constituído por uma fonte de voltagem CC constante, um conversor de potência do tipo *Buck-Boost* como atuador, e um motor conectado a uma carga com momento de inércia constante, como pode ser visualizado na Figura 5.8. Note que, pelo atuador ser um conversor de tipo *chopper*, naturalmente se define um sistema dinâmico afim chaveado, como discutido no exemplo numérico anterior. A realização no espaço de estados, com estados  $x = [i_L, i_m, v_C, \omega]$ , tal que  $i_L$  é a corrente no indutor,  $i_m$  a corrente de armadura,  $v_C$  a corrente no capacitor e  $\omega$  a velocidade angular do motor, é dada por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -R_L/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_m/L_m & -1/L_m & -K/L_m \\ 0 & 1/C & 0 & 0 \\ 0 & K/J & 0 & -b/J \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} E/L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -R_L/L & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & -R_m/L_m & -1/L_m & -K/L_m \\ 1/C & 1/C & 0 & 0 \\ 0 & K/J & 0 & -b/J \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

em que  $E$  é fonte de tensão,  $R_L$ ,  $C$  e  $L$  são, respectivamente, a resistência, capacitância e indutância do conversor,  $R_m$  e  $L_m$  são, respectivamente, a resistência e indutância do

motor,  $K$  é a constante do motor,  $J$  é o momento de inércia do motor mais a carga e  $b$  é o atrito viscoso.

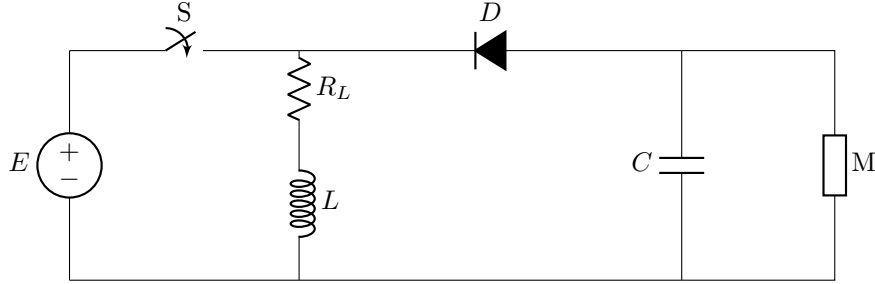


Figura 5.8 – Esquemática do motor de corrente contínua alimentado por um conversor tipo *buck-boost*.

Nesta referência, os autores resolvem um caso especial de amostragem uniforme igual ao tempo de permanência, tal que  $1/T = 1/\tau = 1[kHz]$ . Uma métrica de desempenho prática é calcular o erro relativo de um estado no infinito em relação ao ponto de equilíbrio desejado. Considerando que o estado de interesse é  $w$ , i.e., a velocidade de rotação do motor, pode-se definir  $w_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} w(t)$ . Assim, o erro relativo é  $E_{rel}(w) = (w_\infty - w_e)/w_e$ , se  $w_e \neq 0$ . Usualmente, é importante que o erro relativo não exceda em 5% para todas as velocidades de operação, enquanto a restrição na frequência de chaveamento é relativamente pequena.

Quantidade	Valor	Unidade
$E$	10	V
$R_L$	1.5	$\Omega$
$C$	2.2	$mF$
$L$	50	$mH$
$R_m$	4.45	$\Omega$
$L_m$	35	$mH$
$K$	8.40	mV/s
$J$	2.98	kgm <sup>2</sup>
$b$	$91.10 \times 10^{-6}$	Nms/rad

Tabela 5.2 – Tabela de parâmetros do sistema.

O objetivo é estabilizar o sistema ao redor do ponto de equilíbrio  $w_e$ , tal que, para o vetor  $\lambda = [\lambda_1, 1 - \lambda_1]$  com valor  $\lambda_1 = 0.2$ , obtém-se,  $w_e = -30.45$ . Para as condições iniciais dos estados e função de comutação foram fixadas  $x_0 = [0, 0, 0, 0]$  e  $\sigma_0 = 1$ , respectivamente. E os parâmetros físicos seguiram a tabela 5.2. Para evitar o efeito indesejado de *chattering*, foi aplicada a formulação proposta no presente trabalho, tempo de permanência  $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-2}$ , e período de amostragem das *DLMI*s igual a  $d = \tau/3$ . O projeto da função de comutação  $\sigma(t)$  seguiu o teorema 1, tal que foi performedo um *grid search* bidimensional, encontrando  $\mu_{12} = 10^7$  e  $\mu_{21} = 10^{10}$ . Por simplicidade, foi adotado

$\alpha_i = \beta_i = 1, i = 1, 2$ . A simulação no intervalo  $t \in [0, 200]$ , com período de amostragem  $h = 10^{-3}$ , está ilustrada na Figura 5.9.

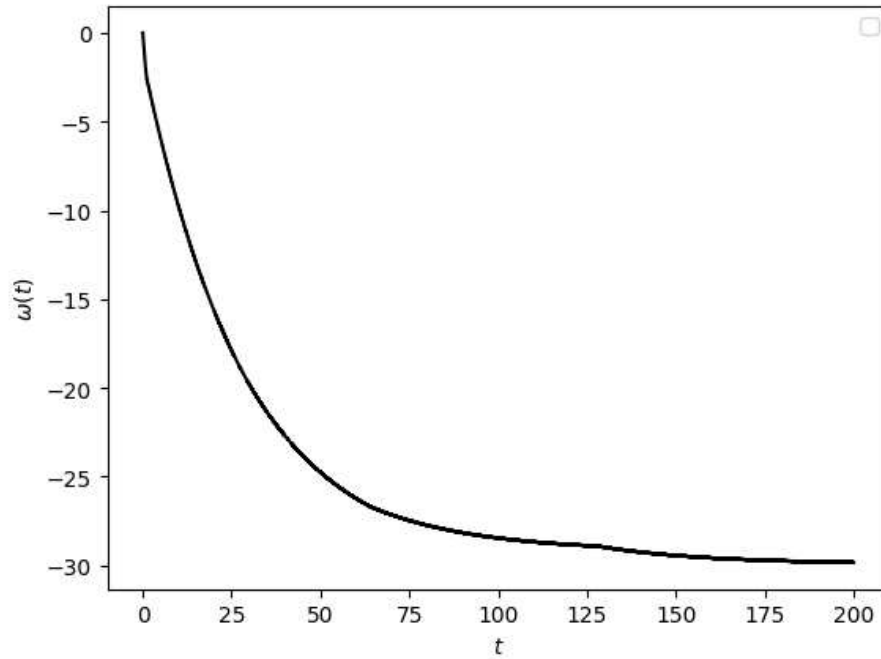


Figura 5.9 – Estados do sistema.

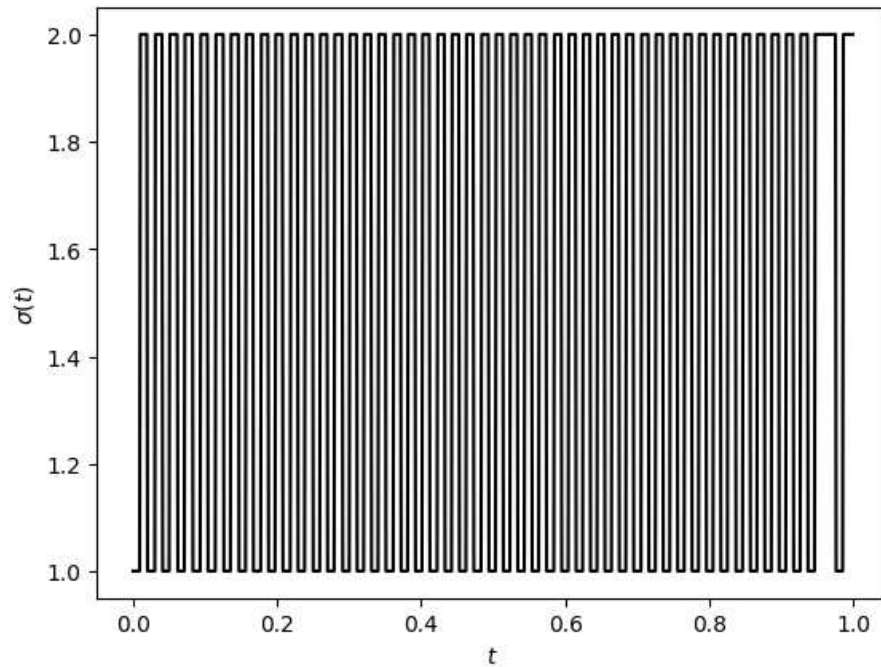


Figura 5.10 – Função de comutação.

Com estes parâmetros, os resultados obtidos são: volume do elipsoide  $\text{Vol}(\mathfrak{E}) = 6.34$  e erro relativo  $E_{\text{rel}}(w) = 2.04\%$ . Portanto, o controlador apresentado está dentro das normas práticas de implementação e pode ser utilizado em aplicações reais, sendo uma

alternativa aos controladores clássicos de tipo modulação de largura de banda usualmente utilizado para conversores CC-CC.



## 6 Conclusão

Neste trabalho, novas condições para o projeto de uma regra de comutação com realimentação de estados para sistemas dinâmicos afins chaveados que satisfazem restrições de tempo de permanência foram consideradas. Para isso, a estratégia de minimizar o volume de um conjunto elipsoidal que contém o conjunto de atração de interesse foi utilizada. Esta é expressada em termos de uma função de Lyapunov por partes, que leva a um problema de otimização convexo. Ainda, a partir das curvas de nível da função de Lyapunov, provou-se a existência de um conjunto positivamente invariante, tal que as trajetórias do sistema foram caracterizadas como uniformemente exponencialmente estáveis. Exemplos acadêmicos ilustraram a validade da teoria e seus resultados foram comparados com outros da literatura. Em termos teóricos, os resultados obtidos podem futuramente ser generalizados para:

- Sistemas afins com saltos;
- Sistemas afins variantes no tempo;
- Adoção de métricas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de desempenho;
- Sistemas afins não lineares.

# Referências

- ALLERHAND, L. I.; SHAKED, U. Robust state-dependent switching of linear systems with dwell-Time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 58, n. 4, p. 994–1001, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 54.
- ARTAXO, P. G.; SOUZA, M.; FIORAVANTI, A. R. State-dependent switching control for impulsive switched systems with dwell times. *International Journal of Control*, p. 1–15, 2023. Citado na página 14.
- BAILO-CAMARA, M.; GUALOUS, H.; GUSTIN, F.; BERTHON, A. Design and new control of DC/DC converters to share energy between supercapacitors and batteries in hybrid vehicles. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, v. 57, n. 5, p. 2721–2735, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 38.
- BERNARDO, M. d.; CHAMPNEYS, A. R.; BUDD, C. J.; KOWALCZYK, P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. 1 ed.. ed. [S.l.]: Springer, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 41.
- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. [S.l.]: Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 46, 52 e 68.
- CALLISTER, W. *Materials Science and Engineering: An Introduction*. 7th.. ed. [S.l.]: John Wiley Sons, 2007. Citado na página 42.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. Variable structure control design of switched systems with an application to a DC–DC power converter. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, set. 2009. Citado na página 13.
- CHEN, C. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. Citado na página 35.
- CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1955. Citado na página 21.
- COHN, D. L. *Measure Theory*. [S.l.]: Springer, 1980. Citado na página 72.
- DARRIGOL, O. *From Newton to Chaos: Modern Techniques for Understanding the Classical Universe*. [S.l.]: Oxford University Press, 2005. Citado na página 26.
- DEAECTO, G. S.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Suboptimal switching control consistency analysis for discrete-time switched linear systems. *Eur. J. Control*, v. 19, p. 214–219, 2013. Citado na página 13.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 62, n. 8, p. 4058–4065, ago. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 61.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design to DC–DC converters. *IET Control Theory Appl.*, v. 04, p. 1201–1210, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 13, 43, 45 e 58.

- EGIDIO, L. N.; DEAECTO, G. S. Novel Practical Stability Conditions for Discrete-Time Switched Affine Systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 64, n. 11, nov. 2019. Citado 4 vezes nas páginas 13, 33, 43 e 56.
- ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIĆ, D. *Fundamentals of Power Electronics*. 3ed.. ed. [S.l.]: Springer, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- FILIPPOV, A. Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side. *Journal on Control*, p. 609–621, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 34.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 55.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 17, 26, 28, 29, 32, 33, 48 e 50.
- LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. [S.l.]: Birkhauser, 2003. Citado na página 13.
- MYKLESTAD, N. O. *Fundamentals of Vibration Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 2018. Citado na página 42.
- OGATA, K. *Modern Control Engineering*. 5th.. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. Citado na página 41.
- PAPACHRISTODOULOU, A.; ANDERSON J., V.; G., P.; S., S.; P., P.; P., P.; M., M.; JAGT, D. Sum of squares optimization toolbox for MATLAB. 2013. Disponível em: <arXiv:1310.4716.http://arxiv.org/abs/1310.4716>. Citado na página 54.
- SOUZA, M.; DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Selftriggered linear quadratic networked control. *Optimal Control Applications and Methods*, v. 35, n. 5, p. 524–538, 2014. Citado na página 13.
- SOUZA, M.; FIORAVANTI, A. R.; CORLESS, M.; SHORTEN, R. N. Switching controller design with dwell-times and sampling. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 62, n. 11, p. 5837–5843, nov. 2017. Citado na página 13.
- SOUZA, M.; FIORAVANTI, A. R.; SHORTEN, R. N. Dwell-time control of continuous-time switched linear systems. In *Proceedings of the 53rd IEEE conference on decision and control*, p. 4661–4666, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 48.
- SUN, Z.; GE, S. S. *Switched Linear Systems: Control and Design*. [S.l.]: Springer, 2005. Citado na página 13.
- SÜTŐ, Z.; NAGY, I. Nonlinear dynamics and three-phase voltage source converters: Review. *Proceedings of the 16th international conference on electrical drives and power electronics (EDPE)*, 09 2007. Citado na página 39.
- VIANA, M.; ESPINAR, J. *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice*. 1 ed.. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 19 e 26.
- XU, X.; ZHAI, G. Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 50, n. 11, p. 1897–1903, nov. 2005. Citado na página 36.

# APÊNDICE A – Resultados Auxiliares em Análise Matricial

Este apêndice é dedicado aos resultados presentes na literatura em análise matricial que são utilizados para o desenvolvimento da dissertação. Os resultados foram retirados de (BOYD *et al.*, 1994).

## A.1 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma desigualdade matricial linear é dada por:

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (\text{A.1})$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é a variável e  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são funções matriciais simétricas, com  $i = 0, \dots, m$ . Note que, pela desigualdade,  $F(x)$  é definida positiva; caso a desigualdade seja não estrita, então  $F(x)$  será semi-definida positiva. Portanto, a *LMI* é um conjunto convexo de restrições para a variável  $x$ , i.e.,  $x = \{x | F(x)\}$ ; tal que este é equivalente a um conjunto de  $n$  desigualdades polinomiais, i.e., os menores principais líderes de  $F(x)$  devem ser positivos.

Um dos resultados essenciais utilizados para a convexificação de desigualdades matriciais é o lema do complemento de Schur, que será enunciado no lema a seguir. Porém, para provar tal lema, se faz necessário provar a congruência de matrizes.

**Lema A.1 (Congruência de Matrizes)** *Duas matrizes simétricas  $Q, R \in \mathbb{S}^n$  são congruentes se existir  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não singular tal que  $Q = P^T R P$ . Se  $Q$  e  $R$  são congruentes, então  $Q > 0$  se, e somente se,  $R > 0$ .*

**Prova** Seja  $R > 0$ , então  $\forall x \neq 0$  é válido que  $x^T R x > 0$ , por definição. Considere  $y = P^{-1}x$ , tal que  $x^T R x = y^T P^T R P y = y^T Q y > 0$  é válido  $\forall y \neq 0$ . O que implica que  $Q > 0$ . Note que a volta é análoga.  $\square$

Assim, segue a enunciação e prova do lema do complemento de Schur.

**Lema A.2 (Complemento de Schur)** *Dadas as dimensões  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , cada um dos conjuntos definidos pelas desigualdades matriciais:*

$$\mathbb{S}_1 = \{X \in \mathbb{S}_+^n, Z \in \mathbb{S}_+^m, Y \in \mathbb{R}^{n \times m} : Z > Y^T X^{-1} Y\} \quad (\text{A.2})$$

ou

$$\mathbb{S}_2 = \{X \in \mathbb{S}_+^n, Z \in \mathbb{S}_+^m, Y \in \mathbb{R}^{n \times m} : X > YZ^{-1}Y^T\} \quad (\text{A.3})$$

e equivalente ao conjunto descrito por:

$$\mathbb{S}_c = \left\{ X \in \mathbb{S}_+^n, Z \in \mathbb{S}_+^m, Y \in \mathbb{R}^{n \times m} : \begin{bmatrix} X & Y \\ \star & Z \end{bmatrix} > 0 \right\}. \quad (\text{A.4})$$

**Prova** Nesta demonstração apenas será provado que  $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_c$ , uma vez que a demonstração do segundo caso é análoga. Para tanto, basta observar que a identidade:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \star & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y^T X^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ \star & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

com  $S = Z - Y^T X^{-1}Y$  é válida. Logo, por congruência, a desigualdade que define  $\mathbb{S}_c$  é válida, se, e somente se,  $X > 0$  e  $S > 0$  e, portanto, disto decorre que  $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_c$ .  $\square$

Outro resultados utilizado que fornece condições sob as quais uma desigualdade quadrática particular é uma consequência de outra desigualdade quadrática é o *S-procedure*, que está enunciado no lema a seguir.

**Lema A.3 (*S-procedure*)** Considere funções quadráticas  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$F_i(x) = x^T A_i x + 2b_i^T x + c_i, \quad i = 0, \dots, p, \quad (\text{A.6})$$

em que  $A_i = A_i^T$ . E, dada a seguinte condição:

$$F_0(x) \geq 0, \quad \forall x, \quad (\text{A.7})$$

tal que  $F(x)_{i \in \{0\}} \geq 0$ . Assim, se existirem  $\tau_i \in \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$F_0(x) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(x) \geq 0, \quad (\text{A.8})$$

então, (A.7) é válida.

**Prova** Assuma que (A.8) é válido para algum  $\tau_i \geq 0$ . Logo, para todo  $x$ , tal que  $F_{i \in \{0\}}(x) \geq 0$ , segue que:

$$F_0(x) \geq \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(x) \geq 0, \quad (\text{A.9})$$

mostrando que  $F_0(x) \geq 0$  também é válido.  $\square$

É um fato não trivial que, quando  $p = 1$ , o converso é válido, dado que existe um  $x_0$  tal que  $F_1(x_0) \geq 0$ .

O problema de aproximação de algum subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  como um elipsoide surge em diversos contextos. Para dissertação em questão, esta técnica é um passo essencial para a prova de estabilidade de sistemas afins chaveados quando se considera restrições de tempo de permanência. A estratégia utilizada formula o problema de aproximação externa, que será apresentada a seguir.

Um elipsoide  $\mathcal{E}$  pode ser representado como:

$$\mathcal{E} = \{x | T(x) \leq 0\}, \quad T = x^T A x + 2b^T x + c, \quad (\text{A.10})$$

em que  $A = A^T > 0$  e  $b^T A^{-1} b - c > 0$  (o que assegure que  $\mathcal{E}$  é um conjunto não vazio e não reduz a um único ponto). Se volume é dado por:

$$\text{vol}(\mathcal{E}) = \sqrt{\beta \det((b^T A^{-1} b - c) A^{-1})}, \quad (\text{A.11})$$

com  $\beta$  sendo uma constante dependente da dimensão. Também é possível representá-lo como a imagem da bola unitária sobre uma transformação afim com matriz simétrica semi-definida positiva:

$$\mathcal{E} = \{x | (x - x_c)^T P^{-2} (x - x_c)\} = \{Pz + x_c | \|z\| \leq 1\}, \quad (\text{A.12})$$

em que  $P = P^T > 0$ . Note que esta representação é única e o volume do elipsoide será proporcional a  $\det(P)$ . Assim, é possível converter entre as duas representações apresentadas. Tal que de (A.10) para (A.12), tem-se:

$$P = \sqrt{b^T A^{-1} b - c} A^{-1/2}, \quad x_c = -A^{-1} b. \quad (\text{A.13})$$

E, analogamente, de (A.12) para (A.10), tem-se:

$$A = P^{-2}, \quad b = -P^{-2} x_c, \quad c = x_c^T P^{-2} x_c - 1. \quad (\text{A.14})$$

Portanto, a aproximação externa consiste em buscar o menor elipsoide  $\mathcal{E}_0$  tal que cobre a união de  $p$  elipsoides, ou seja:

$$\mathcal{E}_0 \supseteq \bigcup_{i=1}^p \mathcal{E}_i, \quad (\text{A.15})$$

que será equivalente ao seguinte problema de otimização.

**Lema A.4 (Aproximação elispoidal externa)** *Dados  $p$  elipsoides  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p$ . Se, e somente se, existirem escalares não negativos  $\tau_i \in \mathbb{R}_+$ , tal que sejam solução para o problema:*

$$\inf_{A_0} \quad \log \det A_0^{-1}, \quad (\text{A.16})$$

$$\text{sujeito à} \quad A_0 > 0, \quad (\text{A.17})$$

então, o elipsoide  $\mathcal{E}_0$  cobrirá a união dos  $p$  elipsoides.

**Prova** Considere um elipsoide  $\mathcal{E}_0$  com variáveis  $A_0$ ,  $b_0$  e  $c_0$ , tal que (A.15) é válido. Isto só é verdade se, e somente se, para cada  $i$ , todo  $x$  tal que  $T_i(x) \leq 0$  satisfaz  $T_0(x) \leq 0$ . Por *S-procedure* isto é verdade se, e somente se, existirem escalares não negativos  $\tau_i \in \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$T_0(x) - \tau_i T_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.18})$$

Ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} A_0 & b_0 \\ b_0^T & c_0 \end{bmatrix} - \tau_i \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ b_i^T & c_i \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.19})$$

Como a representação elipsoidal é homogênea, é possível adotar uma normalização conveniente, considerando  $c_0 = b_0^T A^{-1} b_0 - 1$ . Assim:

$$\begin{bmatrix} A_0 & b_0 \\ b_0^T & b_0^T A^{-1} b_0 - 1 \end{bmatrix} - \tau_i \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ b_i^T & c_i \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.20})$$

Então, aplicando o lema de Schur, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} A_0 & b_0 & 0 \\ b_0^T & -1 & b_0^T \\ 0 & b_0 & -A_0 \end{bmatrix} - \tau_i \begin{bmatrix} A_i & b_i & 0 \\ b_i^T & c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.21})$$

Portanto, a desigualdade será válida quando  $A_0 > 0$ , e o menor elipsoide pode ser obtido minimizando seu volume. Dado que foi adotada uma normalização, o volume do elipsoide normalizado será proporcional a  $\text{vol}(\mathcal{E}_0) = \sqrt{\det(A_0^{-1})}$ . Para convexificar o volume basta aplicar a função logarítmica, o que leva ao problema de otimização (A.16).  $\square$

# APÊNDICE B – Resultados Auxiliares em Análise Real

Este apêndice é dedicado aos resultados presentes na literatura em análise real que são utilizados para o desenvolvimento da dissertação. Os resultados foram retirados de (COHN, 1980).

## B.1 Teoria da Medida

**Definição B.1 ( $\sigma$ -Álgebra)** *Seja  $X$  um conjunto qualquer. A coleção de subconjunto de  $X$ , denominada conjunto de potência  $\mathcal{P}(X)$ , é uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  em  $X$  se satisfaz as seguintes propriedades:*

- $x \in \mathcal{A}$ ;
- para cada conjunto  $A$  que pertence a  $\mathcal{A}$  o conjunto  $A^c$  pertence a  $\mathcal{A}$ ;
- para cada sequência infinita  $\{A_i\}$  dos conjuntos que pertencem a  $\mathcal{A}$  o conjunto  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  pertence a  $\mathcal{A}$ ;
- para cada sequência infinita  $\{A_i\}$  dos conjuntos que pertencem a  $\mathcal{A}$  o conjunto  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  pertence a  $\mathcal{A}$ .

Então, a  $\sigma$ -álgebra em  $X$  é a família de subconjuntos de  $X$  que contém  $X$  e é fechada pelo complementar, pela formação de uniões enumeráveis, e pela formação de intersecções enumeráveis. Além disso, a menor  $\sigma$ -álgebra em  $X$  para uma dada família de subconjuntos  $\mathcal{F}$  que inclui  $\mathcal{F}$  é única e é dita  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{F}$ , denotada por  $\sigma(\mathcal{F})$ .

Em particular, a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\mathbb{R}^n$  é gerada pela coleção dos subconjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$ , e é denotada por  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Para o caso em que  $n = 1$ , usualmente se escreve  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Definição B.2 (Função Mensurável)** *Seja  $X$  um conjunto, e seja  $\mathcal{A}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada em  $X$ . Uma função  $\mu$  em que o domínio é a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  e que os valores pertencem a meia reta estendida  $[0, +\infty]$  é dita aditivamente contável, ou  $\sigma$ -aditiva, se:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad (\text{B.1})$$



para cada sequência infinita de conjuntos disjuntos  $\{A_i\}$  pertencentes a  $\mathcal{A}$ . Uma medida em  $\mathcal{A}$  é uma função  $\mu : [0, +\infty]$  que satisfaz  $\mu(\emptyset) = 0$  e é  $\sigma$ -**aditiva**.

**Definição B.3 (Medida de Lebesgue Exterior)** Para cada subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  seja  $\mathcal{C}_A$  o conjunto de todas as sequências infinitas  $\{(a_i, b_i)\}$  de intervalos abertos limitados tais que  $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ . Então,  $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$  é definida deixando  $\lambda^*(A)$  ser o ínfimo do seguinte conjunto:

$$\left\{ \sum_i (b_i - a_i) : \{(a_i, b_i)\} \in \mathcal{C}_A \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Note que este conjunto de somas é não vazio, e que o ínfimo do conjunto consistindo de  $+\infty$  é apenas  $+\infty$ . A restrição da medida de Lebesgue exterior para  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  (ou  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ) é chamada de medida de Lebesgue, e é denotada por  $\lambda$ .

A medida externa de Lebesgue associa a cada subintervalo de  $\mathbb{R}$  seu tamanho, e cada subintervalo de  $\mathbb{R}^n$  seu volume. Ainda, pode-se provar que tal medida é invariante por translações.

**Definição B.4 (Função Lebesgue Mensurável)** Seja  $(X, \mathcal{A})$  um espaço mensurável, e seja  $\mathcal{A}$  os subconjuntos de  $X$  que pertencem a  $\mathcal{A}$ . Uma função  $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$  é dita mensurável com respeito a  $\mathcal{A}$  se satisfaz a seguinte relação:

para cada número real  $t$  o conjunto  $\{x \in A : f(x) \leq t\}$  pertence a  $\mathcal{A}$ .

No caso em que  $X = \mathbb{R}^n$  a função é dita mensurável com respeito a  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , ou apenas Borel mensurável. É claro que toda função Borel mensurável em  $\mathbb{R}^n$  é Lebesgue mensurável. Funções Lebesgue mensuráveis formam a classe de funções para as quais a integração de Lebesgue está bem definida.