UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JOÃO PEDRO SHIMIZU RODRIGUES

Teoria de Rough Paths: Abordagem Determinística à Análise Estocástica

Campinas

2025

João Pedro Shimizu Rodrigues

Teoria de Rough Paths: Abordagem Determinística à Análise Estocástica

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Paulo Regis Caron Ruffino

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno João Pedro Shimizu Rodrigues e orientada pelo Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino.

Campinas

2025

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R618t Rodrigues, João Pedro Shimizu, 2000-
Teoria de rough paths : abordagem determinística à análise estocástica / João Pedro Shimizu Rodrigues. – Campinas, SP : [s.n.], 2025.

Orientador: Paulo Regis Caron Ruffino.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria de rough path. 2. Análise estocástica. 3. Integral de Young. 4. Equações diferenciais. I. Ruffino, Paulo Regis Caron, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações complementares

Título em outro idioma: Rough path theory : a deterministic approach to stochastic analysis
Palavras-chave em inglês:
Rough path theory
Stochastic analysis
Young integral
Differential equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Paulo Regis Caron Ruffino [Orientador]
Pedro Jose Catuogno
Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa
Data de defesa: 26-03-2025
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)
Não se aplica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0005-8691-7155
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/7046763640057483

Dissertação de Mestrado defendida em 26 de março de 2025 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. Dr. PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof. Dr. PEDRO JOSE CATUOGNO

Prof. Dr. ALEXANDRE DO NASCIMENTO OLIVEIRA SOUSA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

À minha família, principalmente meus pais Marcelo e Ione, que fizeram de mim quem sou, além de ter me dado o prazer de tê-los em minha vida.

À todos os professores, a quem devo tudo o que hoje sei, em especial ao professor Paulo Ruffino, que me orientou tanto dentro quanto fora do meio acadêmico, e ao professor Pedro Catuogno, que me guiou pela literatura e me ajudou com as questões mais difíceis da teoria, além de se tornarem grandes companheiros ao longo desses últimos semestres. Agradeço também a participação do professor doutor Alexandre do Nascimento, que dispôs de seu tempo para participar da banca e avaliar o texto.

Aos meus colegas de turma que me ajudaram a resolver os inúmeros problemas que sozinho não teria achado solução.

À todos meus amigos que me deram suporte e motivação nos melhores e nos piores momentos nestes últimos anos.

À todos os funcionários da UNICAMP, que fizeram dela um lugar acolhedor.

Agradeço à todos que me ajudaram e a todos que me ajudarão ao longo desta jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Resumo

Esta dissertação apresenta uma introdução à teoria de rough paths. O objetivo principal é desenvolver um método alternativo à análise estocástica. Para isso, trabalharemos com uma noção de integral que estende a teoria de Young, permitindo, assim, o estudo das propriedades de equações diferenciais associadas a essa nova abordagem. Com as ferramentas obtidas podemos utilizá-las sobre processos estocásticos.

Palavras-chave: Rough paths. Análise estocástica. Integral de Young. Equações diferenciais.

Abstract

This text is an introduction to the theory of rough paths. The objective here is to develop an alternative method to stochastic analysis. To achieve this, we will work on a new notion of integral that extends the oung's theory, thus allowing the study of properties of differential equations associated with this new approach. Once obtained, we can use these tools over stochastic processes.

Keywords: Rough paths. Stochastic analysis. Young integral. Differential equations.

Lista de símbolos

$\lVert\cdot\rVert_\alpha$	Norma α-Hölder
C^n	Espaço de funções n-continuamente diferenciáveis
C_b^n	Espaço de funções n-continuamente diferenciáveis como todas as derivadas limitadas
$\lVert f\rVert_{C_b^n}$	Norma definida por $\lVert f\rVert_\infty + \lVert Df\rVert_\infty + \cdots + \lVert D^n f\rVert_\infty$
$\mathcal{C}^\alpha$	Espaço de funções α-Hölder
$\mathcal{C}_2^\alpha$	Espaço de funções α-Hölder de dois parâmetros
L^p	Espaço de funções p-integráveis
$\mathscr{C}^\alpha$	Espaço de α-rough paths
$\mathscr{C}_g^\alpha$	Espaço de α-rough paths fracamente geométricos
$\mathscr{C}_g^{0,\alpha}$	Espaço de α-rough paths geométricos
$\mathscr{C}_r^\alpha$	Espaço de α-rough paths reduzidos
$\Delta_{0,T}$	Simplexo definido por $\{(s,t) \in [0,T]^2 : s < t\}$
$\lvert\lvert\lvert\mathbf{X}\rvert\rvert\rvert_\alpha$	Semi-norma homogênea do espaço $\mathscr{C}^\alpha$ definida por $\lVert X\rVert_\alpha + \sqrt{\lVert\mathbb{X}\rVert_{2\alpha}}$
$\rho_\alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y})$	Pseudo-métrica não-homogênea definida por $\lVert X - Y\rVert_\alpha + \lVert\mathbb{X} - \mathbb{Y}\rVert_{2\alpha}$
$\mathscr{D}_X^{2\alpha}$	Espaço de α-rough paths controlados por X
$\lVert Y, Y'\rVert_{X,2\alpha}$	Semi-norma em $\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ definida por $\lVert Y'\rVert_\alpha + \lVert R^Y\rVert_{2\alpha}$
$d_{X,\tilde{X},2\alpha}$	Operador que codifica a distância entre rough paths controlados por X e $\tilde{X}$ definido por $\lVert Y - \tilde{Y}\rVert_\alpha + \left\lVert R^Y - R^{\tilde{Y}}\right\rVert_{2\alpha}$
$[M]$	Variação quadrática
$\langle M, N\rangle$	Covariação quadrática
$[\mathbf{X}]$	Colchete de um rough path reduzido

Sumário

Introdução

Um Pouco de História e Motivação Para o Estudo

Historicamente, a análise de equações diferenciais tem se mostrado de grande valor, pois, além de ser um tópico fascinante, também possui aplicação direta em diversas outras áreas do conhecimento. Tradicionalmente, uma equação diferencial é da forma

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t))\frac{d}{dt}x(t)$$

para $x(t)$ um caminho continuamente diferenciável e $f : \mathbb{R}^e \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^d\right)$ um mapa suficientemente regular. Inúmeros resultados formam um catálogo extenso para a teoria.

Com o advento da integral de Riemann-Stieltjes, conseguimos falar de equações diferenciais dirigidas por caminhos menos regulares (com variação limitada). Agora, para $X : [0, T] \to V$ e $f : W \to \mathcal{L}(V, W)$, dizemos que $Y : [0, T] \to W$ é solução da equação diferencial (no sentido Riemann-Stieltjes)

$$\begin{cases} dY = f(Y)dX, \\ Y_0 = y_0, \end{cases}$$

se, para todo t em $[0, T]$

$$Y_t = y_0 + \int_0^t f(Y_r)dX_r.$$

Problemas aparecem quando estudamos o Teorema da Continuidade de Kolmogorov. Com ele, temos a garantia da existência do Movimento Browniano B. No entanto, obtemos que os caminhos de B são quase sempre α-Hölder para todo $\alpha \in (1/3, 1/2)$. O que claramente foge do escopo da teoria riemanniana.

Com isso em mente, o texto visa abordar as teorias que ajudaram a diminuir ainda mais a regularidade requerida para este tipo de equação. A primeira delas seria a desenvolvida por Young. Nesta podemos trabalhar com equações dirigidas por um caminho com regularidade $\alpha \in (1/2, 1]$. Embora extremamente útil, ainda é insuficiente para uma aplicação em análise estocástica. E a principal teoria abordada no texto que é a de rough paths. Nela podemos abaixar nosso α para $(1/3, 1/2]$, de modo que esta possa ser aplicada para os caminhos do Movimento Browniano.

No que segue, o texto será principalmente baseado no livro *A Course on Rough Paths: With an Introduction to Regularity Structures* de Martin Hairer e Peter K. Friz (ver [FH20]), sempre usando as notas de aula de Andrew L. Allan (ver [All]) como apoio.

Notações Frequentemente Usadas

Neste texto, embora não seja necessário, para todos os resultados considere $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ como espaços de Banach reais com dimensão finita. Em muitos casos podemos considerar a dimensão infinita, de modo que a demonstração não se altere, mas como nosso objetivo final são os resultados estocásticos, não há necessidade para nos preocuparmos com espaços muito abstratos.

Ainda no contexto acima, trabalharemos bastante com o espaço de transformações lineares, onde a norma associada será sempre a de operador, dado $T \in \mathcal{L}(V, W)$, escrevemos

$$\|T\|_{op} := \sup_{v \in V : \|v\|_V = 1} \|Tv\|_W = \sup_{v \in V} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}.$$

Outro espaço importante será o produto tensorial. Se $\{e_i\}$ e $\{f_j\}$ bases ortonormais de V e W, então para $x = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_i \otimes f_j$ defina a norma do tensor por

$$|x| = \sqrt{\sum_{i,j} \alpha_{i,j}^2}$$

veja que se $x = v \otimes w$, então $|x| = \|v\|_V \|w\|_W$. Embora a norma dependa da base escolhida, esta escolha não será relevante ao longo do texto.

Em $V \otimes V$, defina θ como a única transformação linear tal que $\theta(v \otimes w) = w \otimes v$ para todo $v, w \in V$. Então defina respectivamente os espaços simétrico e antissimétrico por

$$Sym^2(V) = \{x \in V \otimes V : \theta(x) = x\} \text{ e } Anti^2(V) = \{x \in V \otimes V : \theta(x) = -x\}$$

veja que para todo $x \in V \otimes V$ temos

$$x = \frac{x + \theta(x)}{2} + \frac{x - \theta(x)}{2} \in Sym^2(V) + Anti^2(V).$$

Como $x \in Sym^2(V) \cap Anti^2(V)$ temos $x = \theta(x) = -x \implies x = 0$, então

$$V \otimes V = Sym^2(V) \oplus Anti^2(V).$$

Além disso denotamos as projeções por

$$Sym(x) = \frac{x + \theta(x)}{2} \text{ e } Anti(x) = \frac{x - \theta(x)}{2}.$$

Se a função $f : V \to W$ é n vezes continuamente diferenciável, dizemos que $f \in C^n(V, W)$, se além disso temos

$$\|f\|_{C_b^n} := \max\{\|f\|_\infty, \|Df\|_\infty, \cdots, \|D^n f\|_\infty\} < \infty$$

escrevemos $f \in C_b^n(V, W)$. Peço apenas que o leitor preste atenção para o caso de $n = 1$, escrevemos C^1 para funções continuamente diferenciáveis e $\mathcal{C}^{\text{lip}}$ ou $\mathcal{C}^1$ para funções 1-Hölder.

Neste texto escrevemos $f(x) = O(|x|)$, se existe constante C tal que $|f(x)| \leqslant C|x|$ para todo $x \leqslant 1$, formalmente conhecido como notação *big O*. Da mesma forma, escrevemos $f(x) = o(x)$ se para toda constante C existe $\delta > 0$ tal que para todo $|x| < \delta$ temos a desigualdade $|f(x)| < C|x|$.

Trabalharemos com muitas estimativas do tipo $f(x) \leqslant Cg(x)$, então por simplicidade, peço para que o leitor considere sem perda de generalidade sempre que $C \geqslant 1$, a menos que seja dito o contrário. Neste mesmo contexto muitas vezes a constante C será dependente de alguma variável, se por exemplo $f(x) \leqslant (1+T^{\alpha})g(x) \leqslant Cg(x)$, então representamos a dependência por $C = C(\alpha, T)$. Por último, se $f(x) \leqslant Cg(x)$ dizemos que $C = C(T)$ pode ser tomado uniformemente sobre $T \leqslant a$ se existe constante C' tal que para todo $T \leqslant a$ a seguinte desigualdade vale $f(x) \leqslant C'g(x)$.

Em muitas demonstrações precisaremos de partições da reta, para $s < t$ dizemos que uma partição π denotará tanto o conjunto finito $\{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = t\}$, como também será usado para denotar a família de intervalos $\{[t_i, t_{i+1}] : i = 0, \cdots, N-1\}$. E neste caso escrevemos $\pi \in \mathcal{D}([s,t])$. Além disso, dizemos que o *calibre* de uma partição é $|\pi| := \max_i (t_{i+1} - t_i)$. Em muitos casos trabalharemos com caminhos $X : [0,T] \to V$ e escrevemos a diferença em dois pontos como $X_{s,t} := X_t - X_s$ para $s, t \in [0,T]$. Por último escrevemos $\lim\limits_{|\pi| \to 0} \sum\limits_{[u,v] \in \pi} f(u,v) = a$, se para toda sequência de partições $(\pi_n) \subset \mathcal{D}([s,t])$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} |\pi_n| = 0$, temos que $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{[u,v] \in \pi_n} f(u,v) = a$.

1 Conceitos Básicos

Neste capítulo serão apresentadas as principais definições e conceitos que utilizaremos ao longo do texto. Nosso principal objetivo aqui é desenvolver uma teoria capaz de integrar caminhos que, para a teoria de Young, não são suficientemente regulares. Para isso precisamos noção de regularidade bem definida, que no nosso caso será a norma α-Hölder, e de representantes (suficientemente regulares) desses caminhos irregulares, estes serão os rough paths.

1.1 Regularidade Hölder

Todos os resultados serão baseados na regularidade Hölder, então embora simples, essa seção será de grande importância. Uma observação é que muitos (se não todos) resultados podem ser adaptados para p-variação, tomando os devidos cuidados com respeito à condição de continuidade.

Definição 1.1. Seja $(V, |\cdot|_V)$ e $(W, |\cdot|_W)$ espaços de Banach reais e $f : V \to W$ uma função. Se

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x\neq y \in V} \frac{|f(y)-f(x)|_W}{|y-x|_V^\alpha} < \infty$$

para $\alpha \in [0, +\infty)$ dizemos que f é α-Hölder e escrevemos $f \in \mathcal{C}^\alpha(V, W)$.

Observação 1.2. Se $\alpha > 0$, é imediato que f é contínua. Dado $\varepsilon > 0$ se tomarmos $\delta = (\|f\|_\alpha^{-1} \varepsilon)^{1/\alpha}$

$$|y-x| < \delta \implies |f(y)-f(x)| \leqslant \|f\|_\alpha |y-x|^\alpha < \|f\|_\alpha \delta^\alpha = \varepsilon.$$

No caso de $\alpha = 1$ recuperamos a noção de função Lipschitz. Para $\alpha > 1$ e $X : [0,T] \to \mathbb{R}$, suponha $\|X\|_\alpha = M < \infty$. A partir de agora, para $s, t \in [0,T]$ denote $X_t - X_s$ por $X_{s,t}$. Dado $0 \leqslant s < t \leqslant T$ considere a partição $\pi := \left\{t_k := kN^{-1}(t-s) + s : k = 0, \cdots N-1\right\} \in \mathcal{D}([s,t])$, então

$$|X_{s,t}| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |X_{t_k, t_{k+1}}| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} M|t_{k+1}-t_k|^\alpha \leqslant MN((t-s)/N)^\alpha = M(t-s)^\alpha N^{1-\alpha}.$$

Como a estimativa vale para todo N temos $|X_{s,t}| = 0$, isto é, X é constante.

Observação 1.3. Para $\alpha < \beta$ e $X : [0,T] \to V$, vale a desigualdade

$$\|X\|_\alpha = \sup_{s\neq t \in [0,T]} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} = \sup_{s\neq t\in[0,T]} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\beta} \frac{1}{|t-s|^{\alpha-\beta}} \leqslant \|X\|_\beta T^{\beta-\alpha},$$

em outras palavras temos $\mathcal{C}^\beta \subset \mathcal{C}^\alpha$.

Vamos ver que a inclusão acima é de fato estrita.

Exemplo 1.4. Considere $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $X_t = t^\alpha$, para algum $\alpha \in (0,1)$, observe que para todo $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ como $0 < 1 - s/t < 1$, temos $|1 - s/t|^\alpha \geqslant |1 - s/t|$ e $|1 - (s/t)^\alpha| < |1 - (s/t)|$, então

$$\frac{|t^\alpha - s^\alpha|}{|t-s|^\alpha} = \frac{|1-(s/t)^\alpha|}{|1-(s/t)|^\alpha} \leqslant \frac{|1-s/t|}{|1-s/t|} = 1 \implies \|X\|_\alpha \leqslant 1.$$

Se $s = 0$, é fácil ver que $\dfrac{|t^\alpha - 0^\alpha|}{|t-0|^\alpha} = 1$, então $\|X\|_\alpha = 1$. A conta acima mostra que $X \in \mathcal{C}^\alpha$, mas veja que para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{|t^\alpha - 0|}{|t-0|^{\alpha+\varepsilon}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^\varepsilon} = +\infty,$$

isto é, $X \notin \mathcal{C}^{\alpha+\varepsilon}$.

Observação 1.5. Seja $f \in \mathcal{C}^\alpha(V,W)$ e $g \in \mathcal{C}^\beta(W,U)$, então para todo $x \neq y$

$$|f \circ g(y) - f \circ g(x)| \leqslant \|f\|_\alpha |g(y) - g(x)|^\alpha \leqslant \|f\|_\alpha \|g\|_\beta^\alpha |y-x|^{\alpha\beta} \Rightarrow \|f \circ g\|_{\alpha\beta} \leqslant \|f\|_\alpha \|g\|_\beta^\alpha$$

isto é, $f \circ g \in \mathcal{C}^{\alpha\beta}(U,V)$. Mais do que isso, esta inclusão é ótima, no sentido que não podemos garantir que a composição pertença à $\mathcal{C}^\gamma$ para algum $\gamma > \alpha\beta$. Utilizando o exemplo passado para criar um contra exemplo, considere $f(t) = t^\alpha$ e $g(t) = t^\beta$, então $f \circ g(t) = t^{\alpha\beta}$, isto é $f \circ g \in \mathcal{C}^{\alpha\beta} \backslash \mathcal{C}^\gamma$.

Agora será apresentado um lema que será utilizado no Teorema de Lyons referente à integrais rough, além disso é um resultado interessante sobre o comportamento local de funções α-Hölder.

Lema 1.6. *Seja $\alpha \in (0,1]$, $h > 0$ e $Z : [0,T] \to V$ um caminho tal que*

$$\|Z\|_{\alpha,h} := \sup_{s<t : |t-s| \leqslant h} \frac{|Z_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leqslant M$$

Então

$$\|Z\|_\alpha \leqslant M\left(1 \vee 2h^{\alpha-1}T^{1-\alpha}\right).$$

Demonstração. Vamos mostrar que $\dfrac{|Z_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$ é menor ou igual a $M\left(1 \vee 2h^{\alpha-1}T^{1-\alpha}\right)$. O caso $|t-s| \leqslant h$ é imediato por hipótese. Suponha então que $h \geqslant |t-s|$, defina $t_i = (s+hi) \wedge t$ para $i = 0, \cdots, N$. Veja que $\dfrac{|t-s|}{h} \leqslant N \leqslant 1 + \dfrac{|t-s|}{h}$ e $t_{i+1} - t_i \leqslant h$ para todo i. Então

$$\begin{aligned}
|Z_{s,t}| &\leqslant \sum_{i=0}^{N-1} |Z_{t_i,t_{i+1}}| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} M|t_{i+1} - t_i|^\alpha \\
&\leqslant NMh^\alpha \leqslant h^\alpha M\left(1 + \frac{|t-s|}{h}\right) \\
&= h^{\alpha-1}M(h + |t-s|) \leqslant 2h^{\alpha-1}M|t-s|.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|Z\|_{\alpha} \leqslant M\left(1 \vee 2h^{\alpha-1}T^{1-\alpha}\right).$$

■

1.2 Rough Paths

Como queremos desenvolver uma teoria determinística da análise estocástica, estamos preocupados especialmente com uma regularidade que inclua o Movimento Browniano. O Teorema da Continuidade de Kolmogorov, assegura que um Movimento Browniano é quase sempre α-Hölder para todo $\alpha \in (1/3, 1/2)$. E como a teoria de Young cobre o caso $\alpha \in (1/2, 1]$, nos limitaremos a estudar o caso de $\alpha \in (1/3, 1/2]$.

Outra observação é que como quase todos os resultados mais importantes do texto requerem compacidade, nos limitaremos a caminhos definidos em intervalos fechados. Mas nada nos impede que a definição seja sobre domínios ilimitados.

Definição 1.7. Sejam $\alpha \in (1/3, 1/2]$, $X : [0,T] \to V$ e $\mathbb{X} : [0,T]^2 \to V \otimes V$, então o par $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ é um *α-Hölder rough path* se:

i) $\|X\|_{\alpha} < \infty$ e $\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} := \sup\limits_{s \neq t \in [0,T]} \dfrac{\|\mathbb{X}_{s,t}\|_{V^{\otimes 2}}}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty$;

ii) (Relação de Chen) $\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}$ para todo $s, u, t \in [0,T]$.

Escrevemos então $\mathscr{C}^{\alpha}([0,T], V)$ como o espaço de α-rough paths em V. Dizemos que $\mathbb{X}$ é o *levantamento* de X.

Notação 1.8. Como veremos na próxima observação as vezes nos ajuda em pensar o levantamento com o domínio em um *simplexo* denotado por

$$\Delta_{0,T} = \left\{(s,t) \in [0,T]^2 : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\right\}.$$

Observação 1.9. Veja que, tendo em vista a Relação de Chen, de imediato já podemos inferir algumas propriedades do nosso levantamento.

a) Primeiramente como para todo $t \in [0,T]$ temos $X_{t,t} = 0$ então

$$\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + \mathbb{X}_{t,t} + X_{s,t} \otimes X_{t,t} \implies \mathbb{X}_{t,t} = 0.$$

b) Outra propriedade é que embora o domínio seja $[0,T]^2$, $\mathbb{X}$ é unicamente determinado por seu valor sobre $\Delta_{0,T}$, pois

$$\mathbb{X}_{t,t} = \mathbb{X}_{t,s} + \mathbb{X}_{s,t} + X_{t,s} \otimes X_{s,t}$$

como $\mathbb{X}_{t,t} = 0$ e $X_{s,t} = -X_{t,s}$

$$\mathbb{X}_{t,s} = -\mathbb{X}_{s,t} + X_{s,t} \otimes X_{s,t}.$$

c) Mais do que isso, basta sabermos os valores de $t \mapsto (X_t, \mathbb{X}_{0,t})$, pois

$$\mathbb{X}_{0,t} = \mathbb{X}_{0,s} + \mathbb{X}_{s,t} + X_{0,s} \otimes X_{s,t} \implies \mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{0,t} - \mathbb{X}_{0,s} - X_{0,s} \otimes X_{s,t}.$$

Neste sentido, um rough path $\mathbf{X}_t := (X_t, \mathbb{X}_{0,t})$ é de fato um caminho em $V \oplus (V \otimes V)$.

Observação 1.10. Seja $(X, \mathbb{X})$ um α-rough path e $F : [0,T] \to V \otimes V$ uma função de classe $\mathcal{C}^{2\alpha}$. Se $\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} := \mathbb{X}_{s,t} + F_{s,t}$, então a dupla $(X, \tilde{\mathbb{X}})$ caracteriza um α-rough path. As condições de regularidade são imediatas. E a Relação de Chen é conferida com uma conta rápida

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} &= \mathbb{X}_{s,t} + F_{s,t} \\
&= \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t} + F_{s,u} + F_{u,t} \\
&= \tilde{\mathbb{X}}_{s,u} + \tilde{\mathbb{X}}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}.
\end{aligned}$$

Alternativamente considere $(X, \mathbb{X})$ e $(X, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$. Defina $G := \mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}$, aplicando a Relação de Chen

$$\begin{aligned}
G_{s,t} &= \mathbb{X}_{s,t} - \tilde{\mathbb{X}}_{s,t} \\
&= \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t} - \tilde{\mathbb{X}}_{s,u} - \tilde{\mathbb{X}}_{u,t} - X_{s,u} \otimes X_{u,t} \\
&= G_{s,u} + G_{u,t}.
\end{aligned}$$

Em particular $G_{s,t} = G_{0,t} - G_{0,s}$, que significa que G representa incrementos de um caminho $t \mapsto G_{0,t}$.

Obtemos então uma relação biunívoca, o que essencialmente significa que para todo α-rough path $(X, \mathbb{X})$ o levantamento $\mathbb{X}$ determina todos os levantamentos possíveis, a menos da soma de incrementos de um caminho $F \in \mathcal{C}^{2\alpha}$. De imediato vemos que o levantamento nunca será único.

Embora no geral uma noção de levantamento canônico não esteja bem definida, para caminhos mais regulares temos uma escolha natural.

Definição 1.11. Dado um caminho X de regularidade Lipschitz, sabemos que $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], V)$ para todo $\alpha \in (1/3, 1/2]$. Definimos o *levantamento canônico* como

$$\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r,$$

onde a integral em questão é a de Riemann-Stieltjes.

Observação 1.12. Com relação ao tensor dentro da integral veja que

$$\left(\int_s^t Y_r \otimes dX_r \right)^{i,j} = \left(\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \pi} Y_\xi \otimes X_{u,v} \right)^{i,j} = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \pi} Y_\xi^i \otimes X_{u,v}^j = \int_s^t Y_r^i dX_r^j.$$

Vamos mostrar que o levantamento canônico de fato induz um rough path.

Observe que o objeto acima satisfaz a condição de regularidade, pois

$$\begin{aligned}
|\mathbb{X}_{s,t}| &= \left|\int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r\right| = \left|\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} X_{s,u} \otimes X_{u,v}\right| \\
&\leqslant \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} |X_{s,u} \otimes X_{u,v}| = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} |X_{s,u}|\,|X_{u,v}| \\
&\leqslant \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \|X_{s,\cdot}\|_\infty \|X\|_{\text{lip}} |v-u| \leqslant 2\|X\|_\infty \|X\|_{\text{lip}} |t-s| \\
&\implies \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} < \infty,
\end{aligned}$$

isto é, $\mathbb{X} \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ para todo $\alpha \in (1/3, 1/2]$. E a Relação de Chen vale, uma vez que

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}_{s,t} &= \int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r \\
&= \int_s^t X_r \otimes dX_r - \int_s^t X_s \otimes dX_r \\
&= \int_s^t X_r \otimes dX_r - X_s \otimes X_{s,t} - X_u \otimes X_{u,t} + X_u \otimes X_{u,t} \\
&= \int_s^u X_r \otimes dX_r + \int_u^t X_r \otimes dX_r - X_s \otimes X_{s,u} - X_u \otimes X_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t} \\
&= \int_s^u X_{s,r} \otimes dX_r + \int_u^t X_{u,r} \otimes dX_r + X_{s,u} \otimes X_{u,t} \\
&=: \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.13. Em $\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ podemos definir a semi-norma $|||\mathbf{X}|||_\alpha := \|X\|_\alpha + \sqrt{\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}}$. Esta norma é dita *homogênea*, no sentido que dado o operador dilatação associado à $\lambda \in \mathbb{R}$ dado por $\delta_\lambda(X,\mathbb{X}) := (\lambda X, \lambda^2 \mathbb{X})$ temos que $|||\delta_\lambda(\mathbf{X})|||_\alpha = \lambda |||\mathbf{X}|||_\alpha$.

Veja que para todo para $(X,\mathbb{X})$, onde X e $\mathbb{X}$ são constantes temos que a $|||(X,\mathbb{X})|||_\alpha = 0$, então $|||\cdot|||_\alpha$ é apenas uma semi-norma.

Definição 1.14. Dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ definimos a pseudo-métrica não-homogênea

$$\rho_\alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \|X - Y\|_\alpha + \|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\|_{2\alpha}.$$

1.3 Rough Paths Geométricos

Como queremos desenvolver uma teoria de integração, queremos que de alguma forma ela se assemelhe com o cálculo de primeira ordem. Lembre-se que para $X : [0,T] \to V$, $Y : [0,T] \to \mathcal{L}(V,W)$ dois caminhos de regularidade Lipschitz e $\pi \in \mathcal{D}([s,t])$ uma partição qualquer para $0 \leqslant s < t \leqslant T$, então

$$\begin{aligned}\sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} + \sum_{[u,v]\in\pi} Y_{u,v} X_v &= \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} + Y_{u,v} X_v \\ &= \sum_{[u,v]\in\pi} Y_v X_v - Y_u X_u \\ &= (YX)_{s,t}.\end{aligned}$$

Aplicando o limite sobre qualquer sequência de partições tal que $|\pi_n| \to 0$ temos a propriedade

$$\int_s^t Y_r dX_r + \int_s^t dY_r X_r = Y_t X_t - Y_s X_s,$$

comumente conhecida como *integração por partes*. Com ela em mente, veja que o levantamento canônico $\mathbb{X}$ é tal que

$$\begin{aligned}2Sym(\mathbb{X}_{s,t})^{i,j} &:= \mathbb{X}^{i,j}_{s,t} + \mathbb{X}^{j,i}_{s,t} \\ &= \int_s^t X^i_{s,r} dX^j_r + \int_s^t X^j_{s,r} dX^i_r \\ &= \int_s^t X^i_r dX^j_r + \int_s^t X^j_r dX^i_r - X^i_s X^j_{s,t} - X^j_s X^i_{s,t} \\ &= X^i_t X^j_t - X^i_s X^j_s - X^i_s X^j_{s,t} - X^j_s X^i_{s,t} \\ &= X^i_{s,t} X^j_{s,t}.\end{aligned}$$

Este cálculo motiva as seguintes definições.

Definição 1.15. Seja $\alpha \in (1/3, 1/2]$ e $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$. Se

$$Sym(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t},$$

dizemos que $\mathbf{X}$ é *fracamente geométrico* e escrevemos $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha_g([0,T], V)$.

Definição 1.16. Dado $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ um α-rough path. Se existe sequência $\mathbf{X}^n = (X^n, \mathbb{X}^n) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ tal que

i) X^n é continuamente diferenciável por partes;

ii) $\mathbb{X}^n$ é o levantamento canônico;

iii) $\rho_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X}^n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Dizemos que $\mathbf{X}$ é *geométrico* e escrevemos $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{0,\alpha}_g([0,T], V)$.

Observação 1.17. De imediato, como toda função continuamente diferenciável satisfaz a integração por partes, sabemos que todo α-rough path geométrico é fracamente geométrico. Além disso é possível observar que para todo $1/3 < \alpha < \beta \leqslant 1/2$

$$\mathscr{C}^\beta_g([0,T], V) \subset \mathscr{C}^{0,\alpha}_g([0,T], V) \subset \mathscr{C}^\alpha_g([0,T], V),$$

onde a inclusão é estrita e podemos considerar V com dimensão infinita. Caso o leitor se interesse sobre, recomendo a leitura de [GNS22].

1.4 Rough Paths em Grupos de Lie

Embora os objetos acima já estejam bem definidos, pode ser interessante entender os rough paths como caminhos em certos espaços algébricos. O objetivo principal desta seção é demonstrar como a teoria especializada para o caso $\alpha \in (1/3, 1/2]$ está de acordo com a teoria geral.

Definição 1.18. Dado V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (no nosso caso de dimensão finita), definimos a *álgebra tensorial truncada* de V, como o espaço

$$T^2(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V)$$

munido do produto

$$(a, b, c) \otimes (\alpha, \beta, \gamma) = (a\alpha, a\beta + \alpha b, a\gamma + b \otimes \beta + \gamma c).$$

Escrevemos também $T^2_n(V) = \{(a, b, c) \in T^2(V) : a = n\}$.

Observação 1.19. Entendemos então um α-rough path como $\mathbf{X}_{s,t} = (1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) \in T^2_1(V)$, de modo que a Relação de Chen se encaixe perfeitamente com a definição do produto

$$\mathbf{X}_{s,u} \otimes \mathbf{X}_{u,t} = (1, X_{s,u} + X_{u,t}, \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}) = (1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = \mathbf{X}_{s,t}.$$

Observação 1.20. Dado $(1, b, c) \in T^2_1(V)$

$$(1, b, c) \otimes (1, -b, b \otimes b - c) = (1, -b, b \otimes b - c) \otimes (1, b, c) = (1, 0, 0)$$

e como $(1, 0, 0)$ é o elemento neutro de $T^2_1(V)$ temos que $(1, b, c)^{-1} = (1, -b, b \otimes b - c)$, portanto $T^2_1(V)$ é um grupo.

Definição 1.21. Em $T^2_1(V)$ podemos definir a norma

$$|||\mathbf{X}||| = \frac{1}{2}\left(N(\mathbf{X}) + N(\mathbf{X}^{-1})\right), \quad \text{onde} \quad N(1, b, c) = \max\left\{|b|, \sqrt{2|c|}\right\}.$$

E portanto a distância

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left|\left|\left|\mathbf{X}^{-1} \otimes \mathbf{Y}\right|\right|\right|.$$

Proposição 1.22. *i) Se $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0, T], V)$, então o caminho*

$$t \mapsto \mathbf{X}_t = (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t}) \in T^2_1(V)$$

é α-Hölder com respeito à métrica d;

ii) Se $t \mapsto \mathbf{X}_t$ é α-Hölder, então $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, onde $(1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t$.

Demonstração. i) Dado $0 \leqslant s < t \leqslant T$, veja que

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t &= (1, -X_{0,s}, X_{0,s} \otimes X_{0,s} - \mathbb{X}_{0,s}) \otimes (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t}) \\
&= (1, X_{0,t} - X_{0,s}, X_{0,s} \otimes X_{0,s} - \mathbb{X}_{0,s} - X_{0,s} \otimes X_{0,t} + \mathbb{X}_{0,t}) \\
&= (1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{0,t} - \mathbb{X}_{0,s} - X_{0,s} - \otimes X_{s,t}) \\
&= (1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = \mathbf{X}_{s,t}
\end{aligned}$$

onde na última passagem foi utilizada a Relação de Chen. Com uma conta rápida vemos que

$$\left(\mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t\right)^{-1} = (1, -X_{s,t}, X_{s,t} \otimes X_{s,t} - \mathbb{X}_{s,t})$$

como

$$|X_{s,t}| \leqslant \|X\|_\alpha |t-s|^\alpha, \quad |X_{s,t} \otimes X_{s,t}| \leqslant \|X\|_\alpha^2 |t-s|^{2\alpha} \quad \text{e} \quad |\mathbb{X}_{s,t}| \leqslant \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}$$

temos que $N\left(\mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t\right), N\left(\mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t\right)^{-1} \leqslant C|t-s|^\alpha$, isto é,

$$\frac{d(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_t)}{|t-s|^\alpha} \leqslant C.$$

Concluindo que $\mathbf{X}$ é de fato α-Hölder.

ii) É imediato que se $\mathbf{X}$ for α-Hölder então X e $\mathbb{X}$ possuem a regularidade desejada, pois

$$\frac{1}{2} N(1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) \leqslant |||(1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})||| = \left|\left|\left|\mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t\right|\right|\right| \leqslant \|\mathbf{X}\|_\alpha |t-s|^\alpha$$

então,

$$|X_{s,t}| \leqslant 2\|\mathbf{X}\|_\alpha |t-s|^\alpha \quad \text{e} \quad |X_{s,t}| \leqslant 2\|\mathbf{X}\|_\alpha^2 |t-s|^{2\alpha}.$$

Por último a Relação de Chen é obtida pelo produto

$$\begin{aligned}
(1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) &= \mathbb{X}_s^{-1} \otimes \mathbb{X}_t = \mathbb{X}_s^{-1} \otimes \mathbb{X}_u \otimes \mathbb{X}_u^{-1} \otimes \mathbb{X}_t \\
&= (1, X_{s,u}, \mathbb{X}_{s,u}) \otimes (1, X_{u,t}, \mathbb{X}_{u,t}) \\
&= (1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}).
\end{aligned}$$

Portanto $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$.

■

Definição 1.23. Definimos também três operadores importantes:

i) $log(1, b, c) = \left(0, b, c - \frac{1}{2} b \otimes b\right)$;

ii) $exp(0,b,c) = \left(1, b, c + \frac{1}{2} b \otimes b\right)$;

iii) (Colchete de Lie) Para $b, y \in V$, definimos $[b,y] = b \otimes y - y \otimes b \in V \otimes V$.

Observação 1.24. Como uma conta rápida conseguimos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\begin{aligned}
exp(0,b,c) \otimes exp(0,y,z) &= \left(1, b, c + \frac{1}{2} b \otimes b\right) \otimes \left(1, y, z + \frac{1}{2} y \otimes y\right) \\
&= \left(1, b + y, z + \frac{1}{2} y \otimes y + c + \frac{1}{2} b \otimes b + b \otimes y\right) \\
&= \left(1, b + y, c + z + \frac{1}{2}\left(y \otimes y + b \otimes b + 2b \otimes y + y \otimes b - y \otimes b\right)\right) \\
&= \left(1, b + y, c + z + \frac{1}{2}[b,y] + \frac{1}{2}(b+y) \otimes (b+y)\right) \\
&= exp\left(0, b + y, c + z + \frac{1}{2}[b,y]\right)
\end{aligned}$$

Definição 1.25. Para $[V,V]$ denotando o fecho do conjunto $\text{span}_{\mathbb{R}}\{[v,w] \in V \otimes V : v, w \in V\}$ definimos a álgebra de lie

$$\mathfrak{g}^2(V) = V \oplus [V,V] \subset T_0^2(V).$$

E definimos também o grupo de lie

$$G^2(V) = exp\left(\mathfrak{g}^2(V)\right) \subset T_1^2(V).$$

Observação 1.26. Como nesse texto só serão trabalhados espaços de dimensão finita temos que $[V,V] = Anti(V \otimes V)$. Seja $\theta : V \otimes V \to V \otimes V$ a aplicação linear tal que $\theta(v \otimes w) = w \otimes v$ para todo $v, w \in V$. Veja que para todo $[v,w] \in [V,V]$ temos $\theta([v,w]) = \theta(v \otimes w - w \otimes v) = w \otimes v - v \otimes w = -[v,w]$, isto é, $[v,w] \in Anti(V \otimes V)$. Alternativamente, se $x \in Anti(V \otimes V)$ então $x = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}[e_i, e_j] \in [V,V]$.

Observação 1.27. Veja que $G^2(V)$ é de fato um grupo, pois $exp(0,0,0) = (1,0,0)$ é o elemento neutro. Dado $(0,y,z) \in V \oplus (V \otimes V)$, temos

$$exp(0,y,z) \otimes exp(0,-y,-z) = exp\left(0, y - y, z - z + \frac{1}{2}[y,-y]\right) = (1,0,0)$$

obtemos o mesmo resultado para $exp(0,-y,-z) \otimes exp(0,y,z)$. Apenas resta mostrar que $G^2(V)$ é fechado pelo produto, mas é imediato da formula que calculamos. Dados $b, y \in V$ e $c, z \in [V,V]$, temos

$$exp(0,b,c) \otimes exp(0,y,z) = exp\left(0, b + y, c + z - \frac{1}{2}[b,y]\right) \in exp(V \oplus [V,V])$$

Proposição 1.28. *i) Se $(X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$, então o caminho*

$$t \mapsto \mathbf{X}_t = (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t})$$

está em $G^2(V)$.

ii) Se $t \mapsto \mathbf{X}_t \in G^2(V)$ é α-Hölder, então $(X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$, onde $(1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t$.

Demonstração. Em ambos os casos a regularidade já foi conferida na Proposição (1.22)

i) Como $Sym(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}$ temos que $\mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} \in Anti(V \otimes V) = [V,V]$, com isso em mente, veja que

$$\mathbf{X}_t = (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t}) = exp\left(0, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t} - \frac{1}{2} X_{0,t} \otimes X_{0,t}\right) \in exp(V \oplus [V,V]) = G^2(V)$$

ii) Alternativamente,

$$exp\left(0, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}\right) = (1, X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t \in exp(V \oplus [V,V])),$$

como o operador exp é injetor $\mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t} \in Anti(V \otimes V)$ o que significa que $Sym(\mathbb{X}_{s,t}) = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}$, concluindo assim que $(X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T],V)$. ■

Com essa proposição podemos definir um dos objetos mais importantes da teoria de rough paths generalizada. Mesmo que em nosso texto ele não seja utilizado, escolho introduzi-lo caso o leitor se interesse pela análise de caminhos mais irregulares ($\alpha < 1/3$).

Definição 1.29. Para $N \in \mathbb{N}$, $s < t \in [0,T]$ e $x \in \mathcal{C}^{\text{lip}}([0,T],V)$. Definimos o mapa *assinatura* (de ordem N) como $S^N(x)_{s,t} \in \bigoplus_{i=0}^{N} V^{\otimes i}$, onde a k-ésima casa é dada por

$$S^N(x)_{s,t}^k = \int_s^t \int_s^{r_k} \cdots \int_s^{r_2} dx_{r_1} \otimes dx_{r_2} \otimes \cdots \otimes dx_{r_k}.$$

Observação 1.30. Como no nosso texto nos limitaremos a $N = 2$, temos uma forma explícita para a assinatura, dada por

$$S^2(x)_{s,t} = \left(1, x_{s,t}, \int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r\right).$$

Além disso a Proposição (1.28) nos diz que $S^2(\cdot)_{s,t} : \mathcal{C}^{\text{lip}}([s,t],V) \to G^2(V)$.

O que nos motiva para uma última definição, a norma de Carnot-Carathéodory. Novamente, um objeto crucial para análise de caminhos de menor regularidade, porém para nós não será importante.

Definição 1.31. Dado $g \in G^2(V)$, escrevemos a norma de *Carnot-Carathéodory* como

$$\|g\|_C := \inf \left\{ \int_0^1 |d\gamma_r| : \gamma \in \mathcal{C}^{\text{lip}}([0,1], V) \text{ e } S^2(\gamma)_{0,1} = g \right\}$$

Por fim, opto por não trazer com grandes detalhes estes resultados para o texto, mas conseguimos obter uma caracterização interessante para os rough paths fracamente geométricos. Caso o leitor se interesse, recomendo a leitura dos Apêndices (A.1) e (A.2). Além disso o capítulo 7 e 8 de [FV10] está muito bem escrito desenvolve de maneira extensa esse caráter algébrico da teoria.

2 Movimento Browniano como Rough Path

Como no capítulo passado definimos rough paths como caminhos, de forma trivial podemos estender a definição para processos estocásticos apenas adicionando o aspecto probabilístico sobre os caminhos. O objetivo deste capítulo então é apresentar a noção de movimento Browniano como rough path e garantir que este objeto existe e está bem definido.

2.1 Critério de Kolmogorov

Antes de tudo, temos uma definição natural.

Definição 2.1. Seja $(\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e uma família

$$\{\mathbf{X}(\omega) = (X(\omega), \mathbb{X}(\omega)) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V) : \omega \in \Omega\},$$

então dizemos que $\mathbf{X}.(\,\cdot\,)$ é um α-rough path aleatório.

Assim como o movimento Browniano tradicional, precisamos de um teorema análogo ao Critério de Kolmogorov para garantir a existência de um movimento Browniano como rough path.

Teorema 2.2 (Critério de Kolmogorov)**.** *Seja $\mathbf{X} := (X, \mathbb{X})$ um α-rough path aleatório, onde $q \geqslant 2$, $\beta > \dfrac{1}{q}$ e C constante tal que para todo $s, t \in [0,T]$ temos*

$$\|X_{s,t}\|_{L^q} \leqslant C|t-s|^\beta \quad e \quad \|\mathbb{X}_{s,t}\|_{L^{q/2}} \leqslant C|t-s|^{2\beta}, \tag{2.1}$$

Então para todo $\alpha \in [0, \beta - 1/q)$ existe uma modificação $\tilde{\mathbf{X}} := (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})$ de $\mathbf{X}$ e variáveis aleatórias $K_\alpha \in L^q$ e $\mathbb{K}_\alpha \in L^{q/2}$ dependendo de α tais que para todo $s, t \in [0,T]$:

$$|\tilde{X}_{s,t}(\omega)| \leqslant K_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha \quad e \quad |\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}(\omega)| \leqslant \mathbb{K}_\alpha(\omega)|t-s|^{2\alpha}.$$

Em particular, se $\beta - 1/q > 1/3$ temos que para todo α em $(1/3, \beta - 1/q)$ a modificação $\tilde{\mathbf{X}}$ em um α-rough path aleatório.

Demonstração. Vamos assumir sem perda de generalidade que $T = 1$, defina a sequência de partições diádicas $\pi_n := \{k2^{-n}; k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ e as variáveis aleatórias

$$K_n := \max_{t \in \pi_n} |X_{t,t+2^{-n}}| \quad e \quad \mathbb{K}_n := \max_{t \in \pi_n} |\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|.$$

Então

$$\mathbb{E}[K_n^q] \leqslant \mathbb{E}\sum_{t\in\pi_n}|X_{t,t+2^{-n}}|^q \leqslant \frac{1}{|\pi_n|}C^q|\pi_n|^{\beta q} = C^q 2^{-n(\beta q-1)}$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{K}_n^{\frac{q}{2}}] \leqslant \mathbb{E}\sum_{t\in\pi_n}|\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|^{\frac{q}{2}} \leqslant \frac{1}{|\pi_n|}C^{\frac{q}{2}}|\pi_n|^{2\beta\frac{q}{2}} = C^{\frac{q}{2}}2^{-n(\beta q-1)},$$

onde a segunda desigualdade de cada linha é uma aplicação direta da hipótese (2.1).

Fixe $s < t \in \pi := \bigcup_{n=0}^{\infty}\pi_n$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\pi_{m+1}| < t-s \leqslant |\pi_m|$. Então $[s,t)$ pode ser escrito como união disjunta de intervalos com extremos em $\bigcup_{n>m}\pi_n$, onde temos no máximos 2 intervalos no mesmo π_n. Podemos definir a partição $s < \tau_1 < \cdots < \tau_N = t$ tal que $\tau_i \in \bigcup_{n>m}\pi_n$.

Segue que

$$|X_{s,t}| \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant N}|X_{s,\tau_{i+1}}| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1}|X_{\tau_i,\tau_{i+1}}| \leqslant 2\sum_{n\geqslant m+1}K_n$$
$$|\mathbb{X}_{s,t}| = \left|\sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}} + X_{s,\tau_i}\otimes X_{\tau_i,\tau_{i+1}}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1}\left(|\mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}}| + |X_{s,\tau_i}||X_{\tau_i,\tau_{i+1}}|\right)$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1}|\mathbb{X}_{\tau_i,\tau_{i+1}}| + \max_{0\leqslant i<N}|X_{s,\tau_i}|\sum_{j=0}^{N-1}|X_{\tau_i,\tau_{i+1}}|$$
$$\leqslant 2\sum_{n\geqslant m+1}\mathbb{K}_n + \left(2\sum_{n\geqslant m+1}K_n\right)^2.$$

A partir daí, usando que $|t-s| > |\pi_{n+1}|$, temos a estimativa α-Hölder

$$\frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leqslant \sum_{n\geqslant m+1}\frac{1}{|\pi_{n+1}|^\alpha}2K_n \leqslant \sum_{n>m+1}\frac{2K_n}{|\pi_n|^\alpha} \leqslant K_\alpha := 2\sum_{n\geqslant 0}\frac{K_n}{|\pi_n|^\alpha}.$$

Com K_α definido podemos avaliar sua norma

$$\|K_\alpha\|_{L^q} = \left\|2\sum_{n\geqslant 0}\frac{K_n}{|\pi_n|^\alpha}\right\|_{L^q} \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{|\pi_n|^\alpha}|\mathbb{E}[K_n^q]|^{1/q} \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\frac{2C}{|\pi_n|^\alpha}|\pi_n|^{\beta-1/q} = \sum_{n\geqslant 0}2C\,2^{n(\alpha-\beta+1/q)},$$

onde na segunda desigualdade usamos novamente a hipótese (2.1). Como $\alpha < \beta - 1/q$ temos que a norma é finita, isto é, $K_\alpha \in L^q$.

Da mesma forma temos

$$\frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} \leqslant \sum_{n\geqslant m+1}\frac{2\mathbb{K}_n}{|\pi_{n+1}|^{2\alpha}} + \left(\sum_{n\geqslant m+1}\frac{2K_n}{|\pi_{n+1}|^\alpha}\right)^2 \leqslant \mathbb{K}_\alpha + K_\alpha^2$$

aqui $\mathbb{K}_\alpha := 2\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathbb{K}_n}{|\pi_n|^{2\alpha}}$, então

$$\|\mathbb{K}_\alpha\|_{L^{q/2}} \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\frac{2}{|\pi_n|^{2\alpha}}|\mathbb{E}\mathbb{K}_n^{q/2}|^{2/q} \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\frac{2C}{|\pi_n|^{2\alpha}}|\pi_n|^{2\beta-2/q} \leqslant \sum_{n\geqslant 0}2C\,2^{2n(\alpha-\beta+1/q)},$$

onde na segunda desigualdade usamos mais uma vez a hipótese (2.1). E como $\alpha-\beta+1/q<0$ temos que a norma é finita, isto é, $\mathbb{K}_\alpha \in L^{q/2}$. Em particular esse argumento nos da que $\|X\|_\alpha$, $\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} < \infty$ quase sempre.

Agora vamos estender o argumento para todo $[0,1]$. Para cada $t \in [0,1]$ tome uma sequência $(t_k) \subset \pi$ tal que $t_k \to t$. Como X e α-Hölder em π defina $\tilde{X}_t := \lim_{k\to\infty} X_{t_k}$. Pelo Lema de Fatou temos

$$\|\tilde{X}_t - X_t\|_{L^q} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|X_{t_k} - X_t\|_{L^q} \leqslant \liminf_{k\to\infty} C|t-t_k|^\beta = 0,$$

então $\tilde{X}_t = X_t$ quase sempre, isto é, $\tilde{X}$ é de fato uma modificação de X. Além disso, para qualquer $s,t \in [0,1]$ e quaisquer sequências em π tais que $s_k \to s$ e $t_k \to t$ temos

$$|\tilde{X}_{s,t}| = \lim_{k\to\infty} |X_{s_k,t_k}| \leqslant \lim_{k\to\infty} K_\alpha |t_k - s_k|^\alpha = K_\alpha |t-s|^\alpha.$$

Veja que pelo mesmo argumento, se $t=s$ mesmo que (s_k) e (t_k) sejam sequências diferentes $\lim_{k\to\infty} X_{s_k} = \lim_{k\to\infty} X_{t_k}$, o que significa que $\tilde{X}_t$ não depende da escolha de (t_k) que fizemos no início deste parágrafo.

Similarmente, para qualquer par $0 < s \leqslant t < 1$ escolha sequências (s_k) e (t_k) tais que $s_k \nearrow s$ e $t_k \searrow t$ e defina $\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} := \lim_{k\to\infty} \mathbb{X}_{s_k,t_k}$. Usando a Relação de Chen e $s_k \leqslant s \leqslant t \leqslant t_k$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}_{s_k,t_k} &= \mathbb{X}_{s_k,s} + \mathbb{X}_{s,t_k} + X_{s_k,s} \otimes X_{s,t_k} \\
&= \mathbb{X}_{s_k,s} + \mathbb{X}_{s,t} + \mathbb{X}_{t,t_k} + X_{s,t} \otimes X_{t,t_k} + X_{s_k,s} \otimes \mathbb{X}_{s,t_k}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{X}_{s_k,t_k} - \mathbb{X}_{s,t}\|_{L^{q/2}} = \|\mathbb{X}_{s_k,s} + \mathbb{X}_{t,t_k} + X_{s,t} \otimes X_{t,t_k} + X_{s_k,s} \otimes \mathbb{X}_{s,t_k}\|_{L^{q/2}} \\
&\leqslant \|\mathbb{X}_{s_k,s}\|_{L^{q/2}} + \|\mathbb{X}_{t,t_k}\|_{L^{q/2}} + \|X_{s,t}\|_{L^q} \|X_{t,t_k}\|_{L^q} + \|X_{s_k,s}\|_{L^q} \|X_{s,t_k}\|_{L^q} \\
&\leqslant C|s-s_k|^{2\beta} + C|t-t_k|^{2\beta} + C^2|s-t|^\beta |t-t_k|^\beta + C^2 |s_k - s|^\beta |s-t_k|^\beta \\
&\xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Usando o lema de Fatou novamente e a estimativa acima temos

$$\left\|\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,t}\right\|_{L^{q/2}} \leqslant \liminf_{k\to infty} \|\mathbb{X}_{s_k,t_k} - \mathbb{X}_{s,t}\|_{L^{q/2}} = 0,$$

então $\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t}$ quase sempre. Da mesma forma

$$|\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}| = \lim_{k\to\infty} |\mathbb{X}_{s_k,t_k}| \leqslant \lim_{k\to\infty} \mathbb{K}_\alpha |t_k - s_k|^{2\alpha} = \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha}$$

mostrando que $\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}$ não depende da escolha das sequências. ∎

2.2 Movimento Browniano Como Rough Path

Definição 2.3. Dado B um movimento Browniano, definimos os levantamentos

$$\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r \quad e \quad \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes \circ dB_r,$$

onde a primeira integral representa a integral de Itô e a segunda a de Stratonovich.

Proposição 2.4. *Dado B um movimento Browniano e $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B}^{It\hat{o}})$, então para todo α em $(1/3, 1/2)$ temos que $\mathbf{B}$ é um α-rough path aleatório a menos de modificação.*

Demonstração. O resultado sai diretamente do Critério de Kolmogorov (Teorema (2.2)), então basta verificar as hipóteses do teorema.

- Primeiramente, vamos verificar a Relação de Chen

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_{s,u} + \mathbb{B}_{u,t} + B_{s,u} \otimes B_{u,t} &= \mathbb{B}_{s,u} + \mathbb{B}_{u,t} + B_u \otimes B_{u,t} - B_s \otimes B_{u,t} \\
&= \mathbb{B}_{s,u} + \mathbb{B}_{u,t} + \int_u^t B_u \otimes dB_r - \int_s^u B_s \otimes dB_r \\
&= \int_s^u B_{s,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_{u,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_u \otimes dB_r - \int_s^u B_s \otimes dB_r \\
&= \int_s^u B_r \otimes dB_r - \int_s^u B_s \otimes dB_r + \int_u^t B_r \otimes dB_r - \int_s^u B_s \otimes dB_r \\
&= \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r =: \mathbb{B}_{s,t};
\end{aligned}$$

- Norma L^q de $B_{s,t}$,

$$\|B_{s,t}\|_{L^q} = \left\||t-s|^{1/2} B_1\right\|_{L^q} = \|B_1\|_{L^q} |t-s|^{1/2};$$

- Norma $L^{q/2}$ de $\mathbb{B}_{s,t}$, aqui vamos usar a Desigualdade de Burkholder-Davis-Gundy (Teorema (A.3)) para obter nossa estimativa. Para isso, lembre-se que a integral de Itô é martingale e sua variação quadrática é dada por $\left[\int_s^{\cdot} B_{s,r} \otimes dB_r\right]_t = \int_s^t |B_{s,r}|^2 dr$, então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\mathbb{B}_{s,t}|^{q/2}\right] = \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r\right|^{q/2}\right] &\leqslant C_{q/2}\mathbb{E}\left[\left|\int_s^t |B_{s,r}|^2 dr\right|^{q/4}\right] \\
&\leqslant C_{q/2}|t-s|^{q/4}\mathbb{E}\left[\sup_{r\in[s,t]} |B_{s,r}|^{q/2}\right] \leqslant C^2_{q/2}|t-s|^{q/2}
\end{aligned}$$

o que implica que $\|\mathbb{B}_{s,t}\|_{L^{q/2}} \leqslant C_q^{4/q}|t-s|$.

Então com $\beta = 1/2$ e $\forall q \geqslant 2$ as hipóteses do teorema são validas temos que $\mathbf{B} \in \mathscr{C}^\alpha$ (a menos de uma modificação) $\forall \alpha \in [0, 1/2)$. ∎

Observação 2.5. $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ não é geométrico. Utilizando a fórmula de Itô utilizando $\delta_{i,j}$ para denotar a função delta de Dirac, temos

$$f : B_t \in \mathbb{R}^d \mapsto B^i_{s,t} B^j_{s,t} \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} \partial_k f(B_t) = \delta_{i,k} B^j_{s,t} + \delta_{j,k} B^i_{s,t}, \\ \partial^2_{k,l} f(B_t) = \delta_{i,k}\delta_{j,l} + \delta_{j,k}\delta_{i,l}. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} B^i_{s,t} B^j_{s,t} &= 0 + \int_s^t B^i_{s,r} dB^j_r + \int_s^t B^j_{s,r} dB^i_r + \frac{1}{2}\int_s^t d\left[B^i, B^j\right]_r + \frac{1}{2}\int_s^t d\left[B^j, B^i\right]_r \\ &\implies \mathbb{B}^{i,j}_{s,t} + \mathbb{B}^{j,i}_{s,t} = B^i_{s,t} B^j_{s,t} - \left[B^i, B^j\right]_{s,t} = B^i_{s,t} B^j_{s,t} - (t-s)\delta_{i,j} \\ &\implies \operatorname{Sym}\left(\mathbb{B}_{s,t}\right) \neq B_{s,t} \otimes B_{s,t}. \end{aligned}$$

□

Antes de fazermos o mesmo para o levantamento de Stratonovich, lembre se que para N semimartingale contínuo e M semimartigale, temos que vale a seguinte fórmula

$$\int_0^t M_r \circ dN_r = \int_0^t M_r dN_r + \frac{1}{2}\left[M, N\right]_t.$$

Então temos que $\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + \frac{1}{2}[B, B]_{s,t}$, onde

$$([B, B]_{s,t})^{i,j} := [B^i, B^j]_{s,t} = (t-s)\delta_{i,j} e_i \otimes e_j \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d.$$

Proposição 2.6. *Dado B um movimento Browniano e $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B}^{Strat})$, então para todo α em $(1/3, 1/2)$ temos que $\mathbf{B}$ é um α-rough path geométrico a menos de modificação.*

Demonstração.

- Relação de Chen:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} &= \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + \frac{1}{2}[B, B]_{s,t} \\ &= \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,u} + \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,t} + B_{s,u} \otimes B_{u,t} + \frac{1}{2}[B, B]_{s,t} \\ &= \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,u} - \frac{1}{2}[B, B]_{s,u} + \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{u,t} - \frac{1}{2}[B, B]_{u,t} + B_{s,u} \otimes B_{u,t} + \frac{1}{2}[B, B]_{s,t} \\ &= \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,u} + \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{u,t} + B_{s,u} \otimes B_{u,t}; \end{aligned}$$

- Já argumentamos na Proposição (2.4) que B é α-Hölder a menos de modificação;
- Se definimos $\phi : (s,t) \in \Delta_T \mapsto (t-s)\delta_{i,j} e_i \otimes e_j \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, temos que

$$\|\phi\|_{2\alpha} = \sup_{s<t\in[0,T]} \frac{\|\phi_{s,t}\|}{|t-s|^{2\alpha}} \leqslant \sup_{s<t\in[0,T]} (t-s)^{1-2\alpha} \sum_{i=1}^d \|e_i \otimes e_i\| = T^{1-2\alpha} d < \infty$$

  E pela Proposição (2.4) temos que $\mathbb{B}^{\text{Itô}}$ é 2α-Hölder a menos de modificação, temos que $\mathbb{B}^{\text{Strat}} = \mathbb{B}^{\text{Itô}} + \phi$ admite modificação 2α-Hölder;

- Agora para a parte geométrica

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}^{\text{Strat; i,j}} + \mathbb{B}^{\text{Strat; j,i}} &= \mathbb{B}^{\text{Itô; i,j}} + \frac{1}{2}[B^i, B^j]_{s,t} + \mathbb{B}^{\text{Itô; j,i}} + \frac{1}{2}[B^j, B^i]_{s,t} \\
&= \mathbb{B}^{\text{Itô; i,j}} + \mathbb{B}^{\text{Itô; j,i}} + [B^i, B^j]_{s,t} \\
&= B^i_{s,t} B^j_{s,t} - [B^i, B^j]_{s,t} + [B^i, B^j]_{s,t} \\
&= B^i_{s,t} B^j_{s,t} \\
&\implies \operatorname{Sym}\left(\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t}\right) = B_{s,t} \otimes B_{s,t}
\end{aligned}$$

Portanto, com os argumentos acima temos que $\mathbf{B}^{\text{Strat}} \in \mathscr{C}^{\alpha}_{g}$ a menos de modificação. ■

3 Integral Rough

Neste capítulo iremos dar significado à integração sobre rough paths. Para isso, precisaremos de uma ferramenta que garanta a convergência de somas de Riemann suficientemente regulares, além de uma classe de objetos para os quais a noção de integração sobre rough paths seja bem definida. Além disso, será apresentado o Teorema de Gubinelli, que garante a existência da integral. Em seguida, exploraremos diversos resultados que serão de fundamental importância para equações diferenciais.

Nota 3.1. A partir daqui é necessário que o leitor se atente com respeito ao modo como as constantes aparecerem em nossas estimativas. Em particular, precisamos tomar o devido cuidado com relação ao caráter uniforme da dependência sobre $T \leqslant 1$, uma vez que essa propriedade será essencial para a garantia de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais.

3.1 Sewing Lemma

Nesta seção iremos trabalhar uma das principais ferramentas da teoria. O Sewing Lemma, acima de tudo, é uma abstração da noção de integração riemanniana. Intuitivamente, queremos que uma função de dois parâmetros, suficientemente regular, possa ser descrita (a menos de um termo com ordem $1+\varepsilon$) como a diferença dos valores de um caminho. Além disso, a ordem do erro assegura a convergência de somas riemannianas, que em nosso contexto traz uma noção de integral.

Notação 3.2. Seja E Banach, dada uma função definida em um simplexo $\Xi : \Delta_{[0,T]} \to E$, para todo $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t \leqslant T$ escrevemos $\delta\Xi_{s,u,t} := \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t}$.

Teorema 3.3 (Sewing Lemma)**.** *Seja $(E, |\cdot|)$ um espaço Banach e $\Xi : \Delta_{[0,T]} \to E$ um mapa contínuo tal que*

$$|\delta\Xi_{s,u,t}| \leqslant \lambda |t-s|^{1+\varepsilon} \tag{3.1}$$

para constantes $\varepsilon > 0$ e $\lambda \geqslant 0$. Então existe único caminho $\mathcal{I}\Xi : [0,T] \to E$ que satisfaça $\mathcal{I}\Xi_0 = 0$ e

$$|\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leqslant C\lambda |t-s|^{1+\varepsilon} \tag{3.2}$$

para alguma constante $C = C(\varepsilon)$. Além disso,

$$\mathcal{I}\Xi_{s,t} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \Xi_{u,v}. \tag{3.3}$$

Observação 3.4. A Hipótese (3.1) e $\|\delta\Xi\|_{1+\varepsilon} := \sup\limits_{s<u<t} \dfrac{|\delta\Xi_{s,u,t}|}{|t-s|^{1+\varepsilon}} < \infty$ são equivalentes. Em particular podemos tomar $\lambda = \|\delta\Xi\|_{1+\varepsilon}$.

Nota 3.5. A demonstração a seguir foi, em sua maior parte, baseada no texto do Allan (ver [All]), com exceção do argumento que garante a aditividade de I, o qual foi adaptado da ideia apresentada por Denis Fayel presente em [FL06, pg3]. Além disso, utilizaremos a notação de Hairer (ver [FH20]), uma vez que ela comunica melhor a propriedade de continuidade do mapa $\mathcal{I}$.

Demonstração. Em resumo, a prova consistirá em avaliar as somas sobre uma sequência de partições pré estabelecida. Utilizando a completude de E provaremos que a sequência das somas parciais converge. Mostraremos por tanto que este limite define um caminho que satisfaz as Propriedades (3.2) e (3.3).

Dado $(s,t) \in \Delta_{0,T}$, considere $\pi_n := \{t_i^n = s + i2^{-n}(t-s) |\ i = 0, \cdots, 2^n\}$ a sequência de partições diádicas de $[s,t]$, tal que o mesh é $|\pi_n| = 2^{-n}|t-s|$. Defina

$$I_{s,t}^n = \sum_{i=0}^{2^n-1} \Xi_{t_i^n, t_{i+1}^n}.$$

Se u_i^n é o ponto médio do intervalo $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, temos

$$I_{s,t}^n - I_{s,t}^{n+1} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \delta\Xi_{t_i^n, u_i^n, t_{i+1}^n},$$

o que implica

$$\begin{aligned} \left|I_{s,t}^n - I_{s,t}^{n+1}\right| &\leqslant \sum_{i=0}^{2^n-1} \left|\delta\Xi_{t_i^n, u_i^n, t_{i+1}^n}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda \left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|^{1+\varepsilon} \\ &= \lambda|t-s|^{1+\varepsilon} \sum_{i=0}^{2^n-1} 2^{-n(1+\varepsilon)} = \lambda|t-s|^{1+\varepsilon} 2^{-n\varepsilon}. \end{aligned}$$

Com isso temos também que

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left|I_{s,t}^n - I_{s,t}^{n+1}\right| \leqslant \lambda|t-s|^{1+\varepsilon} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n(1+\varepsilon)} = \lambda|t-s|^{1+\varepsilon} \frac{2^{-k\varepsilon}}{1-2^{-\varepsilon}} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

o que em particular mostra que a sequência $\left(I_{s,t}^n\right)$ é Cauchy. Como E é Banach, sabemos que está sequência converge e dizemos que

$$I_{s,t} := \lim_{n\to\infty} I_{s,t}^n.$$

Por eliminação telescópica

$$\left|I_{s,t} - I_{s,t}^k\right| = \left|\sum_{n=k}^{\infty} \left(I_{s,t}^n - I_{s,t}^{n+1}\right)\right| \leqslant \lambda|t-s|^{(1+\varepsilon)} \frac{2^{-k\varepsilon}}{1-2^{\varepsilon}},$$

em particular temos que a convergência é uniforme sobre (s,t). Além disso,

$$|I_{s,t} - \Xi_{s,t}| = \left|I_{s,t} - I_{s,t}^0\right| \leqslant \frac{1}{1-2^{-\varepsilon}} \lambda|t-s|^{1+\varepsilon}, \tag{3.4}$$

que na notação de (3.2) escrevemos $C = \frac{1}{1-2^{-\varepsilon}}$. Como Ξ é contínuo, temos que I^n é contínuo. Isso com conjunto com o fato da convergência ser uniforme, temos que I também é contínuo.

Veja que pela definição I é semi-aditiva, no sentido que para todo u ponto médio de $[s,t]$ temos $I^{n+1}_{s,t} = I^n_{s,u} + I^n_{u,t}$ e quando $n \to \infty$ temos $I_{s,t} = I_{s,u} + I_{u,t}$. Agora queremos estender esta igualdade para todo $u = [s,t]$ que pode ser escrito como $s + \frac{i}{k}(t-s)$ para $k \in \mathbb{N}$ e $i = 0, \cdots, k$. Para isso, vamos provar que I é o único mapa semi-aditivo que satisfaz $|I_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}$ para C uma constante qualquer. Suponha v outro mapa com as propriedades citadas e defina $w_{s,t} = I_{s,t} - v_{s,t}$ tal que $|w_{s,t}| \leqslant |I_{s,t}| + |v_{s,t}| \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}$, usando essa estimativa em conjunto com a semi-aditividade de w temos

$$|w_{s,t}| \leqslant |w_{s,u}| + |w_{u,t}| \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}2^{-\varepsilon}$$

repetindo o argumento iterativamente (tomando novamente os pontos intermediários de cada intervalo) obtemos

$$|w_{s,t}| \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon}2^{-n\varepsilon}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que em particular significa que $w \equiv 0$, ou seja, I é único.

Considere um $k \in N$, então para $c_i = s + \frac{i}{k}(t-s)$ defina

$$v_{s,t} = \sum_{i=0}^{k-1} I_{c_i,c_{i+1}}.$$

Veja que se $k = 2m$, então

$$v_{s,t} = \sum_{i=0}^{m-1} I_{c_i,c_{i+1}} + \sum_{i=m}^{k} I_{c_i,c_{i+1}} = v_{s,u} + v_{u,t},$$

onde a última igualdade obtemos usando a semi-aditividade de I, para que os índices dentro dos somatório se alinhem com o modo que definimos v. Similarmente, se $k = 2m+1$

$$\begin{aligned} v_{s,t} &= \sum_{i=0}^{m-1} I_{c_i,c_{i+1}} + I_{c_m,c_{m+1}} + \sum_{i=m+1}^{k} I_{c_i,c_{i+1}} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} I_{c_i,c_{i+1}} + I_{c_m,u}\right) + \left(I_{u,c_{m+1}} + \sum_{i=m+1}^{k} I_{c_i,c_{i+1}}\right) \\ &= v_{s,u} + v_{u,t}. \end{aligned}$$

Além disso, com uma conta rápida vemos que

$$\left|\Xi_{s,t} - \sum_{i=0}^{k-1} \Xi_{c_i,c_{i+1}}\right| = \left|\sum_{i=0}^{k-1} \delta\Xi_{c_i,c_{i+1},t}\right| \leqslant (k-1)\lambda|t-s|^{1+\varepsilon},$$

então

$$
\begin{aligned}
|v_{s,t} - \Xi_{s,t}| &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} I_{c_i,c_{i+1}} - \Xi_{s,t} \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{i=0}^{k-1} I_{c_i,c_{i+1}} - \sum_{i=0}^{k-1} \Xi_{c_i,c_{i+1}} \right| + \left| \sum_{i=0}^{k-1} \Xi_{c_i,c_{i+1}} - \Xi_{s,t} \right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \left| I_{c_i,c_{i+1}} - \Xi_{c_i,c_{i+1}} \right| + (k-1)\lambda |t-s|^{1+\varepsilon} \\
&\leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon},
\end{aligned}
$$

para algum C constante. Pela unicidade estabelecida, temos que $v \equiv I$. O que mostra que $I_{s,t} = I_{s,u} + I_{u,t}$ para todo u da forma $s + \dfrac{i}{k}(t-s)$. Note que o conjunto de pontos desta forma são densos em $[s,t]$ pela continuidade de I podemos estender essa igualdade para todo $u \in [s,t]$.

Uma vez que temos essa propriedade podemos definir $\mathcal{I}\Xi_t := I_{0,t}$ de modo que $\mathcal{I}\Xi_{s,t} = I_{s,t}$ e $\mathcal{I}\Xi_0 = 0$. E substituindo em (3.4) obtemos (3.2). Veja também que pelo argumento de unicidade de I obtemos a unicidade de $\mathcal{I}\Xi$.

Por último considere qualquer partição $\pi = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\} \in \mathcal{D}([s,t])$ para $(s,t) \in \Delta_{0,T}$, utilizando novamente eliminação telescópica

$$
\begin{aligned}
\left| \mathcal{I}\Xi_{s,t} - \sum_{i=0}^{N-1} \Xi_{t_i,t_{i+1}} \right| &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{I}\Xi_{t_i,t_{i+1}} - \Xi_{t_i,t_{i+1}} \right| \\
&\leqslant \frac{\lambda}{1-2^{-\varepsilon}} \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i| \\
&\leqslant \frac{\lambda}{1-2^{-\varepsilon}} |t-s||\pi|^{\varepsilon},
\end{aligned}
$$

então

$$
\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \pi} \Xi_{u,v} = \mathcal{I}\Xi_{s,t}.
$$

■

Lema 3.6. *Defina $\mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],E)$ como o conjunto de funções $\Xi : \Delta_{0,T} \to E$ tal que $\|\Xi\|_{\alpha,\beta} := \|\Xi\|_\alpha + \|\delta\Xi\|_\beta < \infty$, para $0 < \alpha \leqslant 1 < \beta$. Então o mapa $\mathcal{I} : \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],E) \to \mathcal{C}^\alpha([0,T],E)$ é linear e contínuo.*

Demonstração. Primeiro trataremos da linearidade, veja que para x, $y \in \mathcal{C}_2([0,T],E)$ tais que $\|\delta x\|_\beta$, $\|\delta y\|_\beta < \infty$ e para $\lambda \in \mathbb{R}$ observe que

$$
\begin{aligned}
|\lambda \mathcal{I}x_{s,t} + \mathcal{I}y_{s,t} - \lambda x_{s,t} - y_{s,t}| &\leqslant |\lambda \mathcal{I}x_{s,t} - \lambda x_{s,t}| + |\mathcal{I}y_{s,t} - y_{s,t}| \\
&\leqslant |\lambda| C_1 \|\delta x\|_\beta |t-s|^\beta + C_2 \|\delta y\|_\beta |t-s|^\beta
\end{aligned}
$$

e $\lambda\mathcal{I}x_0 + \mathcal{I}y_0 = 0$. Logo por unicidade temos que $\mathcal{I}(\lambda x + y) = \lambda\mathcal{I}x + \mathcal{I}y$.

Veja que para a linearidade e para o lema não exigimos a regularidade α-Hölder, já para a continuidade precisaremos. É direto por (3.2) que o mapa está de fato bem definido, pois para $\Xi \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],E)$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}\Xi_{s,t}| &\leqslant |\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \Xi_{s,t}| + |\Xi_{s,t}| \\
&\leqslant C\,\|\delta\Xi\|_\beta\,|t-s|^\beta + \|\Xi\|_\alpha\,|t-s|^\alpha \\
&\leqslant \left(CT^{\beta-\alpha}\,\|\delta\Xi\|_\beta + \|\Xi\|_\alpha\right)|t-s|^\alpha.
\end{aligned}$$

Por último considere Ξ, $\Delta \in \mathcal{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T],E)$, então

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \mathcal{I}\Delta_{s,t}| &= |\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \Xi_{s,t} + \Xi_{s,t} + \mathcal{I}\Delta_{s,t} - \Delta_{s,t} + \Delta_{s,t}| \\
&\leqslant |\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \mathcal{I}\Delta_{s,t} - \Xi_{s,t} - \Delta_{s,t}| + |\Xi_{s,t} + \Delta_{s,t}| \\
&\leqslant |\mathcal{I}(\Xi-\Delta)_{s,t} - (\Xi-\Delta)_{s,t}| + |\Xi_{s,t} + \Delta_{s,t}| \\
&\leqslant C_1\,\|\delta\Xi - \delta\Delta\|_\beta\,|t-s|^\beta + \|\Xi-\Delta\|_\alpha\,|t-s|^\alpha,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_1 = C(\beta)$. Então

$$\|\mathcal{I}\Xi - \mathcal{I}\Delta\|_\alpha \leqslant C_1T^{\beta-\alpha}\,\|\delta\Xi - \delta\Delta\|_\beta + \|\Xi-\Delta\|_\alpha \leqslant C\,\|\Xi-\Delta\|_{\alpha,\beta}\,,$$

onde a constante C pode ser tomada como $C_1(1+T^{\beta-\alpha})$. ■

Para ilustrar o poder do Sewing Lemma, iremos demonstrar o Teorema de Young-Loéve. Observe que o teorema que originalmente possui uma demonstração extensa e trabalhosa, agora torna-se um corolário. Para uma abordagem completa do teorema é recomendada a leitura de [FV10, ch6].

Teorema 3.7 (Young-Loéve)**.** *Sejam $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ e $Y \in \mathcal{C}^\beta([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ com α, $\beta \in (0,1]$ e $\alpha+\beta > 1$. Então a integral definida por*

$$\int_0^t Y_r dX_r := \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} \tag{3.5}$$

existe para todo $t \in [0,T]$, onde π são partições tomadas sobre o intervalo $[0,t]$. Além disso temos a estimativa

$$\left|\int_s^t Y_r dX_r - Y_s X_{s,t}\right| \leqslant C\,\|Y\|_\beta\,\|X\|_\alpha\,|t-s|^{\alpha+\beta} \tag{3.6}$$

para todo $(s,t) \in \Delta_{0,T}$ e alguma constante $C := C(\alpha+\beta)$.

Demonstração. Defina $\Xi_{s,t} := Y_s X_{s,t}$, então para todo $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t \leqslant T$ temos

$$\begin{aligned}
\delta\Xi_{s,u,t} &= \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t} \\
&= Y_s X_{s,t} - Y_s X_{s,u} - Y_u X_{u,t} \\
&= Y_s X_{u,t} - Y_u X_{u,t} \\
&= (Y_s - Y_u) X_{u,t} = -Y_{s,u} X_{u,t} \\
\Longrightarrow \ |\delta\Xi_{s,u,t}| &= |Y_{s,u} X_{u,t}| \\
&\leqslant \|Y_{s,u}\|_{op} |X_{u,t}| \\
&\leqslant \|Y\|_\beta |u-s|^\beta \|X\|_\alpha |t-u|^\alpha \\
&\leqslant \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha |t-s|^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha+\beta > 1$ podemos aplicar o Sewing Lemma, que garante a existência de $\int_s^t Y_r dX_r := \mathcal{I}\Xi_{s,t} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v}$. Além disso, aplicando (3.2) com $\lambda = \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha$ obtemos exatamente (3.6). ∎

Agora será apresentado uma estimativa que codifica estabilidade da Integral de Young. Esse próximo resultado será usado no começo do Capítulo 6 para garantir a existência de solução de equações diferenciais no sentido de Young.

Proposição 3.8. *Sejam X, $\tilde{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ e Y, $\tilde{Y} \in \mathcal{C}^\beta([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ para α, $\beta \in (0,1]$ tal que $\alpha+\beta > 1$. Então*

$$\left\| \int_0^\cdot Y_r dX_r - \int_0^\cdot \tilde{Y}_r d\tilde{X}_r \right\|_\alpha \leqslant C \left(\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\beta \right) \|X\|_\alpha + \left(\left|\tilde{Y}_0\right| + \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta \right) \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha \right)$$

para alguma constante $C = C(\alpha,\beta,T)$ que pode ser tomada uniformemente sobre $T \leqslant 1$.

Demonstração. Para $\Xi_{u,v} := Y_u X_{u,v}$ e $\tilde{\Xi}_{u,v} := \tilde{Y}_u \tilde{X}_{u,v}$ definar $\Delta_{u,v} - \Xi_{u,v} - \tilde{\Xi}_{u,v}$, tal que

$$\begin{aligned}
|\delta\Delta_{s,u,t}| &= \left|\delta\Xi_{s,u,t} - \delta\tilde{\Xi}_{s,u,t}\right| = \left|Y_{s,u}X_{u,t} - \tilde{Y}_{s,u}\tilde{X}_{u,t}\right| \\
&\leqslant \left\|Y_{s,u} - \tilde{Y}_{s,u}\right\|_{op} |X_{u,t}| + \left\|\tilde{Y}_{s,u}\right\|_{op} \left|X_{u,t} - \tilde{X}_{u,t}\right| \\
&\leqslant \left(\left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\beta \|X\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha \right) |t-s|^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Sewing Lemma, obtemos $\mathcal{I}\Delta$, a estimativa

$$|\mathcal{I}\Delta_{s,t} - \Delta_{s,t}| \leqslant C_0 \left(\left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\beta \|X\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha \right) |t-s|^{\alpha+\beta}$$

e as somas de Riemann

$$\mathcal{I}\Delta_{s,t} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \Delta_{u,v} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \left(\Xi_{u,v} - \tilde{\Xi}_{u,v}\right) = \int_s^t Y_r dX_r - \int_s^t \tilde{Y}_r d\tilde{X}_r.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\left|Y_s X_{s,t} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t}\right| &\leqslant \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\infty \|X\|_\alpha |t-s|^\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\infty \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha |t-s|^\alpha \\ &\leqslant \left(\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + T^\beta \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\beta\right) \|X\|_\alpha + \left(\left|\tilde{Y}_0\right| + T^\beta \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta\right) \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha\right) |t-s|^\alpha.\end{aligned}$$

Juntando tudo temos

$$\begin{aligned}&\left|\int_s^t Y_r dX_r - \int_s^t \tilde{Y}_r d\tilde{X}_r\right| \leqslant |\mathcal{I}\Delta_{s,t} - \Delta_{s,t}| + |\Delta_{s,t}| \\ &\leqslant C_0 \left(\left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\beta \|X\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha\right) |t-s|^{\alpha+\beta} \\ &+ \left(\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + T^\beta \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\beta\right) \|X\|_\alpha + \left(\left|\tilde{Y}_0\right| + T^\beta \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta\right) \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha\right) |t-s|^\alpha.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\left\|\int_s^t Y_r dX_r - \int_s^t \tilde{Y}_r d\tilde{X}_r\right\|_\alpha \leqslant C \Big(&\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\beta\right) \|X\|_\alpha \\ &+ \left(\left|\tilde{Y}_0\right| + \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta\right) \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha\Big),\end{aligned}$$

onde a constante C pode ser tomada como $(1 + C_0)(1 + T^\beta)$. Observe que C pode ser tomada uniformemente sobre $T \leqslant 1$. ■

3.2 Rough Paths Controlados

Veja que só precisamos definir Ξ de modo que $\delta\Xi_{s,u,t} = O(|t-s|^{1+\varepsilon})$ para assegurar a convergência das somas riemannianas. Mas veja que no caso de Young o que garante a aplicação do Sewing Lemma é o fato de $\alpha + \beta > 1$, então não temos a garantia da existência de integrais do tipo $\int F(X_r)dX_r$ para por exemplo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz e $X \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com $\alpha \leqslant 1/2$. Com o objetivo de estender o alcance de objetos integráveis iremos introduzir um conceito que nos ajudará futuramente com o problema da regularidade.

Definição 3.9. Se $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], V)$ dizemos que $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], W)$ é *controlado* por X se existe $Y' \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], \mathcal{L}(V, W))$ tal que existe um resto R^Y, onde

$$Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}$$

com $\|R^Y\|_{2\alpha} \leqslant \infty$. Então dizemos que o par $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$ é um *rough path controlado* e dizemos que Y' é a *Derivada de Gubinelli* de Y com respeito a X.

Nota 3.10. Em $\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ podemos definir a seminorma

$$\|Y, Y'\|_{X,2\alpha} := \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}.$$

Observação 3.11. Utilizando as estimativas do Lema (3.18) temos que $(F(X), DF(X)) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(V, W))$.

Definição 3.12. Dado $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ e $s < t$ contidos em $[0,T]$ dizemos que a *integral rough* existe se o limite

$$\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r := \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} (Y_u X_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{u,v}), \tag{3.7}$$

existe independente da escolha da sequência de partições $(\pi_n) \in \mathcal{D}([s,t])$ tal que $|\pi_n| \to 0$.

Como estudado anteriormente, sabemos que é suficiente que a soma das regularidades seja maior que 1 para que a Integral de Young exista. No caso de caminhos menos regulares, precisamos de um termo extra que irá atuar como regularizador, aqui no caso temos $Y'_s\mathbb{X}_{s,t}$ para assegurar a convergência.

Teorema 3.13 (Gubinelli)**.** *Seja $T > 0$, seja $\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ para algum $\alpha > 1/3$ e $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$. Então existe $C := C(\alpha)$ tal que*

i) Existe a integral definida em 3.7;

ii) Para todo $s < t \in [0,T]$ temos a estimativa

$$\left|\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t}\right| \leqslant C(\|X\|_\alpha \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha)|t-s|^{3\alpha}; \tag{3.8}$$

iii) O mapa de $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ para $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ dado por $(Y,Y') \mapsto (Z,Z') := \left(\int_0^\cdot Y_r d\mathbf{X}_r, Y\right)$ é mapa linear contínuo entre espaços de Banach e temos a estimativa

$$\|Z,Z'\|_{X,2\alpha} \leqslant \|Y\|_\alpha + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + CT^\alpha(\|X\|_\alpha \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha). \tag{3.9}$$

Demonstração. Nosso objetivo aqui é usar o Sewing Lemma. Para isso, defina $\Xi_{s,t} := Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t}$, veja que

$$\begin{aligned}
\delta\Xi_{s,u,t} &= Y_s X_{s,t} - Y_s X_{s,u} - Y_u X_{u,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,u} - Y'_u \mathbb{X}_{u,t} \\
&= Y_s X_{u,t} - Y_u X_{u,t} + Y'_s(\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u}) - Y'_u \mathbb{X}_{u,t} \\
&= -Y_{s,u} X_{u,t} + Y'_s(\mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}) - Y'_u \mathbb{X}_{u,t} \\
&= -Y_{s,u} X_{u,t} + Y'_s(X_{s,u} \otimes X_{u,t}) - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} \\
&= -(Y_{s,u} - Y'_s X_{s,u}) X_{u,t} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} \\
&= -R^Y_{s,u} X_{u,t} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t},
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade utilizamos a Relação de Chen. Observe também que na quarta igualdade identificamos o operador Y'_s de $\mathcal{L}(V \otimes V, W)$ em $\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V,W))$. Então as hipóteses do Sewing Lemma são verificadas, uma vez que

$$\begin{aligned}
|\delta\Xi_{s,u,t}| &\leqslant \left\|R^Y_{s,u}\right\|_{op} |X_{u,t}| + \left\|Y'_{s,u}\right\|_{op} |\mathbb{X}_{u,t}| \\
&\leqslant \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} |u-s|^{2\alpha} \|X\|_\alpha |t-u|^\alpha + \|Y'\|_\alpha |u-s|^\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} |t-u|^{2\alpha} \\
&\leqslant \left(\left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha} \\
\implies \|\delta\Xi\|_{3\alpha} &\leqslant \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Como resultado, garantimos a existência de $\displaystyle\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r := \mathcal{I}\Xi_{s,t} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{u,v}$ e por (3.1) obtemos a Estimativa (3.9).

Agora para iii), veja que $\Xi \in \mathcal{C}_2^\alpha$, pois

$$|\Xi_{s,t}| \leqslant \|Y\|_\infty \|X\|_\alpha |t-s|^\alpha + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \leqslant (\|Y\|_\infty \|X\|_\alpha + T^\alpha \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}) |t-s|^\alpha.$$

Pelo Lema (3.6) sabemos que $\|Z\|_\alpha < \infty$. Como definimos $Z' = Y$ também é direto que $\|Z'\|_\alpha < \infty$. Resta provar que R^Z possui regularidade 2α, para isso veja que $R^Z_{s,t} = Z_{s,t} - Y_s X_{s,t}$, então por (3.9) temos

$$\begin{aligned}
\left|R^Z_{s,t}\right| &\leqslant \left|R^Z_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t}\right| + |Y'_s \mathbb{X}_{s,t}| \\
&\leqslant |Z_{s,t} - Y_s X_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t}| + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \\
&\leqslant C\left(\left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha} + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \\
\implies \left\|R^Z\right\|_{2\alpha} &\leqslant CT^\alpha \left(\left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right) + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha},
\end{aligned}$$

mostrando assim que (Z, Z') é de fato um elemento de $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$. Além disso, com uma conta rápida temos

$$\begin{aligned}
\|Z, Z'\|_{X,2\alpha} &= \|Z'\|_\alpha + \left\|R^Z\right\|_{2\alpha} \\
&\leqslant \|Y\|_\alpha + CT^\alpha \left(\left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right) + \|Y'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

A continuidade será demonstrada na próxima seção, mais precisamente é corolário imediato do Teorema (3.25). ■

Observação 3.14. Se $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}\left([0,T], \mathcal{L}\left(\overline{V}, W\right)\right)$ e $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}\left([0,T], \overline{V}\right)$ para V, $\overline{V}$ e W espaços de Banach. Pelo Teorema (3.3) podemos definir

$$\int_s^t Y_u dZ_u = \mathcal{I}\Xi_{s,t}, \quad \text{onde} \quad \Xi_{u,v} := Y_u Z_{u,v} + Y'_u Z'_u \mathbb{X}_{u,v}. \tag{3.10}$$

Aqui há um cuidado a ser tomado com os domínios. Identificamos $Z'_u \in \mathcal{L}\left(V, \overline{V}\right)$ com o operador $v \otimes w \mapsto v \otimes Z'_u w$ em $\mathcal{L}\left(V \otimes V, V \otimes \overline{V}\right)$ e identificamos $Y'_u \in \mathcal{L}\left(V, \mathcal{L}\left(\overline{V}, W\right)\right)$ de forma canônica em $\mathcal{L}\left(V \otimes \overline{V}, W\right)$

Veja que

$$\begin{aligned}
Y_sZ_{s,t} - Y_sZ_{s,u} - Y_uZ_{u,t} &= -Y_sZ_{u,t} - Y_uZ_{u,t} = -Y_{s,u}Z_{u,t}\\
Y_s'Z_s'\mathbb{X}_{s,t} - Y_s'Z_s'\mathbb{X}_{s,u} - Y_u'Z_u'\mathbb{X}_{u,t} &= Y_s'Z_s'(\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u}) - Y_u'Z_u'\mathbb{X}_{u,t}\\
&= Y_s'Z_s'(\mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u}\otimes X_{u,t}) - Y_u'Z_u'\mathbb{X}_{u,t}\\
&= Y_s'Z_s'(X_{s,u}\otimes X_{u,t}) - (Y'Z')_{s,u}\mathbb{X}_{u,t},
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\delta\Xi_{s,u,t} &= -Y_{s,u}Z_{u,t} + Y_s'Z_s'(X_{s,u}\otimes X_{u,t}) - (Y'Z')_{s,u}\mathbb{X}_{u,t}\\
&= -(Y_s'X_{s,u} + R^Y_{s,u})Z_{u,t} + Y_s'Z_s'(X_{s,u}\otimes X_{u,t}) - (Y'Z')_{s,u}\mathbb{X}_{u,t}\\
&= -Y_s'X_{s,u}(Z_u'X_{u,t} + R^Z_{u,t}) - R^Y_{s,u}Z_{u,t} + Y_s'Z_s'(X_{s,u}\otimes X_{u,t}) - (Y'Z')_{s,u}\mathbb{X}_{u,t}\\
&= -Y_s'X_{s,u}Z_u'X_{u,t} + Y_s'X_{s,u}R^Z_{u,t} - R^Y_{s,u}Z_{u,t} + Y_s'Z_s'(X_{s,u}\otimes X_{u,t}) - (Y'Z')_{s,u}\mathbb{X}_{u,t}\\
&= -Y_s'Z_{s,u}'(X_{s,u}\otimes X_{u,t}) + Y_s'X_{s,u}R^Z_{u,t} - R^Y_{s,u}Z_{u,t} - (Y'Z')_{s,u}\mathbb{X}_{u,t},
\end{aligned}$$

reforçando que estamos abusando a notação de Y' e Z', uma vez que na última linha alternamos os espaços que essas aplicações atuam no primeiro termo da soma. Desta forma podemos calcular sua norma

$$\begin{aligned}
&\left|Y_s'Z_{s,u}'(X_{s,u}\otimes X_{u,t})\right| \leqslant \|Y_s'\|_{op}\left\|Z_{s,u}'\right\|_{op}|X_{s,u}\otimes X_{u,t}| \leqslant \|Y'\|_\infty\|Z'\|_\alpha\|X\|_\alpha^2|t-s|^{3\alpha}\\
&\left|Y_s'X_{s,u}R^Z_{u,t}\right| \leqslant \|Y_s'X_{s,u}\|_{op}\left|R^Z_{u,t}\right| \leqslant \|Y_s'\|_{op}|X_{s,u}|\left|R^Z_{u,t}\right| \leqslant \|Y'\|_\infty\|X\|_\alpha\left\|R^Z\right\|_{2\alpha}|t-s|^{3\alpha}\\
&\left|R^Y_{s,u}Z_{u,t}\right| \leqslant \left\|R^Y_{s,u}\right\|_{op}|Z_{u,t}| \leqslant \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}\|Z\|_\alpha|t-s|^{3\alpha}\\
&|Y_u'Z_u'\mathbb{X}_{u,t} - Y_s'Z_s'\mathbb{X}_{u,t}| \leqslant \|Y_u'\|_{op}|Z_u'\mathbb{X}_{u,t} - Z_s'\mathbb{X}_{u,t}| + \|Y_u' - Y_s'\|_{op}|Z_s'\mathbb{X}_{u,t}|\\
&\qquad = \|Y_u'\|_{op}\left|Z_{s,u}'\mathbb{X}_{u,t}\right| + \left\|Y_{s,u}'\right\|_{op}|Z_s'\mathbb{X}_{u,t}|\\
&\qquad \leqslant (\|Y'\|_\infty\|Z'\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|Y'\|_\alpha\|Z'\|_\infty\|\mathbb{X}\|_{2\alpha})|t-s|^{3\alpha}.
\end{aligned}$$

Se denotarmos respectivamente os elementos que multiplicam $|t-s|^{3\alpha}$ por λ_i para $i \in \{1,2,3,4\}$ temos então que

$$\|\delta\Xi_{s,u,t}\| \leqslant (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)|t-s|^{3\alpha},$$

o que garante que podemos usar o Sewing Lemma. Além disso o lema também nos dá a estimativa

$$\left|\int_s^t Y_u dZ_r - Y_sZ_{s,t} - Y_s'Z_s'\mathbb{X}_{s,t}\right| \leqslant C\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\right)|t-s|^{3\alpha}. \tag{3.11}$$

□

Observação 3.15. Dadas duas funções com dois parâmetros Ξ, $\tilde{\Xi} \in \mathcal{C}_2^\beta$ com $\beta > 1$ tais que $|\Xi_{s,t} - \tilde{\Xi}_{s,t}| = O(|t-s|^\beta)$, então os mapas gerados pelo Sewing Lemma são iguais, i.e., $\mathcal{I}\Xi = \mathcal{I}\tilde{\Xi}$.

De fato, considere uma partição qualquer $\pi \in \mathcal{D}([0,T])$, então

$$\begin{aligned}\sum_{[u,v]\in\pi} |\Xi_{u,v} - \tilde{\Xi}_{u,v}| &\leqslant \sum_{[u,v]\in\pi} C|u-v|^{\beta} = C \sum_{[u,v]\in\pi} |u-v| \cdot |u-v|^{\beta-1} \\ &\leqslant C \sum_{[u,v]\in\pi} |u-v| \cdot |\pi|^{\beta-1} = CT|\pi|^{\beta-1},\end{aligned}$$

isto é, $\sum_{[u,v]\in\pi} |\Xi_{u,v} - \tilde{\Xi}_{u,v}| = O(|\pi|^{\beta-1}) \implies \sum_{[u,v]\in\pi} |\Xi_{u,v} - \tilde{\Xi}_{u,v}| \xrightarrow{|\pi|\to 0} 0$, portanto $\mathcal{I}\Xi = \mathcal{I}\tilde{\Xi}$.

Alternativamente, se $|\Xi_{s,t} - \tilde{\Xi}_{s,t}| = o(|t-s|)$ o resultado continua sendo o mesmo, pois dado $C << 1$ existe δ tal que para todo $|v-u| < \delta$ temos a desigualdade $|\Xi_{u,v} - \Delta_{u,v}| \leqslant C|v-u|$, então se escolhemos uma partição $\pi_\delta \in \mathcal{D}([0,T])$ de tal forma que $|\pi_\delta| < \delta$ obtemos

$$\sum_{[u,v]\in\pi_\delta} |\Xi_{u,v} - \tilde{\Xi}_{u,v}| \leqslant \sum_{[u,v]\in\pi_\delta} C|u-v| \leqslant CT,$$

como o argumento vale para qualquer C temos novamente que $\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} |\Xi_{u,v} - \tilde{\Xi}_{u,v}| \to 0$, portanto $\mathcal{I}\Xi = \mathcal{I}\tilde{\Xi}$. □

Observação 3.16. Para um caminho Lipschitz $X \in \mathcal{C}^{\mathrm{lip}}([0,T],V)$ temos o levantamento canônico $\mathbb{X}_{s,t} = \int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r$. Considere agora um caminho $Y \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ para algum $\alpha \in (1/3,1/2)$, então para qualquer caminho $Y' \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V\otimes V,W))$ tal que $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ defina $\Xi_{u,v} = Y_u X_{u,v}$ (veja que é exatamente a função que pelo Sewing Lemma nos dá a Integral de Riemann) e $\Delta_{u,v} = Y_u X_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{u,v}$ (a função que define a integral (3.7)). Veja que

$$\int_s^t |dX_r| = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} |X_{u,v}| \leqslant \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \|X\|_{\mathrm{lip}} |v-u| = \|X\|_{\mathrm{lip}} |t-s|,$$

então temos

$$\begin{aligned}|\mathbb{X}_{s,t}| &= \left| \int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r \right| \leqslant \int_s^t |X_{s,r} \otimes dX_r| \\ &= \int_s^t |X_{s,r}|\, |dX_r| \leqslant \|X\|_{\mathrm{lip}} |t-s| \int_s^t |dX_r| \\ &\leqslant \|X\|_{\mathrm{lip}}^2 |t-s|^2,\end{aligned}$$

isto é, $|\Xi_{s,t} - \Delta_{s,t}| = |Y'_s \mathbb{X}_{s,t}| = O(|t-s|^2)$, usando a observação passada temos que a Integral de Riemann-Stieltjes de fato coincide com a rough, isto é, $\int_s^t Y_r dX_r = \int_s^t Y_r d\mathbf{X}$.

Exemplo 3.17. Na última observação é importante que o levantamento seja o canônico, caso o contrário os resultados podem ser diferentes, vejamos um exemplo onde isso acontece.

Considere $\alpha \in (1/3, 1/2]$, f um caminho de classe $\mathcal{C}^{2\alpha}([0,T], V \otimes V)$ e $\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T], V)$ tal que $\tilde{X}_t = X_t$ e $\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + f_{s,t}$. Se $(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{X}([0,T], \mathcal{L}(V,W)) = \mathscr{D}^{2\alpha}_{\tilde{X}}([0,T], \mathcal{L}(V,W))$, então

$$\int_0^T Y_r d\tilde{\mathbf{X}}_r = \int_0^T Y_r d\mathbf{X}_r + \int_0^T Y'_r df_r,$$

onde a segunda integral é de Young.

De fato, é fácil ver que os espaços coincidem pois se $(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{X}$, então

$$\tilde{R}^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} - Y'_s f_{s,t} = R^Y_{s,t} - Y'_s f_{s,t}$$

e tomando a norma temos

$$\left\|\tilde{R}^Y\right\|_{2\alpha} \leqslant \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} + \|Y'\|_\infty \|f\|_{2\alpha}.$$

Veja que por Gubinelli as integrais de Y com respeito a $\mathbf{X}$ e $\tilde{\mathbf{X}}$ existem, então

$$\begin{aligned}
\int_0^T Y'_r df_r &:= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u f_{u,v} \\
&= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u f_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{u,v} - Y'_u \mathbb{X}_{u,v} + Y_u X_{u,v} - Y_u X_{u,v} \\
&= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} + Y'_u (f_{u,v} + \mathbb{X}_{u,v}) - \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{u,v} \\
&= \int_0^T Y_r d\tilde{\mathbf{X}}_r - \int_0^T Y_r d\mathbf{X}_r,
\end{aligned}$$

onde a primeira igualdade é valida pois $\alpha + 2\alpha > 1$ então podemos aplicar a Integral de Young. □

Agora será apresentado um resultado que pode ser interessante em certos casos. O Teorema de Lyons no nosso contexto é uma aplicação direta do Teorema de Gubinelli.

Lema 3.18. *Dada função $F : V \to \mathcal{L}(V, W)$ de classe C^2_b, $(X, \mathbb{X})$ em $\mathscr{C}^{\alpha}([0,T], V)$ para algum $\alpha \in (1/3, 1/2)$. Defina $Y_s := F(X_s)$, $Y'_s := DF(X_s)$ e $R^Y_{s,t} := Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}$ então $Y, Y' \in \mathcal{C}^{\alpha}$ e $R^Y \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ e*

$$\begin{aligned}
\|Y\|_\alpha &\leqslant \|DF\|_\infty \|X\|_\alpha \\
\|Y'\|_\alpha &\leqslant \|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha \\
\|R^Y\|_{2\alpha} &\leqslant \frac{1}{2} \|D^2F\|_\infty \|X\|^2_\alpha
\end{aligned}$$

Demonstração. Como F é de classe C^2_b então F e DF são Lipschitz e temos as estimativas $\|F(X)_{s,t}\| \leqslant \|DF\|_\infty \|X_{s,t}\|$ e $\|DF(X)_{s,t}\| \leqslant \|D^2F\|_\infty \|X_{s,t}\|$. Aplicando elas de forma respectiva temos

$$\|F(X)\|_\alpha = \sup_{s<t\in[0,T]} \frac{\|F(X)_{s,t}\|}{|t-s|^\alpha} \leqslant \sup_{s<t\in[0,T]} \|DF\|_\infty \frac{\|X_{s,t}\|}{|t-s|^\alpha} = \|DF\|_\infty \|X\|_\alpha,$$

$$\|DF(X)\|_\alpha = \sup_{s<t\in[0,T]} \frac{\|DF(X)_{s,t}\|}{|t-s|^\alpha} \leqslant \sup_{s<t\in[0,T]} \|D^2F\|_\infty \frac{\|X_{s,t}\|}{|t-s|^\alpha} = \|D^2F\|_\infty \|X\|_\alpha,$$

Pelo resto de Taylor, para todo $s < t \in [0,T]$ existe $\xi \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_s) + DF(X_s)X_{s,t} + \frac{1}{2}D^2F(X_s + \xi X_{s,t})(X_{s,t}, X_{s,t}) \\ \implies \left|R^Y_{s,t}\right| &= \left|\frac{1}{2}D^2F(X_s + \xi X_{s,t})(X_{s,t}, X_{s,t})\right| \leqslant \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \|X_{s,t}\|^2_\alpha \\ \implies \|R^Y_{s,t}\|_{2\alpha} &\leqslant \frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty \|X\|^2_\alpha. \end{aligned}$$

■

Definição 3.19. Dado $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, $F : V \to \mathcal{L}(V, W)$ e $s < t$ contidos em $[0,T]$ dizemos que a *integral rough de 1-forma* existe se o limite

$$\int_0^T F(X_r)d\mathbf{X}_r := \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} F(X_u)X_{u,v} + DF(X_u)\mathbb{X}_{u,v} \tag{3.12}$$

existe independente da escolha da sequência de partições $(\pi_n) \in \mathcal{D}([0,T])$ tal que $|\pi_n| \to 0$.

Teorema 3.20 (Lyons)**.** *Seja* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ *com* $\alpha > 1/3$ *e* $F : V \to \mathcal{L}(V, W)$ *de classe* C^2_b*, então a integral rough definida em (3.12) existe e temos a estimativa*

$$\left|\int_s^t F(X_r)d\mathbf{X}_r - F(X_s)X_{s,t} - DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}\right| \leqslant C\|F\|_{C^2_b}\left(\|X\|^3_\alpha + \|X\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right)|t-s|^{3\alpha} \tag{3.13}$$

para alguma constante $C = C(\alpha)$*. Além disso, temos*

$$\left\|\int_0^\cdot F(X_r)d\mathbf{X}_r\right\|_\alpha \leqslant C_1\|F\|_{C^2_b}\left(\|\mathbf{X}\|_\alpha \vee \|\mathbf{X}\|^{1/\alpha}_\alpha\right), \tag{3.14}$$

para alguma constante $C_1 = C_1(T, \alpha)$*.*

Demonstração. Utilizando o Lema (3.18) temos que $(F(X), DF(X)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T], W)$. Com isso o Teorema de Gubinelli garante a existência da integral e a Estimativa (3.9) em conjunto com o Lema (3.18) temos

$$\begin{aligned} &\left|\int_s^t F(X_r)d\mathbf{X}_r - F(X_s)X_{s,t} - DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}\right| \\ &\qquad \leqslant C_0\left(\|X\|_\alpha \frac{1}{2}\left\|D^2F\right\|_\infty \|X\|^2_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\left\|D^2F\right\|_\infty \|X\|_\alpha\right)|t-s|^{3\alpha} \\ &\qquad \leqslant C\|F\|_{C^2_b}\left(\|X\|^3_\alpha + \|X\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right)|t-s|^{3\alpha}. \end{aligned}$$

Para (3.14) só precisamos aplicar a desigualdade triangular sobre (3.13)

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_s^t F(X)_r d\mathbf{X}_r\right| \\
&\quad \leqslant \left|\int_s^t F(X_r) d\mathbf{X}_r - F(X_s)X_{s,t} - DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}\right| + |F(X_s)X_{s,t} + DF(X_s)\mathbb{X}_{s,t}| \\
&\quad \leqslant C\|F\|_{C_b^2}\left(\|X\|_\alpha^3 + \|X\|_\alpha\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right)|t-s|^{3\alpha} + \|F\|_{C_b^2}\|X\|_\alpha|t-s|^\alpha + \|F\|_{C_b^2}\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} \\
&\quad \leqslant 2C\|F\|_{C_b^2}\left(\|\mathbf{X}\|_\alpha|t-s|^\alpha + \|\mathbf{X}\|_\alpha^2|t-s|^{2\alpha} + \|\mathbf{X}\|_\alpha^3|t-s|^{3\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Considere $\rho = \|\mathbf{X}\|_\alpha$ e $h = \rho^{-1/\alpha}$. Então para todo par $s < t$ tal que $t - s < h$, em particular $\rho^{1/\alpha}|t-s| \leqslant 1$, disso sabemos que

$$
|Z_{s,t}| \leqslant 2C\|F\|_{C_b^2}\left(\rho|t-s|^\alpha + \rho_\alpha^2|t-s|^{2\alpha} + \rho^3|t-s|^{3\alpha}\right) \leqslant 2C\|F\|_{C_b^2} 3\rho|t-s|^\alpha.
$$

Em outras palavras, $\|Z\|_{\alpha,h} \leqslant 6C\|F\|_{C_b^2}\rho$. Então aplicando o Lema (1.6) temos

$$
\|Z\|_\alpha \leqslant 6C\|F\|_{C_b^2}\rho\left(1 \vee 2h^{\alpha-1}T^{1-\alpha}\right) \leqslant C_1\|F\|_{C_b^2}\left(\rho \vee \rho^{1/\alpha}\right),
$$

onde a constante C_1 pode ser tomada como $12C(1+T)^{1-\alpha}$. ■

3.3 Estabilidade da Integral Rough

Essa seção terá como objetivo desenvolver algumas ferramentas que serão utilizadas para estabelecer resultados referentes à equações diferenciais.

Para falar de estabilidade precisamos de alguma noção de distância no espaço trabalhado. No nosso caso queremos medir a distância de dois caminhos controlados por caminhos diferentes, com objetivo de obter algum tipo de continuidade do mapa solução de equações diferenciais (veja o Teorema (6.8)).

Definição 3.21. Sejam $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$, $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ e $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}([0,T],W)$, então definimos

$$
d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right) := \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}.
$$

Observação 3.22. Veja que $d_{X,\tilde{X},2\alpha}$ não é exatamente uma métrica, uma vez que (Y, Y') e $(\tilde{Y}, \tilde{Y}')$ não estão no mesmo espaço. E mesmo se estivessem (no caso de $X = \tilde{X}$), d não consegue diferenciar (Y, Y') de $(Y + cX, Y' + c)$ para qualquer c constante.

Agora veja que para $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ fixo podemos definir o mapa

$$
\iota_X : (Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha} \mapsto (Y', R^Y) \in \mathcal{C}^\alpha \oplus \mathcal{C}_2^{2\alpha}.
$$

Veja que se fixarmos também $Y_0 = \xi$ temos que ι_X é injetivo, uma vez que se $\iota_X(Y, Y') = \iota_X(\tilde{Y}, \tilde{Y}')$, então

$$
Y_t = \xi + Y_t' X_{0,t} + R_{0,t}^Y = \xi + \tilde{Y}_t' X_{0,t} + R_{0,t}^{\tilde{Y}} = \tilde{Y}_t.
$$

Desta forma podemos entender $d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y,Y';\tilde{Y},\tilde{Y}'\right)$ como $\|\iota_X(Y,Y')-\iota_X(\tilde{Y},\tilde{Y}')\|_{\alpha,2\alpha}$ que é uma seminorma.

Observação 3.23. Dados $f,g\in\mathcal{L}(V,W)$ e $x,y\in V$ temos

$$|fx-gy|_W=|fx-fy+fy-xy|_W\leqslant\|f\|_{op}\,|x-y|_V+\|f-g\|_{op}\,|y|_V. \tag{3.15}$$

Peço para que o leitor sempre tenha essa estimativa em mente, uma vez que ela será muito utilizada daqui para frente.

Agora será apresentado um teorema rápido que nos ajudará nos últimos resultados deste texto.

Teorema 3.24. *Nas condições da Definição (3.21), se os valores* $|Y_0'|$, $\|Y'\|_\infty$, $\|X\|_\alpha$, $|\tilde{Y}_0'|$, $\|\tilde{Y}'\|_\infty$, $\|\tilde{X}\|_\alpha$ *são limitados por* R *temos a seguinte estimativa*

$$\|Y-\tilde{Y}\|_\alpha\leqslant C_R\left(\|X-\tilde{X}\|_\alpha+|Y_0'-\tilde{Y}_0'|+T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y,Y';\tilde{Y},\tilde{Y}'\right)\right)$$

Para alguma constante $C_R:=C(R)$.

Demonstração. Para algum $s,t\in[0,T]$ considere a norma

$$\begin{aligned}|Y_{s,t}-\tilde{Y}_{s,t}|&=|Y_s'X_{s,t}+R^Y_{s,t}-\tilde{Y}_s'\tilde{X}_{s,t}-R^{\tilde{Y}}_{s,t}|\\&\leqslant|Y_s'-\tilde{Y}_s'|\cdot|X_{s,t}|+|\tilde{Y}_s'|\cdot|X_{s,t}-\tilde{X}_{s,t}|+|R^Y_{s,t}-R^{\tilde{Y}}_{s,t}|\\&\leqslant\|Y'-\tilde{Y}'\|_\infty\|X\|_\alpha|t-s|^\alpha+\|\tilde{Y}'\|_\infty\|X-\tilde{X}\|_\alpha|t-s|^\alpha+\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha},\end{aligned}$$

onde usamos a eq. (3.15) para obter a segunda linha. Segue então que

$$\begin{aligned}\|Y-\tilde{Y}\|_\alpha&\leqslant\|Y'-\tilde{Y}'\|_\infty\|X\|_\alpha+\|\tilde{Y}'\|_\infty\|X-\tilde{X}\|_\alpha+T^\alpha\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\\&\leqslant\left(|Y_0'-\tilde{Y}_0'|+T^\alpha\|Y'-\tilde{Y}'\|_\alpha\right)\|X\|_\alpha+\|\tilde{Y}'\|_\infty\|X-\tilde{X}\|_\alpha+T^\alpha\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\\&\leqslant\left(|Y_0'-\tilde{Y}_0'|+T^\alpha\|Y'-\tilde{Y}'\|_\alpha\right)R+R\|X-\tilde{X}\|_\alpha+T^\alpha\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\\&\leqslant C\left(\|X-\tilde{X}\|_\alpha+|Y_0'-\tilde{Y}_0'|+T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y,Y';\tilde{Y},\tilde{Y}'\right)\right),\end{aligned}$$

onde C pode ser tomado como $R+1$. ∎

Com esse resultado estabelecido, iremos agora para o teorema principal desta seção.

Teorema 3.25 (Estabilidade da Integral Rough)**.** *Sejam* $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})$, $\tilde{\mathbf{X}}=(\tilde{X},\tilde{\mathbb{X}})\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $(Y,Y')\in\mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ *e* $(\tilde{Y},\tilde{Y}')\in\mathscr{D}^{2\alpha}_{\tilde{X}}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ *tais que os valores* $|Y_0'|+\|Y,Y'\|_{\alpha,2\alpha}$, $\rho_\alpha(0,\mathbf{X})$, $|\tilde{Y}_0'|+\|\tilde{Y},\tilde{Y}'\|_{\alpha,2\alpha}$ *e* $\rho_\alpha(0,\tilde{\mathbf{X}})$ *são limitados por* M*. Defina* $(Z,Z'):=\left(\int_0^\cdot Y\,d\mathbf{X},Y\right)\in\mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T],W)$ *e* $(\tilde{Z},\tilde{Z}'):=\left(\int_0^\cdot\tilde{Y}\,d\tilde{\mathbf{X}},\tilde{Y}\right)\in\mathscr{D}^{2\alpha}_{\tilde{X}}([0,T],W)$. *Então valem as seguinte estimativas*

$$d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Z,Z';\tilde{Z},\tilde{Z}'\right)\leqslant C_M(1+T^\alpha)\left(\rho_\alpha(\mathbf{X},\tilde{\mathbf{X}})+|Y_0'-\tilde{Y}_0'|+T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y,Y';\tilde{Y},\tilde{Y}'\right)\right), \tag{3.16}$$

$$\|Z - \tilde{Z}\|_\alpha \leqslant C_M(1+T^\alpha)^2 \left(\rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + |Y_0 - \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right), \tag{3.17}$$

para alguma constante $C_M := C(M, \alpha)$.

Demonstração. Para obtermos (3.16) precisamos estimar $\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha + \|R^Z - R^{\tilde{Z}}\|_{2\alpha}$. Por (3.24) o primeiro termo já está estimado, então basta verificar o segundo termo. Vejamos

$$R^Z_{s,t} = Z_{s,t} - Z_s' X_{s,t} = \int_s^t Y\, d\mathbf{X} - Y_s X_{s,t} = \mathcal{I}\Xi_{s,t} - \Xi_{s,t} + Y_s' \mathbb{X}_{s,t},$$

onde $\Xi_{s,t} := Y_s X_{s,t} + Y_s' \mathbb{X}_{s,t}$. Analogamente obtemos a igualdade com os elementos com til. Para que a notação fique menos carregada defina $\Delta := \Xi - \tilde{\Xi}$. Então temos que

$$\left|R^Z_{s,t} - R^{\tilde{Z}}_{s,t}\right| \leqslant |(\mathcal{I}\Delta)_{s,t} - \Delta_{s,t}| + \left|Y_s'\mathbb{X}_{s,t} - \tilde{Y}_s'\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}\right| \leqslant C\,\|\delta\Delta\|_{3\alpha}\,|t-s|^{3\alpha} + \left|Y_s'\mathbb{X}_{s,t} - \tilde{Y}_s'\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}\right|, \tag{3.18}$$

onde na segunda desigualdade utilizamos (3.2). Agora só nos resta abrir os termos da estimativa

$$\begin{aligned}
\delta\Xi_{s,u,t} &:= (Y_s X_{s,t} - Y_s X_{s,u} - Y_u X_{u,t}) + (Y_s'\mathbb{X}_{s,t} - Y_s'\mathbb{X}_{s,u} - Y_u'\mathbb{X}_{u,t}) \\
&= -Y_{s,u} X_{u,t} - Y_{s,u}' \mathbb{X}_{u,t} + Y_s'(X_{s,u} \otimes X_{u,t}) \\
&= -(Y_{s,u} + Y_s' X_{s,u}) X_{u,t} - Y_{s,u}' \mathbb{X}_{u,t} \\
&= -R^Y_{s,u} X_{u,t} - Y_{s,u}' \mathbb{X}_{u,t} \\
\delta\tilde{\Xi}_{s,u,t} &= -R^{\tilde{Y}}_{s,u} \tilde{X}_{u,t} - \tilde{Y}_{s,u}' \tilde{\mathbb{X}}_{u,t}.
\end{aligned}$$

Usando $\delta\Delta = \delta\Xi - \delta\tilde{\Xi}$ obtemos

$$\begin{aligned}
|\delta\Delta_{s,u,t}| &\leqslant \left|R^{\tilde{Y}}_{s,u}\tilde{X}_{u,t} - R^Y_{s,u}X_{u,t}\right| + \left|\tilde{Y}_{s,u}'\tilde{\mathbb{X}}_{u,t} - Y_{s,u}'\mathbb{X}_{u,t}\right| \\
&\leqslant \left|R^{\tilde{Y}}_{s,u}\right| \left|\tilde{X}_{u,t} - X_{u,t}\right| + \left|R^{\tilde{Y}}_{s,u} - R^Y_{s,u}\right| |X_{u,t}| + \left|\tilde{Y}_{s,u}'\right| \left|\tilde{\mathbb{X}}_{u,t} - \mathbb{X}_{u,t}\right| + \left|\tilde{Y}_{s,u}' - Y_{s,u}'\right| |\mathbb{X}_{u,t}| \\
&\leqslant \Big(\left\|R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} \left\|\tilde{X} - X\right\|_\alpha + \left\|R^{\tilde{Y}} - R^Y\right\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}'\right\|_\alpha \left\|\tilde{\mathbb{X}} - \mathbb{X}\right\|_{2\alpha} \\
&\qquad + \left\|\tilde{Y}' - Y'\right\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\Big) |t-s|^{3\alpha} \\
&\leqslant \left(M\left\|\tilde{X} - X\right\|_\alpha + \left\|R^{\tilde{Y}} - R^Y\right\|_{2\alpha} M + M\left\|\tilde{\mathbb{X}} - \mathbb{X}\right\|_{2\alpha} + \left\|\tilde{Y}' - Y'\right\|_\alpha M\right) |t-s|^{3\alpha} \\
&\leqslant M\left(\rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right) |t-s|^{3\alpha} \\
\implies \|\delta\Delta\|_{3\alpha} &\leqslant M\left(\rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right)
\end{aligned}$$

Além disso, vale também

$$\begin{aligned}
\left|Y_s'\mathbb{X}_{s,t} - \tilde{Y}_s'\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}\right| &\leqslant |Y_s'| \left|\mathbb{X}_{s,t} - \tilde{\mathbb{X}}_{s,t}\right| + \left|Y_s' - \tilde{Y}_s'\right| \left|\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}\right| \\
&\leqslant \|Y'\|_\infty \left\|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\right\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} + \left\|Y' - \tilde{Y}'\right\|_\infty \left\|\tilde{\mathbb{X}}\right\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \\
&\leqslant \left(M(1+T^\alpha)\left\|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\right\|_{2\alpha} + \left\|Y' - \tilde{Y}'\right\|_\infty M\right) |t-s|^{2\alpha}
\end{aligned}$$

Aplicando essas estimativas em (3.18) temos

$$\begin{aligned}\left\|R^Z - R^{\tilde{Z}}\right\|_{2\alpha} \leqslant & C_0 T^\alpha \left\|\delta\Delta\right\|_{3\alpha} + \left\|Y'\right\|_\infty \left\|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\right\|_{2\alpha} + \left\|Y' - \tilde{Y}'\right\|_\infty \left\|\tilde{\mathbb{X}}\right\|_{2\alpha} \\ \leqslant & C_0 T^\alpha M \left(\rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right) \\ & + M\left((1+T^\alpha)\left\|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\right\|_{2\alpha} + \left(\left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + T^\alpha \left\|Y' - \tilde{Y}'\right\|_\alpha\right)\right) \\ \leqslant & C_0 M \left[T^\alpha \left(\rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right)\right. \\ & \left. + \left((1+T^\alpha)\rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right)\right] \\ \leqslant & C(1+T^\alpha)\left(\left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right),\end{aligned}$$

onde $C = 2C_0 M$.

Para (3.17) basta aplicar (3.16) na estimativa do Teorema (3.24) lembrando que $Z' = Y$ e $\tilde{Z}' = \tilde{Y}$

$$\begin{aligned}\|Z - \tilde{Z}\|_\alpha & \leqslant C_R \left(\left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Z, Z'; \tilde{Z}, \tilde{Z}'\right)\right) \\ & \leqslant C_M (1+T^\alpha)^2 \left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right),\end{aligned}$$

onde C_M pode ser tomado como $C_R(1 + C_M)$. ■

3.4 Sewing Lemma Estocástico

Agora iremos trabalhar com uma versão aprimorada do Sewing Lemma tradicional introduzida em [Lê20]. A ideia principal é desenvolver uma ferramenta que assegure a convergência das somas de Riemann para processos estocásticos suficientemente regulares. E como recompensa obtemos demonstrações rápidas para objetos da teoria clássica.

Antes de apresentar o lema, vamos desenvolver uma estimativa que será usada durante a demonstração. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_i)_{i=1,\dots,n}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado, $Z_1, \dots, Z_n$ uma sequência finita de variáveis aleatórias $L^m = L^m(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para algum $m \in [2, \infty)$ com valores em $\mathbb{R}^d$ tais que, para cada i, as variáveis $Z_1, \dots, Z_{i-1}$ sejam $\mathcal{F}_i$-mensuráveis. A partir de agora, denote $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\mathcal{F}_i]$ por $\mathbb{E}_i[\,\cdot\,]$.

Definimos

$$S := \sum_{i=1}^n Z_i = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_i Z_i + \sum_{i=1}^n (Z_i - \mathbb{E}_i Z_i) =: S_1 + S_2.$$

Para S_1 não temos muito o que fazer, então considere a estimativa

$$\|S_1\|_{L^m} \leqslant \sum_{i=1}^n \|\mathbb{E}_i Z_i\|_{L^m}.$$

Veja que S_2 é um martingale, no sentido que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_k[S_2] &= \mathbb{E}_k\left[\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}_i Z_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}_k Z_i - \mathbb{E}_k\mathbb{E}_i Z_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k-2}(\mathbb{E}_k Z_i - \mathbb{E}_k\mathbb{E}_i Z_i) + \sum_{i=k-1}^{n}(\mathbb{E}_k Z_i - \mathbb{E}_k\mathbb{E}_i Z_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k-2}(Z_i - \mathbb{E}_i Z_i) + \sum_{i=k-1}^{n}(\mathbb{E}_k Z_i - \mathbb{E}_k Z_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k-2}(Z_i - \mathbb{E}_i Z_i)\,.\end{aligned}$$

Por Burkholder (Teorema (A.3)) temos

$$\|S_2\|_{L^m} = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}_i Z_i)\right|^m\right]^{\frac{1}{m}} \leqslant C_m \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|Z_i - \mathbb{E}_i Z_i|^2\right)^{\frac{m}{2}}\right]^{\frac{1}{m}},$$

aplicando a desigualdade de Minkowski duas vezes

$$\begin{aligned}C_m\left\|\sum_{i=1}^{n}|Z_i - \mathbb{E}_i Z_i|^2\right\|_{L^{m/2}}^{\frac{1}{2}} &\leqslant C_m\left(\sum_{i=1}^{n}\|Z_i - \mathbb{E}_i Z_i\|_{L^m}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant C_m\left(\sum_{i=1}^{n}(\|Z_i\|_{L^m} + \|\mathbb{E}_i Z_i\|_{L^m})^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

usando por último a propriedade de contração da esperança condicional,

$$\|S_2\|_{L^m} \leqslant 2C_m\left(\sum_{i=1}^{n}\|Z_i\|_{L^m}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim temos uma boa estimativa para S, dada por

$$\|S\|_{L^m} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|\mathbb{E}_i Z_i\|_{L^m} + 2C_m\left(\sum_{i=1}^{n}\|Z_i\|_{L^m}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

Teorema 3.26 (Sewing Lemma Estocástico)**.** *Seja* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ *um espaço de probabilidade filtrado e* $\Xi : \Delta_{[0,T]} \to L^m$ *um mapa contínuo com* $m \geqslant 2$*, tal que para todo* $s \leqslant t$*,* $\Xi_{s,s} = 0$ *e* $\Xi_{s,t}$ *é* $\mathcal{F}_t$*-mensurável. Suponha também* $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ *e* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$*, onde as seguintes inequações valem para todo* $s \leqslant t$

$$\|\mathbb{E}_s\delta\Xi_{s,u,t}\|_{L^m} \leqslant \lambda_1|t-s|^{1+\varepsilon_1} \tag{3.20}$$

$$\|\delta\Xi_{s,u,t}\|_{L^m} \leqslant \lambda_2|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2} \tag{3.21}$$

Então, a menos de modificação, existe único processo estocástico $\mathcal{F}_t$*-adaptado e* L^m*-integrável* $\mathcal{I}\Xi = (\mathcal{I}\Xi_t)_{t\in[0,T]}$ *tal que* $\mathcal{I}\Xi_0 = 0$ *e*

$$\|\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \Xi_{s,t}\|_{L^m} \leqslant \lambda_1 C_1|t-s|^{1+\varepsilon_1} + \lambda_2 C_2|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2} \tag{3.22}$$

$$\|\mathbb{E}_s(\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \Xi_{s,t})\|_{L^m} \leqslant \lambda_1 C_1|t-s|^{1+\varepsilon_1} \tag{3.23}$$

para duas constantes $C_1 = C_1(\varepsilon_1)$ *e* $C_2 = C_2(\varepsilon_2)$.

Além disso, para todo par $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$, *temos que*

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \Xi_{u,v} = \mathcal{I}\Xi_{s,t}. \tag{3.24}$$

Observação 3.27. Observe que se assumirmos (3.20) a Propriedade (3.21) é equivalente à

$$\|\delta\Xi_{s,u,t} - \mathbb{E}_s\delta\Xi_{s,u,t}\|_{L^m} \leqslant \lambda_2|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}. \tag{3.25}$$

Demonstração. Aqui a estratégia é exatamente a mesma da demonstração do Sewing Lemma, porém precisamos tomar os devidos cuidados com os aspectos estocásticos da nossa nova função Ξ.

Fixe um intervalo $[s,t] \subseteq [0,T]$. Denote por $(\pi_n) \subset \mathcal{D}([s,t])$ a sequência de partições diádicas. Para cada $n \geqslant 0$, definimos

$$I^n_{s,t} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \Xi_{t_i^n,t_{i+1}^n}.$$

Considerando novamente u_i^n como o ponto intermediário de $\left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]$, temos

$$\begin{aligned}
I^n_{s,t} - I^{n+1}_{s,t} &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \delta\Xi_{t_i^n,u_i^n,t_{i+1}^n} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbb{E}_{t_i^n}\delta\Xi_{t_i^n,u_i^n,t_{i+1}^n} + \sum_{i=0}^{2^n-1}\left(\delta\Xi_{t_i^n,u_i^n,t_{i+1}^n} - \mathbb{E}_{t_i^n}\delta\Xi_{t_i^n,u_i^n,t_{i+1}^n}\right) \\
&=: S_1^n + S_2^n.
\end{aligned}$$

Pela Estimativa (3.19) sabemos que

$$\begin{aligned}
\|S_1^n\|_{L^m} &\leqslant \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\|\mathbb{E}_{t_i^n}\delta\Xi_{t_i^n,u_i^n,t_{i+1}^n}\right\|_{L^m} \\
\|S_2^n\|_{L^m} &\leqslant 2C_m\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}\left\|\delta\Xi_{t_i^n,u_i^n,t_{i+1}^n}\right\|_{L^m}^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Usando as Hipóteses (3.20) e (3.21) temos

$$\begin{aligned}
\|S_1^n\|_{L^m} &\leqslant \lambda_1 \sum_{i=0}^{2^n-1}\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|^{1+\varepsilon_1} = \lambda_1|t-s|^{1+\varepsilon_1}\sum_{i=0}^{2^n-1} 2^{-n(1+\varepsilon_1)} = \lambda_1|t-s|^{1+\varepsilon_1}2^{-n\varepsilon_1} \\
\|S_2^n\|_{L^m} &\leqslant 2C_m\lambda_2\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}\left|t_{i+1}^n - t_i^n\right|^{1+2\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2C_m\lambda_2|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}2^{-n(1+2\varepsilon_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2C_m\lambda_2|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}2^{-n\varepsilon_2}
\end{aligned}$$

Então

$$\left\|I^n_{s,t} - I^{n+1}_{s,t}\right\|_{L^m} \leqslant \lambda_1|t-s|^{1+\varepsilon_1}2^{-n\varepsilon_1} + 2C_m\lambda_2|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}2^{-n\varepsilon_2}.$$

Segue que a sequência $\left(I_{s,t}^n\right)_{n\geqslant 1}$ é de Cauchy então o seguinte limite existe em L^m

$$I_{s,t} := \lim_{n\to\infty} I_{s,t}^n$$

e satisfaz

$$\left\|I_{s,t} - I_{s,t}^k\right\|_{L^m} \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \left\|I_{s,t}^n - I_{s,t}^{n+1}\right\|_{L^m} \leqslant \frac{\lambda_1 2^{-k\varepsilon_1}}{1-2^{-\varepsilon_1}}|t-s|^{1+\varepsilon_1} + \frac{2C_m\lambda_2 2^{-k\varepsilon_2}}{1-2^{-\varepsilon_2}}|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2},$$

isto é, a convergência é uniforme. De imediato temos

$$\|I_{s,t} - \Xi_{s,t}\|_{L^m} = \left\|I_{s,t} - I_{s,t}^0\right\|_{L^m} \leqslant \lambda_1 \frac{1}{1-2^{-\varepsilon_1}}|t-s|^{1+\varepsilon_1} + \lambda_2 \frac{2C_m}{1-2^{-\varepsilon_2}}|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2}$$

que conclui o argumento para a Estimativa (3.22). E como $I_{s,t}^n$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável então $I_{s,t}$ também tem que ser. Além disso, uma vez que $\mathbb{E}_s S_2^n = 0$ temos

$$\mathbb{E}_s\left[I_{s,t}^n - I_{s,t}^{n+1}\right] = \mathbb{E}_s\left[S_1^n + S_2^n\right] = \mathbb{E}_s S_1^n,$$

que implica

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_s\left[I_{s,t} - \Xi_{s,t}\right]\|_{L^m} &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\mathbb{E}_s\left[I_{s,t}^n - I_{s,t}^{n+1}\right]\right\|_{L^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbb{E}_s S_1^n\|_{L^m} \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|S_1^n\|_{L^m} \leqslant \lambda_1 \frac{1}{1-2^{-\varepsilon_1}}|t-s|^{1+\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

Como $I^n : \Delta_{[0,T]} \to L^m$, é contínua e a convergência $I_{s,t}^n \to I_{s,t}$ é unifome. Então segue que $I : \Delta_{[0,T]} \to L^m$ é uma função contínua.

Semelhante à demonstração do Sewing Lemma, iremos usar a mesma técnica para mostrar que I é aditiva. Por brevidade, como alguns argumentos são idênticos, pularei alguns detalhes já trabalhados. Por construção, sabemos que I é semi-aditiva. Mais do que isso é (a menos de modificação) a única função semi-aditiva tal que

$$\begin{aligned}
\|I_{s,t} - \Xi_{s,t}\|_{L^m} &\leqslant \lambda_1 C_1|t-s|^{1+\varepsilon_1} + \lambda_2 C_2|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_2} \\
\|\mathbb{E}_s\left(I_{s,t} - \Xi_{s,t}\right)\|_{L^m} &\leqslant \lambda_1 C_1|t-s|^{1+\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

Suponha que $v : \Delta_{[0,T]} \to L^m$ é uma função semi-aditiva que satisfaz as inequações acima. Defina $w_{s,t} := I_{s,t} - v_{s,t}$. Então

$$\begin{aligned}
\|w_{s,t}\|_{L^m} &\leqslant \tilde{C}|t-s|^{\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}} \\
\|\mathbb{E}_s\left(w_{s,t}\right)\|_{L^m} &\leqslant \tilde{C}|t-s|^{1+\tilde{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

para todo $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ de modo que $|t-s| < 1$, para $\tilde{\varepsilon} = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ e alguma constante $\tilde{C} = C(\tilde{\varepsilon})$.

Se fixarmos $(s,t) \in \Delta_{0,T}$. Para n suficientemente grande (de modo que $|\pi_n| = 2^{-n}(t-s) < 1$ considere n-ésima partição diádica de $[s,t]$. Então pela semi-aditividade temos

$$w_{s,t} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(w_{t_i^n, t_{i+1}^n} \right)$$

Aplicando a Estimativa (3.19) temos

$$\|w_{s,t}\|_{L^m} \leqslant \sum_{i=0}^{2^n-1} \left\| \mathbb{E}_{t_i^n} \left(w_{t_i^n, t_{i+1}^n} \right) \right\|_{L^m} + 2C_m \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} \left\| w_{t_i^n, t_{i+1}^n} \right\|_{L^m}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|w_{s,t}\|_{L^m} &\leqslant \tilde{C}|t-s|^{1+\tilde{\varepsilon}} \sum_{i=0}^{2^n-1} 2^{-n(1+\tilde{\varepsilon})} + 2C_m \tilde{C} |t-s|^{\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}} \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} 2^{-n(1+2\tilde{\varepsilon})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\tilde{C}|t-s|^{1+\tilde{\varepsilon}} + 2C_m \tilde{C} |t-s|^{\frac{1}{2}+\tilde{\varepsilon}} \right) 2^{-n\tilde{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Se $n \to \infty$, temos $\|w_{s,t}\|_{L^m} = 0$, portanto v é uma modificação de I. Considerando o argumento já trabalhado na demonstração do Sewing Lemma a unicidade de I garante sua aditividade (ver pag. 32).

Podemos então definir $\mathcal{I}\Xi_t := I_{0,t}$ e temos que

$$\mathcal{I}\Xi_{s,t} = I_{0,t} - I_{0,s} = I_{s,t}$$

Em particular $\mathcal{I}\Xi_0 = 0$, $\mathcal{I}\Xi_t$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável e L^m-integrável.

Por último, dado $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$ considere $\pi = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ uma partição qualquer de $[s,t]$. Então usando

$$\mathcal{I}\Xi_{s,t} - \sum_{i=0}^{N-1} \Xi_{t_i,t_{i+1}} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\mathcal{I}\Xi_{t_i,t_{i+1}} - \Xi_{t_i,t_{i+1}} \right)$$

em conjunto com a Estimativa (3.19) e as Hipóteses (3.20) e (3.21) temos

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{I}\Xi_{s,t} - \sum_{i=0}^{N-1} \Xi_{t_i,t_{i+1}} \right\|_{L^m} \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \mathbb{E}_{t_i} \left(\mathcal{I}\Xi_{t_i,t_{i+1}} - \Xi_{t_i,t_{i+1}} \right) \right\|_{L^m} + 2C_m \left(\sum_{i=0}^{N-1} \left\| \mathcal{I}\Xi_{t_i,t_{i+1}} - \Xi_{t_i,t_{i+1}} \right\|_{L^m}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_1 C_1 \left| t_{i+1} - t_i \right|^{1+\varepsilon_1} + 2C_m \left(\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_1^2 C_1^2 \left| t_{i+1} - t_i \right|^{2+2\varepsilon_1} + \lambda_2^2 C_2^2 \left| t_{i+1} - t_i \right|^{1+2\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \tilde{C} \left(\sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i| \, |\pi|^{\varepsilon_1} + \left(\sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i| \, |\pi|^{1+2\varepsilon_1} + |t_{i+1} - t_i| \, |\pi|^{2\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \tilde{C} \left(|\pi|^{\varepsilon_1} + |\pi|^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1} + |\pi|^{\varepsilon_2} \right) \xrightarrow{|\pi| \to 0} 0, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \left(\lambda_1 C_1 + 2C_m(\lambda_1^2 C_1^2 + \lambda_2^2 C_2^2)^{\frac{1}{2}}\right)$. Disso deduzimos que $\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \Xi_{u,v} = \mathcal{I}\Xi_{s,t}$ em L^m. ■

Observação 3.28. O lema assegura a convergência L^m das somas, então como resultado temos também a convergência em probabilidade.

Como prometido, agora será apresentado dois teoremas importantes para a teoria estocástica, mas agora com demonstrações simples.

Teorema 3.29 (Integral de Itô)**.** *Seja B um movimento Browniano em $\mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^\beta$ para algum $\beta \in (0,1]$. Então a Integral de Itô definida por*

$$\int_0^T f(B_r) \otimes dB_r = \mathbb{P}\text{-}lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} f(B_u) \otimes B_{u,v}$$

existe. Além disso a integral é um processo martingale.

Demonstração. A demonstração é uma aplicação direta do lema. Defina $\Xi_{s,t} = f(B_s)B_{s,t}$, temos então

$$\delta\Xi_{s,u,t} = f(B_s) \otimes B_{s,t} - f(B_s) \otimes B_{s,u} - f(B_u) \otimes B_{u,t} = -f(B)_{s,u} \otimes B_{u,t}$$

veja que

$$\begin{aligned}
\|f(B)_{s,u} \otimes B_{u,t}\|_{L^m}^m &\leqslant \mathbb{E}\left[|f(B)_{s,u} \otimes B_{u,t}|^m\right] = \mathbb{E}\left[|f(B)_{s,u}|^m |B_{u,t}|^m\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\|f\|_\beta^m |B_{s,u}|^{m\beta} |B_{u,t}|^m\right] \leqslant \|f\|_\beta^m \mathbb{E}\left[|B_{s,u}|^{m\beta}\right] \mathbb{E}\left[|B_{u,t}|^m\right] \\
&\leqslant \|f\|_\beta^m \|B_{s,u}\|_{L^{m\beta}}^{m\beta} \|B_{u,t}\|_{L^m}^m
\end{aligned}$$

assim, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\delta\Xi_{s,u,t}\|_{L^m} &= \|f\|_\beta \|B_{s,u}\|_{L^{m\beta}}^\beta \|B_{u,t}\|_{L^m} \\
&\leqslant \|f\|_\beta \|B_1\|_{L^{m\beta}}^\beta |u-s|^{\beta/2} \|B_1\|_{L^m} |t-u|^{1/2} \\
&\leqslant \|f\|_\beta \|B_1\|_{L^{m\beta}}^\beta \|B_1\|_{L^m} |t-s|^{1/2+\beta/2}
\end{aligned}$$

Além disso, com uma conta rápida obtemos

$$\mathbb{E}_s[f(B)_{s,u} \otimes B_{u,t}] = \mathbb{E}_s[f(B)_{s,u}] \otimes \mathbb{E}[B_{u,t}] = \mathbb{E}_s[f(B)_{s,u}] \otimes 0 = 0.$$

Com isso, aplicamos o teorema para $\varepsilon_2 = \beta/2$, $\lambda_2 = \|f\|_\beta \|B_1\|_{L^{m\beta}}^\beta \|B_1\|_{L^m}$ e $\lambda_1 = 0$. Como consequência temos que a integral esta bem definida. Também temos as seguintes estimativas

$$\left\| \int_s^t f(B_r) \otimes dB_r - f(B_s) \otimes B_{s,t} \right\|_{L^m} \leqslant C \|f\|_\beta \|B_1\|_{L^{m\beta}}^\beta \|B_1\|_{L^m} |t-s|^{1/2+\beta/2}$$

e
$$\left\|\mathbb{E}_s\left[\int_s^t f(B_r)\otimes B_r - f(B_s)\otimes B_{s,t}\right]\right\|_{L^m} = \left\|\mathbb{E}_s\left[\int_s^t f(B_r)\otimes B_r\right]\right\|_{L^m} = 0,$$
isto é, $\mathbb{E}_s\left[\int_s^t f(B_r)\otimes B_r\right] = 0$ quase sempre. Em particular, esta última identidade garante a propriedade martingale da integral. ∎

Teorema 3.30 (Variação Quadrática). *Seja M um martingale L^4 integrável e $\mathcal{F}_t$-adaptado em $\mathbb{R}^d$. Assuma também que para todo $s \leqslant u \leqslant t$*
$$\|M_{s,u}\otimes M_{u,t}\|_{L^2} \leqslant C|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$
para constantes C e $\varepsilon > 0$. Então existe a variação quadrática definida por
$$[M]_t = \mathbb{P}\text{-}lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} M_{u,v}\otimes M_{u,v}.$$
Além disso, $M\otimes M - [M]$ é martingale.

Demonstração. Mais uma vez, o resultado é aplicação direta do lema. Defina $\Xi_{s,t} := M_{s,t}\otimes M_{s,t}$. Então
$$\begin{aligned}\delta\Xi_{s,u,t} &= M_{s,t}\otimes M_{s,t} - M_{s,u}\otimes M_{s,u} - M_{u,t}\otimes M_{u,t}\\ &= (M_{s,u}+M_{u,t})\otimes(M_{s,u}+M_{u,t}) - M_{s,u}\otimes M_{s,u} - M_{u,t}\otimes M_{u,t}\\ &= M_{s,u}\otimes M_{u,t} + M_{u,t}\otimes M_{s,u}.\end{aligned}$$
Da hipótese temos
$$\|\delta\Xi_{s,u,t}\|_{L^2} \leqslant 2C|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$
Além disso
$$\mathbb{E}_s\delta\Xi_{s,u,t} = \mathbb{E}_s M_{s,u}\otimes\mathbb{E}_s M_{u,t} + \mathbb{E}_s M_{u,t}\otimes\mathbb{E}_s M_{s,u} = 0,$$
o que garante que podemos aplicar o lema para $\lambda_1 = 0$. Então definimos
$$[M]_t := \mathcal{I}\Xi_t = \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{[u,v]\in\pi} M_{u,v}\otimes M_{u,v}$$
de modo que $[M]_0 = 0$ e
$$\|[M]_{s,t} - M_{s,t}\otimes M_{s,t}\|_{L^2} \leqslant \tilde{C}|t-s|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$
Além disso,
$$\|\mathbb{E}_s\left[\,[M]_{s,t} - (M_{s,t}\otimes M_{s,t})\,\right]\|_{L^2} = 0 \implies \mathbb{E}_s\left[M\right]_{s,t} = \mathbb{E}_s\left[M_{s,t}\otimes M_{s,t}\right] \text{ quase sempre.}$$
Utilizando a propriedade $\mathbb{E}_s\left[M^i_{s,t}M^j_{s,t}\right] = \mathbb{E}_s\left[M^i_t M^j_t - M^i_s M^j_s\right]$ obtemos
$$\mathbb{E}_s\left[M_{s,t}\otimes M_{s,t}\right]^{i,j} = \mathbb{E}_s\left[M^i_{s,t}M^j_{s,t}\right] = \mathbb{E}_s\left[M^i_t M^j_t - M^i_s M^j_s\right] = \mathbb{E}_s\left[M_t\otimes M_t - M_s\otimes M_s\right]^{i,j}.$$
Então
$$\mathbb{E}_s[M]_{s,t} = \mathbb{E}_s\left[M_t\otimes M_t - M_s\otimes M_s\right] \implies \mathbb{E}_s\left[[M]_t - M_t\otimes M_t\right] = [M]_s - M_s\otimes M_s,$$
isto é, $[M] - M\otimes M$ é martingale. ∎

4 Integral Rough Estocástica

Neste capítulo iremos juntar os resultados do Capítulo 2 com os do Capítulo 3. De imediato já temos que os levantamentos de Itô e Stratonovich satisfazem caminho a caminho as condições do Teorema de Gubinelli, então a existência da integral é obtida. Além disso, apresentaremos a equivalência entre as integrais estocásticas com a rough.

4.1 Integral Estocástica

Como estabelecido no Capítulo 2, dado um movimento Browniano $B : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ podemos considerar o par $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B}^{\text{Itô}})$ que é, a menos de modificação, um α-rough path quase sempre. Em outras palavras, existe conjunto N_1 tal que para todo $\omega \in N_1^c$ o caminho $\mathbf{B}(\omega)$ está em $\mathscr{C}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ e $\mathbb{P}(N_1) = 0$. No que segue considere $N_i \subset \Omega$ conjuntos mensuráveis de medida nula.

Proposição 4.1. *Assuma* $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}\left([0,T], \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e\right)\right)$ *pra todo* $\omega \in N_2^c$. *Defina* $N_3 := N_1 \cup N_2$. *Então a integral rough*

$$\int_0^T Y_r(\omega) d\mathbf{B}_r(\omega) = \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \pi} Y_u B_{u,v} + Y'_u \mathbb{B}_{u,v}$$

existe para todo $\omega \in N_3^c$. *Escrevemos o processo estocástico resultante como* $\int_0^T Y d\mathbf{B}$. *Além disso, se* Y, Y' *são processos adaptados, então quase sempre*

$$\int_0^T Y d\mathbf{B} = \int_0^T Y dB.$$

Demonstração. A existência da integral é garantida pelo Teorema (3.13).

Para provar a equivalência entre as integrais lembre-se que para qualquer sequência de partições $\pi_n \in \mathcal{D}([0,T])$ definimos a integral de Itô como

$$\int_0^T Y dB = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n \to \infty} \sum_{[u,v] \in \pi_n} Y_u B_{u,v}. \tag{4.1}$$

Dado que a convergência é em probabilidade, sabemos que, a menos de subsequência, temos também a convergência quase sempre, digamos em N_4^c. Defina agora $N_5 = N_3 \cup N_4$. Nosso objetivo é mostrar que as integrais coincidem quase sempre neste conjunto. Comece supondo que existe $M > 0$ tal que $\sup_{\omega \in N_5^c} \|Y'(\omega)\|_\infty \leqslant M$. Veja que em N_5^c

$$\sum_{[u,v] \in \pi_n} Y'_u \mathbb{B}_{u,v} \to \int_0^T Y_r d\mathbf{B}_r - \int_0^T Y_r dB_r$$

e com uma conta rápida para todo $u < v \leqslant s < t$ temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y'_u\mathbb{B}_{u,v} \cdot Y'_s\mathbb{B}_{s,t}] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y'_u\mathbb{B}_{u,v} \cdot Y'_s\mathbb{B}_{s,t}|\mathcal{F}_s]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Y'_u\mathbb{B}_{u,v} \cdot Y'_s\mathbb{E}[\mathbb{B}_{s,t}|\mathcal{F}_s]\right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde o produto denotado é o produto interno usual e a última igualdade obtemos pois $\mathbb{B}_{s,\cdot}$ é martingale, portanto $\mathbb{E}[\mathbb{B}_{s,t}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{B}_{s,s} = 0$. Veja então que para todo $\pi \in \mathcal{D}([0,T])$

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{[s,t]\in\pi} Y'_s\mathbb{B}_{s,t}\right|^2\right] = \sum_{[s,t]\in\pi} \mathbb{E}\left[|Y'_s\mathbb{B}_{s,t}|^2\right].$$

Usado $\mathbb{E}[|\mathbb{B}_{s,t}|^2] \leqslant C|t-s|^2$ (provado na Proposição (2.4)) temos

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u\mathbb{B}_{u,v}\right|^2\right] = \sum_{[u,v]\in\pi} \mathbb{E}\left[|Y'_u\mathbb{B}_{u,v}|^2\right] \leqslant CM^2 \sum_{[u,v]\in\pi} |t-s|^2 \leqslant CM^2T|\pi|, \tag{4.2}$$

o que implica

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u\mathbb{B}_{u,v}\right|^2\right] \xrightarrow{|\pi|\to 0} 0.$$

Em particular, temos que $\sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u\mathbb{B}_{u,v} \to 0$ quase sempre em N_5^c, isto é, as integrais de fato coincidem com probabilidade 1.

Agora para o caso geral $\sup_{\omega\in N_5^c} \|Y'(\omega)\|_\infty = \infty$. Defina para todo $M > 0$ o tempo de parada

$$\tau_M(\omega) := T \wedge \inf\{t \in [0,T] : |Y'_t(\omega)| \geqslant M\}.$$

Podemos então aplicar o mesmo argumento para os processos $(Y')^{\tau_M}$ e $\mathbf{B}^{\tau_M}$ para garantir que

$$\int_0^{\tau_M} Y_r d\mathbf{B}_r = \int_0^{\tau_M} Y_r^{\tau_M} d\mathbf{B}_r^{\tau_M} = \int_0^{\tau_M} Y_r^{\tau_M} dB_r^{\tau_M} = \int_0^{\tau_M} Y_r dB_r.$$

Por último veja que $\tau_M(\omega) \to T$ a medida que $M \to \infty$. ■

Proposição 4.2. *Nas mesmas suposições da proposição anterior, se* $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{Strat}$, *garantimos as existência da integral rough* $\int_0^T Y d\mathbf{B}$. *Além disso se* Y, Y' *forem processos adaptados, a covariação quadrática de* Y *com* B *existe e quase sempre*

$$\int_0^T Y d\mathbf{B} = \int_0^T Y \circ dB.$$

Demonstração. Como $\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + f_{s,t}$, onde $f(t) = \frac{1}{2}(t-s)I$ temos

$$Sym\left(\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t}\right) = Sym\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t}\right) + \frac{1}{2}(t-s)I = \frac{1}{2}B_{s,t} \otimes B_{s,t}$$

Como $Y_{s,t} = Y'_s B_{s,t} + R^Y_{s,t}$

$$Y_{s,t}B_{s,t} = Y'_s B_{s,t} \otimes B_{s,t} + R^Y_{s,t}B_{s,t} = 2Y'_s Sym\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t}\right) + Y'_s(t-s)I + R^Y_{s,t}B_{s,t} \tag{4.3}$$

Se definirmos $\mathbb{S}_{u,v} := Sym\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right) = \dfrac{1}{2}(B_{u,v} \otimes B_{u,v} - (v-u)I)$, podemos aplicar o mesmo argumento da última proposição. Veja que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[2\mathbb{S}^{i,j}_{s,t}|\mathcal{F}_s\right] =& \mathbb{E}\left[B^i_{u,v}B^j_{u,v} - (v-u)\delta_{i,j}|\mathcal{F}_s\right] \\
\text{se } i = j \implies& \mathbb{E}\left[\left(B^i_{u,v}\right)^2|\mathcal{F}_s\right] - (v-u) = 0 \\
\text{se } i \neq j \implies& \mathbb{E}\left[B^i_{u,v}B^j_{u,v}|\mathcal{F}_s\right] = 0
\end{aligned}$$

então para $u < v \leqslant s < t$

$$\mathbb{E}\left[Y'_u\mathbb{S}_{u,v} \cdot Y'_s\mathbb{S}_{s,t}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y'_u\mathbb{S}_{u,v} \cdot Y'_s\mathbb{S}_{s,t}|\mathcal{F}_s\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y'_u\mathbb{S}_{u,v} \cdot Y'_s\mathbb{E}\left[\mathbb{S}_{s,t}|\mathcal{F}_s\right]\right] = 0.$$

Avaliando a norma L^2 como em (4.2), obtemos $\lim\limits_{|\pi|\to 0} \sum\limits_{[u,v]\in\pi} Y'_u\mathbb{S}_{u,v} \to 0$ quase sempre. Veja também que

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u(v-u)I = \int_0^T Y'_r dr.$$

Por último,

$$\left|\sum_{[u,v]\in\pi} R^Y_{u,v}B_{u,v}\right| \leqslant \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}\left\|B\right\|_{\alpha} \sum_{[u,v]\in\pi} |t-s|^{3\alpha} \leqslant \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}\left\|B\right\|_{\alpha} T|\pi|^{3\alpha-1} \xrightarrow{|\pi|\to 0} 0. \tag{4.4}$$

Aplicando os últimos dois argumentos em (4.3) com a definição de covariação quadrática temos

$$< Y, B >_T := \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_{u,v}B_{u,v} = \int_0^T Y'_r dr$$

Aplicando o Exemplo (3.17) temos

$$\int_0^T Y_r d\mathbf{B}^{\text{Strat}} = \int_0^T Y_r d\mathbf{B}^{\text{Itô}} + \frac{1}{2}\int_0^T Y'_r dr$$

e usando a proposição passada conseguimos garantir a igualdade das integrais

$$\int_0^T Y_r d\mathbf{B}^{\text{Strat}} = \int_0^T Y_r dB + \frac{1}{2} < Y, B >_T = \int_0^T Y_r \circ dB_r.$$

■

4.2 Fórmula de Itô Para Rough Paths

Do Teorema (3.20), concluímos que se $V = \mathbb{R}^d$, $W = \mathbb{R}^e$, $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ é α-rough path e $G \in C^2_b\left(R^d, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e\right)\right)$ então

$$\int G(X)d\mathbf{X} \approx \sum_{[u,v]\in\pi} G(X_u)X_{u,v} + DG(X_u)\mathbb{X}_{u,v}.$$

Como $V \otimes V = Sym^2(V) \oplus Anti^2(V)$, temos

$$\mathbb{X} = Sym(\mathbb{X}) + Anti(\mathbb{X}) =: \mathbb{S} + \mathbb{A},$$

de modo que o segundo termo da soma é

$$DG(X_u)\mathbb{X}_{u,v} = DG(X_u)\mathbb{S}_{u,v} + DG(X_u)\mathbb{A}_{u,v}.$$

Observe que se $G = DF$ para alguma função $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$, então $DG = D^2F$ é tal que $D^2F(v_1 \otimes v_2) = D^2F(v_2 \otimes v_1)$. Disso, para todo $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, usando a simetria de DG e a antissimetria de $\mathbb{A}$ temos

$$DG(X_u)\mathbb{A}^{i,j}_{u,v} = DG(X_u) - \mathbb{A}^{j,i}_{u,v} = -DG(X_u)\mathbb{A}^{i,j}_{u,v},$$

isto é $DG(X_u)\mathbb{A}_{u,v} = 0$. O que significa que para uma função que gradiente outra a parte antissimétrica de $\mathbb{X}$ não tem influência nenhuma na integral.

Definição 4.3. Dizemos que $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S})$ é um α-rough path *reduzido* e que $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha_r([0,T], V)$ se $\mathbb{S}$ toma valores em $Sym^2(V)$ e:

i) (Relação de Chen Reduzida) $S_{s,t} - S_{s,u} - S_{u,t} = Sym(X_{s,u} \otimes X_{u,t})$;

ii) $\|X\|_\alpha$ e $\|\mathbb{S}\|_{2\alpha}$ são finitas para algum $\alpha > 1/3$.

Veja que todo α-rough path $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ induz um reduzido definindo $\mathbb{S} = Sym(\mathbb{X})$. Além disso, dado caminho $X \in C^\alpha$ definimos o levantamento canônico para um α-rough path reduzido por $\mathbb{S} = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}$. Assim como no caso padrão de rough paths esse levantamento não é único. O seguinte lema nos dá uma caracterização de todos os possíveis levantamentos.

Lema 4.4. *Seja $X \in C^\alpha$ um caminho com $\alpha \in (1/3, 1/2]$. Defina $\overline{\mathbb{S}} = \frac{1}{2} X_{s,t} \otimes X_{s,t}$, então:*

i) $(X, \overline{\mathbb{S}}) \in \mathscr{C}^\alpha_r$;

ii) Para todo caminho $\gamma \in C^{2\alpha}\big([0,T], Sym^2(V)\big)$ a perturbação de $\overline{\mathbb{S}}$ definida por $\mathbb{S}_{s,t} := \overline{\mathbb{S}}_{s,t} + \frac{1}{2}(\gamma_t - \gamma_s) = \frac{1}{2}(X_{s,t} \otimes X_{s,t} + \gamma_{s,t})$ é tal que $(X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}^\alpha_r$;

iii) Por último, todo α-rough path reduzido é dessa forma.

Demonstração. i) a) $\overline{\mathbb{S}}_{s,t} - \overline{\mathbb{S}}_{s,u} - \overline{\mathbb{S}}_{u,t} = \frac{1}{2}(X_{s,t} \otimes X_{s,t} - X_{s,u} \otimes X_{s,u} - X_{u,t} \otimes X_{u,t}) = \frac{1}{2}(X_{s,t} \otimes X_{s,u} + X_{s,t} \otimes X_{u,t} - X_{s,u} \otimes X_{s,u} - X_{u,t} \otimes X_{u,t}) = \frac{1}{2}(X_{u,t} \otimes X_{s,u} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}) = Sym(X_{s,u} \otimes X_{u,t})$;

b) $X \in C^\alpha$ e $\|\overline{\mathbb{S}}\|_{2\alpha} = \|X\|_\alpha \|X\|_\alpha < \infty$.

ii) a) $\mathbb{S}_{s,t} - \mathbb{S}_{s,u} - \mathbb{S}_{u,t} = \overline{\mathbb{S}}_{s,t} - \overline{\mathbb{S}}_{s,u} - \overline{\mathbb{S}}_{u,t} + \frac{1}{2}(\gamma_{s,t} - \gamma_{s,u} - \gamma_{u,t}) = \overline{\mathbb{S}}_{s,t} - \overline{\mathbb{S}}_{s,u} - \overline{\mathbb{S}}_{u,t} = Sym(X_{s,u} \otimes X_{u,t})$;

b) $\|\mathbb{S}\|_{2\alpha} \leqslant \|\overline{\mathbb{S}}\|_{2\alpha} + \|\gamma\|_{2\alpha} < \infty$.

iii) Dado $\mathbb{S}$ tal que $(X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$, defina $\gamma_{s,t} := 2\mathbb{S}_{s,t} - X_{s,t} \otimes X_{s,t}$, então:

a) $\|\gamma\|_{2\alpha} \leqslant \|2\mathbb{S}\|_{2\alpha} + \|X \otimes X\|_{2\alpha} < \infty$;

b) Como para todo $s, t \in [0, T]$ temos que $\mathbb{S}_{s,t}$ e $X_{s,t} \otimes X_{s,t}$ assume valores em $Sym^2(V)$ que é subespaço vetorial de $V \otimes V$, então $\gamma_{s,t} \in Sym^2(V)$

■

Observe que esse lema, em outras palavras, nos diz que fixado caminho $X \in \mathcal{C}^\alpha$ há uma correspondência biunívoca entre levantamentos para rough paths reduzidos e caminhos 2α-Hölder em $Sym^2(V)$.

Definição 4.5. Dado $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha$, definimos

$$[\mathbf{X}] : [0, T] \to Sym^2(V); \quad t \mapsto [\mathbf{X}]_t := X_{0,t} \otimes X_{0,t} - 2\mathbb{S}_{0,t}$$

Veja que $[\mathbf{X}] \in C^{2\alpha}$ e

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}]_{s,t} &= X_{0,t} \otimes X_{0,t} - 2\mathbb{S}_{0,t} - X_{0,s} \otimes X_{0,s} + 2\mathbb{S}_{0,s} \\
&= X_{0,s} \otimes X_{0,s} + X_{0,s} \otimes X_{s,t} + X_{s,t} \otimes X_{0,s} + X_{s,t} \otimes X_{s,t} \\
&\quad - X_{0,s} \otimes X_{0,s} - 2(\mathbb{S}_{0,t} - \mathbb{S}_{0,s}) \\
&= X_{0,s} \otimes X_{s,t} + X_{s,t} \otimes X_{0,s} + X_{s,t} \otimes X_{s,t} - 2\left(\mathbb{S}_{s,t} + \frac{1}{2} Sym(X_{0,s} \otimes X_{s,t})\right) \\
&= X_{0,s} \otimes X_{s,t} + X_{s,t} \otimes X_{0,s} + X_{s,t} \otimes X_{s,t} - 2\mathbb{S}_{s,t} - X_{0,s} \otimes X_{s,t} - X_{s,t} \otimes X_{0,s} \\
&= X_{s,t} \otimes X_{s,t} - 2\mathbb{S}_{s,t}
\end{aligned}$$

dessa conta temos que $[\mathbf{X}]_{s,t} = [\mathbf{X}]_{0,t} - [\mathbf{X}]_{0,s}$

Proposição 4.6 (Fórmula de Itô para Rough Paths)**.** *Seja $F \in C_b^3(V, W)$ e $\mathbf{X} = (X, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^\alpha([0, T], V)$ para algum $\alpha > 1/3$. Então, para todo $t \in [0, T]$:*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_r) d\mathbf{X}_r + \frac{1}{2} \int_0^t D^2 F(X_r) d[\mathbf{X}]_r, \tag{4.5}$$

onde a primeira integral se refere à integral de 1-forma e a segunda é uma integral de Young.

Demonstração. Primeiramente considere o caso geométrico $\mathbb{S} = \overline{\mathbb{S}}$, então $[\mathbf{X}] \equiv 0$. Usando soma telescópica e série de Taylor temos que:

$$\begin{aligned} F(X_t) - F(X_0) &= \sum_{[u,v]\in\pi} F(X_v) - F(X_u) \\ &= \sum_{[u,v]\in\pi} DF(X_u)X_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(X_u)(X_{u,v} \otimes X_{u,v}) + r(|v-u|) \\ &= \sum_{[u,v]\in\pi} DF(X_u)X_{u,v} + D^2F(X_u)\overline{\mathbb{S}}_{u,v} + r(|v-u|), \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $r(|v-u|)$ é o resto de Taylor. Então quando $|\pi| \to 0$ temos que $\sum_{[u,v]\in\pi} r(|v-u|) \to 0$, que aplicando na equação obtemos $F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t DF(X_r)d\mathbf{X}_r$.

Agora para o caso não geométrico, considere $\overline{\mathbb{S}} = \mathbb{S} + [\mathbf{X}]/2$. Como $F \in C_b^3$ sabemos que D^2F é Lipschitz em conjunto com $X \in \mathcal{C}^\alpha$ temos $D^2F \circ X \in \mathcal{C}^\alpha$. Como $[\mathbf{X}] \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ podemos aplicar Young para garantir a convergência

$$\sum_{[u,v]\in\pi} D^2F(X_u)[\mathbf{X}]_{u,v} \xrightarrow{|\pi|\to 0} \int_0^t D^2F(X_r)d[\mathbf{X}]_r.$$

Continuando (4.6) temos:

$$\begin{aligned} &\sum_{[u,v]\in\pi} DF(X_u)X_{u,v} + D^2F(X_u)\mathbb{S}_{u,v} + D^2F(X_u)[\mathbf{X}]_{u,v}/2 + r(|v-u|) \\ &= \int_0^t DF(X_r)d\mathbf{X}_r + \int_0^t D^2F(X_r)d[\mathbf{X}]_r. \end{aligned}$$

■

Corolário 4.7. *Em particular, a proposição anterior vale para qualquer α-rough path (não necessariamente reduzido) se definirmos o colchete como* $[\mathbf{X}]_t = X_{0,t} \otimes X_{0,t} - 2Sym(\mathbb{X}_{0,t})$

Demonstração. Considere $\mathbb{S}_{s,t} := Sym(\mathbb{X}_{s,t})$ e $\tilde{\mathbf{X}} = (X, \mathbb{S})$, então pela proposição temos

$$F(X)_{0,t} = \int_0^t DF(X_r)d\tilde{\mathbf{X}}_r + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_r)d[\tilde{\mathbf{X}}]_r.$$

Para o segundo termo é suficiente observar que $[\mathbf{X}] = [\tilde{\mathbf{X}}]$. Para a primeira integral usamos o fato de $D^2F(X_u)$ ser uma transformação linear simétrica para afirmar que $D^2F(X_u)\left(\mathbb{S}_{u,v} \oplus Anti(\mathbb{X}_{u,v})\right) = D^2F(X_u)\mathbb{S}_{u,v}$, então

$$\begin{aligned} \int_0^t DF(X_r)d\tilde{\mathbf{X}}_r &= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} DF(X_u)X_{u,v} + D^2F\mathbb{S}_{u,v} \\ &= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} DF(X_u)X_{u,v} + D^2F\mathbb{X}_{u,v} \\ &= \int_0^t DF(X_r)d\mathbf{X}_r. \end{aligned}$$

Juntando tudo temos

$$F(X)_{0,t} = \int_0^t DF(X_r)d\tilde{\mathbf{X}}_r + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_r)d[\tilde{\mathbf{X}}]_r = \int_0^t DF(X_r)d\mathbf{X}_r + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(X_r)d[\mathbf{X}]_r.$$

■

Exemplo 4.8. Veja que podemos obter a fórmula de Itô tradicional deste resultado, considere o movimento Browniano como rough path $\mathbf{B} = (B, \mathbb{B})$ com o levantamento de Itô. Como

$$2\mathbb{S}_{0,t}^{i,j} = \int_0^t B_u^i dB_u^j + \int_0^t B_u^j dB_u^i = \frac{B_t^i B_t^j - t\delta_{i,j}}{2} + \frac{B_t^j B_t^i - t\delta_{j,i}}{2} = B_t^i B_t^j - \left[B^i, B^j\right]_t$$

temos que

$$[\mathbf{B}]_t^{i,j} = B_{0,t}^i B_{0,t}^j - 2\mathbb{S}_{0,t}^{i,j} = \left[B^i, B^j\right]_t.$$

Isso em conjunto com o teorema e o fato de que a integral de Itô coincide quase sempre com a rough temos

$$\begin{aligned} F(B_t) &= F(B_0) + \int_0^t DF(B_s)d\mathbf{B}_s + \int_0^t D^2F(B_s)d[\mathbf{B}]_s \\ &\overset{\text{q.s.}}{=} F(B_0) + \int_0^t DF(B_s)dB_s + \int_0^t D^2F(B_s)d\left[B, B\right]_s. \end{aligned}$$

4.3 Fórmula de Itô Föllmer

Definição 4.9. Seja sequência de partições encaixadas $(\pi_n) \in \mathcal{D}([0,T])$ tal que $|\pi_n| \to 0$. Então dizemos que a função $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ tem variação quadrática finita no sentido de Föllmer ao longo de (π_n) se para todo $t \in [0,T]$ e $1 \leqslant i,j \leqslant d$ existe o limite

$$[X^i, X^j]_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} (X^i_{v\wedge t} - X^i_{u\wedge t})(X^j_{v\wedge t} - X^j_{u\wedge t}).$$

Observe que por definição a variação quadrática é simétrica, dizemos que $[X,X]$ é o caminho resultante em $Sym^2(\mathbb{R}^d)$.

Lema 4.10. *Seja $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ com variação quadrática finita no sentido de Föllmer ao longo de (π_n). Então:*

i) $t \mapsto [X,X]_t$ *é de variação limitada em* $[0,T]$;

ii) Se $t \mapsto [X,X]_t$ *for contínua, então para toda função* $G : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ *contínua temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n;\, u<t} G(u)(X_{u,v} \otimes X_{u,v}) = \int_0^t G(r)d[X,X]_r.$$

Demonstração. i) Para facilitar a notação escreva $[X^i] := [X^i, X^i]$, usando $ab = \frac{1}{2}(a+b) - a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned}
[X^i, X^j]_t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} (X^i_{v\wedge t} - X^i_{u\wedge t})(X^j_{v\wedge t} - X^j_{u\wedge t}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} \frac{1}{2}\left((X^i + X^j)_{v\wedge t} - (X^i + X^j)_{u\wedge t}\right)^2 \\
&\quad - (X^i_{v\wedge t} - X^i_{u\wedge t})^2 - (X^j_{v\wedge t} - X^j_{u\wedge t})^2 \\
&= [X^i + X^j]_t - [X^i]_t - [X^j]_t
\end{aligned}$$

Como as componentes deste último termo são monótonas, temos que cada uma tem variação limitada e soma de funções de variação limitada tem variação limitada. Portanto, como $[X^i, X^j]_. \in C^{1\text{-var}}$ para todo i, j, temos que $[X, X]$ possui variação limitada.

ii) Suponha $g \in C([0,T], \mathbb{R})$ e Y de variação quadrática finita com $t \mapsto [Y]_t$ contínuo.

<u>Afirmação:</u> $\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n;\, u<t} g(u)Y^2_{u,v} = \int_0^t g(r)d[Y]_r.$

De fato, $\mu_n := \sum_{[u,v]\in\pi_n;\, u<t} \delta_u Y^2_{u,v}$ define uma medida finita sobre $[0,t)$ então de imediato temos

$$\sum_{[u,v]\in\pi_n:\, u<t} g(u)Y^2_{u,v} = \int_0^t g(r)d\mu_n(r).$$

Considere agora a função distribuição acumulada

$$F_n(s) := \mu_n([0,s]) = \sum_{[u,v]\in\pi_n;\, u\leqslant s} Y^2_{u,v}.$$

Veja que para todo $s < t$, pela continuidade de Y temos

$$\lim_{n\to\infty} F_n(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} (Y_{v\wedge s} - Y_{u\wedge s})^2 - Y^2_{u_n,t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} (Y_{v\wedge s} - Y_{u\wedge s})^2 = [Y]_s,$$

onde $u_n = \max\{u \in \pi_n | u < t\}$. Pela continuidade de $[Y]_s$ temos que a convergência pontual de F_n para $[Y]_s$ garante a convergência fraca das medidas μ_n para $d[Y]_s$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n;\, u<t} g(u)Y^2_{u,v} = \lim_{n\to\infty} \int_0^t g(r)d\mu_n(r) = \int_0^t g(r)d[Y]_r.$$

Veja então que para toda componente $G^k_{i,j}$ com $1 \leqslant i,j \leqslant d$ e $1 \leqslant k \leqslant e$, podemos aplicar a afirmação para concluir nosso resultado

$$\begin{aligned}
&\sum_{[u,v]\in\pi_n;\, u<t} G^k_{i,j}(u) X^i_{u,v} X^j_{u,v} \\
&\qquad = \sum_{[u,v]\in\pi_n;\, u<t} G^k_{i,j}(u) \left(\frac{1}{2} (X^i_{u,v} + X^j_{u,v})^2 - (X^i_{u,v})^2 - (X^j_{u,v})^2 \right) \\
&\qquad = \int_0^t G^k_{i,j}(r) d \left(\frac{1}{2} [X^i + X^j]_r \right) - \int_0^t G^k_{i,j}(r) d[X^i]_r - \int_0^t G^k_{i,j}(r) d[X^j]_r \\
&\qquad = \int_0^t G^k_{i,j}(r) d[X^i, X^j]_r,
\end{aligned}$$

onde o último passo obtemos pela bilinearidade da integral de Riemann-Stieltjes.

■

Veja que se reajustarmos as somas na fórmula de Itô obtemos

$$\begin{aligned}
F(X)_{0,t} &= \int_0^t DF(X_r) d\mathbf{X}_r + \frac{1}{2} \int_0^t D^2 F(X_r) d[\mathbf{X}]_r \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} (DF(X_u) X_{u,v} + D^2 F(X_u) \mathbb{S}_{u,v}) + \sum_{[u,v]\in\pi} D^2 F(X_u) [\mathbf{X}]_{u,v} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} DF(X_u) X_{u,v} + D^2 F(X_u) (\mathbb{S}_{u,v} + [\mathbf{X}]_{u,v}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} DF(X_u) X_{u,v} + D^2 F(X_u) (X_{u,v} \otimes X_{u,v}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} DF(X_u) X_{u,v} + \int_0^t D^2 F(X_r) d[X, X]_r.
\end{aligned}$$

Então se definirmos $\int_0^t DF(X) dX = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\pi_n} DF(X_u) X_{u,v}$ temos a fórmula de Itô-Föllmer para todo X contínuo de variação quadrática finita e contínua, dada por

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t DF(X_r) dX_r + \frac{1}{2} \int_0^t D^2 F(X_r) d[X, X]_r.$$

Uma última observação é que a fórmula depende da sequência de partições escolhida.

5 Operações em Rough Paths Controlados

Começamos agora o capítulo mais técnico do texto. Nosso principal objetivo aqui é estabelecer uma noção de composição de funções sobre rough paths controlados e criar ferramentas que nos ajudarão na análise de equações diferenciais.

5.1 Equivalência das Integrais

Nesta seção vamos utilizar das ferramentas já estabelecidas pra traçar uma relação entre as noções de integrais já trabalhadas. Primeiramente vamos definir um objeto sai naturalmente dos resultados do capítulo 3.

Definição 5.1. Se $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ e $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$, então o *rough path associado* à (Y, Y') é $(Y, \mathbb{Y})$ tal que

$$\mathbb{Y}_{s,t} := \int_s^t Y_{s,r} \otimes dY_r = \mathcal{I}\Xi_{s,t}, \quad \text{onde} \quad \Xi_{u,v} = Y_u \otimes Y_{u,v} + (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v}. \tag{5.1}$$

A integral em questão é a definida em (3.10).

Observação 5.2. Veja que o par definido acima é de fato um α-rough path, uma vez que em (3.11) temos que $|\mathbb{Y}_{s,t} - (Y'_s \otimes Y'_s)\mathbb{X}_{s,t}| = O(|t-s|^{3\alpha})$ e como $|(Y'_s \otimes Y'_s)\mathbb{X}_{s,t}| = O(|t-s|^{2\alpha})$ sabemos que $\|\mathbb{Y}\|_{2\alpha} < \infty$. Além disso, a Relação de Chen é obtida de forma natural como no caso da Integral de Riemann

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}_{s,u} + \mathbb{Y}_{u,t} + Y_{s,u} \otimes Y_{u,t} &= \int_s^u Y_{s,r} \otimes dY_r + \int_u^t Y_{u,r} \otimes dY_r + Y_{s,u} \otimes Y_{u,t} \\
&= \int_s^u Y_r \otimes dY_r - \int_s^u Y_s \otimes dY_r + \int_u^t Y_r \otimes dY_r - \int_u^t Y_u \otimes dY_r + Y_{s,u} \otimes Y_{u,t} \\
&= \int_s^t Y_r \otimes dY_r - Y_s \otimes Y_{s,u} - Y_u \otimes Y_{u,t} + Y_{s,u} \otimes Y_{u,t} \\
&= \int_s^t Y_r \otimes dY_r - Y_s \otimes Y_{s,t} = \int_s^t Y_r \otimes dY_r - \int_s^t Y_s \otimes dY_r \\
&= \int_s^t Y_{s,r} \otimes dY_r = \mathbb{Y}_{s,t}.
\end{aligned}$$

Proposição 5.3. *Sejam $(X, \mathbb{X})$ em $\mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, (Y, Y') em $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{V})$ e $(Y, \mathbb{Y}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], \overline{V})$ o rough path associado. Se $(\tilde{Z}, \tilde{Z}') \in \mathscr{D}_Y^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(\overline{V}, W))$, então (Z, Z') definido por $Z = \tilde{Z}$ e $Z' = \tilde{Z}'Y'$ pertence à $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(\overline{V}, W))$. Além disso,*

$$\int_s^t Z_r dY_r = \int_s^t \tilde{Z}_r d\mathbf{Y}_r,$$

onde a integral da esquerda é a definida em (3.10) e a da direita é a integral rough controlada de (3.7).

Demonstração. É direto que $Z \in \mathcal{C}^\alpha$, uma vez que $Z = \tilde{Z}$. Além disso

$$\left|(\tilde{Z}'Y')_{s,t}\right| \leqslant \left|\tilde{Z}'_t\right| \left|Y'_{s,t}\right| + \left|\tilde{Z}'_{s,t}\right| \left|Y'_s\right| \leqslant (\left\|\tilde{Z}'\right\|_\infty \left\|Y'\right\|_\alpha + \left\|\tilde{Z}'\right\|_\alpha \left\|Y'\right\|_\infty)|t-s|^\alpha \implies \left\|Z'\right\|_\alpha < \infty$$

Para terminar a prova da primeira afirmação basta provar que $\left\|R^{\tilde{Z}}\right\|_{2\alpha} < \infty$, vejamos

$$\begin{aligned} Z_{s,t} = \tilde{Z}_{s,t} = \tilde{Z}'_s Y_{s,t} + R^{\tilde{Z}}_{s,t} = \tilde{Z}'_s(Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}) + R^{\tilde{Z}}_{s,t} \\ \implies \left|R^Z_{s,t}\right| \leqslant \left|\tilde{Z}'_s R^Y_{s,t}\right| + \left|R^{\tilde{Z}}_{s,t}\right| \leqslant \left(\left\|\tilde{Z}'\right\|_\infty \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} + \left\|R^{\tilde{Z}}\right\|_{2\alpha}\right) |t-s|^{2\alpha} \end{aligned}$$

Agora resta demonstrar a segunda afirmação, para isso defina $\Xi_{u,v} := Z_u Y_{u,v} + Z'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v}$ e $\Delta_{u,v} := \tilde{Z}_u Y_{u,v} + \tilde{Z}' \mathbb{Y}_{u,v}$. Então temos

$$\begin{aligned} |\Xi_{s,t} - \Delta_{s,t}| &= \left|Z_u Y_{u,v} + Z'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v} - \tilde{Z}_u Y_{u,v} - \tilde{Z}'_u \mathbb{Y}_{u,v}\right| \\ &= \left|\tilde{Z}_u Y_{u,v} + \tilde{Z}'_u Y'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v} - \tilde{Z}_u Y_{u,v} - \tilde{Z}'_u \mathbb{Y}_{u,v}\right| \\ &= \left|\tilde{Z}'_u Y'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v} - \tilde{Z}'_u \mathbb{Y}_{u,v}\right| \\ &\leqslant \left\|\tilde{Z}'\right\|_\infty \left|Y'_u Y'_u \mathbb{X}_{u,v} - \mathbb{Y}_{u,v}\right| \end{aligned}$$

que pela Observação (5.2) sabemos que é $O(|t-s|^{3\alpha})$. Pela Observação (3.15) temos

$$\int_s^t Z_r dY_r = \mathcal{I}\Xi_{s,t} = \mathcal{I}\Delta_{s,t} = \int_s^t \tilde{Z}_r d\mathbf{Y}_r.$$

■

5.2 Composição de Funções em Rough Paths Controlados

Definição 5.4. Sejam W e $\overline{W}$ dois espaços Banach e $\varphi : W \to \overline{W}$ uma aplicação de classe C_b^2. Se $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], V)$ e $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$. Então a composição é denotada por

$$(\varphi(Y), \varphi(Y)')_t = (\varphi(Y_t), D\varphi(Y_t)Y'_t).$$

Observação 5.5. Veja que por Taylor $\varphi(Y)_{s,t} = D\varphi(Y_s)Y_{s,t} + r(Y_{s,t})$ para $r(h) = O(|h|)$. Como $Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}$ temos que

$$\varphi(Y)_{s,t} = D\varphi(Y_s)Y'_s X_{s,t} + D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t} + r(Y_{s,t}) = \varphi(Y)'_s X_{s,t} + R^\varphi_{s,t}, \tag{5.2}$$

onde $R^\varphi_{s,t} = D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t} + r(Y_{s,t})$.

Vejamos agora que esse par é de fato um caminho controlado. Além disso teremos uma estimativa que será útil para a resolução de equações diferenciais.

Lema 5.6. *Nas condições da Definição (5.4) e assumindo que $|Y'_0| + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha} \leqslant M$, para alguma constante M. Temos que* *i)* $(\varphi(Y), \varphi(Y)')$ *é um elemento de* $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$*;*

ii) Existe constante $C_{\alpha,T} = C(\alpha, T)$*, para* $\alpha > 1/3$ *tal que*

$$\|\varphi(Y), \varphi(Y)'\|_{X,2\alpha} \leqslant C_{\alpha,T} M \|\varphi\|_{C_b^2} (1 + \|X\|_\alpha)^2 (|Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}), \tag{5.3}$$

onde a constante $C_{\alpha,T} = C(\alpha, T)$ *pode ser tomada de forma uniforme sobre* $T \leqslant 1$*.*

Demonstração. i) Como $\varphi \in C_b^2$ por Taylor $\varphi(Y)_{s,t} = D\varphi(Y_s)Y_{s,t} + r(Y_{s,t})$ tal que $r(h) = O(|h|)$, o que em particular implica que

$$|r(Y_{s,t})| \leqslant C\,|Y_{s,t}| \leqslant C\,\|Y\|_\alpha |t-s|^\alpha$$

Usando isso obtemos

$$|\varphi(Y)_{s,t}| \leqslant |D\varphi(Y_s)Y_{s,t}| \leqslant \|D\varphi\|_\infty \|Y\|_\alpha |t-s|^\alpha < \infty$$

usando a mesma estimativa de r só que agora para $D\varphi$ temos

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(Y)'_{s,t}\right| &= |D\varphi(Y_t)Y_t' - D\varphi(Y_s)Y_s'| \\
&\leqslant |D\varphi(Y_t)| \left|Y'_{s,t}\right| + |D\varphi(Y)_{s,t}|\,|Y_s'| \\
&\leqslant (\|D\varphi\|_\infty \|Y'\|_\alpha + \|D\varphi(Y_\cdot)\|_\alpha \|Y'\|_\infty)|t-s|^\alpha \\
&\leqslant (\|D\varphi\|_\infty \|Y'\|_\alpha + \left\|D^2\varphi\right\|_\infty \|Y\|_\alpha \|Y'\|_\infty)|t-s|^\alpha.
\end{aligned}$$

Por último temos que $R^\varphi_{s,t} = \varphi(Y)_{s,t} - D\varphi(Y_s)Y_s'X_{s,t} = \varphi(Y)_{s,t} - D\varphi(Y_s)Y_{s,t} + D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t}$, então

$$\begin{aligned}
\left|R^\varphi_{s,t}\right| &\leqslant |\varphi(Y)_{s,t} - D\varphi(Y_s)Y_{s,t}| + \left|D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{2}D^2\varphi(Y_s)(Y_{s,t}\otimes Y_{s,t}) + r_2(Y_{s,t})\right| + \left|D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t}\right| \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2}\left\|D^2\varphi\right\|_\infty \|Y\|_\alpha^2 + \|D\varphi\|_\infty \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}\right)|t-s|^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Unindo $\|\varphi(Y)\|_\alpha$, $\|R^\varphi\|_{2\alpha} < \infty$ com (5.2) temos que $(\varphi(Y), \varphi(Y)') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{W})$.

ii) Usando $\|Y\|_\alpha \leqslant \|Y'\|_\infty \|X\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}$, $\|Y'\|_\infty \leqslant |Y_0'| + T^\alpha \|Y'\|_\alpha$ e as estimativas calculadas acima temos

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi(Y), \varphi(Y)'\|_{X,2\alpha} = \|\varphi(Y)'\|_\alpha + \|R^\varphi\|_{2\alpha} \\
&\leqslant \|D\varphi\|_\infty \|Y'\|_\alpha + \left\|D^2\varphi\right\|_\infty \|Y\|_\alpha \|Y'\|_\infty + \frac{1}{2}\left\|D^2\varphi\right\|_\infty \|Y\|_\alpha^2 + \|D\varphi\|_\infty \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C_b^2} \left(\|Y'\|_\alpha + (\|Y'\|_\infty \|X\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}) \|Y'\|_\infty\right. \\
&\quad \left. +(\|Y'\|_\infty \|X\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha})^2 + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}\right) \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C_b^2} \Big(\|Y'\|_\infty^2 \|X\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|Y'\|_\infty + \|Y'\|_\infty^2 \|X\|_\alpha^2 + 2\|Y'\|_\infty \|X\|_\alpha \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \\
&\quad + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}^2 + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}\Big) \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C_b^2} (1 + \|X\|_\alpha)^2 \Big(2\|Y'\|_\infty^2 + 3\left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|Y'\|_\infty + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}^2 + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}\Big) \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C_b^2} (1 + \|X\|_\alpha)^2 \Big(2|Y_0'|^2 + 4T^\alpha |Y_0'| \|Y'\|_\alpha + 2T^{2\alpha} \|Y'\|_\alpha^2 + 3\left\|R^Y\right\|_{2\alpha} |Y_0'| \\
&\quad + T^\alpha \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \|Y'\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}^2 + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}\Big) \\
&\leqslant C_{\alpha,T} \|\varphi\|_{C_b^2} (1 + \|X\|_\alpha)^2 \Big(|Y_0'| (|Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}) + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}^2 + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}\Big) \\
&\leqslant C_{\alpha,T} \|\varphi\|_{C_b^2} (1 + \|X\|_\alpha)^2 \Big(1 + |Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}\Big) \Big(|Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}\Big),
\end{aligned}
$$

onde a constante $C_{\alpha,T}$ pode ser tomada como $4(1 + T^\alpha)^2$.

■

O seguinte exemplo foi retirado do texto do Hairer (ver corolário 7.4 em [FH20]). Embora o autor não dê atenção para o resultado (até chegando a pular a demonstração), julgo importante mencioná-lo, uma vez que ele ilustra uma consistência com o cálculo de primeira ordem.

Exemplo 5.7 (Regra de Leibniz). Seja $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], V)$ e $(Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \overline{V})$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(\overline{V}, W))$. Com uma conta simples temos

$$
\begin{aligned}
(YZ)_{s,t} &= Y_s Z_{s,t} + Y_{s,t} Z_s + Y_{s,t} Z_{s,t} \\
&= Y_s (Z_s' X_{s,t} + R_{s,t}^Z) + (Y_s' X_{s,t} + R_{s,t}^Y) Z_s + Y_{s,t} Z_{s,t} \\
&= (Y_s Z_s' X_{s,t} + Y_s' X_{s,t} Z_s) + \left(Y_s R_{s,t}^Z + Z_s R_{s,t}^Y + Y_{s,t} Z_{s,t}\right) \\
&=: (YZ)_s' X_{s,t} + R_{s,t}^{YZ}.
\end{aligned}
$$

Basta agora calcular as normas

$$
\begin{aligned}
\left|(YZ)_{s,t}'\right| &\leqslant |Y_t Z_t' - Y_s Z_s'| + |Y_t' Z_t - Y_s' Z_s| \\
&\leqslant |Y_t| \left|Z_{s,t}'\right| + |Y_{s,t}| |Z_s'| + \left|Y_{s,t}'\right| |Z_t| + |Y_s'| |Z_{s,t}| \\
&\leqslant (\|Y\|_\infty \|Z'\|_\alpha + \|Y\|_\alpha \|Z'\|_\infty + \|Y'\|_\infty \|Z\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|Z\|_\infty) |t-s|^\alpha; \\
\left|R_{s,t}^{YZ}\right| &\leqslant |Y_s| \left|R_{s,t}^Z\right| + |Z_s| \left|R_{s,t}^Y\right| + |Y_{s,t}| |Z_{s,t}| \\
&\leqslant \left(\|Y\|_\infty \left\|R^Z\right\|_{2\alpha} + \|Z\|_\infty \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} + \|Y\|_\alpha \|Z\|_\alpha\right) |t-s|^{2\alpha}.
\end{aligned}
$$

Em outras palavras $(YZ, YZ' + Y'Z) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$.

5.3 Estabilidade da Composição

Agora apresentaremos um lema que servirá de ajuda na demonstração o teorema principal desta seção.

Lema 5.8. *Seja $f : W \to \overline{W}$ uma função de classe C_b^2, então existe constante $C = C(\alpha, T, \|f\|_{C_b^2})$ tal que*

$$\left\|f(Y_\cdot) - f(\tilde{Y}_\cdot)\right\|_\alpha \leqslant C\left(1 + \|Y\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\alpha\right)\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\alpha\right) \tag{5.4}$$

para todo Y, $\tilde{Y} \in \mathcal{C}^\alpha$. Além disso, a constante C pode ser escolhida uniformemente sobre $T \leqslant 1$.

Demonstração. Por simplicidade defina $\theta_t(r) := \tilde{Y}_t + r(Y_t - \tilde{Y}_t)$ para $r \in [0,1]$ e $\mu_t = Y_t - \tilde{Y}_t$, veja que $|\theta_t(r)| \leqslant |Y_t| + |\tilde{Y}_t|$. Então

$$\begin{aligned}
\left|(f(Y) - f(\tilde{Y}))_{s,t}\right| &= \left|\int_0^1 Df(\tilde{Y}_t + r(Y_t - \tilde{Y}_t))dr - \int_0^1 Df(\tilde{Y}_s + r(Y_s - \tilde{Y}_s))dr\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |Df(\theta_t(r))\mu_t - Df(\theta_s(r))\mu_s|\, dr \\
&\leqslant \int_0^1 |Df(\theta_t(r))|\,|\mu_{s,t}| + |Df(\theta_t(r)) - Df(\theta_s(r))|\,|\mu_s|\, dr \\
&\leqslant \int_0^1 \|Df\|_\infty |\mu_{s,t}| + \|Df\|_{\text{lip}} |\theta_{s,t}|\,|\mu_s|\, dr \\
&\leqslant \|f\|_{C_b^2}\left(|\mu_{s,t}| + (|Y_{s,t}| + |\tilde{Y}_{s,t}|)\,|\mu_s|\right) \\
&\leqslant \|f\|_{C_b^2}\left(\|\mu\|_\alpha + (\|Y\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\alpha)\,\|\mu\|_\infty\right)|t-s|^\alpha.
\end{aligned}$$

Como $\|\mu\|_\infty \leqslant |\mu_0| + T^\alpha \|\mu\|_\alpha$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\|f(Y) - f(\tilde{Y})\right\|_\alpha &\leqslant \|f\|_{C_b^2}\left(\|\mu\|_\alpha + (\|Y\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\alpha)(|\mu_0| + T^\alpha \|\mu\|_\alpha)\right) \\
&\leqslant \|f\|_{C_b^2}(1 + \|Y\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\alpha)(|\mu_0| + (1 + T^\alpha)\|\mu\|_\alpha) \\
&\leqslant \|f\|_{C_b^2}(1 + T^\alpha)(1 + \|Y\|_\alpha + \left\|\tilde{Y}\right\|_\alpha)(|\mu_0| + \|\mu\|_\alpha)
\end{aligned}$$

Na notação do lema $C = \|f\|_{C_b^2}(1 + T^\alpha)$. Veja que caso $T \leqslant 1$ podemos tomar $C = 2\|f\|_{C_b^2}$. ∎

Teorema 5.9 (Estabilidade da Composição). *Sejam dois caminhos X, $\tilde{X} \in C^\alpha([0,T],V)$, tal que $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$, $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}([0,T],W)$ e considere $\varphi \in C_b^3(W, \overline{W})$. Se além disso assumirmos que as grandezas $\|X\|_\alpha$, $\left\|\tilde{X}\right\|_\alpha$, $|Y_0'| + \|Y'\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}$ e $\left|\tilde{Y}_0'\right| + \left\|\tilde{Y}'\right\|_\alpha + \left\|R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha}$ são limitadas por alguma constante M. Então*

$$\begin{aligned}
&d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(\varphi(Y), \varphi(Y)'; \varphi(\tilde{Y}), \varphi(\tilde{Y})'\right) \\
&\qquad \leqslant C\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

para alguma constante $C = C(\alpha, T, \|\varphi\|_{C_b^3}, M)$, que pode ser tomada uniformemente sobre $T \leqslant 1$.

Demonstração. Assim como o outro Teorema da Estabilidade da Integral, iremos estimar $\|\varphi(Y)' - \varphi(\tilde{Y})'\|_\alpha$ e $\|R^\varphi - R^{\tilde{\varphi}}\|_{2\alpha}$. Para o primeiro

$$\begin{aligned}
&\left|(\varphi(Y) - \varphi(\tilde{Y}))_{s,t}\right| = \left|D\varphi(Y_t)Y_t' - D\varphi(\tilde{Y}_t)\tilde{Y}_t' - D\varphi(Y_s)Y_s' + D\varphi(\tilde{Y}_s)\tilde{Y}_s'\right| \\
&= \big|D\varphi(Y_t)(Y_t' - \tilde{Y}_t') + (D\varphi(Y_t) - D\varphi(\tilde{Y}_t))\tilde{Y}_t' - D\varphi(Y_s)(Y_s' - \tilde{Y}_s') \\
&\qquad -(D\varphi(Y_s) - D\varphi(\tilde{Y}_s))\tilde{Y}_s'\big| \\
&\leqslant \left|D\varphi(Y_t)(Y_t' - \tilde{Y}_t') - D\varphi(Y_s)(Y_s' - \tilde{Y}_s')\right| + \big|(D\varphi(Y_t) - D\varphi(\tilde{Y}_t))\tilde{Y}_t' \\
&\qquad -(D\varphi(Y_s) - D\varphi(\tilde{Y}_s))\tilde{Y}_s'\big| \\
&\leqslant \|D\varphi(Y_t)\|_{op}\left|Y_{s,t}' - \tilde{Y}_{s,t}'\right| + \|D\varphi(Y_t) - D\varphi(Y_s)\|_{op}\left|Y_s' - \tilde{Y}_s'\right| \\
&\quad + \left\|(D\varphi(Y_t) - D\varphi(\tilde{Y}_t))\right\|_{op}\left|\tilde{Y}_{s,t}'\right| + \left\|(D\varphi(Y_t) - D\varphi(\tilde{Y}_t) - (D\varphi(Y_s) - D\varphi(\tilde{Y}_s))\right\|_{op}\left|\tilde{Y}_s'\right| \\
&\leqslant \big(\|D\varphi(Y)\|_\infty \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|D\varphi(Y)\|_\alpha \|Y' - \tilde{Y}'\|_\infty + \|D\varphi(Y) - D\varphi(\tilde{Y})\|_\infty \|\tilde{Y}'\|_\alpha \\
&\quad + \|D\varphi(Y) - D\varphi(\tilde{Y})\|_\alpha \|\tilde{Y}'\|_\infty\big)\, |t-s|^\alpha.
\end{aligned}$$

Usando $\varphi \in C_b^3$ podemos inferir $\left|D\varphi(Y_s) - D\varphi(\tilde{Y}_s)\right|| \leqslant \|D\varphi\|_{\text{lip}} \left|Y_s - \tilde{Y}_s\right|$, o que em particular nos garante $\|D\varphi(Y.) - D\varphi(\tilde{Y}.)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_{C_b^3} \|Y - \tilde{Y}\|_\infty$. Então

$$\begin{aligned}
\|\varphi(Y) - \varphi(\tilde{Y})\|_\alpha &\leqslant \|\varphi\|_{C_b^3}\|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|\varphi\|_{C_b^3}\|Y' - \tilde{Y}'\|_\infty + \|\varphi\|_{C_b^3}\|Y - \tilde{Y}\|_\infty \|\tilde{Y}'\|_\alpha \\
&\qquad + \|D\varphi(Y) - D\varphi(\tilde{Y})\|_\alpha \left(|\tilde{Y}_0'| + T^\alpha \|\tilde{Y}'\|_\alpha\right) \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C_b^3}\|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|\varphi\|_{C_b^3}\|Y' - \tilde{Y}'\|_\infty + \|\varphi\|_{C_b^3}\|Y - \tilde{Y}\|_\infty M \\
&\quad + \|D\varphi(Y) - D\varphi(\tilde{Y})\|_\alpha (M + T^\alpha M) \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C_b^3}\|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|\varphi\|_{C_b^3}\left(|Y_0' - \tilde{Y}_0'| + T^\alpha \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha\right) \\
&\quad + \|\varphi\|_{C_b^3} M \left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + T^\alpha \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha\right) + \|D\varphi(Y) - D\varphi(\tilde{Y})\|_\alpha (M + T^\alpha M) \\
&\leqslant C_1 \left(|Y_0 - Y_0'| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|D\varphi(Y) - D\varphi(\tilde{Y})\|_\alpha\right),
\end{aligned}$$

onde $C_1 := \|\varphi\|_{C_b^3}(1 + T^\alpha)M$. Podemos usar a (5.4) para justificar que

$$\|D\varphi(Y) - D\varphi(\tilde{Y})\|_\alpha \leqslant C_2\left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha\right)$$

para $C_2 = C_2(\alpha, T, \|\varphi\|_{C_b^3}, M)$ uniforme sobre $T \leqslant 1$. Então

$$\|\varphi(Y) - \varphi(\tilde{Y})\|_\alpha \leqslant C_1 C_2 \left(|Y_0 - Y_0'| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha\right).$$

E o Teorema (3.24) para a estimativa

$$\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha \leqslant C_3 \left(\|X - \tilde{X}\|_\alpha + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right),$$

onde $C_3 = C_3(M)$. Juntando tudo temos

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(Y)-\varphi(\tilde{Y})\right\|_\alpha &\leqslant C_1C_2\left(|Y_0-Y_0'|+\left\|Y-\tilde{Y}\right\|_\alpha+\left|Y_0'-\tilde{Y}_0'\right|+\left\|Y'-\tilde{Y}'\right\|_\alpha\right)\\ &\leqslant C_1C_2\left(|Y_0-Y_0'|+\left|Y_0'-\tilde{Y}_0'\right|+\left\|Y'-\tilde{Y}'\right\|_\alpha\right.\\ &\quad\left.+C_3\left(\left\|X-\tilde{X}\right\|_\alpha+\left|Y_0'-\tilde{Y}_0'\right|+T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y,Y';\tilde{Y},\tilde{Y}'\right)\right)\right)\\ &\leqslant C\left(\left|Y_0-\tilde{Y}_0\right|+\left|Y_0'-\tilde{Y}_0'\right|+\left\|X-\tilde{X}\right\|_\alpha+d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y,Y';\tilde{Y},\tilde{Y}'\right)\right),\end{aligned}$$

onde $C = C_1C_2C_3(1+T^\alpha)$, em particular $C = C(\alpha, T, \|\varphi\|_{C_b^3}, M)$ é uniforme sobre $T \leqslant 1$.

Agora para o segundo termo

$$\begin{aligned}&\left|R^\varphi_{s,t}-R^{\tilde{\varphi}}_{s,t}\right|=\left|\varphi(Y)_{s,t}-D\varphi(Y_s)Y_s'X_{s,t}-\varphi(\tilde{Y})_{s,t}+D\varphi(\tilde{Y}_s)\tilde{Y}_s'\tilde{X}_{s,t}\right|\\ &=\left|\varphi(Y)_{s,t}-D\varphi(Y_s)(Y_{s,t}-R^Y_{s,t})-\varphi(\tilde{Y})_{s,t}+D\varphi(\tilde{Y}_s)(\tilde{Y}_{s,t}-R^{\tilde{Y}}_{s,t})\right|\\ &\leqslant\left|\varphi(Y)_{s,t}-D\varphi(Y_s)Y_{s,t}-\varphi(\tilde{Y})_{s,t}+D\varphi(\tilde{Y}_s)\tilde{Y}_{s,t}\right|+\left|D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t}-D\varphi(\tilde{Y}_s)R^{\tilde{Y}}_{s,t}\right|.\end{aligned}$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo duas vezes temos

$$\varphi(Y)_{s,t}-D\varphi(Y_s)Y_{s,t}=\int_0^1\int_0^1 D^2\varphi(Y_s+r_1r_2Y_{s,t})(Y_{s,t}\otimes Y_{s,t})r_1dr_2dr_1,$$

então

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1\int_0^1 D^2\varphi(Y_s+r_1r_2Y_{s,t})(Y_{s,t}\otimes Y_{s,t})r_1dr_2dr_1\right. && (5.6)\\ &\quad\left.-\int_0^1\int_0^1 D^2\varphi(\tilde{Y}_s+r_1r_2\tilde{Y}_{s,t})(\tilde{Y}_{s,t}\otimes\tilde{Y}_{s,t})r_1dr_2dr_1\right|+\left|D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t}-D\varphi(\tilde{Y}_s)R^{\tilde{Y}}_{s,t}\right|\\ &\leqslant\int_0^1\int_0^1\left|D^2\varphi(Y_s+r_1r_2Y_{s,t})Y_{s,t}^{\otimes 2}-D^2\varphi(\tilde{Y}_s+r_1r_2\tilde{Y}_{s,t})\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|r_1dr_2dr_1\\ &\quad+\left|D\varphi(Y_s)R^Y_{s,t}-D\varphi(\tilde{Y}_s)R^{\tilde{Y}}_{s,t}\right|. && (5.7)\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}&\left|D^2\varphi(Y_s+r_1r_2Y_{s,t})Y_{s,t}^{\otimes 2}-D^2\varphi(\tilde{Y}_s+r_1r_2\tilde{Y}_{s,t})\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|\\ &\leqslant\left\|D^2\varphi(Y_s+r_1r_2Y_{s,t})\right\|_{op}\left|Y_{s,t}^{\otimes 2}-\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|\\ &\quad+\left\|D^2\varphi(Y_s+r_1r_2Y_{s,t})-D^2\varphi(\tilde{Y}_s+r_1r_2\tilde{Y}_{s,t})\right\|_{op}\left|\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|\\ &\leqslant\left\|D^2\varphi\right\|_\infty\left|Y_{s,t}^{\otimes 2}-\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|+\left\|D^2\varphi\right\|_{\mathrm{lip}}\left|Y_s-\tilde{Y}_s+r_1r_2(Y_{s,t}-\tilde{Y}_{s,t})\right|\left|\tilde{Y}_{s,t}\right|^2\\ &\leqslant\|\varphi\|_{C_b^3}\left|Y_{s,t}^{\otimes 2}-\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|+\|\varphi\|_{C_b^3}\left(\left|Y_s-\tilde{Y}_s\right|+\left|Y_t-\tilde{Y}_t\right|\right)\left|\tilde{Y}_{s,t}\right|^2\\ &\implies\int_0^1\int_0^1\left|D^2\varphi(Y_s+r_1r_2Y_{s,t})Y_{s,t}^{\otimes 2}-D^2\varphi(\tilde{Y}_s+r_1r_2\tilde{Y}_{s,t})\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|r_1dr_2dr_1\\ &\quad\leqslant\int_0^1\int_0^1\left(\|\varphi\|_{C_b^3}\left|Y_{s,t}^{\otimes 2}-\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|+\|\varphi\|_{C_b^3}2\left\|Y-\tilde{Y}\right\|_\infty\left|\tilde{Y}_{s,t}\right|^2\right)r_1dr_2dr_1\\ &\quad\leqslant 1/2\left(\|\varphi\|_{C_b^3}\left|Y_{s,t}^{\otimes 2}-\tilde{Y}_{s,t}^{\otimes 2}\right|+\|\varphi\|_{C_b^3}2\left\|Y-\tilde{Y}\right\|_\infty\left|\tilde{Y}_{s,t}\right|^2\right)\end{aligned}$$

que voltando na última Equação (5.7) temos

$$\begin{aligned}
\left|R^{\varphi}_{s,t} - R^{\tilde{\varphi}}_{s,t}\right| &\leqslant 1/2 \left(\|\varphi\|_{C^3_b} \left|Y^{\otimes 2}_{s,t} - \tilde{Y}^{\otimes 2}_{s,t}\right| + \|\varphi\|_{C^3_b} 2 \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\infty} \left|\tilde{Y}_{s,t}\right|^2 \right) \\
&\quad + |D\varphi(Y_s)| \left|R^{Y}_{s,t} - R^{\tilde{Y}}_{s,t}\right| + \left|D\varphi(Y_s) - D\varphi(\tilde{Y}_s)\right| \left|R^{\tilde{Y}}_{s,t}\right| \\
&\leqslant 1/2 \left(\|\varphi\|_{C^3_b} \left(|Y_{s,t}| \left|Y_{s,t} - \tilde{Y}_{s,t}\right| + \left|Y_{s,t} - \tilde{Y}_{s,t}\right| \left|\tilde{Y}_{s,t}\right|\right) + \|\varphi\|_{C^3_b} 2 \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\infty} \left|\tilde{Y}_{s,t}\right|^2 \right) \\
&\quad + \|\varphi\|_{C^3_b} \left|R^{Y}_{s,t} - R^{\tilde{Y}}_{s,t}\right| + \|\varphi\|_{C^3_b} \left|Y_s - \tilde{Y}_s\right| \left|R^{\tilde{Y}}_{s,t}\right| \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C^3_b} \left(\|Y\|_{\alpha} \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} \left\|\tilde{Y}\right\|_{\alpha} + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\infty} \left\|\tilde{Y}\right\|_{\alpha}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\|R^{Y} - R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\infty} \left\|R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} \right) |t - s|^{2\alpha}. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Usando $\|Y\|_{\alpha} \leqslant \|Y'\|_{\infty} \|X\|_{\alpha} + T^{\alpha} \left\|R^{Y}\right\|_{2\alpha}$ e considerando $\|Y\|_{\infty} \leqslant |Y_0| + \|Y\|_{\alpha} T^{\alpha} \leqslant M(1 + T^{\alpha})$ temos

$$\begin{aligned}
\left|R^{\varphi}_{s,t} - R^{\tilde{\varphi}}_{s,t}\right| &\leqslant \|\varphi\|_{C^3_b} \left(\left(\|Y'\|_{\infty} \|X\|_{\alpha} + T^{\alpha} \left\|R^{Y}\right\|_{2\alpha} + \left\|\tilde{Y}'\right\|_{\infty} \left\|\tilde{X}\right\|_{\alpha} + T^{\alpha} \left\|R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} \right) \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} \right. \\
&\quad + \left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + T^{\alpha} \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} \right) \left(\|Y'\|_{\infty} \|X\|_{\alpha} + T^{\alpha} \left\|R^{Y}\right\|_{2\alpha} \right)^2 \\
&\quad \left. + \left\|R^{Y} - R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\infty} \left\|R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} \right) |t - s|^{2\alpha} \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C^3_b} \left(\left(M^2(1 + T^{\alpha}) + T^{\alpha} M + M^2(1 + T^{\alpha}) + T^{\alpha} M \right) \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} \right. \\
&\quad + \left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + T^{\alpha} \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} \right) \left(M^2(1 + T^{\alpha}) + T^{\alpha} M \right)^2 \\
&\quad \left. + \left\|R^{Y} - R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} + \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| M + T^{\alpha} \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} M \right) |t - s|^{2\alpha} \\
&\leqslant \|\varphi\|_{C^3_b} \left(2M^2(1 + T^{\alpha}) \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} + 4M^4(1 + T^{\alpha})^3 \left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left\|R^{Y} - R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} + M(1 + T^{\alpha}) \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| \right) |t - s|^{2\alpha} \\
&\leqslant C_2 \left(\left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} + \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left\|R^{Y} - R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} \right) |t - s|^{2\alpha},
\end{aligned}$$

onde podemos tomar $C_2 = \|\varphi\|_{C^3_b} 4M^4(1 + T^{\alpha})^3$. Por último usando o Teorema (3.24) mais uma vez para $\left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha}$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\|R^{\varphi} - R^{\tilde{\varphi}}\right\|_{2\alpha} &\leqslant C_2 \left(\left\|Y - \tilde{Y}\right\|_{\alpha} + \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left\|R^{Y} - R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} \right) \\
&\leqslant C_2 \left(C_3 \left(\left\|X - \tilde{X}\right\|_{\alpha} + \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left\|R^{Y} - R^{\tilde{Y}}\right\|_{2\alpha} \right) \\
&\leqslant C \left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left|Y'_0 - \tilde{Y}'_0\right| + \left\|X - \tilde{X}\right\|_{\alpha} + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right) \right),
\end{aligned}$$

onde podemos tomar C como $2C_2C_3(1+T^{\alpha})$, assim mantendo a uniformidade da constante sobre $T \leqslant 1$. ■

Tendo em vista o Teorema de Gubinelli (3.13) e o Lema (5.6) , se $f \in C^2_b(W, \mathcal{L}(V, W))$ então

$$(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0, T], W) \implies (f(Y), f(Y)') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0, T], W).$$

O que nos motiva para o próximo lema.

Lema 5.10 (Estabilidade da Integral da Composição)**.** *Seja* $\alpha \in (1/3, 1/2]$ *e* $\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$. *Dado* $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$, $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}([0,T], W)$ *e* $f : W \to \mathcal{L}(V, W)$ *de classe* C_b^3. *Suponha também que as grandezas* $\|X\|_\alpha$, $\|\tilde{X}\|_\alpha$, $|Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}$ *e* $|\tilde{Y}_0'| + \|\tilde{Y}, \tilde{Y}'\|_{\tilde{X},2\alpha}$ *são limitadas por alguma constante* M. *Então:*

i) Vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|f(Y) - f(\tilde{Y})\|_\alpha \leqslant C \big(&|Y_0 - \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \|X - \tilde{X}\|_\alpha \\ &+ T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}')\big);\end{aligned}$$

ii) Se R^I *é o resto de* $\left(\int_0^\cdot f(Y)_r d\mathbf{X}_r, f(Y)\right)$ *e* $R^{\tilde{I}}$ *de* $\left(\int_0^\cdot f(\tilde{Y})_r d\tilde{\mathbf{X}}_r, f(\tilde{Y})\right)$, *então*

$$\left\|R^I - R^{\tilde{I}}\right\|_\alpha \leqslant C \left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}')\right)$$

para alguma constante $C = C(\alpha, T, \|f\|_{C_b^3}, M)$ *que pode ser tomada uniformemente sobre* $T \leqslant 1$.

Demonstração. i) Veja que

$$\|Y\|_\alpha \leqslant \|Y'\|_\infty \|X\|_\alpha + T^\alpha \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} \leqslant M^2(1 + T^\alpha) + T^\alpha M \leqslant 2M^2(1 + T^\alpha).$$

Usando o Lema (5.8) temos

$$\begin{aligned}\|f(Y) - f(Y)\|_\alpha &\leqslant C_1 \left(1 + \|Y\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\alpha\right) \left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha\right) \\ &\leqslant C_2 \left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha\right),\end{aligned}$$

onde $C_2 = C_1(1 + 4M(1 + T^\alpha))$. Denotando $d_{X,\tilde{X},2\alpha}(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}')$ por d, pelo Teorema (3.24) temos a estimativa

$$\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha \leqslant C_M \left(|Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \|X - \tilde{X}\|_\alpha + T^\alpha d\right),$$

então

$$\begin{aligned}\|f(Y) - f(\tilde{Y})\|_\alpha &\leqslant C_2 \left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + C_M \left(|Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \|X - \tilde{X}\|_\alpha + T^\alpha d\right)\right) \\ &\leqslant C \left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \|X - \tilde{X}\|_\alpha + T^\alpha d\right)\end{aligned}$$

e como C_2 pode ser tomado uniformemente em $T \leqslant 1$, $C = C_2 C_M$ também pode.

ii) Pelo Teorema (3.25), denotando $d_{X,\tilde{X},2\alpha}(f(Y), f(Y)'; f(\tilde{Y}), f(\tilde{Y})')$ por d_f sabemos que

$$\left\|R^I - R^{\tilde{I}}\right\|_{2\alpha} \leqslant C_M(1 + T^\alpha) \left(|f(Y)_0' - f(\tilde{Y})_0'| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_f\right).$$

Pelo Teorema (5.9) temos

$$d_f \leqslant C_0 \left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha + d\right).$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
\left|f(Y)_0' - f(\tilde{Y})_0'\right| &= \left|Df(Y_0)Y_0' - Df(\tilde{Y}_0)\tilde{Y}_0'\right| \\
&\leqslant \|Df(Y_0)\|_{op} \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left\|Df(Y_0) - Df(\tilde{Y}_0)\right\|_{op} \left|\tilde{Y}_0'\right| \\
&\leqslant \|Df(Y_0)\|_{op} \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \|Df\|_{\text{lip}} \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| \left|\tilde{Y}_0'\right| \\
&\leqslant \|f\|_{C_b^3} M \left(\left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right|\right).
\end{aligned}$$

Então juntando as estimativas, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|R^I - R^{\tilde{I}}\right\|_{2\alpha} &\leqslant C_M(1+T^\alpha)\Big(\|f\|_{C_b^3} M \left(\left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right|\right) + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) \\
&\quad + T^\alpha C_0 \left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha + d\right)\Big) \\
&\leqslant C\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + T^\alpha d\right),
\end{aligned}$$

onde podemos considerar $C = 2C_M(1 + \|f\|_{C_b^3})M(1+T^\alpha)C_0$. Como C_0 pode ser tomado uniformemente em $T \leqslant 1$ e C_M depende apenas de M, a uniformidade de C sobre $T \leqslant 1$ é garantida.

■

5.4 Uma Outra Fórmula de Itô

Com as ferramentas estabelecidas nesse capítulo podemos melhorar um pouco a Fórmula de Itô (4.5). Vamos direto para o resultado

Proposição 5.11. *Sejam $F : V \to W$ um mapa de classe C_b^3, um α-rough path $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], U)$ e um par $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], V)$ tal que*

$$Y_{s,t} = Y_s' X_{s,t} + Y'' \mathbb{X}_{s,t} + \Gamma_{s,t} + O(|t-s|), \tag{5.9}$$

onde $(Y', Y'') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(U,V))$. Então

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \int_0^t DF(Y_r)Y_r' d\mathbf{X}_r + \int_0^t DF(Y_r) d\Gamma_r + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(Y_r)(Y_r' \otimes Y_r') d\left[\mathbf{X}\right]_r. \tag{5.10}$$

Demonstração. Pela última Fórmula de Itô (Proposição (4.6)) sabemos que

$$F(Y)_{0,t} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \left(DF(Y_u)Y_{u,v} + D^2F(Y_u)\mathbb{Y}_{u,v}\right) + \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} D^2F(Y_u)[\mathbf{Y}]_{u,v},$$

onde pela Definição (5.1) temos

$$\mathbb{Y}_{u,v} = \int_u^v Y_{u,r} \otimes dY_r \quad \text{e} \quad |\mathbb{Y}_{u,v} - (Y_u' \otimes Y_u')\mathbb{X}_{u,v}| = O(|u-v|),$$

isto é, $\mathbb{Y}_{u,v} = (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v} + O(|u-v|)$. Veja que

$$\begin{aligned}
Y_{u,v} \otimes Y_{u,v} &= (Y'_u X_{u,v} + R^Y_{u,v}) \otimes (Y'_u X_{u,v} + R^Y_{u,v}) \\
&= Y'_u X_{u,v} \otimes Y'_u X_{u,v} + \left(Y'_u X_{u,v} \otimes R^Y_{u,v} + R^Y_{u,v} \otimes Y'_u X_{u,v} + R^Y_{u,v} \otimes R^Y_{u,v}\right) \\
&= (Y'_u \otimes Y'_u) X_{u,v} \otimes X_{u,v} + O(|u-v|), \\
2Sym(\mathbb{Y}_{u,v}) &= 2Sym(Y'_u \otimes Y'_u \mathbb{X}_{u,v}) + 2Sym(O(|v-u|)) \\
&= (Y'_u \otimes Y'_u) 2Sym(\mathbb{X}_{u,v}) + O(|v-u|).
\end{aligned}$$

Então calculando o colchete temos

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Y}]_{u,v} &:= Y_{u,v} \otimes Y_{u,v} - 2Sym(\mathbb{Y}_{u,v}) \\
&= (Y'_u \otimes Y'_u)\left(X_{u,v} \otimes X_{u,v} - 2Sym(\mathbb{X}_{u,v})\right) + O(|v-u|) \\
&= (Y'_u \otimes Y'_u)[\mathbf{X}]_{u,v} + O(|v-u|).
\end{aligned}$$

Agora usando a nova expressão do colchete, o fato $\mathbb{Y}_{u,v} \approx (Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v}$ e somando e subtraindo $DF(Y_u)Y''_u \mathbb{X}_{u,v}$ chegamos em

$$\begin{aligned}
F(Y)_{0,t} &= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \big(DF(Y_u)(Y_{u,v} - Y''_u \mathbb{X}_{u,v}) + DF(Y_u)Y''_u \mathbb{X}_{u,v} \\
&\quad + D^2F(Y_u)(Y'_u \otimes Y'_u)\mathbb{X}_{u,v}\big) + \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} D^2F(Y_u)(Y'_u \otimes Y'_u)[\mathbf{X}]_{u,v} \\
&= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} DF(Y_u)Y'_u X_{u,v} + (DF(Y_u)Y''_u + D^2F(Y_u)(Y'_u \otimes Y'_u))\mathbb{X}_{u,v} \\
&\quad + \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} D^2F(Y_u)\Gamma_{u,v} + \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} D^2F(Y_u)(Y'_u \otimes Y'_u)[\mathbf{X}]_{u,v} \\
&= \int_0^t DF(Y_u)Y'_u d\mathbf{X}_u + \int_0^t DF(Y_u) d\Gamma_u + \int_0^t D^2F(Y_u)(Y'_u \otimes Y'_u) d[\mathbf{X}]_u,
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade utilizamos a Hipótese (5.9). ■

Observação 5.12. Veja que pela Hipótese (5.9) do teorema passado, temos em particular que

$$Y_{0,t} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u X_{s,u} + Y''_u \mathbb{X}_{u,v} + \Gamma_{u,v} = \int_0^t Y'_u d\mathbf{X}_u + \Gamma_{0,t}, \tag{5.11}$$

onde a integral é de rough path controlado.

Observação 5.13. Veja que a volta também é verdadeira, no sentido que se assumirmos (5.11) temos por (3.8) que

$$\begin{aligned}
\left|\int_s^t Y'_u d\mathbf{X}_u - Y'_s X_{s,t} - Y''_s \mathbb{X}_{s,t}\right| &= O(|t-s|), \\
|Y_{s,t} - \Gamma_{s,t} - Y'_s X_{s,t} - Y''_s \mathbb{X}_{s,t}| &= O(|t-s|),
\end{aligned}$$

isto é, $Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + Y''_s \mathbb{X}_{s,t} + \Gamma_{s,t} + O(|t-s|)$ que é precisamente (5.9). Ambas são de grande importância no contexto de equações diferenciais.

6 Equações Diferenciais Rough

Com a integral bem definida e todas as ferramentas já provadas, podemos ir para a parte principal da teoria.

6.1 Equações Diferenciais de Young

Nesta seção, serão apresentados os resultados clássicos da teoria de Young. Como a teoria de rough paths visa ampliar a de Young, é importante que o leitor tenha esses resultados em mente, a fim de poder compará-los com os apresentados nas seções seguintes.

Definição 6.1. Se $X : [0,T] \to V$, $f : W \to \mathcal{L}(V,W)$ e $\xi \in W$. Então dizemos que $Y : [0,\tau) \to W$ é solução para a *Equação Diferencial de Young* (EDY)

$$\begin{cases} dY = f(Y)dX, \\ Y_0 = \xi \end{cases} \tag{6.1}$$

se para todo $t < \tau$ temos $Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_r)dX_r$, no sentido de Young.

Além disso, se a solução está bem definida para todo $\tau \in [0,T]$, dizemos que a solução é *global no tempo.*

Observação 6.2. Os principais teoremas do texto estão limitados para um domínio compacto. Mas a definição pode ser estendida para um domínio $[0,+\infty)$.

Vamos direto para o teorema principal.

Teorema 6.3. *Dado $\beta \in (1/2,1]$ e $X \in \mathcal{C}^\beta([0,T],V)$. Seja $f \in C_b^2(W,\mathcal{L}(V,W))$ e uma condição inicial $\xi \in W$. Então existe única solução $Y \in \mathcal{C}^\beta([0,T],W)$ para a Equação (6.1). Além disso, a solução é global no tempo.*

Demonstração. Para está prova iremos replicar o argumento conhecido por Iterações de Picard. A ideia é mostrar que um operador em um espaço de Banach apropriado possui um único ponto fixo e que este ponto é exatamente a solução da EDY.

Para todo $\alpha \in (1/2,\beta]$ e Y caminho α-Hölder, temos $f(Y_\cdot) \in \mathcal{C}^\alpha(W,\mathcal{L}(V,W))$. Além disso, pelo Teorema (3.7) a integral $\int_0^\cdot f(Y_r)dX_r$ existe e possui regularidade α. Então defina o mapa $\mathcal{M}_t : \mathcal{C}^\alpha([0,t],W) \to \mathcal{C}^\alpha([0,t],W)$ por

$$\mathcal{M}_t(Y)_\cdot = \xi + \int_0^\cdot f(Y_r)dX_r.$$

Considere $\mathcal{C}^{\alpha}([0,t],W)$ como $\left\{ Y\big|_{[0,t]} : Y \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T],W) \right\}$. Defina também a bola

$$\mathcal{B}_t = \{ Y \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,t],W) : Y_0 = \xi \text{ e } \|Y\|_{\alpha} \leqslant 1 \},$$

que é um subconjunto fechado de um espaço de Banach, portanto também é Banach. Com o objetivo de aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, queremos mostrar que existe t suficientemente pequeno de modo que $\mathcal{B}_t$ é um invariante de $\mathcal{M}_t$ e que $\mathcal{M}_t$ é uma contração.

Primeiramente para a invariância, dado $Y \in \mathcal{B}_t$, temos $|f(Y_0)| \leqslant \|f\|_{C_b^2}$ e

$$|f(Y_{s,t})| \leqslant \|f\|_{\text{lip}} |Y_{s,t}| \leqslant \|f\|_{C_b^2} \|Y\|_{\alpha} |t-s|^{\alpha} \implies \|f(Y)\|_{\alpha} \leqslant \|f\|_{C_b^2}.$$

Usando a estimativa do Teorema (3.7) em combinação com a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v f(Y_r) dX_r \right| &\leqslant C \|f(Y)\|_{\alpha} \|X\|_{\alpha} |v-u|^{2\alpha} + |f(Y_u) X_{u,v}| \\ &\leqslant C \|f\|_{C_b^2} \|X\|_{\alpha} |v-u|^{2\alpha} + \|f(Y)\|_{\infty} \|X\|_{\alpha} |v-u|^{\alpha} \end{aligned}$$

para alguma constante $C = C(\alpha+\beta)$, então

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\cdot} f(Y_r) dX_r \right\|_{\alpha,[0,t]} &\leqslant C \|f\|_{C_b^2} \|X\|_{\alpha,[0,t]} (t^{\alpha}+1) \\ &\leqslant C \|f\|_{C_b^2} \|X\|_{\beta,[0,T]} t^{\beta-\alpha} (t^{\alpha}+1). \end{aligned}$$

Como C não depende de t, existe t_0 suficientemente pequeno tal que $\|\mathcal{M}_{t_0}\|_{\alpha,[0,t_0]} \leqslant 1$. Além disso, veja que a escolha de t_0 foi independente de Y e ξ. Como $\mathcal{M}_{t_0}(Y)_0 = \xi$ temos que $\mathcal{M}_{t_0}(\mathcal{B}_{t_0}) \subset \mathcal{B}_{t_0}$.

Para a contração, considere $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{B}_t$. Usando a Proposição (3.8) temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_t(Y) - \mathcal{M}_t(\tilde{Y})\|_{\alpha,[0,t]} &= \left\| \int_0^{\cdot} f(Y_r) dX_r - \int_0^{\cdot} f(\tilde{Y}_r) dX_r \right\|_{\alpha,[0,t]} \\ &\leqslant C_1 \left(\|f(Y) - f(\tilde{Y})\|_{\alpha,[0,t]} \|X\|_{\alpha,[0,t]} \right), \end{aligned}$$

para $C_1 = C(\alpha,\beta,t)$, uniforme sobre $t \leqslant 1$. O Lema (5.8) nos dá

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_t(Y) - \mathcal{M}_t(\tilde{Y})\|_{\alpha,[0,t]} &\leqslant C_1 C_2 (1 + \|Y\|_{\alpha,[0,t]} + \|\tilde{Y}\|_{\alpha,[0,t]}) \|Y - \tilde{Y}\|_{\alpha,[0,t]} \|X\|_{\alpha,[0,t]} \\ &\leqslant 3 C_1 C_2 \|Y - \tilde{Y}\|_{\alpha,[0,t]} \|X\|_{\alpha,[0,t]} \\ &\leqslant 3 C_1 C_2 \|Y - \tilde{Y}\|_{\alpha,[0,t]} \|X\|_{\beta,[0,t]} t^{\beta-\alpha}, \end{aligned}$$

para $C_2 = C(\alpha, t, \|f\|_{C_b^2})$, que também pode ser tomado uniformemente sobre $t \leqslant 1$. Então existe $t_1 \leqslant \{t_0 \wedge 1\}$ tal que

$$\|\mathcal{M}_{t_1}(Y) - \mathcal{M}_{t_1}(\tilde{Y})\|_{\alpha,[0,t_1]} \leqslant \frac{1}{2} \|Y - \tilde{Y}\|_{\alpha,[0,t_1]}.$$

Isto é, $\mathcal{M}_{t_1}$ é uma contração em $\mathcal{B}_{t_1}$.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe único ponto fixo Y de $\mathcal{M}_{t_1}$ em $\mathcal{B}_{t_1}$. Veja que Y é tal que

$$Y_t = \mathcal{M}_{t_1}(Y)_t = \xi + \int_0^t f(Y_r)dX_r$$

que é precisamente a definição de solução da EDY. Além disso, como a escolha de t_1 foi independente de ξ, podemos repetir iterativamente o argumento para a condição inicial Y_{t_1}. Concatenando os caminhos obtenho uma solução Y definida em $[0,T]$. Então obtemos uma solução $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],W)$, mas veja que novamente usando a estimativa de Young-Loéve

$$\begin{aligned}
|Y_{s,t}| = \left|\int_s^t f(Y_r)dX_r\right| &\leqslant C\,\|f(Y)\|_\alpha\,\|X\|_\beta\,|t-s|^{\alpha+\beta} + |f(Y_u)X_{u,v}| \\
&\leqslant C\,\|f\|_{C_b^2}\,\|X\|_\beta\,|t-s|^{\alpha+\beta} + \|f(Y)\|_\infty\,\|X\|_\beta\,|t-s|^\beta \\
&\leqslant C\,\|f\|_{C_b^2}\,\|X\|_\beta\left(|t-s|^{\alpha+\beta} + |t-s|^\beta\right),
\end{aligned}$$

então

$$\|Y\|_\beta \leqslant C\,\|f\|_{C_b^2}\,\|X\|_\beta\,(1+T^\alpha).$$

Concluindo que Y está de fato em $\mathcal{C}^\beta([0,T],W)$. Por último, veja que o argumento oferecido sobre as bolas unitárias é o suficiente para garantir a unicidade sobre todas as funções de regularidade β. Uma vez que, se existe outra solução $\tilde{Y} \in \mathcal{C}^\beta$ para todo $\alpha \in (1/2,\beta)$ temos que $\left\|\tilde{Y}\right\|_{\alpha,[0,t]} \leqslant t^{\beta-\alpha}\left\|\tilde{Y}\right\|_{\beta,[0,t]}$, então para $t \leqslant (t_1 \wedge \left\|\tilde{Y}\right\|_\beta^{1/(\beta-\alpha)})$ temos que

$$\tilde{Y}\Big|_{[0,t]} = \mathcal{M}_t(\tilde{Y}) \implies \tilde{Y}\Big|_{[0,t]} = Y\Big|_{[0,t]}.$$

Novamente repetindo o argumento iterativamente sobre as condições iniciais conseguimos obter a igualdade em $[0,T]$. Concluindo assim o argumento da unicidade da solução. ■

6.2 Equações Diferenciais Rough

Definição 6.4. Se $\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $f : W \to \mathcal{L}(V,W)$ e $\xi \in W$. Então dizemos que $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,\tau),W)$ é solução para a *Equação Diferencial Rough* (EDR)

$$\begin{cases} dY = f(Y)d\mathbf{X}, \\ Y_0 = \xi \end{cases} \tag{6.2}$$

se para todo $t < \tau$ temos $Y_t = \xi + \displaystyle\int_0^t f(Y_s)d\mathbf{X}_s$, onde $f(Y)$ na integral representa o par $(f(Y)_t, f(Y)'_t) := (f(Y_t), Df(Y_t)Y'_t) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,\tau),\mathcal{L}(V,W))$.

Além disso, se a solução (Y,Y') está definida para todo $\tau \in [0,T]$, de forma que $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$, dizemos que a solução é *global no tempo*.

Teorema 6.5. *Dado $\xi \in W$, $f \in C_b^3\left(W, \mathcal{L}\left(V, W\right)\right)$ e $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\beta}(\mathbb{R}_+, V)$ com $\beta \in (1/3, 1/2]$, então existe um único rough path controlado (Y, Y') em $\mathscr{D}_X^{2\beta}\left([0, \tau), W\right)$ que é solução da EDR (6.2), de tal forma que $Y' = f(Y)$. Além disso, as soluções são globais no tempo.*

Observação 6.6. Observe que para equações rough precisamos de um grau a mais de diferenciabilidade em comparação ao caso de Young.

Demonstração. Assim como o Teorema de Picard-Lindelöf, que garante existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, utilizaremos o mesmo método iterativo pra provar a existência e unicidade no nosso contexto. O método consiste em definir um mapa, no nosso caso $\mathcal{M}_T$, de modo que pontos fixos são soluções para nossa EDR. Em seguida, mostraremos que ele está bem definido e é uma contração, podendo assim aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Antes de começarmos demonstração restrinja o domínio de X para $[0, 1]$. Isso será útil para aplicação das ferramentas que calculamos ao longo do texto e no final não mudará o resultado pois obteremos soluções globais.

Vamos avaliar possíveis soluções com regularidade menor, para isso considere $\alpha \in (1/3, \beta]$, de modo que $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\beta} \subset \mathscr{C}^{\alpha}$. Veja que para toda solução $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$, podemos garantir que $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\beta}([0, 1], W)$ uma vez que

$$\begin{aligned}
|Y_{s,t}| &\leqslant \|Y_s'\|_{op} |X_{s,t}| + \left|R_{s,t}^Y\right| \\
&\leqslant \|Y'\|_{\infty} \|X\|_{\beta} |t-s|^{\beta} + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}
\end{aligned}$$

então

$$\|Y\|_{\beta} \leqslant \|Y'\|_{\infty} \|X\|_{\beta} + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} < \infty.$$

Como $f \in C_b^3$ então $Y' = f(Y) \in \mathcal{C}^{\beta}$. E usando $\mathbb{X} \in \mathcal{C}_2^{2\beta}$ temos

$$\begin{aligned}
\left|R_{s,t}^Y\right| &= |Y_{s,t} - Y_s' X_{s,t}| \\
&= \left|\int_s^t f(Y_r) d\mathbf{X}_r - f(Y_s) X_{s,t}\right| \\
&= \left|\int_s^t f(Y_r) d\mathbf{X}_r - f(Y_s) X_{s,t} - f(Y)_s' \mathbb{X}_{s,t}\right| + |f(Y)_s' \mathbb{X}_{s,t}| \\
&\leqslant C \left(\|X\|_{\alpha} \left\|R^{f(Y)}\right\|_{2\alpha} + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \|f(Y)'\|_{\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha} + \|f(Y)'\|_{\infty} \|\mathbb{X}\|_{2\beta} |t-s|^{2\beta},
\end{aligned}$$

onde no último passo usamos o Teorema (3.13). Como $3\alpha > 2\beta$ temos que $\left\|R^Y\right\|_{2\beta} < \infty$.

Pelo Lema (5.6) sabemos que para todo par $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0, 1], W)$

$$(f(Y)_t, f(Y)_t') := (f(Y_t), Df(Y_t) Y_t') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0, 1], \mathcal{L}\left(V, W\right))$$

e a existência da integral $\displaystyle\int_0^t f(Y)_r d\mathbf{X}_r$ é garantida pelo Teorema (3.13). Como prometido, defina

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T(Y,Y') : \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W) &\longrightarrow \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W)) \\ (Y,Y') &\longmapsto \left(\xi + \int_0^{\cdot} f(Y)_r d\mathbf{X}_r, f(Y_\cdot)\right) \end{aligned} \tag{6.3}$$

aqui estamos restringindo os caminhos em $[0,1]$ para $[0,T]$, onde $T \leqslant 1$. Dentro do espaço de rough paths controlados que satisfazem $(Y,Y')_0 = (\xi, f(\xi))$ um ponto fixo de $\mathcal{M}_T$ é a solução da nossa EDR. De forma mais clara, estudaremos a atuação do mapa $\mathcal{M}_T$ no conjunto

$$\mathscr{D}_{X,\xi}^{2\alpha} = \left\{(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W) : Y_0 = \xi \text{ e } Y_0' = f(\xi)\right\}.$$

Como $\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ com a norma $(Y,Y') \mapsto |Y_0| + |Y_0'| + \|Y,Y'\|_{X,2\alpha}$ é Banach, então nosso subespaço também é. A partir de agora para essa demonstração apenas trabalharemos com o subespaço definido (uma vez que o espaço inteiro não nos interessa).

Para prosseguir com a demonstração precisamos restringir um pouco mais nosso espaço. Defina $\mathcal{B}_T$ como a bola unitária fechada em volta de $t \mapsto (\xi + f(\xi)X_{0,t}, f(\xi))$. Isto é, $\mathcal{B}_T$ é todo par (Y,Y') em $\mathscr{D}_{X,\xi}^{2\alpha}$ tal que

$$|Y_0 - \xi| + |Y_0' - f(\xi)| + \|Y_\cdot - (\xi + f(\xi)X_{0,\cdot}),\, Y_\cdot' - f(\xi)\|_{X,2\alpha} \leqslant 1.$$

Como fixamos as condições iniciais os dois primeiros termos são nulos. Além disso, veja que

$$\begin{aligned} (Y - (\xi + f(\xi)X))_{s,t} &= Y_{s,t} - f(\xi)X_{s,t} \\ &= Y_s' X_{s,t} + R_{s,t}^Y - f(\xi)X_{s,t} \\ &= (Y_s' - f(\xi))X_{s,t} + R_{s,t}^Y \end{aligned}$$

então

$$\|Y_\cdot - (\xi + f(\xi)X_{0,\cdot}),\, Y_\cdot' - f(\xi)\|_{X,2\alpha} = \|Y' - f(\xi)\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha} = \|Y'\|_\alpha + \left\|R^Y\right\|_{2\alpha}.$$

Juntando tudo temos que

$$\mathcal{B}_T = \left\{(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W) : Y_0 = \xi, Y_0' = f(\xi) \text{ e } \|Y,Y'\|_{X,2\alpha} \leqslant 1\right\}.$$

Veja também que para todo (Y,Y') em $\mathcal{B}_T$

$$|Y_0'| + \|Y,Y'\|_{X,2\alpha} \leqslant |f(\xi)| + 1 =: M \in [1,+\infty). \tag{6.4}$$

Com nossos objetos principais definidos, vamos mostrar que para T suficientemente pequeno $\mathcal{M}_T$ é invariante em $\mathcal{B}_T$ ($\mathcal{M}_T(\mathcal{B}_T) \subset \mathcal{B}_T$). No que segue, para evitar que a notação fique muito carregada, C representará de diversas constantes diferentes, mas sempre em função de α, T, X e $\mathbb{X}$. Tomaremos também a devida cautela para que C possa ser escolhida de forma uniforme sobre $T \leqslant 1$ (será importante). Usando a Estimativa (5.3) do Lema (5.6) temos

$$\|f(Y), f(Y)'\|_{X,2\alpha} \leqslant CM \|f\|_{C_b^2} \left(|Y_0'| + \|Y, Y'\|_{X,2\alpha}\right). \tag{6.5}$$

Defina por $R^{\mathcal{M}_T}$ e R^f os restos associados, respectivamente, a $\mathcal{M}_T(Y, Y')$ e $(f(Y), f(Y)')$. Aplicando (3.8)

$$\begin{aligned}
\left|R^{\mathcal{M}_T}_{s,t}\right| &= \left|\int_s^t f(Y_r)d\mathbf{X}_r - f(Y_s)X_{s,t}\right| \\
&\leqslant \left|\int_s^t f(Y_r)d\mathbf{X}_r - f(Y_s)X_{s,t} - f(Y)'_s\mathbb{X}_{s,t}\right| + |f(Y)'_s\mathbb{X}_{s,t}| \\
&\leqslant C(\|X\|_\alpha \left\|R^f\right\|_{2\alpha} + \|f(Y)'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha})|t-s|^{3\alpha} + \|f(Y)'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Como $T \leqslant 1$ temos $\|f(Y)'\|_\infty \leqslant |f(Y)'_0| + \|f(Y)'\|_\alpha$, então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}_T(Y, Y')\|_{X,2\alpha} &\leqslant \|f(Y)\|_\alpha + CT^\alpha(\|X\|_\alpha \left\|R^f\right\|_{2\alpha} + \|f(Y)'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}) + \|f(Y)'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \\
&\leqslant \|f(Y)\|_\alpha + C\left(\|X\|_\alpha \left\|R^f\right\|_{2\alpha} + \|f(Y)'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + |f(Y)'_0| \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|f(Y)'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right) \\
&\leqslant \|f(Y)\|_\alpha + C\left(|f(Y)'_0| + \|f(Y)'\|_\alpha + \left\|R^f\right\|_{2\alpha}\right)\left(\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Usando $\|X\|_\alpha + \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \leqslant T^{\beta-\alpha} \|X\|_\beta + T^{2(\beta-\alpha)} \|\mathbb{X}\|_{2\beta}$ e ajustando a constante na última passagem, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}_T(Y, Y')\|_{X,2\alpha} &\leqslant \|f(Y)\|_\alpha + C\left(|f(Y)'_0| + \|f(Y), f(Y)'\|_{X,2\alpha}\right)\left(T^{\beta-\alpha} \|X\|_\beta \right. \\
&\qquad \left. + T^{2(\beta-\alpha)} \|\mathbb{X}\|_{2\beta}\right) \\
&\leqslant \|f(Y)\|_\alpha + C\left(|f(Y)'_0| + \|f(Y), f(Y)'\|_{X,2\alpha}\right) T^{\beta-\alpha}\left(\|X\|_\beta + 1\,\|\mathbb{X}\|_{2\beta}\right) \\
&\leqslant \|f(Y)\|_\alpha + C\left(|f(Y)'_0| + \|f(Y), f(Y)'\|_{X,2\alpha}\right) T^{\beta-\alpha}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Além disso, temos

$$\|f(Y)\|_\alpha \leqslant \|f\|_{C_b^1} \|Y\|_\alpha ; \tag{6.7}$$

$$|f(Y)'_0| = |Df(Y_0)Y'_0| \leqslant \|Df(Y_0)\|_{op} |Y'_0| = \|Df(Y_0)\|_{op} |f(\xi)| \leqslant \|f\|^2_{C_b^1}. \tag{6.8}$$

E calculando uma última estimativa antes de provarmos a invariância

$$\begin{aligned}
|Y_{s,t}| &= \left|Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}\right| \\
&\leqslant \|Y'\|_\infty \|X\|_\beta |t-s|^\beta + \left\|R^Y\right\|_{2\beta} |t-s|^{2\alpha} \\
&\leqslant (|Y'_0| + T^\alpha \|Y\|_\alpha) \|X\|_\beta |t-s|^\beta + \left\|R^Y\right\|_{2\beta} |t-s|^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Como $T \leqslant 1$ e $\beta - \alpha < \alpha$ temos $T^\alpha \leqslant T^{\beta-\alpha}$

$$\begin{aligned}
\|Y\|_\alpha &\leqslant (|Y'_0| + \|Y\|_\alpha) \|X\|_\beta T^{\beta-\alpha} + \left\|R^Y\right\|_{2\beta} T^\alpha \\
&\leqslant \left[(|Y'_0| + \|Y\|_\alpha) \|X\|_\beta + \left\|R^Y\right\|_{2\beta}\right] T^{\beta-\alpha} \\
&\leqslant \left[M \|X\|_\beta + 1\right] T^{\beta-\alpha}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Aplicando (6.7), (6.8) e (6.5) em (6.6)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_T(Y,Y')\|_{X,2\alpha} &\leqslant \|f(Y)\|_\alpha + C\left(|f(Y)'_0| + \|f(Y),f(Y)'\|_{X,2\alpha}\right)T^{\beta-\alpha}\\ &\leqslant \|f\|_{C_b^1}\|Y\|_\alpha + C\left(\|f\|_{C_b^1}^2 + CM\|f\|_{C_b^2}\left(|Y'_0| + \|Y,Y'\|_{X,2\alpha}\right)\right)T^{\beta-\alpha}\\ &\leqslant \left[\|f\|_{C_b^1}\left(M\|X\|_\beta + 1\right) + CM\left(\|f\|_{C_b^1}^2 + \|f\|_{C_b^2}M\right)\right]T^{\beta-\alpha},\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (6.4) e (6.9). Veja que em todas as passagens mantivemos a uniformidade de C com relação a $T \leqslant 1$. Em outras palavras,

$$\|\mathcal{M}_T(Y,Y')\|_{X,2\alpha} = O(T^{\beta-\alpha})$$

então existe T_0 suficientemente pequeno tal que $\|\mathcal{M}_{T_0}(Y,Y')\|_{X,2\alpha} \leqslant 1$ para todo (Y,Y') em $\mathcal{B}_{T_0}$. Concluímos que $\mathcal{M}_{T_0}$ é invariante sobre $\mathcal{B}_{T_0}$. Observe que durante a nossa escolha de T_0 foi independente de ξ.

Para a segunda parte do teorema, queremos mostrar que existe t tal que $\mathcal{M}_t$ é uma contração de $\mathcal{B}_t$. Veja que para todo $t \in (0,T_0]$ se (Y,Y') e $(\tilde{Y},\tilde{Y}') \in \mathcal{B}_t$ podemos aplicar o Lema (5.10). Levando em conta $Y_0 = \tilde{Y}_0$, $Y'_0 = \tilde{Y}'_0$ e $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$ obtemos

$$\left\|\mathcal{M}_t(Y,Y') - \mathcal{M}_t(\tilde{Y},\tilde{Y}')\right\|_{X,2\alpha} \leqslant CT^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y,Y';\tilde{Y},\tilde{Y}'\right).$$

Como C pode ser escolhido de forma uniforme sobre $T \leqslant 1$, existe $T_1 \in (0,T_0]$ pequeno o suficiente de modo que

$$\left\|\mathcal{M}_{T_1}(Y,Y') - \mathcal{M}_{T_1}(\tilde{Y},\tilde{Y}')\right\|_{X,2\alpha,[0,T_1]} \leqslant \frac{1}{2}\left\|(Y,Y') - (\tilde{Y},\tilde{Y}')\right\|_{X,\alpha,[0,T_1]},$$

isto é, para todo $t \in (0,T_1]$ temos $\mathcal{M}_t(\mathcal{B}_t) \subset \mathcal{B}_t$. Concluindo o argumento da contração.

Veja que pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, $\mathcal{M}_{T_1}$ admite único ponto fixo em $\mathcal{B}_{T_1}$ que é por definição a solução da EDR definida em $[0,T_1]$. Como já dito, a escolha de T_1 foi independente de ξ. Então, uma vez que temos a solução podemos repetir o argumento para condição inicial Y_{T_1}. Concatenando os caminhos obtemos uma solução definida em $[0,2T_1]$. Iterativamente repetimos o argumento de modo que o domínio da solução seja $[0,1]$.

Por último, observe que a unicidade nas bolas de $\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ nos garante a unicidade em $\mathscr{D}_X^{2\beta}$. Suponha (Y,Y') a solução construída e (Z,Z') uma solução (como já provado em $\mathscr{D}_X^{2\beta}([0,T],W)$, para algum $T \leqslant 1$), então para qualquer $\alpha \in (1/3,\beta)$

$$\begin{aligned}\|Z,Z'\|_{X,2\alpha;[s,t]} &= \|Z'\|_{\alpha;[s,t]} + \left\|R^Z\right\|_{2\alpha;[s,t]}\\ &\leqslant |t-s|^{\beta-\alpha}\|Z'\|_{\beta;[s,t]} + |t-s|^{2(\beta-\alpha)}\left\|R^Z\right\|_{2\beta;[s,t]}\\ &\leqslant |t-s|^{\beta-\alpha}\|Z,Z'\|_{X,2\beta;[s,t]}\\ &\leqslant |t-s|^{\beta-\alpha}\|Z,Z'\|_{X,2\beta;[0,T]},\end{aligned}$$

isto é, existe δ suficientemente pequeno tal que para todo intervalo $[s,t]$ tal que $|t-s| < \delta$

$$\|Z, Z'\|_{X,2\alpha;[s,t]} \leqslant 1$$

o que significa que $(Y,Y')\big|_{[s,t]} = (Z,Z')\big|_{[s,t]}$. Então temos que $(Y,Y') = (Z,Z')$. ∎

Observação 6.7. No teorema passado, a condição $Y' = f(Y)$ é importante para a unicidade da solução, uma vez que se não for o caso podemos ter infinitas soluções. Vejamos em um exemplo simples, considere X um caminho Lipschitz e defina com a integral de Riemann-Stieltjes o levantamento canônico $\mathbb{X}_{s,t} = \displaystyle\int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r$. Seja então Y o caminho que é a solução única de $dY = f(Y)dX$ dada condição inicial $Y_0 = \xi$ no sentido de Riemann. Veja que por estimativas de EDO temos que Y também é Lipschitz, então para qualquer escolha de $Y' \in \mathcal{C}^\beta$ temos que

$$\left|R^Y_{s,t}\right| = |Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}| \leqslant (\|Y'\|_{2\beta} + \|Y'\|_\infty \|X\|_{2\beta})|t-s|^{2\beta}$$

que em outras palavras significa que $(Y,Y') \in \mathscr{D}^{2\beta}_X$. Pelo mesmo argumento, como f é de classe C^3 temos que $f(Y)$ é Lipschitz, portanto qualquer escolha de $f(Y)' \in \mathscr{C}^\beta$ gera um par $(f(Y), f(Y)') \in \mathscr{D}^{2\beta}_X$. Por último veja que pela Observação (3.16)

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y)_r dX_r = \xi + \int_0^t f(Y)_r d\mathbf{X}_r$$

para quaisquer pares (Y,Y') e $(f(Y), f(Y)')$, em outras palavras temos infinitas soluções.

6.3 Continuidade do Mapa Solução

Teorema 6.8. *Para $f : W \to \mathcal{L}(V,W)$ de classe C^3_b, $\mathbf{X}$ e $\tilde{\mathbf{X}}$ dois α-rough paths em V. Considere $(Y, f(Y)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,1], W)$ a única solução da EDR*

$$\begin{cases} dY = f(Y)d\mathbf{X}; \\ Y_0 = \xi. \end{cases}$$

Seja similarmente $(\tilde{Y}, f(\tilde{Y}))$ a (única) solução da EDR dirigida $\tilde{\mathbf{X}}$, com a condição inicial $\tilde{Y}_0 = \tilde{\xi}$. Se $\|\!|\mathbf{X}|\!\|_\alpha, \|\!|\tilde{\mathbf{X}}|\!\|_\alpha \leqslant M$, então temos a seguinte estimativa

$$d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, f(Y); \tilde{Y}, f(\tilde{Y})\right) \leqslant C_M\left(|\xi - \tilde{\xi}| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\right) \tag{6.10}$$

e também

$$\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha \leqslant C_M\left(|\xi - \tilde{\xi}| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\right) \tag{6.11}$$

para alguma constante $C = C(M, \alpha, T, f)$.

Demonstração. Lembre-se que construímos a solução $(Y, f(Y))$ de EDR como ponto fixo do operador

$$\mathcal{M}_T(Y, Y') = \left(\int_0^{\cdot} f(Y)d\mathbf{X}, f(Y_\cdot)\right) =: (Z, Z') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha},$$

similarmente

$$\mathcal{M}_T(\tilde{Y}, \tilde{Y}') = \left(\int_0^{\cdot} f(\tilde{Y})d\tilde{\mathbf{X}}, f(\tilde{Y}_\cdot)\right) =: (\tilde{Z}, \tilde{Z}') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}.$$

Usando o Lema (5.10) temos

$$\begin{aligned} d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, f(Y); \tilde{Y}, f(\tilde{Y})\right) &= d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Z, Z'; \tilde{Z}, \tilde{Z}'\right) \\ &\leqslant C_1\left(\left|Y_0 - \tilde{Y}_0\right| + \left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right) \\ &\leqslant C_1\left(\left|\xi - \tilde{\xi}\right| + \left|f(\xi) - f(\tilde{\xi})\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right) \\ &\leqslant C_1\left(\left|f(\xi) + 1\right|\left|\xi - \tilde{\xi}\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right) \\ &\leqslant C_2\left(\left|\xi - \tilde{\xi}\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right). \end{aligned}$$

Como C_2 pode ser tomado uniformemente sobre $T \leqslant 1$ podemos considerar T pequeno o suficiente de modo que $C_2 T^\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Usando isso em conjunto com o fato que $Y' = f(Y)$ e $\tilde{Y}' = f(\tilde{Y})$ temos

$$\begin{aligned} &d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, f(Y); \tilde{Y}, f(\tilde{Y})\right) \leqslant C_2\left(\left|\xi - \tilde{\xi}\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\right) + \frac{1}{2} d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, f(Y); \tilde{Y}, f(\tilde{Y})\right) \\ &\implies d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, f(Y); \tilde{Y}, f(\tilde{Y})\right) \leqslant 2C_2\left(\left|\xi - \tilde{\xi}\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\right), \end{aligned}$$

que é exatamente a Estimativa (6.10).

Para (6.11), usando o Teorema (3.24) junto com a estimativa calculada acima, temos

$$\begin{aligned} \left\|Y - \tilde{Y}\right\|_\alpha &\leqslant C_1\left(\left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha + T^\alpha d_{X,\tilde{X},2\alpha}\left(Y, Y'; \tilde{Y}, \tilde{Y}'\right)\right) \\ &\leqslant C_1\left(\left|Y_0' - \tilde{Y}_0'\right| + \left\|X - \tilde{X}\right\|_\alpha + T^\alpha C_M\left(\left|\xi - \tilde{\xi}\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\right)\right) \\ &\leqslant C_1\left(T^\alpha C_M + 1\right)\left(\left|\xi - \tilde{\xi}\right| + \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}})\right). \end{aligned}$$

∎

6.4 Propriedade de Fluxo de EDRs

Nesta seção veremos um resultado importante para a teoria, mas escolho deixa-lo sem demonstração, uma vez que esta é trabalhosa e sai um pouco do escopo do texto. Para o leitor interessado, recomendo a leitura do capítulo 11 de [FV10], onde o teorema que aqui será citado é um caso particular ($\alpha \in (1/3, 1/2]$) dos Teoremas 11.12 e 11.13.

Nas últimas seções vimos que se $f : \mathbb{R}^e \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^d\right)$, então existe única solução para a EDR

$$\begin{cases} dY = f(Y)d\mathbf{X}, \\ Y_0 = \xi \end{cases}$$

Denote-a por $\pi_{(f)}(0,\xi;\mathbf{X})_t$. O mapa $\xi \mapsto \pi_{(f)}(0,\xi;\mathbf{X})_\cdot$ é chamado de *fluxo* associado à EDR. De imediato temos um fluxo inverso para todo ξ, dado por

$$\pi_{(f)}(0,\xi;\mathbf{X})_t^{-1} = \pi_{(f)}(0,\xi;\mathbf{X}(\cdot - t))_t.$$

Daqui queremos saber se $\pi_{(f)}(0,\xi;\mathbf{X})_t$ tem uma dependência suave de ξ.

Notação 6.9. Para todo $1 \leqslant n \leqslant d$ e $k = (k_1, \cdots, k_n) \in \{1, \cdots, e\}^n$ denote por D^k as derivadas $\dfrac{\partial^n}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_n}}$.

Teorema 6.10. *Sejam* $\alpha \in (1/3, 1/2]$ *e* $\mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{X}} \in \mathscr{C}_g^\alpha$. *Se* $f : \mathbb{R}^e \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^d\right)$ *de classe* C_b^{3+n}*, então os fluxos associados possuem regularidade* C_b^{1+n} *sobre a condição inicial* ξ*, assim como seu inverso. Além disso, para todo* $M > 0$ *existem constantes* C *e* K *que dependem apenas de* M *e* $\|f\|_{C_b^{3+n}}$ *tais que*

$$\begin{aligned} &\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left\| D^k \pi_{(f)}(0,\xi,\mathbf{X})_\cdot - D^k \pi_{(f)}(0,\xi,\tilde{\mathbf{X}})_\cdot \right\|_{\alpha,[0,t]} \leqslant C \rho_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) \\ &\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left\| D^k \pi_{(f)}(0,\xi,\mathbf{X})_\cdot \right\|_{\alpha,[0,t]} \leqslant K. \end{aligned}$$

Essas desigualdades também valem para o fluxo inverso.

6.5 Equações Diferenciais Rough Estocásticas

Para esta seção iremos utilizar dos resultados do capítulo 4 e através deles aplicar os teoremas de existência, unicidade e continuidade caminho a caminho, assim obtendo soluções fortes para nossas equações diferenciais.

Teorema 6.11. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade filtrado. Se* $f \in C_b^3(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^d)$, $\alpha \in (1/3, 1/2)$ *e* $\xi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^e)$*. Seja* B *um movimento Browniano em* $\mathbb{R}^d$

i) Para $\mathbf{B}^{\textit{Itô}} \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ *a única solução* $(Y(\omega), Y'(\omega))$ *de*

$$\begin{cases} dY(\omega)_t = f(Y(\omega)_t) d\mathbf{B}^{\textit{Itô}}(\omega)_t, \\ Y(\omega)_0 = \xi(\omega) \end{cases}$$

é tal que Y *é uma solução forte da equação diferencial estocástica de Itô*

$$\begin{cases} dY_t = f(Y_t) dB_t, \\ Y_0 = \xi; \end{cases}$$

ii) Similarmente, para $\mathbf{B}^{\textit{Strat}} \in \mathscr{C}_g^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ *a única solução* $(Y(\omega), Y'(\omega))$ *de*

$$\begin{cases} dY(\omega)_t = f(Y(\omega)_t) d\mathbf{B}^{\textit{Strat}}(\omega)_t, \\ Y(\omega)_0 = \xi(\omega) \end{cases}$$

é tal que Y é uma solução forte da equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$\begin{cases} dY_t = f(Y_t) \circ dB_t, \\ Y_0 = \xi. \end{cases}$$

Demonstração. Como as integrais de Itô e de Stratonovich são adaptadas à filtração gerada por B, então de imediato temos que $\mathbb{B}^{\text{Itô}}$ e $\mathbb{B}^{\text{Strat}}$ são $\sigma(B_u : 0 \leqslant u \leqslant r)$-mensuráveis. Segue então que

$$\sigma\left(B_s, \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,r} : 0 \leqslant u \leqslant r \leqslant t\right) = \sigma(B_u : 0 \leqslant u \leqslant t) = \sigma\left(B_s, \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,r} : 0 \leqslant u \leqslant r \leqslant t\right).$$

Como temos a continuidade do mapa de solução no caso rough temos que a solução (Y, Y') também é adaptada à filtração natural gerada por B. E para concluir o argumento, pelas Proposições (4.1) e (4.2) temos a igualdade da integrais. Então

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_r) d\mathbf{B}^{\text{Itô}}_r = \xi + \int_0^t f(Y_r) dB_r \text{ ou}$$
$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_r) d\mathbf{B}^{\text{Strat}}_r = \xi + \int_0^t f(Y_r) \circ dB_r.$$

■

Bibliografia

[LQ02] T. Lyons e Z. Qian. *System Control and Rough Paths*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 2002.

[Gub04] M. Gubinelli. *Controlling rough paths*. Vol. 216. 1. Journal of Functional Analysis, 2004, pp. 86–140.

[FL06] Denis Feyel e Arnaud de La Pradelle. *Curvilinear integrals along enriched paths*. Vol. 11. Eletronic Journal of Probability, 2006, pp. 860–892.

[FV10] P.K. Friz e N.B. Victoir. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2010.

[FH20] P.K. Friz e M. Hairer. *A Course on Rough Paths: With an Introduction to Regularity Structures*. Universitext. Springer International Publishing, 2020.

[Lê20] Khoa Lê. *A stochastic sewing lemma and applications*. Vol. 25. Electronic Journal of Probability, 2020, pp. 1–55.

[GNS22] Erlend Grong, Torstein Nilssen e Alexander Schmeding. *Geometric rough paths on infinite dimensional spaces*. Vol. 340. Journal of Differential Equations, 2022, pp. 151–178.

[All] Andrew L Allan. *Rough Path Theory*. ETH Zürich. URL: <https://www.researchgate.net/profile/Andrew-Allan-13/publication/353803166_Lecture_notes_on_Rough_Path_Theory/links/61127f5e0c2bfa282a3481ef/Lecture-notes-on-Rough-Path-Theory.pdf>.

Apêndices

APÊNDICE A – Apêndices

Teorema A.1 (Chow)**.** *Para todo* $g \in \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$ *existe* $\gamma \in \mathcal{C}^{lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$ *tal que*

$$S^2(\gamma)_{0,1} = exp(g).$$

Em particular,

$$G^2(\mathbb{R}^d) = S^2\left(\mathcal{C}^{lip}([0,1], \mathbb{R}^d)\right)_{0,1}.$$

Teorema A.2 (Aproximação Geodésica)**.** *Para todo par* $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}_g^{\beta}([0,T], \mathbb{R}^d)$*, existe sequência de caminhos Lipschitz* $X^n : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *tal que, sobre a norma de Carnot-Carathéodory,*

$$\lim_{n\to\infty} S^2(X^n)_{0,t} = (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t}) \text{ uniformemente em } [0,T]$$

e $\sup_{n\geqslant 1} |\!|\!| X^n, \mathbb{X}^n |\!|\!|_{\beta} \leqslant C |\!|\!| X, \mathbb{X} |\!|\!|_{\beta}$.

Teorema A.3 (Burkholder-Davis-Gundy)**.** *Para qualquer* $1 \leqslant p < \infty$*,* X *um martingale local com* $X_0 = 0$ *e* τ *um tempo de parada, existem constantes positivas* c_p*,* C_p *tais que*

$$c_p \mathbb{E}\left[[X]_{\tau}^{p/2}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[(X_{\tau}^*)^p\right] \leqslant C_p \mathbb{E}\left[[X]_{\tau}^{p/2}\right]$$

aqui $[X]$ *denota a variação quadrática de* X *e* $X_t^* := \sup_{s \leqslant t} |X_s|$.