



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin

CARLOS JAVIER GOMEZ FUENTES

Métodos analíticos para a formulação da oscilação de neutrinos

Analytical methods for the formulation of the neutrino oscillation

CAMPINAS
2024

CARLOS JAVIER GOMEZ FUENTES

Métodos analíticos para a formulação da oscilação de neutrinos

Dissertação apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA, na área de FÍSICA.

Orientador: ORLANDO LUIS GOULART PERES

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DE DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO CARLOS JAVIER GOMEZ FUENTES E ORIENTADA PELO PROF. DR. ORLANDO LUIS GOULART PERES.

CAMPINAS

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

G586m Gomez Fuentes, Carlos Javier, 1998-
Métodos analíticos para a formulação da oscilação de neutrinos / Carlos
Javier Gomez Fuentes. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Orlando Luis Goulart Peres.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Física Gleb Wataghin.

1. Partículas (Física nuclear). 2. Neutrinos. 3. Oscilações de neutrinos. I.
Peres, Orlando Luis Goulart, 1969-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Analytical methods for the formulation of the neutrino oscillation

Palavras-chave em inglês:

Particles (Nuclear physics)

Neutrinos

Neutrinos oscillations

Área de concentração: Física

Titulação: Mestre em Física

Banca examinadora:

Orlando Luis Goulart Peres [Orientador]

Cristiane Jahnke Fiorini da Silva

David Vanegas Forero

Data de defesa: 23-04-2024

Programa de Pós-Graduação: Física

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-6125-5248>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4613650596969593>



INSTITUTO DE FÍSICA
GLEB WATAGHIN

MEMBROS DA COMISSÃO EXAMINADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO ALUNO CARLOS JAVIER GOMEZ FUENTES - RA 216110, APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 23/04/2024.

COMISSÃO JULGADORA:

- Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres – Presidente e Orientador (IFGW/UNICAMP)
- Profa. Dra. Cristiane Jahnke Fiorini da Silva (IFGW/ UNICAMP)
- Prof. Dr. David Vanegas Forero (Universidad de Medellín - CTyE)

OBS.: Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

CAMPINAS

2024

Aymar, embora a distância física nos separe, tua presença tem sido uma inspiração constante ao longo desta viagem acadêmica; a geografia nos distanciou, mas tua companhia constante ilumina cada passo deste caminho; tua luz transcende fronteiras, ♥.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me acompanhar em todos os momentos e se manifestar em minha vida como um pai cheio de bondade e misericórdia. Porque, por trás de cada uma das minhas conquistas, sempre esteve ele, que as tornou possíveis.

À mulher mais forte que eu conheço, minha mãe, Elianis Isabel Gómez Fuentes, que tem sido e continuará sendo minha maior fonte de inspiração, minha motivação e meu referencial a ser seguido.

Ao Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres por as suas excelentes, assertivas e claras orientações nesta pesquisa de mestrado, pelo tempo que dedicou a este projeto de pesquisa e, especialmente, por seu exemplo de generosidade intelectual e acadêmica.

À Rafaela Rodrigues Rossi, por seu inestimável acompanhamento durante todo o processo e por suas sempre acertadas sugestões.

Aos funcionários da CPG/IFGW, Alessandra, Cristina, Leandro e, no seu momento, Mariana, pela paciência e prontidão com que sempre me atenderam e, sobretudo, por sempre responder gentilmente a todos os meus e-mails desesperados.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Todo esse projeto de pesquisa foi realizado com o apoio financeiro da CAPES – Brasil (processo nº 88887.675292/2022-00), código de financiamento 001, fundamental para que eu pudesse cumprir os créditos/requisitos do curso e me dedicar à pesquisa.

O presente trabalho também foi realizado com apoio do CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Brasil (Processo nº 130101/2024-9), entidade ligada ao MCTI – Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações.

But you know, happiness can be found even in the darkest of times, if one only remembers to turn on the light.

(Albus Dumbledore, J. K. Rowling)

RESUMO

Descrever a evolução de um neutrino através do método tradicional de diagonalização do hamiltoniano, para o caso genérico de três neutrinos com efeito de matéria, não tem simples interpretação dos autovetores. Portanto, obter a probabilidade de oscilação é um problema desafiador, pois encontrar uma fórmula analítica para a probabilidade de oscilação de neutrinos nem sempre é simples ou o resultado nem sempre tem uma forma funcional intuitiva que reflita a física subjacente do fenômeno que está ocorrendo.

Uma primeira alternativa é resolver numericamente as equações de oscilação de neutrinos. No entanto, essa maneira não fornece muitas informações físicas sobre o fenômeno em questão, limitando-se apenas a resolver numericamente uma equação diferencial.

Por outro lado, quando é possível obter fórmulas analíticas, *e.g.*, como no caso de um neutrino que se propaga num meio com densidade constante, o método tradicional de diagonalização do hamiltoniano leva a equações que, embora “simples”, não têm uma forma funcional intuitiva, o que dificulta a compreensão da física por trás delas.

A alternativa que queremos propor é abordar o problema por meio da teoria de perturbação, estendendo um resultado analítico conhecido na literatura. Esse prévio resultado analítico emprega uma expansão perturbativa e fornece uma fórmula analítica simples, prática, intuitiva e confiável (dentro dos limites de validade do método) para a probabilidade de oscilação de um neutrino (no caso de três sabores) que se propaga em um meio de densidade constante.

Nosso trabalho estuda principalmente a aplicabilidade desse formalismo a mais de um meio, *i.e.*, utilizando como perfil da densidade a aproximação em formato de castelo (do inglês, *castle wall density profile*). Como resultado original desta pesquisa, apresentamos fórmulas inéditas para calcular a probabilidade de oscilação na abordagem da teoria da perturbação, usando os mesmos parâmetros de expansão que Asano e Minakata, no caso dos multi-meios.

ABSTRACT

Describing the evolution of a neutrino through the traditional method of diagonalization of the hamiltonian, for the generic case of three neutrinos with matter effect, doesn't have a simple interpretation of the eigenvectors. Therefore, obtaining the oscillation probability is a challenging problem, since finding an analytical formula for the neutrino oscillation probability is not always simple or the result does not always have an intuitive functional form that reflects the underlying physics of the phenomenon that is occurring.

A first alternative is to solve numerically the equations of neutrino oscillation. However, this way does not provide much physical information about the phenomenon in question, being limited only to solve numerically a differential equation.

On the other hand, when it is possible to obtain analytical formulas, *e.g.*, in the case of a neutrino propagating in a medium with constant density, the traditional method of diagonalization of the hamiltonian leads to equations that, although "simple", lack an intuitive functional form, which makes it difficult to understand the physics behind them.

The alternative we want to propose is to approach the problem by means of the perturbation theory, extending an analytical result known from the literature. This previous analytical result employs a perturbative expansion and provides a simple, practical, intuitive and reliable (within the validity limits of the method) analytical formula for the oscillation probability of a neutrino (in the case of three flavors) propagating in a medium of constant density.

Our work mainly studies the applicability of this formalism to more than one medium, *i.e.*, using the castle wall density profile as the density profile. As an original result of this research, we present unpublished formulas for calculating the oscillation probability in the perturbation theory approach, using the same expansion parameters as Asano and Minakata, for the multi-medium case.

RESUMEN

Describir la evolución de un neutrino a través del método tradicional de diagonalización del hamiltoniano, para el caso genérico de tres neutrinos con efecto de materia, no tiene una interpretación sencilla de los autovectores. Por lo tanto, obtener la probabilidad de oscilación es un problema desafiante, ya que encontrar una fórmula analítica para la probabilidad de oscilación de neutrinos no siempre es sencillo o el resultado no siempre tiene una forma funcional intuitiva que refleje la física subyacente del fenómeno que está ocurriendo.

Una primera alternativa es resolver numéricamente las ecuaciones de oscilación de los neutrinos. Sin embargo, esta manera no ofrece muchas informaciones físicas sobre el fenómeno en cuestión, limitándose únicamente a resolver numéricamente una ecuación diferencial.

Por otra parte, cuando es posible obtener fórmulas analíticas, *e.g.*, en el caso de un neutrino que se propaga en un medio con densidad constante, el método tradicional de diagonalización del hamiltoniano conduce a ecuaciones que, aunque “simples”, carecen de una forma funcional intuitiva, lo que dificulta la comprensión de la física que hay detrás de ellas.

La alternativa que queremos proponer es abordar el problema por medio de la teoría de perturbación, extendiendo un resultado analítico conocido en la literatura. Este previo resultado analítico emplea una expansión perturbativa y proporciona una fórmula analítica simple, práctica, intuitiva y confiable (dentro de los límites de validez del método) para la probabilidad de oscilación de un neutrino (en el caso de tres sabores) que se propaga en un medio de densidad constante.

Nuestro trabajo estudia principalmente la aplicabilidad de este formalismo a más de un medio, *i.e.*, utilizando como perfil de densidad la aproximación en forma de castillo (del inglés, *castle wall density profile*). Como resultado original de esta investigación, presentamos fórmulas inéditas para calcular la probabilidad de oscilación en el enfoque de la teoría de perturbación, utilizando los mismos parámetros de expansión que Asano y Minakata, para el caso de multimedios.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Conteúdo de partículas e interações no SM	24
1.2	Espectro de energia do decaimento beta	28
1.3	Ciclo CNO	33
1.4	Cadeia pp	34
1.5	Produção de neutrinos atmosféricos	36
1.6	SNP	38
1.7	Resultado do experimento SNO	39
1.8	ANP: eventos de um só anel FC, multianel e PC no detector	41
1.9	ANP: eventos muônicos <i>upward stopping</i> e <i>upward through-going</i>	42
2.1	Oscilação de neutrinos no modelo 2ν , $\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_x}$ em função de L	54
2.2	Probabilidade de sobrevivência $\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ no modelo 2ν , em função de E	55
2.3	Esquema da oscilação de neutrinos	56
2.4	Representação ilustrativa dos ângulos de mistura da matriz PMNS	56
2.5	Probabilidade média de transição	59
2.6	Plotagem logarítmica da probabilidade de sobrevivência	61
2.7	Representação ilustrativa das transformações CPT, CP e T	63
2.8	Ordenamentos das massas dos neutrinos	64
2.9	Valor da massa efetiva do neutrino em função de N_e	67
2.10	Perfil de densidade em formato castelo com um período e meio.	82
3.1	Passo a passo de nossa “receita” para o cálculo da probabilidade.	88
3.2	Comparação $\mathcal{P}_{\text{AeM}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ vs. $\mathcal{P}_{\text{Cervera}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ com $\mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ (do cálculo numérico)	95
3.3	Eficiência das fórmulas perturbativas de Asano e Minakata em função da ordem selecionada	96
3.4	Validação de $\mathcal{P}_{\text{ren}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$: comparação entre $\mathcal{P}_{\text{AeM}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ e nossas fórmulas de renormalização atmosférica.	104
3.5	Diferença relativa entre as fórmulas de Asano e Minakata e o resultado numérico	105
3.6	Eficiência das nossas fórmulas perturbativas de renormalização atmosférica em função da ordem selecionada	107
3.7	Diferença relativa entre as fórmulas de renormalização atmosférica e as fórmulas de Asano e Minakata	108
4.1	Perfil de densidade da Terra	111
4.2	Perfil de densidade no formato CW para dois meios	112
4.3	Comparação entre $\mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ e nossa formulação analítica até a 2 ^{da} ordem para dois meios.	120

4.4	Propagação de um neutrino através de seis meios (perfil da densidades e probabilidade de oscilação)	129
4.5	Comparação $\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(2k)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ vs. $\mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, para um neutrino que se propaga através de quatro, seis, oito e dez meios	133
A.1	Fontes de neutrinos ao longo várias ordens de grandeza de energia	149
B.1	Representação ilustrativa da perturbação	160

LISTA DE TABELAS

1.1	Conteúdo da matéria: divisão dos férmions em quarks e léptons	25
1.2	Forças experimentadas pelas partículas elementares	25
1.3	Partículas portadoras de força (bósons) descritas no SM	26
2.1	Experimentos de oscilação de neutrinos	62

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

	Significado
AGN	Active Galactic Nucleus
ANITA	Antarctic Impulsive Transient Antenna
ANP	Atmospheric Neutrino Problem
ANTARES	Astronomy with a Neutrino Telescope and Abyss environmental RESearch project
ATLAS	A Toroidal LHC ApparatuS
BNL	Brookhaven National Laboratory
BSM	Physics beyond the Standard Model
CC	Charged Current
CERN	Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire
CMB	Cosmic Microwave Background
CMS	Compact Muon Solenoid
CNO	Ciclo CNO: Carbono – Nitrogênio – Oxigênio
CP	Charge conjugation and Parity transformation
CPT	Charge, Parity, and Time reversal symmetry
cte	Constante matemática
CW	Castle Wall density profile
DAR	Decay At Rest
DIF	Decay In Flight
DONuT	Direct Observation of the NU Tau (ν_τ)
DUNE	Deep Underground Neutrino Experiment
ES	Elastic Scattering
FC	Fully – Contained
Fermilab	Fermi National Accelerator Laboratory
Λ – CMD	Lambda – Cold Dark Matter
GALLEX	GALLium EXperiment
GNO	Gallium Neutrino Observatory
GRB	Gamma Ray Burst
ICARUS	Imaging Cosmic And Rare Underground Signals
IceCube	IceCube Neutrino Observatory
INO	India-based Neutrino Observatory
IO	Inverted Ordering, $\Delta m_{31}^2 < 0$
J-Park	Japan Proton Accelerator Research Complex
KamLAND	Kamioka Liquid Scintillator Antineutrino Detector
KARMEN	KARutherford Medium Energy Neutrino
LBL	Long BaseLine
LHC	Large Hadron Collider

	Significado
LNGS	Laboratori Nazionali del Gran Sasso
LSND	Liquid Scintillator Neutrino Detector
MiniBooNE	Mini Booster Neutrino Experiment
MINOS	Main Injector Neutrino Oscillation Search
MINERvA	Main Injector Neutrino Experiment to study ν -A interactions
MSW	Efeito Mikheyev – Smirnov – Wolfenstein
NC	Neutral Current
NO	Normal Ordering, $\Delta m_{31}^2 > 0$
NO ν A	NuMI Off-Axis ν_e Appearance
PDG	Particle Data Group
PINGU	Precision IceCube Next Generation Upgrade
PMNS	Matriz de mistura leptônica de Pontecorvo – Maki – Nakagawa – Sakata
pp	Cadeia $p - p$: próton – próton
QCD	Quantum ChromoDynamics
QED	Quantum ElectroDynamics
QFT	Quantum Field Theory
QM	Quantum Mechanics
RENO	Reactor Experiment for Neutrino Oscillation
SAGE	Soviet – American Gallium Experiment
SBL	Short BaseLine
SMC	Standard Model of Cosmology
SNe	Supernovae
SNO	Sudbury Neutrino Observatory
SNP	Solar Neutrino Problem
SNS	Spallation Neutron Source
SSM	Standard Solar Model
SK	Super – Kamiokande
SM	Standard Model
ν	Neutrino
$\bar{\nu}$	Antineutrino
T	Time reversal
T2K	<i>Tokai to Kamioka</i> experiment
VLB	Very Long Baseline

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	18
1. NEUTRINO: REMÉDIO DESESPERADO QUE QUEBROU O MODELO PADRÃO	24
1.1 O que é física de partículas elementares?	24
1.2 O que são os neutrinos?	27
1.3 Oscilação de sabor?	30
1.4 De onde vêm os neutrinos?	32
1.4.1 Neutrinos solares	32
1.4.2 Neutrinos atmosféricos	35
1.5 Primeiros indícios experimentais das oscilações	36
1.5.1 Oscilação em neutrinos solares	37
1.5.2 Oscilação em neutrinos atmosféricos	40
1.6 Tentativas de explicação para o SNP e ANP	42
1.6.1 Oscilação neutrino – antineutrino, $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$	42
1.6.2 Oscilação de neutrinos de diferentes sabores, $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$	43
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: A QM DAS OSCILAÇÕES DE NEUTRINOS	45
2.1 Formalizando o problema	47
2.2 Modelo de oscilação 2ν no vácuo	51
2.3 Modelo de oscilação 3ν no vácuo	55
2.4 Probabilidade média de transição	58
2.4.1 Caso 2ν	58
2.4.2 Caso 3ν	59
2.5 Tipos de experimentos de oscilação de neutrinos	60
2.6 Simetria CPT	62
2.7 Massa dos neutrinos	63
2.8 Ordenamentos das massas dos neutrinos	64
2.9 Efeitos da matéria na oscilação de neutrinos	65
2.9.1 Oscilações entre dois sabores na matéria com densidade constante	66
2.9.2 Efeito MSW da Terra na propagação de neutrinos	70
2.9.3 Oscilações entre três sabores na matéria com densidade constante	72
2.9.4 Resumo da oscilação de neutrinos na matéria	78
2.9.5 Aproximação da densidade em degraus	79
3. FORMULAÇÃO ANALÍTICA COM DENSIDADE CONSTANTE	83
3.1 Teoria da perturbação $\sqrt{\epsilon}$	84

3.1.1	Componentes ou elementos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$	88
3.1.2	Probabilidades de oscilação no canal $\nu_e \rightarrow \nu_x$	90
3.2	Renormalização atmosférica de Δm^2	97
3.2.1	Elementos de matriz do operador de evolução	100
3.2.2	Probabilidade de oscilação no setor eletrônico	101
4.	FORMULAÇÃO ANALÍTICA COM DENSIDADE NÃO CONSTANTE	110
4.1	Evolução com uma mudança de meio	112
4.1.1	Elementos de matriz do operador de evolução	112
4.1.2	Probabilidade de oscilação no setor relacionado a ν_e	116
4.2	Evolução através de n meios distintos	122
5.	CONCLUSÕES	134
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	137
	APÊNDICE A. FONTES DE NEUTRINOS	149
A.1	Neutrinos cósmicos: supernovas	150
A.2	Neutrinos cósmicos: <i>Big Bang</i>	150
A.3	Neutrinos solares	151
A.4	Neutrinos atmosféricos	152
A.5	Neutrinos de reatores nucleares	153
A.6	Neutrinos de aceleradores de partículas	154
A.7	Geoneutrinos: manto e núcleo terrestre	155
	APÊNDICE B. TEORIA DE PERTURBAÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO	157
	APÊNDICE C. PROBABILIDADE DE OSCILAÇÃO NO SETOR ELETRÔNICO	163
C.1	Um único meio com densidade constante	163
C.1.1	Na teoria da perturbação $\sqrt{\epsilon}$ de Asano e Minakata	163
C.1.2	Renormalização atmosférica de Δm^2	164
C.2	Extensão de Asano e Minakata a mais de um meio material	165
C.2.1	Evolução com só uma mudança de meio: dois meios	165
C.2.2	Evolução com múltiplas mudanças de meio: n meios	171

INTRODUÇÃO

Em 1930, numa carta [1] dirigida aos participantes de um congresso sobre radioatividade em Tubinga, Alemanha, Pauli propôs a existência de uma nova partícula, eletricamente neutra, com $\text{spin}=\frac{1}{2}$ e massa muito pequena. Ele a descreveu como uma espécie de *remédio desesperado* para explicar algumas propriedades não compreendidas, resultantes da aparente não conservação da energia e do momento angular na desintegração beta de certos núcleos; fenômeno que foi observado por Chadwick em 1914 [2].

Desde a sua hipótese em 1930, passando pela sua descoberta e/ou detecção em 1953 por Reines e Cowan [3], o neutrino tem sido uma partícula envolvida em mistérios, desafiando a nossa compreensão da física até hoje.

De acordo com o modelo padrão vigente, os neutrinos são partículas elementares fermiônicas, o que significa que possuem $\text{spin}=\frac{1}{2}$, são desprovidas de massa e pertencem à família dos léptons, especificamente aos léptons neutros ou não carregados. Além disso, apresentam sempre helicidade negativa, a qual é conservada, e carregam números leptônicos que também são conservados. Os antineutrinos têm as mesmas propriedades dos neutrinos, com exceção da helicidade, que é sempre positiva.

Na natureza os neutrinos se manifestam em três tipos ou estados distintos, conhecidos como sabores: neutrino eletrônico (ν_e), neutrino muônico (ν_μ) e neutrino tauônico (ν_τ). Estes nomes derivam do fato de que, sempre que um neutrino for criado ou aniquilado, é observada a presença de seu respectivo lépton carregado (elétron, múon ou tau) que o acompanha na interação fraca, *i.e.*, o neutrino sempre é acompanhado [4]. Tanto assim que precisamente o aparecimento de um lépton carregado junto ao neutrino é o que permite a detecção e identificação dele, já que o neutrino raramente interage com a matéria e, portanto, um neutrino só pode ser detectado indiretamente.

Apesar de serem, depois do fóton, as partículas mais abundantes no Universo, os neutrinos não são tão fáceis de detectar, uma vez que só interagem com a matéria ordinária através das forças gravitacional e fraca. Os neutrinos não experimentam interação forte nem eletromagnética, já que não possuem carga de cor por serem léptons, e também não têm carga elétrica. Sua principal interação é a fraca, que também é a principal pista para sua detecção. Além disso, experimentam interação gravitacional, embora esta última seja praticamente insignificante devido à sua massa quase nula. A oscilação de sabor, uma propriedade do neutrino que apresentaremos mais adiante, é um fenômeno estabelecido experimentalmente que exige que os neutrinos tenham massa (embora o modelo padrão presuma neutrinos de massa zero).

Assim, com uma massa desprezível e ausência de carga elétrica, o neutrino se torna praticamente invisível para quase tudo ao seu redor, uma característica única que lhe rendeu o apelido de *partícula fantasma*. Embora os neutrinos sejam partículas funda-

mentais na estrutura do Universo, paradoxalmente, são uma das menos compreendidas e mais enigmáticas das partículas que compõem o modelo padrão.

Entre as diversas propriedades únicas do neutrino, a oscilação de sabor (que transforma um neutrino de um tipo em outro tipo de neutrino) destaca-se como uma das mais fascinantes. Ao contrário das outras partículas fundamentais, neutrinos inicialmente criados com um sabor específico ν_α podem ser detectados, após sua propagação pelo espaço, com um sabor diferente ν_β . Por incrível que pareça, o sabor do neutrino pode mudar entre sua fonte e sua detecção. Por exemplo, enquanto o Sol produz só neutrinos eletrônicos, os experimentos realizados na Terra detectam neutrinos eletrônicos, bem como muônicos e tauônicos.

A oscilação de neutrinos consiste na transformação ou mudança de um tipo de neutrino em outro à medida que eles se propagam pelo espaço. Esse fenômeno já foi estabelecido experimentalmente, razão pela qual foi concedido o prêmio Nobel em 2015 [5]. A oscilação de neutrinos requer, entre outras coisas, que os neutrinos tenham massa, o que contradiz o modelo padrão. Como mencionado anteriormente, o modelo padrão não inclui neutrinos massivos. O modelo padrão, apesar de ser uma teoria bem sucedida ao incorporar as interações conhecidas (exceto a gravitacional) e responder com sucesso a um grande número de resultados experimentais, pressupõe neutrinos sem massa. No entanto, hoje sabemos que, como eles podem mudar de sabor (ou oscilar), os neutrinos de fato possuem massa.

Nesse sentido, os neutrinos se tornam uma das poucas evidências experimentais que envolvem a chamada física BSM (do inglês *physics beyond the Standard Model*). Portanto, o estudo da oscilação de neutrinos emerge como uma ferramenta chave para investigar ou explorar além dos limites do modelo padrão. Atualmente, diversos experimentos estão em andamento ou em construção com o propósito de estudar a oscilação de neutrinos [6]. Múltiplas evidências experimentais respaldam a ideia de que a transição de sabor ou a oscilação de neutrinos é possível. Essas evidências não apenas indicam que os neutrinos devem ter massa não nula, mas também estabelecem a existência de uma mistura leptônica que se manifesta ao considerar a evolução temporal dos estados dos neutrinos.

Do ponto de vista teórico, a oscilação de sabores entre os neutrinos é descrita pela probabilidade de oscilação em termos da energia do neutrino e da distância percorrida por ele (*i.e.*, distância entre a fonte e o detector). No capítulo 2 discutimos o formalismo da oscilação de neutrinos, usando a derivação convencional da probabilidade de oscilação na abordagem da mecânica quântica. Nessa derivação empregamos argumentos bastante simplificados e aproximações razoáveis que não nos impedem de chegar ao resultado correto nas equações.

No entanto, mesmo que o modelo de oscilação padrão tenha mostrado ser capaz de descrever muitos dos efeitos observados em experimentos com neutrinos, as fórmulas

de probabilidade de oscilação nem sempre são fáceis de se obter pelos métodos analíticos habituais ou carecem de uma forma funcional intuitiva que dê conta da física por trás delas.

No paradigma vigente, cada sabor de neutrino (ν_e , ν_μ ou ν_τ) é representado como uma superposição coerente de três neutrinos físicos (ν_1 , ν_2 e ν_3) e pode adotar qualquer um dos três sabores durante as suas viagens. A base do fenômeno de oscilação de neutrinos é a mecânica quântica de um sistema com mistura, sendo também o método mais eficiente para determinar as diferenças dos quadrados das massas ($\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$) dos neutrinos físicos, as quais estão diretamente relacionadas com a frequência de oscilação. Nesse cenário, a transição de sabor ocorre porque os estados próprios de sabor (ou estados próprios fracos, aqueles que se acoplam aos bósons W^\pm e Z^0) e os estados próprios de massa (supondo que os neutrinos tenham massa) não são necessariamente iguais, permitindo que estes últimos possam se misturar. Em consequência, quando um neutrino se propaga, ele se propaga através de seus estados próprios de massa, enquanto interage por meio de seus estados próprios de sabor.

Embora o sabor do neutrino possa mudar durante a sua trajetória, o correto é dizer que o sabor detectado é aquele que tem a maior probabilidade de ocorrer no momento da detecção. Em outros termos, o sabor do neutrino é um estado momentâneo que pode assumir qualquer um dos três sabores possíveis.

Neste formalismo, os estados próprios de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ estão ligados aos estados próprios de massa $|\nu_i\rangle$ pela matriz unitária PMNS (matriz 3×3 que possui três ângulos de mistura e uma fase complexa), $U = U_{\text{PMNS}}$. Portanto, como os neutrinos interagem como autoestados de sabor, a solução deste problema mecânico-quântico implica ter que diagonalizar o hamiltoniano de sabor, expresso como $\mathcal{H}_f = U\mathcal{H}_m U^\dagger$, onde \mathcal{H}_m é o hamiltoniano de massa ou hamiltoniano físico.

No caso de dois neutrinos, o problema é relativamente simples, já que U_{PMNS} se torna uma matriz 2×2 , e a diagonalização de \mathcal{H}_f consiste apenas em resolver uma equação quadrática (fórmula de Baskhara). Entretanto, no caso de três neutrinos, a situação fica um pouco mais complicada, uma vez que agora é necessário diagonalizar uma matriz 3×3 , resultando numa equação cúbica (caímos numa fórmula para uma equação cúbica de Cardano). Porém, embora o método tradicional de diagonalizar o hamiltoniano leve a equações “simples”, a física por trás dele se torna bastante complicada de entender.

Essa complexidade na descrição analítica da oscilação de neutrinos nos motiva a procurar maneiras alternativas de abordar esse problema, através dos chamados métodos analíticos para a formulação da oscilação de neutrinos [7], justificando a nossa pesquisa. Esses métodos analíticos não apenas simplificam o formalismo matemático, mas também proporcionam *insights* físicos valiosos sobre o fenômeno em questão. De fato, dentro desses métodos analíticos, e como resultado de nossa pesquisa, queremos propor um novo método, baseado na teoria da perturbação, para calcular as probabilidades de oscilação

de neutrinos.

Basicamente, o que fazemos nessa abordagem da teoria de perturbação é expandir o hamiltoniano em dois componentes, numa parte conhecida (ou não perturbada, independente do parâmetro de expansão) e numa parte perturbativa (ou termo de interação), onde a segunda parte depende de um parâmetro que escolhemos, garantindo que ele seja o suficientemente pequeno para fazer a expansão em torno dele. Logo disso, encontramos a expansão perturbativa do operador de evolução na representação de interação da mecânica quântica e selecionamos, por ordem de expansão, os termos necessários da série de Dyson para o cálculo das probabilidades de oscilação perturbativa, até a segunda ordem de expansão.

Com esse novo método, são obtidas fórmulas analíticas para as probabilidades de oscilação que, ao serem comparadas com as obtidas pelo método tradicional de diagonalização do hamiltoniano, são não apenas muito mais fáceis de calcular, mas também têm uma forma funcional clara e são fisicamente intuitivas.

Como primeiro resultado de nossa pesquisa, conseguimos reproduzir e estender um resultado analítico previamente reportado em 2011 por K. Asano e H. Minakata [8], para um neutrino que se propaga num meio de densidade constante, que serviu também como a nossa principal referência.

Em seguida, utilizando a mesma abordagem da teoria de perturbação, junto com os mesmos parâmetros de expansão usados na referência [8], obtivemos pela primeira vez, e como resultado original deste trabalho de pesquisa, as correspondentes fórmulas analíticas da probabilidade de oscilação para um neutrino que se propaga num meio de densidade não constante. Empregamos a aproximação de densidade em formato de castelo (*“castle wall” density profile*), em que o perfil de densidade do meio no qual o neutrino se propaga pode ser caracterizado ou descrito, numa aproximação muito boa, por uma série de trechos de densidade constante.

É importante destacar que esse perfil de densidade específico pode ser aplicado à forma da densidade da Terra [9], o que confere às nossas novas fórmulas um atrativo adicional. Novos experimentos (alguns em construção e outros já em andamento) buscarão medir as oscilações de neutrinos com alta precisão, especialmente naqueles que atravessam a Terra, de modo que as nossas novas fórmulas analíticas se tornam interessantes em virtude de que fornecem um cálculo rápido da probabilidade de oscilação, um resultado correto e confiável dentro dos limites de validade do método (que são impostos pelas suposições iniciais) e uma forma funcional simples, prática e com uma interpretação analítica fácil de entender. Aliás, na referência [10], essa aproximação do perfil de densidade é sugerida para o experimento DUNE [11], acrescentando uma camada adicional de aplicabilidade prática às nossas novas fórmulas.

No decorrer de todo o processo metodológico para obtenção e análise dos resultados, foram empregadas as ferramentas computacionais *Wolfram Mathematica* (versão

13.2) e *Python* (versão 3.11.4). Os códigos utilizados nos cálculos computacionais (além das anotações pessoais, onde estão as descrições detalhadas dos procedimentos algébricos adotados) estão disponíveis nesta pasta (clique no ícone para acessar o website): .

Organizamos a apresentação desta dissertação em cinco capítulos, da seguinte forma:

- ☞ No capítulo 1, apresentamos uma breve revisão histórica e contextualização da física de partículas elementares e do modelo padrão vigente, ressaltando alguns aspectos teóricos e históricos relacionados à física de neutrinos, destacando as suas interessantes propriedades, especialmente a oscilação de sabor, que transforma um neutrino de um tipo em outro tipo de neutrino, põe em xeque o modelo padrão e sugere a exploração da física BSM.
- ☞ Em seguida, para complementar as informações apresentadas sobre a física de neutrinos, no capítulo 2 construímos e discutimos o formalismo da oscilação de neutrinos padrão, utilizando a abordagem da mecânica quântica, com base em argumentos bastante simples e aproximações razoáveis. Embora existam formulações mais robustas e com bases teóricas mais fortes, fundamentadas na teoria de ondas planas e pacotes de ondas em teoria quântica de campos (que não serão discutidas neste trabalho), a derivação apresentada é suficiente para chegar aos resultados corretos nas equações. Esta revisão tem como principais referências e fontes de consulta os livros [12, 13] e as referências contidas nos mesmos.
- ☞ A formulação analítica da probabilidade de oscilação, para um neutrino que se propaga num meio de densidade constante, desenvolvida através da teoria de perturbação e já reportada na literatura por Asano e Minakata [8], é descrita no capítulo 3, da seguinte forma:
 - ↪ Primeiro, fazemos a revisão e réplica dos cálculos feitos pelos autores, para interiorizar todo o maquinário matemático dessa abordagem da teoria da perturbação na descrição da oscilação de neutrinos.
 - ↪ Nesta revisão foram utilizados os mesmos parâmetros de expansão, *i.e.*, $s_{13} = \sin \theta_{13}$ e a razão $r_{\Delta} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$, que sabemos que são pequenos de acordo com os parâmetros de oscilação atuais [14], uma vez que a diferença $\Delta m_{21}^2 \sim 10^{-5} \text{ eV}^2$ é pequena em relação a $\Delta m_{31}^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$ e o ângulo de mistura $\theta_{13} \ll 1 \text{ rad}$, é pequeno em relação aos outros ângulos.
 - ↪ A perturbação foi dada em função do parâmetro $\sqrt{\epsilon}$ tal que $\epsilon \equiv r_{\Delta} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$ e $s_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$, definição na qual o valor de $\sin \theta_{13}$ está dentro dos limites determinados pelo experimento Chooz [15].
 - ↪ Adicionalmente, como um bônus ao reportado por Asano e Minakata, continuando no caso de densidade de matéria constante (onde o neutrino se propaga

num meio com densidade constante) e através do que chamamos *renormalização atmosférica de Δm^2* (definida na referência [16]), conseguimos, repetindo o mesmo procedimento algébrico, compactar as expressões para a probabilidade de oscilação, redefinindo o parâmetro de expansão $\epsilon \rightarrow \epsilon \equiv r_{\Delta_{\text{ren}}} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{ee}^2}$, onde $\Delta m_{ee}^2 = \Delta m_{31}^2 - (\sin^2 \theta_{12}) \Delta m_{21}^2$. Novamente, dentro dos limites experimentais para $\sin \theta_{13}$, mantemos a suposição $s_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$.

- ☞ Por fim, no capítulo 4, mostramos nossos resultados originais da pesquisa. Nele, estudamos a aplicabilidade da formulação proposta por Asano e Minakata [8], na descrição da evolução de um neutrino que se propaga num meio com densidade variável (mas cujo perfil pode ser aproximado numa série de trechos de densidade constante) e mostramos quão eficiente essa formulação continua a ser quando é estendida a mais de um meio material.
 - ☞ Primeiro, derivamos fórmulas analíticas para a probabilidade de oscilação até segunda ordem de expansão, quando há uma única mudança de meio, *i.e.*, $n = 2$ meios.
 - ☞ Posteriormente, visando aproveitar a simplicidade, a praticidade, a intuição e a precisão (dentro dos limites de validade do método) fornecidas pelas expressões não nulas de ordem mais baixa, estendemos a formulação de Asano e Minakata para n meios e desenvolvemos uma regra heurística que nos permite construir a expressão analítica (em primeira ordem de expansão) para a probabilidade de oscilação de um neutrino que se propaga através de múltiplos meios.
- ☞ No último capítulo (capítulo No. 5), apresentamos as conclusões derivadas da análise e das discussões que são suscitadas ao longo da dissertação.

1 NEUTRINO: *REMÉDIO DESESPERADO* QUE QUEBROU O MODELO PADRÃO

De acordo com o modelo padrão vigente, os neutrinos são partículas elementares (ou seja, os neutrinos são um dos blocos fundamentais da matéria) fermiônicas (ou de spin- $\frac{1}{2}$), que pertencem à família dos léptons, não carregadas e sem massa. A seguir, damos uma breve apresentação histórica e contextualização da física das partículas elementares, direcionando o foco para os neutrinos e a necessidade de uma física além do modelo padrão.

1.1 O que é física de partículas elementares?

A física de partículas elementares ou física de altas energias é o núcleo da nossa compreensão das leis da natureza [17] e tem como objetivo determinar quais são os constituintes básicos ou elementares da matéria e as propriedades das forças envolvidas nas suas interações, *i.e.*, este ramo da física visa estudar a estrutura e o comportamento da matéria a nível fundamental em função das partículas elementares e das suas interações [18]. A compreensão atual da física de partículas se baseia no que se chama o **modelo padrão** (SM: *Standard Model*) da física de partículas.

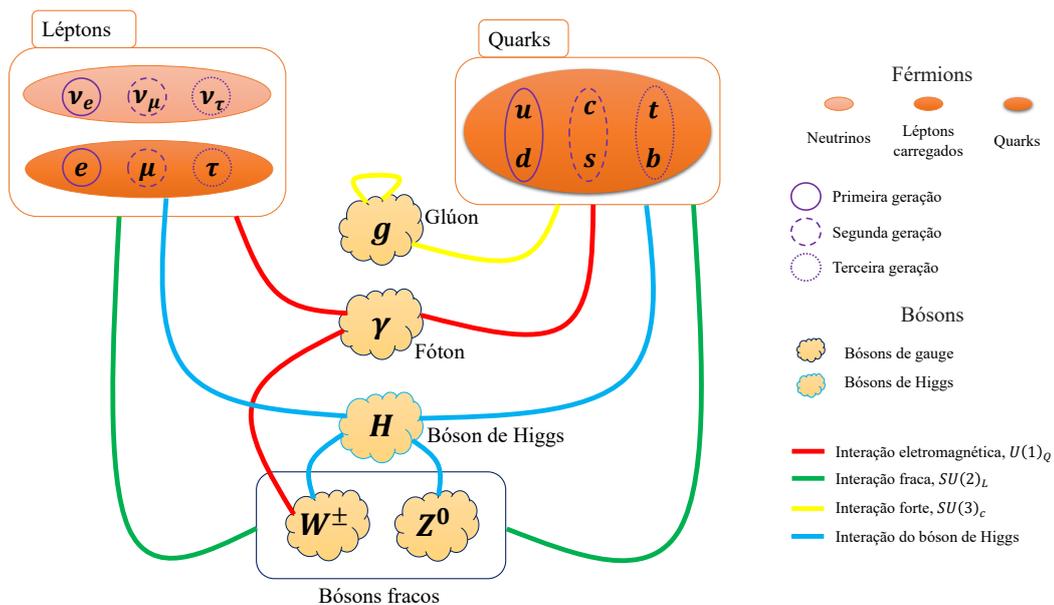


Figura 1.1: Modelo padrão: conteúdo de partículas e interações. Figura extraída e adaptada de [19].

O SM, sendo uma das maiores proezas da física moderna, visa oferecer um quadro de unificação, no qual as forças entre partículas podem ser descritas pela troca de partículas. O SM é preciso, quase completo [20] e tem sido testado com extraordinária precisão em diversos experimentos diferentes. O SM tem sido capaz de explicar um grande número de resultados experimentais e tem também previsto um grande número de fenômenos variados. Assim, o SM inclui todo nosso entendimento atual das partículas e das forças [21] e é estabelecido como uma teoria física bem testada e um modelo de referência para a descrição da maioria dos fenômenos.

O SM consegue acomodar um grande número de resultados experimentais com as partículas descritas no modelo e as suas complexas interações com só alguns poucos elementos: doze partículas de matéria e as suas correspondentes antipartículas (tabela 1.1) e as partículas que transportam as forças fundamentais (tabela 1.3). Os férmions ou partículas de matéria são classificados como léptons ou quarks de acordo com a forma como interagem (tabela 1.2) através das quatro forças fundamentais¹. As interações neste modelo são descritas através da troca de uma partícula portadora de força (os bósons). O SM tem conseguido integrar três das forças conhecidas na natureza: eletromagnética, fraca e forte. As forças nesta teoria são descritas como campos quânticos, ou seja, cada uma das três forças relevantes para o SM é determinada por uma teoria quântica de campo (QFT: *Quantum Field Theory*) correspondente à troca de uma partícula portadora de força de spin-1 (bóson vetorial ou de gauge), onde a lagrangiana é invariante sob um conjunto contínuo de transformações locais.

Tabela 1.1: Conteúdo da matéria, tal como descrito no SM: Os doze férmions fundamentais divididos em quarks e léptons [18].

	Carga	Primeira geração	Segunda geração	Terceira geração
Léptons	-1	Elétron (e^-)	Múon (μ^-)	Tau (τ^-)
	0	Neutrino eletrônico (ν_e)	Neutrino muônico (ν_μ)	Neutrino tauônico (ν_τ)
Quarks	-1/3	Down (d)	Estranho (s)	Bottom (b)
	2/3	Up (u)	Charme (c)	Top (t)

Tabela 1.2: Forças experimentadas pelas diferentes partículas elementares [17].

					Forte	Eletromagnética	Fraca
Quarks	Tipo “down”	d	s	b	X	X	X
	Tipo “up”	u	c	t			
Léptons	Carregados	e	μ	τ		X	X
	Neutrinos	ν_e	ν_μ	ν_τ			X

A eletrodinâmica quântica (QED: *Quantum ElectroDynamics*), a teoria que descreve o eletromagnetismo dentro deste modelo, é descrita usando uma teoria de gauge

¹A força gravitacional entre duas partículas individuais é extremamente pequena e pode ser desprezada na discussão das interações entre as partículas.

Tabela 1.3: As partículas portadoras de força descritas pelo SM [21].

Electromagnética	Fraca	Forte	Gravitacional
Fóton $m = 0$	Bósons W^+ , W^- e Z^0 $m \sim 100\text{GeV}$	Glúons (g) $m = 0$	Gráviton (G) ? $m = 0$

abeliana com o grupo de simetria $U(1)_Q$ (onde Q é a carga eletromagnética) com um campo de gauge, e o fóton como um bóson de gauge. Ao adicionar a esta teoria o grupo de simetria $SU(2)_L$ (o subscrito L significa que estas transformações atuam apenas sobre os componentes de quiralidade esquerda dos férmions), o SM tem sido capaz de descrever também a força fraca, conseguindo a unificação de ambas as forças, que se mostram como aspectos diferentes de uma mesma força². As partículas portadoras da força deste grupo unificado de gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (Y : número quântico da hipercarga), após a quebra de simetria, são chamadas de fóton, bóson W^+ , bóson W^- e bóson Z^0 . E finalmente, a força forte está incluída neste modelo usando uma descrição semelhante: um campo quântico com um grupo de simetria. De fato, para este caso, $SU(3)_C$ (C é a carga de cor) é o grupo não-abeliano que descreve com sucesso os processos da interação forte. Esta teoria quântica é chamada de cromodinâmica quântica (QCD: *Quantum ChromoDynamics*) e é adicionada ao SM aumentando o grupo de gauge para formar o grupo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ final.

Por outro lado, voltando ao modelo padrão de interações eletrofracas, propondo uma lagrangiana invariante sob transformações locais do grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ é proibido ter termos de massa na lagrangiana para férmions e campos de gauge [23], de modo que na lagrangiana $SU(2)_L \times U(1)_Y$ as partículas portadoras de força não têm massa. No entanto, experimentalmente, as massas dos bósons W^\pm e Z^0 acabam sendo diferentes de zero [24]. Para gerar tais termos de massa e resolver este problema, é utilizado o mecanismo de quebra espontânea da simetria eletrofraca, considerado como o mecanismo mais simples capaz de dar massa aos bósons de gauge enquanto permanece compatível com as teorias de gauge. Este mecanismo é implementado pela introdução de um dubleto de partículas escalares onde um dos campos adquire um valor esperado de vácuo não nulo, gerando uma quebra da simetria $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$. Ao introduzir a interação deste dubleto de partículas escalares com as partículas fermiônicas e os campos de gauge, tanto os férmions como os bósons de gauge adquirem massas após a quebra da simetria, e restando, o Higgs: uma partícula massiva de spin-0.

O bóson Higgs, a última partícula elementar descoberta pelos experimentos ATLAS (*A Toroidal LHC ApparatuS*) e CMS (*Compact Muon Solenoid*) no Grande Colisor de Hádrons (LHC: *Large Hadron Collider*) em 2012, em suma, desempenha um papel indispensável no SM, pois fornece o mecanismo pelo qual todas as outras partículas adquirem massa, e sem ele, o Universo seria muito diferente, todas as partículas não

²À energia da ordem de 100 GeV, ambas as forças têm intensidades da mesma ordem [22].

teriam massa e se propagariam à velocidade da luz [17]! Sua descoberta representou uma validação notável das ideias teóricas que constituem o SM.

Porém, como foi mencionado acima, o SM não está totalmente completo e, apesar da precisão com que o SM descreve muitos fenômenos físicos, nossa compreensão do Universo continua incompleta. Entre as limitações do SM, uma das mais importantes é a **oscilação de neutrinos**. O SM não incorpora neutrinos massivos, ou seja, os neutrinos têm massa zero no SM. Porém, desde o enfoque da solução proposta por Pontecorvo [25] ao problema do neutrino solar, este fenômeno de interferência quântica, onde neutrinos de um sabor mudam periodicamente para outro sabor de neutrino, exige que os neutrinos possuam massas diferentes e a diferença dos quadrados dessas massas está relacionada com a frequência de oscilação [26]. A oscilação dos neutrinos, como fenômeno experimentalmente comprovado³ exige então que os neutrinos sejam massivos, ao contrário do que é estabelecido pelo SM, então o estudo deste fenômeno implica a necessidade de avançar em direção a uma Física além do SM⁴.

1.2 O que são os neutrinos?

Numa carta [1] dirigida aos participantes de um congresso em Tubinga, Alemanha, sobre radioatividade, Wolfgang E. Pauli propõe em 1930 a existência de uma nova partícula, eletricamente neutra, com spin- $\frac{1}{2}$ e massa muito pequena, como um *remédio desesperado* para explicar algumas propriedades não compreendidas, produto da aparente não-conservação da energia na desintegração beta de certos núcleos observados em 1914 por James Chadwick [2]: no decaimento beta, um núcleo com Z prótons e N nêutrons se desintegra ao emitir um elétron e se torna num núcleo diferente, com $Z - 1$ prótons e $N + 1$ nêutrons⁵. Em outras palavras, é como se um nêutron dentro do núcleo fosse transformado num próton e um elétron.

Na época, se pensava que a desintegração beta era um decaimento de dois corpos, ou seja,

$$\beta^- : {}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{(Z+1)}\text{Y} + e^-, \quad (1.1)$$

e se esperava um espectro monoenergético, já que considerando a partícula ${}^A_Z\text{X}$ em repouso, o nêutron e o próton com massas muito próximas, o próton emitido teria uma quantidade desprezível de energia, então toda a energia restante é transportada pelo elétron como

³Motivo pelo qual o prêmio Nobel de Física foi concedido em 2015 [5].

⁴Veja [27, 28] para uma excelente visão geral do modelo padrão do setor eletrofraco e da física de neutrinos: fontes de neutrinos, oscilações de neutrinos, efeitos da matéria, massas absolutas, interações, a possível existência de neutrinos estéreis, implicações teóricas, características chaves da fenomenologia da oscilação, questões abertas atualmente, etc.

⁵Em 1930 ainda não se conhecia a existência do nêutron, mas fazemos uso dele aqui para uma explicação concisa do decaimento beta.

energia cinética, *i.e.*,

$$E_{e^-} = Q \cong M \left({}^A_Z\text{X} \right) - M \left({}^A_{(Z+1)}\text{Y} \right). \quad (1.2)$$

No entanto, ao contrário do esperado, experimentalmente foi observado que o espectro de energia era contínuo, em que o elétron emitido durante o decaimento beta possuía uma energia cinética que ia de zero (massa do elétron, m_e) até a energia Q , como é mostrado na figura 1.2. Mas, em qualquer ponto entre m_e e Q , o elétron não possui ou não está levando consigo toda a energia perdida pelo núcleo. Isto é, aparentemente, uma certa quantidade de energia desaparece, ou pelo menos outra partícula (x) estaria carregando esta energia:

$$E_{e^-} = Q \cong M \left({}^A_Z\text{X} \right) - M \left({}^A_{(Z+1)}\text{Y} \right) - E_x, \quad (1.3)$$

$$\beta^- : {}^A_Z\text{X} \rightarrow {}^A_{(Z+1)}\text{Y} + e^- + x. \quad (1.4)$$

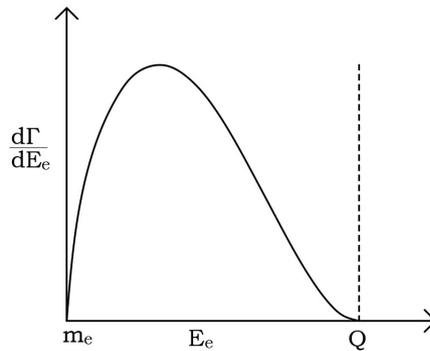


Figura 1.2: Espectro de energia do decaimento beta, a linha sólida é o que foi observado experimentalmente, e a linha tracejada é o que era esperado. Figura extraída e adaptada de [29].

Para fornecer uma explicação para esta incongruência, W. Pauli [1] propôs a existência de uma partícula sem carga elétrica e de spin- $\frac{1}{2}$, até então não detectada: o **neutrino**⁶, que é a partícula responsável de levar o resto da energia. E E. Fermi, na primeira teoria do decaimento beta [30] usou os nêutrons de Chadwick descobertos em 1932 [31, 32] e os nêutrons de Pauli⁷, para formular uma teoria quantitativa [33] que mostrou grande sucesso na descrição do espectro contínuo da partícula quando um neutrino é considerado [34]. Perrin obteve a mesma conclusão independentemente [35, 36].

Nesta teoria, um nêutron dentro do núcleo é transformado da seguinte forma:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}, \quad (1.5)$$

onde ν é o neutrino⁸. Se o neutrino tem spin- $\frac{1}{2}$ não há problema com o teorema de conexão

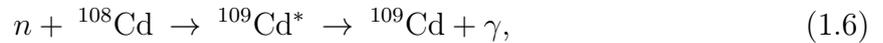
⁶Partícula postulada por Pauli e posteriormente chamada de neutrino por Enrico Fermi em 1934.

⁷Inicialmente chamados nêutrons. Para evitar confusão, Fermi renomeou o nêutron de Pauli como neutrino, ou pequeno nêutron em italiano.

⁸Na verdade, é um antineutrino, a distinção entre neutrino e antineutrino é a carga leptônica, uma

spin-estatística, nem com a conservação de energia, pois dependendo da orientação relativa das três partículas finais o elétron pode ter mais ou menos energia, que portanto não será fixada. A hipótese é simples e resolve dois problemas, mas introduz outro que o próprio Pauli reconheceu: ninguém jamais havia visto um neutrino.

Em 1956, Frederick Reines e Clyde Cowan [3] conseguiram detectar o antineutrino eletrônico indiretamente, por decaimento beta inverso ($\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$: o antineutrino eletrônico é capturado pelo próton e tem como estado final um pósitron e um nêutron), usando o reator de *Savannah River* na Carolina do Sul como uma fonte de antineutrinos. Os antineutrinos eram produzidos por decaimento beta, depois aqueles antineutrinos interagiam com prótons num tanque cheio de água e cloreto de cádmio. O pósitron resultante desta interação se aniquila com um elétron do meio, liberando dois raios gama 2γ . Por outro lado, o nêutron é capturado pelo cádmio,



onde o cádmio excitado posteriormente emite um raio gama ${}^{109}\text{Cd}^* \rightarrow {}^{109}\text{Cd} + \gamma$ por volta de 5×10^{-6} s após a emissão dos fótons provenientes da aniquilação do elétron-pósitron. Esta ocorrência de dois eventos consecutivos significou a prova da existência de um antineutrino, num projeto que eles chamaram, ironicamente, de Projeto *Poltergeist* [37, 38].

Posteriormente, em 1962, Leon Lederman, Melvin Schwartz e Jack Steinberger no BNL (*Brookhaven National Laboratory*), utilizando uma fonte de antineutrinos, produzidos pelo decaimento do pión,



e pela reação



descobrem o antineutrino muônico [39], ao não observar a reação $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow e^+ + n$. Observando que os antineutrinos do decaimento do pión eram diferentes dos antineutrinos do nêutron, $\nu_e \neq \nu_\mu$. Entretanto, anos antes, inconsistências nos decaimentos de certos tipos de partículas elementares, observados experimentalmente, tinham levado ao Emil J. Konopinski e o Hormoz M. Mahmoud, em 1953 [40] e Julian Schwinger, em 1957 [41] a conjecturar sobre a existência de um segundo neutrino (neutrino muônico).

quantidade que é +1 para o elétron e para o neutrino e -1 para as antipartículas correspondentes. No decaimento beta, como em todos os decaimentos, esta quantidade é conservada e, portanto, se temos um elétron, devemos ter um antineutrino, para que a carga leptônica total do estado final seja zero, como no estado inicial. Portanto, nesta teoria, o elétron e o antineutrino são produzidos durante a transição de um nêutron para um próton.

A saber, os seguintes decaimentos são observados

$$\begin{cases} \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \end{cases} \quad (1.9)$$

ao passo que

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma, \quad (1.10)$$

não é. Deste modo, $\bar{\nu}_e$ não pode ser a antipartícula de ν_μ e vice-versa. Portanto os neutrinos ν_e e ν_μ apresentam números quânticos (sabores) diferentes de modo que o primeiro é chamado de neutrino eletrônico e o segundo de neutrino muônico, pois somente os respectivos léptons associados aos nomes podem participar do processo de decaimento.

Em 1975 um novo lépton, o tau, foi observado [42]. A existência de um neutrino associado a este novo lépton foi imediatamente conjecturada e se inicia naturalmente a caçada pelo neutrino tauônico, encontrado em 2000 no Fermilab (*Fermi National Accelerator Laboratory*), com a colaboração do experimento DONuT [43] (*Direct Observation of the ν_τ*): o terceiro e último sabor dos neutrinos ativos⁹ associados à partícula tau. O princípio para esta observação foi utilizar uma fonte de neutrinos provenientes da interação de prótons com um alvo de tungstênio. A partir desta interação, foram produzidas partículas D_s , onde elas decaíram num antitau e um neutrino tauônico,

$$p(800\text{GeV}) + W \rightarrow D_s \rightarrow \tau^+ + \nu_\tau, \quad (1.11)$$

com um *taxa de ramificação* Γ para $D_s \rightarrow \tau^+ + \nu_\tau$ de 5,6%, *i.e.*, sobre 5% dos neutrinos devem ser tauônicos.

Como foi mencionado anteriormente, o terceiro e último sabor dos neutrinos ativos é o neutrino tauônico, e sua detecção fechou a família leptônica aceita pelo atual SM. Ou seja, existem só três sabores de neutrinos ativos. Isto foi corroborado pela medição da largura do decaimento invisível da partícula $Z \rightarrow \nu_\alpha + \bar{\nu}_\alpha$, que implicitamente revela a universalidade, ou seja, a partícula Z se acopla da mesma forma com o ν_e , ν_μ e ν_τ , portanto o *taxa de ramificação* Γ total do Z é proporcional ao número de sabores de neutrinos, que foi experimentalmente observado [44], evidenciando assim o número de neutrinos ativos como $N_\nu = 2,92 \pm 0,05$ [18].

1.3 Oscilação de sabor?

Como foi mencionado na seção anterior, na descrição do SM, os neutrinos são partículas elementares leptônicas não carregadas que interagem com a matéria ordinária somente através de interação gravitacional e fraca. Além disso, podemos dividi-los em três números

⁹Existem somente três neutrinos ativos.

quânticos de sabor, neutrino eletrônico (ν_e), neutrino muônico (ν_μ) e neutrino tauônico (ν_τ), mostrando a conservação do número leptônico na respectiva geração de léptons. Como vimos, também, o SM pode descrever toda a física, exceto a física gravitacional, desde interações fortes hadrônicas [18] até interações fracas leptônicas [24], com a massa das partículas elementares fornecidas pelo mecanismo de Higgs [45]. Porém, o SM não é completo, mesmo que descreva muito bem o entendimento atual da física das partículas e muitas de suas interações. Por exemplo, o SM não é capaz de explicar algumas anomalias observadas em neutrinos provenientes do Sol [46]. Este problema, conhecido como o problema do neutrino solar (SNP: *Solar Neutrino Problem*) [47], foi devido a uma grande discrepância entre a medição dos neutrinos solares que chegam à Terra e o que o modelo solar padrão previu. O experimento mostrou um déficit de neutrinos eletrônicos comparado ao que estava previsto: de acordo com o SM os neutrinos não deveriam ter massa, então o tipo de neutrino é fixo uma vez que é produzido e o Sol deveria emitir somente neutrinos eletrônicos produzidos pela fusão H – He [48].

Da mesma forma, outros experimentos, tais como o Kamiokande e o Super-Kamiokande ou SK (na cidade de Hida, Gifu, Japão – antigamente conhecida como Kamioka) [49], Homestake (às vezes chamado de *Davis experiment* ou *Solar Neutrino Experiment* e, na literatura original, chamado de experimento de *Brookhaven Solar Neutrino Experiment* ou, simplesmente, *Brookhaven ^{37}Cl*) [50], SNO (*Sudbury Neutrino Observatory*) [51], entre outros, apresentaram também um déficit nos dados, corroborando a favor da anomalia na taxa de neutrinos esperada.

A proposta de solução foi dada olhando para **além do modelo padrão**¹⁰: os neutrinos têm massa e podem, portanto, mudar o seu sabor [25, 52].

No SM, os neutrinos são considerados sem massa (suposição *ad-hoc*), mas sabemos que eles têm massas não-zero porque eles podem mudar de sabor ou oscilar. Em 1957, logo após o grupo de Chien-Shiung Wu descobrir a violação da paridade nos decaimentos beta [53], Bruno Pontecorvo foi quem sugeriu pela primeira vez [25, 52] a ideia da oscilação $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$, em analogia com a oscilação dos káons $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$, com base na proposta de que os neutrinos têm massa e, portanto, os estados de sabor podem ser expandidos na base própria de massa, se misturam e oscilam, aparecendo e desaparecendo. Depois, cinco anos mais tarde, Ziro Maki, Masami Nakagawa e Shoichi Sakata em 1962 [54] propuseram a mistura¹¹

$$\begin{cases} \nu_e &= \nu_1 \cos \theta - \nu_2 \sin \theta, \\ \nu_\mu &= \nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta, \end{cases} \quad (1.12)$$

que será discutida em mais detalhes mais adiante. Por enquanto, nas próximas seções, vamos descrever alguns dos experimentos que foram (e alguns ainda estão em funciona-

¹⁰BSM: *physics Beyond the Standard Model*.

¹¹Essa mistura foi inicialmente proposta com a convenção de sinais mostrada (de acordo com a equação 2.18 do artigo [54]). No entanto, a notação comumente aceita (veja a equação 2.28) atualmente usa os sinais “++” na primeira linha e “-+” na segunda linha, *i.e.*, $\theta \rightarrow -\theta$.

mento ou em desenvolvimento) usados para medir e estudar fenômenos de oscilação de neutrinos, corroborando a proposta de neutrinos massivos e validando assim todo o formalismo que mostraremos no próximo capítulo. Vamos também apresentar, com base nesses experimentos, e por causa da importância histórica, duas das fontes de neutrinos ou sistemas físicos que geram neutrinos.

1.4 De onde vêm os neutrinos?

Depois do fóton, os neutrinos são as partículas elementares mais abundantes no Universo visível [55]. Existem várias fontes de neutrinos: os neutrinos provenientes do Sol, os neutrinos atmosféricos, os neutrinos extragalácticos, os neutrinos de reatores e os neutrinos de aceleradores, que são discutidos de forma mais detalhada no apêndice A. Por enquanto, por causa da importância histórica, de momento, vejamos duas dessas fontes.

1.4.1 Neutrinos solares

No século XIX, o mecanismo exato pelo qual o Sol produzia sua energia ainda não era conhecido. Uma explicação foi que a energia do Sol veio da contração gravitacional, que, levando em conta a energia potencial gravitacional de uma esfera uniforme,

$$U_r = -\frac{3GM^2}{5R}, \quad (1.13)$$

aplicando o teorema virial e usando o mecanismo Kelvin-Helmholtz [56], deu uma idade do Sol [57] de

$$\frac{U_r}{L_\odot} \approx \frac{1,1 \times 10^{41} \text{ J}}{3,9 \times 10^{26} \text{ W}} \approx 8 \times 10^6 \text{ anos}, \quad (1.14)$$

onde L_\odot é a luminosidade do Sol. Este resultado é muito diferente da idade que conhecemos atualmente, que está na ordem dos giga-anos [58, 59],

$$8,9 \text{ mega-anos} \neq 4,57 \pm 0,11 \text{ giga-anos}. \quad (1.15)$$

Esta diferença ocorreu porque não se estava considerando a principal forma pela qual o Sol produz energia, a fusão nuclear, apresentada por George Gamow [60] em 1928, onde os prótons superaram a barreira de Coulomb, sendo isto possível devido à alta temperatura no centro do Sol ($\sim 10^7 \text{ K}$), o que se traduz em alta energia cinética. Devido a estas condições, existe a possibilidade de superar esta barreira e finalmente se fundir.

Em 1938 Charles Critchfield e Hans Albrecht Bethe [61] usando a fusão nuclear, descobriram um grupo de reações. Uma envolvendo carbono, nitrogênio e oxigênio como catalisadores num ciclo que se repetiu várias vezes enquanto o hidrogênio durava (o Sol é composto em termos de átomos de 92,1% hidrogênio e 7,8% hélio, e em massa

aproximadamente 70,6% hidrogênio e 27,4% hélio [62]), conhecido como o ciclo CNO (carbono-nitrogênio-oxigênio). E outra envolvendo prótons, conhecida como o ciclo ou cadeia pp (próton-próton).

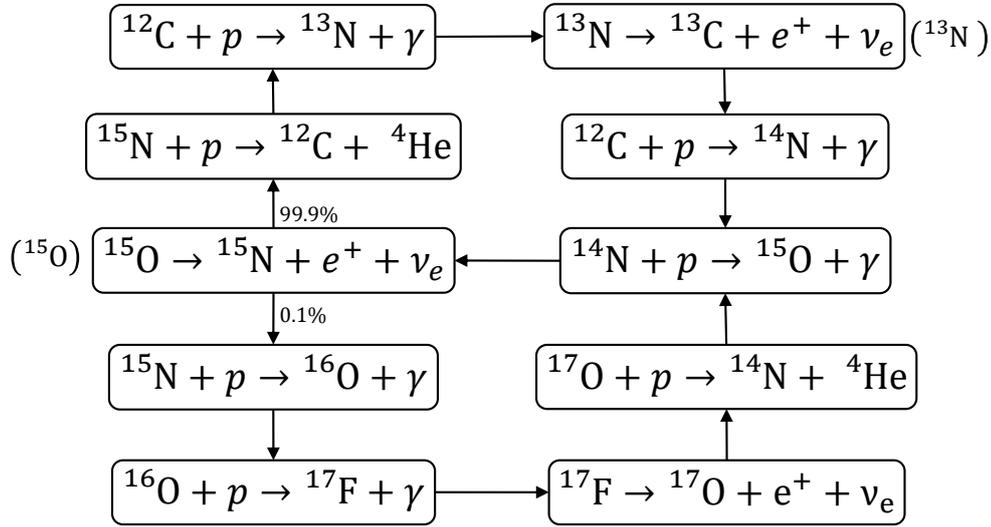
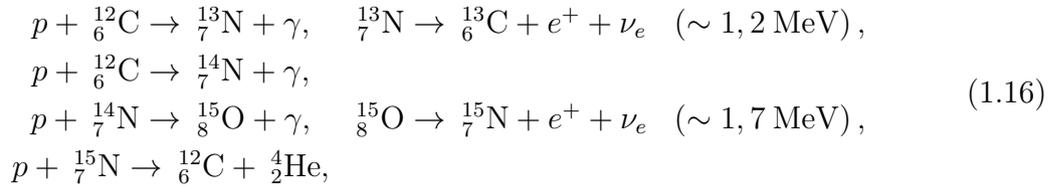


Figura 1.3: Ciclo CNO. Figura extraída e adaptada de [48].

O ciclo CNO (figura 1.3) consiste na fusão de quatro prótons com dois átomos de carbono e dois átomos de nitrogênio cada um, como se segue:



onde p representa, por simplicidade, ao hidrogênio ${}^1\text{H}$ (ou próton). Os dois neutrinos podem ser observados nas reações.

Por outro lado, temos o ciclo pp , que é o ciclo mais importante nas estrelas como a nossa e está descrito na figura 1.4.

A figura 1.4 parte de duas reações: a fusão $p + p$ (ou reação pp) e a fusão $p + e$ (ou reação pep), onde estas primeiras reações geram neutrinos em seus estados finais com diferentes probabilidades, como se pode ver nas porcentagens mostradas nesta figura. Além disso, em ambas as reações, se observam átomos de deutério, ${}^2\text{H}$ em seus estados finais que posteriormente se fusionam com um ${}^1\text{H}$, produzindo assim um hélio-3 e um fóton, ${}^2\text{H} + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$. O ${}^3\text{He}$ pode se fusionar num 85% das vezes com outro ${}^3\text{He}$, 15% com um isótopo ${}^4\text{He}$ e em torno de 10^{-5} % das vezes com um ${}^1\text{H}$ (reação hep). Destas três reações, concentramo-nos na fusão de ${}^3\text{He}$ com ${}^4\text{He}$, que produz um berílio e um fóton. Este ${}^7\text{Be}$ se fusiona com uma probabilidade de 99,9% com um elétron e num 0,10% com

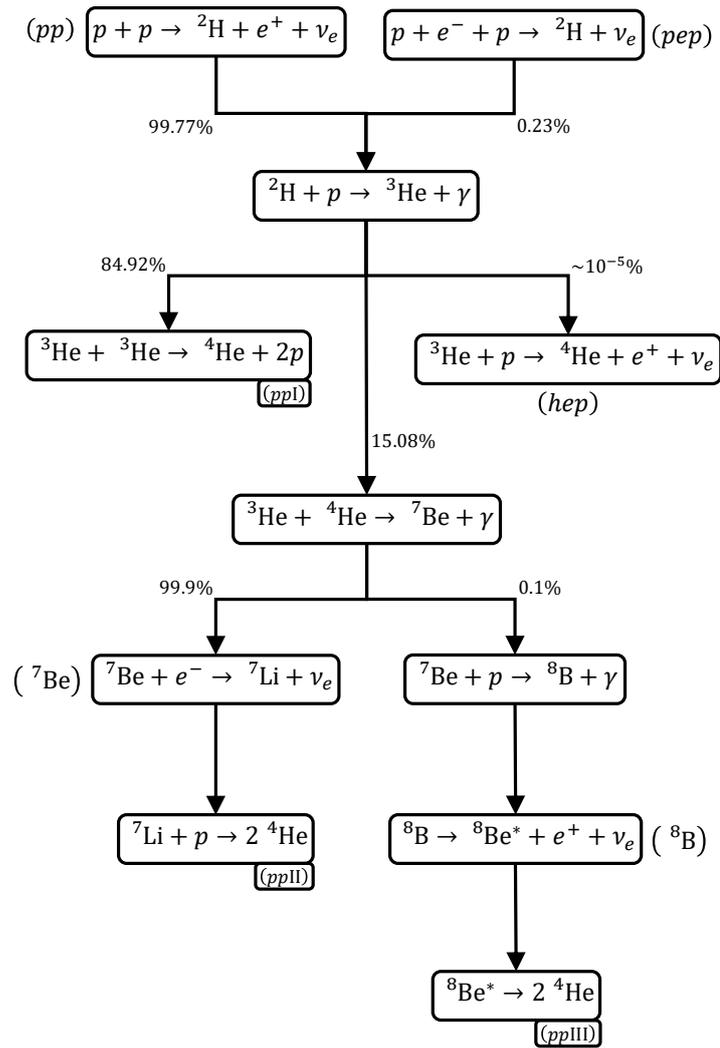


Figura 1.4: Cadeia *pp*. Figura extraída e adaptada de [48, 63, 64].

um ${}^1\text{H}$. A fusão com o elétron produz um neutrino eletrônico e lítio-7 que posteriormente se funde com um ${}^1\text{H}$ dando origem a ${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2 {}^4\text{He}$. Da fusão do ${}^7\text{Be}$ com ${}^1\text{H}$, se obtém o boro-8 mais um fóton. O ${}^8\text{B}$ decai num elemento instável, o ${}^8\text{Be}$, mais um pósitron e um neutrino e, finalmente, o ${}^8\text{Be}$ decai em dois ${}^4\text{He}$, como na fusão de ${}^7\text{Li}$ com ${}^1\text{H}$.

Observe também que após da produção do isótopo leve de ${}^3\text{He}$, a reação se divide em três ramos diferentes (*ppI*, *ppII* e *ppIII*) que conduzem todos à geração de um núcleo de ${}^4\text{He}$. Pode-se ver na figura 1.4 que na *ppI* o ${}^4\text{He}$ é produzido pela fusão de dois núcleos de ${}^3\text{He}$; os outros dois ramos, *ppII* e *ppIII*, requerem o ${}^4\text{He}$ previamente produzido na *ppI*. Ambas cadeias surgem dos dois caminhos que o ${}^7\text{Be}$ pode tomar. A cadeia *ppI* é dominante em temperaturas no intervalo de $[1, 0 - 1, 4] \times 10^7$ K. Abaixo dos 10^7 K, a cadeia *ppI* não produz muito ${}^4\text{He}$. A cadeia *ppII* é dominante a temperaturas de 1,4 a $2,3 \times 10^7$ K e a cadeia *ppIII* é dominante a temperaturas acima dos $2,3 \times 10^7$ K [65]. Convém mencionar que a cadeia *ppIII* não é a principal fonte de energia do Sol, pois as

temperaturas de seu núcleo ainda não são suficientemente altas¹². Finalmente, também podemos observar outra “cadeia”, $ppIV$ ou hep (que significa hélio – próton), como mostra a figura em questão, na qual o ${}^3\text{He}$ reage diretamente com um ${}^1\text{H}$ para dar ${}^4\text{He}$. Porém, a probabilidade desta interação é relativamente pequena.

A descrição acima é conhecida como o modelo solar padrão (SSM: *Standard Solar Model*), considerado na atualidade o melhor modelo físico do Sol [46, 66]. Para tal modelo é preciso observar as partículas que são produzidas a partir do produto de todas essas fusões. Como tudo isso acontece no núcleo do Sol, os neutrinos são uma ferramenta viável para essa verificação¹³, pois interagem através da força fraca e gravitacional¹⁴.

1.4.2 Neutrinos atmosféricos

Os neutrinos atmosféricos provêm de uma cadeia de processos que começa com a interação dos raios cósmicos (partículas altamente energéticas, que podem ser elétrons, pósitrons e prótons ou núcleos de átomos) com as moléculas da atmosfera, criando um chuva de hádrons, principalmente píons. Desta interação são produzidas píons (que são partículas formadas por dois quarks) e estes decaem num múon μ^- mais um antineutrino muônico $\bar{\nu}_\mu$ (ou em μ^+ e ν_μ , dependendo da carga do píon), seguidamente o múon decai num elétron mais um antineutrino eletrônico e um neutrino muônico (ou em e^+ mais ν_e e $\bar{\nu}_\mu$, no outro caso), *i.e.*,

$$\begin{aligned}\pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, & \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \\ \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Com base nesta simples cadeia cinemática, é previsível uma relação de fluxo 2 : 1 entre os neutrinos/antineutrinos muônicos e os neutrinos/antineutrinos eletrônicos, *i.e.*,

$$\frac{N(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)}{N(\nu_e + \bar{\nu}_e)} \approx 2,\tag{1.18}$$

como é mostrado na cadeia cinemática da figura 1.5, onde as linhas “— — →” roxas representam os neutrinos/antineutrinos eletrônicos e as linhas amarelas representam os muônicos.

Cabe ressaltar que é possível realizar cálculos mais detalhados: há também káons produzidos no chuva hadrônica, e com alta energia, alguns múons vivem o tempo suficiente (devido à dilatação do tempo de Lorentz) para chegar até a superfície da Terra. Entretanto, o cálculo da relação de fluxo desta forma anula muitas incertezas, principalmente o fluxo absoluto dos raios cósmicos iniciais e a taxa de produção dos hádrons em

¹²No entanto, é muito importante no problema dos neutrinos solares porque estas reações geram os neutrinos mais energéticos, $\leq 14,06$ MeV, [65].

¹³Convém mencionar que existem outras medidas do Sol que podem medir as proporções de elementos presentes atualmente.

¹⁴Recentemente houve a publicação que trata este problema do neutrino solar como um exemplo do método científico [67].

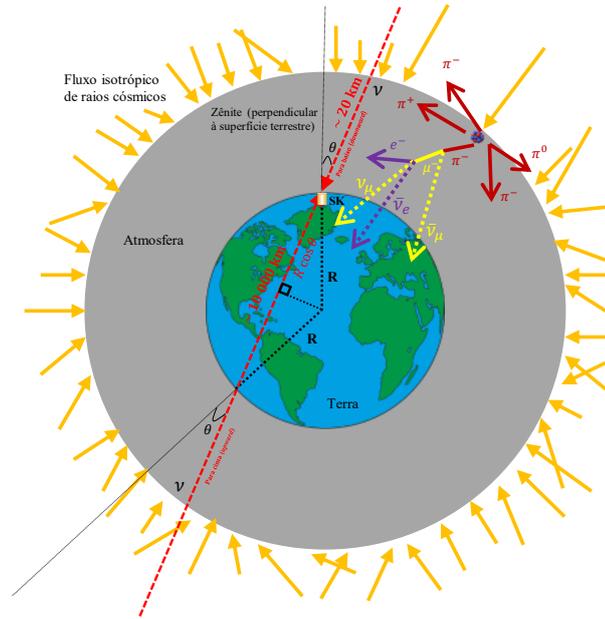


Figura 1.5: Neutrinos podem ser produzidos quando raios cósmicos vindos do espaço colidem com as camadas superiores da atmosfera da Terra. É ilustrada (não em escala) a interação dos raios cósmicos com a atmosfera como fonte de produção de neutrino e a trajetória “cadeia cinemática” dos neutrinos com respeito ao zênite também é ilustrada. Figura extraída e adaptada de [68,69].

colisões de alta energia. A incerteza final estimada na razão de neutrinos muônicos e eletrônicos é de cerca de 5% [68]. Por outro lado, ao contrário dos neutrinos solares, os neutrinos atmosféricos são mais energéticos¹⁵ [29].

Em resumo, os neutrinos solares se originam de reações termonucleares no Sol, enquanto os neutrinos atmosféricos se originam de reações nucleares na atmosfera superior, devido à incidência de raios cósmicos. Os neutrinos solares são mais abundantes do que os neutrinos atmosféricos, mas têm menos energia, o que os torna mais difíceis de detectar. Os neutrinos atmosféricos são menos abundantes, mas têm mais energia, o que os torna mais fáceis de detectar.

1.5 Primeiros indícios experimentais das oscilações

Historicamente, os experimentos que detectavam neutrinos eram classificados em três tipos: ① os que usam radioquímicos como Homestake, SAGE (*Soviet-American Gallium Experiment*, também chamado de *Russian-American Gallium Experiment*), GNO (*Gallium Neutrino Observatory*) e GALLEX (*GALLium EXperiment*), ② os que usam o efeito Cherenkov¹⁶ na água como Kamiokande e Super-Kamioekande e na água pesada (em que há deutério em vez de hidrogênio, $^2\text{H}_2\text{O}$) como SNO, ③ os que usam líquidos cintiladores,

¹⁵Os neutrinos solares têm energias na faixa dos MeV, enquanto os neutrinos atmosféricos têm energias de GeV a TeV.

¹⁶O efeito Cherenkov ocorre quando uma partícula carregada se move através de um meio dispersivo mais rápido do que a velocidade da luz naquele meio, resultando na emissão de radiação eletromagnética, muitas vezes observada como anéis de luz.

como Borexino e KamLAND (*Kamioka Liquid Scintillator Antineutrino Detector*). Nesta seção¹⁷ veremos alguns destes experimentos e indícios da oscilação de sabor em neutrinos solares e atmosféricos.

1.5.1 Oscilação em neutrinos solares

Como já foi mencionado, a maior parte dos neutrinos provenientes do Sol são criados através da cadeia pp e do ciclo CNO, o que levou a Raymond Davis Jr. e John N. Bahcall, em 1964 [71], a propor o primeiro experimento para detectar os neutrinos eletrônicos produzidos pelo Sol. As primeiras tentativas bem-sucedidas de detecção foram lideradas por Davis e Bahcall, que em 1968 [50] reportaram os primeiros resultados, este experimento está localizado numa antiga mina de ouro, a mina Homestake, em Lead, Dakota do Sul e atualmente usada pelo experimento DUNE (*Deep Underground Neutrino Experiment*) [11]. Este experimento foi realizado utilizando cloro-37, a fim de detectar neutrinos com energia acima do limiar de 814 keV, por meio da reação



onde o átomo de cloro-37 na interação com o neutrino eletrónico é transformado num isótopo radioativo de argônio-37, e é este que finalmente pode ser extraído e contado.

Logo, em 1985, foi iniciado outro experimento utilizando radioquímicos, focalizando também no ciclo pp , o SAGE, no Observatório Baksan de neutrinos, nas montanhas do Cáucaso da Rússia, no qual foi utilizada a reação



onde o átomo estável de gálio se transforma num isótopo radioativo de germânio, e este subsequentemente decai por ser instável com um espectro característico, que os físicos do SAGE puderam detectar e contar [72]. Desta forma, o fluxo de neutrino solar podia ser medido, com uma sensibilidade para ver os neutrinos desde um limiar de 0,233 MeV até quase todo o espectro [73].

Nos dois experimentos, o fluxo de neutrino medido foi menor do que o esperado. À medida que o experimento e a teoria foram sendo refinadas, esta discordância parecia ainda bem mais forte. Tanto que, durante os próximos vinte anos aproximadamente, muitas possibilidades para explicar este déficit foram examinadas por centenas de físicos, já que tanto o experimento quanto o cálculo teórico pareciam estar corretos¹⁸. Assim nasce o famoso déficit de neutrinos solares no SNP.

¹⁷Obtida (após adaptação) da referência [70].

¹⁸Como já foi mencionado acima, é Pontecorvo quem sugere uma explicação para o déficit de neutrino solar. Esta idéia é retomada e explicada na seção 1.6.

Algo importante a ser observado é que nos dois experimentos anteriores apenas a quantidade de eventos é contada, sem saber nem a direção nem o tempo de chegada, algo que acontece de forma semelhante com experimentos, também radioquímicos, como o GALLEX [74] que mais tarde se torna GNO [75], onde o ^{71}Ga também foi usado como alvo e usou a mesma reação que SAGE (equação 1.20) e estava localizado no subsolo do LNGS (*Laboratori Nazionali del Gran Sasso*) nos Abruzzi, Itália.

No entanto, existem outros experimentos que permitem detectar a direção e a energia. Experimentos como SK [76], um detector de neutrinos localizado 1 km abaixo da montanha Ikeno, perto da cidade de Hida (conhecida antigamente como Kamioka), Província de Gifu, Japão, que começou a tomar dados em 1996, que consiste num detector de água Cherenkov, que detecta os neutrinos eletrônicos do boro-8 espalhando o neutrino com o elétron da seguinte forma

$$\nu_l + e^- \rightarrow \nu_l + e^-, \quad (1.21)$$

onde $l = e, \mu, \tau$.

Voltando ao déficit de neutrinos solares, ao comparar as medições dos experimentos e depois contrastando-as com o que foi previsto pelo SSM, uma inconsistência foi evidente (figura 1.6). Não estava claro se o problema era com o SSM ou com a física por trás dos neutrinos.

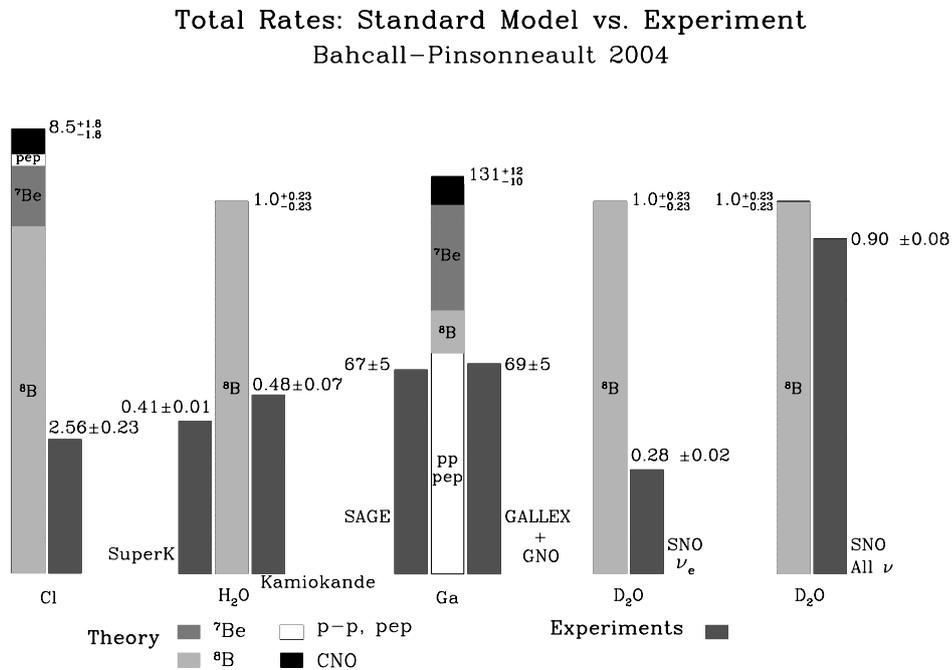


Figura 1.6: Teoria *vs.* experimento. A figura compara as previsões do modelo solar padrão mais o modelo padrão de interações eletrofracas com as taxas medidas em todos os experimentos de neutrinos solares. Figura extraída de [77].

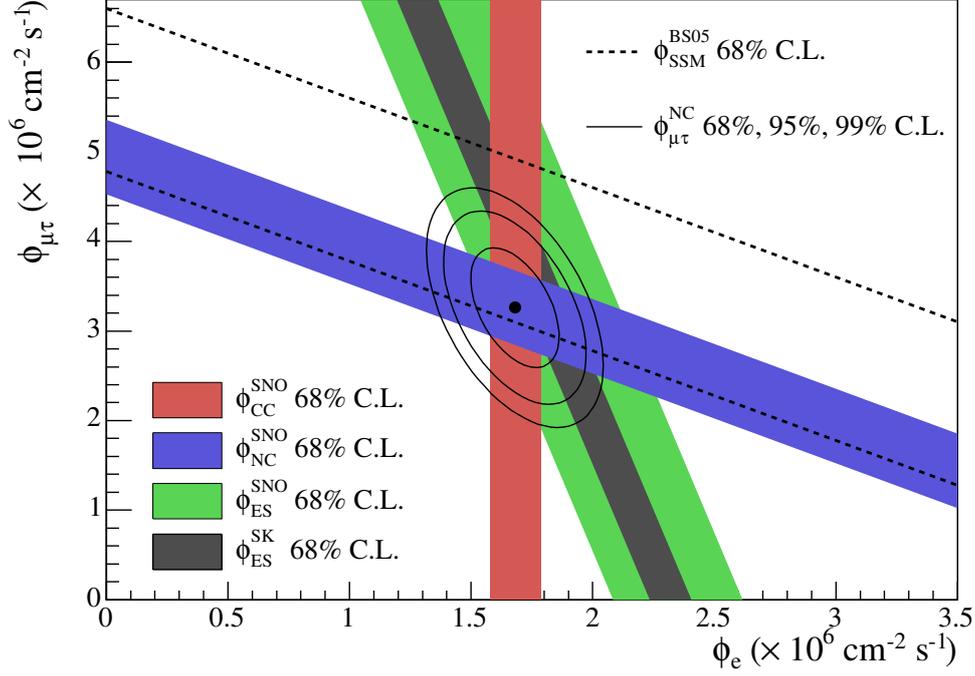
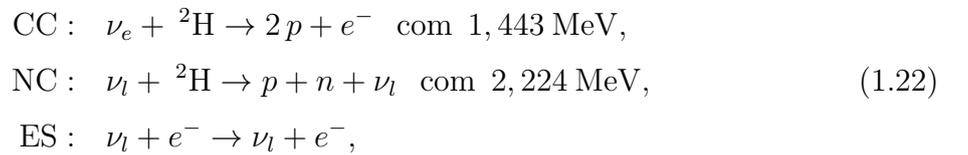


Figura 1.7: Fluxos combinados de $\nu_\mu + \nu_\tau$ vs. fluxo ν_e . As faixas vermelha e verde indicam as medições do fluxo CC e ES, respectivamente. As linhas tracejadas mostram o fluxo total de neutrino solar ${}^8\text{B}$ previsto pelo SSM [78] e a faixa azul, paralela à previsão do modelo, mostra o fluxo medido com o canal NC. A faixa cinza, paralela à faixa verde, é o resultado do experimento SK [79]. As interseções destas faixas com os eixos representam as incertezas de $\pm\sigma$. O valor não-zero de $\phi_{\mu\tau}$ fornece fortes evidências da transformação do sabor do neutrino. O ponto (melhor ajuste), que satisfaz as equações 1.22, representa ϕ_e a partir do fluxo CC e $\phi_{\mu\tau}$ a partir da diferença NC-CC com os contornos de 68, 95 e 99% C.L. incluídos. Figura extraída de [80].

O SNP foi posteriormente resolvido pelo experimento SNO¹⁹ [81], que detectou os neutrinos solares usando reações de corrente carregada (CC: *Charged Current*) e corrente neutra (NC: *Neutral Current*) de neutrinos com deutério, e espalhamento elástico (ES: *Elastic Scattering*) de elétrons,



onde $l = e, \mu, \tau$.

O canal NC é igualmente sensível a todos os neutrinos ativos, enquanto o canal ES é preferencialmente sensível ao neutrino eletrônico. Então, para determinar o fluxo total dos neutrinos, o fluxo NC deve ser medido [80]. O truque aqui é que enquanto a reação CC só pode detectar ν_e , NC e ES são sensíveis a todos os sabores. Em especial,

¹⁹A confirmação da conversão do sabor dos neutrinos como solução para o SNP veio conclusivamente a partir dos resultados do experimento SNO.

NC tem a mesma contribuição de todos os sabores ν_e , ν_μ e ν_τ . O resultado dos fluxos obtidos pela SNO foram

$$\begin{aligned}\phi_{CC} &= 1,72_{-0,05}^{+0,05} (\text{stat})_{-0,11}^{+0,11} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \\ \phi_{NC} &= 4,81_{-0,19}^{+0,19} (\text{stat})_{-0,27}^{+0,28} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \\ \phi_{ES} &= 2,34_{-0,23}^{+0,23} (\text{stat})_{-0,14}^{+0,15} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1},\end{aligned}\tag{1.23}$$

e os fluxos de $\phi_{\mu\tau} = \phi(\nu_\mu) + \phi(\nu_\tau)$,

$$\begin{aligned}\phi_{\mu\tau}^{\text{NC}} &= 3,09 \pm 0,22 (\text{stat})_{-0,27}^{+0,30} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \\ \phi_{\mu\tau}^{\text{ES}} &= 3,97 \pm 1,56 (\text{stat})_{-0,89}^{+0,92} \times 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1},\end{aligned}\tag{1.24}$$

com razões de:

$$\begin{aligned}\frac{\phi_{CC}}{\phi_{NC}} &= 0,358 \pm 0,021 (\text{stat})_{-0,029}^{+0,028}, \\ \frac{\phi_{CC}}{\phi_{ES}} &= 0,736 \pm 0,079 (\text{stat})_{-0,049}^{+0,050}.\end{aligned}\tag{1.25}$$

O que os dados do SNO (figura 1.7) mostraram é que 2/3 do fluxo de neutrino solar (mais precisamente de ${}^8\text{B}$, que por acaso têm energias para as quais a condição de adiabaticidade é satisfeita) chega à Terra na forma de sabores de neutrino não-eletrônicos, *i.e.*, ν_μ e ν_τ , enquanto que no SSM esse fluxo é zero. Porém, outra informação do SNO é que o fluxo total medido é compatível com o fluxo previsto pelo SSM, mostrando então que o problema não era com o SSM e que tudo isso apontava para um problema com nosso entendimento da física das partículas.

1.5.2 Oscilação em neutrinos atmosféricos

Além do SNP, outros experimentos importantes que deram também indícios sobre as oscilações de neutrinos foram o Kamiokande, e posteriormente seu sucessor, o Super-Kamiokande [49], os quais também mostraram uma inconsistência entre o fluxo de neutrinos medido e o esperado²⁰, dando origem ao chamado problema do neutrino atmosférico (ANP: *Atmospheric Neutrino Problem*).

As figuras 1.8 e 1.9, em conjunto, mostram a distribuição do ângulo zenital ($\cos\theta$) dos elétrons e múons para diferentes classes de eventos. Temos duas classificações possíveis, ① eventos completamente contidos, FC (*fully-contained*), onde toda a energia é depositada dentro do detector SK, e eventos parcialmente contidos, PC (*partially-contained*), onde nem toda a energia é depositada dentro do detector SK, ② por número de partículas finais nas reações, onde temos *one-ring* (ou com um anel Cherenkov), em que temos apenas uma partícula carregada, e *multi-ring* (múltiplos anéis Cherenkov), onde temos múltiplas partículas carregadas no estado final. Outra classificação seria de sub-GeV e multi-GeV, onde o primeiro corresponde a eventos com energia menor do que 1 GeV e o

²⁰Os neutrinos muônicos viajando distâncias maiores eram mais inconsistentes do que os neutrinos eletrônicos, como é mostrado nas figuras 1.8 e 1.9.

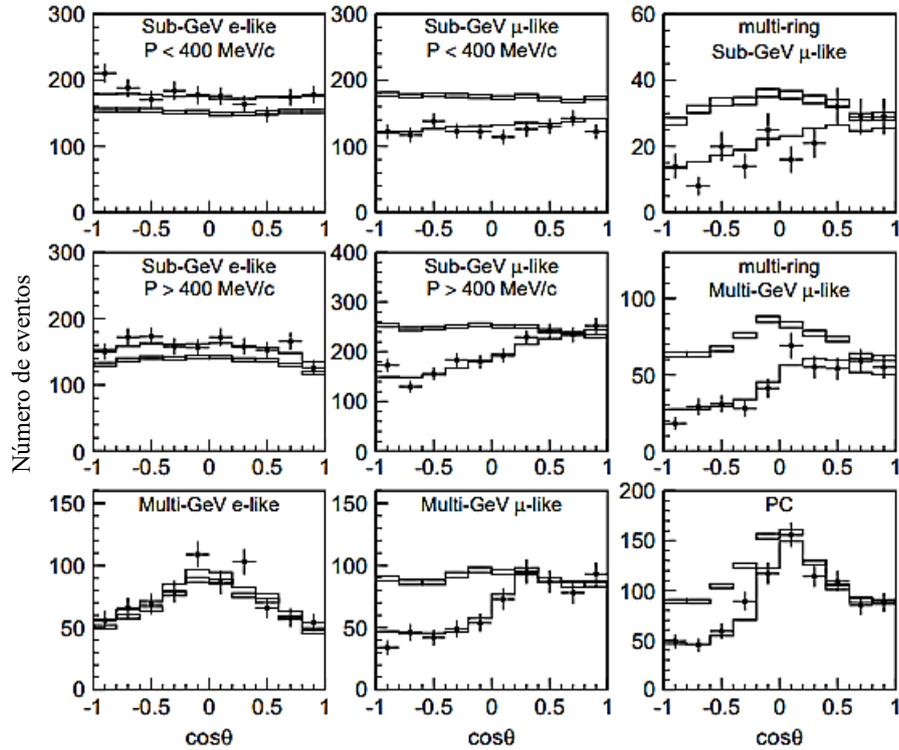


Figura 1.8: Distribuição do ângulo zenital ($\cos \theta$) em relação ao número de e e μ , para eventos de um só anel FC, multianel e PC no detector. Figura extraída de [82].

segundo corresponde a eventos de energia acima de 1 GeV, e os eventos sub-GeV *only-ring* são mostrados separadamente em duas partes, $p_l \leq 400 \text{ MeV}/c$ e $p_l > 400 \text{ MeV}/c$, onde p_l é o momento leptônico.

Nos histogramas das figuras 1.8 e 1.9, os pontos com erro mostram os dados, as caixas mostram os eventos Monte Carlo (teoria) na ausência de oscilação de neutrino e as linhas sólidas mostram os valores esperados do melhor ajuste para oscilações $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ com $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ e $\Delta m_{31}^2 = 2,1 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$. O $\cos \theta = 1$ corresponde a eventos *downward* com um comprimento $L \sim 15 \text{ km}$ (os neutrinos viajam aproximadamente 15 km até o detector) e $\cos \theta = -1$ corresponde a eventos *upward* com $L \sim 13000 \text{ km}$ (atravessam todo o diâmetro da Terra antes de chegar ao detector).

Em 2005, na referência [82] (*The SK Collaboration*), foi estabelecido que, como mostrado nas figuras 1.8 e 1.9, os déficits de interação de neutrinos muônicos observados estavam em forte desacordo com o que era esperado na ausência de oscilação e a oscilação entre neutrinos eletrônicos e neutrinos muônicos não puderam explicar os dados. Entre as tentativas infrutíferas da referência [82] estava o ajuste de dois sabores $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e$, que deu uma diferença mais de 100 vezes em relação à análise $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$. Também foi considerada outra alternativa, um tanto exótica, como a desintegração de neutrinos. Mas, como o anterior, não se ajustava aos dados tão bem como no cenário $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$. Em outros termos,

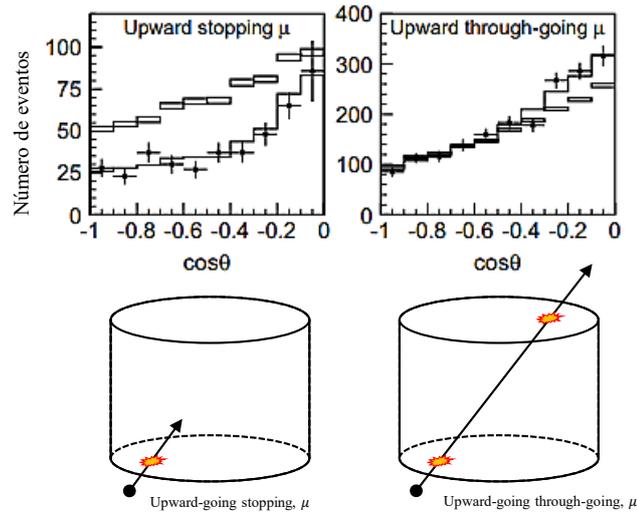


Figura 1.9: Continuação da figura 1.8. O número de eventos muônicos *upward stopping* e *upward through-going* em função do cosseno do ângulo zenital é agora mostrado. Figura extraída de [82] e adaptada com [83].

nas figuras 1.8 e 1.9 há uma forte redução no número de múons medidos e quase nenhuma mudança no número de elétrons produzidos, e isso pode ser explicado por uma oscilação de $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ e não pode ser explicado por $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e$.

O ANP, juntamente com o SNP, forneceu evidências de que os neutrinos podiam mudar de sabor, o que motivou a revisão da teoria por trás dos neutrinos que foi finalmente resolvida ao considerar um fenômeno puramente quântico, que requer neutrinos massivos que tenham mistura quântica, *i.e.*, a oscilação de neutrinos, cuja descrição veremos no próximo capítulo.

1.6 Tentativas de explicação para o para o SNP e o ANP

A seguir, exploraremos duas abordagens diferentes que foram propostas na tentativa de resolver o SNP e o ANP. Essas propostas lançaram luz sobre os fenômenos fundamentais que desafiaram nossa compreensão dos neutrinos.

1.6.1 Oscilação neutrino – antineutrino, $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$

Pontecorvo inicialmente viu a possibilidade de oscilação de neutrino a antineutrino²¹ *i.e.*, $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$, no vácuo [52], motivado pela procura de um fenômeno análogo à oscilação de káons $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ em léptons que foi publicada em 1955 por Murray Gell-Mann e Abraham Pais [85]. Pontecorvo parte da idéia de que o neutrino poderia ser uma partícula que

²¹Aliás, o trabalho de Pontecorvo dedicado à oscilação de neutrino foi publicado em 1958 [84], onde naquela época apenas um tipo ou sabor de neutrino era conhecido.

tem mistura, dando a possibilidade da transformação de $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$ no vácuo, sempre que o número leptônico seja violado, pois uma mudança de neutrinos a antineutrinos muda o número leptônico.

Assumindo isto, Pontecorvo menciona que, no vácuo, um neutrino pode se transformar num antineutrino e vice-versa, o que significa que os neutrinos e os antineutrinos são partículas resultantes da mistura simétrica e antissimétrica de duas partículas autenticamente neutras de Majorana²² ν_1 e ν_2 de diferente paridade combinada. Neste enfoque de Pontecorvo teríamos

$$\begin{aligned} |\nu\rangle &= \alpha |\nu_1\rangle + \beta |\nu_2\rangle, \\ |\bar{\nu}\rangle &= \alpha |\nu_1\rangle - \beta |\nu_2\rangle, \end{aligned} \quad (1.26)$$

com pequenas massas m_1 e m_2 .

1.6.2 Oscilação de neutrinos de diferentes sabores, $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$

A ideia inicial de Pontecorvo levou Ziro Maki, Masami Nakagawa e o Shoichi Sakata a propor em 1962 uma teoria de mistura de neutrinos [54], na qual se supõe a existência de dois tipos de neutrinos e logo se constrói um possível modelo modificado que seria a generalização do modelo que eles chamam de Sakata-Nagoya. Os autores discutem a existência de “neutrinos” (ν_1 e ν_2) que são diferentes dos neutrinos de sabores (ν_e e ν_μ) ou neutrinos “fracos”, mas podem ser expressos pelas combinações lineares destes últimos e supõem que existe uma representação que define os “neutrinos verdadeiros” mediante a seguinte transformação ortogonal aplicada à representação dos neutrinos fracos²³

$$\begin{cases} \nu_1 &= \nu_e \cos \theta + \nu_\mu \sin \theta, \\ \nu_2 &= -\nu_e \sin \theta + \nu_\mu \cos \theta, \end{cases} \quad (1.27)$$

onde θ é uma constante real, chamada de ângulo de mistura, que é a transformação inversa da relação da equação 1.12, mostrada acima.

Em 1967, Pontecorvo voltou a publicar um trabalho relacionado com a oscilação de neutrinos [25], no qual ele examina a oscilação $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ e a oscilação $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$. Depois, em 1969, junto com Gribov, Pontecorvo sugere a existência de neutrinos de mão esquerda e antineutrinos de mão direita na natureza [87], onde mão esquerda e mão direita são os estados de quiralidade dos neutrinos. Assim, a oscilação entre neutrinos e antineutrinos (examinada por Pontecorvo em [25]) poderia então ser associada a uma oscilação entre neutrinos de mão esquerda e direita.

Finalmente, o primeiro *review* dos fenômenos relacionados às oscilações de

²²O férmion de Majorana é um férmion que é sua própria antipartícula [86].

²³Convém mencionar de novo que essa é a fórmula proposta inicialmente na referência [54], mas ela é o oposto (trocar, $\theta \rightarrow \theta$) da fórmula usada atualmente.

neutrinos é feito [88], no qual se estuda a mistura de dois neutrinos (tanto de Majorana quanto de Dirac), o qual toma como ponto importante e que também é tomado para trabalhos atuais que, primeiro, os neutrinos têm uma massa pequena e que não há nenhum princípio que exija o contrário, segundo, que a oscilação de neutrinos é um fenômeno de interferência baseado na mecânica quântica (QM: *Quantum Mechanics*) de um sistema com mistura, que é o melhor método para descobrir as diferenças de massa, e terceiro, que os experimentos com neutrinos de diferentes fontes são sensíveis a diferentes diferenças de massa ao quadrado de neutrinos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: A QM DAS OSCILAÇÕES DE NEUTRINOS

Sob a suposição de que os neutrinos possuem massa, consideraremos três autoestados de massa, ν_1 , ν_2 e ν_3 , em analogia com os autoestados de massa de léptons carregados e , μ e τ .

A chave para a transição de sabor dos neutrinos reside no fato de que os autoestados fracos (ou de sabor) e os autoestados de massa não são necessariamente idênticos, onde os últimos podem se misturar¹.

Neste modelo, o neutrino é um pacote de onda quântico com uma massa bem definida. Os autoestados de massa do neutrino são $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$ e $|\nu_3\rangle$. Os estados que se acoplam aos bósons W^\pm e Z^0 são os autoestados de sabor, $|\nu_e\rangle$, $|\nu_\mu\rangle$ e $|\nu_\tau\rangle$. O neutrino se propaga como autoestados de massa e interage como autoestados de sabor [89].

Há muitas evidências experimentais de que é possível a transição de sabor ou oscilação de neutrinos, e além disso, estabelecem que a sua massa deve ser de fato não zero e que também existe uma mistura leptônica que se manifesta ao considerar a evolução temporal dos estados destas partículas.

O fenômeno de oscilação é bem conhecido no setor de mésons neutros² e, quanto aos neutrinos, é descrito muito bem pela QFT: as oscilações são observadas sempre que os pacotes de onda de neutrinos formam uma superposição coerente de estados. Tais oscilações entre os diferentes sabores de neutrinos (oscilações discutidas aqui) não conservam o número leptônico de sabor individualmente, mas sim o número leptônico total.

Neste capítulo veremos, do ponto de vista teórico, como ocorre a oscilação de sabores entre os neutrinos. Será apresentada a derivação usual para a probabilidade de oscilação, que rotulamos como $\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$, em termos da energia do neutrino e da distância percorrida (distância entre a fonte e o detector). Discutiremos o formalismo da oscilação de neutrinos, na abordagem da QM, com argumentos bastante simplificados e aproximações razoáveis que não nos impedem de chegar ao resultado correto nas equações³. Para esta revisão usaremos o livro [12], e as referências nele contidas, como nossa principal referência

¹Quantitativamente, a oscilação se deve na verdade à mistura entre os autoestados de massa e sabor dos neutrinos.

²É um fato bem conhecido onde os dois tipos de estados estão ligados pela matriz CKM, introduzida por Nicola Cabibbo, Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa [90, 91].

³Uma derivação mais sofisticada da oscilação de neutrinos em QFT pode ser encontrada em [92–94].

e fonte de consulta⁴.

Suponha-se, em geral, que existem n autoestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$, que são ligados aos n autoestados de massa $|\nu_i\rangle$ por meio de uma matriz unitária de mistura U . Em analogia com a matriz CKM no setor dos quarks, as bases⁵ anteriores são ligadas pela matriz U_{PMNS} , matriz PMNS (matriz 3×3 que tem três ângulos de mistura e uma fase complexa), nomeada em homenagem a Pontecorvo, Maki, Nakagawa e Sakata [54,84], por meio da relação de transformação

$$|\nu_\alpha\rangle = \left(\sum_i |\nu_i\rangle \langle \nu_i| \right) |\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad (2.1)$$

i.e., o estado de sabor do neutrino $|\nu_\alpha\rangle$ é descrito por uma superposição coerente dos estados de massa $|\nu_i\rangle$ com peso $U_{\alpha i}^*$. Além disso, pela unitariedade,

$$U^\dagger U = \mathbb{1}, \quad \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \delta_{ij}. \quad (2.2)$$

Por outro lado, os autoestados de massa também podem ser vistos como uma superposição de autoestados de sabor,

$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.3)$$

Em geral, uma matriz unitária $n \times n$ tem n^2 parâmetros independentes compostos por

$$n^2 = \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{ângulos de mistura}} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{fases}}, \quad (2.4)$$

de forma que no caso da matriz PMNS, com $n = 3$, teria que ter $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ ângulos de mistura e $\frac{3(3+1)}{2} = 6$ fases, mas nesse caso apenas uma fase é relevante já que nem todas as fases são fisicamente observáveis⁶.

No SM, as $2n - 1$ fases dos $2n$ estados de neutrinos podem ser fixadas de tal forma que haja $(n - 1)^2$ parâmetros independentes [96]. É conveniente escrever estes parâmetros na forma

$$n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2 = \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{ângulos de mistura}} + \underbrace{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}_{\text{fases}}, \quad (2.5)$$

⁴Ao final, *e.g.*, para mostrar os efeitos da matéria na oscilação, seguiremos o formalismo descrito na referência [13].

⁵ $\{|\nu_\alpha\rangle$ e $|\nu_i\rangle\}$ são bases ortonormais, satisfazem as relações: $\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ e $\langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij}$

⁶Isto porque o efeito de mistura é visto apenas na presença da corrente (quadricorrente) carregada eletrofraca, $j_{W,l}^\mu = \bar{\nu}_i (1 - \gamma^5) U^\dagger \gamma^\mu l$ [95].

i.e., temos $\frac{1}{2}n(n-1)$ ângulos de mistura de uma matriz rotacional n -dimensional com $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ fases de violação da carga-paridade (violação CP: *charge-conjugation parity*).

Os valores dos elementos da matriz PMNS são determinados por meio da parametrização⁷ [18] com quatro parâmetros independentes, sendo três ângulos de mistura e uma fase,

$$U_{\text{PMNS}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}}_{R_{23}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}}_{\Gamma_\delta R_{13} \Gamma_\delta^\dagger} \underbrace{\begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{12}}, \quad (2.6)$$

onde s_{ij} e c_{ij} são $\sin \theta_{ij}$ e $\cos \theta_{ij}$ respectivamente, e $\Gamma_\delta = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta})$. A fase⁸ $\delta = \delta_{\text{CP}}$ ($0 \leq \delta_{\text{CP}} \leq 2\pi$) é chamada de fase de Dirac e representa o quanto a simetria CP é violada pelos neutrinos. No caso particular, onde a simetria CP é conservada, $\delta_{\text{CP}} = 0$, e U além de unitária, é também real, $U^* = U$. Ao calcular os produtos matriciais na equação 2.6, a matriz pode ser escrita de forma completa como

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

2.1 Formalizando o problema

Nesta seção, a evolução temporal dos autoestados, tanto de sabor quanto de massa, é discutida de forma bastante geral, uma vez que nas seções seguintes a idéia será particularizada e alicerçada.

Tomemos um neutrino $|\nu\rangle$ geral, que escrito tanto na base própria de massa, $\{|\nu_i\rangle\}$, quanto na base própria de sabor, $\{|\nu_\alpha\rangle\}$, fica

$$|\nu\rangle = \sum_i \nu^i |\nu_i\rangle, \quad |\nu\rangle = \sum_\alpha \nu^\alpha |\nu_\alpha\rangle, \quad (2.8)$$

onde $\nu^i = \langle \nu_i | \nu \rangle$ e $\nu^\alpha = \langle \nu_\alpha | \nu \rangle$ são os coeficientes (números complexos, em geral) das combinações lineares e são definidos para que as informações físicas dos estados não sejam perdidas⁹.

⁷Há um número infinito de parametrizações possíveis, esta é a parametrização mais comum.

⁸Outras fases de Majorana que não foram levadas em conta podem também existir, mas não possuem efeito na oscilação de neutrinos. No caso dos neutrinos de Majorana, são necessárias duas fases adicionais complexas, já que a fase dos campos de Majorana não pode ser redefinida livremente devido à condição $\nu = \bar{\nu}$ [12].

⁹No paradigma vigente das oscilações 3ν , $i = 1, 2, 3$ e $\alpha = e, \mu, \tau$.

Utilizando a relação de completeza, $\mathbb{1} = |\nu_i\rangle\langle\nu_i|$, soma em i , em ν^α ,

$$\nu^\alpha = \langle\nu_\alpha|\nu\rangle = \sum_i \langle\nu_\alpha|\nu_i\rangle \langle\nu_i|\nu\rangle = \sum_i \langle\nu_\alpha|\nu_i\rangle \nu^i = \sum_i U_{\alpha i} \nu^i. \quad (2.9)$$

Para o caso dos antineutrinos, só temos que fazer a troca: $U \leftrightarrow U^*$.

A evolução temporal é dada pela equação de Schrödinger (no sistema natural de unidades, no qual $c = \hbar = 1$, pelo que, massa, energia e momento ficam em pé de igualdade)

$$\mathcal{H}|\nu\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\nu\rangle, \quad (2.10)$$

onde \mathcal{H} é o hamiltoniano do sistema, diagonal e constante na base de massa no vácuo, por ser a base das partículas físicas, ou seja, aquelas que possuem massa bem definida e se propagam no vácuo, *i.e.*, os autoestados de massa (associados às partículas físicas) formam também a base própria do hamiltoniano, no vácuo. Logo, o elemento \mathcal{H}_{ij} é dado por

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} |\nu_i\rangle\langle\nu_i|\mathcal{H}|\nu_j\rangle\langle\nu_j| = \sum_{ij} \mathcal{H}_{ij} |\nu_i\rangle\langle\nu_j|, \quad (2.11)$$

que também pode ser diagonalizável na base de sabor, ou seja, se $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ for tal que

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha\beta} |\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\alpha|\mathcal{H}|\nu_\beta\rangle\langle\nu_\beta| = \sum_{\alpha\beta} \mathcal{H}_{\alpha\beta} |\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\beta|, \quad (2.12)$$

necessariamente, comparando as equações 2.11 e 2.12, o hamiltoniano de sabor tem que ser escrito como

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \sum_{ij} U_{\alpha i} \mathcal{H}_{ij} U_{\beta j}^*, \quad (2.13)$$

ou seja, $\mathcal{H}_f = U\mathcal{H}_m U^\dagger$, onde o subscrito f se refere à base de “sabor” (*flavor*) e o subscrito m à base de “massa” (*mass*). Então, escrevendo em ambas bases, a forma matricial da equação de Schrödinger fica

$$\sum_\alpha \mathcal{H}_{\alpha\beta} \nu^\beta = i\frac{\partial}{\partial t} \nu^\alpha, \quad (2.14)$$

$$\sum_i \mathcal{H}_{ij} \nu^j = i\frac{\partial}{\partial t} \nu^i. \quad (2.15)$$

Dado que os neutrinos são partículas extremamente relativísticas, devido à sua massa ser muito pequena¹⁰, podemos, numa ótima aproximação, dizer que a velocidade deles é aproximadamente aquela da luz [26], ou seja: $v_{\text{neutrino}} \approx c = 1$ (lembramos de que estamos no sistema natural de unidades onde $c = \hbar = 1$). Portanto, uma primeira aproximação razoável é a aproximação da energia: a energia total da partícula E no limite

¹⁰Entenda-se como “massa muito pequena” a proporção entre massa e momento, em unidades naturais, ou seja, $\frac{m}{|p|} \ll 1$.

ultrarelativista $|\mathbf{p}_i| \gg m_i$, onde podemos assumir que simplesmente $|\mathbf{p}_i| \equiv |\mathbf{p}| \approx E$, pela conservação do quadrimomento $p^\mu p_\mu$, pode ser aproximada¹¹ a

$$E_i = \sqrt{|\mathbf{p}_i|^2 + m_i^2} \approx |\mathbf{p}_i| + \frac{m_i^2}{2|\mathbf{p}_i|} = E + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.16)$$

com isso não estamos assumindo que os autovalores do hamiltoniano são iguais. Neste caso o símbolo E (sem índice) representa a energia dos estados de sabor.

Com a aproximação acima, o hamiltoniano de massa pode então ser escrito da forma

$$\mathcal{H}_{ij} \approx E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} = \delta_{ij} \left(E + \frac{m_i^2}{2E} \right), \quad (2.17)$$

de modo que a forma matricial do hamiltoniano escrita na base de sabor é

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = U_{\alpha i} \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & E + \frac{m_3^2}{2E} \end{pmatrix} U_{\beta j}^* = U_{\alpha i} \delta_{ij} \left(E + \frac{m_i^2}{2E} \right) U_{\beta j}^*. \quad (2.18)$$

Finalmente, é introduzido o operador de evolução $\mathcal{S}(t, 0)$ que resolve a equação 2.10 com condições iniciais $|\nu(t_0)\rangle = |\nu(0)\rangle$,

$$|\nu(t)\rangle = \mathcal{S}(t, 0) |\nu(0)\rangle, \quad (2.19)$$

onde \mathcal{S} na base de massa é dado por $\mathcal{S} = \exp(-i\mathcal{H}t)$. Então, a amplitude de oscilação ($|\nu_i\rangle \rightarrow |\nu_j\rangle$) para a base de massa é¹²

$$\mathcal{S}_{ji} = \langle \nu_j | \mathcal{S} | \nu_i \rangle = \delta_{ij} \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} t\right), \quad (2.20)$$

e na base de sabor, a amplitude de transição para a conversão é

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\beta\alpha} &= \langle \nu_\beta | \mathcal{S} | \nu_\alpha \rangle = \sum_{ij} \langle \nu_\beta | \nu_i \rangle \langle \nu_i | \mathcal{S} | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_{ij} U_{\beta i} \delta_{ij} \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} t\right) U_{\alpha j}^* = \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} t\right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Finalmente, no vácuo, a probabilidade da conversão $|\nu_\alpha\rangle \rightarrow |\nu_\beta\rangle$, que descreve a probabilidade de que um neutrino produzido como ν_α seja detectado como ν_β após um

¹¹ $E_i = \sqrt{|\mathbf{p}_i|^2 + m_i^2} = |\mathbf{p}_i| \sqrt{1 + \left(\frac{m_i}{|\mathbf{p}_i}\right)^2} = |\mathbf{p}_i| \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_i}{|\mathbf{p}_i}\right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)\right)$.

¹²O termo multiplicativo e^{-iEt} não está sendo considerado porque é uma fase global e não afetará o cálculo da probabilidade mais adiante.

certo tempo t é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= |\mathcal{S}_{\beta\alpha}|^2 = \left| \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} t\right) \right|^2 \\
&= \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} t\right) \sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(i \frac{m_j^2}{2E} t\right) \\
&= \sum_{ij} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left[-i \left(\frac{m_i^2 - m_j^2}{2E}\right) t\right] \\
&= \sum_{ij} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left[-i \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}\right) t\right], \tag{2.22}
\end{aligned}$$

onde $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ é diferença dos quadrados das massas.

A relação funcional acima é portanto a solução final, resultado do modelo de oscilações de neutrinos no vácuo, de forma geral. Porém, para torná-lo prático na aplicação da fenomenologia dos neutrinos, ainda são necessárias algumas alterações. Sabemos que os neutrinos viajam do Sol à Terra num certo tempo, mas a solução que obtivemos é derivada de um formalismo de ondas planas que está implícito na resolução da equação de Schrödinger (equação 2.10). Neste tipo de formalismo, a variável t é apenas um parâmetro de evolução. Temos então que reinterpretar o parâmetro t para obter não só resultados práticos como também de interpretação coerente. De fato, usando novamente a aproximação que $v_{neutrino} \approx c = 1$, podemos relacionar o parâmetro t com $L = x = v_{neutrino} t \approx ct = t$, onde a interpretação que damos a $L = x = cte$ é: distância entre a fonte e o detector, o seja, L é a distância total percorrida pelos neutrinos entre sua produção e sua detecção. Portanto, a probabilidade agora depende de uma distância característica entre a fonte e o detector¹³,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_{ij} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left[-i \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}\right) L\right], \tag{2.23}$$

e, evidentemente, pela normalização, a probabilidade de sobrevivência, fica

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sum_{\alpha \neq \beta} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}. \tag{2.24}$$

À primeira vista, este tratamento parece perfeitamente razoável. No entanto, ele ignora o fato de que diferentes autoestados de massa se propagarão com velocidades diferentes e assim percorrerão a distância L em tempos diferentes. Esta objeção só pode ser superada com um tratamento adequado de pacotes de onda da propagação do estado

¹³Mais ainda, com base nesta aproximação, sem perda de generalidade, deste ponto em diante as equações, relações funcionais, soluções, etc., são escritas em função de L e não de t .

coerente, que produz a mesma expressão que a dada na equação 2.16.

2.2 Modelo de oscilação com dois sabores (caso 2ν) no vácuo

Este é o caso mais simples, quando se considera somente dois sabores de neutrinos¹⁴. Nesta seção, pretendemos simplificar a descrição do modelo já descrito na seção anterior, em termos só de dois sabores ν_α e ν_β . É pertinente fazer esta simplificação porque, mais do que “economizar” cálculos, em algumas situações apenas dois neutrinos participam significativamente. Como no caso do neutrino solar, onde apenas a oscilação entre ν_e e ν_μ é relevante. Ou como no caso dos neutrinos atmosféricos, onde apenas é relevante a oscilação entre ν_μ e ν_τ . De forma que por motivos didáticos pode-se usar o caso de duas famílias e descrever a essência da oscilação.

Ao considerar somente dois sabores para esta descrição simplificada, precisaremos também só de dois neutrinos físicos, ν_1 e ν_2 . Portanto, consideraremos a matriz

$$U = \begin{pmatrix} U_{\alpha 1} & U_{\alpha 2} \\ U_{\beta 1} & U_{\beta 2} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

assumindo que temos um feixe de neutrinos com certa quantidade de ν_α e ν_β , que em termos dos estados de massa ν_1 e ν_2 pode ser escrito da forma

$$\begin{pmatrix} |\nu_\alpha\rangle \\ |\nu_\beta\rangle \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\alpha 1} & U_{\alpha 2} \\ U_{\beta 1} & U_{\beta 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Observe que, nesta descrição simplificada, U corresponde a uma versão reduzida da matriz PMNS, parametrizada com entradas puramente reais, onde agora U só depende de um único ângulo de mistura θ . Neste caso, é suficiente considerar a matriz de mistura¹⁵

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

A transformação de estados de sabor para estados de massa é:

$$\begin{pmatrix} |\nu_\alpha\rangle \\ |\nu_\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} |\nu_\alpha\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \\ |\nu_\beta\rangle = -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle \end{cases}, \quad (2.28)$$

¹⁴Medições mais precisas requerem de um modelo de três sabores ou mais ($3+n$), para a procura de neutrinos estéreis.

¹⁵Esta definição de U é a matriz 2×2 mais simples que satisfaz a condição de unitariedade, $UU^\dagger = \mathbb{1}$. Além disso, é uma simplificação da matriz PMNS (mostrada nas equações 2.6 e 2.7), ao fazer $\theta_{12} = \theta_{13} = \delta_{CP} = 0$ e $\theta_{23} = \theta$.

e a sua relação inversa,

$$\begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{U^\dagger} \begin{pmatrix} |\nu_\alpha\rangle \\ |\nu_\beta\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} |\nu_1\rangle = \cos \theta |\nu_\alpha\rangle - \sin \theta |\nu_\beta\rangle \\ |\nu_2\rangle = \sin \theta |\nu_\alpha\rangle + \cos \theta |\nu_\beta\rangle \end{cases}. \quad (2.29)$$

Neste caso:

↳ O hamiltoniano do sistema (equação 2.17), ou hamiltoniano de massa é

$$\mathcal{H}_{ij} = \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

↪ então, o hamiltoniano de sabor, $\mathcal{H}_f = U\mathcal{H}_m U^\dagger$ (equação 2.18) é

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Seguindo agora a abordagem da representação de Schrödinger da QM, na base de massa (base das partículas físicas, que são as que se propagam), sob a suposição de que um neutrino ν é criado com sabor ν_α , *i.e.*,

$$|\nu(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle, \quad (2.32)$$

a equação dinâmica é 2.10, que ao $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$, a evolução temporal deste estado é dada por

$$|\nu(t)\rangle = \cos \theta \exp(-iE_1 L) |\nu_1\rangle + \sin \theta \exp(-iE_2 L) |\nu_2\rangle. \quad (2.33)$$

Aliás, já foi levado em conta que $\mathcal{H}_{ij} = \text{diag}(E_1, E_2)$ e que, além disso, os neutrinos são ultrarelativistas, $t \approx L$.

Então, a probabilidade de que a uma distância $L \approx t$ da fonte, seja detectado o sabor ν_β , ou probabilidade de conversão $|\nu_\alpha\rangle \rightarrow |\nu_\beta\rangle$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= |\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle|^2 \\ &= |(-\sin \theta \langle \nu_1 | + \cos \theta \langle \nu_2 |) (\cos \theta e^{-iE_1 L} |\nu_1\rangle + \sin \theta e^{-iE_2 L} |\nu_2\rangle)|^2 \\ &= |-\sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 L} + \sin \theta \cos \theta e^{-iE_2 L}|^2 = |\sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 L} (-1 + e^{-i(E_2 - E_1)L})|^2, \end{aligned}$$

onde, usando as identidades trigonométricas $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ e $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, a identidade de Euler, $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$, e o fato de que na aproximação ultrarelativista

utilizada a diferença de energias satisfaz

$$E_i - E_j = \left(E + \frac{m_i^2}{2E} \right) - \left(E + \frac{m_j^2}{2E} \right) = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2E} = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}, \quad (2.34)$$

sendo $\Phi_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E}$, a probabilidade de conversão fica¹⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \left| -1 + e^{-i \frac{\Delta m^2}{2E} L} \right|^2 = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \left| -1 + e^{-i\Phi} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \left| -1 + \cos \Phi - i \sin \Phi \right|^2 = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \left| (\cos \Phi - 1) - i \sin \Phi \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \left[(\cos \Phi - 1)^2 + \sin^2 \Phi \right] = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) (\cos^2 \Phi - 2 \cos \Phi + 1 + \sin^2 \Phi) \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) (2 - 2 \cos \Phi) = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) (1 - \cos \Phi) = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \left[2 \sin^2 \left(\frac{\Phi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right), \quad (2.35)$$

ou, usando unidades SI¹⁷,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(1,267 \frac{\Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{km}]}{E [\text{GeV}]} \right). \quad (2.36)$$

Como as probabilidades estão normalizadas, podemos obter a probabilidade de sobrevivência, ou seja, a probabilidade de que, dado um neutrino criado com sabor ν_α , depois de percorrer uma distância L (distância fonte-detector), seja detectado o mesmo sabor é

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right). \quad (2.37)$$

Note que o ângulo de mistura θ determina a amplitude ($\mathcal{A} = \sin^2(2\theta)$) da oscilação, enquanto Δm^2 influencia o comprimento da oscilação.

Além do anterior, observe também que, sempre que a distância L for um múltiplo de uma certa distância característica, a porcentagem de neutrinos ν_α no feixe é restaurada a seu valor inicial. Esta distância característica é conhecida como comprimento de oscilação e é dada por

$$L_0 = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}. \quad (2.38)$$

¹⁶Os subscritos são suprimidos porque estamos trabalhando apenas com dois sabores, onde $\Delta m^2 \equiv \Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$. Entretanto, a relação acima para as diferenças de energias, na aproximação ultrarelativista, é válida para qualquer $|\nu_i\rangle$ e $|\nu_j\rangle$, estados de massa, só que está sendo apresentado agora porque antes não era necessária.

¹⁷É conveniente expressar a probabilidade de oscilação em unidades mais adequadas ao comprimento e às escalas de energia encontradas na prática, escrevendo L em km, Δm^2 em eV^2 e a energia do neutrino em GeV [17]. $\Delta m^2 L / 4E$ se transforma em $1,267 \Delta m^2 L / E$ devido à conversão de unidades e a convenção introduzida acima.

Observe que as oscilações só são possíveis se θ e $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$ forem não-zero, *i.e.*, se houver mistura leptônica e pelo menos uma massa não-zero. Mais ainda, todas as oscilações de dois neutrinos podem ser caracterizadas por estas duas quantidades porque neste modelo simples de dois neutrinos não há termos de violação CP e T (abordaremos estes tópicos com mais detalhes mais tarde), portanto

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \mathcal{P}_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}, \\ \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} = \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha}. \end{cases} \quad (2.39)$$

Como foi mencionado no início desta seção, o modelo simplificado aqui descrito, além de ser útil para entender com relativa facilidade as principais características deste fenômeno, é frequentemente apropriado para discutir a transição/oscilação $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ em neutrinos atmosféricos, já que ν_e não desempenha um papel relevante neste caso, ou a transição $\nu_e \leftrightarrow \nu_x$ (onde ν_x é uma mistura, ou superposição linear coerente genérica de ν_μ e ν_τ) em neutrinos solares¹⁸. A figura 2.1 mostra um exemplo ilustrativo da probabilidade de oscilação (considerando só os autoestados fracos ν_e e ν_μ) em função da distância para $E = 1$ GeV, $\Delta m^2 = 0,002$ eV² e $\sin^2(2\theta) = 0,8$.

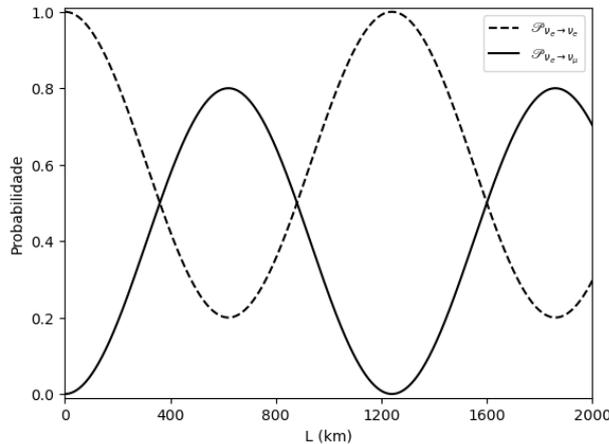


Figura 2.1: Exemplo de oscilação de neutrinos no modelo de dois sabores: o gráfico da probabilidade de conversão $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ é plotado junto com a probabilidade de sobrevivência $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ em função de L (em km), para dados fixos de $E = 1$ GeV, $\Delta m^2 = 0,002$ eV² e $\sin^2(2\theta) = 0,8$.

Finalmente, é notável o fato de que o comprimento de oscilação $L_0 = \frac{4\pi E}{\Delta m^2}$, cresce linearmente com a energia do neutrino E , e é ainda mais interessante como esta relação funcional afeta a forma da função de probabilidade. Por exemplo, mostra-se na figura 2.2, a probabilidade de sobrevivência (novamente considerando apenas a oscilação entre ν_e e ν_μ) em função da energia, onde pode ser visto que o período das oscilações aumenta com o valor da energia.

¹⁸Estas aproximações são razoáveis, fundamentadas no fato de que o ângulo de mistura θ_{13} da matriz PMNS é muito pequeno e que dois dos estados de massa são muito próximos em massa com relação ao terceiro.

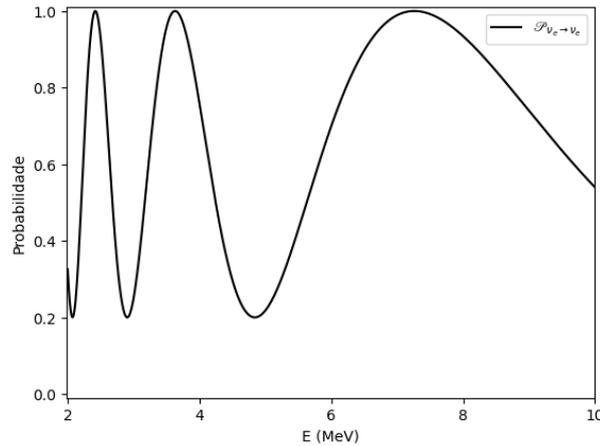


Figura 2.2: Mostra-se a probabilidade de sobrevivência do neutrino eletrônico como uma função da energia para uma distância fixa entre a fonte e o detector de $L = 180$ km, observando como o período de oscilação aumenta com a energia. Os valores de $\sin^2(2\theta) = 0,8$ e $\Delta m^2 \approx 10^{-4} \text{ eV}^2$ utilizados neste gráfico são do experimento KamLand [97].

2.3 Modelo de oscilação com três sabores (caso 3ν) no vácuo

Este é um cenário mais realista, em que agora consideramos os três tipos conhecidos de neutrinos¹⁹. Assim, teremos mais quantidades de Δm^2 tanto em magnitude como em sinal. Além disso, este modelo de três sabores inclui efeitos de violação CP e os sinais de Δm_{ij}^2 estão também envolvidos nele, de modo a que, em princípio, podem ser medidos. Neste esquema (figura 2.3), temos o seguinte:

- ↔ O neutrino $|\nu\rangle$ é produzido na base de sabor: um neutrino de sabor α ($= e, \mu, \tau$), ν_α que foi criado num processo de interação fraca de CC, juntamente com seu respectivo lépton ou anti-lépton l_α^\pm , é considerado como o estado inicial. O seja,

$$|\nu(t_0)\rangle = |\nu(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle.$$

- ↔ O neutrino se propaga na base das massas ou base das partículas físicas (aquelas que possuem massa bem definida): deslocando-se uma distância L num meio (vácuo, neste caso), e seguindo a relação

$$|\nu_i\rangle \longrightarrow \mathcal{H}|\nu_i\rangle = E_i|\nu_i\rangle.$$

- ↔ Finalmente, o neutrino é detectado na base de sabor: ν_β é detectado pela detecção do lépton associado l_β , onde o número de eventos entre a produção e a detecção pode

¹⁹*Neutrinos de Dirac.* Se os neutrinos fossem partículas de Majorana então apareceria uma fase de violação de CP com dois neutrinos. Para três neutrinos teriam de ser acrescentadas mais duas fases (equação 2.42).

ser modificado (eventos com oscilação²⁰) ou, caso contrário, eventos sem oscilação.

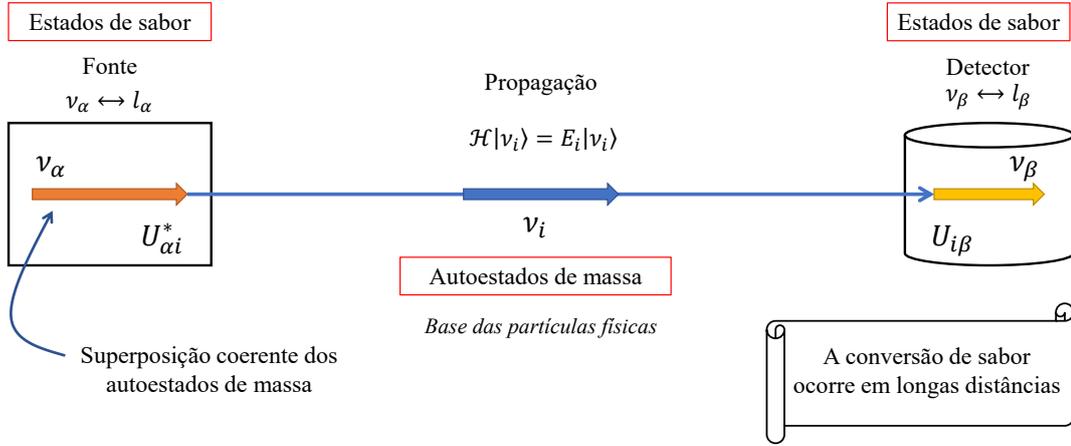


Figura 2.3: Oscilação de neutrinos (no vácuo): o esquema.

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad \text{e} \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.40)$$

onde a matriz de mistura $U = U_{\text{PMNS}}$ já foi mostrada nas equações 2.6 e 2.7. Com fins pedagógicos, na figura 2.4 mostramos uma ilustração gráfica dos elementos da matriz de mistura, ignorando a fase de CP, δ_{CP} .

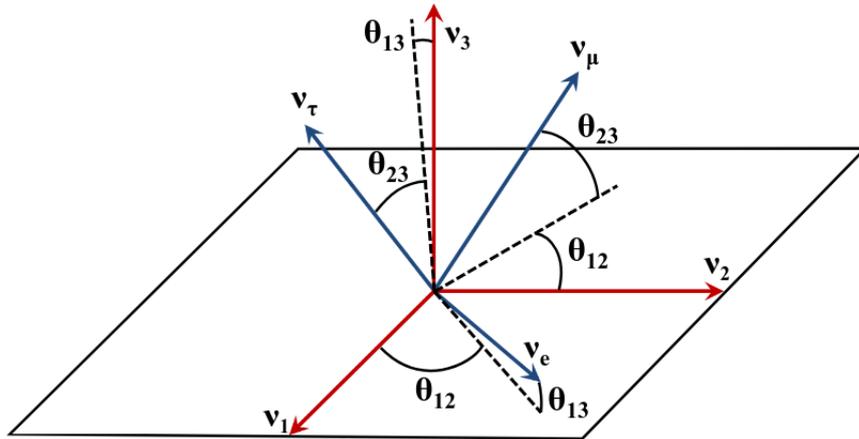


Figura 2.4: Representação ilustrativa dos ângulos de mistura da matriz PMNS no espaço de fase dos estados (autoestados de sabor e autoestados de massa) dos neutrinos: a matriz de mistura PMNS entre os estados próprios de massa e de sabor pode ser vista como uma matriz de rotação da base de vetores ν_e, ν_μ, ν_τ à base ν_1, ν_2, ν_3 , onde a fase de violação da simetria CP é ignorada.

A matriz U_{PMNS} foi apresentada numa forma factorizada (na equação 2.6) de propósito. Esta forma é conveniente porque é muito útil para a interpretação dos

²⁰Aparecimento/transição de neutrinos ν_β ($\alpha \neq \beta$) ou desaparecimento/sobrevivência de neutrinos ν_α ($\alpha = \beta$).

dados, uma vez que a primeira matriz (extrema direita) contém dados relevantes para as oscilações de neutrinos atmosféricos e os produzidos por aceleradores. A segunda (do meio) matriz, presente tanto no setor atmosférico/acelerador como no setor solar/reator, contém os parâmetros acessíveis para experimentos de reatores de curta distância e a fase de violação CP. Enquanto que a terceira depende dos parâmetros envolvidos nas oscilações de neutrinos solares e os produzidos nos reatores.

Para o caso de três sabores de neutrinos, há vários esquemas de massa possíveis, em particular o esquema de ordenamento normal e de ordenamento invertido mostrado, mais à frente, na figura 2.8. Mesmo com três massas diferentes, existem duas diferenças de massas ao quadrado linearmente independentes, ou seja, tendo-se medido duas, a terceira é determinada²¹ [17, 18, 100],

$$\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{32}^2. \quad (2.41)$$

No caso de Majorana, a exigência de que uma partícula seja idêntica à sua antipartícula restringe a liberdade de redefinir os campos fundamentais. O efeito líquido é o surgimento de uma fase de violação CP em dois sabores. Mas, para o caso de três sabores de neutrinos, duas fases adicionais precisam de ser introduzidas, resultando numa matriz da forma

$$U = U_{\text{PMNS}} \times \text{diag} (1, e^{i\alpha_{\text{CP}}}, e^{i\beta_{\text{CP}}}). \quad (2.42)$$

Quanto à probabilidade de transição, a fórmula geral já foi apresentada na equação 2.23. Contudo, por vezes é conveniente reescrevê-la em termos da diferença dos quadrados das massas, formato fornecido pela PDG (*Particle Data Group* 2022) [18],

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \Re J_{\alpha\beta}^{ij} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) + 2 \sum_{i>j} \Im J_{\alpha\beta}^{ij} \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right), \quad (2.43)$$

onde $J_{\alpha\beta}^{ij} = U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*$ é o invariante de Jarlskog [101, 102]. A escolha dessa formulação é justificada em virtude de sua capacidade de separar claramente a parte que preserva a simetria de CP (propriedade da oscilação de neutrinos discutida na seção 2.6) e a parte que não a preserva. Em particular, observa-se que os dois primeiros termos da expressão são invariantes sob a troca $U \rightarrow U^*$ (conservação de CP), enquanto o terceiro termo muda de sinal (violação de CP).

A equação 2.43 também poderia ser vista como a extensão da equação 2.35 (para o caso 2ν), ao demonstrar que os parâmetros de mistura (os ângulos θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} , e

²¹O experimento LSND (*Liquid Scintillator Neutrino Detector*) em Los Alamos informou uma terceira divisão de massa incompatível com esta restrição [98], e por um tempo foi interpretado como evidência de um quarto neutrino. Entretanto, como já tinha sido estabelecido que há exatamente três neutrinos leves participando nas interações fracas, o neutrino “extra” foi considerado “estéril” (não interagindo, exceto com a gravidade). De fato, em 2018 foram anunciados pelo MiniBooNE (BooNE é um acrônimo para *Booster Neutrino Experiment*) [99] resultados a favor do excesso de elétrons numa baseline $L/E = 1$ km/GeV.

a fase δ_{CP} , provenientes da matriz U_{PMNS}) em $J_{\alpha\beta}^{ij}$ determinam a amplitude da oscilação, enquanto os chamados parâmetros de massa $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$: Δm_{21}^2 , Δm_{31}^2 e Δm_{32}^2 , que estão correlacionados entre si da forma acima mostrada (equação 2.41), influenciam o comprimento da oscilação. A mistura leptônica e a existência de massas diferentes de zero para os neutrinos emergem de forma natural como fatores cruciais na dinâmica desse processo. Portanto, a escolha dessa nova estrutura funcional não apenas simplifica a expressão 2.35, mas também destaca características físicas importantes do fenômeno.

Há um total de seis parâmetros livres que descrevem a oscilação de três sabores de neutrinos no vácuo. De acordo com a referência [14], os parâmetros atuais de oscilação de neutrinos são:

- ✓ $\theta_{13} = 8,57^\circ \pm 0,12^\circ$,
- ✓ $\theta_{12} = 33,45^\circ \pm 0,76^\circ$,
- ✓ $\theta_{23} = 49,05^\circ \pm 1,05^\circ$,
- ✓ $\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\text{Sol}}^2 = (7,42 \pm 0,21) \times 10^{-5} \text{ eV}^2$,
- ✓ $|\Delta m_{31}^2| \approx |\Delta m_{32}^2| = \Delta m_{\text{ATM}}^2 = (2,511 \pm 0,022) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$,
- ✓ δ_{CP} e o sinal de Δm_{32}^2 são atualmente desconhecidos.

2.4 Probabilidade média de transição

Iremos definir uma probabilidade de transição média, em que fazemos a média da probabilidade com o fluxo de neutrinos. Pensando na prática, esta definição é útil para compararmos os valores induzidos das probabilidades experimentais com a probabilidade média.

2.4.1 Caso 2ν

Vamos primeiro considerar o caso simples de dois neutrinos. Nessa situação a probabilidade de transição média é obtida pela média da função cosseno na equação 2.35 sobre a distribuição apropriada $\phi(L/E)$ de L/E (*e.g.*, gaussiana) da população de neutrinos,

$$\langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \left\langle \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right\rangle \right], \quad (2.44)$$

sendo

$$\left\langle \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right\rangle = \int \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \phi \left(\frac{L}{E} \right) d\frac{L}{E}. \quad (2.45)$$

No caso de uma distribuição gaussiana com média $\langle L/E \rangle$ e desvio padrão $\sigma_{L/E}$, *i.e.*,

$$\phi\left(\frac{L}{E}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{L/E}^2}} \exp\left[-\frac{(L/E - \langle L/E \rangle)^2}{2\sigma_{L/E}^2}\right], \quad (2.46)$$

o cálculo desta integral nos retorna

$$\left\langle \cos\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right) \right\rangle = \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m^2}{2} \sigma_{L/E}\right)^2\right]. \quad (2.47)$$

Portanto, a probabilidade média de oscilação do neutrino é

$$\langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m^2}{2} \sigma_{L/E}\right)^2\right] \right]. \quad (2.48)$$

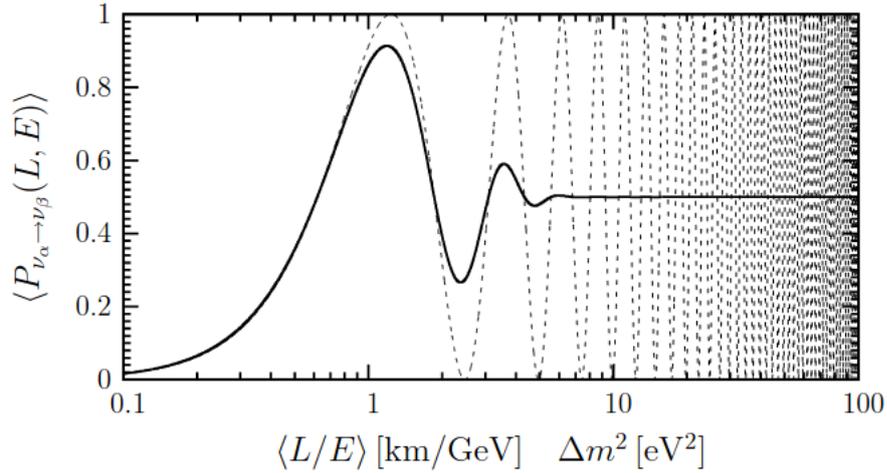


Figura 2.5: Probabilidade das transições de $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ para $\sin^2 2\theta = 1$ em função de $\langle L/E \rangle$ [km/GeV] Δm^2 [eV²]. A relação $\langle L/E \rangle$ média também pode ser expressa em unidades [m/MeV]. Linha sólida: probabilidade de transição média sobre uma distribuição L/E gaussiana com $\sigma_{L/E} = 0,2 \langle L/E \rangle$ (equação 2.44). Linha tracejada: probabilidade de transição não média ou probabilidade de oscilação individual entre os dois sabores (equação 2.35), com $L/E = \langle L/E \rangle$. Figura extraída de [12].

No limite de $\langle L/E \rangle \gg 1$, o valor da probabilidade média é independente da distância e da energia. Esse fato faz com que as frações de cada um dos dois sabores se estabilizem conforme $\langle L/E \rangle$ aumenta (figura 2.5).

2.4.2 Caso 3ν

No caso de termos três sabores de neutrinos diferentes, a única alteração é que estaremos calculando a soma de vários valores médios de cossenos e senos, ao invés de apenas um. Nessa situação, o valor médio do seno é dado de forma análoga ao do cosseno. Para uma

distribuição gaussiana de $\langle L/E \rangle$, obtemos

$$\left\langle \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) \right\rangle = \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2} \left\langle \frac{L}{E} \right\rangle \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2} \sigma_{L/E} \right)^2 \right], \quad (2.49)$$

e com isso, a probabilidade média de oscilação, que nos retorna a fração de cada sabor na distribuição de neutrinos é dada por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) \rangle &= \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{i>j} \Re J_{\alpha\beta}^{ij} \left[1 - \left\langle \cos \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) \right\rangle \right] \\ &+ 2 \sum_{i>j} \Im J_{\alpha\beta}^{ij} \left\langle \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.5 Tipos de experimentos de oscilação de neutrinos

Nos experimentos de oscilação de neutrinos, um neutrino de sabor α ($\alpha = e, \mu, \tau$) é gerado em alguma fonte por um processo de interação fraca com a energia E e se propaga ao longo de uma distância L até interagir com um detector que, por sua vez, registra o estado do sabor do neutrino no lépton carregado gerado pelo processo CC. Com base neste fato, podemos dividir os experimentos de oscilação em:

- ① Experimentos de aparecimento: são experimentos sensíveis à transição de diferentes sabores na mistura de neutrino ($\alpha \neq \beta$), de modo que o sabor encontrado no detector é diferente do sabor inicial do feixe.
- ② Experimentos de desaparecimento: são experimentos que comparam a taxa inicial com a taxa na distância L do experimento. Se não houver oscilação, as duas medidas de taxa devem ser iguais. Se houver oscilação, as taxas devem ser diferentes.

Como a probabilidade de oscilação para a transição $|\nu_\alpha\rangle \rightarrow |\nu_\beta\rangle$, com $\alpha \neq \beta$, num dado instante, é dada pela expressão 2.35, no caso mais simples de dois neutrinos²², de acordo com a equação 2.48, é notável que uma propriedade muito importante da mistura de dois neutrinos prevista pelo modelo é que as transições entre sabores diferentes não podem ser medidas se a fase de propagação for muito pequena, *i.e.*,

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \ll 1. \quad (2.51)$$

Neste caso, o experimento está muito próximo da fonte ou a energia é alta e, portanto, não há tempo suficiente para que as oscilações ocorram.

²²Como já mencionamos anteriormente, muitos experimentos podem ser visto como oscilação de 2ν .

No outro extremo, se a fase for muito grande, ou seja,

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \gg 1, \quad (2.52)$$

somente uma probabilidade de oscilação média pode ser observada experimentalmente, dada por

$$\langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta), \quad (2.53)$$

dado que ocorre um grande número de oscilações entre a fonte e o detector então, perdemos a sensibilidade a variações da probabilidade em função de L/E . Portanto teremos apenas um média da probabilidade de transição e este valor médio depende apenas do ângulo θ .

A figura 2.6 mostra os três casos a serem considerados com relação à possível observação de oscilações.

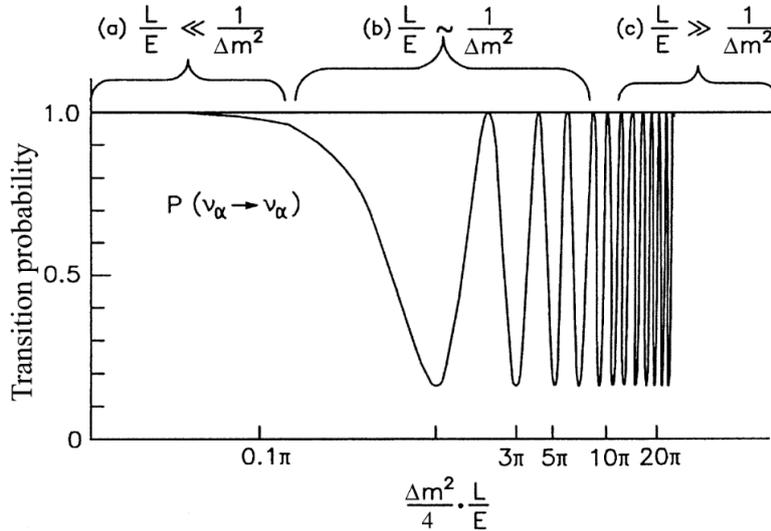


Figura 2.6: Plotagem logarítmica da probabilidade de sobrevivência $\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha)$ como uma função de L/E (equação 2.37) para $\sin^2 2\theta = 0,83$. Três casos possíveis são mostrados (a) sem oscilações, quando $L/E \ll 1/\Delta m^2$, (b) sensibilidade máxima a oscilações, quando $L/E \sim 1/\Delta m^2$, (c) somente medições de oscilação média podem ser feitas devido à resolução finita, quando $L/E \gg 1/\Delta m^2$. Figura extraída de [103].

Com isso em mente, já que o valor de Δm^2 é fixo pela natureza, para resolver este problema o truque consiste em conceber experimentos com valores apropriados de L/E (quantidades experimentais relevantes) de tal forma que sejam sensíveis a um determinado valor de Δm^2 . Portanto, é conveniente definir uma “sensibilidade a Δm^2 ” de um experimento. De fato, a chamada sensibilidade representa a distância ou a energia necessária para enxergar o efeito máximo de oscilação, a linha de base (*baseline*²³) é dada pela relação

$$\frac{\Delta m^2 L}{2E} \approx 1. \quad (2.54)$$

²³O baseline está relacionado com a relação L/E da configuração experimental.

Consequentemente, os diferentes tipos de experimentos de oscilação são classificados de acordo com a razão L/E associada ao experimento, determinando assim a sensibilidade a Δm^2 do mesmo através da equação 2.54. Diferentes experimentos de oscilação de neutrinos têm diferentes sensibilidades [100, 104], dependendo de seus valores L e E .

Dado o acima exposto, podemos dividir as diferentes classificações conforme mostrado na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Resumo dos diferentes tipo de experimentos de oscilação de neutrinos incluindo a linha de base, a energia e a sensibilidade a Δm^2 , dada pela equação 2.54. Tabela retirada e adaptada da referência [12].

Tipos de experimentos	Baseline (L)	Energia (E)	Sensibilidade a Δm^2	Exemplos
Reator SBL	≈ 10 m	$\approx 1\text{MeV}$	$\approx 0, 1 \text{ eV}^2$	Savannah River [105]
Acelerador SBL (píons DIF)	≈ 1 km	$\gtrsim 1\text{GeV}$	$\gtrsim 1 \text{ eV}^2$	MiniBooNE [106]
Acelerador SBL (múons DAR)	≈ 10 m	$\approx 10\text{MeV}$	$\approx 1 \text{ eV}^2$	LSND [98, 107], KARMEN [108]
Acelerador SBL (beam dump)	≈ 1 km	$\approx 10^2\text{GeV}$	$\approx 10^2 \text{ eV}^2$	OscSNS [109], MicroBooNE [110]
Reator LBL	≈ 1 km	$\approx 1\text{MeV}$	$\approx 10^{-3} \text{ eV}^2$	RENO [111, 112], Daya Bay [113, 114], Double Chooz [115]
Acelerador LBL	$\approx 10^3$ km	$\gtrsim 1\text{GeV}$	$\gtrsim 10^{-3} \text{ eV}^2$	T2K [116, 117], DUNE [11], NO ν A [118]
Reator VLB	$\approx 10^2$ km	$\approx 1\text{MeV}$	$\approx 10^{-5} \text{ eV}^2$	KamLAND [97, 119]
Acelerador VBL	$\approx 10^4$ km	$\gtrsim 1\text{GeV}$	$\gtrsim 10^{-4} \text{ eV}^2$	Super - Beam [120]
ATM	$20 - 10^4$ km	$0, 5 - 10^2\text{GeV}$	$\approx 10^{-4} \text{ eV}^2$	SK [121], MINOS [122], INO [123], PINGU [124]

Na tabela 2.1, as abreviações SBL, LBL, VLB, ATM representam os experimentos de baseline curta (*Short BaseLine*), de baseline longa (*Long BaseLine*), de baseline muito longa (*Very Long Baseline*) e de neutrinos atmosféricos, respectivamente. Além disso, vemos que os experimentos com aceleradores SBL são divididos em píons DIF, múons DAR e beam dump. DIF e DAR vêm de píons decaindo em vôo (*Decay In Flight*) e múons decaindo em repouso (*Decay At Rest*), respectivamente.

2.6 Violação das simetrias CP e T (e conservação da CPT) nas oscilações de neutrinos

Os neutrinos e antineutrinos físicos estão relacionados por uma transformação CP (*Charge conjugation and Parity transformation*) que troca neutrinos com antineutrinos e inverte a helicidade, $\nu_\alpha \xleftrightarrow{\text{CP}} \bar{\nu}_\alpha$. Além disso, uma transformação T (*Time reversal*) troca os estados inicial e final. Portanto, conforme o esquematizado na figura 2.7, uma transformação CP faz a troca de canais $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{\text{CP}} \bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$, enquanto uma transformação T faz a troca de canais $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{\text{T}} \nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$ (ou $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta \xleftrightarrow{\text{T}} \bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha$) e, finalmente, CPT faz o intercâmbio $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta \xleftrightarrow{\text{CPT}} \bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha$.

A violação CP se manifesta se a probabilidade da conversão $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ for diferente da do seu processo de conjugação CP, $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$. Pelo que um observável poderia ser,

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}^{\text{CP}} = \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \neq 0, \text{ para } \alpha \neq \beta. \quad (2.55)$$

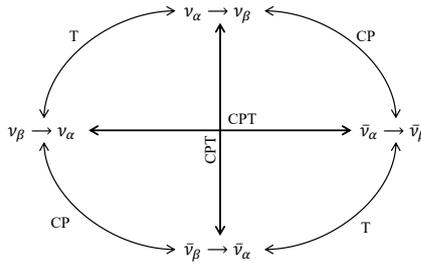


Figura 2.7: Esquema das transformações CPT, CP e T relacionadas com os diferentes canais de transição de sabor. Figura extraída e adaptada de [12].

De forma semelhante, a violação T é corroborada se o observável,

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}^T = \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - \mathcal{P}_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha} \neq 0, \quad \text{para } \alpha \neq \beta. \quad (2.56)$$

Em qualquer QFT, a simetria CPT é exata, o que se reflete no fato de que as oscilações de neutrinos no vácuo também satisfazem a simetria CPT²⁴. Neste caso, como simetria CPT é conservada, a violação da simetria T é equivalente à violação da CP. Entretanto, em meios densos, as partículas do meio podem se comportar assimetricamente em relação às antipartículas, resultando num efeito de violação da CP.

2.7 Massa dos neutrinos

A massa dos neutrinos é um grande desafio tanto para a física experimental quanto para a teórica. Até agora não foi medida experimentalmente²⁵, mas sabemos que ela existe, porque os neutrinos mudam de sabor ao longo de sua trajetória, que como sabemos é um processo que só pode ocorrer se eles tiverem massa: as probabilidades de oscilação de neutrinos dependem das diferenças das massas ao quadrado dos neutrinos²⁶.

A partir de estudos do ponto final da distribuição de energia do elétron no decaimento nuclear beta do trítio, se sabe que o limite da massa dos neutrinos é de 2 eV. Limites mais estritos, embora dependentes do modelo, podem ser obtidos a partir da cosmologia. A densidade de neutrinos relíquias de baixa energia do *Big Bang* é grande, $\mathcal{O}(100) \text{ cm}^{-3}$ para cada sabor. Consequentemente, as massas de neutrinos têm um impacto potencial sobre a evolução do Universo. A partir de medições cosmológicas recentes da estrutura em larga escala do Universo, pode-se deduzir que pelo menos $\sum_{i=1}^3 m_{\nu_i} \lesssim 1 \text{ eV}$.

Embora as massas de neutrinos não sejam conhecidas, é claro que elas são muito menores do que as de léptons carregados ou quarks. Mesmo com massas de neutrino

²⁴Usando U_{PMNS} (equações 2.6 e/ou 2.7) pode ser mostrado explicitamente a validade dessa afirmação.

²⁵Até o momento, não há medidas diretas das massas de neutrinos, apenas limites superiores.

²⁶Pelo que as medições experimentais das oscilações de neutrinos não limitam a escala global de massas de neutrinos.

em escala eV, elas são menores por um fator de pelo menos 10^6 do que a massa do elétron e menores por um fator de pelo menos 10^9 do que a massa do tau. A hipótese atual para esta grande diferença é conhecida como o mecanismo *Seesaw*²⁷.

A dificuldade em determinar a massa dos neutrinos está na falta de precisão suficiente nas técnicas de medição. Enquanto os experimentos encontram massas da ordem dos eV, a incerteza experimental é da ordem de MeV, causando dificuldades experimentais.

2.8 Ordenamentos das massas dos neutrinos

Por uma questão de simetrias, espera-se que os neutrinos eletrônicos sejam os mais leves e que os neutrinos tauônicos os mais pesados. Embora o oposto pareça absurdo, a teoria não descarta esta hipótese. Esta situação leva ao interessante fato de que não sabemos qual é o neutrino mais leve e qual o mais pesado.

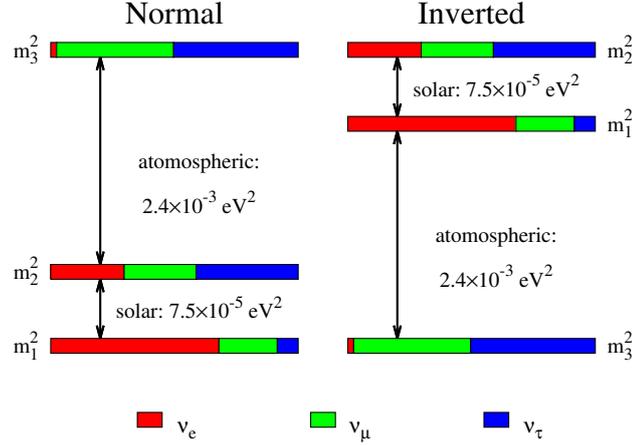


Figura 2.8: Os dois possíveis ordenamentos de massa dos neutrinos, normal onde $m_3 > m_2$ e invertido onde $m_2 > m_3$. Figura extraída de [125].

Os resultados dos experimentos da oscilação de neutrinos fornecem determinações das diferenças dos quadrados das massas de neutrinos,

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\text{Sol}}^2 = m_2^2 - m_1^2 &\approx 8 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ |\Delta m_{32}^2| = |\Delta m_{\text{ATM}}^2| = |m_3^2 - m_2^2| &\approx 2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \end{aligned} \quad (2.57)$$

o que então implica que as massas m_1 e m_2 estão muito próximas uma da outra²⁸, enquanto a m_3 pode ser muito maior ou muito menor do que as outras duas.

Independentemente da escala de massa absoluta do neutrino mais leve, há dois ordenamentos possíveis para as massas de neutrinos, mostrados na figura 2.8 (no ordenamento normal $m_3 > m_2$ e no ordenamento invertido $m_3 < m_2$). Os experimentos

²⁷Gera massas para partículas neutras leves que são candidatas a neutrino de Majorana.

²⁸Embora seja muito significativo o fato de que $m_2 > m_1$, *i.e.*, a diferença Δm_{21}^2 é positiva porque, com isto, tem-se ressonância na oscilação dos neutrinos solares, conseguindo explicar os dados experimentais.

atuais não são suficientemente sensíveis para distinguir entre estas duas possibilidades²⁹. Entretanto, independentemente do ordenamento, já que $\Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{32}^2|$ na maioria das circunstâncias é razoável fazer a aproximação $|\Delta m_{31}^2| \approx |\Delta m_{32}^2|$ na equação 2.57.

2.9 Efeitos da matéria na oscilação de neutrinos

Na discussão anterior foi assumido que os neutrinos viajam através do vácuo, o que é uma boa aproximação para o caminho entre o Sol e a Terra. Mas os neutrinos são produzidos principalmente no interior mais profundo do Sol. As oscilações de neutrinos no Sol, ou em qualquer meio material, podem se tornar muito diferentes das oscilações no vácuo. A razão básica para isto, como Wolfenstein [126] afirma, é que as interações num meio material modificam a relação de dispersão³⁰ das partículas que viajam através dele.

Já em 1978 Wolfenstein mostrou teoricamente que na presença de matéria, o neutrino sofre um fenômeno análogo à refração. O espalhamento coerente com partículas no meio provoca um potencial efetivo que altera os ângulos de mistura entre os sabores de neutrinos [126]. Em outro contexto, estamos familiarizados com este fenômeno no caso dos fótons: eles não têm massa no vácuo e sua relação de dispersão é simplesmente $E = |\mathbf{p}|$. Num meio material, porém, a relação de dispersão é mais complicada, o que pode ser interpretado como se o fóton desenvolvesse uma massa efetiva e, por isso, não viajasse com velocidade c num meio material. Para um feixe de neutrinos que viaja através do material solar, a evolução é diferente daquela que seria exibida pelo mesmo feixe que viaja no vácuo.

Em 1985, Mikheev e Smirnov constataram que caso a densidade de matéria varie enquanto o neutrino se propaga, é possível observar ressonância nas transições de sabor [127]. Este efeito na matéria é conhecido como efeito MSW (em homenagem a Mikheyev, Smirnov e Wolfenstein) e foi o efeito que explicou com sucesso a conversão de sabor de neutrinos do Sol até a Terra, durante o período do problema do neutrino solar (detalhes na referência [128]).

No cenário de três sabores de neutrinos, a evolução de um estado é descrita pela equação de Schrödinger (escrita no sistema natural de unidades, onde $c = \hbar = 1$) em termos de um potencial efetivo introduzido pela presença de matéria no meio [12],

$$i \frac{d}{dx} |\nu\rangle = \mathcal{H} |\nu\rangle, \quad |\nu\rangle = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

²⁹Os termos mais importantes na probabilidade são funções pares de Δm_{32}^2 e, portanto, não é possível distinguir se o seu valor é positivo ou negativo.

³⁰As relações de dispersão dão essencialmente a energia de uma partícula em função de seu momento. Assim, na linguagem quântica, uma relação de dispersão diferente significa um hamiltoniano diferente do sistema. Assim, ela dá uma evolução diferente para a função de onda.

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2E} \left[U \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}^2} U^\dagger + \mathcal{A} \right], \quad (2.59)$$

onde o subscrito F se refere ao fato de que \mathcal{H} está escrito na base de sabor (*flavor*), $U = U_{\text{PMNS}}$ é a matriz de mistura usual e $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ é uma matriz que descreve o potencial efetivo na matéria, dado por

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}G_F N_e(x) E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

As probabilidades de conversão portanto dependem da densidade de elétrons na matéria $N_e = N_e(x)$ conforme o neutrino se propaga. No potencial efetivo, apenas o primeiro termo da diagonal é não nulo uma vez que as interações de corrente carregada dos neutrinos ν_μ e ν_τ são muito mais raras, devido à alta energia necessária para produzir seus léptons associados. As oscilações de correntes neutras também aparecem, mas, como são universais, uma mudança de fase remove a contribuição da corrente neutra [95].

2.9.1 Oscilações entre dois sabores na matéria com densidade constante

Faremos o estudo de oscilação de neutrinos na matéria de forma similar à oscilação no vácuo, supondo inicialmente um cenário com apenas dois sabores de neutrinos. Este cenário apresenta uma descrição razoável do fenômeno, uma vez que apenas as oscilações $\nu_e \leftrightarrow \nu_x$ (onde ν_x é uma mistura, ou superposição linear coerente genérica, de ν_μ e ν_τ) são afetadas pela presença de matéria, enquanto oscilações do tipo $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ permanecem inalteradas³¹.

Na presença de interações com a matéria, a evolução temporal das funções de onda do neutrino são dadas por³²

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \sqrt{2}G_F N_e & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F N_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Logo, podemos diagonalizar o hamiltoniano introduzindo os ângulos de mistura na matéria

³¹Convém ressaltar que, rigorosamente falando, as oscilações do tipo $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ são de fato modificadas, mas a modificação é pequena devido à pequenez do ângulo θ_{13} .

³² $i \frac{d}{dt} |\nu\rangle = \mathcal{H} |\nu\rangle = \frac{1}{2E} (U \mathcal{M}^2 U^\dagger + \mathcal{A}) |\nu\rangle$, onde U é a matriz de mistura usual, dada na equação 2.27 para o caso 2ν .

$\tilde{\theta}$, de forma que obtemos

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

onde $|\tilde{\nu}\rangle$ é o autoestado de energia na matéria e os cossenos e senos do ângulo $\tilde{\theta}$ são

$$\cos 2\tilde{\theta} = \frac{-a/\Delta m^2 + \cos 2\theta}{\sqrt{(a/\Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}}, \quad (2.63)$$

$$\sin 2\tilde{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{(a/\Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}}, \quad (2.64)$$

sendo $a = 2\sqrt{2}G_F N_e E$, tal que $\mathcal{A} = \text{diag}(a, 0, 0)$.

Com a matriz diagonalizada, encontramos os autovalores de massa

$$\tilde{m}_{1,2}^2 = \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(a - \Delta m^2 \cos 2\theta)^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\theta} = \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \Delta \tilde{m}^2. \quad (2.65)$$

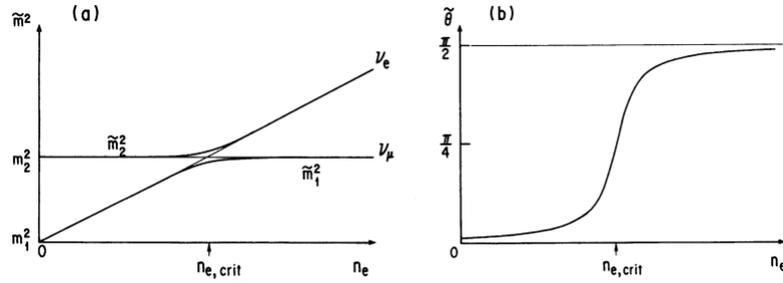


Figura 2.9: (a) Valor da massa efetiva do neutrino ao quadrado no meio numa função da densidade de elétrons N_e . n_e é o ponto de cruzamento definido pela equação 2.67. Este valor corresponde a $\sin^2 2\theta = 0,01$. Caso um neutrino do tipo ν_e seja produzido na região $N_e > N_{crit}$ e se propague até a região onde $N_e < N_{crit}$, o estado segue o caminho superior e os estados ν_e se convertem totalmente em ν_μ , supondo que a variação de N_e seja suave o suficiente de forma que a oscilação ocorra de forma adiabática. (b) Ângulo de mistura $\tilde{\theta}$ no meio em função da densidade de elétrons N_e , correspondendo ao caso mostrado em (a). Figura extraída de [13].

Esta solução de autovalores de massa implica num cruzamento, ou ressonância, no ponto em que $a/\Delta m^2 = \cos 2\theta$ (conforme é mostrado na figura 2.9(a)). De fato, das equações 2.63 e 2.64, se obtém, entre θ e o novo ângulo de mistura $\tilde{\theta}$, a relação

$$\tan 2\tilde{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - a/\Delta m^2} = \frac{\tan 2\theta}{1 - a/(\Delta m^2 \cos 2\theta)}, \quad (2.66)$$

podendo-se observar, de um jeito mais claro, a ressonância $a = \Delta m^2 \cos 2\theta$, que leva o ângulo de mistura num valor máximo de $\pi/4$. Assim, da relação $a = 2\sqrt{2}G_F N_{e,crit} E =$

$\Delta m^2 \cos 2\theta$ na ressonância, se obtém

$$n_e = N_{e\text{crit}} = \frac{\Delta m^2}{2\sqrt{2}G_F E} \cos 2\theta. \quad (2.67)$$

Assim, a probabilidade de sobrevivência $\nu_e \rightarrow \nu_e$ é calculada tomando a média da parte de variação temporal,

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = \sin^2 \theta \sin^2 \tilde{\theta} + \cos^2 \theta \cos^2 \tilde{\theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2\theta \cos 2\tilde{\theta} \right), \quad (2.68)$$

onde $\tilde{\theta}$ é o ângulo de mistura no ponto inicial.

Podemos ainda derivar esta expressão para um caso mais geral, num jeito mais formal. Suponhamos que ν_e é criado num instante inicial t_0 , *i.e.*,

$$\psi_{\nu_e}(t_0) = \cos \tilde{\theta} |\tilde{\nu}_1\rangle + \sin \tilde{\theta} |\tilde{\nu}_2\rangle, \quad (2.69)$$

ao se aproximar da ressonância em $t = t_r - \epsilon$, sendo ϵ muito pequeno, temos que o estado ψ_{ν_e} é descrito por

$$\psi_{\nu_e}(t_r - \epsilon) = \cos \tilde{\theta} \exp\left(i \int_{t_0}^{t_r} \epsilon_1 dt\right) |\tilde{\nu}_1\rangle + \sin \tilde{\theta} \exp\left(i \int_{t_0}^{t_r} \epsilon_2 dt\right) |\tilde{\nu}_2\rangle, \quad (2.70)$$

onde $\epsilon_{1,2} = \tilde{m}_{1,2}^2$. Na ressonância, $t = t_r$, uma transição de estados pode ocorrer, de forma que o estado é escrito conforme

$$\begin{aligned} |\tilde{\nu}_1\rangle &\rightarrow \alpha |\tilde{\nu}_1\rangle + \beta |\tilde{\nu}_2\rangle \\ |\tilde{\nu}_2\rangle &\rightarrow -\beta^* |\tilde{\nu}_1\rangle + \alpha^* |\tilde{\nu}_2\rangle \end{aligned} \quad (2.71)$$

em que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Portanto, logo após cruzar esta região em $t = t_r + \epsilon$,

$$\begin{aligned} \psi_{\nu_e}(t_r + \epsilon) &= \cos \tilde{\theta} \exp\left(i \int_{t_0}^{t_r} \epsilon_1 dt\right) (\alpha |\tilde{\nu}_1\rangle + \beta |\tilde{\nu}_2\rangle) \\ &+ \sin \tilde{\theta} \exp\left(i \int_{t_0}^{t_r} \epsilon_2 dt\right) (-\beta^* |\tilde{\nu}_1\rangle - \alpha^* |\tilde{\nu}_2\rangle) \\ &\equiv A(t_r) |\tilde{\nu}_1\rangle + B(t_r) |\tilde{\nu}_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Então, quando $t > t_r$, temos

$$\psi_{\nu_e}(t) = A(t_r) \exp\left(i \int_{t_r}^t \epsilon_1 dt\right) |\tilde{\nu}_1\rangle + B(t_r) \exp\left(i \int_{t_r}^t \epsilon_2 dt\right) |\tilde{\nu}_2\rangle. \quad (2.73)$$

Finalmente, quando $t \rightarrow \infty$ e os neutrinos chegam ao detector, interagindo

como estados de sabor ν_e e ν_x , o estado ψ_{ν_e} está descrito como

$$\begin{aligned} \psi_{\nu_e}(t \rightarrow \infty) = & A(t_r) \exp\left(i \int_{t_r}^{\infty} \epsilon_1 dt\right) (\cos \theta |\nu_e\rangle - \sin \theta |\nu_x\rangle) \\ & + B(t_r) \exp\left(i \int_{t_r}^{\infty} \epsilon_2 dt\right) (\sin \theta |\nu_e\rangle + \cos \theta |\nu_x\rangle). \end{aligned} \quad (2.74)$$

A projeção do estado, no sabor neutrino eletrônico é então dada por

$$\langle \nu_e | \psi(t \rightarrow \infty) \rangle = A(t_r) \cos \theta \exp\left(i \int_{t_r}^{\infty} \epsilon_1 dt\right) + B(t_r) \sin \theta \exp\left(i \int_{t_r}^{\infty} \epsilon_2 dt\right), \quad (2.75)$$

e a probabilidade de sobrevivência é descrita de forma geral como

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = |A|^2 \cos^2 \theta + |B|^2 \sin^2 \theta + 2|AB| \cos \theta \sin \theta \cos \left[\int_{t_r}^{\infty} (\epsilon_1 - \epsilon_2) dt + \Omega \right] \quad (2.76)$$

onde $\Omega = \arg(A^*B)$.

Ao se tomar a média sobre a posição do detector ou a distribuição de energia dos neutrinos, o último termo desaparece. Retornando agora os coeficientes $A(t_r)$ e $B(t_r)$, de acordo com a equação 2.72, a probabilidade média de sobrevivência fica escrita na forma

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = & |A|^2 \cos^2 \theta + |B|^2 \sin^2 \theta \\ = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cos 2\tilde{\theta} \cos 2\theta - |\alpha\beta| \sin 2\tilde{\theta} \sin 2\theta \cos \left[\int_0^{t_r} (\epsilon_1 - \epsilon_2) dt + \omega \right], \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde agora $\omega = \arg(\alpha^*\beta)$. O último termo desaparece ao se tomar a média sobre a posição de produção do neutrino. De acordo com a fórmula de Landau-Zener³³ [129, 130], temos

$$|\beta| = \mathcal{P}_f = e^{-\frac{\pi}{2}\gamma}, \quad (2.78)$$

onde \mathcal{P}_f é a probabilidade de cruzamento na ressonância e γ é a relação entre o lado direito e o lado esquerdo da (desigualdade) condição adiabática, dada por

$$\gamma = \frac{\Delta m^2 \sin^2(2\theta) N_e}{2E \cos(2\theta) dN_e/dr}, \quad (2.79)$$

obtendo então³⁴

$$\langle \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \mathcal{P}_f \right) \cos 2\theta \cos 2\tilde{\theta}. \quad (2.80)$$

³³Se a condição adiabática $\frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{dr} \ll \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta}$ não for satisfeita, o estado do ramo superior, na figura 2.9, sofre uma transição para o ramo inferior ao passar pelo ponto de cruzamento com uma probabilidade dada por P_f . Detalhes da derivação da fórmula Landau-Zener na sub-seção 8.6.3 da referência [13].

³⁴Caso não adiabático.

Com os antineutrinos, o ponto conceitual é o mesmo, sendo que para anti-neutrinos devemos tomar $\mathcal{A} \rightarrow -\mathcal{A}$, equivalente à troca $a \rightarrow -a$ na diagonalização do hamiltoniano.

Entretanto, o efeito MSW não se dá apenas dentro da estrela. Caso os neutrinos viajem através da Terra antes de chegar aos detectores, novamente teremos ocorrência de oscilação na matéria. Por isso, mostramos a seguir (subseção 2.9.2) o formalismo, ainda supondo dois sabores, para a oscilação de neutrinos na matéria ao atravessar a Terra. Para isso, assumimos a Terra como uma esfera de densidade constante³⁵ (mais tarde, em nosso trabalho de pesquisa, pretendemos discutir formas de estender estes resultados ao caso de densidade variável).

2.9.2 Efeito MSW da Terra na propagação de neutrinos

O chamado efeito MSW [126, 127], descrito por Mikheyev, Smirnov e Wolfenstein, atua para modificar as oscilações do neutrino quando o meio em que o neutrino viaja tem uma densidade não constante. Neste caso, pode-se ter um efeito ressonante que amplifica a probabilidade de transição do sabor do neutrino quando os neutrinos passam por uma zona de densidade adequada³⁶. A condição para isto ocorrer é quando os elementos da diagonal da matriz (mostrada na equação 2.59) se cancelam na equação 2.58. O efeito MSW também pode ter lugar para um neutrino que se propaga através da Terra.

Escrevemos a condição inicial na superfície da Terra como uma mistura de $|\nu_e\rangle$ e $|\nu_\mu\rangle$. Suponhamos um neutrino incidente num estado dado de forma geral como uma mistura de ν_e e ν_μ , *i.e.*,

$$\Psi_\nu(0) = |\nu(0)\rangle = \alpha\psi_{\nu_e} + \beta\psi_{\nu_\mu}, \quad (2.81)$$

onde $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ e

$$\psi_{\nu_e} = |\nu_e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\nu_\mu} = |\nu_\mu\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Podemos reescrever um estado $|c\rangle$ na matéria que se relaciona com os estados $|\nu(0)\rangle$ no vácuo da forma

$$\begin{pmatrix} c_e \\ c_\mu \end{pmatrix} = \exp\left(i \int_0^t \sqrt{2}G_F N_e dt\right) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Nesse caso, a equação de Schrödinger (equação 2.61) que governa a evolução temporal do

³⁵Pode ser útil desenvolver um método aproximado para resolver analiticamente a propagação do neutrino através da Terra. Assumimos uma densidade constante para a Terra.

³⁶No caso do vácuo, se o neutrino possuir um ângulo de mistura pequeno, este pode ter o efeito de oscilação dos neutrinos num meio material.

estado $|c\rangle$ na matéria é dada por

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_e \\ c_\mu \end{pmatrix} = (A\sigma_3 + B\sigma_1) \begin{pmatrix} c_e \\ c_\mu \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli [131] e sendo

$$A = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}G_{\text{F}}N_e - \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \right), \quad (2.85)$$

$$B = \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta.$$

Com N_e sendo constante, podemos resolver analiticamente esta equação se impusermos a condição de contorno $c_e(0) = 1$ e $c_\mu(0) = 0$. Neste caso, a solução é

$$c_e(t_f) = \cos\left(\frac{\pi t_f}{\tilde{l}}\right) - i \frac{\tilde{l}}{l_0} \sin\left(\frac{\pi t_f}{\tilde{l}}\right) \left[\frac{N_e l_0 G_{\text{F}}}{\sqrt{2}\pi} - \cos 2\theta \right], \quad (2.86)$$

$$c_\mu(t_f) = -i \frac{\tilde{l}}{l_0} \sin\left(\frac{\pi t_f}{\tilde{l}}\right) \sin 2\theta,$$

onde t_f é o tempo que leva para os neutrinos atravessarem a Terra, l_0 é a distância de oscilação típica do vácuo (equação 2.38) e \tilde{l} é a distância de oscilação típica na matéria, dadas por

$$l_0 = \frac{4\pi E}{\Delta m^2},$$

$$\tilde{l} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \frac{1}{\sqrt{(a/\Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}}. \quad (2.87)$$

Finalmente, a probabilidade de se encontrar um neutrino no estado ν_e após ele ter viajado pela Terra é

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_x \rightarrow \nu_e} &= |\alpha \langle \nu_e | \psi_{\nu_e} \rangle|^2 + |\beta \langle \nu_e | \psi_{\nu_\mu} \rangle|^2 + \Re(\alpha\beta^* \langle \nu_e | \psi_{\nu_e} \rangle \langle \nu_e | \psi_{\nu_\mu} \rangle^*) \\ &= |\alpha|^2 |c_e(t_f)|^2 + |\beta|^2 |c_\mu(t_f)|^2 - \alpha\beta^* c_e(t_f) c_\mu(t_f) - \alpha^* \beta c_e^*(t_f) c_\mu^*(t_f), \end{aligned} \quad (2.88)$$

que, substituindo (2.86), dá

$$\mathcal{P}_{\nu_x \rightarrow \nu_e} = \sin^2 \theta |c_e(t_f)|^2 + \cos^2 \theta |c_\mu(t_f)|^2 - \sin \theta \cos \theta [c_e(t_f) c_\mu(t_f) + \text{h.c.}]. \quad (2.89)$$

Notemos que quando a condição de ressonância é aproximadamente satisfeita

($\gamma \gg 1$, *i.e.*, caso adiabático³⁷), temos

$$\begin{aligned} c_e(t_f) &\simeq \cos\left(\frac{\sin 2\theta}{l_0}\pi t_f\right), \\ c_\mu(t_f) &= \sin\left(\frac{\sin 2\theta}{l_0}\pi t_f\right), \end{aligned} \quad (2.90)$$

e então

$$\mathcal{P}_{\nu_x \rightarrow \nu_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \cos\left(\frac{2 \sin 2\theta}{l_0}\pi t_f\right). \quad (2.91)$$

2.9.3 Oscilações entre três sabores na matéria com densidade constante

O caso de três estados de sabor de um neutrino que se propaga num meio de densidade constante é equivalente a resolver a equação 2.58 para $a = 2\sqrt{2}G_F N_e E = \text{cte}$, *i.e.*, $\rho(x) = \text{cte}$. Nesta seção, apresentamos como o efeito da matéria influencia a oscilação entre três sabores, examinando as aproximações possíveis no caso de densidade constante e analisando algumas de suas implicações físicas.

Como sabemos pela equação 2.6, a parametrização padrão para a mistura de sabores é dada por

$$U = R_{23} \underbrace{\Gamma_\delta R_{13} \Gamma_\delta^\dagger}_{V_{13}} R_{12}, \quad (2.92)$$

na qual R_{23} , R_{13} e R_{12} são matrizes de rotação unitárias e $\Gamma_\delta = \text{diag}(1, 1, e^{i\delta})$. O truque proposto na referência [132] é eliminar a dependência funcional do parâmetro θ_{23} , para simplificar um pouco o problema. É simples mostrar que se fizermos a rotação R_{23} , então $\mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}} = R_{23}^\dagger \mathcal{A} R_{23} = \mathcal{A}$, onde \mathcal{A} é o potencial matéria descrito na equação 2.60; isto é evidente ao observar que a matriz de rotação R_{23} é bloco-diagonal nos blocos em que \mathcal{A} é zero. Assim, podemos reescrever a equação de movimento (equações 2.58 + 2.59 e 2.60) usando a fatoração usual da matriz de mistura (equação 2.6) mais o fato que acabamos de mostrar,

$$i \frac{d}{dx} |\nu\rangle = \frac{1}{2E} R_{23} \left(V_{13} R_{12} \mathcal{M}^2 R_{12}^\dagger V_{13}^\dagger + \mathcal{A} \right) |\nu\rangle, \quad (2.93)$$

onde $\mathcal{M}^2 = \text{diag}(0, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2)$. Logo, ao pré-multiplicar por R_{23}^\dagger ambos lados da equação 2.93, usando a relação de unitariedade de R_{23} e definindo um novo estado $|\nu\rangle \rightarrow |\bar{\nu}\rangle = R_{23}^\dagger |\nu\rangle$, a equação de movimento na base rotacionada (ou “espaço de propagação”

³⁷Para esse tipo de evolução dos autoestados dizemos que o neutrino se propaga adiabaticamente na matéria. A evolução adiabática normalmente é encontrada em neutrinos gerados em núcleos estelares, como os neutrinos gerados no Sol [12].

segundo a referência [132]) torna-se

$$i \frac{d}{dx} |\bar{\nu}\rangle = \frac{1}{2E} \underbrace{\left(V_{13} R_{12} \mathcal{M}^2 R_{12}^\dagger V_{13}^\dagger + \mathcal{A} \right)}_{\bar{\mathcal{H}}} |\bar{\nu}\rangle, \quad (2.94)$$

ou seja, no espaço de propagação, o hamiltoniano se torna

$$\mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathcal{H}} = R_{23}^\dagger \mathcal{H} R_{23} = \frac{1}{2E} \left(V_{13} R_{12} \mathcal{M}^2 R_{12}^\dagger V_{13}^\dagger + \mathcal{A} \right). \quad (2.95)$$

Teríamos então, usando a abordagem da representação de Schrödinger da QM, a equação de movimento

$$i \frac{d}{dx} \bar{\Psi}_\alpha = \frac{1}{2E} \bar{\mathcal{H}} \bar{\Psi}_\alpha, \quad \bar{\Psi}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\alpha e} \\ \bar{\psi}_{\alpha \mu} \\ \bar{\psi}_{\alpha \tau} \end{pmatrix}, \quad \psi_{\alpha\beta}(x) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(x) \rangle. \quad (2.96)$$

Partindo então da definição de onda de propagação, é possível expressar as probabilidades de conversão e de sobrevivência, conforme descrito por [132],

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_e} = |\psi_{\alpha e}|^2 = |\bar{\psi}_{\alpha e}|^2, \quad (2.97)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\mu} = |\psi_{\alpha \mu}|^2 = c_{23}^2 |\bar{\psi}_{\alpha \mu}|^2 + s_{23}^2 |\bar{\psi}_{\alpha \tau}|^2 + 2s_{23}c_{23} \Re(\bar{\psi}_{\alpha \mu}^* \bar{\psi}_{\alpha \tau}), \quad (2.98)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\tau} = |\psi_{\alpha \tau}|^2 = s_{23}^2 |\bar{\psi}_{\alpha \mu}|^2 + c_{23}^2 |\bar{\psi}_{\alpha \tau}|^2 - 2s_{23}c_{23} \Re(\bar{\psi}_{\alpha \mu}^* \bar{\psi}_{\alpha \tau}). \quad (2.99)$$

Ao fazer uso da unicidade das probabilidades e da rotação R_{23} , torna-se viável re-escrever todas as probabilidades exclusivamente em termos das probabilidades dos setores $e - \mu$ e $e - \tau$, tanto na base de sabor quanto na base de propagação³⁸,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ee} &= 1 - (\mathcal{P}_{e\mu} + \bar{\mathcal{P}}_{e\mu}), \\ \mathcal{P}_{e\tau} &= \bar{\mathcal{P}}_{e\mu}, \\ \mathcal{P}_{\mu e} &= \mathcal{P}_{e\mu} - \mathcal{P}_{\mu\tau} + \bar{\mathcal{P}}_{\mu\tau}, \\ \mathcal{P}_{\mu\mu} &= 1 - \mathcal{P}_{e\mu} - \bar{\mathcal{P}}_{\mu\tau}, \\ \mathcal{P}_{\tau e} &= \bar{\mathcal{P}}_{e\mu} + \mathcal{P}_{\mu\tau} - \bar{\mathcal{P}}_{\mu\tau}, \\ \mathcal{P}_{\tau\mu} &= \bar{\mathcal{P}}_{\mu\tau}, \\ \mathcal{P}_{\tau\tau} &= 1 - (\bar{\mathcal{P}}_{e\mu} + \mathcal{P}_{\mu\tau}), \end{aligned} \quad (2.100)$$

em que $\bar{\mathcal{P}}_{\alpha\beta} = |\bar{\psi}_{\alpha\beta}|^2$. Logo, o próximo passo consiste em resolver a equação de evolução na matéria para determinar a função onda de propagação, $\bar{\Psi}_\alpha$.

A seguir, exploramos alguns casos específicos de interesse nos quais a solução

³⁸É usada a notação $\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \mathcal{P}_{\alpha\beta}$

pode ser identificada de maneira mais acessível.

Vamos começar com o caso da dominância Δm_{31}^2 , *i.e.*, no limite $\Delta m_{21}^2 \rightarrow 0$. Neste caso, o problema é simplificado da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}^2 = \text{diag} \left(0, \overset{0}{\cancel{\Delta m_{21}^2}}, \Delta m_{31}^2 \right) = \text{diag} \left(0, 0, \Delta m_{31}^2 \right), \\ \downarrow \\ R_{12} \mathcal{M}^2 R_{12}^\dagger = \mathcal{M}^2, \\ \downarrow \\ \bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2E} \left(V_{13} \underbrace{R_{12} \mathcal{M}^2 R_{12}^\dagger}_{\mathcal{M}^2} V_{13}^\dagger + \mathcal{A} \right) = \frac{1}{2E} \left(V_{13} \mathcal{M}^2 V_{13}^\dagger + \mathcal{A} \right). \end{array} \right.$$

Logo, a equação de evolução 2.94 torna-se uma equação mais simples, independente também do parâmetro θ_{12} . Explicitamente, temos

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\alpha e} \\ \bar{\psi}_{\alpha \mu} \\ \bar{\psi}_{\alpha \tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} s_{13}^2 \Delta m_{31}^2 + a & 0 & s_{13} c_{13} \Delta m_{31}^2 e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{13} c_{13} \Delta m_{31}^2 e^{i\delta} & 0 & c_{13}^2 \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\alpha e} \\ \bar{\psi}_{\alpha \mu} \\ \bar{\psi}_{\alpha \tau} \end{pmatrix}. \quad (2.101)$$

O primeiro fato observado é que $d\bar{\psi}_{\alpha \mu}/dx = 0$, portanto $\bar{\psi}_{\alpha \mu}$ permanece constante durante toda a evolução do neutrino e a mistura envolve somente dois componentes $\bar{\psi}_{\alpha e}$ e $\bar{\psi}_{\alpha \tau}$. Assim, o problema é reduzido à oscilação na matéria entre dois sabores³⁹,

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\alpha e} \\ \bar{\psi}_{\alpha \tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta_{13} \Delta m_{31}^2 + 2a & \sin 2\theta_{13} \Delta m_{31}^2 \\ \sin 2\theta_{13} \Delta m_{31}^2 & \cos 2\theta_{13} \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\alpha e} \\ \bar{\psi}_{\alpha \tau} \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

equação idêntica à equação 2.61, já resolvida na subseção 2.9.1. Então, de forma análoga ao que já foi desenvolvido acima, temos que o ângulo de mistura na matéria $\tilde{\theta}_{31}$, que diagonaliza a equação de Schrödinger, é tal que

$$\tan 2\tilde{\theta}_{13} = \frac{\tan 2\theta_{13}}{1 - \frac{a}{\Delta m_{31}^2 \cos 2\theta_{31}}} \quad (2.103)$$

³⁹Em sistemas de dois sabores, a violação CP não é necessária, logo $\delta = 0$. Observe também que, na equação 2.102, escrevemos o hamiltoniano “incompleto”, pois a parte aditiva $+cte \cdot \mathbf{1}$ não afeta a evolução temporal da função de onda e pode ser desprezada.

e os valores próprios de massa (ou diferença efetiva dos quadrados das massas) são

$$\Delta\tilde{m}_{31}^2 = \sqrt{(\Delta m_{31}^2 \cos 2\theta_{13} - a)^2 + (\Delta m_{13}^2)^2 \sin^2 2\theta_{13}}, \quad (2.104)$$

que são encontrados com a diagonalização da matriz

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{R}_{13}^T \tilde{\mathcal{H}} \tilde{R}_{13} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta\tilde{m}_{31}^2 & 0 \\ 0 & \Delta\tilde{m}_{31}^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_{13} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_{13} & \sin \tilde{\theta}_{13} \\ -\sin \tilde{\theta}_{13} & \cos \tilde{\theta}_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

onde agora \tilde{R}_{13} é a transformação unitária (ou matriz de mistura) na matéria. Logo, ao voltar para o caso de três sabores, nessa aproximação de dominância Δm_{31}^2 , levando em conta a rotação R_{23} feita no início desta subseção, temos que a matriz de rotação na matéria é

$$\tilde{U} = R_{23} \tilde{R}_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_{13} & 0 & \tilde{s}_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{s}_{13} & 0 & \tilde{c}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{13} & 0 & \tilde{s}_{13} \\ -s_{23}\tilde{s}_{13} & c_{23} & s_{23}\tilde{c}_{13} \\ -c_{23}\tilde{s}_{13} & -s_{23} & c_{23}\tilde{c}_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

onde a notação $\tilde{s}_{13} = \sin \tilde{\theta}_{13}$ e $\tilde{c}_{13} = \cos \tilde{\theta}_{13}$ foi assumida. Então, teríamos que a evolução do estado $\Psi_\alpha = (\psi_{\alpha e}, \psi_{\alpha \mu}, \psi_{\alpha \tau})^T$ vem dada por

$$\Psi_\alpha(0) \rightarrow \Psi_\alpha = \mathcal{S}(L) \Psi_\alpha(0) = \tilde{U} \tilde{\mathcal{S}}(L) \tilde{U}^\dagger \Psi_\alpha(0), \quad (2.107)$$

onde \mathcal{S} é o operador evolução. Portanto, nosso problema se tornou idêntico ao problema da oscilação de neutrinos de três sabores no vácuo, com a diferença de que agora os autoestados de massa precisam ser substituídos por autoestados efetivos, a dependência funcional com θ_{12} é eliminada e também precisamos fazer a troca $\theta_{13} \rightarrow \tilde{\theta}_{13}$ (ou seja, alterar U da equação 2.7 pela sua versão \tilde{U} da equação 2.106), na equação 2.23,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_{ij} \tilde{U}_{\alpha i}^* \tilde{U}_{\beta i} \tilde{U}_{\alpha j} \tilde{U}_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta\tilde{m}_{31}^2}{2E} L\right). \quad (2.108)$$

Em particular, dada a forma de \tilde{U} na equação 2.106, torna-se interessante analisar o caso do setor eletrônico, *i.e.*, a probabilidade no canal $\nu_e \rightarrow \nu_x$. De fato, nesse caso, a probabilidade depende única e exclusivamente do ângulo de rotação (ou ângulo de mistura) na matéria, $\tilde{\theta}_{13}$ (que satisfaz a relação funcional 2.103) e da diferença efetiva dos quadrados das massas, $\Delta\tilde{m}_{31}^2$ (equação 2.104). As probabilidades de oscilação apresentam

a forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= 1 - \sin^2 2\theta_{ee}^{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{m}_{31}^2 L}{4E} \right), \\
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} &= 1 - \sin^2 2\theta_{e\mu}^{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{m}_{31}^2 L}{4E} \right), \\
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} &= 1 - \sin^2 2\theta_{e\tau}^{\text{eff}} \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{m}_{31}^2 L}{4E} \right),
\end{aligned} \tag{2.109}$$

onde

$$\begin{aligned}
\sin^2 2\theta_{ee}^{\text{eff}} &= \sin^2 2\tilde{\theta}_{13}, \\
\sin^2 2\theta_{e\mu}^{\text{eff}} &= \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\tilde{\theta}_{13}, \\
\sin^2 2\theta_{e\tau}^{\text{eff}} &= \cos^2 \theta_{23} \sin^2 2\tilde{\theta}_{13}.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Estabelece-se, então, que no problema de três estados de sabor de um neutrino eletrônico que se propaga num meio material de densidade constante, quando há dominância de Δm_{31}^2 , obtém-se uma descrição semelhante à propagação de duas gerações no vácuo (mas com modificações nos parâmetros devido ao efeito de matéria), podendo a frequência e a amplitude de oscilação serem identificadas como uma função da diferença efetiva dos quadrados das massas e do ângulo de mistura efetivo, que são calculados como uma função dos parâmetros de mistura usual e do efeito de matéria (equações 2.104 e 2.103, respetivamente). Porém, para os outros canais de oscilação, não é possível reduzir as probabilidades para uma forma funcional semelhante à probabilidade de duas famílias no vácuo, já que na matéria há dois autovalores de massa independentes.

Destacamos outro caso que merece atenção especial, chamado de Δm_{21}^2 ativo, às vezes também conhecido como “aproximação solar” ou *active small* Δm^2 . Para uma análise detalhada desse caso no vácuo, recomenda-se consultar as seções 7.7 e 7.8 da referência [12].

Pelo mesmo processo de transformação (diagonalização do hamiltoniano), é possível estender a formulação dentro da aproximação solar para o caso de matéria constante. Para fins de concisão, a derivação das fórmulas de probabilidade não será realizada, mas apenas serão apresentadas para o setor eletrônico ou canal $\nu_e \rightarrow \nu_x$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= 1 - 4\tilde{s}_{13}^2 \tilde{c}_{13}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{m}_{31}^2 L}{4E} \right), \\
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} &= 4\tilde{s}_{13}^2 \tilde{c}_{13}^2 s_{23}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{m}_{31}^2 L}{4E} \right), \\
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} &= 4\tilde{s}_{13}^2 \tilde{c}_{13}^2 c_{23}^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta \tilde{m}_{31}^2 L}{4E} \right),
\end{aligned} \tag{2.111}$$

onde, de forma análoga, o ângulo de rotação na matéria $\tilde{\theta}_{13}$ que diagonaliza a equação de

Schrödinger é tal que a equação 2.103 é satisfeita e os valores próprios de massa têm a forma da equação 2.104. Com a diferença de que, nesse caso, o hamiltoniano se torna

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta_{13} \Delta m^2 + a & 0 & \sin 2\theta_{13} \Delta m^2 \\ 0 & -\Delta m^2 & 0 \\ \sin 2\theta_{13} \Delta m^2 & 0 & \cos 2\theta_{13} \Delta m^2 \end{pmatrix} = \tilde{U} \frac{\tilde{\mathcal{M}}^2}{2E} \tilde{U}^T, \quad (2.112)$$

ao invés do mostrado na equação 2.101, onde

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_{13} & 0 & \sin \tilde{\theta}_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \tilde{\theta}_{13} & 0 & \cos \tilde{\theta}_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.113)$$

ao invés da equação 2.106. Além disso $\tilde{\mathcal{M}}^2 = \text{diag} \left(-\Delta \tilde{m}^2/2, (-\Delta \tilde{m}^2 - a)/2, \Delta \tilde{m}^2/2 \right)$, com $\Delta \tilde{m}^2 \sin 2\tilde{\theta}_{13} = \Delta m^2 \sin 2\theta_{13}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{m}_3^2 - \tilde{m}_1^2 &= \Delta \tilde{m}^2, \\ \tilde{m}_3^2 - \tilde{m}_2^2 &= (\Delta m^2 + \Delta \tilde{m}^2 + a)/2, \\ \tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2 &= (-\Delta m^2 + \Delta \tilde{m}^2 - a)/2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

O caso analítico para matéria constante leva a problemas em que é necessário encontrar solução exata de autovalores cúbicos⁴⁰. Mesmo quando esse método de diagonalização do hamiltoniano leva a equações simples, a física envolvida fica “perdida”, seja porque a obtenção das equações não é uma tarefa fácil ou porque as equações não têm uma forma funcional intuitiva. Então, temos que procurar maneiras alternativas de lidar com o problema: os chamados métodos analíticos para a formulação da oscilação de neutrinos. Em particular, usaremos a teoria das perturbações e aproximações razoáveis. O desenvolvimento desses métodos é o assunto dos capítulos seguintes (nos casos em que a densidade do meio no qual o neutrino se propaga seja constante ou não). Essa é a essência da nossa pesquisa!

Por enquanto, vamos generalizar o método de diagonalização do hamiltoniano, *i.e.*, o maquinário matemático padrão para lidar com o problema da oscilação de neutrinos na matéria. Depois disso, vamos mostrar um caso de interesse particular (aproximação em degraus) que será revisitado na abordagem dos métodos analíticos.

⁴⁰No caso de três neutrinos, precisamos diagonalizar uma matriz 3x3, o que resulta numa fórmula de uma equação cúbica de Cardano.

2.9.4 Em resumo...

Como já vimos, no vácuo, a evolução dos neutrinos (equação 2.18) no espaço é descrita pelo hamiltoniano de sabor

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2E} U \mathcal{M}^2 U^\dagger + \text{cte} \cdot \mathbb{1}, \quad (2.115)$$

onde $\mathcal{M}^2 = \text{diag} (m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ e $U = U_{\text{PMNS}}$ é a matriz de mistura usual que parametrizamos como $U = R_{23} \Gamma_\delta R_{13} \Gamma_\delta^\dagger R_{12}$, onde R_{23} , R_{13} e R_{12} são as conhecidas matrizes de rotação unitárias (equação 2.6) e $\Gamma_\delta = \text{diag} (1, 1, e^{i\delta})$.

Na presença de matéria, o hamiltoniano de sabor (equação 2.59) é modificado na forma

$$\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2E} (U \mathcal{M}^2 U^\dagger + \mathcal{A}), \quad (2.116)$$

em que $\mathcal{A} = \text{diag} (a, 0, 0)$, com $a = 2\sqrt{2}G_{\text{F}}N_eE$, onde $N_e = N_e(x)$ é a densidade eletrônica e $a = a(x)$ é quem descreve a interação entre ν_e e $\nu_{\mu,\tau}$, também conhecido como “diferença de energia de interação” ou “potencial de neutrino”. Para antineutrinos $a \rightarrow -a$, *i.e.*, $\mathcal{A} \rightarrow -\mathcal{A}$.

A diagonalização formal do hamiltoniano na matéria é obtida através de

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2E} (U \mathcal{M}^2 U^\dagger + \mathcal{A}) := \frac{1}{2E} \tilde{U} \tilde{\mathcal{M}}^2 \tilde{U}^\dagger, \quad (2.117)$$

onde \tilde{U} é a “matriz de mistura na matéria” e $\tilde{\mathcal{M}}^2 = \text{diag} (\tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2, \tilde{m}_3^2)$ é a “matriz de massa efetiva na matéria”, com a rotulagem (1, 2, 3) fixada pela condição $\tilde{m}_i^2 \rightarrow m_i^2$ para $N_e \rightarrow 0$. Porém, a “diagonalização exata” não é necessariamente transparente ou útil ($\dim \tilde{\mathcal{H}} = 3 \rightarrow$ raízes cúbicas), e as relações funcionais exatas de $\tilde{U} = \tilde{U}(m_i^2, U)$ e $\tilde{m}_i^2 = \tilde{m}_i^2(m_i^2, U)$ podem ser muito complicadas.

Há várias maneiras de burlar essa dificuldade, *e.g.*, usar alguns “atalhos” algébricos sem fazer aproximações ou fazer algumas aproximações para obter fórmulas “mais fáceis” para \tilde{U} e \tilde{m} .

Por fim, para o cálculo da probabilidade $\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}$ na matéria (em geral), em princípio, em qualquer ponto x , poderíamos diagonalizar localmente o hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}(x) = \mathcal{H} + \mathcal{V}(x)$ na matéria como

$$\tilde{\mathcal{H}}(x) = \tilde{U}(x) \frac{\tilde{\mathcal{M}}^2(x)}{2E} \tilde{U}^\dagger(x), \quad (2.118)$$

com $\tilde{\mathcal{M}}^2 = \text{diag} (\tilde{m}_1^2(x), \tilde{m}_2^2(x), \tilde{m}_3^2(x))$, e escrever o operador de evolução local como

$$\tilde{\mathcal{S}}(x+dx, x) \approx \exp(i\tilde{\mathcal{H}}dx) = \tilde{U}(x) \exp\left(-i\frac{\tilde{m}_i^2(x)}{2E}dx\right) \tilde{U}^\dagger(x). \quad (2.119)$$

O operador de evolução global seria então o produto ordenado no tempo (*time-ordered*) sobre todos os passos dx , com $x \in [x_i, x_f]$,

$$\tilde{\mathcal{S}}(x_f, x_i) = \prod \tilde{\mathcal{S}}(x + dx, x) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{x_i}^{x_f} \tilde{\mathcal{H}}(x) dx \right), \quad (2.120)$$

o que daria,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \left| \tilde{\mathcal{S}}_{\beta\alpha}(L) \right|^2. \quad (2.121)$$

No entanto, esse procedimento não é fácil em geral, nem analiticamente (quando existe uma solução analítica) nem numericamente, pois a evolução numérica de funções (rapidamente) oscilantes pode ser instável após muitos períodos, com grandes erros acumulados após longas distâncias. Soluções aproximadas ou tratáveis, sempre que possível, são bem-vindas!

É possível derivar algumas soluções (aproximadas) na matéria usando um ou mais dos seguintes “truques”:

- ✓ densidade do meio aproximadamente constante,
- ✓ redução do problema à evolução 2ν ,
- ✓ expansão em parâmetros que sabemos serem pequenos,
- ✓ redução a uma base adequada,
- ✓ por meio de rotações adequadas para obter a diagonalização de submatrizes 2×2 ao invés da diagonalização da matriz 3×3 completa,
- ✓ uso de simetrias em parametrizações específicas,
- ✓ entre outros.

2.9.5 Aproximação da densidade em degraus

Para concluir este capítulo dedicado à oscilação de neutrinos, nesta subseção, dentro do contexto da oscilação na matéria, exploramos um caso de interesse particular: quando o perfil da densidade do meio pelo qual o neutrino se propaga pode, com uma aproximação muito boa, ser descrito ou modelado como uma série de degraus, em que cada degrau é caracterizado por uma densidade constante; ou densidade em formato de castelo (CW: *Castle Wall density profile*). Essa abordagem facilita a análise matemática e computacional, pois em cada região com densidade constante, as equações diferenciais que regem a propagação do neutrino podem ser resolvidas de forma “mais simples”. Além disso, a referência [9] sugere que o perfil de densidade da Terra (importante para a oscilação no setor solar e atmosférico) pode ser aproximado por essa técnica de série de degraus. Mais

ainda, em [10], essa aproximação do perfil de densidade é sugerida para o experimento DUNE [11].

Vamos supor que, no estado quântico inicial temos o neutrino eletrônico, $|\nu(x_0)\rangle = |\nu_e\rangle$, e que apenas duas gerações participam significativamente no fenômeno de oscilação (*e.g.*, ν_e e ν_μ). Dessa forma a função de onda é dada por

$$\Psi_e = \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix}. \quad (2.122)$$

Nesse caso, descrevemos a evolução do estado na matéria como o produto de evoluções sucessivas, usando operadores de evolução para cada meio de densidade constante, os quais, em princípio, devem ser simples de encontrar. Considerando isso, a amplitude da probabilidade num ponto x_n será dada por

$$\begin{aligned} \Psi_e(x_0) &\rightarrow \Psi_e(x_1) = \mathcal{S}_1(x_1 - x_0) \Psi_e(x_0), \\ &\rightarrow \Psi_e(x_2) = \mathcal{S}_2(x_2 - x_1) \Psi_e(x_1) = \mathcal{S}_2(x_2 - x_1) \mathcal{S}_1(x_1 - x_0) \Psi_e(x_0), \\ &\vdots \\ &\rightarrow \Psi_e(x_n) = \mathcal{S}_n(x_n - x_{n-1}) \cdots \mathcal{S}_1(x_1 - x_0) \Psi_e(x_0), \end{aligned} \quad (2.123)$$

i.e., inicialmente, $|\nu(x_0)\rangle = |\nu_e\rangle$ é produzido na posição x_0 e se propaga através do primeiro meio, caracterizado pela densidade constante $\rho_1(x) = \rho_1$, até atingir a posição x_1 , essa propagação é descrita pelo operador de evolução $\mathcal{S}_1(x_1 - x_0) = \mathcal{S}_1$. Em seguida, o neutrino continua a sua propagação pelo segundo meio (que tem densidade constante $\rho_2(x) = \rho_2$), até chegar à posição x_2 , usando o operador de evolução $\mathcal{S}_2(x_2 - x_1) = \mathcal{S}_2$. Esse processo é repetido sucessivamente através dos meios subsequentes⁴¹ até que o neutrino atravesse o n -ésimo meio, de densidade constante $\rho_n(x) = \rho_n$, com o operador de evolução $\mathcal{S}_n(x_n - x_{n-1}) = \mathcal{S}_n$. Assim, sabendo que na posição x_n , a amplitude da probabilidade é dada por $\Psi_e(x_n)$, a equação 2.123 pode ser expressa de forma equivalente como

$$\Psi_e(x_n) = \mathcal{S} \Psi_e(x_0) = \left(\prod_{k=1}^n \mathcal{S}_k \right) \Psi_e(0), \quad (2.124)$$

onde assumimos que $x_0 = 0$, por simplicidade.

A equação 2.124 pode ser significativamente simplificada usando a unitariedade

⁴¹Cada um deles caracterizado por uma densidade constante $\rho_k(x) = \rho_k$ e seu operador de evolução correspondente $\mathcal{S}_k(x_k - x_{k-1}) = \mathcal{S}_k$.

da matriz de mistura na matéria, $\tilde{U}^\dagger \tilde{U} = \mathbb{1}$,

$$\begin{aligned}
\Psi_e(x_n) &= (\mathcal{S}_n \mathcal{S}_{n-1} \cdots \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1) \Psi_e(0) \\
&= (\tilde{U} \underbrace{\tilde{\mathcal{S}}_n \tilde{U}^\dagger \tilde{U}}_{\mathbb{1}} \tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \underbrace{\tilde{U}^\dagger \cdots \tilde{U}}_{\mathbb{1} \cdots \mathbb{1}} \tilde{\mathcal{S}}_2 \underbrace{\tilde{U}^\dagger \tilde{U}}_{\mathbb{1}} \tilde{\mathcal{S}}_1 \tilde{U}^\dagger) \Psi_e(0) \\
&= (\tilde{U} \tilde{\mathcal{S}}_n \tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \cdots \tilde{\mathcal{S}}_2 \tilde{\mathcal{S}}_1 \tilde{U}^\dagger) \Psi_e(0) \\
&= (\tilde{U} \tilde{\mathcal{S}} \tilde{U}^\dagger) \Psi_e(0), \tag{2.125}
\end{aligned}$$

uma vez que sabemos que na base de propagação (cada um dos $\tilde{\mathcal{H}}_k$ sendo diagonal), o operador de evolução do k -ésimo meio é dado pela forma simples

$$\tilde{\mathcal{S}}_k(L_k) = \exp\left(i \frac{\Delta \tilde{m}_k^2}{4E} L_k\right) \mathbb{1}, \tag{2.126}$$

onde $L_k = \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e agora os autoestados efetivos de massa dependem do meio, por meio da relação $\Delta \tilde{m}_k^2 = \sqrt{(a_k - \Delta m^2 \cos 2\theta)^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\theta}$, com $a_k = 2\sqrt{2}G_F N_e^k E = 2\sqrt{2}G_F (N_A Y_e \rho_k) E$, onde G_F é a constante de acoplamento da interação fraca ou constante de Fermi, N_A é a constante de Avogadro, $Y_e = \frac{n_e}{n_p + n_n}$ é densidade relativa entre elétrons e núcleos e ρ_k é a densidade de matéria (considerada constante) do k -ésimo meio. Na equação 2.125 foi definido de maneira análoga à equação 2.124, o operador

$$\tilde{\mathcal{S}} = \prod_{k=1}^n \tilde{\mathcal{S}}_k(L_k) \quad \text{tq.} \quad \tilde{\Psi}_e(x_n) = \tilde{\mathcal{S}} \tilde{\Psi}_e(0). \tag{2.127}$$

Por outro lado, para oscilações entre dois sabores em matéria constante, a diagonalização do hamiltoniano de sabor pode ser escrita convenientemente usando as matrizes de Pauli da forma

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_k &= \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\Delta \tilde{m}_k^2}{4E} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta \tilde{m}_k^2}{4E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\tilde{\theta} \Delta \tilde{m}_k^2 & \sin 2\tilde{\theta} \Delta \tilde{m}_k^2 \\ \sin 2\tilde{\theta} \Delta \tilde{m}_k^2 & \cos 2\tilde{\theta} \Delta \tilde{m}_k^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4E} \left[\left(\sin 2\tilde{\theta} \Delta \tilde{m}_k^2 \right) \sigma_1 - \left(\cos 2\tilde{\theta} \Delta \tilde{m}_k^2 \right) \sigma_3 \right], \tag{2.128}
\end{aligned}$$

e identificando o vetor unitário $\vec{n} = (\sin 2\tilde{\theta}, 0, -\cos 2\tilde{\theta})$, finalmente o operador de evolução do k -ésimo meio tem uma expressão bastante intuitiva⁴²,

$$\tilde{\mathcal{S}}_k = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\Delta \tilde{m}_k^2 L_k}{4E}\right) - i (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{\Delta \tilde{m}_k^2 L_k}{4E}\right). \tag{2.129}$$

⁴²Essa expressão permite uma interpretação geométrica que pode ser explorada em detalhes na seção 9.6 da referência [12].

Assim, para casos particulares, só é necessário encontrar os k -ésimos operadores de evolução para cada meio (por meio da equação 2.129), resolver o produtório da equação 2.127 para encontrar o operador de evolução total, $\tilde{\mathcal{S}}$ e, por fim, com esse operador, encontrar a probabilidade de oscilação.

Um exemplo conhecido na literatura⁴³ é aquele em que o perfil de densidade tem o formato CW (formato de castelo propriamente dito), sendo a densidade dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & \text{para } x_0 \leq x < x_1, \\ \rho_2 & \text{para } x_1 \leq x < x_2, \\ \rho(x+X), & \end{cases} \quad (2.130)$$

com o período $X = x_2 - x_0 = X_1 + X_2$, onde $X_1 = x_1 - x_0$ e $X_2 = x_2 - x_1$.

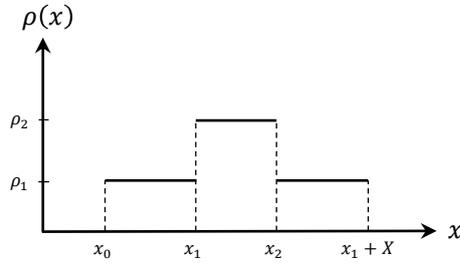


Figura 2.10: Perfil de densidade em formato castelo com um período e meio.

Consideremos, finalmente, um perfil de densidade no formato CW de um período e meio representado na figura 2.10. Esse tipo de perfil representa, *e.g.*, uma boa aproximação da densidade da Terra [9]. Nesse caso, a probabilidade de oscilação se torna [12]

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \left[2 \sin \tilde{\varphi}_1 \sin 2\tilde{\theta}_1 \left(\cos \tilde{\varphi}_1 \cos \tilde{\varphi}_2 - \sin \tilde{\varphi}_1 \sin \tilde{\varphi}_2 \cos 2 \left(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2 \right) \right) + \sin \tilde{\varphi}_2 \sin 2\tilde{\theta}_2 \right]^2, \quad (2.131)$$

onde $\tilde{\varphi}_k \equiv \frac{\Delta \tilde{m}_k^2 L_k}{4E}$ é a k -ésima fase.

⁴³Caso de particular interesse devido à chamada “ressonância paramérica”. Consulte a seção 9.5 da referência [12] para mais detalhes.

3 FORMULAÇÃO ANALÍTICA COM DENSIDADE CONSTANTE

Resolver a equação de evolução do neutrino (equação 2.58) por meio do método tradicional de diagonalização do hamiltoniano, para o caso de três neutrinos com efeito de matéria (equação 2.59), e obter a probabilidade de oscilação (*i.e.*, encontrar uma fórmula analítica para a probabilidade de oscilação de neutrinos) nem sempre é uma tarefa simples, ou o resultado obtido nem sempre tem uma forma funcional intuitiva (não reflete uma intuição física do fenômeno que está ocorrendo). Isso nos motiva a procurar maneiras alternativas de abordar o problema: os chamados **métodos analíticos para a formulação da oscilação de neutrinos** [7].

A solução para obter uma fórmula analítica tem basicamente duas linhas principais de pensamento, a saber: teoria de perturbação com um ou mais parâmetros que saibamos sejam pequenos¹ e rotações adequadas para ter diagonalizações de submatrizes 2×2 ao invés de diagonalizar a matriz completa 3×3 .

Na abordagem da teoria de perturbação, o caso de nosso interesse, separamos o hamiltoniano numa parte conhecida ou não perturbada (independente do parâmetro de expansão) e numa parte perturbativa ou termo de interação (função do parâmetro de expansão, que deve ser pequeno o suficiente para que possamos fazer uma expansão em torno dele) e, através de séries de Dyson, os termos da série são selecionados em ordem de expansão e são encontradas, de forma perturbativa, as probabilidades de oscilação.

De acordo com os ajustes globais (os *fits*) dos parâmetros de oscilação atuais [14], podemos inspecionar o hamiltoniano (equação 2.59) em busca de certas expansões que possam simplificar a probabilidade de oscilação. Os pioneiros na aproximação com a qual trabalharemos neste capítulo foram [133], que assumiram que os parâmetros $\sin \theta_{13}$ e $r_\Delta = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$ tinham a mesma hierarquia de parâmetros de expansão² (e escolheram como parâmetro de expansão $\epsilon \equiv r_\Delta \sin \theta_{13}$). Posteriormente, na referência [134], foram realizadas expansões em torno do mesmo parâmetro, chegando até a segunda ordem nele e incluindo, além disso, perturbações de interação não padrão (ou NSI: *non-standard interactions*).

No entanto, uma vez que o valor do ângulo θ_{13} foi encontrado e/ou testado [111, 113, 116], se mostrou que essas fórmulas analíticas limitavam consideravelmente a

¹No caso da oscilação de três neutrinos sabemos, *e.g.*, que o ângulo de mistura $\theta_{13} \ll 1$ rad é pequeno em comparação com os outros dois ângulos.

²É importante ressaltar aqui um fato que usaremos mais adiante: todos esses métodos analíticos têm suas validades limitadas pelas suposições iniciais feitas.

aplicabilidade do método³. Portanto, as aproximações feitas até então tiveram que ser reformuladas [8] e substituídas por $\sqrt{\epsilon} \equiv \sin \theta_{13}$ e $\epsilon \equiv r_{\Delta} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$, definição na qual o valor de $\sin \theta_{13}$ está dentro dos limites determinados pelo experimento Chooz [15]. Essa ideia será usada na seção a seguir para realizar a expansão perturbativa em ϵ e encontrar, como desejamos, fórmulas analíticas para a probabilidade de oscilação de neutrinos.

3.1 Teoria da perturbação $\sqrt{\epsilon}$

Para poder aplicar a teoria de perturbação, precisamos reescrever o hamiltoniano (equação 2.59) na forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, em que \mathcal{H}_0 é a parte conhecida (parte não perturbada e independente do parâmetro de expansão) e \mathcal{H}_1 é o termo de perturbação ou de interação (função do parâmetro de expansão). Lembramos que o parâmetro de expansão é $\sqrt{\epsilon}$, tal que

$$\epsilon \equiv r_{\Delta} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \approx 0,03, \quad s_{13} = \sin \theta_{13} \sim \sqrt{\epsilon}, \quad (3.1)$$

definição na qual o valor de $\sin \theta_{13}$ está dentro dos limites determinados pelo experimento Chooz [15]. Convém observar que essa é uma justificativa histórica, pois na data da publicação do artigo [8], apenas esse valor limite para o ângulo de mistura θ_{13} era conhecido. Atualmente, o valor de θ_{13} já foi medido pelos experimentos Daya Bay [113], Double Chooz [115] e RENO [111], e foi encontrado um valor não nulo que está de acordo com a nossa suposição $s_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$. A escolha do parâmetro também se fundamenta no fato de que a diferença de massa $\Delta m_{21}^2 \sim 10^{-5} \text{ eV}^2$ é pequena em relação a $\Delta m_{31}^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$ e o ângulo de mistura $\theta_{13} \ll 1 \text{ rad}$ é pequeno em comparação com os outros dois ângulos, de acordo com os parâmetros atuais de oscilação [14], que já foram mostrados anteriormente na seção 2.3 deste documento.

Primeiro, fazemos uma mudança de base para simplificar um pouco o hamiltoniano \mathcal{H} , de forma conveniente para o tratamento perturbativo. De fato, observemos que, se fizermos a rotação R_{23} (onde a matriz unitária R_{23} faz parte da matriz U_{PMNS} definida na equação 2.6), *i.e.*, $|\nu\rangle \rightarrow |\tilde{\nu}\rangle = R_{23}^{\dagger} |\nu\rangle$, o potencial de matéria (matriz $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x) = \text{diag}(a, 0, 0)$ definida na equação 2.60) não muda e além disso a expressão de \mathcal{H} é mais simples, pois eliminamos a dependência funcional do parâmetro θ_{23} . Na nova base, que chamaremos de “base rotada”, o hamiltoniano fica

$$\tilde{\mathcal{H}} = R_{23}^{\dagger} \mathcal{H} R_{23} = \frac{1}{2E} \left[V_{13} R_{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{31}^2 \end{pmatrix} R_{12}^{\dagger} V_{13}^{\dagger} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.2)$$

sendo, novamente, $a = a(x) = 2\sqrt{2}G_{\text{F}}N_e E$, onde G_{F} é a constante de Fermi da interação

³Logo, se tornou necessário fazer novas suposições.

fraca, N_e é a densidade de elétrons e E é a energia do neutrino. Ao fazer os produtos matriciais na equação 3.2 (e poder escrever $\tilde{\mathcal{H}}$ de forma explícita), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \Delta m_{21}^2 c_{13}^2 s_{12}^2 + \Delta m_{31}^2 s_{13}^2 + a & \Delta m_{21}^2 c_{12} c_{13} s_{12} & (\Delta m_{31}^2 c_{13} s_{13} - \Delta m_{21}^2 c_{13} s_{13} s_{12}^2) e^{-i\delta} \\ \Delta m_{21}^2 c_{12} c_{13} s_{12} & \Delta m_{21}^2 c_{12}^2 & -\Delta m_{21}^2 c_{12} s_{12} s_{13} e^{-i\delta} \\ (\Delta m_{31}^2 c_{13} s_{13} - \Delta m_{21}^2 c_{13} s_{13} s_{12}^2) e^{i\delta} & -\Delta m_{21}^2 c_{12} s_{12} s_{13} e^{i\delta} & \Delta m_{31}^2 c_{13}^2 + \Delta m_{21}^2 s_{12}^2 s_{13}^2 \end{pmatrix} \\ &= \Delta \begin{pmatrix} r_{\Delta} c_{13}^2 s_{12}^2 + s_{13}^2 + r_A & r_{\Delta} c_{12} c_{13} s_{12} & (c_{13} s_{13} - r_{\Delta} c_{13} s_{13} s_{12}^2) e^{-i\delta} \\ r_{\Delta} c_{12} c_{13} s_{12} & r_{\Delta} c_{12}^2 & -r_{\Delta} c_{12} s_{12} s_{13} e^{-i\delta} \\ (c_{13} s_{13} - r_{\Delta} c_{13} s_{13} s_{12}^2) e^{i\delta} & -r_{\Delta} c_{12} s_{12} s_{13} e^{i\delta} & c_{13}^2 + r_{\Delta} s_{12}^2 s_{13}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde foram definidos os parâmetros $\Delta = \frac{\Delta m_{31}^2}{2E}$, $r_A = \frac{a}{\Delta m_{31}^2}$ e $r_{\Delta} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$.

Porém, lembre-se de que o parâmetro de expansão é $\epsilon \equiv r_{\Delta}$, sob a suposição de que $s_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$. Logo, para aplicar o tratamento perturbativo, escrevemos o hamiltoniano (equações 3.2 e 3.3) conforme é exigido pelo método (parte conhecida mais perturbação). Mas, além disso, a perturbação neste caso é escrita em quatro partes correspondentes à ordem de grandeza do parâmetro de expansão $\sqrt{\epsilon}$, até segunda ordem⁴, conforme

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{H}}_1 = \tilde{\mathcal{H}}_0(\epsilon^0) + \underbrace{\tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{1/2}) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{3/2}) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^2)}_{\tilde{\mathcal{H}}_1[\epsilon]}, \quad (3.4)$$

onde usamos a notação $\tilde{\mathcal{H}}_1 = \tilde{\mathcal{H}}_1[\epsilon]$ para descrever a perturbação completa (*i.e.*, todas as suas quatro partes). Nesse caso, a parte não perturbativa fica

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(\epsilon^0) = \Delta \begin{pmatrix} r_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

e a perturbação, ordem por ordem, é

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{1/2}) = \Delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{13} e^{i\delta} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^1) = \Delta \begin{pmatrix} r_{\Delta} s_{12}^2 + s_{13}^2 & r_{\Delta} c_{12} s_{12} & 0 \\ r_{\Delta} c_{12} s_{12} & r_{\Delta} c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -s_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{3/2}) = -\Delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & (r_{\Delta} s_{12}^2 + \frac{1}{2} s_{13}^2) s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & r_{\Delta} c_{12} s_{12} s_{13} e^{-i\delta} \\ (r_{\Delta} s_{12}^2 + \frac{1}{2} s_{13}^2) s_{13} e^{i\delta} & r_{\Delta} c_{12} s_{12} s_{13} e^{i\delta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

⁴E como $s_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$ está relacionado ao parâmetro de expansão, dois aspectos devem ser levados em conta: $c_{13}^2 = \cos^2 \theta_{13} = 1 - \sin^2 \theta_{13} = 1 - s_{13}^2$ e $c_{13} = \cos \theta_{13} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{13}} = \sqrt{1 - s_{13}^2} = \sqrt{1 - \epsilon} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \rightarrow c_{13} = 1 - \frac{1}{2}s_{13}^2$.

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^2) = -\Delta r_\Delta \begin{pmatrix} s_{12}^2 s_{13}^2 & \frac{1}{2} c_{12} s_{12} s_{13}^2 & 0 \\ \frac{1}{2} c_{12} s_{12} s_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_{12}^2 s_{13}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Convém agora observar/lembrar que o hamiltoniano da equação 2.59, aquele que foi “rotado” (obtendo o hamiltoniano da equação 3.2) e depois expandido como uma função de $\sqrt{\epsilon}$ (equação 3.4) está escrito na base de sabor. Então, também convém mencionar que a evolução de um estado de sabor em função da posição é dada pelo operador de evolução, que é definido como

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(L) = \exp\left(-i \int_0^L \mathcal{H}(x) dx\right), \quad (3.10)$$

e que descreve uma possível mudança de sabor do neutrino após percorrer uma distância L , *i.e.*, $|\nu_\beta\rangle = \mathcal{S}_{\beta\alpha}(L) |\nu_\alpha\rangle$. Assim, teríamos a seguinte transformação para este operador:

$$\tilde{\mathcal{S}}(x) = R_{23}^\dagger \mathcal{S}(x) R_{23}, \quad (3.11)$$

que será bastante útil mais adiante.

Voltando ao hamiltoniano, já que foi separado por ordem de grandeza de $\sqrt{\epsilon}$, podemos desenvolver a teoria de perturbação, tomando $\tilde{\mathcal{H}}_0$ como a matriz não perturbada e $\tilde{\mathcal{H}}_1 = \tilde{\mathcal{H}}_1[\epsilon] = \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{1/2}) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{3/2}) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^2)$ como a perturbação. Nesse sentido, temos primeiro que definir o operador de evolução na descrição de interação (ou representação de Dirac) da QM, como

$$\Omega(x) = e^{i\tilde{\mathcal{H}}_0 x} \tilde{\mathcal{S}}(x), \quad (3.12)$$

de modo que ele obedeça à equação dinâmica

$$i \frac{d}{dx} \Omega(x) = \mathcal{H}_1(x) \Omega(x), \quad (3.13)$$

onde $\mathcal{H}_1(x) \equiv e^{i\tilde{\mathcal{H}}_0 x} \tilde{\mathcal{H}}_1 e^{-i\tilde{\mathcal{H}}_0 x}$ é a perturbação escrita na representação de interação. Portanto, dada a forma da equação 3.13, podemos resolvê-la calculando, iterativamente, $\Omega(x)$ através da série de Dyson,

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & \mathbb{1} + (-i) \int_0^x \mathcal{H}_1(x_1) dx_1 + (-i)^2 \int_0^x \int_0^{x_1} \mathcal{H}_1(x_1) \mathcal{H}_1(x_2) dx_2 dx_1 \\ & + (-i)^3 \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \mathcal{H}_1(x_1) \mathcal{H}_1(x_2) \mathcal{H}_1(x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \\ & + (-i)^4 \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \mathcal{H}_1(x_1) \mathcal{H}_1(x_2) \mathcal{H}_1(x_3) \mathcal{H}_1(x_4) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para mais detalhes sobre a teoria de perturbação (dependente do tempo), a representação de interação da QM e a série de Dyson, consulte o apêndice B desta dissertação.

Tendo encontrado $\Omega(x)$ por meio da equação 3.14, é fácil obter o operador de evolução (já escrito na representação de Schrödinger) no espaço de propagação⁵, invertendo a equação 3.12, *i.e.*, $\tilde{\mathcal{S}}(x) = e^{-i\tilde{\mathcal{H}}_0 x} \Omega(x)$, ou seja, o operador de evolução $\tilde{\mathcal{S}}(x)$ também tem solução perturbativa.

Por fim, para encontrar a probabilidade de oscilação, precisamos do operador de evolução na base original ou base de sabor, $\mathcal{S}(x)$. Então, após ter obtido o operador de evolução na representação de interação, $\Omega(x)$, podemos encontrar o operador de evolução na representação de Schrödinger, escrito na base “rotada”, $\tilde{\mathcal{S}}(x)$. A partir deste último, obtemos o operador de evolução na representação de Schrödinger, porém escrito na base original (a base de sabor), $\mathcal{S}(x)$, usando a transformação inversa da equação 3.11, $\mathcal{S}(x) = R_{23} \tilde{\mathcal{S}}(x) R_{23}^\dagger$. Portanto, a probabilidade de que um neutrino de sabor α , depois de percorrer uma distância L , seja detectado com um sabor β , dada por

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \equiv |\mathcal{S}_{\beta\alpha}(L)|^2, \quad (3.15)$$

também será dada de forma perturbativa. Em ordens de grandeza do parâmetro $\sqrt{\epsilon}$, até segunda ordem, escrevemos genericamente

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon^0) + \mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon^{1/2}) + \mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon^1) + \mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon^{3/2}) + \mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon^2). \quad (3.16)$$

Com fins pedagógicos, esquematizamos esse passo a passo (nossa “receita”) no cálculo da probabilidade de oscilação de neutrinos nessa abordagem da teoria de perturbação na figura 3.1.

Por outro lado, além de tudo o que foi mencionado acima, como um bônus adicional, vale a pena mencionar que, para encontrar a probabilidade de oscilação referente aos antineutrinos⁶, transformação CP, seguindo a abordagem aqui descrita, se torna necessário fazer somente a seguinte transformação nos parâmetros:

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; -\delta, -a) = \mathcal{P}(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta; \delta, a), \quad (3.17)$$

e, similarmente, a transformação T (que troca os estados inicial e final) é obtida através da transformação

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; -\delta, a) = \mathcal{P}(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; \delta, a). \quad (3.18)$$

⁵A “base rotada” base é às vezes chamada de “espaço de propagação” por diferentes autores como, *e.g.*, a referência [132].

⁶No caso dos antineutrinos, como sabemos, devemos fazer a mudança de $U_{\text{PMNS}} \rightarrow U_{\text{PMNS}}^*$ e $\mathcal{A} \rightarrow -\mathcal{A}$, o que corresponde a fazer $\delta \rightarrow -\delta$ e $a \rightarrow -a$, respectivamente.

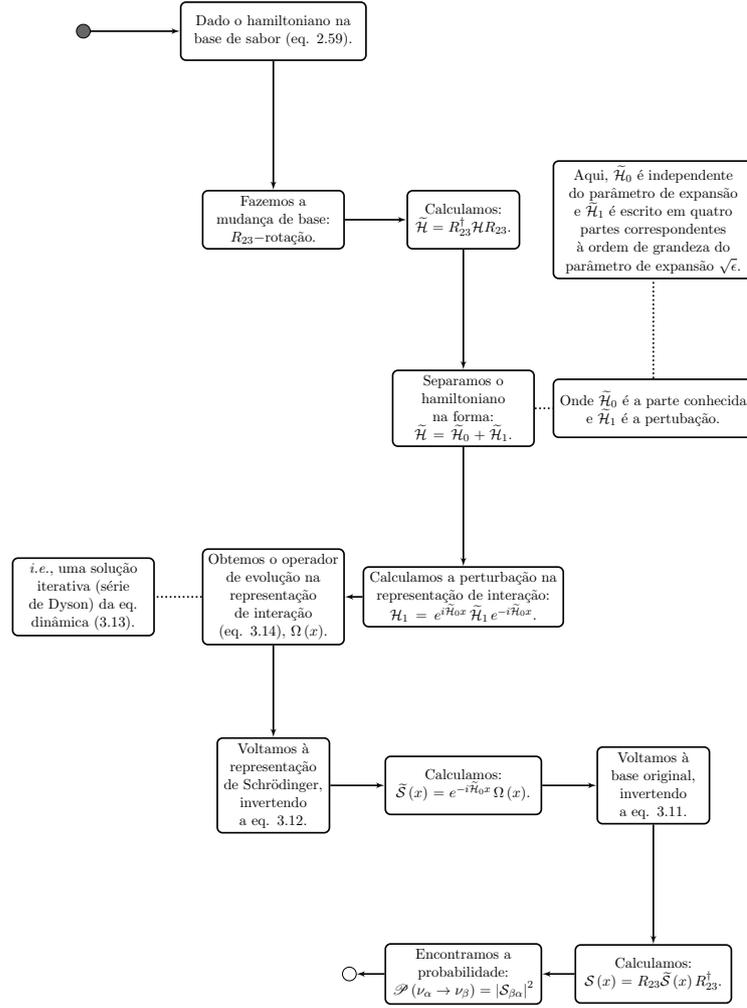


Figura 3.1: Passo a passo de nossa “receita” para o cálculo da probabilidade.

3.1.1 Componentes ou elementos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$

Nesta subseção, mostramos os elementos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}(x)$, calculados pela equação 3.12 até segunda ordem em ϵ . Convém aqui mencionar novamente que, para calcular os elementos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$ até a ordem ϵ^2 , como sabemos, é preciso primeiro calcular $\Omega(x)$ iterativamente por meio da equação 3.14. Porém, são necessárias apenas quatro iterações, pois a partir da quinta iteração aparecem só contribuições de ordem superior em ϵ ($\epsilon^{5/2}$, ϵ^3 , $\epsilon^{7/2}$, etc.).

Antes de apresentar os elementos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$, vale a pena ressaltar que, em princípio, a matriz $\tilde{\mathcal{S}}$ tem $3 \times 3 = 9$ entradas (como se vê na equação 3.33, mais adiante), cada uma expressada em ordens de grandeza do parâmetro $\sqrt{\epsilon}$ até segunda ordem⁷ (*i.e.*, 5 termos, incluindo o termo ϵ^0), o que daria um total de $9 \times 5 = 45$ elementos de matriz. Porém, essa quantidade é reduzida, inicialmente, a apenas $6 \times 5 = 30$ elementos de matriz, já que a transformação T (que troca os estados inicial e final) é obtida

⁷De modo genérico, se escreve: $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\epsilon^0) + \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\epsilon^{1/2}) + \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\epsilon^{3/2}) + \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\epsilon^2)$.

por meio de $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(-\delta) = \tilde{\mathcal{S}}_{\beta\alpha}(\delta)$. Além disso, também convém mencionar que desses 30 termos “independentes” (ou termos que não podem ser obtidos a partir de nenhum outro), há 16 que são zero, *e.g.*, $\tilde{\mathcal{S}}_{e\tau}(\epsilon^1) \equiv 0$, o que resulta então em apenas 14 elementos de matriz relevantes para os próximos cálculos (por serem independentes e não nulos). Esses elementos são apresentados a seguir⁸ e embora tenham sido obtidos pela replicação do reportado por Asano e Minakata, cabe notar que eles podem ser verificados na referência correspondente [8].

$$\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^0) = e^{-ir_A\Delta x}, \quad (3.19)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}(\epsilon^0) = 1, \quad (3.20)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau}(\epsilon^0) = e^{-i\Delta x}, \quad (3.21)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{e\tau}(\epsilon^{1/2}) = s_{13}e^{-i\delta} \left(\frac{1}{1-r_A} \right) (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A\Delta x}), \quad (3.22)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^1) = \left[s_{13}^2 \left(\frac{r_A}{1-r_A} \right) - s_{12}^2 r_\Delta \right] (i\Delta x) e^{-ir_A\Delta x} + \frac{s_{13}^2}{(1-r_A)^2} (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A\Delta x}), \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{e\mu}(\epsilon^1) = -c_{12}s_{12} \left(\frac{r_\Delta}{r_A} \right) (1 - e^{-ir_A\Delta x}), \quad (3.24)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}(\epsilon^1) = -c_{12}^2 r_\Delta (i\Delta x), \quad (3.25)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau}(\epsilon^1) = -s_{13}^2 \left(\frac{r_A}{1-r_A} \right) (i\Delta x) e^{-i\Delta x} - \frac{s_{13}^2}{(1-r_A)^2} (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A\Delta x}), \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{e\tau}(\epsilon^{3/2}) &= -s_{13}^3 e^{-i\delta} \left[\frac{(1+r_A)^2}{2(1-r_A)^3} \right] (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A\Delta x}) \\ &\quad - s_{13}^3 e^{-i\delta} \left[\frac{r_A}{(1-r_A)^2} \right] (i\Delta x) (e^{-i\Delta x} + e^{-ir_A\Delta x}) \\ &\quad + s_{12}^2 s_{13} e^{-i\delta} \left(\frac{r_\Delta}{1-r_A} \right) \left[\left(\frac{r_A}{1-r_A} \right) (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A\Delta x}) + (i\Delta x) e^{-ir_A\Delta x} \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau}(\epsilon^{3/2}) = -c_{12}s_{12}s_{13}e^{-i\delta} \left(\frac{r_\Delta}{1-r_A} \right) \left[r_A (1 - e^{-i\Delta x}) - \frac{1}{r_A} (1 - e^{-ir_A\Delta x}) \right], \quad (3.28)$$

⁸Ressaltando mais uma vez que todos os termos ausentes são nulos.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^2) &= \left[s_{12}^2 r_\Delta - s_{13}^2 \left(\frac{r_A}{1-r_A} \right) \right]^2 \cdot \frac{(i\Delta x)^2}{2} e^{-ir_A \Delta x} - s_{13}^4 \left[\frac{r_A}{(1-r_A)^3} \right] (i\Delta x) e^{-i\Delta x} \\
&\quad - \left\{ c_{12}^2 s_{12}^2 \left(\frac{r_\Delta^2}{r_A} \right) - s_{12}^2 s_{13}^2 r_\Delta \left[\frac{1+r_A^2}{(1-r_A)^2} \right] + s_{13}^4 \left[\frac{r_A(1+r_A)}{(1-r_A)^3} \right] \right\} (i\Delta x) e^{-ir_A \Delta x} \\
&\quad + \left\{ 2s_{12}^2 s_{13}^2 r_\Delta \left[\frac{r_A}{(1-r_A)^3} \right] - s_{13}^4 \left[\frac{r_A(2+r_A)}{(1-r_A)^4} \right] \right\} (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A \Delta x}) \quad (3.29) \\
&\quad + c_{12}^2 s_{12}^2 \left(\frac{r_\Delta}{r_A} \right)^2 (1 - e^{-ir_A \Delta x}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_{e\mu}(\epsilon^2) &= c_{12}^3 s_{12} \left(\frac{r_\Delta^2}{r_A} \right) (i\Delta x) - c_{12} s_{12} \left(\frac{r_\Delta}{r_A} \right) \left[s_{12}^2 r_\Delta - s_{13}^2 \left(\frac{r_A}{1-r_A} \right) \right] (i\Delta x) e^{-ir_A \Delta x} \\
&\quad - c_{12} s_{12} \left(\frac{r_\Delta}{r_A} \right) \left[\frac{s_{13}^2}{2} + (c_{12}^2 - s_{12}^2) \left(\frac{r_\Delta}{r_A} \right) \right] (1 - e^{-ir_A \Delta x}) \quad (3.30) \\
&\quad + c_{12} s_{12} s_{13}^2 \left[\frac{r_\Delta r_A}{(1-r_A)^2} \right] (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A \Delta x}),
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}(\epsilon^2) = c_{12}^4 r_\Delta^2 \cdot \frac{(i\Delta x)^2}{2} + c_{12}^2 s_{12}^2 \left(\frac{r_\Delta^2}{r_A} \right) (i\Delta x) - c_{12}^2 s_{12}^2 \left(\frac{r_\Delta}{r_A} \right)^2 (1 - e^{-ir_A \Delta x}), \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau}(\epsilon^2) &= s_{13}^4 \left(\frac{r_A}{1-r_A} \right)^2 \cdot \frac{(i\Delta x)^2}{2} \cdot e^{-i\Delta x} \\
&\quad + \left\{ s_{13}^4 \left[\frac{r_A(1+r_A)}{(1-r_A)^3} \right] - s_{12}^2 s_{13}^2 r_\Delta \left(\frac{r_A}{1-r_A} \right)^2 \right\} (i\Delta x) e^{-i\Delta x} \\
&\quad + \left\{ s_{13}^4 \left[\frac{r_A}{(1-r_A)^3} \right] - s_{12}^2 s_{13}^2 r_\Delta \left(\frac{1}{1-r_A} \right)^2 \right\} (i\Delta x) e^{-ir_A \Delta x} \quad (3.32) \\
&\quad + \left\{ s_{13}^4 \left[\frac{r_A(2+r_A)}{(1-r_A)^4} \right] - 2s_{12}^2 s_{13}^2 r_\Delta \left[\frac{r_A}{(1-r_A)^3} \right] \right\} (e^{-i\Delta x} - e^{-ir_A \Delta x}).
\end{aligned}$$

3.1.2 Probabilidades de oscilação no canal $\nu_e \rightarrow \nu_x$

Como exemplo, mostramos a probabilidade de um neutrino eletrônico ser detectado como neutrino muônico⁹ após percorrer uma distância L , *i.e.*, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = |\mathcal{S}_{\mu e}(L)|^2$, onde

⁹Este resultado é suficiente, como veremos, para encontrar as probabilidades de oscilação em todo o setor relacionado a ν_e .

a matriz \mathcal{S} , conforme a equação 3.11, é dada por $\mathcal{S} = R_{23}\tilde{\mathcal{S}}R_{23}^\dagger$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{ee} & \mathcal{S}_{e\mu} & \mathcal{S}_{e\tau} \\ \boxed{\mathcal{S}_{\mu e}} & \mathcal{S}_{\mu\mu} & \mathcal{S}_{\mu\tau} \\ \mathcal{S}_{\tau e} & \mathcal{S}_{\tau\mu} & \mathcal{S}_{\tau\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{S}}_{ee} & \tilde{\mathcal{S}}_{e\mu} & \tilde{\mathcal{S}}_{e\tau} \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e} & \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu} & \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau} \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e} & \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\mu} & \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{S}}_{ee} & c_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{e\mu} + s_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{e\tau} & -s_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{e\mu} + c_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{e\tau} \\ c_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e} + s_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e} & c_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu} + s_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau} + c_{23}s_{23}(\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau} + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\mu}) & c_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau} - s_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\mu} + c_{23}s_{23}(\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau} - \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}) \\ -s_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e} + c_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e} & c_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\mu} - s_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau} + c_{23}s_{23}(\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau} - \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}) & c_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau} + s_{23}^2\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu} - c_{23}s_{23}(\tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau} + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\mu}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Portanto, ao olhar o elemento de matriz correspondente $\mathcal{S}_{\mu e}$, na equação 3.33, a probabilidade procurada é

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = |\mathcal{S}_{\mu e}|^2 = \left| c_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e} + s_{23}\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e} \right|^2. \quad (3.34)$$

Mas, como já foi mencionado, o operador de evolução rotado escrito na representação de interação tem solução perturbativa, de modo que o operador de evolução na base rotada (já na representação de Schrödinger) e, conseqüentemente, o operador de evolução na base original, também têm soluções perturbativas. Então, a probabilidade (equação 3.34) será dada de forma perturbativa, de acordo com forma genérica mostrada na equação 3.16.

Aliás, para o cálculo da expressão perturbativa da probabilidade no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, conforme indicado nas equações 3.33 e 3.34, embora tenhamos mostrado todos os elementos de matriz não nulos (ou independentes) da matriz $\tilde{\mathcal{S}}$ até segunda ordem em ϵ , são necessários apenas os elementos não-nulos correspondentes a $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}$, calculados até segunda ordem em ϵ , mostrados nas equações 3.22, 3.24, 3.27 e 3.30, trocando, onde for necessário, $\delta \rightarrow -\delta$ (e, de fato, somente os elementos não nulos correspondentes a $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}$ são os únicos necessários e suficientes para calcular as probabilidades de oscilação em todo o setor relacionado a ν_e). Mais ainda, considerando que a equação 3.34 pode ser reescrita como¹⁰

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = c_{23}^2 \left| \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e} \right|^2 + 2c_{23}s_{23} \Re \left(\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e} \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^* \right) + s_{23}^2 \left| \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e} \right|^2, \quad (3.35)$$

e que, além disso, alguns dos elementos $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^i)$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^i)$ são zero para algumas ordens ϵ^i , e que o cálculo da probabilidade vai até segunda ordem em ϵ , ao fazer os produtos correspondentes da equação 3.35 e ao selecionar ordem por ordem, conseguimos obter a probabilidade em ordens de grandeza do parâmetro $\sqrt{\epsilon}$, a saber:

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = s_{23}^2 \left| \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2}) \right|^2, \quad (3.36)$$

¹⁰Observe que a equação 3.35 é uma particularização da equação 2.98 para $\alpha = e$, em virtude de ser usada a mesma rotação ou mudança de base original.

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) = 2c_{23}s_{23}\Re \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^*(\epsilon^{1/2}) \right], \quad (3.37)$$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2) = c_{23}^2 \left| \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1) \right|^2 + 2s_{23}^2 \Re \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^*(\epsilon^{3/2}) \right], \quad (3.38)$$

reduzindo assim os elementos necessários para somente $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1)$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2})$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{3/2})$ a partir das equações 3.22, 3.24 e 3.27 (o termo $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^2)$ na equação 3.30 se torna desnecessário). Cabe ressaltar que os termos ausentes, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^0) = \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{1/2}) = 0$, são zero.

Lembrando que a probabilidade até segunda ordem é a soma mostrada na equação 3.16, escrevemos então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= s_{23}^2 \left| \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2}) \right|^2 + 2c_{23}s_{23}\Re \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^*(\epsilon^{1/2}) \right] \\ &+ c_{23}^2 \left| \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1) \right|^2 + 2s_{23}^2 \Re \left[\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^*(\epsilon^{3/2}) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

equivalente à equação reportada por Asano e Minakata (equação 16 da ref. [8]).

Quanto às expressões perturbativas da probabilidade de oscilação até a ordem ϵ^2 , ao substituir os elementos de matriz das equações 3.22, 3.24 e 3.27 nas expressões 3.36, 3.37 e 3.38, respectivamente, temos

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 4s_{13}^2 s_{23}^2 \frac{1}{(1-r_A)^2} \sin^2 \left[\frac{(1-r_A)\Delta L}{2} \right], \quad (3.40)$$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) = \frac{8J_r r_\Delta}{r_A(1-r_A)} \cos \left(\delta - \frac{\Delta L}{2} \right) \sin \left(\frac{r_A \Delta L}{2} \right) \sin \left[\frac{(1-r_A)\Delta L}{2} \right], \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2) &= 4c_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left[\frac{1}{r_A^2} \sin^2 \left(\frac{r_A \Delta L}{2} \right) \right] \\ &- \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_A)^4} \left\{ [s_{13}^2 (1+r_A)^2 - 2s_{12}^2 r_A (1-r_A) r_\Delta] \sin^2 \left[\frac{(1-r_A)\Delta L}{2} \right] \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (1-r_A) [s_{12}^2 (1-r_A) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_A] (\Delta L) \sin [(1-r_A)\Delta L] \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde onde $J_r = c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}s_{13}$ é o coeficiente (ou invariante) de Jarlskog [101] reduzido.

Conhecendo então as expressões perturbativas para a probabilidade de oscilação no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, mostradas nas equações 3.40, 3.41 e 3.42, a primeira observação que se destaca é que, na expressão para a probabilidade na ordem mais baixa não nula, *i.e.*, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, recuperamos uma forma funcional da probabilidade semelhante ao caso da propagação no vácuo para duas gerações (equação 2.35). Adicionalmente, de forma efetiva, podemos identificar grandezas físicas relevantes, como a frequência e a amplitude de oscilação, e sua dependência dos parâmetros de oscilação e do potencial de matéria.

De fato, a “amplitude”

$$\mathcal{A} = \frac{4s_{13}^2 s_{23}^2}{(1 - r_A)^2}, \quad (3.43)$$

depende dos ângulos de mistura (parâmetros da matriz PMNS, tal como tínhamos antes no vácuo) e do efeito da matéria em $(1 - r_A)^2$, e a “frequência” é quase idêntica à que tínhamos antes, só que agora pré-multiplicada por $(1 - r_A)$, que dá conta do efeito da matéria na oscilação, uma vez que

$$\frac{\Delta L}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \right) L = \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}. \quad (3.44)$$

Outro aspecto a se destacar dessa abordagem é a sua capacidade de fornecer informações sobre o quão violada é a simetria CP na oscilação de neutrinos. Isso se reflete na expressão para a probabilidade, na ordem $\epsilon^{3/2}$, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2})$ da equação 3.41, onde há uma dependência explícita da fase de Dirac, $\delta = \delta_{\text{CP}}$ ($0 \leq \delta_{\text{CP}} \leq 2\pi$). Aqui, a presença do termo $\cos(\delta - \frac{\Delta L}{2})$ na probabilidade de oscilação dá conta de como a violação da simetria CP influi nesse fenômeno.

Assim, mostramos que a abordagem da teoria de perturbação é uma ótima alternativa para obter probabilidades de oscilação de neutrinos quando a solução exata não é tão fácil de se encontrar ou não nos fornece uma intuição física clara do fenômeno em questão. Esse novo enfoque se torna uma ferramenta (robusta dentro dos limites de validade, os quais serão explorados mais adiante) que não apenas descreve intuitivamente a dependência dos parâmetros fundamentais, como ângulos de mistura, efeito da matéria e violação da simetria de CP, mas também fornece insights sobre a física subjacente às oscilações de neutrinos.

Em acréscimo ao anterior, percebemos que, a partir da equação 3.33, as expressões semelhantes $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^i)$ para o canal $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ podem ser obtidas a partir das equações 3.40, 3.41 e 3.42, por meio da transformação $c_{23} \rightarrow -s_{23}$ e $s_{23} \rightarrow c_{23}$ (e, implicitamente, $J_r \rightarrow -J_r$). Também, se já são conhecidas cada uma das $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^i)$ e das $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^i)$, as expressões para $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^i)$ podem ser obtidas usando a relação de unitariedade perturbativa,

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^i) + \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^i) + \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^i) = \delta_{i0}, \quad (3.45)$$

para $i = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$, sendo que δ_{ij} é a função delta de Kronecker. Logo, é desnecessário apresentar suas fórmulas explícitas nesta seção. Porém, convém mencionar que, de fato, mesmo que não apresentemos como resultado deste capítulo, nós calculamos todas as $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_x; \epsilon^i)$, para cada $x = \{e, \mu, \tau\}$, para cada ordem ϵ^i , e verificamos explicitamente a relação de unitariedade perturbativa (consulte o apêndice C desta dissertação). Além disso, se destaca que, em conjunto com as relações 3.17 e 3.18, o exposto acima nos

permite encontrar e/ou derivar as expressões para as probabilidades de oscilação em todo o setor relacionadas a ν_e .

Realçamos também que, especialmente, na ordem $\epsilon^{3/2}$, termo da probabilidade que não conserva CP, temos

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) + \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^{3/2}) = 0, \quad (3.46)$$

o que implica que $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^{3/2}) = 0$, como se esperava porque não deve haver termos dependentes de δ na probabilidade de sobrevivência $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ [135], uma vez que, pelo fato de que a simetria CPT é conservada na oscilação (consulte a seção 2.6, para mais detalhes), a violação da simetria CP é equivalente à violação da simetria T, simetria que é conservada pela probabilidade de sobrevivência.

Um fato sutil, que merece ser ressaltado para evitar passar despercebido, é que, dada a forma funcional do operador de evolução na representação de interação, $\Omega(x)$ (equação 3.14), obtido como uma solução iterativa¹¹ da equação 3.13, a teoria de perturbação, que é construída sob a premissa de que as correções de ordens superiores são “pequenas” em comparação com os termos de ordem inferior (para mais detalhes, consulte o apêndice B), sugere que os resultados, e em particular a probabilidade de oscilação, podem não descrever com uma precisão boa o fenômeno em questão para quando L for muito grande. Então, essa limitação poderia ser atribuída ao fato de que, à medida que L aumenta significativamente, os termos de ordem superior na expansão perturbativa podem se tornar cada vez mais relevantes, levando à perda de precisão preditiva.

Adicionalmente, a dependência linear em L na expressão para a probabilidade na segunda ordem de expansão (terceiro termo da equação 3.42) pode contribuir para a possível discrepância entre o resultado calculado numericamente e o resultado analítico à medida que L cresce, pois se $\Delta L = \frac{\Delta m_{31}^2 L}{2E}$ for significativamente grande (*e.g.*, $\Delta L > 1$), esse termo linear na equação 3.42 pode se tornar importante e causar problemas no cálculo analítico da probabilidade. Além disso, convém mencionar que, a distâncias consideráveis, podem surgir efeitos ou ressonâncias que não são contemplados pela teoria de perturbação. Então, teríamos também que, perto da ressonância, as correções de ordem superior podem se tornar muito significativas e quebrar a validade da teoria de perturbação.

Toda a argumentação anterior sugere limites de validade para a aplicabilidade do método, que são impostos pelas suposições iniciais. De fato, em 2011, Asano e Minakata [8] fazem uma análise da distância, comparando-a com o resultado calculado numericamente (que eles denotam como “exato”), como pode ser observado na figura 3.2. Na figura 3.2, é mostrado que, até segunda ordem em ϵ , o resultado é muito bom para distâncias de até 4000 km.

¹¹Como já mencionamos, no cálculo de $\Omega(x)$, são considerados somente os quatro primeiros termos não triviais da soma infinita ou série de Dyson, produto da realização de apenas quatro iterações.

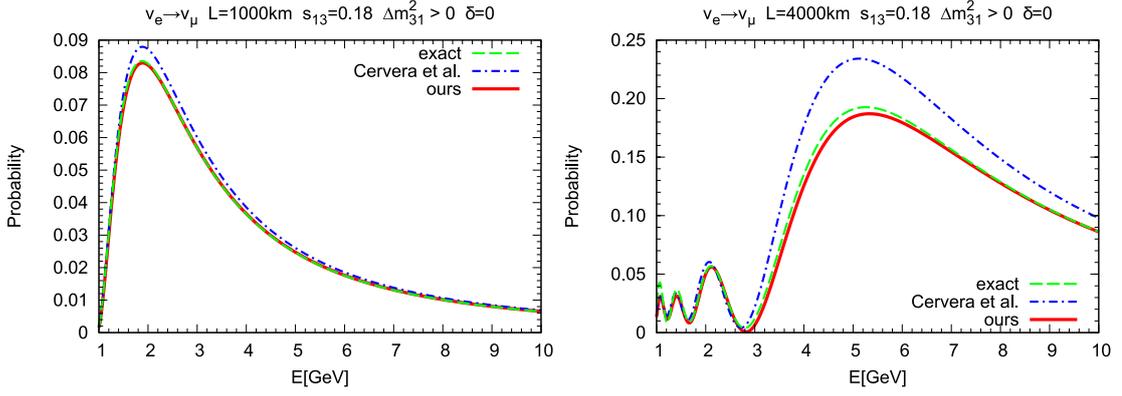


Figura 3.2: Comparação entre a probabilidade de oscilação “exata”, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, calculada numericamente como uma função da energia (linha tracejada verde); a calculada pela fórmula de Cervera et al., 2000 [133] (linha tracejada azul); e a calculada com as fórmulas obtidas por Asano e Minakata [8], mostradas anteriormente (linha sólida vermelha). Os resultados foram obtidos considerando uma densidade de $2,8 \text{ g/cm}^3$ para 1000 km e $3,6 \text{ g/cm}^3$ para 4000 km. Figura No. 3 do artigo [8].

Na figura 3.2, os autores também comparam seus resultados com um resultado anterior [133] (e que é rotulado na figura como: Cervera et al.), no qual, como já mencionamos, também foi aplicada a teoria de perturbação para o cálculo da probabilidade, mas foi escolhido como parâmetro de expansão $\epsilon \equiv r_\Delta s_{13}$, supondo assim que os parâmetros $s_{13} = \sin \theta_{13}$ e $r_\Delta = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$ tivessem a mesma hierarquia e limitando a validade do método quando o valor de θ_{13} foi encontrado [111, 113, 116]. Nota-se que a diferença entre a fórmula exata calculada numericamente e a fórmula de [133] é muito visível (ou modesta) em $L = 4000 \text{ km}$ (ou $L = 1000 \text{ km}$), *i.e.*, é notável que as correções incorporadas na fórmula de Asano e Minakata corrigem a fórmula de [133] e são uma aproximação melhor.

Portanto, é interessante ressaltar que a fórmula de Asano e Minakata, embora perturbativa, pode incorporar o efeito de “melhoria” (em comparação com o resultado anterior [133]) para baselines de até vários milhares de km. Porém, para baselines da ordem de $L \sim 10000 \text{ km}$, os autores reportam que o efeito de ressonância se torna mais significativo e a diferença entre a fórmula exata e a deles (bem como a de [133]) vira absurdamente grande. Logicamente, isso fica fora da região de validade do tratamento perturbativo e, portanto, fora do escopo desse método para calcular a probabilidade de oscilação.

Por último, tendo em vista o fato de que o resultado descreve com uma precisão de, no mínimo, 95% (até pelo menos os 4000 km) o fenômeno em questão¹², como um primeiro valor agregado ao trabalho de Asano e Minakata [8], queremos comparar os resultados que temos até segunda ordem em ϵ , com expansões até ordens inferiores, no caso do canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, *i.e.*, até primeira ordem e até ordem $\epsilon^{3/2}$ (o que chamamos de “comparação progressiva”), visando analisar o quão eficiente continuam sendo as fórmu-

¹²Logo, a formulação analítica de Asano e Minakata, até segunda ordem, pode ser tomada, *a priori*, como padrão para verificar a validade e a confiabilidade de outras formulações analíticas, até distâncias da ordem de $L = 4000 \text{ km}$, sem a necessidade de recorrer ao resultado numérico.

las perturbativas da oscilação ao selecionar menos termos da expressão perturbativa da probabilidade. De fato, analisamos os mesmos dois casos apresentados na figura 3.2 e os resultados dessa comparação progressiva estão ilustrados na figura 3.3, que é construída com os resultados obtidos nas equações 3.40, 3.41 e 3.42, com os mesmos parâmetros de oscilação que foram escolhidos por Asano e Minakata¹³ e, além disso, escrevendo L em km, Δm^2 em eV^2 e E em GeV (unidades mais apropriadas ao comprimento e às energias encontradas na prática), ou seja,

$$r_A = \frac{a}{\Delta m^2} = \frac{2\sqrt{2}G_F N_e E}{\Delta m^2} = (1,527 \times 10^{-4}) \frac{N_e [\text{mol}/\text{cm}^3] E [\text{GeV}]}{\Delta m^2 [\text{eV}^2]} \quad (3.47)$$

$$\Delta L = \left(\frac{\Delta m^2}{2E} \right) L = (2,534) \frac{\Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{km}]}{E [\text{GeV}]}$$

devido à conversão de unidades e à convenção (unidades naturais) introduzida no capítulo anterior, onde a densidade de elétrons é dada por $N_e = Y_e \rho$, em que $Y_e = \frac{n_e}{n_p + n_n}$ é a densidade relativa entre elétrons e núcleos (que depende do material e, em geral, é considerada aqui na nossa pesquisa como um valor constante de $Y_e = 0,56$) e $\rho [\text{g}/\text{cm}^3]$ é a densidade da matéria (que também tem sido considerada constante ao longo deste capítulo) e ressalta-se que as unidades $N_e [\text{mol}/\text{cm}^3]$ consideradas estão certas, uma vez que, na conversão de unidades, o valor da constante de Avogadro, $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, foi levado em consideração.

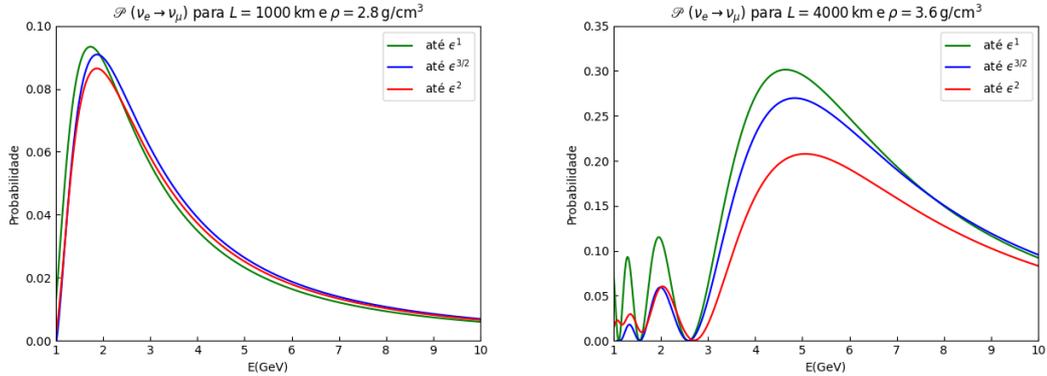


Figura 3.3: Comparação da probabilidade de oscilação $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, em função da energia, calculada pela fórmula perturbativa de Asano e Minakata até primeira ordem (linha sólida verde), até ordem $\epsilon^{3/2}$ (curva azul) e até segunda ordem em ϵ (curva vermelha), para um neutrino que se propaga por 1000 km (num meio com densidade de $2,8 \text{ g}/\text{cm}^3$) e 4000 km (num meio com densidade de $3,6 \text{ g}/\text{cm}^3$), respectivamente. Esta é plotada com os mesmos parâmetros de [8]: $\Delta m_{31}^2 = 2,4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$, $\Delta m_{21}^2 = 7,7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, $\sin^2 \theta_{23} = 0,5$, $\sin^2 \theta_{12} = 0,305$, $\sin^2 \theta_{13} = 0,0324$ e $\delta = 0$.

Na figura 3.3, para distâncias da ordem dos 4000 km (gráfico da direita), observamos grandes discrepâncias, por volta de 20 e 50%, entre a probabilidade calculada analiticamente até primeira ordem e a probabilidade até ordem $\epsilon^{3/2}$, respectivamente, em

¹³Os quais estão em concordância com os ajustes globais (os *fits*) atuais, calculados na referência [14].

comparação com a probabilidade calculada até segunda ordem¹⁴. Este resultado confirma a tendência previamente observada na figura 3.2, *i.e.*, quanto mais L cresce, menos eficientes as fórmulas se tornam, e destaca a importância da incorporação das correções de ordens superiores, especialmente para distâncias significativas.

Porém, para distâncias da ordem dos 1000 km (gráfico à esquerda da figura 3.3), observamos concordâncias de pelo menos 90% no cálculo da probabilidade para energias acima de 1 GeV ao considerar somente a expressão perturbativa em primeira ordem e compará-la com a probabilidade calculada até segunda ordem. Além disso, especialmente para energias superiores a 3 GeV, garantimos uma discrepância de $\sim 1\%$ se fizermos a mesma comparação entre a probabilidade calculada em primeira ordem e a expressão “completa” até segunda ordem. Por outro lado, ao analisar a contribuição do termo de ordem $\epsilon^{3/2}$ na probabilidade, observamos que, embora essa inclusão “aperfeiçoe” o cálculo e melhore a convergência para a expressão “completa” até segunda ordem e, consequentemente, para o resultado exato calculado numericamente (conforme já foi observado no gráfico à esquerda da figura 3.2), a expressão até primeira ordem já é notavelmente boa. Nesse sentido, a incorporação desse termo adicional não leva a melhorias significativas na aproximação, o que destaca a robustez da formulação até primeira ordem para distâncias da ordem de 1000 km.

Avaliar quão eficiente é a fórmula da probabilidade em primeira ordem é relevante para os objetivos de nossa pesquisa¹⁵. De fato, para os experimentos LBL¹⁶, especialmente no caso específico de interesse de DUNE [11], poderíamos obter informações muito boas (podendo alcançar concordâncias acima do 90% entre a aproximação e o resultado exato) sobre a fase de oscilação e os ângulos de mistura ao considerar só a expressão da probabilidade até primeira ordem, graças à sua forma funcional mostrada na equação 3.40. Uma vez que uma expressão muito semelhante é obtida para o caso da propagação de neutrinos no vácuo (equação 2.35), podemos (conforme mostramos nas equações 3.43 e 3.44) identificar a amplitude e a frequência de oscilação como uma função dos parâmetros de oscilação e do efeito de matéria.

3.2 Renormalização atmosférica de Δm^2

Nosso trabalho original visa estender o formalismo de [8] para, *e.g.*, incluir outros os parâmetros de expansão. Assim, depois de reproduzir e entender o trabalho reportado

¹⁴Neste caso, a incorporação da correção feita pelo termo da ordem $\epsilon^{3/2}$ na probabilidade somente em primeira ordem melhora significativamente a fórmula. Da mesma forma, a inclusão do termo de segunda ordem à probabilidade melhora ainda mais o resultado.

¹⁵Em particular, aquele de obter probabilidades que, em comparação com as obtidas pelo método tradicional de diagonalização do hamiltoniano, sejam mais fáceis de calcular e forneçam um resultado correto que, ao mesmo tempo, tenha uma forma funcional clara, simples, prática e fisicamente intuitiva.

¹⁶Lembrar que o LBL (*Long BaseLine*) envolve experimentos onde a faixa de L/E coberta por eles e sua sensibilidade a Δm^2 são $100 \text{ km/GeV} \lesssim \frac{L}{E} \lesssim 1000 \text{ km/GeV} \rightarrow \frac{1}{100} \text{ eV}^2 \gtrsim \Delta m^2 \gtrsim \frac{1}{1000} \text{ eV}^2$ [12].

por [8], exploramos maneiras alternativas de lidar com o problema, seguindo a mesma abordagem da teoria de perturbação $\sqrt{\epsilon}$.

A partir dos parâmetros atuais da oscilação de neutrinos [14], podemos inspecionar novamente o hamiltoniano (equação 2.59) em busca de certas expansões que possam simplificar a probabilidade de oscilação e aplicar a teoria de perturbação com um ou mais parâmetros que saibamos sejam pequenos. Desta vez, introduzimos o parâmetro de expansão $\epsilon \equiv \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{ee}^2}$, onde $\Delta m_{ee}^2 \equiv \Delta m_{31}^2 - s_{12}^2 \Delta m_{21}^2$ é a **renormalização atmosférica de Δm^2** , definida na referência [16]. Então, com este novo parâmetro de expansão, também redefinimos

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow \Delta_{\text{ren}} = \frac{\Delta m_{ee}^2}{2E}, \\ r_A \rightarrow r_{A_{\text{ren}}} = \frac{a}{\Delta m_{ee}^2}, \\ r_\Delta \rightarrow r_{\Delta_{\text{ren}}} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{ee}^2}, \end{cases} \quad (3.48)$$

o que equivale a fazer a “troca” $\Delta m_{31}^2 \rightarrow \Delta m_{ee}^2$. Aliás, com base na referência [14], a diferença absoluta entre Δm_{ee}^2 e Δm_{31}^2 é da ordem de $\sim 10^{-5} \text{ eV}^2$ (tanto no esquema de ordenamento de massa normal quanto no invertido) e, ainda dentro dos limites determinados pelo experimento Chooz [15] para $\sin \theta_{13}$, se supõe novamente que $s_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$. Agora, neste ponto é importante enfatizar que $r_{A_{\text{ren}}}$, $r_{\Delta_{\text{ren}}}$ e Δ_{ren} , definidos como na equação 3.48¹⁷, embora sejam da mesma ordem de grandeza, são numericamente diferentes de seus correspondentes “homólogos” (r_A , r_Δ e Δ , respectivamente) definidos anteriormente na abordagem de Asano e Minakata.

O procedimento algébrico, nesta nova abordagem, é bastante semelhante ao usado anteriormente. Para aplicar a teoria de perturbação, precisamos escrever o hamiltoniano (da equação 2.59) na forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, onde \mathcal{H}_0 é a parte conhecida e \mathcal{H}_1 é a parte perturbativa ou o termo de interação, função do parâmetro $\sqrt{\epsilon}$ em que $s_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$ e $\epsilon \equiv r_{\Delta_{\text{ren}}} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{ee}^2} \approx 0,03$, como na equação 3.1. A evolução de um estado de sabor à medida que o neutrino se propaga pelo espaço é dada pelo operador de evolução definido na equação 3.10, que descreve uma possível mudança de sabor do neutrino quando ele tiver percorrido a distância L entre a fonte e o detector, *i.e.*, $|\nu_\beta\rangle = \mathcal{S}_{\beta\alpha}(L) |\nu_\alpha\rangle$. Mas, antes de calcular o operador de evolução e resolver o problema na representação de interação, conforme sugerido por nossa “receita” (figura 3.1), fazemos a conveniente mudança de base para o tratamento perturbativo, aquela que não altera o potencial de matéria e elimina a dependência do parâmetro θ_{23} , isto é, fazemos a rotação R_{23} e temos, novamente, as relações de transformação das equações 3.2 e 3.11.

Uma primeira simplificação que observamos nesta nova abordagem é que, ao escrever o hamiltoniano (na nova base, base rotada) como uma função dos parâmetros definidos como na equação 3.48, obtemos uma expressão mais “compacta” (em comparação

¹⁷E que são, em essência, simplesmente uma “redefinição” dos parâmetros usados por Asano e Minakata.

com sua expressão equivalente na equação 3.3), o que nos levou a supor que obteríamos expressões um pouco mais simples (tanto dos elementos de matriz do operador de evolução quanto das probabilidades) daqui em diante. De fato, ao fazer os produtos matriciais da equação 3.2 e escrever a matriz resultante como uma função dos parâmetros da equação 3.48, temos

$$\tilde{\mathcal{H}} = \Delta_{\text{ren}} \begin{pmatrix} r_{A_{\text{ren}}} + s_{13}^2 + r_{\Delta_{\text{ren}}} s_{12}^2 & r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} - \frac{1}{2} r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} s_{13}^2 & (s_{13} - \frac{1}{2} s_{13}^3) e^{-i\delta} \\ r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} - \frac{1}{2} r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} s_{13}^2 & r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12}^2 & -r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} s_{13} e^{-i\delta} \\ (s_{13} - \frac{1}{2} s_{13}^3) e^{i\delta} & -r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} s_{13} e^{i\delta} & 1 - s_{13}^2 + r_{\Delta_{\text{ren}}} s_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

onde Δ_{ren} , $r_{A_{\text{ren}}}$ e $r_{\Delta_{\text{ren}}}$ são dados na equação 3.48. Também vale a pena ressaltar que a identidade pitagórica $c_{13}^2 = 1 - s_{13}^2$ já foi levada em consideração juntamente com a aproximação na segunda ordem $c_{13} \cong 1 - \frac{1}{2} s_{13}^2$.

Relembrando que $r_{\Delta_{\text{ren}}} \sim \mathcal{O}(\epsilon^1)$ e que $s_{13} \sim \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$, podemos, para aplicar o tratamento perturbativo, escrever o hamiltoniano da equação 3.49 em ordens do parâmetro de expansão $\sqrt{\epsilon}$ na forma que foi mencionada na equação 3.4. Portanto, temos a parte não perturbada, que é

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(\epsilon^0) = \Delta_{\text{ren}} \begin{pmatrix} r_{A_{\text{ren}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

e a perturbação, $\tilde{\mathcal{H}}_1 = \tilde{\mathcal{H}}_1[\epsilon]$, separados por ordens de grandeza de $\sqrt{\epsilon}$ conforme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{1/2}) &= \Delta_{\text{ren}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{13} e^{i\delta} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^1) &= \Delta_{\text{ren}} \begin{pmatrix} r_{\Delta_{\text{ren}}} s_{12}^2 + s_{13}^2 & r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} & 0 \\ r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} & r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_{\Delta_{\text{ren}}} s_{12}^2 - s_{13}^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{3/2}) &= -\Delta_{\text{ren}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} s_{13}^3 e^{-i\delta} \\ 0 & 0 & r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} s_{13} e^{-i\delta} \\ \frac{1}{2} s_{13}^3 e^{i\delta} & r_{\Delta_{\text{ren}}} c_{12} s_{12} s_{13} e^{i\delta} & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^2) &= -\frac{1}{2} \Delta_{\text{ren}} r_{\Delta_{\text{ren}}} \begin{pmatrix} 0 & c_{12} s_{12} s_{13}^2 & 0 \\ c_{12} s_{12} s_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde, da mesma forma que na abordagem anterior, cada ordem de $\tilde{\mathcal{H}}$ é representada por uma matriz bloco-diagonal.

Comparando com as equações 3.8 e 3.9, como esperávamos, notamos expressões mais simples para a perturbação na ordem $\epsilon^{3/2}$ e na segunda ordem em ϵ .

Daqui em diante o processo é idêntico: a teoria de perturbação é desenvolvida

através de séries de Dyson (como no apêndice B), tomando $\tilde{\mathcal{H}}_0$ como a matriz não perturbada e, genericamente, $\tilde{\mathcal{H}}_1 = \tilde{\mathcal{H}}_1[\epsilon] = \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{1/2}) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^{3/2}) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\epsilon^2)$ como a perturbação. Primeiro, o operador de evolução (rotado) na representação de interação, $\Omega(x)$, é definido como na equação 3.12, o qual obedece à equação dinâmica 3.13, cuja solução iterativa foi mostrada na equação 3.14. Finalmente, uma vez encontrado $\Omega(x)$, o operador de evolução na base rotada, $\tilde{\mathcal{S}}(x)$, é obtido invertendo-se a equação 3.12, *i.e.*, $\tilde{\mathcal{S}}(x) = e^{-i\tilde{\mathcal{H}}_0 x} \Omega(x)$.

3.2.1 Elementos de matriz do operador de evolução

Devido a que a mudança de base feita inicialmente (*i.e.*, R_{23} -rotação), neste novo método é a mesma que na abordagem anterior, e considerando que os elementos de matriz do operador de evolução rotado $\tilde{\mathcal{S}}(x)$, já expressados na representação de Schrödinger, são encontrados perturbativamente, a equação 3.33, utilizada para encontrar o operador de evolução na base de partida ou base original $\mathcal{S}(x)$ e, por conseguinte, a probabilidade (também expressada de forma perturbativa, de acordo com a forma genérica da equação 3.16), permanece válida.

Uma vez que nosso interesse principal está no canal $\nu_e \rightarrow \nu_x$, para $x = \{e, \mu, \tau\}$, e/ou no setor relacionado com ν_e (para comparar este novo método com o resultado de [8]), basta apenas mostrar os elementos não nulos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$, correspondentes só a $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^i)$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^i)$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^i)$, para $i = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$. De fato,

$$\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^0) = e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2}) = s_{13}e^{i\delta} \left(\frac{1}{1-r_{A_{\text{ren}}}} \right) (e^{-i\Delta_{\text{ren}}x} - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}), \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^1) = & \left[s_{13}^2 \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}}}{1-r_{A_{\text{ren}}}} \right) - s_{12}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}} \right] (i\Delta_{\text{ren}}x) e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x} \\ & + \frac{s_{13}^2}{(1-r_{A_{\text{ren}}})^2} (e^{-i\Delta_{\text{ren}}x} - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1) = -c_{12}s_{12} \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}}} \right) (1 - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}), \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{3/2}) = & -s_{13}^3 e^{i\delta} \left[\frac{(1+r_{A_{\text{ren}}})^2}{2(1-r_{A_{\text{ren}}})^3} \right] (e^{-i\Delta_{\text{ren}}x} - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}) \\ & - s_{13}^3 e^{i\delta} \left[\frac{r_{A_{\text{ren}}}}{(1-r_{A_{\text{ren}}})^2} \right] (i\Delta_{\text{ren}}x) (e^{-i\Delta_{\text{ren}}x} + e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}) \\ & + s_{12}^2 s_{13} e^{i\delta} \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}}{1-r_{A_{\text{ren}}}} \right) (i\Delta_{\text{ren}}x) (e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x} - e^{-i\Delta_{\text{ren}}x}), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^2) = & \left[s_{12}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}} - s_{13}^2 \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}}}{1 - r_{A_{\text{ren}}}} \right) \right]^2 \cdot \frac{(i\Delta_{\text{ren}}x)^2}{2} e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x} \\
& - s_{13}^4 \left[\frac{r_{A_{\text{ren}}}}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^3} \right] (i\Delta_{\text{ren}}x) e^{-i\Delta_{\text{ren}}x} \\
& - \left\{ c_{12}^2 s_{12}^2 \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}^2}{r_{A_{\text{ren}}}} \right) + s_{13}^4 \left[\frac{r_{A_{\text{ren}}}(1 + r_{A_{\text{ren}}})}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^3} \right] \right\} (i\Delta_{\text{ren}}x) e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x} \\
& - s_{13}^4 \left[\frac{r_{A_{\text{ren}}}(2 + r_{A_{\text{ren}}})}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^4} \right] (e^{-i\Delta_{\text{ren}}x} - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}) \\
& + c_{12}^2 s_{12}^2 \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}}} \right)^2 (1 - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}) \\
& + s_{12}^2 s_{13}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}} \left[\frac{1}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^2} \right] (i\Delta_{\text{ren}}x) (e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x} - e^{-i\Delta_{\text{ren}}x}),
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^2) = & c_{12}^3 s_{12} \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}^2}{r_{A_{\text{ren}}}} \right) (i\Delta_{\text{ren}}x) \\
& - c_{12} s_{12} \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}}} \right) \left[s_{12}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}} - s_{13}^2 \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}}}{1 - r_{A_{\text{ren}}}} \right) \right] (i\Delta_{\text{ren}}x) e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x} \\
& - c_{12} s_{12} \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}}} \right) \left[\frac{1}{2} s_{13}^2 + (c_{12}^2 - s_{12}^2) \left(\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}}} \right) \right] (1 - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}) \\
& + c_{12} s_{12} s_{13}^2 \left[\frac{r_{\Delta_{\text{ren}}} r_{A_{\text{ren}}}}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^2} \right] (e^{-i\Delta_{\text{ren}}x} - e^{-ir_{A_{\text{ren}}}\Delta_{\text{ren}}x}),
\end{aligned} \tag{3.58}$$

onde todos os outros termos omitidos são zero. Convém ressaltar, mais uma vez, que $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(-\delta) = \tilde{\mathcal{S}}_{\beta\alpha}(\delta)$. Além disso, também é importante realçar que, assim como no caso anterior, para encontrar os elementos da matriz $\tilde{\mathcal{S}}$ (e, conseqüentemente, os da matriz \mathcal{S}) até segunda ordem em ϵ e para calcular as probabilidades (também até segunda ordem em ϵ), são necessárias somente quatro iterações no cálculo de $\Omega(x)$, uma vez que a partir da quinta iteração aparecem só contribuições de ordem superior em ϵ ($\epsilon^{5/2}$, ϵ^3 , $\epsilon^{7/2}$, etc.), correções que estamos desprezando.

Adicionalmente, agora, se destaca uma notável simplificação algébrica dos elementos $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{3/2})$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^2)$, nesta nova abordagem, quando são comparados, respectivamente, com seus correspondentes das equações 2.27 e 3.29, na abordagem anterior. O resultado é coerente com a nossa expectativa de simplificação.

3.2.2 Probabilidade de oscilação no setor eletrônico

Nesta subseção iremos apresentar novamente, mas seguindo este novo método, a probabilidade de que um neutrino produzido com sabor ν_e seja detectado com sabor ν_μ , depois de percorrer a distância fonte-detector (denotada como L), *i.e.*, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = |\mathcal{S}_{\mu e}(L)|^2$.

Como já foi mencionado, uma vez que a rotação (ou mudança de base) é a mesma neste novo método para o cálculo da probabilidade, após obtermos os elementos de matriz mostrados entre as equações 3.52 a 3.58, as equações 3.33 e 3.34 permanecem

válidas para estes novos elementos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$.

O que é interessante agora é que, nesta nova abordagem, os elementos de matriz não nulos correspondentes a $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}$ (os quais são os únicos necessários para calcular as probabilidades de oscilação em todo o setor relacionado a ν_e , setor de nosso interesse) possuem a mesma ordem de grandeza de $\sqrt{\epsilon}$ que no método anterior. De forma equivalente, os elementos de matriz correspondentes a $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}$ que são zero têm a mesma ordem de grandeza, ϵ^i , em ambos os métodos¹⁸.

Portanto, ao fazer os produtos correspondentes da equação 3.35 (que é equivalente à equação 3.34) e selecionar ordem por ordem, até segunda ordem no cálculo da probabilidade, as equações 3.36, 3.37 e 3.38 continuam sendo válidas (e estão sumarizadas na equação 3.39, que é equivalente à eq. 16 da ref. [8]). Dessa forma, os elementos de matriz necessários para o cálculo da probabilidade são novamente reduzidos a apenas $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1)$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2})$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{3/2})$, os quais temos apresentado nas equações 3.55, 3.53 e 3.56, respectivamente, fazendo com que $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^2)$, mostrado na equação 3.58, seja novamente desnecessário.

As expressões perturbativas para a probabilidade de oscilação no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ até a ordem ϵ^2 são obtidas substituindo os elementos de matriz das equações 3.53, 3.55 e 3.56 nas expressões 3.36, 3.37 e 3.38. Assim, respectivamente, temos

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 4s_{13}^2 s_{23}^2 \frac{1}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^2} \sin^2 \left[\frac{(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right], \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) &= \frac{8J_r r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}} (1 - r_{A_{\text{ren}}})} \cos \left(\delta - \frac{\Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \sin \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}} \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \sin \left[\frac{(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2) &= 4c_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}}^2 \left[\frac{1}{r_{A_{\text{ren}}}^2} \sin^2 \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}} \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \right] \\ &- \frac{4s_{13}^4 s_{23}^2}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^4} \left\{ (1 + r_{A_{\text{ren}}})^2 \sin^2 \left[\frac{(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right] \right. \\ &\left. - r_{A_{\text{ren}}} (1 - r_{A_{\text{ren}}}) (\Delta_{\text{ren}} L) \sin [(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L] \right\}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde $J_r = c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}s_{13}$ representa novamente ao coeficiente de Jarlskog [101] reduzido e cabe destacar que os termos ausentes, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^0) = \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{1/2}) = 0$, são nulos.

¹⁸Em geral, é interessante observar como todos os elementos de matriz não nulos do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$ calculados por ambos métodos têm sua correspondência de nulidade ou não nulidade ordem a ordem, em outras palavras, é como se um elemento de matriz genérico $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\epsilon^i)$ num método é nulo se e somente se no outro método ele também for nulo e, no caso oposto, se esse elemento num método não for nulo, não apenas no outro método ele também é nulo, mas também funcionalmente e/ou estruturalmente (fórmula algébrica) eles são semelhantes.

O primeiro aspecto a ser ressaltado é a notável simplificação e/ou compactação algébrica da expressão $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2)$, em comparação com a sua “homóloga” no método anterior (equação 3.42). Além disso, queremos realçar o seguinte fato: as expressões algébricas para $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ e $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2})$ mostradas nas equações 3.59 e 3.60, embora estruturalmente “idênticas” às suas homólogas no método anterior (equações 3.40 e 3.41), não são numericamente iguais, pois os parâmetros Δ_{ren} , $r_{\Delta_{\text{ren}}}$ e $r_{A_{\text{ren}}}$ (da equação 3.48) são numericamente diferentes de seus correspondentes “homólogos” (Δ , r_Δ e r_A , respectivamente) definidos (de forma implícita na equação 3.3) anteriormente na abordagem desenvolvida por Asano e Minakata, mesmo que sejam da mesma ordem de grandeza.

Dada a notável similitude (em comparação com o método anterior de Asano e Minakata [8]) obtida, com este novo método nestes novos resultados, a análise e as discussões que são suscitadas pelas fórmulas perturbativas para a probabilidade de oscilação, mostradas nas equações 3.59, 3.60 e 3.61, são bastante semelhantes.

De fato, todas as propriedades obtidas anteriormente também são válidas aqui, tais como:

- ✓ Na expressão para $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, que é expressão de ordem mais baixa não nula, é possível recuperar uma forma funcional semelhante ao caso da propagação no vácuo para o caso 2ν (equação 2.35). Como antes, é possível identificar grandezas físicas, como frequência e amplitude de oscilação, em função dos parâmetros de oscilação e do efeito da matéria¹⁹.
- ✓ A partir do elemento de matriz $\mathcal{S}_{\tau e}$ comparado com $\mathcal{S}_{\mu e}$, conforme mostrado na equação 3.33, as expressões para $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^i)$ podem ser obtidas ao fazer a troca $c_{23} \rightarrow -s_{23}$, $s_{23} \rightarrow c_{23}$ e $J_r \rightarrow -J_r$ nas equações 3.59, 3.60 e 3.61. Usando a relação de unitariedade perturbativa (equação 3.50)²⁰, as expressões para $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^i)$ também podem ser derivadas. Finalmente, com as relações 3.17 e 3.18, podemos obter as expressões para as probabilidades de oscilação em todo o setor relacionado a ν_e .
- ✓ Observa-se também que, na ordem $\epsilon^{3/2}$, que é onde está a dependência funcional com δ , temos novamente $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) + \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^{3/2}) = 0$, *i.e.*, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^{3/2}) = 0$, como tem de ser, já que $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ não depende de δ_{CP} [135].

A próxima etapa, como é natural neste contexto de formulações analíticas, é analisar a validade deste novo método para o cálculo de probabilidades. Poderíamos pen-

¹⁹Portanto, isso sugere que, caso $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ seja uma boa aproximação, a expressão perturbativa da probabilidade até primeira ordem teria o potencial de fornecer informações substanciais e/ou significativas sobre a fase de oscilação e os ângulos de mistura.

²⁰Mesmo assim, nós calculamos, como no caso anterior, todas as $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_x; \epsilon^i)$, para $x = \{e, \mu, \tau\}$, para cada ordem ϵ^i , e verificamos explicitamente a relação de unitariedade perturbativa da equação 3.45. As expressões são mostradas no apêndice C.

sar em recorrer de imediato ao resultado numérico e comparar com ele, tal como fizeram Asano e Minakata na referência [8], o que implicaria ter de resolver numericamente as equações de oscilação de neutrinos. No entanto, como a formulação analítica de Asano e Minakata [8], até segunda ordem, descreve com muito boa precisão (até os 4000 km) o fenômeno em questão, tais fórmulas se tornam interessantes porque não só nos fornecem um cálculo rápido da probabilidade de oscilação²¹, mas também porque se tornam um padrão para verificar a confiabilidade, *a priori*, de outras formulações analíticas, sem ter que recorrer, por enquanto, ao resultado numérico. Por conseguinte, comparamos graficamente nossos resultados nesta nova formulação analítica com os resultados já reportados na literatura por Asano e Minakata [8], conforme mostrado na figura 3.4.

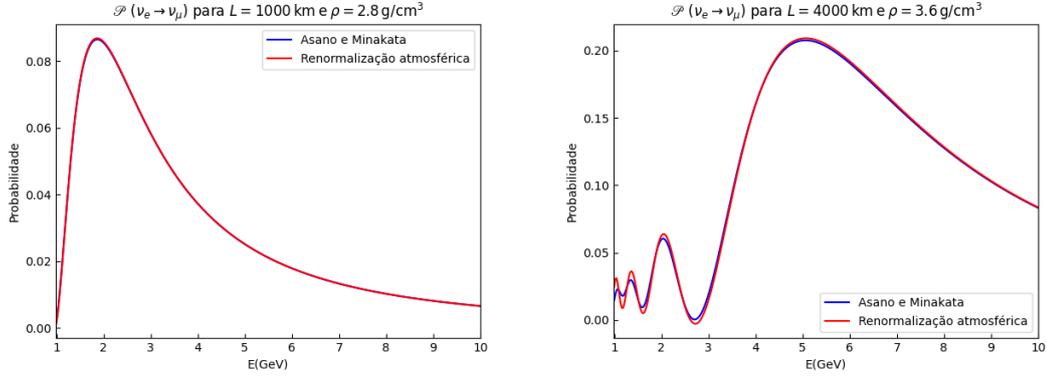


Figura 3.4: Comparação entre a probabilidade de oscilação $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, em função da energia, calculada com as fórmulas de Asano e Minakata [8] (linha sólida azul); e a calculada com as fórmulas de renormalização atmosférica (linha sólida vermelha). É plotado considerando uma densidade de $2,8 \text{ g/cm}^3$ para uma linha de base de 1000 km e $3,6 \text{ g/cm}^3$ para 4000 km. Os valores dos parâmetros de mistura são os mesmos que os fornecidos na legenda da figura 3.3.

Deve ficar claro que, neste tipo de formulações analíticas, as suposições iniciais colocam um limite de validade ao método. Logo, como era de se esperar, mesmo quando são usados parâmetros de expansão diferentes em cada formulação ($\epsilon \equiv r_\Delta = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$ na anterior [8] e $\epsilon \equiv r_{\Delta_{\text{ren}}} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{ee}^2} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2 - s_{12}^2 \Delta m_{21}^2}$ nesta nova), tais parâmetros têm a mesma hierarquia de parâmetros de expansão²², de modo que prevíamos uma faixa de validade semelhante em ambas formulações analíticas (como mostra a figura 3.4), uma vez que estamos calculando a mesma grandeza física com dois métodos diferentes, cujas hipóteses iniciais, em ambos, estão dentro dos limites experimentais, *e.g.*, para o valor de $\sin \theta_{13}$ [15].

No primeiro caso mostrado no gráfico à esquerda da figura 3.4, para um neutrino que se propaga uma distância de 1000 km num meio de densidade de $2,8 \text{ g/cm}^3$,

²¹É importante realçar que, embora o cálculo numérico já possa ser realizado com eficiência em vários programas especializados, sua rapidez de execução é notavelmente lenta.

²²Como já foi mencionado, a diferença absoluta entre Δm_{31}^2 e Δm_{ee}^2 é da ordem de 10^{-5} eV^2 . Além disso, com base nos dados atuais da oscilação de neutrinos [14], tanto na hierarquia normal quanto na invertida, a diferença absoluta entre um parâmetro de expansão e o outro ($r_\Delta = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$ e $r_\Delta = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{ee}^2}$, ambos sem dimensão) é da ordem de 10^{-4} .

vemos uma notável superposição entre a curva da probabilidade calculada com as fórmulas de Asano e Minakata [8] e da probabilidade calculada com as nossas fórmulas de renormalização atmosférica, onde a discrepância máxima, não maior que 0,5%, fica em torno dos 2 GeV.

Porém, para o outro caso (gráfico à direita da figura 3.4), em que o neutrino se propaga uma distância de 4000 km num meio de densidade de 3,6 g/cm³, a concordância “perfeita” entre uma formulação e outra já não é tão evidente para energias inferiores a 2 GeV (embora deva ser observado que a discrepância também não é tão alta. De fato, atinge no máximo 7%, para energias muito próximas a 1 GeV). Já para energias mais altas, vemos a concordância entre as duas curvas (onde a discrepância máxima é inferior a 1% e está em torno dos 3 GeV). O desacordo é justamente produto de quão ineficientes se tornam as duas formulações à medida que L aumenta, pois, como foi mencionado anteriormente, o fato de que esteja sendo usada a teoria de perturbação sugere que, para distâncias fonte-detector muito grandes, as probabilidades calculadas por ambos os métodos não deveriam descrever o fenômeno em questão com boa precisão²³.

De fato, Asano e Minakata [8] também reportaram a precisão numérica das suas próprias fórmulas perturbativas, fazendo uma análise da diferença relativa entre a probabilidade exata calculada numericamente, que rotulamos como $\mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, e a fórmula perturbativa reportada por eles até segunda ordem ϵ^2 , que rotulamos como $\mathcal{P}_{\text{AeM}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, para o canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$.

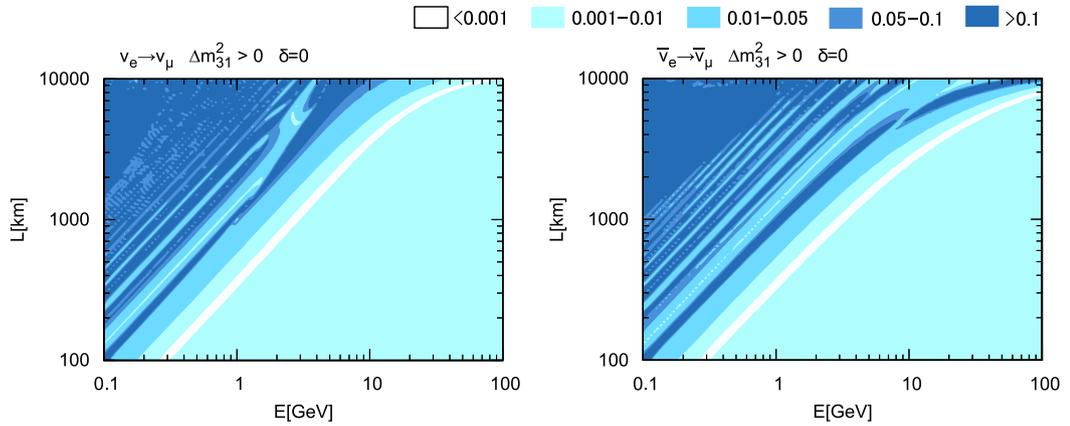


Figura 3.5: A diferença relativa entre a probabilidade de oscilação exata numericamente calculada e a fórmula aproximada de Asano e Minakata [8] de ordem ϵ^2 , no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, $|\mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) - \mathcal{P}_{\text{AeM}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)| / \mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, é apresentada usando o gráfico de gradiente de cores no espaço $E - L$. A densidade de matéria é considerada como 3 g/cm³ e os valores dos parâmetros de mistura restantes são os mesmos indicados na legenda da figura 3.3. Figura No. 2 do artigo [8]

O gráfico da esquerda na figura 3.5 mostra a distribuição da diferença relativa, $|\mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) - \mathcal{P}_{\text{AeM}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)| / \mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, no espaço $E - L$. Inicialmente, se destaca que, para uma baseline da ordem dos 4000 km e para energias entre 1 e 2 GeV

²³Assim, nessa baseline (nessa faixa de energia), para saber qual formulação é a mais precisa, é necessário recorrer ao resultado numérico.

(faixa em que a discrepância entre as duas formulações é mais evidente), a diferença entre $\mathcal{P}_{\text{exata}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ e $\mathcal{P}_{\text{AsM}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ está entre 5 e 10%; faixa na qual, para a mesma baseline e o mesmo intervalo de energia, foi encontrada a discrepância (máxima de 7%) entre as fórmulas de Asano e Minakata e as nossas fórmulas de renormalização atmosférica. Esse resultado é coerente com as observações anteriores.

Cabe mencionar também que alguns testes que temos feito, fixando a baseline, sugerem que o aumento da densidade do meio pode contribuir (embora não de forma tão significativa) para o aumento desta diferença entre as duas formulações²⁴. Portanto, também sugerimos, *a priori*, que o aumento da densidade do meio de um caso para o outro contribui na (não tão notável) diferença entre a probabilidade calculada numericamente e a calculada usando as fórmulas de Asano e Minakata observadas no gráfico à direita da figura 3.2.

A figura 3.5 também mostra algo interessante que já havíamos mencionado anteriormente e ratifica, acrescentando um pouco mais de rigor, o que afirmamos naquele momento: em determinadas circunstâncias, a formulação de Asano e Minakata constitui, numa aproximação muito boa, um padrão para verificar a validade e a confiabilidade de outras formulações analíticas, sem a necessidade de recorrer ao resultado numérico que, como dissemos, pode ser obtido em programas especializados, mas é muito lento.

O interessante disso é a aplicabilidade da formulação, pois ela fornece um cálculo rápido da probabilidade de oscilação²⁵. Por exemplo, para energias em torno dos 5 GeV e distâncias da ordem de 1500 km, conforme pode ser observado na figura 3.5, a discrepância entre o resultado numérico e o resultado perturbativo de Asano e Minakata é menor que 0,1%. Nessa figura, os autores reportam também que, se fixarmos a distância, à medida que a energia aumenta, mais eficiente se torna a formulação deles²⁶. Portanto, destacamos, em virtude do reportado na figura 3.5, que, para energias superiores aos 2 GeV e distâncias inferiores aos 1500 km, a formulação de Asano e Minakata [8] e o resultado numérico são equivalentes, uma vez que, nesse setor do espaço $E - L$, a discrepância é inferior a 1%, podendo até ser muito menor.

Assim, podemos considerar, dentro de tais limites, a teoria de perturbação até ϵ^2 de Asano e Minakata [8] como o resultado “exato” e verificar o quão confiáveis as nossas fórmulas de renormalização atmosférica (novo método) continuam sendo ao selecionar menos termos da expressão perturbativa (equação 3.16). De fato, na figura 3.6 são apresentados os resultados da probabilidade de oscilação calculada em função da energia (considerando uma densidade de 2,8 g/cm³ e uma distância fonte-detector de 1000 km), até segunda ordem, até ordem 3/2 e até primeira ordem de grandeza no parâmetro de expansão ϵ , no caso do canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, usando as fórmulas de renormalização

²⁴Esses testes, embora sugiram uma contribuição da densidade do meio, ainda não são conclusivos.

²⁵Que por sua vez é correto e possui uma interpretação analítica da física que há por trás, facilitando a nossa compreensão do fenômeno.

²⁶Isso foi sutilmente percebido anteriormente nas figuras 3.2 e 3.3.

atmosférica das equações 3.59, 3.60 e 3.61. Além disso, é feita uma comparação com o resultado “exato”, dado pela formulação de Asano e Minakata [8].

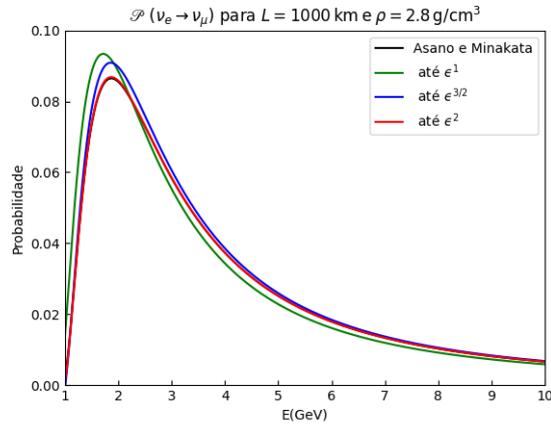


Figura 3.6: Probabilidade de oscilação $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ em função da energia, calculada com as fórmulas de renormalização atmosférica até primeira ordem (curva verde), até ordem $\epsilon^{3/2}$ (curva azul) e até segunda ordem de grandeza em ϵ (curva vermelha), para um neutrino que se propaga 1000 km num meio com densidade de $2,8 \text{ g/cm}^3$. Comparação com a mesma probabilidade de oscilação calculada pela fórmula perturbativa de Asano e Minakata [8] até segunda ordem ϵ^2 (curva preta que, devido às ínfimas diferenças entre uma formulação e a outra, está quase completamente sobreposta à curva vermelha), considerada “exata” em virtude do valor $L = 1000 \text{ km}$ e da faixa de energia em que é plotada. Os valores numéricos considerados para os parâmetros de oscilação são os mesmos da figura 3.3.

Com base na figura 3.6, são determinadas discrepâncias de no máximo 10% para energias superiores a 1 GeV entre o resultado exato e a expressão perturbativa da probabilidade, quando se considera apenas a expansão até primeira ordem. Além disso, especialmente para energias acima de 3 GeV, a formulação se torna mais eficiente e há uma concordância de até 99%.

Embora um acréscimo de ordens mais altas ($\epsilon^{3/2}$ e ϵ^2) à expressão perturbativa da probabilidade “refine” o resultado, em comparação com o resultado exato²⁷, o interessante de estudar o quão eficiente é a probabilidade somente até primeira ordem vem justamente da forma funcional dela (equação 3.59) que, como dissemos antes, é notavelmente semelhante ao caso da propagação no vácuo.

A figura 3.6 implica, então, que, como no caso anterior, também podemos aproveitar a expressão analítica da equação 3.59 (que é de fato simples, prática e intuitiva) na análise, por exemplo, de experimentos do tipo LBL de interesse atual, pois para distâncias da ordem de 1000 km (e energias acima de 3 GeV), esta formulação analítica, ao considerar apenas a expansão perturbativa da probabilidade até primeira ordem, nos fornece informações muito boas sobre a fase de oscilação e os ângulos de mistura, ao identificar na fórmula a frequência e a amplitude de oscilação como uma função dos parâmetros de oscilação e do potencial de matéria.

²⁷Tanto é assim que, se considerarmos a probabilidade de oscilação “completa” (calculada até segunda ordem com as fórmulas de renormalização atmosférica), as discrepâncias são minimizadas para menos de 0,1% (essa observação já foi feita quando analisamos a figura 3.4).

No entanto, essa análise de quão boa é a expressão perturbativa para a probabilidade até primeira ordem de grandeza em ϵ , ou até ordem $\epsilon^{3/2}$, já foi feita para o formalismo de Asano e Minakata e é idêntica nos dois formalismos. Percebemos que a expressão perturbativa da probabilidade até primeira ordem, para energias acima dos 3 GeV, na ordem dos experimentos LBL, ~ 1000 km, descreve a oscilação de neutrinos com uma precisão muito boa. Além disso, dada a sua forma funcional, ela nos fornece informações muito boas sobre a fase de oscilação e sobre os ângulos de mistura, que estão incluídos no que podemos identificar facilmente como frequência e amplitude de oscilação em função dos parâmetros de oscilação e do efeito matéria. Mais ainda, as expressões para a probabilidade em primeira ordem (mostradas nas equações 3.40 e 3.60) são estruturalmente idênticas em ambos formalismos, mas deve-se enfatizar, novamente, que elas são numericamente diferentes, pois os parâmetros usados por Asano e Minakata foram redefinidos (equação 3.48) antes de aplicar a teoria de perturbação para desenvolver as fórmulas de renormalização atmosférica.

Então, naturalmente, em vista da semelhança estrutural mas diferença numérica entre as fórmulas de renormalização atmosférica (equações 3.59, 3.60 e 3.61) e as suas contrapartes no formalismo de Asano e Minakata (equações 3.40, 3.41 e 3.42), podemos nos perguntar sobre a discrepância entre elas. Na figura 3.7, de fato, realizamos esta análise. Plotamos a diferença relativa entre as fórmulas de renormalização atmosférica até ordem ϵ^i , que rotulamos²⁸ $\mathcal{P}_{\text{ren}}^{(i)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, e as fórmulas de Asano e Minakata, $\mathcal{P}_{\text{AeM}}^{(i)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, para $i = \{1, 3/2, 2\}$.

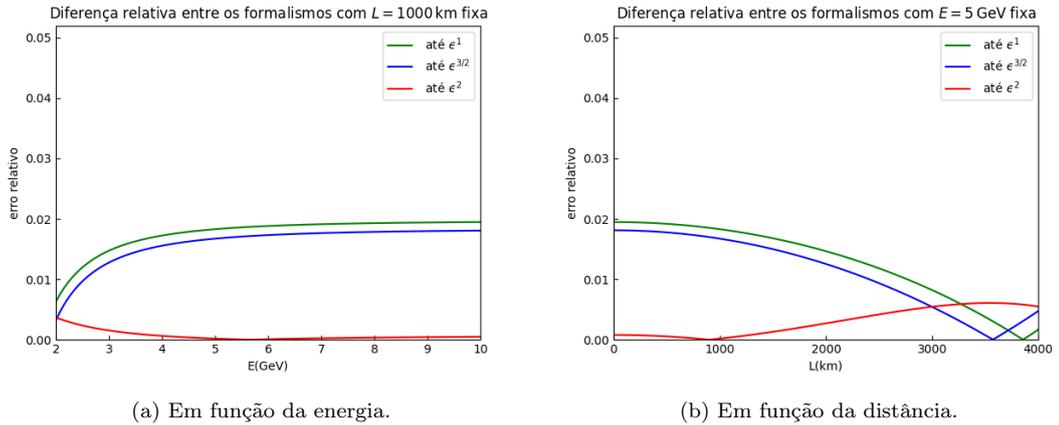


Figura 3.7: Diferença relativa entre a probabilidade de oscilação até primeira ordem, até ordem 3/2 e até segunda ordem em ϵ , calculada com as fórmulas de renormalização atmosférica e a calculada com as fórmulas de Asano e Minakata [8], *i.e.*, $\left| \mathcal{P}_{\text{ren}}^{(i)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) - \mathcal{P}_{\text{AeM}}^{(i)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \right| / \mathcal{P}_{\text{AeM}}^{(i)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, para um neutrino que se propaga num meio de densidade constante $\rho = 2,8 \text{ g/cm}^3$. O valor numérico atribuído aos parâmetros de oscilação está indicado na legenda da figura 3.3.

Observamos inicialmente que ao comparar os dois formalismos até segunda ordem em ϵ , a diferença relativa é de não mais que 0,5%, conforme já tínhamos indicado

²⁸Ou seja, *e.g.*, $\mathcal{P}_{\text{ren}}^{(3/2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ representa a soma: $\mathcal{P}_{\text{ren}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) + \mathcal{P}_{\text{ren}}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2})$.

anteriormente, quando analisamos o primeiro gráfico da figura 3.4 e é consistente com o que é mostrado na figura 3.6, onde a curva preta (que representa a probabilidade de oscilação, no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, calculada com as fórmulas de Asano e Minakata até ϵ^2 , considerada “exata” em virtude do valor $L = 1000$ km e da faixa de energia em que é plotada) e a curva vermelha (que representa a mesma probabilidade de oscilação até a mesma ordem, mas calculada com as fórmulas de renormalização atmosférica) estão claramente sobrepostas.

De outro lado, até a ordem $\epsilon^{3/2}$, o erro relativo das fórmulas de renormalização atmosférica (em comparação com a formulação de Asano e Minakata, até a mesma ordem) não é superior a 2% e pode ser muito menor. Finalmente, até primeira ordem, como era de se esperar, o erro relativo aumenta, embora não significativamente. Temos, novamente, uma diferença relativa de menos de 2% entre as formulações, ambas consideradas até a primeira ordem.

Entretanto, vale a pena mencionar que, sendo rigorosos, nossos resultados mostraram que, ao comparar a expressão perturbativa da probabilidade de oscilação no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ até primeira ordem em ϵ calculada usando as fórmulas de Asano e Minakata, com a probabilidade de oscilação calculada até ordem ϵ^2 usando a mesma formulação (que é considerada equivalente ao resultado exato calculado numericamente, para energias acima dos 2 GeV e distâncias abaixo dos 1500 km, como já foi mencionado), a discrepância máxima foi de 0,9%, e ao fazer o mesmo com a expressão da probabilidade de oscilação no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ até primeira ordem calculada usando as fórmulas de renormalização atmosférica, a discrepância máxima é de 1,1%.

Consequentemente, poderíamos pensar erroneamente que a expressão perturbativa da probabilidade até primeira ordem de Asano e Minakata (equação 3.40) é “melhor” ou fornece melhores informações sobre a fase de oscilação e os ângulos de mistura do que a expressão perturbativa da probabilidade até primeira ordem usando as fórmulas de renormalização atmosférica (equação 3.59). Mas lembre-se de que, conforme o mostrado na figura 3.5, baseamo-nos no fato de que Asano e Minakata [8] reportaram que a diferença relativa entre a probabilidade de oscilação exata calculada numericamente e a calculada perturbativamente com suas fórmulas até segunda ordem em ϵ é menor que 1% (podendo ser muito menor), para garantir que a formulação de Asano e Minakata até ϵ^2 e o resultado numérico são equivalentes para energias superiores aos 2 GeV e distâncias inferiores aos 1500 km.

Por conseguinte, para saber qual das duas expressões em primeira ordem é “melhor”, seria necessário recorrer ao resultado numérico e fazer uma comparação exaustiva entre o resultado numérico e as duas expressões em primeira ordem. Porém, felizmente, para fins práticos, ambas as fórmulas (equações 3.40 e 3.59) fornecem informações substanciais sobre a fase de oscilação e os ângulos de mistura.

4 FORMULAÇÃO ANALÍTICA COM DENSIDADE NÃO CONSTANTE

Nosso trabalho original e principal objetivo é estender o formalismo de Asano e Minakata [8] a mais de um meio material. Especialmente, queremos estudar a aplicabilidade da formulação deles na evolução de um neutrino que se propaga num meio em que o perfil da densidade pode ser caracterizado, numa aproximação muito boa, por uma série de trechos de densidade constante cada, ou o que chamamos de perfil de densidade em formato de castelo (*CW: Castle Wall density profile*). Embora esse problema já tenha sido “desenvolvido” anteriormente, usando o método tradicional de diagonalização do hamiltoniano¹ na subseção 2.9.5 do capítulo da fundamentação teórica, nossa nova abordagem visa oferecer uma interpretação fisicamente mais intuitiva dos resultados.

Convém mencionar que o perfil de densidade em formato CW é aplicável à forma da densidade da Terra [9]. Nesse caso, a aproximação mais simples leva em conta apenas o manto e o núcleo da Terra (conforme é mostrado pelas linhas tracejadas na figura 4.1), aproximando a sua densidade com o perfil no formato CW de um período e meio (mostrado na figura 2.10), apresentado no final da seção 2.9. Isso torna as nossas fórmulas analíticas atraentes, pela sua aplicabilidade nessa forma específica de densidade, e relevantes à luz dos próximos experimentos², que visam medir a oscilação de neutrinos com alta precisão, exigindo assim resultados confiáveis para experimentos nos quais os neutrinos cruzam a Terra.

De fato, *e.g.*, os neutrinos solares atravessando a atmosfera e a crosta terrestre. Os detectores de neutrinos solares estão localizados em laboratórios subterrâneos em latitudes em torno de $35^\circ - 45^\circ$ no hemisfério norte [12]. Durante o dia, os neutrinos solares chegam de cima, passando pela atmosfera e pela parte fina da crosta terrestre acima do detector (neste caso, os efeitos de matéria são insignificantes e se pode usar a aproximação de densidade constante). No entanto, durante a noite, quando os neutrinos solares vêm de baixo, passando pela Terra, os efeitos da matéria na Terra podem ser significativos, uma vez que o perfil de densidade dela, mostrado na figura 4.1, não é uma função suave, resultando num fenômeno conhecido como regeneração de neutrinos ν_e na Terra³.

No caso dos neutrinos atmosféricos⁴, também ocorre algo semelhante. Nesse

¹Mas sabemos que, mesmo que tenhamos um resultado exato (aliás, que foi desenvolvido com a adição de uma aproximação extra: o modelo de duas gerações), ele não tem uma forma funcional intuitiva, o que faz com que a física por trás dele seja “perdida”.

²Aliás, na ref. [10], essa aproximação do perfil de densidade é sugerida para o experimento DUNE [11].

³Para mais detalhes, consulte a seção 10.9 (equação 10.74) da referência [12].

⁴Convém ressaltar que os neutrinos solares e os atmosféricos são os únicos que atravessam a Terra e

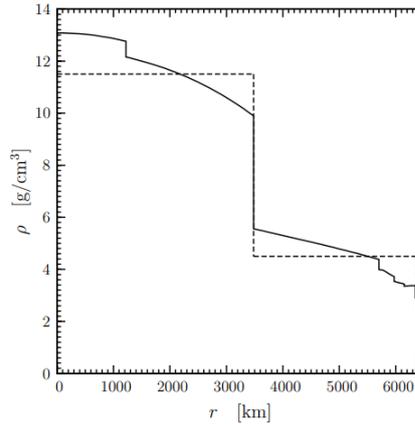


Figura 4.1: Perfil de densidade da Terra. Linha sólida: densidade da Terra $\rho = \rho(r)$ como uma função do raio r [9]. Linha tracejada: aproximação da densidade em formato CW com dois degraus, em que $\rho_{\text{núcleo}} = 11,5 \text{ g cm}^{-3}$ e $\rho_{\text{manto}} = 4,5 \text{ g cm}^{-3}$. Figura extraída de [12].

caso, a aplicação da aproximação de CW na Terra é, de fato, viável. Se um neutrino atmosférico provém da direção oposta ao detector, as densidades consideradas são as do manto e do centro da Terra. Porém, se o neutrino vem de outra direção, ainda podemos utilizar a aproximação de CW, mas o tamanho da primeira região constante não corresponde ao indicado na figura 4.1, devido ao ângulo com o qual o neutrino atravessa. Na figura 1.5, previamente foi mostrada a trajetória de um neutrino atmosférico produzido formando um ângulo θ em relação à normal da superfície do planeta (*i.e.*, com respeito ao zênite). Então, *e.g.*, se o neutrino percorrer uma distância L até ser detectado no experimento (sigla “SK” na parte superior da figura), essa distância pode ser facilmente calculada com um pouco de geometria/trigonometria, conforme sugerido pela figura,

$$L = R \cos \theta + \sqrt{(R + d)^2 - R^2 \sin^2 \theta} \quad (4.1)$$

em que R é o raio da Terra e d é a altura em que o neutrino é gerado na atmosfera relativa à crosta terrestre.

Num cenário como os apresentados anteriormente, é que as nossas fórmulas entram em jogo, proporcionando um cálculo rápido da probabilidade de oscilação. Embora o cálculo numérico já tem sido feito em vários programas especializados, sua extrema lentidão o torna ineficiente além de que não fornece muitas informações, destacando então a vantagem de nossas fórmulas: não apenas garantem resultados corretos, mas também fornecem interpretações analíticas fáceis de entender, enriquecendo a compreensão do fenômeno em questão.

que, em outros experimentos, devido à sua curta distância, é possível utilizar a aproximação de densidade constante.

4.1 Evolução com uma mudança de meio

Consideramos a propagação de um neutrino num meio material cuja densidade (perfil mostrado na figura 4.2) tem a forma funcional

$$\rho(x) = \rho_1 \Theta(x - x_0) + (\rho_2 - \rho_1) \Theta(x - x_1) - \rho_2 \Theta(x - x_2), \quad (4.2)$$

onde $\Theta(x - x')$ é a função de Heaviside (ou função degrau) dada por

$$\Theta(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x' \\ 1 & \text{se } x \geq x' \end{cases}. \quad (4.3)$$

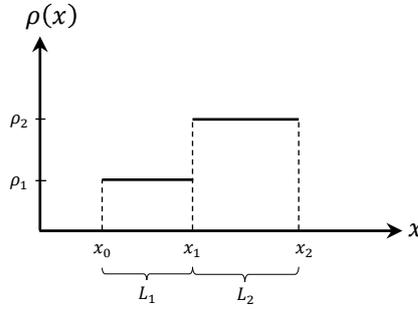


Figura 4.2: Perfil de densidade na aproximação em degraus ou no formato CW para dois meios.

4.1.1 Elementos de matriz do operador de evolução

Dado que a densidade é constante por partes (a propagação começa em x_0 , de x_0 a x_1 a densidade é $\rho_1 = \text{cte}$, e a partir de x_1 até x_2 , a densidade se torna $\rho_2 = \text{cte}$), podemos usar o operador de evolução \mathcal{S} desenvolvido para um meio de densidade constante (um operador para cada meio) e descrever a evolução da forma

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 = R_{23} \underbrace{\tilde{\mathcal{S}}_2 R_{23}^\dagger R_{23} \tilde{\mathcal{S}}_1 R_{23}^\dagger}_1 = R_{23} \tilde{\mathcal{S}}_2 \tilde{\mathcal{S}}_1 R_{23}^\dagger = R_{23} \tilde{\mathcal{S}} R_{23}^\dagger, \quad (4.4)$$

onde os subscritos 1 e 2 representam, respectivamente, o primeiro e o segundo meio no qual o neutrino se propaga.

Inicialmente, é notável que, como individualmente em cada trecho a densidade não depende da posição, então a evolução depende unicamente da distância percorrida pelo neutrino em cada um deles, independentemente de quais sejam as posições inicial e final.

Além disso, convém mencionar que, no desenvolvimento algébrico a seguir, estamos assumindo transições adiabáticas. Lembre-se de que, conforme foi descrito no início da seção 2.9 (por volta da equação 2.79), para o caso em que a densidade já não

é uma constante, é preciso levar em conta que agora a derivada da densidade não é zero (*e.g.*, no caso da equação 4.2, nos pontos de transição x_0 , x_1 e x_2 , a função não é derivável, a derivada não existe devido à descontinuidade dela) e, conseqüentemente, a derivada da densidade de elétrons também não é: esse último termo não nulo agora gera transições entre os autoestados efetivos de massa que dependem fortemente da taxa de variação do ângulo de mistura efetivo (e, portanto, também da taxa de variação do potencial) com a posição⁵. Porém, se a condição adiabática for satisfeita (fórmula de Landau-Zener [129, 130], *i.e.*, $\gamma \gg 1$ na equação 2.79) durante a propagação, o meio não interfere muito na mistura dos autoestados efetivos de massa, as trocas entre eles são muito raras e dizemos que a propagação é adiabática.

Então, a suposição da propagação adiabática é a chave para aproveitar os resultados já desenvolvidos para a matéria constante, é isso o que nos permite usar os elementos de matriz do operador $\mathcal{S}(x)$ já desenvolvidos anteriormente. Adicionalmente, baseado no que mencionamos no início, por simplicidade, podemos considerar $x_0 = 0$ (criação), $x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2 = L$ (detecção, sendo L a distância fonte - detector). De modo que $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(x_2 - x_1) = \mathcal{S}_2(L_2)$ e $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(x_1 - x_0) = \mathcal{S}_1(L_1)$.

Apesar de que as hipóteses de nosso método incluam a suposição de transições puramente adiabáticas, é importante ressaltar que, embora estejamos desprezando os efeitos não adiabáticos, eles existem e dependem da taxa de variação do potencial (segundo a referência [136], a derivada da densidade de elétrons é proporcional à diferença do potencial). Em nossa abordagem, assumimos um potencial com a forma $a = a(x) = (\text{cte}) \times \rho(x)$, em que a dependência da posição é apenas na densidade $\rho(x)$, e se considerarmos ainda que $\rho(x)$ é dado na forma (4.2), plotada na figura 4.2, então o efeito não adiabático é proporcional à diferença das densidades. Seguindo a lógica da referência [137], podemos quantificar a correção não adiabática: o efeito não adiabático é proporcional à diferença de densidades e o efeito adiabático é a mudança do vácuo para a primeira camada, *i.e.*, a correção não adiabática é da ordem de $|\rho_2 - \rho_1|/\rho_1$.

Note também que a equação 4.4 mostra como os cálculos podem ser facilitados com o uso dos elementos da matriz $\tilde{\mathcal{S}}$ em vez de usar os elementos da matriz \mathcal{S} . Em palavras, é como se $\tilde{\mathcal{S}}_1(L_1)$ representasse a “evolução rotada” no primeiro meio⁶, $\tilde{\mathcal{S}}_2(L_2)$ a “evolução rotada” no segundo meio. Então, com eles, encontramos a evolução na base rotada $\tilde{\mathcal{S}}(L) = \tilde{\mathcal{S}}_2(L_2)\tilde{\mathcal{S}}_1(L_1)$ e, em seguida, “des-rotamos” o operador $\tilde{\mathcal{S}}(L)$ para calcular a evolução na base original⁷ $\mathcal{S}(L) = R_{23}\tilde{\mathcal{S}}(L)R_{23}^\dagger$ e, conseqüentemente, a probabilidade de oscilação, por meio da equação 3.15, *i.e.*, $\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\mathcal{S}_{\beta\alpha}(L)|^2$. Em termos

⁵Para obter mais detalhes, consulte na subseção 2.9.1 deste documento ou nas referências: [136] (seção 4.4) e [137] (seção 4.1).

⁶Quando nos referimos à “evolução rotada”, não estamos sugerindo que haja alguma forma de evolução dinâmica numa direção específica. Em vez disso, estamos nos referindo à descrição da evolução na base que passou por uma rotação.

⁷É $\mathcal{S}(L) = \mathcal{S}_2(L_2)\mathcal{S}_1(L_1)$ quem descreve uma possível mudança de sabor do neutrino após percorrer uma distância $L = L_1 + L_2$.

mais simples, ao invés de encontrar $\mathcal{S}_1(L_1)$ e $\mathcal{S}_2(L_2)$ “des-rotando” $\tilde{\mathcal{S}}_1(L_1)$ e $\tilde{\mathcal{S}}_2(L_2)$, respectivamente, e depois ter que fazer o produto $\mathcal{S}(L) = \mathcal{S}_1(L_1)\mathcal{S}_2(L_2)$, é mais eficaz encontrar diretamente $\tilde{\mathcal{S}}(L) = \tilde{\mathcal{S}}_2(L_2)\tilde{\mathcal{S}}_1(L_1)$ e, posteriormente, “des-rotá-lo”.

Embora a simplificação possa não ser imediatamente óbvia, visto que aparentemente estamos economizando apenas um passo de “des-rotação”, a verdadeira simplificação reside na relação funcional do operador de evolução da equação 4.15, como será discutido na próxima seção. Essa simplificação se torna mais significativa quando consideramos n meios. Ao invés de realizar a “des-rotação” dos n operadores individuais $\tilde{\mathcal{S}}_k(x_k - x_{k-1}) = \tilde{\mathcal{S}}_k(L_k)$, para cada k -ésimo meio, e depois ter que multiplicá-los, melhor optamos por multiplicar os operadores $\tilde{\mathcal{S}}_k(L_k)$ de cada um dos n meios e depois realizar uma única “des-rotação” no final⁸.

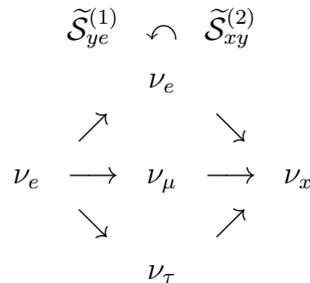
Portanto, dado o contexto da equação 4.4, a equação 3.33 continua sendo válida e, para o cálculo da probabilidade no canal $\nu_e \rightarrow \nu_x$, são necessários apenas os elementos de matriz $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}$. Só que agora esses elementos são dados por

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{S}}_{ee} = \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{e\mu}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{e\tau}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}, \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e} = \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}, \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e} = \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\mu}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}, \end{cases} \quad (4.5)$$

onde os superíndices (1) e (2) representam, respectivamente, o primeiro meio e o segundo meio, pelos quais o neutrino se propaga. A equação 4.5 pode ser resumida como

$$\tilde{\mathcal{S}}_{xe} = \tilde{\mathcal{S}}_{xe}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{x\mu}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)} + \tilde{\mathcal{S}}_{x\tau}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}, \quad (4.6)$$

com $x = \{e, \mu, \tau\}$. Podemos interpretar isto como a possibilidade de que os neutrinos mudem para um estado intermediário e depois mudem para o estado final, esquematicamente:



$$\tilde{\mathcal{S}}_{xe} = \sum_y \tilde{\mathcal{S}}_{xe}^{(2)}\tilde{\mathcal{S}}_{ye}^{(1)}, \quad y = \{e, \mu, \tau\}.$$

Os elementos de matriz não-nulos do operador de evolução para o k -ésimo

⁸Essa estratégia não apenas economiza passos no processo de cálculo, mas também simplifica a forma funcional do operador de evolução de forma mais substancial, facilitando assim a análise matemática.

meio na i -ésima ordem de expansão, que rotulamos ou denotados como $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}^{(k)}(\epsilon^i)$, têm a forma funcional obtida por Asano e Minakata [8], e já foram previamente apresentados no capítulo anterior (equações 3.19 a 3.32).

No entanto, agora iremos levar em conta a seguinte definição⁹:

$$\left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow L_k = x_k - x_{k-1}, \\ \Delta \rightarrow \Delta = \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} \leftrightarrow \text{não depende do meio}, \\ r_A \rightarrow r_k = r_{A_k} = \frac{a_k}{\Delta m_{31}^2} = \frac{2\sqrt{2}G_F N_e^{(k)} E}{\Delta m_{31}^2} = \frac{2\sqrt{2}G_F (N_A Y_e \rho_k) E}{\Delta m_{31}^2}, \\ r_\Delta \rightarrow r_\Delta = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \leftrightarrow \text{não depende do meio}, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

onde, convém lembrar que G_F é a constante de acoplamento da interação fraca ou constante de Fermi, N_A é a constante de Avogadro, $Y_e = \frac{n_e}{n_p + n_n}$ é densidade relativa entre elétrons e núcleos, ρ_k é a densidade de matéria (considerada constante) do k -ésimo meio e E é a energia do neutrino.

Neste ponto, é importante ressaltar um detalhe sutil, porém fundamental para a coerência da nossa abordagem, que não pode ser ignorado: no tratamento algébrico que temos proposto seguir para o desenvolvimento dessa formulação analítica, a densidade de matéria $\rho(x)$, foi descrita como uma função definida em trechos, em que cada trecho é constante, conforme mostrado na equação 4.2 (para o caso específico de uma única mudança de meio). No entanto, o novo método que estamos propondo (tanto para o caso específico que apresentamos nesta seção, considerando uma única transição de meio, quanto para a generalização para n meios que abordaremos na próxima seção) também poderia ser desenvolvido modelando tanto a densidade de elétrons $N_e(x) = (N_A Y_e) \rho(x)$, quanto o potencial $a(x) = (2\sqrt{2}G_F E) N_e(x)$, como funções constantes por partes, e o resultado tem que ser o mesmo.

Consequentemente, temos introduzido implicitamente, na terceira linha da relação (4.7), uma hipótese ou suposição subjacente às manipulações algébricas de nossa formulação analítica para a probabilidade de oscilação de um neutrino que se propaga por um meio de densidade variável, mas cujo perfil pode se aproximar ao formato CW, a saber: $Y_e = \text{cte}$, o que significa que a fração de elétrons por núcleon permanece constante ao longo do trajeto da propagação do neutrino ou, em outras palavras, a fração de elétrons na matéria é idêntica em cada um dos meios pelos quais o neutrino se propaga.

Então, com a rotulagem definida pela relação (4.7) em mente, e o fato de que nem todos os elementos $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}^{(k)}(\epsilon^i)$ são diferentes de zero, podemos fazer as multiplicações da equação 4.5 e ir selecionando por ordem de expansão, chegando apenas aos elementos

⁹Embora estejamos definindo em geral para o k -ésimo meio, lembre-se de que ainda estamos no caso de dois meios.

de matriz $\tilde{\mathcal{S}}_{xe}$ não nulos

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^0) = \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(2)}(\epsilon^0) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^0), \\ \tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^1) = \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(2)}(\epsilon^0) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(2)}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^0) + \tilde{\mathcal{S}}_{e\tau}^{(2)}(\epsilon^{1/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}(\epsilon^{1/2}), \\ \tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^2) = \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(2)}(\epsilon^0) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^2) + \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(2)}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(2)}(\epsilon^2) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^0) \\ \quad + \tilde{\mathcal{S}}_{e\mu}^{(2)}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)}(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{S}}_{e\tau}^{(2)}(\epsilon^{1/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}(\epsilon^{3/2}) + \tilde{\mathcal{S}}_{e\tau}^{(2)}(\epsilon^{3/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}(\epsilon^{1/2}), \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(2)}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^0) + \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}^{(2)}(\epsilon^0) \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)}(\epsilon^1), \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^2) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(2)}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(2)}(\epsilon^2) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^0) + \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}^{(2)}(\epsilon^0) \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)}(\epsilon^2) \\ \quad + \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\mu}^{(2)}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}^{(1)}(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\tau}^{(2)}(\epsilon^{3/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}(\epsilon^{1/2}), \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(2)}(\epsilon^{1/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^0) + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau}^{(2)}(\epsilon^0) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}(\epsilon^{1/2}), \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{3/2}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(2)}(\epsilon^{1/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^1) + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(2)}(\epsilon^{3/2}) \tilde{\mathcal{S}}_{ee}^{(1)}(\epsilon^0) + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau}^{(2)}(\epsilon^0) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}(\epsilon^{3/2}) \\ \quad + \tilde{\mathcal{S}}_{\tau\tau}^{(2)}(\epsilon^1) \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}^{(1)}(\epsilon^{1/2}). \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Os termos ausentes são nulos, $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^{1/2}) = \tilde{\mathcal{S}}_{ee}(\epsilon^{3/2}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^0) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^{1/2}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^{3/2}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^0) = \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^1) = \tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^2) = 0$.

4.1.2 Probabilidade de oscilação no setor relacionado a ν_e

Como exemplo, vamos mostrar a probabilidade no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ¹⁰, ou seja, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, uma vez que a probabilidade de oscilação no $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ e a probabilidade de sobrevivência são mostradas no apêndice C.

Em virtude da simplificação obtida na equação 4.4, para calcular a probabilidade $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, após obter os elementos de matriz mostrados nas equações 4.9 e 4.10 (*i.e.*, aqueles necessários para o cálculo de $\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$), as equações 3.33 e 3.34 permanecem válidas para esses novos elementos de matriz do operador $\tilde{\mathcal{S}}(x)$. Agora, é interessante observar que, na nossa extensão do formalismo $\sqrt{\epsilon}$ - *perturbation theory* para dois meios¹¹, os elementos de matriz não nulos correspondentes a $\tilde{\mathcal{S}}_{ee}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}$ (que são os únicos necessários para calcular as probabilidades de oscilação no setor relacionado a ν_e), exibem a mesma ordem de expansão que neste formalismo desenvolvido por Asano e Minakata [8]. Em outras palavras, e em geral, os elementos de matriz $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}(\epsilon^i)$ que são não nulos, têm

¹⁰Resultado suficiente para encontrar as probabilidades de oscilação em todo o setor eletrônico.

¹¹E em geral, para n meios e para qualquer elemento de matriz $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\beta}$, os elementos não nulos têm sempre as mesmas ordens de grandeza de $\sqrt{\epsilon}$.

as mesmas ordens de grandeza, ϵ^i , seja no caso da propagação por um único meio de densidade constante, por dois meios ou por n meios.

Portanto, ao fazer os produtos correspondentes da equação 3.35 (equivalente à equação 3.34), agora usando os elementos das equações 4.9 e 4.10, e selecionar ordem por ordem, até a segunda ordem no cálculo da probabilidade, as equações 3.36, 3.37 e 3.38 seguem sendo válidas (equações que são compactadas na equação 3.39, equivalente à equação 16 da nossa referência principal [8]). Assim, os únicos elementos de matriz necessários para o cálculo da probabilidade são novamente $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^1)$, $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{1/2})$ e $\tilde{\mathcal{S}}_{\tau e}(\epsilon^{3/2})$, isso torna $\tilde{\mathcal{S}}_{\mu e}(\epsilon^2)$ desnecessário de novo.

E, finalmente, as expressões perturbativas (calculadas até a segunda ordem de grandeza no parâmetro de expansão $\sqrt{\epsilon}$) para a probabilidade de que um neutrino produzido com sabor ν_e seja detectado com sabor ν_μ , depois de atravessar os dois meios, percorrendo uma distância total $L = L_1 + L_2$, são encontradas substituindo os elementos de matriz necessários e suficientes das equações 4.9 e 4.10 nas expressões 3.36, 3.37 e 3.38, dando lugar às seguintes relações, respectivamente,

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 4s_{13}^2 s_{23}^2 \left\{ \frac{1}{(1-r_1)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \frac{1}{(1-r_2)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) - \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \left[\sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \right\}, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^3/2) = & 8J_r r_\Delta \left[\frac{1}{r_1(1-r_1)} \cos\left(\delta - \frac{\Delta L_1}{2} - \Delta L_2\right) \sin\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \frac{1}{r_1(1-r_2)} \cos\left(\delta - \frac{r_1 \Delta L_1 + (1+r_2)\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_2(1-r_1)} \cos\left(\delta - \frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (2-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \frac{1}{r_2(1-r_2)} \cos\left(\delta - \frac{\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2) = & 4c_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} \sin^2\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) + \frac{1}{r_2^2} \sin^2\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) - \frac{1}{r_1 r_2} \left[\sin^2\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{r_1 \Delta L_1 + r_2 \Delta L_2}{2}\right) \right] \right\} \\ & - \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1)^4} \left\{ \left[s_{13}^2 (1+r_1)^2 - 2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta \right] \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_1] (\Delta L_1) \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \right\} \\ & + \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1)^3 (1-r_2)} \left\{ \left[2s_{13}^2 \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 - (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) + (2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_1(2+r_1))) \right. \right. \\ & \left. \left. \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & \left. + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_1] (\Delta L_1) \left[\sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{32s_{23}^2 s_{13}^4}{(1-r_1)^2 (1-r_1)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \\ & + \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1)(1-r_2)^3} \left\{ \left[2s_{13}^2 \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 - (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) + (2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_2(2+r_2))) \right. \right. \\ & \left. \left. \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & \left. + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_2] (\Delta L_2) \left[\sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \right\} \\ & - \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_2)^4} \left\{ \left[s_{13}^2 (1+r_2)^2 - 2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta \right] \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_2] (\Delta L_2) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right\}, \end{aligned}$$

onde onde $J_r = c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}s_{13}$ é o invariante de Jarlskog [101] reduzido e convêm destacar que os termos ausentes, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^0) = \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{1/2}) = 0$, são nulos.

Em primeiro lugar, queremos ressaltar que as expressões perturbativas da probabilidade de oscilação $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, em primeira e em segunda ordem de expansão, nas equações 4.11 e 4.13 são simétricas quando se trocam os rótulos 1 e 2 (*i.e.*, $r_1 \leftrightarrow r_2$ e $L_1 \leftrightarrow L_2$). Porém, essa simetria não se mantém na fórmula que foi obtida para a ordem $\epsilon^{3/2}$ (da equação 4.12), uma vez que essa falta de simetria ao trocar 1 e 2 indica uma dependência funcional do parâmetro $\delta = \delta_{\text{CP}}$. A troca $1 \leftrightarrow 2$ equivale a fazer reversão temporal¹², que a probabilidade de conversão não respeita. Tal simetria para a troca dos rótulos 1 e 2 só pode ser exibida nos termos da probabilidade que conservassem CP, isto é, aqueles independentes de δ (ou proporcionais a $\cos \delta$).

Adicionalmente, como já foi mencionado, graças à simplificação obtida na equação 4.4 (e generalizada, mais adiante, na equação 4.15), a equação 3.33 continua sendo válida nesta formulação da propagação de um neutrino em mais de um meio (para os novos elementos de matriz do operador de evolução na base rotada que sejam calculados). De modo que é possível obter as expressões perturbativas da probabilidade $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$, para o canal $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$, por meio da transformação $c_{23} \rightarrow -s_{23}$ e $s_{23} \rightarrow c_{23}$ (junto com $J_r \rightarrow -J_r$) nas equações 4.11, 4.12 e 4.13 e, além disso, já conhecendo as expressões para $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^i)$ e $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^i)$, para cada ordem i , as fórmulas para $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^i)$ são obtidas usando a relação de unitariedade perturbativa dada pela equação 3.45. Torna-se especialmente importante observar que, na ordem $\epsilon^{3/2}$, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^{3/2}) = 0$, como era de se esperar, já que não pode haver termos dependentes de δ na probabilidade de sobrevivência, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ [135].

Outro aspecto a ser destacado é a forma funcional das expressões perturbativas da probabilidade. De fato, as equações 4.11 e 4.13 mostram uma estrutura intuitiva que pode ser decomposta em termos de “evolução no meio 1” mais “evolução no meio 2” menos “interferência entre os dois meios”. Fica evidente tal decomposição ao observar como as fórmulas se dividem de forma natural nesses componentes, refletindo a influência de cada meio na probabilidade de oscilação e como a interferência entre os meios também influi na mesma.

Esta estrutura intuitiva não só fornece uma compreensão clara de como cada meio afeta à probabilidade de oscilação, mas também destaca um resultado importante. De fato, ela nos permite observar com facilidade que no limite $L_2 \rightarrow 0$ as equações 4.11 e 4.13 convergem às expressões perturbativas para um único meio de densidade constante¹³, dadas nas equações 3.40 e 3.42, mostrando que nesse limite os termos associados à “evolução no meio 2” e à “interferência entre os meios” somem, deixando apenas a contribuição do meio 1, o que ressalta também a consistência de nossas equações¹⁴.

¹²Uma vez que, pela conservação CPT, na oscilação de neutrinos, a violação da simetria T é equivalente à violação da CP.

¹³Fazendo $L_1 = L$ e $r_1 = r_A$, para tornar a igualdade ainda mais evidente.

¹⁴Mesmo que não seja tão óbvio, também é possível mostrar que, para $r_1 = r_2 = r_A$ e para $L = L_1 + L_2$, as equações 4.11, 4.12 e 4.13 se tornam idênticas às equações 3.40, 3.41 e 3.42, respectivamente.

Convém mencionar que o termo “interferência entre os meios” se refere à interferência quântica e não sugere nenhuma forma de interação física entre os meios que possam ter influência na probabilidade.

Por outro lado, a equação 4.12, embora sua estrutura não se preste facilmente a uma separação em termos de “evolução no meio 1”, “evolução no meio 2” e “interferência entre os meios”, tem uma certa forma intuitiva, especialmente quando se considera o limite $L_2 \rightarrow 0$ (ou $L_1 \rightarrow 0$, tanto faz), em que a relação já conhecida para um único meio de matéria constante (equação 3.41) é recuperada.

O próximo passo é verificar a confiabilidade das fórmulas, comparando-as com o resultado numérico. De fato, na figura 4.3, fazemos essa análise comparando nossas fórmulas analíticas com o resultado calculado numericamente. Essa figura é construída com os resultados obtidos nas equações 4.11, 4.12 e 4.13 e levando em conta que ① os parâmetros de mistura usados para plotar são escolhidos de acordo com os ajustes globais (os *fits*) atuais, que são calculados na referencia [14], com ordenamento normal (NO, *i.e.*, $\Delta m_{31}^2 > 0$), especificamente, $\sin^2 \theta_{12} = 0,304$, $\sin^2 \theta_{23} = 0,573$, $\sin^2 \theta_{13} = 0,02219$, $\Delta m_{21}^2 = 7,42 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, $\Delta m_{31}^2 = 2,517 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ (e considerando $\delta = 0$), ② as conversões de unidades (para mexer com unidades mais apropriadas ao comprimento e às energias encontradas na prática, *i.e.*, escrevendo L em km, Δm^2 em eV^2 e E em GeV) foram mostradas anteriormente na relação (3.47).

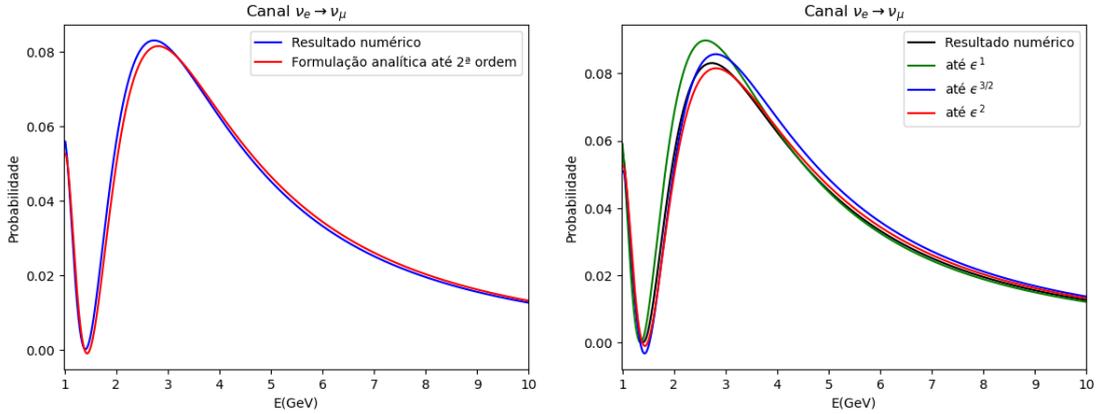


Figura 4.3: Comparação entre a probabilidade de oscilação, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, em função da energia, calculada numericamente e através de nossa fórmula aproximada até segunda ordem ϵ^2 (soma das equações 4.11, 4.12 e 4.13), para um neutrino que se propaga 1000 km por um meio com densidade constante de $2,8 \text{ g/cm}^3$, seguido de uma propagação adicional de 500 km por um meio com densidade constante de $3,6 \text{ g/cm}^3$. Também é plotada (à direita) a comparação da probabilidade de oscilação, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, como uma função da energia, calculada até diferentes ordens no parâmetro de expansão. Se assume θ_{13} como $\sin \theta_{13} = 0,15$ e $\delta = 0$, enquanto os outros parâmetros de mistura são escolhidos de acordo com os valores atuais reportados na literatura [14]: $\sin^2 \theta_{12} = 0,304$, $\sin^2 \theta_{23} = 0,573$, $\Delta m_{21}^2 = 7,42 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ e $\Delta m_{31}^2 = 2,571 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$.

Conforme já foi estabelecido no capítulo imediatamente anterior, em virtude do observado na figura 3.5, para energias acima dos 2 GeV e distâncias inferiores aos 1500 km, a formulação analítica de Asano e Minakata [8] para a probabilidade de oscilação

de um neutrino que se propaga num meio de densidade constante pode ser considerada equivalente ao resultado exato calculado numericamente e, com isso, até pode-se verificar a confiabilidade de outras formulações analíticas (uma vez que nesse setor do espaço $E - L$ a discrepância é inferior a 1%, podendo ser ainda muito menor, sugerindo uma confiabilidade significativa). A intenção agora é avaliar, dentro desses limites, quão eficiente continua sendo a formulação de Asano e Minakata [8] ao ser estendida a mais de um meio material.

No gráfico à esquerda da figura 4.3, de fato, comparamos a probabilidade de oscilação $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, calculada numericamente *vs.* a calculada com nossa fórmula analítica até a segunda ordem de grandeza no parâmetro de expansão $\sqrt{\epsilon}$ (obtida pela soma das equações 4.11, 4.12 e 4.13, conforme é indicado na equação 3.16), para um neutrino que se propaga uma distância de 1000 km num meio com densidade constante de $2,8 \text{ g/cm}^3$; seguido de uma propagação adicional de 500 km em outro meio com densidade de $3,6 \text{ g/cm}^3$. Essa comparação entre o cálculo numérico e a formulação analítica indica que, dentro dos limites de validade do método, nosso resultado é muito bom, com uma discrepância não superior a 4% (diferença máxima perto dos 2 GeV). Esse nível de precisão reforça a confiabilidade da formulação analítica de Asano e Minakata [8], especialmente no contexto da propagação de neutrinos através de múltiplos meios, fornecendo uma perspectiva valiosa sobre a aplicabilidade dessa formulação em cenários mais complexos e uma ferramenta robusta, rápida e prática para a descrição analítica da probabilidade de oscilação de um neutrino que se propaga num meio material em que a densidade não é constante¹⁵.

Como um valor adicional, no gráfico à direita da figura 4.3, fazemos uma comparação progressiva da fórmula analítica com o resultado numérico, *i.e.*, plotamos até a primeira ordem (equação 4.11), depois incluímos a expressão de ordem 3/2 (da equação 4.12) e, finalmente, toda a expressão perturbativa é plotada até a ordem ϵ^2 (adicionando a equação 4.13). Isso permite, por um lado, visualizar como a formulação analítica da probabilidade vai se aproximando ao resultado numérico na medida em que os termos de ordem mais alta são adicionados e, por outro lado, também nos permite analisar quão eficiente continua sendo nossa formulação analítica na medida em que selecionamos menos termos da expressão perturbativa da probabilidade.

Como acabamos de mencionar, se compararmos a probabilidade de oscilação $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ calculada analiticamente até a segunda ordem com o resultado numérico, a discrepância máxima não passa de 4%. Se fizermos a mesma comparação, mas com a fórmula perturbativa até a ordem $\epsilon^{3/2}$, a diferença relativa máxima será menor que 6%. E se agora compararmos o resultado numérico com a probabilidade de oscilação calculada na primeira ordem de grandeza do parâmetro de expansão $\sqrt{\epsilon}$, a discrepância máxima é de $\sim 8\%$. Isso garante uma concordância de pelo menos 90%, ao considerar apenas a expressão em primeira ordem, para energias acima de 1 GeV e discrepâncias de apenas

¹⁵Mas com uma aproximação muito boa, pode ser descrita como uma série de degraus, em que cada degrau é caracterizado por uma densidade constante.

5%, especialmente para energias superiores aos 3 GeV.

Embora a incorporação de ordens mais altas na expressão perturbativa da probabilidade de oscilação “aperfeiçoe” o resultado (uma vez que a fórmula analítica se aproxima do resultado numérico com cada termo adicional), o interessante de poder descrever, numa aproximação muito boa, a oscilação do neutrino somente com a fórmula analítica em primeira ordem, vem precisamente da forma funcional que ela tem (equação 4.11).

A expressão (4.11) nos dá não só uma intuição física do fenômeno que está ocorrendo (dada sua semelhança estrutural com a forma funcional da probabilidade no caso da propagação no vácuo para duas gerações - equação 2.35), mas também nos dá informações muito boas sobre a fase de oscilação e os ângulos de mistura, ao identificar a frequência e a amplitude de oscilação como uma função dos parâmetros de oscilação e do efeito de matéria, efeito que conseguimos separar em contribuições de cada um dos meios e da interferência entre eles¹⁶.

Conseqüentemente, nosso objetivo na seção a seguir é aproveitar ao máximo as expressões não nulas de mais baixa ordem (primeira ordem), pois elas são as mais intuitivas, visando encontrar expressões analíticas simples, práticas e precisas (o suficiente para descrever a oscilação dentro do limite de validade do nosso método). Essa abordagem é particularmente relevante para a análise de possíveis experimentos do tipo LBL (dentro do limite de validade do nosso método), e ainda mais quando a referência [10] sugere a aproximação do perfil da densidade em degraus para o experimento DUNE [11].

4.2 Evolução através de n meios distintos

Conforme vimos na seção anterior, a probabilidade de transição dos neutrinos pode depender das densidades dos meios e da largura do meio. Podemos nos perguntar o que acontece em multi-meios em relação ao resultado de dois meios. Nas referências [136,137], foi feito um estudo de multi-meios para computar o efeito de matéria na Terra.

Consideremos agora um neutrino que é criado na posição x_0 e se propaga uma distância L_1 por um meio com densidade constante $\rho_1(x) = \rho_1$, até atingir a posição x_1 (com $L_1 = x_1 - x_0$). Em seguida, ele atravessa sucessivamente os próximos $n - 1$ meios, cada k -ésimo meio (com $k = 1, 2, \dots, n$) tem densidade constante $\rho_k(x) = \rho_k$ e limite superior na posição x_k (*i.e.*, no k -ésimo meio o neutrino se propaga uma distância $L_k = x_k - x_{k-1}$), até chegar ao n -ésimo meio de densidade constante $\rho_n(x) = \rho_n$, na posição final x_n . Nesta seção, nosso objetivo é descrever analiticamente a probabilidade de oscilação desse neutrino, considerando a sua propagação numa distância total L (distância

¹⁶Conforme a decomposição contida na equação 4.11, discutida anteriormente: “evolução no meio 1” + “evolução no meio 2” - “termo de interferência”, já que cada um desses termos é semelhante (estruturalmente falando) ao caso da propagação no vácuo, em que as amplitudes e as frequências podem ser identificadas como dependentes seja de um único meio ou da mistura entre eles.

fonte - detector) de x_0 a x_n (*i.e.*, $L = x_n - x_0$). Para isso, a evolução do neutrino é descrita como o produto de evoluções sucessivas, usando operadores de evolução para cada meio de densidade constante, $\mathcal{S}_k(x_k - x_{k-1}) = \mathcal{S}_k(L_k) = \mathcal{S}_k$,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_n \mathcal{S}_{n-1} \cdots \mathcal{S}_k \cdots \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1, \quad (4.14)$$

uma vez que em cada intervalo, como não há dependência da posição, a evolução do estado de um neutrino dependerá somente da distância percorrida sem que haja influência da posição inicial.

Aliás, se tentássemos resolver o problema do zero com essa nova função de densidade, ao usar a série de Dyson (equação 3.14) para encontrar a expansão perturbativa do operador de evolução na representação de interação, não fará diferença onde começamos a integral e onde a terminamos, o que importa é que o intervalo de integração seja igual à distância percorrida em cada trecho. Portanto, podemos usar os elementos de matriz do operador de evolução calculados por Asano e Minakata [8] na evolução em cada meio. Melhor ainda, dada a unitariedade da matriz R_{23} , podemos usar os elementos de matriz do operador rotado $\tilde{\mathcal{S}}(x)$, ao invés dos elementos de matriz do operador original $\mathcal{S}(x)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{S}_n \mathcal{S}_{n-1} \cdots \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 \\ &= R_{23} \underbrace{\tilde{\mathcal{S}}_n R_{23}^\dagger R_{23}}_{\mathbb{1}} \tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \underbrace{R_{23}^\dagger \cdots R_{23}}_{\mathbb{1} \cdots \mathbb{1}} \underbrace{\tilde{\mathcal{S}}_2 R_{23}^\dagger R_{23}}_{\mathbb{1}} \tilde{\mathcal{S}}_1 R_{23}^\dagger \\ &= R_{23} \underbrace{\tilde{\mathcal{S}}_n \tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \cdots \tilde{\mathcal{S}}_2 \tilde{\mathcal{S}}_1}_{\tilde{\mathcal{S}}} R_{23}^\dagger \\ &= R_{23} \tilde{\mathcal{S}} R_{23}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.15)$$

fato que facilita e/ou simplifica nossos cálculos. Portanto, o procedimento a ser seguido é calcular o operador rotado $\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}_n \tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \cdots \tilde{\mathcal{S}}_2 \tilde{\mathcal{S}}_1$, com as fórmulas de Asano e Minakata [8] e, depois, “des-rotar” para encontrar \mathcal{S} .

Feito isso, nossa tarefa agora consiste em calcular a expressão perturbativa para a probabilidade de oscilação no setor eletrônico, especificamente na ordem mais baixa (expressão não nula), ϵ^1 . Para isso, mostramos somente a probabilidade $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$; já que, como sabemos, dada a equação 4.15, a probabilidade $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^1)$ é encontrada fazendo-se a troca $c_{23} \rightarrow -s_{23}$ e $s_{23} \rightarrow c_{23}$ e a probabilidade $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^1)$ é encontrada com a relação de unitariedade perturbativa (equação 3.45). Porém, convém mencionar/relembrar que as expressões para todo o canal $\nu_e \rightarrow \nu_x$ são mostradas no apêndice C desta dissertação.

Começamos com o caso mais simples (já conhecido), a probabilidade de oscilação $\mathcal{P}^{(1)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, através de um único meio com densidade constante, onde uma nova notação é introduzida, o sobrescrito $n = 1, 2, 3, \dots$ indica a propagação do neutrino através de n meios com densidades diferentes. Para fins da forma estrutural na qual

reportaremos as expressões da probabilidade nesta seção, observamos que a equação 3.40 pode ser escrita de forma equivalente como¹⁷

$$\mathcal{P}^{(1)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 2s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{1 - \cos[(1 - r_1) \Delta L_1]}{(1 - r_1)^2} \right). \quad (4.16)$$

Continuamos com a probabilidade de oscilação através de dois meios de diferente densidade cada um¹⁸, $\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, que, de fato, também foi calculada e mostrada anteriormente na equação 4.11, e que pode ser expressa de forma equivalente como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 2s_{13}^2 s_{23}^2 & \left(\frac{1 - \cos[(1 - r_1) \Delta L_1]}{(1 - r_1)^2} + \frac{1 - \cos[(1 - r_2) \Delta L_2]}{(1 - r_2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{1 - \cos[(1 - r_1) \Delta L_1] - \cos[(1 - r_2) \Delta L_2] + \cos[(1 - r_1) \Delta L_1 + (1 - r_2) \Delta L_2]}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Antes de continuarmos com a propagação através de mais de dois meios, introduziremos uma nova notação, para compactar um pouco as expressões e facilitar a comparação entre elas,

$$\begin{cases} \kappa_n = 1 - r_n \\ \lambda_n = \kappa_n \Delta L_n \\ \lambda_{nm\dots} = \kappa_n \Delta L_n + \kappa_m \Delta L_m + \dots \end{cases} \quad (4.18)$$

então, em termos desses novos parâmetros, as expressões para as probabilidades mostradas nas equações 4.16 e 4.17 ficam assim:

$$\mathcal{P}^{(1)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 2s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} \right), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 2s_{13}^2 s_{23}^2 & \left(\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} \right. \\ & \left. - \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Efetando então todo o procedimento aqui descrito, para a evolução através de três meios com densidades diferentes, e usando a nova notação introduzida, obtemos a

¹⁷Onde $L \rightarrow L_1$ e $r_A \rightarrow r_1 = r_{A_1} = \frac{a_1}{\Delta m_{31}^2} = \frac{2\sqrt{2}G_F N_e^{(1)} E}{\Delta m_{31}^2} = \frac{2\sqrt{2}G_F Y_e \rho_1 E}{\Delta m_{31}^2}$.

¹⁸A densidade de cada meio é uma constante!

expressão para a probabilidade

$$\mathcal{P}^{(3)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 2s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} + \frac{1 - \cos \lambda_3}{\kappa_3^2} - \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} - \frac{1 - \cos \lambda_2 - \cos \lambda_3 + \cos \lambda_{23}}{\kappa_2 \kappa_3} - \frac{\cos \lambda_2 - \cos \lambda_{12} - \cos \lambda_{23} + \cos \lambda_{123}}{\kappa_1 \kappa_3} \right). \quad (4.21)$$

Da mesma forma, para a evolução em quatro meios com densidades distintas, a expressão da probabilidade é

$$\mathcal{P}^{(4)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 2s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} + \frac{1 - \cos \lambda_3}{\kappa_3^2} + \frac{1 - \cos \lambda_4}{\kappa_4^2} - \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} - \frac{1 - \cos \lambda_2 - \cos \lambda_3 + \cos \lambda_{23}}{\kappa_2 \kappa_3} - \frac{1 - \cos \lambda_3 - \cos \lambda_4 + \cos \lambda_{34}}{\kappa_3 \kappa_4} - \frac{\cos \lambda_2 - \cos \lambda_{12} - \cos \lambda_{23} + \cos \lambda_{123}}{\kappa_1 \kappa_3} - \frac{\cos \lambda_3 - \cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{34} + \cos \lambda_{234}}{\kappa_2 \kappa_4} - \frac{\cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{123} - \cos \lambda_{234} + \cos \lambda_{1234}}{\kappa_1 \kappa_4} \right). \quad (4.22)$$

Essas novas formas funcionais das probabilidades até primeira ordem de expansão, seja para a propagação através de um único meio material de densidade constante, ou através de dois meios, cada um caracterizado por sua própria densidade (constante), ou através de três ou quatro meios de densidade distinta (expressões mostradas nas equações da 4.19 à 4.22), exibem certa simetria, na qual conseguimos identificar um padrão que sugere uma regularidade nessas expressões. Isso nos motiva a tentar desenvolver uma regra heurística que nos permita construir a relação funcional da probabilidade no canal $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, na ordem mais baixa e não nula (primeira ordem), para n meios.

Com isso em mente, nosso próximo passo é tentar conjecturar uma “regra” que oriente a construção da distribuição da probabilidade de oscilação $\mathcal{P}^{(n)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ quando um neutrino se propaga através de n meios. Vamos lá!

A primeira coisa que identificamos nas fórmulas, que definimos como “frações na probabilidade” ou “partes da probabilidade”, e que rotularemos de Λ_n , é aquela tal que

$$\mathcal{P}^{(n)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 2s_{13}^2 s_{23}^2 \Lambda_n \quad (4.23)$$

ou seja que para $n = 1, 2, 3, 4$, temos

$$\Lambda_1 = \frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2}, \quad (4.24)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} - \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2}, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_3 = & \frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} + \frac{1 - \cos \lambda_3}{\kappa_3^2} \\ & - \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} - \frac{1 - \cos \lambda_2 - \cos \lambda_3 + \cos \lambda_{23}}{\kappa_2 \kappa_3} \\ & - \frac{\cos \lambda_2 - \cos \lambda_{12} - \cos \lambda_{23} + \cos \lambda_{123}}{\kappa_1 \kappa_3}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_4 = & \frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} + \frac{1 - \cos \lambda_3}{\kappa_3^2} + \frac{1 - \cos \lambda_4}{\kappa_4^2} \\ & - \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} - \frac{1 - \cos \lambda_2 - \cos \lambda_3 + \cos \lambda_{23}}{\kappa_2 \kappa_3} \\ & - \frac{1 - \cos \lambda_3 - \cos \lambda_4 + \cos \lambda_{34}}{\kappa_3 \kappa_4} - \frac{\cos \lambda_2 - \cos \lambda_{12} - \cos \lambda_{23} + \cos \lambda_{123}}{\kappa_1 \kappa_3} \\ & - \frac{\cos \lambda_3 - \cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{34} + \cos \lambda_{234}}{\kappa_2 \kappa_4} - \frac{\cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{123} - \cos \lambda_{234} + \cos \lambda_{1234}}{\kappa_1 \kappa_4}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

A tarefa então se tornou focada em: como construímos cada termo de Λ_n ? Bem, com base na regularidade já observada, conjecturamos que, em geral, para n meios, Λ_n se constituirá de $\frac{n(n+1)}{2}$ frações ou partes, distribuídas da seguinte forma:

$\mapsto n$ termos de evolução em apenas um meio de matéria constante da forma

$$\frac{1 - \cos \lambda_k}{\kappa_k^2},$$

\hookrightarrow menos $n - 1$ termos de interferência entre dois meios vizinhos consecutivos da forma

$$\frac{1 - \cos \lambda_k - \cos \lambda_{k+1} + \cos \lambda_{k,k+1}}{\kappa_k \kappa_{k+1}},$$

\hookrightarrow menos $n - 2$ termos de interferência correspondentes a três meios consecutivos da forma

$$\frac{\cos \lambda_k - \cos \lambda_{k-1,k} - \cos \lambda_{k,k+1} + \cos \lambda_{k-1,k,k+1}}{\kappa_{k-1} \kappa_{k+1}},$$

\vdots

\hookrightarrow menos um termo correspondente à interferência entre todos os n meios da forma

$$\frac{\cos \lambda_{234 \dots (n-1)} - \cos \lambda_{1234 \dots (n-1)} - \cos \lambda_{234 \dots n} + \cos \lambda_{1234 \dots n}}{\kappa_1 \kappa_n}.$$

A fórmula geral para as “frações na probabilidade”, Λ_n é dada na equação 4.28. E, além disso, como exemplo, seguindo a nossa regra heurística, mostramos a construção da probabilidade de oscilação $\mathcal{P}^{(6)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ para um neutrino que se propaga através de $n = 6$ meios (cada um com sua própria densidade constante), na equação 4.29.

$$\begin{aligned}
\Lambda_n = & \underbrace{\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \dots + \frac{1 - \cos \lambda_n}{\kappa_n^2}}_{n\text{-termos}} \underbrace{\frac{1 - \cos \lambda_{n-1} - \cos \lambda_n + \cos \lambda_{n-1, n}}{\kappa_{n-1} \kappa_n}}_{(n-1)\text{-termos}} \\
& \underbrace{\frac{\cos \lambda_2 - \cos \lambda_{12} - \cos \lambda_{23} + \cos \lambda_{123}}{\kappa_1 \kappa_3}}_{(n-2)\text{-termos}} \underbrace{\frac{\cos \lambda_{n-1} - \cos \lambda_{n-2, n-1} - \cos \lambda_{n-1, n} + \cos \lambda_{n-2, n-1, n}}{\kappa_{n-1} \kappa_n}}_{(n-3)\text{-termos}} \\
& \underbrace{\frac{\cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{123} - \cos \lambda_{234} + \cos \lambda_{1234}}{\kappa_1 \kappa_4}}_{(n-3)\text{-termos}} \underbrace{\frac{\cos \lambda_{n-2, n-1} - \cos \lambda_{n-3, n-2, n-1} - \cos \lambda_{n-2, n-1, n} + \cos \lambda_{n-3, n-2, n-1, n}}{\kappa_{n-3} \kappa_n}}_{(n-3)\text{-termos}} \\
& \dots \underbrace{\frac{\cos \lambda_{234} \dots (n-1) - \cos \lambda_{1234} \dots (n-1) - \cos \lambda_{234} \dots n + \cos \lambda_{1234} \dots n}{\kappa_1 \kappa_n}}_{\text{um termo}}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(6)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = & 2s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} + \frac{1 - \cos \lambda_3}{\kappa_3^2} + \frac{1 - \cos \lambda_4}{\kappa_4^2} + \frac{1 - \cos \lambda_5}{\kappa_5^2} + \frac{1 - \cos \lambda_6}{\kappa_6^2} \right. \\
& \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{1 - \cos \lambda_3 - \cos \lambda_4 - \cos \lambda_5 - \cos \lambda_6}{\kappa_3 \kappa_4} \frac{1 - \cos \lambda_2 - \cos \lambda_3 - \cos \lambda_4 + \cos \lambda_{34}}{\kappa_2 \kappa_3} \\
& \frac{1 - \cos \lambda_4 - \cos \lambda_5 + \cos \lambda_{45}}{\kappa_4 \kappa_5} \frac{1 - \cos \lambda_5 - \cos \lambda_6 + \cos \lambda_{56}}{\kappa_5 \kappa_6} \frac{\cos \lambda_2 - \cos \lambda_{12} - \cos \lambda_{23} + \cos \lambda_{123}}{\kappa_1 \kappa_3} \\
& \frac{\cos \lambda_3 - \cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{34} + \cos \lambda_{234}}{\kappa_3 \kappa_4} \frac{\cos \lambda_4 - \cos \lambda_{34} - \cos \lambda_{45} + \cos \lambda_{345}}{\kappa_4 \kappa_5} \\
& \frac{\cos \lambda_5 - \cos \lambda_{45} - \cos \lambda_{56} + \cos \lambda_{456}}{\kappa_5 \kappa_6} \frac{\cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{123} - \cos \lambda_{234} + \cos \lambda_{1234}}{\kappa_1 \kappa_4} \\
& \frac{\cos \lambda_{34} - \cos \lambda_{234} - \cos \lambda_{345} + \cos \lambda_{2345}}{\kappa_2 \kappa_5} \frac{\cos \lambda_{45} - \cos \lambda_{345} - \cos \lambda_{456} + \cos \lambda_{3456}}{\kappa_3 \kappa_6} \\
& \frac{\cos \lambda_{234} - \cos \lambda_{1234} - \cos \lambda_{2345} + \cos \lambda_{12345}}{\kappa_1 \kappa_5} \frac{\cos \lambda_{345} - \cos \lambda_{2345} - \cos \lambda_{3456} + \cos \lambda_{23456}}{\kappa_2 \kappa_6} \\
& \left. \frac{\cos \lambda_{2345} - \cos \lambda_{12345} - \cos \lambda_{23456} + \cos \lambda_{123456}}{\kappa_1 \kappa_6} \right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Finalmente, para verificar a confiabilidade da fórmula analítica mostrada na equação 4.29, $\mathcal{P}^{(6)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, que descreve a probabilidade de oscilação de um neutrino que se propaga através de $n = 6$ meios e que foi obtida a partir de nossa regra heurística para a fórmula geral das “frações na probabilidade” ou “partes da probabilidade” Λ_n (da equação 4.28), realizamos uma comparação com o resultado numérico, como é ilustrado na figura 4.4.

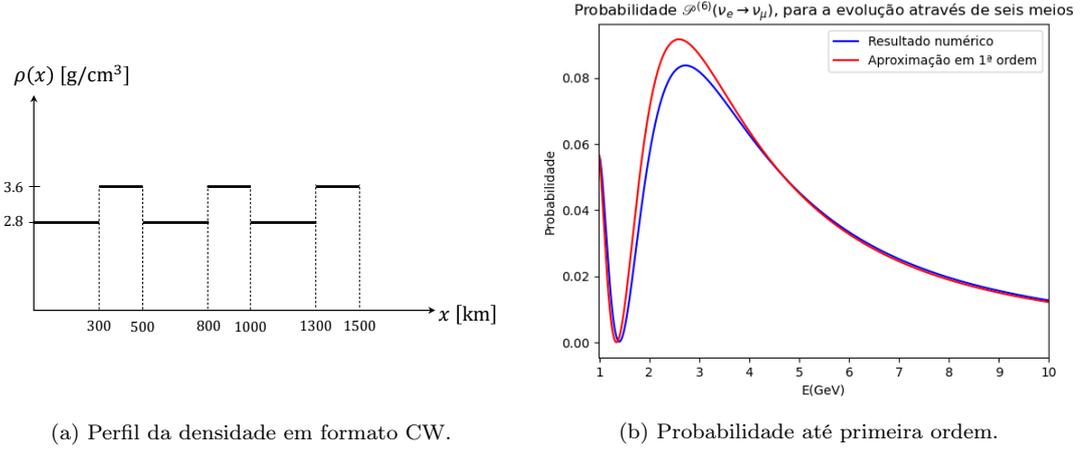


Figura 4.4: Propagação de um neutrino através de seis meios. No gráfico à esquerda, está ilustrado o perfil da densidade em formato CW do meio pelo qual o neutrino se propaga: função degrau periódica com densidades $\rho_1 = 2,8 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_2 = 3,6 \text{ g/cm}^3$, distâncias $L_1 = 300 \text{ km}$ e $L_2 = 200 \text{ km}$ e período $L = L_1 + L_2 = 500 \text{ km}$, a distância total (distância fonte - detector) percorrida pelo neutrino é $3L = 1500 \text{ km}$ (*i.e.*, três períodos). À direita, há uma comparação entre a probabilidade de oscilação $\mathcal{P}^{(6)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$, calculada numericamente (curva azul) e a calculada até primeira ordem pela fórmula analítica da equação 4.31 (curva vermelha) para um neutrino que se propaga 1500 km num meio com densidade descrita pelo perfil da equação 4.30. Os valores dos parâmetros de mistura são fornecidos na legenda da figura 4.3.

Nesse caso, consideramos um perfil de densidade no formato CW, em que a densidade é uma função em escada e periódica, dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & \text{para } 0 \leq x < L_1, \\ \rho_2 & \text{para } L_1 \leq x < L_2, \\ \rho(x + L), & \end{cases} \quad (4.30)$$

com período $L = L_1 + L_2$, onde $\rho_1 = 2,8 \text{ g/cm}^3$, $\rho_2 = 3,6 \text{ g/cm}^3$, $L_1 = 300 \text{ km}$ e $L_2 = 200 \text{ km}$. Esse perfil de densidade é mostrado no gráfico à esquerda da figura 4.4.

No gráfico à direita da figura 4.4, a fórmula analítica é comparada com o resultado numérico. Esse gráfico é construído com o resultado obtido na equação 4.29 para um neutrino que se propaga através de um meio no qual o perfil da densidade tem a forma funcional da equação 4.30 e com os ajustes globais calculados na referência [14] com ordenamento normal, NO. Essa comparação entre o cálculo numérico e a fórmula analítica indica que, dentro dos limites de validade do método, nosso resultado é muito bom, com uma concordância de pelo menos 90%.

Esse nível de precisão reforça a confiabilidade da formulação de Asano e Minakata [8], em especial para descrever numa forma clara, precisa, prática e com um formato intuitivo (que dá conta da física do fenômeno que está ocorrendo), a propagação de neutrinos através de múltiplos meios materiais. Também destaca que essa abordagem baseada na teoria de perturbação se torna uma ferramenta robusta, rápida e prática para a obtenção de probabilidades de oscilação de neutrinos quando a solução exata não é fácil de encontrar ou não oferece uma intuição clara da física por trás do fenômeno que está ocorrendo, seja para o caso em que o neutrino se propaga através de um meio no qual a densidade é uma constante ou em situações um pouco mais complexas de variação periódica da densidade.

É interessante também observar que, ao usar o perfil de densidade em forma de escada periódica (com dois degraus), dado pela equação 4.30, a equação 4.29 se simplifica significativamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CW}}^{(6)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= (1 + 2 \cos \lambda_{12})^2 \times \\ &\times \left[2s_{13}^2 s_{23}^2 \left(\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos \lambda_2}{\kappa_2^2} - \frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} \right) \right] \\ &= (1 + 2 \cos \lambda_{12})^2 \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1), \end{aligned} \quad (4.31)$$

produto da periodicidade da função de densidade¹⁹. Então, destaca-se a eficácia desse perfil de densidade específico para simplificar a nossa formulação. Na verdade, se destaca como a escolha de perfis de densidade apropriados pode não apenas descrever intuitivamente a física por trás do fenômeno, mas também simplificar consideravelmente as equações envolvidas.

Esse último resultado nos motiva a supor que, em especial quando o perfil de densidade tem formato de escada periódica, com dois degraus (equação 4.30), a probabilidade de oscilação $\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(n)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ para $n = 2k$ meios, para um neutrino que se propaga uma distância kL , sendo $L = L_1 + L_2$ é o período da função densidade e $k \in \mathbb{N}$, pode ser expressada como um múltiplo da probabilidade correspondente à propagação em dois meios, *i.e.*, $\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(2k)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = \Upsilon_{12}^k \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, onde $\Upsilon_{12}^k = \Upsilon_k(\lambda_{12})$ é uma função de λ_{12} (na verdade, é função dos $\cos k\lambda_{12}$) que chamaremos de “fator de escala”. De fato, observamos que essa relação se manifesta num padrão recorrente. Ao determinar a probabilidade $\mathcal{P}^{(n)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ por meio do cálculo de Λ_n (de acordo com as equações 4.23 e 4.28) para $n = 2k$ e, em seguida, particularizando e/ou simplificando com o formato específico da densidade periódica (equação 4.30) temos que

$$\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(4)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = (2 + 2 \cos \lambda_{12}) \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1),$$

¹⁹Temos usado o subscrito CW para nos referirmos ao formato periódico semelhante a um castelo no perfil de densidade (equação 4.30) do meio no qual o neutrino se propaga por k períodos completos uma distância kL , com k inteiro positivo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(6)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= [3 + 2(2 \cos \lambda_{12}) + 2 \cos 2\lambda_{12}] \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1), \\
\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(8)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= [4 + 3(2 \cos \lambda_{12}) + 2(2 \cos 2\lambda_{12}) + 2 \cos 3\lambda_{12}] \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1), \\
\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(10)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= [5 + 4(2 \cos \lambda_{12}) + 3(2 \cos 2\lambda_{12}) + 2(2 \cos 3\lambda_{12}) + 2 \cos 4\lambda_{12}] \cdot \\
&\quad \cdot \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1), \\
&\quad \vdots \\
\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(2k)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= \{k + (k-1)(2 \cos \lambda_{12}) + \dots + 2(2 \cos [(k-2)\lambda_{12}]) + \\
&\quad + 2 \cos [(k-1)\lambda_{12}]\} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1),
\end{aligned}$$

consequentemente, a regularidade observada sugere intuitivamente que o fator de escala fica como uma série convergente,

$$\begin{aligned}
\Upsilon_k &= k + (k-1)(2 \cos \lambda_{12}) + \dots + 2(2 \cos [(k-2)\lambda_{12}]) + 2 \cos [(k-1)\lambda_{12}] \\
&= k + \sum_{m=1}^k (k-m) [2 \cos (m\lambda_{12})] \\
&= \frac{1 - \cos(k\lambda_{12})}{1 - \cos \lambda_{12}},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

obtendo então

$$\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(2k)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = \left(\frac{1 - \cos(k\lambda_{12})}{1 - \cos \lambda_{12}} \right) \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1). \tag{4.33}$$

Por exemplo, se quisermos formular analiticamente, seguindo nosso método perturbativo até a primeira ordem²⁰, a propagação de um neutrino criado com sabor eletrônico e que se propaga por um meio no qual a densidade não é constante, mas o perfil dela pode ser descrito, numa muito boa aproximação, por $n = 10$ trechos de densidade constante cada um, primeiro calcularíamos as 55 frações ou partes da probabilidade Λ_{10} , utilizando a nossa regra heurística condensada na equação 4.28 e, em seguida, com a equação 4.23, obteríamos uma aproximação muito boa para a probabilidade $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ (suficiente para formular a oscilação em todo o setor eletrônico - confira no apêndice C). E se além disso a função de densidade tiver a periodicidade que temos analisado nesta última parte desta seção, *i.e.*, perfil em forma de escada periódica com dois degraus (equação 4.30), a nossa formulação é consideravelmente simplificada. Usando então a equação 4.33

²⁰Dentro dos limites de validade do método (distâncias inferiores aos 1500 km e energias superiores a 1 GeV), onde é garantida uma concordância superior a 90% entre o resultado numérico e a aproximação em primeira ordem.

para o valor de $k = 5$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CW}}^{(10)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= \left(\frac{1 - \cos(5\lambda_{12})}{1 - \cos\lambda_{12}} \right) \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) \\ &= (1 + 2\cos\lambda_{12} + 2\cos 2\lambda_{12})^2 \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1), \end{aligned} \quad (4.34)$$

e lembrando a relação funcional para $\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$ (equação 4.20), temos finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{CW}}^{(10)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= 2s_{13}^2 s_{23}^2 (1 + 2\cos\lambda_{12} + 2\cos 2\lambda_{12})^2 \\ &\quad \left(\frac{1 - \cos\lambda_1}{\kappa_1^2} + \frac{1 - \cos\lambda_2}{\kappa_2^2} - \frac{1 - \cos\lambda_1 - \cos\lambda_2 + \cos\lambda_{12}}{\kappa_1\kappa_2} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

se destacando a praticidade e a simplicidade algébrica dessa nova expressão para a probabilidade ao escolher perfis de densidade adequados, sem deixar de lado a interpretação analítica da física subjacente.

Dada a necessidade de obter fórmulas que nos forneçam um cálculo rápido da probabilidade de oscilação e, simultaneamente, uma intuição física clara do fenômeno que está ocorrendo, é essencial que a formulação esteja ao mesmo tempo correta dentro dos limites de validade do método. Portanto, a próxima etapa (como é habitual no desenvolvimento desses métodos analíticos) é verificar a confiabilidade e/ou a validade da formulação, fazemos isso comparando o cálculo da probabilidade usando a fórmula analítica (equação 4.35) com o resultado exato calculado numericamente. De fato, na figura 4.5 (construída com os ajustes globais - os *fits* - calculados na referência [14] com NO), não só se verifica a validade para o caso particular da propagação através de $n = 10$ meios (ou $k = 5$ períodos na função densidade), mas também se verifica a confiabilidade da fórmula $\mathcal{P}_{\text{CW}}^{(2k)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, da equação 4.33 para os casos $k = 2, 3, 4$, e 5 , isto é, para um neutrino que se propaga uma distância $2L = 600$ km, $3L = 900$ km, $4L = 1200$ km e $5L = 1500$ km, respectivamente, através de um meio material cuja densidade é descrita como uma função de escada periódica com dois degraus, *i.e.*, o perfil de densidade mostrado na equação 4.30, com valores específicos para $\rho_1 = 2,8$ g/cm³ e $\rho_2 = 3,6$ g/cm³ e com comprimentos $L_1 = 200$ km e $L_2 = 100$ km, ou seja, período $L = L_1 + L_2 = 300$ km.

Os gráficos mostrados na figura 4.5, dentro dos limites de validade do método impostos pelas nossas suposições iniciais, indicam a qualidade da nossa abordagem analítica. São garantidas discrepâncias de $\sim 8\%$ entre a nossa aproximação em primeira ordem para a probabilidade e o resultado exato calculado numericamente, para distâncias já próximas aos 1500 km (e energias em torno dos 3 GeV). Além disso, especialmente para energias acima dos 3 GeV (e distâncias abaixo dos 1500 km), se observa uma discrepância de $\sim 1\%$, que pode ser ainda menor à medida que diminuimos a distância e aumentamos a energia.

O anterior também assegura, intrinsecamente, a confiabilidade da fórmula geral

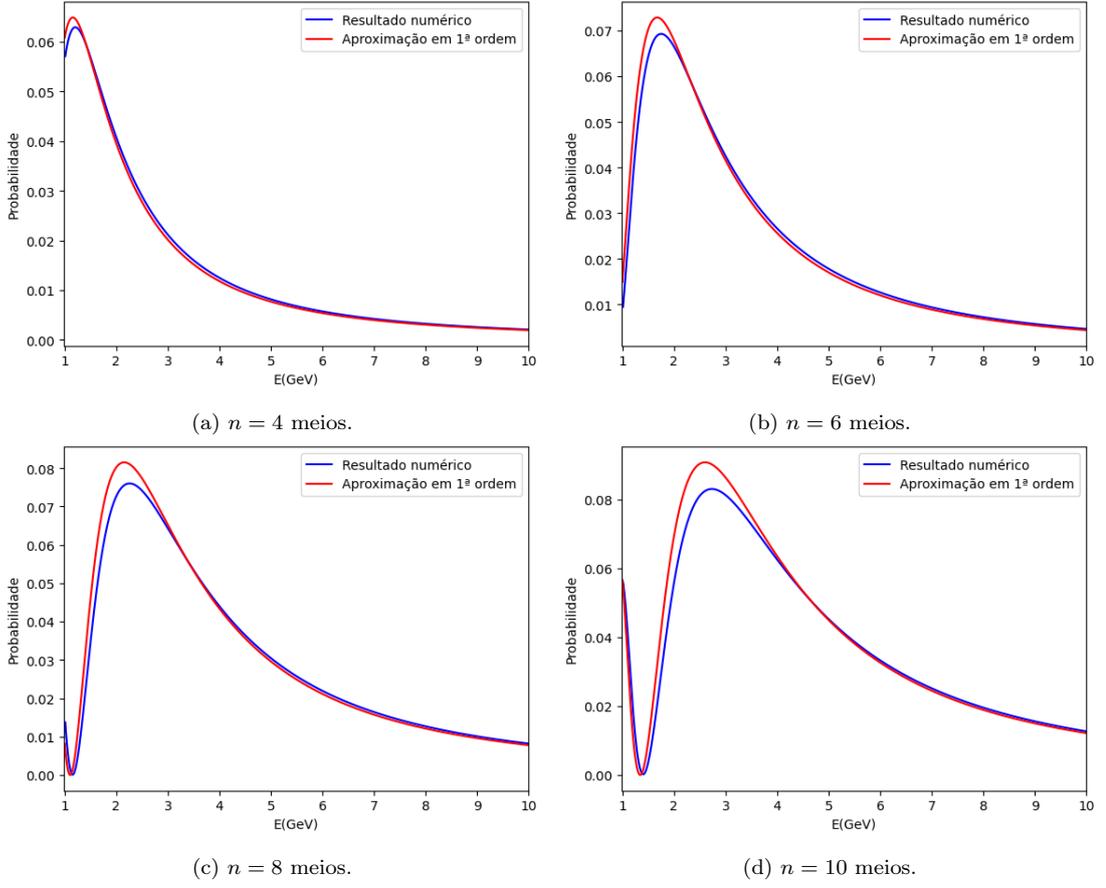


Figura 4.5: Comparação entre a probabilidade de oscilação $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ exata, calculada numericamente (curvas azuis), e a calculada através da nossa fórmula aproximada em primeira ordem $\mathcal{P}_{CW}^{(2k)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1)$, por meio da equação 4.33 (curvas vermelhas), em função da energia, para um neutrino que se propaga $2L = 600$ km, $3L = 900$ km, $4L = 1200$ km e $5L = 1500$ km (*i.e.*, dois, três, quatro e cinco períodos da função de densidade), respectivamente, por um meio cuja densidade de matéria é descrita por uma função escada de dois degraus periódica (perfil em formato castelo: *CW density profile*), conforme a equação 4.30 para valores específicos de densidades $\rho_1 = 2.8$ g/cm³ e $\rho_2 = 3.6$ g/cm³, de comprimentos $L_1 = 200$ km e $L_2 = 100$ km e com período $L = L_1 + L_2 = 300$ km. Os valores dos parâmetros de mistura usados são os indicados na legenda da figura 4.3.

(equação 4.28)²¹ para descrever a propagação de neutrinos através de múltiplos meios materiais com clareza, precisão e eficiência, capturando a essência física do fenômeno. Se consolida, mais uma vez, essa abordagem baseada na teoria de perturbação como uma ferramenta robusta, confiável e rápida para calcular probabilidades de oscilação de neutrinos em situações em que a solução exata não é fácil de obter ou não fornece uma intuição clara da física envolvida. Essa abordagem oferece soluções eficientes, tanto para meios com densidade constante quanto para situações mais complexas, *e.g.*, com variação periódica de densidade, e garante a aplicabilidade e a precisão do método.

²¹Com a qual a probabilidade é calculada pela equação 4.23 e simplificada para o caso particular do perfil CW periódico com dois degraus (equação 4.30), obtendo-se a expressão da equação 4.33.

5 CONCLUSÕES

Desde a sua hipótese há pouco mais de 90 anos, passando pela sua descoberta e detecção há quase 70 anos, até os dias de hoje, o neutrino, embora seja um dos componentes fundamentais de tudo no Universo, contrário ao esperado, é uma das partículas elementares menos compreendidas e mais misteriosas que compõem ao modelo padrão vigente. Essa partícula elementar, tão abundante no Universo (superada apenas pelo fóton e produzida, natural ou artificialmente, em todos os lugares que podemos imaginar) e envolta em tanto mistério, tem propriedades interessantes, entre as quais esta dissertação destaca e estuda principalmente a oscilação de sabor, que transforma um neutrino de um tipo em outro tipo de neutrino.

Desde que os pesquisadores Takaaki Kajita e Arthur B. McDonald receberam o prêmio Nobel em 2015, sabemos que os neutrinos de fato oscilam entre diferentes tipos ou sabores à medida que se propagam pelo espaço; e quanto maior o deslocamento, maior a probabilidade de oscilação de sabor. No entanto, resolver o problema de oscilação com três neutrinos é complicado analiticamente. Por exemplo, para o caso do problema de três estados de sabor de um neutrino que se propaga num meio material com densidade constante, encontrar a probabilidade de oscilação, usando o método tradicional de diagonalização do hamiltoniano, não é uma tarefa fácil. Porém, mesmo quando é possível obter fórmulas analíticas para esse caso “simples”, elas não têm uma forma clara ou intuitiva, e fica muito complicado entender a física envolvida no fenômeno que está ocorrendo.

Neste trabalho, temos desenvolvido um novo método para calcular probabilidades de oscilação de neutrinos e propomos fórmulas analíticas (que foram validadas pela comparação com o resultado numérico) que não só oferecem um cálculo mais rápido em comparação com o método tradicional, mas também garantem um resultado correto com uma interpretação analítica fácil de entender.

Em nossa fase inicial, replicamos e entendemos todo o maquinário matemático da formulação analítica da probabilidade de oscilação considerada na literatura, para um neutrino que se propaga num meio de densidade constante. O resultado analítico foi reportado em 2011 por Katsuhiko Asano e Hisakazu Minakata, que derivaram fórmulas analíticas para a probabilidade, até segunda ordem de expansão, por meio da teoria da perturbação $\sqrt{\epsilon}$, e assumindo como parâmetros de expansão $\epsilon = r_{\Delta} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \sim 0,3$ e $s_{13} = \sin \theta_{13} \sim \sqrt{\epsilon}$. Esses parâmetros, dados os atuais parâmetros de oscilação de neutrinos, são suficientemente pequenos para justificar a expansão em série feita em torno deles. Esse resultado, para distâncias inferiores a 1500 km e energias superiores a 2 GeV, difere do resultado numérico em menos de 1%, o que torna essa abordagem uma alternativa

eficaz (dentro desses limites da validade do método) para o cálculo das probabilidades de oscilação quando a solução exata não oferece uma intuição física clara, como nesse caso específico.

Como contribuição inicial ao trabalho de Asano e Minakata [8], fizemos uma comparação progressiva da fórmula analítica em segunda ordem com as expansões de ordem inferior (primeira ordem e até ordem $\epsilon^{3/2}$), na qual analisamos quão eficiente essa formulação continua sendo ao selecionar menos termos da expressão perturbativa da probabilidade, com o objetivo de aproveitar ao máximo as expansões de ordem inferior e encontrar expressões analíticas que sejam simples, práticas e intuitivas o suficiente para a análise de experimentos LBL. Em primeira ordem, é possível encontrar fórmulas de probabilidade para estados de três sabores na matéria que recuperam uma forma funcional semelhante à das oscilações no vácuo para duas gerações, nas quais a dependência da frequência e da amplitude de oscilação dos parâmetros de oscilação (parâmetros de mistura e diferenças dos quadrados das massas) e do efeito da matéria é bastante clara. Na ordem $\epsilon^{3/2}$, essa fórmula analítica é capaz de fornecer informações sobre a violação da simetria CP na oscilação de neutrinos.

Estabelecemos então que, para experimentos LBL (caso de interesse de DUNE), temos informações muito boas sobre a fase de oscilação e os ângulos de mistura considerando apenas a expansão em primeira ordem e, se quisermos informações sobre a violação de CP na oscilação, acrescentamos a contribuição do termo de ordem 3/2 à fórmula de probabilidade, já que a discrepância entre a fórmula completa até segunda ordem e a fórmula em primeira ordem, por exemplo, é de 1% (podendo ser menor) para distâncias da ordem dos 1000 km e energias superiores aos 3 GeV.

Adicionalmente ao anterior, após obter os resultados reportados por [8] e fazer a comparação progressiva, como um bônus, implementando a *renormalização atmosférica* de Δm^2 e repetindo o mesmo procedimento algébrico, compactamos as expressões para a probabilidade de oscilação (especialmente a expressão na segunda ordem de expansão), redefinindo o parâmetro de expansão $\epsilon \rightarrow \epsilon \equiv r_{\Delta_{\text{ren}}} = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{ee}^2}$, onde $\Delta m_{31}^2 \rightarrow \Delta m_{ee}^2 = \Delta m_{31}^2 - (\sin^2 \theta_{12}) \Delta m_{21}^2$, sem perder informações físicas relevantes (diferença relativa entre uma formulação e outra não superior a 2%) e obtendo todas as mesmas propriedades obtidas anteriormente.

O resultado mais significativo de nossa pesquisa, que corresponde aos nossos resultados originais, consiste em obter, pela primeira vez, as respectivas fórmulas de probabilidade para três sabores de um neutrino que se propaga num meio de densidade variável, mas cujo perfil pode ser aproximado a uma série de trechos de densidade constante. Isso é feito estendendo a formulação de [8] para mais de um meio, usando a aproximação da densidade em formato de castelo (*castle wall density profile*). Nesta fase da pesquisa, conseguimos derivar formulações analíticas produzidas originalmente neste trabalho por meio da teoria da perturbação $\sqrt{\epsilon}$ de [8], utilizando os mesmos parâmetros de expansão

que eles.

Primeiro, o formalismo de [8] foi estendido para dois meios, *i.e.*, uma única transição de meio, e derivamos as fórmulas analíticas para a probabilidade de oscilação. Neste caso, obtivemos nas expressões em primeira e segunda ordem a forma intuitiva de “evolução no meio 1” mais “evolução no meio 2” menos “interferência entre os meios”, o que forneceu uma compreensão clara de como cada meio (de forma individual e conjunta) afeta a probabilidade de oscilação, além de essas expressões serem simétricas sob a troca dos rótulos $1 \leftrightarrow 2$. Isso não é observado na fórmula na ordem $\epsilon^{3/2}$, pois a falta de simetria ao trocar 1 por 2 indica uma dependência funcional com o parâmetro $\delta = \delta_{CP}$, uma vez que a troca dos rótulos é equivalente a fazer inversão temporal, simetria que a probabilidade de conversão não respeita.

Posteriormente, verificamos a confiabilidade das fórmulas (dentro dos limites de validade do método) comparando o resultado com o cálculo numérico. Essa comparação mostrou que nosso resultado é muito bom, com uma discrepância de não mais de 4% entre a formulação até segunda ordem e o resultado numérico para distâncias menores que 1500 km e energias maiores que 1 GeV. Também realizamos a respectiva comparação progressiva da formulação analítica com o resultado numérico. Isso permitiu, por um lado, visualizar como a formulação analítica foi se aproximando do resultado exato calculado numericamente à medida que acrescentávamos correções de ordem superior e, por outro lado, também nos permitiu analisar a eficiência da formulação à medida que selecionávamos menos termos da expressão perturbativa da probabilidade. Estabelecemos uma concordância de 90% entre a formulação em primeira ordem (que é, de fato, a mais simples, prática e intuitiva, embora não forneça informações sobre a violação de CP) e o resultado numérico e, especialmente para energias acima de 3 GeV, as discrepâncias não passam de 5%.

O resultado justificou a próxima etapa de nossa pesquisa: tirar o máximo proveito das expressões não nulas de ordem mais baixa (primeira ordem), já que são as mais intuitivas, com o objetivo de encontrar expressões analíticas simples, práticas e precisas (suficientes para descrever a oscilação dentro do limite de validade de nosso método). De fato, conseguimos derivar uma regra heurística que nos permite construir a expressão analítica (em primeira ordem) para a probabilidade de oscilação de um neutrino que se propaga através de n meios. Além disso, mostramos como a escolha de perfis de densidade apropriados pode não apenas descrever intuitivamente a física por trás do fenômeno, mas também simplificar consideravelmente as equações envolvidas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Pauli, W. Dear radioactive ladies and gentlemen. *Phys. Today* **31N9**, 27 (1978). Pauli letter collection: letter to Lise Meitner (Typed copy). <https://cds.cern.ch/record/83282>.
- [2] Chadwick, J. The intensity distribution in the magnetic spectrum of beta particles from radium (B + C). *Verh. Phys. Gesell.* **16**, 383–391 (1914).
- [3] Reines, F. & Cowan, C. L. Detection of the free neutrino. *Phys. Rev.* **92**, 830–831 (1953).
- [4] Gouveia de Souza, D. M. & Mizukoshi, J. K. *Neutrinos*. Universidade Federal do ABC. <https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/neutrinos/>.
- [5] Kajita, T. & McDonald, A. B. *The Nobel Prize in Physics 2015*. NobelPrize.org (2015). <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2015/summary/>.
- [6] Gonzalez-Garcia, M. C., Maltoni, M. & Schwetz, T. Global Analyses of Neutrino Oscillation Experiments. *Nucl. Phys. B* **908**, 199–217 (2016). 1512.06856.
- [7] Zhang, X. *Compact Approximation Methods for Neutrino Oscillations in Matter*. Ph.D. thesis, The University of Chicago (2021).
- [8] Asano, K. & Minakata, H. Large- θ_{13} Perturbation Theory of Neutrino Oscillation for Long-Baseline Experiments. *JHEP* **06**, 022 (2011). 1103.4387.
- [9] Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L. Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Interiors* **25**, 297–356 (1981). DOI: 10.1016/0031-9201(81)90046-7.
- [10] Roe, B. Matter density versus distance for the neutrino beam from Fermilab to Lead, South Dakota, and comparison of oscillations with variable and constant density. *Phys. Rev. D* **95**, 113004 (2017). 1707.02322.
- [11] Falcone, A. Deep Underground Neutrino Experiment: DUNE. *Nucl. Instrum. Meth. A* **1041**, 167217 (2022).
- [12] Giunti, C. & Kim, C. W. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Oxford University Press, New York, 2007).
- [13] Fukugita, M. & Yanagida, T. *Physics of neutrinos and applications to astrophysics*. Theoretical and Mathematical Physics (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2003).

- [14] Esteban, I., Gonzalez-Garcia, M. C., Maltoni, M., Schwetz, T. & Zhou, A. The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *JHEP* **09**, 178 (2020). 2007.14792.
- [15] Apollonio, M. *et al.* Search for neutrino oscillations on a long baseline at the CHOOZ nuclear power station. *Eur. Phys. J. C* **27**, 331–374 (2003). hep-ex/0301017.
- [16] Minakata, H. & Parke, S. J. Simple and Compact Expressions for Neutrino Oscillation Probabilities in Matter. *JHEP* **01**, 180 (2016). 1505.01826.
- [17] Thomson, M. *Modern particle physics* (Cambridge University Press, New York, 2013).
- [18] Workman, R. L. *et al.* Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2022**, 083C01 (2022). URL <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>.
- [19] Jana, S. *Neutrino and Higgs Physics: Road-Map to Discovery for New Physics Beyond the Standard Model*. Ph.D. thesis, Oklahoma State U. (2019). <https://inspirehep.net/files/1bf6735d75471778c84d2acdaa2b3e0f>.
- [20] Herrero, M. The standard model. In *Techniques and Concepts of High Energy Physics X*, 1–59 (Springer, 1999). arXiv:hep-ph/9812242.
- [21] Santaolalla Camino, J. *Measurement of electroweak processes in muon decay channels, in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV, in the CMS experiment at LHC*. Ph.D. thesis, UCM, Madrid, Dept. Phys. (2012). <https://eprints.ucm.es/id/eprint/16456/>.
- [22] Griffiths, D. *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley & Sons, Weinheim, 2008), 2nd edn.
- [23] Martínez, R. *Teoría cuántica de campos* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2007), 1st edn. https://www.libreriaunal.com/libro/teoria-cuantica-de-campos-2a-reimpresion_3698.
- [24] Weinberg, S. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264–1266 (1967).
- [25] Pontecorvo, B. Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge. *Sov. Phys. JETP* **53**, 1717–1725 (1967).
- [26] Valdiviesso, G. & Guzzo, M. M. Compreendendo a oscilação dos neutrinos. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 495–506 (2005).
- [27] Sajjad Athar, M. *et al.* Status and perspectives of neutrino physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **124**, 103947 (2022). 2111.07586.

- [28] Machado, P. A. N. Neutrino Properties and Interactions (2022). <https://lss.fnal.gov/archive/2022/pub/fermilab-pub-22-486-t.pdf>, 2206.13449.
- [29] Félix, J. Los neutrinos. *Acta Universitaria, Guanajuato U.* **17**, 28–38 (2007).
- [30] Fermi, E. An attempt of a theory of beta radiation. I. *Z. Phys.* **88**, 161–177 (1934).
- [31] Chadwick, J. Possible Existence of a Neutron. *Nature* **129**, 312 (1932).
- [32] Chadwick, J. The Existence of a Neutron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **136**, 692–708 (1932).
- [33] Fermi, E. Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi β . *Ric. Sci.* **4**, 491–495 (1933).
- [34] Fermi, E. Trends to a Theory of β Radiation. (In Italian). *Nuovo Cim.* **11**, 1–19 (1934).
- [35] Perrin, F. Possibilité d'émission de particules neutres de masse intrinsèque nulle dans les radioactivités β . *Comptes rendus* **197**, 1625–1627 (1933).
- [36] Perrin, F. Natural particles of intrinsic mass 0. *Comptes rendus* **197**, 1625–1627 (1933).
- [37] Close, F. *Neutrino* (Oxford University Press Inc., New York, 2010).
- [38] Singleton, D. & Barrett, M. *Horizon. BBC Two England* (2014). British TV series, Series 40, Episode 15: Project Poltergeist. <https://genome.ch.bbc.co.uk/d62fac0eae8a9baad47f747f3f99c145>.
- [39] Danby, G. *et al.* Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.* **9**, 36–44 (1962).
- [40] Konopinski, E. J. & Mahmoud, H. M. The Universal Fermi interaction. *Phys. Rev.* **92**, 1045–1049 (1953).
- [41] Schwinger, J. S. A Theory of the Fundamental Interactions. *Annals Phys.* **2**, 407–434 (1957).
- [42] Perl, M. L. *et al.* Evidence for Anomalous Lepton Production in $e^+ - e^-$ Annihilation. *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1489–1492 (1975).
- [43] Kodama, K. *et al.* Final tau-neutrino results from the DONuT experiment. *Phys. Rev. D* **78**, 052002 (2008). 0711.0728.
- [44] Schael, S. *et al.* Precision electroweak measurements on the Z resonance. *Phys. Rept.* **427**, 257–454 (2006). hep-ex/0509008.

- [45] Higgs, P. W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508–509 (1964).
- [46] Bahcall, J. N. & Ulrich, R. K. Solar Models, Neutrino Experiments and Helioseismology. *Rev. Mod. Phys.* **60**, 297–372 (1988).
- [47] Haxton, W. C., Hamish Robertson, R. G. & Serenelli, A. M. Solar Neutrinos: Status and Prospects. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **51**, 21–61 (2013). 1208.5723.
- [48] Gago Medina, A. M. *Soluções de grande comprimento de oscilação para o problema de neutrinos solares*. Ph.D. thesis, Sao Paulo U. (2001). <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-04122013-105222/en.php>.
- [49] Fukuda, Y. *et al.* Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562–1567 (1998). hep-ex/9807003.
- [50] Cleveland, B. T. *et al.* Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector. *Astrophys. J.* **496**, 505–526 (1998).
- [51] Bellerive, A., Klein, J. R., McDonald, A. B., Noble, A. J. & Poon, A. W. P. The Sudbury Neutrino Observatory. *Nucl. Phys. B* **908**, 30–51 (2016). 1602.02469.
- [52] Pontecorvo, B. Mesonium and anti-mesonium. *Sov. Phys. JETP* **6**, 429 (1957).
- [53] Wu, C. S., Ambler, E., Hayward, R. W., Hoppes, D. D. & Hudson, R. P. Experimental Test of Parity Conservation in β Decay. *Phys. Rev.* **105**, 1413–1414 (1957).
- [54] Maki, Z., Nakagawa, M. & Sakata, S. Remarks on the unified model of elementary particles. *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870–880 (1962).
- [55] Michney, R. J. & Caldwell, R. R. Anisotropy of the Cosmic Neutrino Background. *JCAP* **01**, 014 (2007). astro-ph/0608303.
- [56] Pogge, R. *The Kelvin-Helmholtz Mechanism. Lecture 12: As Long as the Sun Shines*. Ohio State University (2006). <https://www.astronomy.ohio-state.edu/pogge.1/Ast162/Unit2/sunshine.html>.
- [57] Carroll, B. W. & Ostlie, D. A. *An introduction to modern galactic astrophysics and cosmology* (Pearson Addison Wesley, Ogden, UT, 2014), second edn.
- [58] Connelly, J. N. *et al.* The absolute chronology and thermal processing of solids in the solar protoplanetary disk. *Science* **338**, 651–655 (2012).
- [59] Bonanno, A., Schlattl, H. & Paternò, L. The age of the sun and the relativistic corrections in the eos. *Astron. Astrophys.* **390**, 1115–1118 (2002). astro-ph/0204331.

- [60] Gamow, G. Zur Quantentheorie des Atomkernes. *Z. Phys.* **51**, 204–212 (1928).
- [61] Bethe, H. A. & Critchfield, C. L. The formation of deuterium by proton combination. *Phys. Rev.* **54**, 248–254 (1938).
- [62] Phil, D. *Our Star, The Sun structure*. Solar System Exploration (2022). <https://solarsystem.nasa.gov/planets/sun/indepth>.
- [63] Duncan, F. The Sudbury Neutrino Observatory. *AIP Conf. Proc.* **549**, 805–808 (2000).
- [64] Xu, X.-J., Wang, Z. & Chen, S. Solar neutrino physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **131**, 104043 (2023). 2209.14832.
- [65] Rolfs, C. E. & Rodney, W. S. *Cauldrons in the cosmos: Nuclear astrophysics* (University of Chicago press, Chicago and London, 1988).
- [66] Bahcall, J. N. Solar models and solar neutrinos. *eConf* **C030626**, THAT04 (2003). [astro-ph/0310030](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310030).
- [67] Holanda, P. C. *Neutrinos solares e o método científico* (Editora da UNICAMP, Campinas, Brazil, 2022).
- [68] *Atmospheric Neutrinos*. High Energy Physics. <http://hep.bu.edu/~superk/atmnu/>.
- [69] Fukuda, Y. *et al.* Study of the atmospheric neutrino flux in the multi-GeV energy range. *Phys. Lett. B* **436**, 33–41 (1998). [hep-ex/9805006](https://arxiv.org/abs/hep-ex/9805006).
- [70] Ascencio-Sosa, M. V. *From light neutrino decay phenomenology to muon neutrino cross-section measurement at MINERvA experiment*. Ph.D. thesis, Lima, Pont. U. Católica (2022). <http://hdl.handle.net/20.500.12404/23117>.
- [71] Bahcall, J. N. & Davis, R., Jr. *On the Problem of Detecting Solar Neutrinos* (JL, 1964).
- [72] Gavrin, V. N. The Russian-American gallium experiment SAGE. *Phys. Usp.* **54**, 941–949 (2011).
- [73] Gavrin, V. N. The history, present and future of SAGE (Soviet-American Gallium Experiment). In Meyer, M. & Zuber, K. (eds.) *Proceedings, 5th International Solar Neutrino Conference: Dresden, Germany, June 11-14, 2018*, 29–46 (World Scientific Publishing Company, 2019).

- [74] Vignaud, D. THE GALLIUM SOLAR NEUTRINO EXPERIMENT GALLEX. In *5th Moriond Astrophysics Meeting: Nucleosynthesis & its Implications on Nuclear and Particle Physics*, 453–461 (1985).
- [75] Kirsten, T. A. GALLEX solar neutrino results and status of GNO. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **77**, 26–34 (1999).
- [76] Totsuka, Y. Super-Kamiokande. *Conf. Proc. C* **860416**, 118 (1986).
- [77] Bahcall, J. N. Solar models and solar neutrinos: Current status. *Phys. Scripta T* **121**, 46–50 (2005). [hep-ph/0412068](#).
- [78] Bahcall, J. N., Serenelli, A. M. & Basu, S. New solar opacities, abundances, helioseismology, and neutrino fluxes. *Astrophys. J. Lett.* **621**, L85–L88 (2005). [astro-ph/0412440](#).
- [79] Fukuda, S. *et al.* Determination of solar neutrino oscillation parameters using 1496 days of Super-Kamiokande I data. *Phys. Lett. B* **539**, 179–187 (2002). [hep-ex/0205075](#).
- [80] Aharmim, B. *et al.* Electron energy spectra, fluxes, and day-night asymmetries of B-8 solar neutrinos from measurements with NaCl dissolved in the heavy-water detector at the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev. C* **72**, 055502 (2005). [nucl-ex/0502021](#).
- [81] Ahmad, Q. R. *et al.* Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011301 (2002). [nucl-ex/0204008](#).
- [82] Ashie, Y. *et al.* A Measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by SUPER-KAMIOKANDE I. *Phys. Rev. D* **71**, 112005 (2005). [hep-ex/0501064](#).
- [83] Ascencio-Sosa, M. V. *Explorando la sensibilidad de DUNE al decaimiento invisible de neutrinos dentro del contexto de las oscilaciones de neutrinos*. Master's thesis, Lima, Pont. U. Católica (2017). <http://hdl.handle.net/20.500.12404/8904>.
- [84] Pontecorvo, B. Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge. *Sov. Phys. JETP* **34**, 247 (1957).
- [85] Gell-Mann, M. & Pais, A. Behavior of neutral particles under charge conjugation. *Phys. Rev.* **97**, 1387–1389 (1955).
- [86] Majorana, E. Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone. *Nuovo Cim.* **14**, 171–184 (1937).

- [87] Gribov, V. N. & Pontecorvo, B. Neutrino astronomy and lepton charge. *Phys. Lett. B* **28**, 493 (1969).
- [88] Bilenky, S. M. & Pontecorvo, B. Lepton Mixing and Neutrino Oscillations. *Phys. Rept.* **41**, 225–261 (1978).
- [89] Kayser, B. Neutrino physics. *eConf* **C040802**, L004 (2004). [hep-ph/0506165](#).
- [90] Cabibbo, N. Unitary Symmetry and Leptonic Decays. *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531–533 (1963).
- [91] Kobayashi, M. & Maskawa, T. CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652–657 (1973).
- [92] Akhmedov, E. K. & Smirnov, A. Y. Paradoxes of neutrino oscillations. *Phys. Atom. Nucl.* **72**, 1363–1381 (2009). [0905.1903](#).
- [93] Grimus, W. & Stockinger, P. Real oscillations of virtual neutrinos. *Phys. Rev. D* **54**, 3414–3419 (1996). [hep-ph/9603430](#).
- [94] Kayser, B. On the Quantum Mechanics of Neutrino Oscillation. *Phys. Rev. D* **24**, 110 (1981).
- [95] Sher, M. Scalar mediated flavor changing neutral currents. In *29th International Conference on High-Energy Physics*, 1740–1742 (1998). [hep-ph/9809590](#).
- [96] Fantini, G., Gallo Rosso, A., Vissani, F. & Zema, V. Introduction to the Formalism of Neutrino Oscillations. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **28**, 37–119 (2018). [1802.05781](#).
- [97] Araki, T. *et al.* Measurement of neutrino oscillation with KamLAND: Evidence of spectral distortion. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081801 (2005). [hep-ex/0406035](#).
- [98] Athanassopoulos, C. *et al.* Candidate events in a search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ oscillations. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2650–2653 (1995). [nucl-ex/9504002](#).
- [99] Aguilar-Arevalo, A. A. *et al.* The Neutrino Flux prediction at MiniBooNE. *Phys. Rev. D* **79**, 072002 (2009). [0806.1449](#).
- [100] Gonzalez-Garcia, M. C. Neutrino physics. *CERN Yellow Rep. School Proc.* **5**, 85 (2022).
- [101] Jarlskog, C. Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Nonconservation. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985).

- [102] Jarlskog, C. A Basis Independent Formulation of the Connection Between Quark Mass Matrices, CP Violation and Experiment. *Z. Phys. C* **29**, 491–497 (1985).
- [103] Zuber, K. *Neutrino Physics* (Taylor & Francis, Boca Raton, 2020), 3rd edn.
- [104] Alberico, W. M. & Bilenky, S. M. Neutrino oscillations, masses and mixing. *Phys. Part. Nucl.* **35**, 297–323 (2004). [hep-ph/0306239](#).
- [105] Greenwood, Z. D. *et al.* Results of a two-position reactor neutrino-oscillation experiment. *Phys. Rev. D* **53**, 6054–6064 (1996). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.53.6054>.
- [106] Aguilar-Arevalo, A. A. *et al.* A Search for Electron Neutrino Appearance at the $\Delta m^2 \sim 1eV^2$ Scale. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 231801 (2007). [0704.1500](#).
- [107] Aguilar, A. *et al.* Evidence for neutrino oscillations from the observation of $\bar{\nu}_e$ appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ beam. *Phys. Rev. D* **64**, 112007 (2001). [hep-ex/0104049](#).
- [108] Armbruster, B. *et al.* Upper limits for neutrino oscillations muon-anti-neutrino \rightarrow electron-anti-neutrino from muon decay at rest. *Phys. Rev. D* **65**, 112001 (2002). [hep-ex/0203021](#).
- [109] Elnimr, M. *et al.* The OscSNS White Paper. In *Snowmass 2013: Snowmass on the Mississippi* (2013). [1307.7097](#).
- [110] Karagiorgi, G. Overview of MicroBooNE Results. *PoS NOW2022*, 016 (2023).
- [111] Ahn, J. K. *et al.* Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 191802 (2012). [1204.0626](#).
- [112] Shin, C. Recent Results from RENO. *PoS ICHEP2020*, 177 (2021).
- [113] An, F. P. *et al.* Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 171803 (2012). [1203.1669](#).
- [114] Hsiung, Y. B. Reactor neutrino oscillations in Daya Bay. *PoS NOW2022*, 006 (2023).
- [115] de Kerret, H. *et al.* The Double Chooz antineutrino detectors. *Eur. Phys. J. C* **82**, 804 (2022). [2201.13285](#).
- [116] Abe, K. *et al.* Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-produced Off-axis Muon Neutrino Beam. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 041801 (2011). [1106.2822](#).

- [117] Nosek, T. Results and Prospects of T2K. In *57th Rencontres de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories* (2023). 2310.11942.
- [118] Catano-Mur, E. Recent results from NOvA. In *56th Rencontres de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories* (2022). 2206.03542.
- [119] Ichimura, K. Recent results from KamLAND-Zen. *PoS NOW2022*, 067 (2023).
- [120] Gomez-Cadenas, J. J. *et al.* Physics potential of very intense conventional neutrino beams. In *9th International Symposium on Neutrino Telescopes*, 463–481 (2001). hep-ph/0105297.
- [121] Takeuchi, Y. Recent oscillation results and future prospects of Super-Kamiokande. *PoS NOW2022*, 004 (2023).
- [122] Evans, J. New results from MINOS and MINOS+. *J. Phys. Conf. Ser.* **888**, 012017 (2017).
- [123] Indumathi, D. INO as atmospheric and magic baseline detector. *AIP Conf. Proc.* **1382**, 29–33 (2011).
- [124] Odrowski, S. Atmospheric neutrino oscillations with PINGU. *J. Phys. Conf. Ser.* **598**, 012026 (2015).
- [125] An, F. *et al.* Neutrino Physics with JUNO. *J. Phys. G* **43**, 030401 (2016). 1507.05613.
- [126] Wolfenstein, L. Neutrino Oscillations in Matter. *Phys. Rev. D* **17**, 2369–2374 (1978).
- [127] Mikheyev, S. P. & Smirnov, A. Y. Resonance Amplification of Oscillations in Matter and Spectroscopy of Solar Neutrinos. *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913–917 (1985).
- [128] Bahcall, J. N. & Bethe, H. A. A Solution of the solar neutrino problem. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2233–2235 (1990).
- [129] Landau, L. D. A theory of energy transfer on collisions. *Phys. Z. Sowjetunion* **1** (1932).
- [130] Zener, C. Nonadiabatic crossing of energy levels. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **137**, 696–702 (1932).
- [131] Pauli, W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift für Physik* **43**, 601–623 (1927).
- [132] Akhmedov, E. K., Johansson, R., Lindner, M., Ohlsson, T. & Schwetz, T. Series expansions for three flavor neutrino oscillation probabilities in matter. *JHEP* **04**, 078 (2004). hep-ph/0402175.

- [133] Cervera, A. *et al.* Golden measurements at a neutrino factory. *Nucl. Phys. B* **579**, 17–55 (2000). [Erratum: *Nucl.Phys.B* 593, 731–732 (2001)], [hep-ph/0002108](#).
- [134] Kikuchi, T., Minakata, H. & Uchinami, S. Perturbation Theory of Neutrino Oscillation with Nonstandard Neutrino Interactions. *JHEP* **03**, 114 (2009). [0809.3312](#).
- [135] Minakata, H. & Watanabe, S. Solar neutrinos and leptonic CP violation. *Phys. Lett. B* **468**, 256–260 (1999). [hep-ph/9906530](#).
- [136] Smirnov, A. Y. The MSW effect and matter effects in neutrino oscillations. *Phys. Scripta T* **121**, 57–64 (2005). [hep-ph/0412391](#).
- [137] de Holanda, P. C., Liao, W. & Smirnov, A. Y. Toward precision measurements in solar neutrinos. *Nucl. Phys. B* **702**, 307–332 (2004). [hep-ph/0404042](#).
- [138] Formaggio, J. A. & Zeller, G. P. From eV to EeV: Neutrino Cross Sections Across Energy Scales. *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1307–1341 (2012). [1305.7513](#).
- [139] Martinez, L. *et al.* Type II supernovae from the Carnegie Supernova Project-I - I. Bolometric light curves of 74 SNe II using uBgVriYJH photometry. *Astron. Astrophys.* **660**, A40 (2022). [2111.06519](#).
- [140] Martinez, L. *et al.* Type II supernovae from the Carnegie Supernova Project-I - II. Physical parameter distributions from hydrodynamical modelling. *Astron. Astrophys.* **660**, A41 (2022). [2111.06529](#).
- [141] Martinez, L. *et al.* Type II supernovae from the Carnegie Supernova Project-I - III. Understanding SN II diversity through correlations between physical and observed properties. *Astron. Astrophys.* **660**, A42 (2022). [2202.11220](#).
- [142] García, E. *Un estudio sobre supernovas aporta conocimiento sobre las estrellas y el universo*. Centro Científico Tecnológico CONICET - Patagonia Norte (2022). <https://patagonianorte.conicet.gov.ar/supernovas/>.
- [143] Maund, J. R., Smartt, S. J., Kudritzki, R. P., Podsiadlowski, P. & Gilmore, G. F. The Massive binary companion star to the progenitor of supernova 1993J. *Nature* **427**, 129–131 (2004). [astro-ph/0401090](#).
- [144] Cowen, R. Bang! The Cataclysmic Death of Stars. *National Geographic Magazine* **211**, 78– (2007). Republished: <https://www.nationalgeographic.com/science/article/cosmic-explosion>.
- [145] Gil-Botella, I. Detection of Supernova Neutrinos. In *Prospects in Neutrino Physics* (2016). [1605.02204](#).

- [146] Aartsen, M. G. *et al.* First observation of PeV-energy neutrinos with IceCube. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 021103 (2013). 1304.5356.
- [147] Pieroni, P. E. *Medición del flujo de neutrinos cósmicos ultra energéticos mediante detectores de superficie*. Ph.D. thesis, Buenos Aires U. (2016).
- [148] Grashorn, E. W. ANITA and the Highest Energy Cosmic Rays. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **229-232**, 553–553 (2012).
- [149] Kimura, S. S. Neutrinos from Gamma-ray Bursts. *arXiv preprint* (2022). 2202.06480.
- [150] Murase, K. & Stecker, F. W. High-Energy Neutrinos from Active Galactic Nuclei. *arXiv preprint* (2022). 2202.03381.
- [151] Follin, B., Knox, L., Millea, M. & Pan, Z. First Detection of the Acoustic Oscillation Phase Shift Expected from the Cosmic Neutrino Background. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 091301 (2015). 1503.07863.
- [152] Mohapatra, R. N. & Pal, P. B. *Massive neutrinos in physics and astrophysics*, vol. 60 (World Scientific Publishing Company, 1998), 2nd edn.
- [153] Villaescusa-Navarro, F., Bull, P. & Viel, M. Weighing neutrinos with cosmic neutral hydrogen. *Astrophys. J.* **814**, 146 (2015). 1507.05102.
- [154] Baumann, D. D. *et al.* First constraint on the neutrino-induced phase shift in the spectrum of baryon acoustic oscillations. *Nature Phys.* **15**, 465–469 (2019). 1803.10741.
- [155] Aguilar-Arevalo, A. A. *An Improved Neutrino Oscillations Analysis of the MiniBooNE Data*. Ph.D. thesis, Columbia U. (2008). <https://inspirehep.net/files/5c01872cead2b41c4eb1597db0d7b1b2>.
- [156] Mangano, G. & Serpico, P. D. A robust upper limit on N_{eff} from BBN, circa 2011. *Phys. Lett. B* **701**, 296–299 (2011). 1103.1261.
- [157] Aghanim, N. *et al.* Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck. *Astron. Astrophys.* **641**, A1 (2020). 1807.06205.
- [158] Migliaccio, M. Cosmic microwave background cosmology with Planck. *Nuovo Cim. C* **41**, 132 (2019).
- [159] Bennett, C. L. *et al.* Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 20 (2013). 1212.5225.

- [160] Wiescher, M. & Rauscher, T. Astronomy with Radioactivities: Chapter 9, Nuclear Reactions. *Lect. Notes Phys.* **812**, 461–489 (2011). 1011.0470.
- [161] Gaisser, T. K. & Honda, M. Flux of atmospheric neutrinos. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **52**, 153–199 (2002). hep-ph/0203272.
- [162] Rodríguez Cahuantzi, M. *Detección de muones atmosféricos en el experimento ALICE-LHC*. Ph.D. thesis, Puebla U., Mexico (2012). <http://cds.cern.ch/record/1517585>.
- [163] Mueller, T. A. *et al.* Improved Predictions of Reactor Antineutrino Spectra. *Phys. Rev. C* **83**, 054615 (2011). 1101.2663.
- [164] Necib, L., Moon, J., Wongjirad, T. & Conrad, J. M. Boosted Dark Matter at Neutrino Experiments. *Phys. Rev. D* **95**, 075018 (2017). 1610.03486.
- [165] Malewar, A. *Scientists measured neutrinos originating from the interior of the Earth*. Tech Explorist. <https://www.techexplorist.com/scientists-measured-neutrinos-originating-interior-earth/29364/>.
- [166] Bellini, G., Ianni, A., Ludhova, L., Mantovani, F. & McDonough, W. F. Geo-neutrinos. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **73**, 1–34 (2013). 1310.3732.
- [167] Dye, S. Geo-neutrinos and the Radioactive Power of the Earth. *Rev. Geophys.* **50**, 3007 (2012). 1111.6099.
- [168] Learned, J. G., Dye, S. T. & Pakvasa, S. Hanohano: A Deep ocean anti-neutrino detector for unique neutrino physics and geophysics studies. In *12th International Workshop on Neutrinos Telescopes: Twenty Years after the Supernova 1987A Neutrino Bursts Discovery*, 235–269 (2007). 0810.4975.
- [169] Duck, I. & Sudarshan, E. C. G. *Chapter 6: Dirac's Invention of Quantum Field Theory*, 149–167 (World Scientific Publishing, 1997).
- [170] Dyson, F. J. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* **75**, 1736–1755 (1949).

APÊNDICE A - FONTES DE NEUTRINOS

Já abordamos duas das fontes de neutrinos no capítulo 1 (nas seções 1.4 - 1.5), devido à sua importância histórica. Foi mencionada a produção de neutrinos solares e atmosféricos, assim como as anomalias em sua detecção como indícios experimentais das oscilações. Também mencionamos que, após do fóton, os neutrinos são as partículas elementares mais abundantes no Universo e que existem outras diversas fontes de neutrinos, tais como os neutrinos extragalácticos, os neutrinos provenientes de reatores e aceleradores, os geoneutrinos, entre outros (mostrados na figura A.1), as quais, por razões de limitações de espaço e praticidade, não foram aprofundadas em detalhe. Neste apêndice, as outras fontes de neutrinos serão exploradas brevemente, complementando a informação fornecida anteriormente e respondendo a pergunta: se o neutrino é a segunda partícula elementar mais abundante no Universo, de onde vêm tantos deles e como são produzidos?

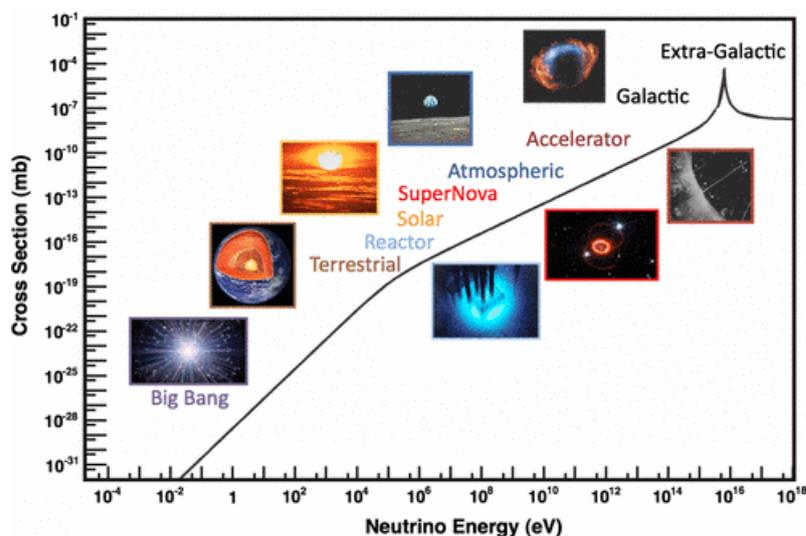


Figura A.1: Exemplo representativo de várias fontes de neutrinos ao longo várias ordens de grandeza de energia. A seção de choque eletrofraca para o espalhamento de elétrons livres $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$, em função da energia do neutrino (para um neutrino sem massa) é mostrada para comparação. O pico em $\sim 10^{16}$ eV é devido à ressonância do boson W^- . Figura extraída de [138].

Os neutrinos são produzidos de forma natural o tempo todo, embora também podem ser produzidos artificialmente¹. A seguir, apresentamos as principais fontes de neutrinos; voltamos brevemente aos neutrinos solares e atmosféricos, embora o foco principal esteja nas fontes não discutidas anteriormente. Essa inclusão tem como objetivo dar uma visão mais completa do panorama das fontes de neutrinos e destacar a diversidade

¹Os neutrinos são criados em certas reações nucleares, como no Sol, no interior da Terra ou em reatores nucleares; como um subproduto da interação dos raios cósmicos com a atmosfera; em eventos cósmicos massivos, como o *Big Bang* ou o colapso de supernovas; ou artificialmente com aceleradores de partículas.

de fenômenos que contribuem para a produção dessas partículas fundamentais.

A.1 Neutrinos cósmicos: supernovas

As supernovas (SNe: *supernovae*) são explosões extremamente energéticas que marcam o fim evolutivo de uma estrela [139]. As SNe são geradas pelo colapso de estrelas massivas (mais de 8 vezes a massa solar) que deixam um remanescente compacto, uma estrela de nêutrons ou um buraco negro [140, 141]. Durante os poucos segundos após do colapso da crosta de tais estrelas, o remanescente produz um grande fluxo de neutrinos de todos os tipos [142], quase toda a energia de amarração gravitacional liberada durante o colapso é levada pelos neutrinos, eventos categorizados como supernovas tipo Ib, Ic e II [143, 144]. Quando tais estrelas colapsam, a densidade de matéria no núcleo se torna tão grande que prótons e os elétrons se combinam para formar nêutrons e neutrinos eletrônicos. A segunda fonte mais importante é a energia térmica do núcleo de nêutrons recém formados, que se dissipa através da formação de pares neutrino-antineutrino de todos os sabores.

A energia dos neutrinos de SNe varia de alguns MeV a dezenas de MeV [145]. Entretanto, se acredita que os locais onde os raios cósmicos são acelerados produzem neutrinos que são pelo menos um milhão de vezes mais energéticos². Estes lugares são os remanescentes de SNe, ambientes com gases turbulentos. Os neutrinos também surgem de explosões de raios gama (GRB: *Gamma Ray Burst*), erupções de raios gama associadas a explosões extremamente enérgicas. Pensa-se que a maioria dos GRBs consiste de um feixe estreito de radiação intensa liberada durante uma supernova ou hypernova (ou supernova superluminosa, explosão estelar que libera 100 vezes mais energia que uma SNe comum) quando uma estrela muito massiva e de rotação rápida colapsa [149]. Os núcleos galácticos ativos (AGN: *Active Galactic Nucleus*), regiões compactas no centro de uma galáxia que têm uma luminosidade muito maior que a normal, também liberam neutrinos muito energéticos [150].

A.2 Neutrinos cósmicos: *Big Bang*

Por outro lado, os neutrinos são um produto importante do *Big Bang*, junto com a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB: *Cosmic Microwave Background*) produzida pelo *Big Bang*, existe um fundo de neutrinos de muito baixa energia no Universo [151]. Estes são os “neutrinos relíquias”, análogos aos fótons da radiação de fundo. Os neutrinos estavam inicialmente em equilíbrio térmico com o plasma quente que ocupava o Universo

²De fato, em abril de 2013, o experimento *IceCube* [146] reportou a observação de dois neutrinos com energias da ordem de 10^{15} eV. Neutrinos ainda mais energéticos, resultantes das interações de raios cósmicos extragalácticos, esperam ser observados no observatório Pierre Auger na Argentina [147] ou no experimento ANITA - *Antarctic Impulsive Transient Antenna* - na Antártica [148].

primordial através de interações fracas com outras partículas, depois, conforme o Universo se expandia e esfriava, as taxas dos processos e das interações fracas diminuía e os neutrinos se desacoplavam quando ficavam menores que as taxas de expansão [152]. Como para todos os três tipos de neutrinos com massas inferiores a 1eV a desacoplamento ocorreu quando eles eram relativistas, estes neutrinos são “reliquias quentes” [153].

Os neutrinos relíquia permeiam todo o espaço, mas sua temperatura extremamente baixa (da ordem de 10^{-4} eV [152], consideravelmente mais fria se sua massa exceder 0.001 eV) implica que a sua seção de choque efetiva é incrivelmente pequena (sejam eles considerados como relativistas sem massa ou massivos não-relativistas), tornando a sua detecção direta uma tarefa extremamente complicada [154]. No entanto, eles são um componente essencial no Modelo Cosmológico Padrão (SMC: *Standard Model of Cosmology*, também chamado de modelo Λ – CMD: *Lambda-Cold Dark Matter*) para explicar as informações astrofísicas experimentais e, mesmo existindo uma grande quantidade de neutrinos do *Big Bang* (411 cm^{-3} para cada estado próprio de massa [155]), devido à pequeníssima seção de choque efetiva eles ainda não puderam ser observados diretamente, mas sua existência foi corroborada por observações cosmológicas [154, 156–159].

A.3 Neutrinos solares

O Sol, como todas as estrelas, cria energia por meio da fusão nuclear. Os neutrinos são liberados das reações de fusão nuclear que alimentam o Sol e outras estrelas. Os neutrinos solares são aqueles produzidos em reações termonucleares que ocorrem no núcleo do Sol, que é uma fonte muito grande de neutrinos eletrônicos com energias da ordem de 1 MeV [160]. Como já foi mencionado³ e mostrado na figura 1.4, as principais reações no Sol são conhecidas como a cadeia *pp*, $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$, e a cadeia *pep*, $p + e^- + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu_e$, seguida por uma cadeia de processos cujo resultado é



onde, por meio da conservação de energia, $Q = 2m_e + 4m_p - m_{\text{He}} = 26.7 \text{ MeV}$ é a energia liberada na reação [57]. Assim, utilizando o valor da constante solar⁴ $S = 8.50 \times 10^{11} \text{ MeV cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (valor adotado pelo Centro de Radiação Mundial, WRC: *World*

³Os detalhes de operação do Sol foram explicados na subseção 1.4.1, com a ajuda do SSM, o qual colocado simplesmente é: quando quatro prótons se fusionam para se tornarem num núcleo de hélio, dois deles têm que se tornar em nêutrons e cada uma dessas conversões libera um ν_e , $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e + \gamma$

⁴Devido à distância e a relação espacial entre o Sol e a Terra, a radiação solar que chega a uma superfície, fora da atmosfera terrestre, perpendicular aos raios solares, é quase fixa, sendo denominada de constante solar.

*Radiation Center*⁵), podemos obter uma aproximação para o fluxo de neutrino na Terra,

$$\Phi_\nu \sim \frac{S}{13 \text{ MeV por cada } \nu_e} = 6.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

Os neutrinos solares são muito importantes para a física de partículas: com uma distância média Sol-Terra de 1.496×10^8 km e os neutrinos com energias de 1 MeV, podem ser testados parâmetros de oscilação da ordem de $\Delta m^2 \sim 10^{-10} \text{ eV}^2$. Mas eles também são importantes para a astrofísica: *e.g.*, em média, um fóton criado no núcleo do Sol leva várias dezenas de milhares de anos em sair ao exterior, devido as interações com a matéria solar. No entanto, os neutrinos interagem de forma tão fraca que chegam à Terra em cerca de 8 minutos.

A.4 Neutrinos atmosféricos

Os neutrinos atmosféricos são gerados pelas interações dos raios cósmicos primários, prótons e núcleos pesados, com os núcleos na parte mais externa da atmosfera. A interação destes raios primários gera raios cósmicos secundários, que incluem todos os hádrons e seus decaimentos, com um espectro de energia que atinge o pico na faixa dos GeV e se estende a energias mais elevadas aproximadamente como uma lei de potência [161]. Em particular, são produzidos muitos píons carregados, que decaem em múons/antimúons (os píons carregados normalmente decaem em múons e neutrinos muônico e píons neutros em raios gama) e antineutrinos/neutrinos muônicos, e os múons/antimúons que decaem antes de chegar à superfície geram elétrons/pósitrons e antineutrinos/neutrinos eletrônicos, processos que foram mostrados na equação 1.17 e, para um caso particular, na cadeia cinemática da figura 1.5. Em altas energias, os káons também contribuem para a produção de neutrinos e múons⁶.

Em baixas energias ($E \leq 1 \text{ GeV}$), para as quais a maioria dos múons decaem antes de chegar à superfície, além das relações na equação 1.18, estas outras relações de fluxo são satisfeitas,

$$\frac{N(\nu_\mu)}{N(\bar{\nu}_\mu)} \sim 1, \quad \frac{N(\nu_e)}{N(\bar{\nu}_e)} \sim \frac{N(\mu^+)}{N(\mu^-)}. \quad (\text{A.3})$$

Para energias superiores a 1 GeV, a fração de múons que atingem a superfície antes de decair aumenta, aumentando assim a razão entre os sabores [162].

Como se pode perceber na figura A.1, os neutrinos atmosféricos podem ser detectados na faixa de energia que vai dos 10^{-1} aos 10^5 GeV [161], aproximadamente, em laboratórios subterrâneos, por espalhamento em núcleos. Os detectores de neutrino atmosférico são frequentemente construídos subterrâneos para reduzir a interferência da

⁵Porém, vale ressaltar que este é um valor médio, pois a emissão da radiação solar não é constante com o passar do tempo.

⁶Contribuições em altas energias provenientes de káons: $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + X$ e $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + X$.

radiação cósmica e da radiação de fundo dos raios cósmicos (senão as frequentes interações de múons secundários sobrecarregariam o detector). Entretanto, não é necessário que os detectores de neutrinos atmosféricos sejam subterrâneos, pois alguns detectores, tais como ANTARES (*Astronomy with a Neutrino Telescope and Abyss environmental RESEARCH project*) e IceCube, estão localizados em gelo ou água. Estes detectores utilizam a densidade do meio para reduzir a interferência da radiação cósmica.

A distância percorrida pelos neutrinos atmosféricos desde sua origem até a superfície da Terra pode ser significativa. Os neutrinos atmosféricos se originam de reações nucleares que ocorrem na atmosfera superior, devido à incidência de raios cósmicos, como já foi dito. Estas reações podem ocorrer em altitudes de vários quilômetros acima da superfície da Terra, e os neutrinos podem viajar através da Terra antes de serem detectados em detectores subterrâneos ou aquáticos. Como mostramos na figura 1.5, esta distância é ampla: cerca de 20 km para neutrinos que chegam verticalmente de cima e $\sim 10\,000$ km para neutrinos que chegam do extremo oposto da Terra.

As características acima implicam que a razão L/E , a qual determina a sensibilidade a Δm^2 , cobre a faixa dos 10^{-4} aos 10 eV^2 [161]. Portanto, os experimentos com neutrinos atmosféricos são uma ferramenta muito poderosa para investigar oscilações de neutrinos numa faixa tão ampla de Δm^2 .

Os neutrinos atmosféricos são usados na investigação de suas propriedades (oscilação e massa), sendo o principal experimento o SK no Japão. A partícula é forte candidata para responder algumas perguntas na física, então conhecê-la bem pode encurtar o tempo dessas respostas [4].

A.5 Neutrinos de reatores nucleares

Os reatores nucleares são a principal fonte de neutrinos gerados pelo homem, uma fonte muito intensa de $\bar{\nu}_e$ gerados no decaimento beta dos núcleos que se fragmentam na fissão, onde os nêutrons liberados na fissão nuclear podem interagir com prótons, resultando na produção de antineutrinos eletrônicos⁷.

A determinação do fluxo de neutrinos dos reatores é um processo baseado na energia térmica do núcleo do reator e na taxa de fissão dos isótopos no reator. Geralmente, os quatro principais isótopos que contribuem ao fluxo de antineutrinos são ^{235}U ($\sim 56\%$), ^{238}U ($\sim 8\%$), ^{239}Pu ($\sim 30\%$) e ^{241}Pu ($\sim 6\%$) [163], através dos antineutrinos emitidos no decaimento beta negativo dos respectivos fragmentos de fissão. Em média, cada fissão libera cerca de 200 MeV e produz cerca de 6 $\bar{\nu}_e$ [163]. A densidade do fluxo é dada por

$$\Phi_\nu = 1.5 \times 10^{12} \left(\frac{P/\text{MW}}{L^2/\text{m}^2} \right) \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

⁷Essa interação específica é conhecida como decaimento inverso dos nêutrons, $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$.

onde P é a potência termica do reator (em MW) e L é a distância até o detector (em m). Assim, o fluxo isotrópico total dos $\bar{\nu}_e$ emitidos é

$$F\Phi_\nu = 1,9 \times 10^{17} \left(\frac{P}{\text{MW}} \right) \text{s}^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

A energia média dos $\bar{\nu}_e$ é da ordem de alguns MeV, abaixo dos limiares de produção de μ e τ nas interações de CC. Portanto, para os neutrinos de reatores nucleares, só é possível fazer experimentos de desaparecimento onde é necessário um conhecimento muito preciso do fluxo e do espectro de energia.

As bombas nucleares produzem uma grande quantidade de neutrinos. Até mesmo Reines e Cowan [3] consideraram a detecção de neutrinos a partir de uma explosão nuclear antes de procurar por neutrinos de reatores, mas abandonaram este processo, entre outras coisas, por causa da dificuldade de repetir o experimento.

Os neutrinos de reatores nucleares possuem energias na faixa dos MeV e são produzidos em proporções previsíveis, tornando-os uma ferramenta valiosa para a pesquisa da física de partículas e a medição precisa da potência do reator. Os detectores de neutrino de reatores nucleares também podem ser usados para monitorar a segurança e a proteção em reatores nucleares [4].

A.6 Neutrinos de aceleradores de partículas

Os aceleradores de partículas têm sido usados para gerar feixes de neutrinos, estes feixes são produzidos em aceleradores de prótons, a técnica consiste em colidir prótons com muita energia num alvo fixo (geralmente, feito de grafite) que produz partículas instáveis que decaem, entre outras coisas, em neutrinos⁸.

O feixe de prótons extraído é focalizado com um sistema magnético cuja polaridade é usada para “selecionar” a carga desejada das partículas, *e.g.*, se quisermos produzir um feixe de neutrinos, o campo magnético será ajustado para que os π^+ façam uma curva diferente dos π^- , separando-os [4].

Os píons e os káons podem decair num túnel seguido por um absorvedor que detém todas as partículas, exceto os neutrinos e antineutrinos. Então, este feixe resultante contém principalmente ν_μ ou $\bar{\nu}_\mu$ quando as partículas positivas ou negativas, respectivamente, são focalizadas. De fato, o decaimento dos múons positivos em repouso produz um feixe de antineutrinos muônicos com energias da ordem de dezenas de MeV [4]. Muito mais comuns são os feixes obtidos a partir do decaimento de píons em vôo, os píons gerados com os prótons do acelerador são focalizados com um campo magnético, como já foi dito acima, os píons positivos/negativos geram um feixe de neutrinos/antineutrinos

⁸De fato, ao parar os prótons, são produzidos hádrons charmosos pesados que decaem e produzem neutrinos e antineutrinos muônicos [18].

muônicos.

Poucos centros de pesquisa no mundo possuem aceleradores de prótons capazes de produzir intensos feixes de neutrinos: J-Park (*Japan Proton Accelerator Research Complex*) no Japão, Fermilab nos Estados Unidos e o CERN (*Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*) na Europa.

Os feixes de neutrinos criados em aceleradores permitem estudar a natureza, características e propriedades dos neutrinos e seu papel no Universo. Em geral, os experimentos utilizam detectores próximos da produção do feixe ou SBL, que detectam neutrinos recém criados e caracterizam a abundância de partículas e a energia dos neutrinos antes de uma possível contaminação do feixe; e outro longe da produção do feixe ou LBL, que detectam um número menor de neutrinos, mas pretendem entender o que acontece com um neutrino depois de percorrer uma longa distância: oscilação de sabor e efeitos da matéria nessa oscilação [4]. Eles também podem ser usados para detectar matéria escura e medir as propriedades dos neutrinos [164]. Além disso, os neutrinos de acelerador são usados em experimentos de busca de violação da simetria de paridade. Em resumo, os neutrinos de aceleradores são importantes para a compreensão da física fundamental e têm aplicações em várias áreas da física, incluindo a física de partículas, a astrofísica e a física nuclear.

Finalmente, cabe anotar que atualmente, um mega-experimento para detecção de neutrinos de aceleradores, o DUNE, está sendo construído no Fermilab, o qual conta com a contribuição de diversas instituições científicas ao redor do mundo, inclusive do Brasil. A majestade do projeto DUNE é comparável ao LHC, ambos são classificados como megaciências por exigirem centenas de cientistas e bilhões de dólares para suas respectivas execuções, impossibilitando que um único país assuma sozinho um projeto deste porte [4].

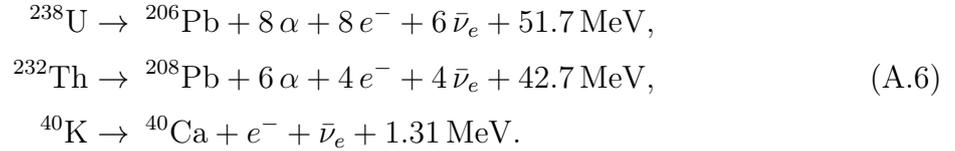
A.7 Geoneutrinos: manto e núcleo terrestre

Os chamados geoneutrinos são antineutrinos eletrônicos e provêm do decaimento beta de isótopos radioativos encontrados no interior da Terra. Coletivamente, os geoneutrinos levam informações integradas sobre a abundância de suas fontes radioativas dentro da Terra [165]. Os núcleos dos elementos que produzem a maior quantidade de calor no interior da Terra são as famílias ^{238}U e ^{232}Th , assim como também ^{40}K , de modo que a maioria dos geoneutrinos se originam precisamente nas cadeias de decaimentos beta negativo dessas famílias⁹ [4]. Destas, apenas os geoneutrinos originados nas duas primeiras cadeias têm energia suficiente (> 1.8 MeV) para serem detectados por decaimento beta inverso. Juntas, estas cadeias de decaimento são responsáveis por mais de 99% do calor

⁹Há outros decaimentos no interior do planeta que produzem os geoneutrinos, porém os fluxos são irrelevantes. Esse tipo de neutrino apresenta baixa energia, não ultrapassando 3.26 MeV.

radioativo gerado dentro da Terra [166].

As equações abaixo mostram como os antineutrinos eletrônicos são produzidos após os decaimentos dos núcleos atômicos [4, 167]:



O fluxo dos geoneutrinos e seu calor radiogênico liberado durante o decaimento radioativo têm uma taxa bem definida [167]. Portanto, ao medir o fluxo total de neutrinos provenientes da crosta e do manto da Terra, é possível, em princípio, determinar a abundância e a distribuição de U e de Th na Terra. Tais medidas são de grande utilidade em modelos geofísicos¹⁰ e geoquímicos que procuram descrever os processos que ocorrem no interior da Terra. Da mesma forma, os sinais dos geoneutrinos são de particular importância para fornecer informações sobre o poder radiogênico do manto terrestre que é impossível de obter por outros métodos [168].

Atualmente, dois experimentos contribuem na detecção de geoneutrinos, o KamLand (Japão) e o Borexino (Itália). Ambos foram construídos para detectar neutrinos de baixa energia produzidos no Sol, mas compartilham o foco principal com os antineutrinos de baixa energia provenientes dos elementos radioativos terrestres.

¹⁰Um dos principais objetivos do campo emergente da geofísica de neutrinos envolve a extração de informações geológicas valiosas das medições de geoneutrinos.

APÊNDICE B - TEORIA DE PERTURBAÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO

A evolução temporal do estado $|\Psi(t)\rangle$ é descrita pelo operador de evolução $\mathcal{S}(t, t_0)$, conforme a expressão

$$|\Psi(t_0)\rangle \longrightarrow |\Psi(t)\rangle = \mathcal{S}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (\text{B.1})$$

que, ao ser substituída na equação de Schrödinger (em unidades naturais, onde $c = \hbar = 1$), resulta em

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\Psi(t)\rangle, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}(t); \quad (\text{B.2})$$

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{S}(t, t_0) = \mathcal{H}(t) \mathcal{S}(t, t_0), \quad \mathcal{S}(t_0, t_0) = \mathbb{1}; \quad (\text{B.3})$$

onde o hamiltoniano $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ apresenta dependência temporal¹. Vale ressaltar algumas das propriedades do operador de evolução que serão muito úteis no desenvolvimento do formalismo apresentado neste apêndice,

$$\begin{cases} \mathcal{S}^{-1}(t, t_0) = \mathcal{S}(t_0, t), \\ \mathcal{S}^{-1}(t, t_0) = \mathcal{S}^\dagger(t, t_0), \\ \mathcal{S}(t_2, t_0) = \mathcal{S}(t_2, t_1) \mathcal{S}(t_1, t_0). \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

A equação B.3 (ou PVI: problema de valor inicial) é equivalente a

$$\mathcal{S}(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt' \mathcal{H}(t') \mathcal{S}(t', t_0), \quad (\text{B.5})$$

que, se iterada, resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t, t_0) = & \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{H}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \\ & + \cdots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \cdots \mathcal{H}(t_n) + \cdots, \end{aligned}$$

¹Rigorosamente, este problema não tem estados estacionários. Neste apêndice, vamos nos limitar aos problemas em que o hamiltoniano pode ser separado numa parte não dependente do tempo \mathcal{H}_0 mais uma pequena perturbação \mathcal{H}_1 , *i.e.*, $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t) = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{W}_1(t)$, onde $\lambda \ll 1$.

ou, de forma equivalente,

$$\mathcal{S}(t, t_0) = \sum_{n \geq 0} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{H}(t_1) \cdots \mathcal{H}(t_n). \quad (\text{B.6})$$

Apesar de termos uma expressão formal para $\mathcal{S}(t, t_0)$ poucos são os casos onde a equação B.6 é operacionalmente simples de se aplicar. Entretanto, seria desejável conseguirmos uma expansão do tipo (B.6) em função de $\mathcal{H}_1(t) = \lambda \mathcal{W}(t)$, pois nesse caso poderíamos expandir $\mathcal{S}(t, t_0)$ em potências de $\lambda \ll 1$. Para isso, vamos precisar usar a chamada *descrição de interação* ou *representação de Dirac* (em homenagem a Paul Dirac, quem a introduziu [169]) que desenvolveremos a seguir.

Observemos, primeiramente, que no caso da independência temporal do hamiltoniano, $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$, a equação B.6 se torna

$$\mathcal{S}(t, t_0) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-i)^n \mathcal{H}^n (t - t_0)^n = \exp[-i\mathcal{H}(t - t_0)] \quad (\text{B.7})$$

do jeito que a gente já esperava. Nesse caso, são bem conhecidas duas representações da QM; que convém mencioná-las, pois a representação de interação é uma intermediação entre elas². Elas são:

- *Representação de Schrödinger*: nesta descrição, o estado é quem evolui no tempo, através de

$$|\Psi_S\rangle = |\Psi(t)\rangle = \mathcal{S}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle = \exp[-i\mathcal{H}(t - t_0)] |\Psi(t_0)\rangle, \quad (\text{B.8})$$

e os observáveis $\mathcal{O}_S \neq \mathcal{O}(t)$, com valor esperado dado por $\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \mathcal{O}_S | \Psi(t) \rangle$, não dependem do tempo, salvo por dependência temporal explícita.

- *Representação de Heisenberg*: nesta descrição, temos estados estacionários e agora são os observáveis que evoluem no tempo. Definindo o estado $|\Psi_H\rangle = |\Psi(t_0)\rangle = \mathcal{S}^{-1}(t, t_0) |\Psi(t)\rangle = \exp[i\mathcal{H}(t - t_0)] |\Psi_S\rangle$ tal que $\frac{d}{dt} |\Psi_H\rangle = 0$, podemos calcular o valor esperado com a abordagem de Heisenberg (supondo que seja o observável quem tenha a dependência temporal),

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t) \rangle &= \langle \Psi(t) | \mathcal{O}(t) | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi_S(t) | \mathcal{O}_S | \Psi_S(t) \rangle \\ &= \langle \Psi(t_0) | \mathcal{S}^\dagger(t, t_0) \mathcal{O}_S \mathcal{S}(t, t_0) | \Psi(t_0) \rangle \\ &= \langle \Psi_H | \mathcal{O}_H(t) | \Psi_H \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde também foi definido $\mathcal{O}_H(t) = \mathcal{S}^\dagger(t, t_0) \mathcal{O}_S \mathcal{S}(t, t_0) = e^{i\mathcal{H}(t-t_0)} \mathcal{O}_S e^{-i\mathcal{H}(t-t_0)}$.

²A representação de interação consiste em “dividir” a evolução temporal do sistema entre os estados e os operadores.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{O}_H}{dt} &= \underbrace{\frac{d\mathcal{S}^\dagger}{dt}}_{i\mathcal{S}^\dagger\mathcal{H}} \mathcal{O}_S \mathcal{S} + \mathcal{S}^\dagger \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} \mathcal{S} + \mathcal{S}^\dagger \mathcal{O}_S \underbrace{\frac{d\mathcal{S}}{dt}}_{-i\mathcal{H}\mathcal{S}} = \mathcal{S}^\dagger \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} \mathcal{S} - i\mathcal{S}^\dagger \underbrace{(\mathcal{O}_S \mathcal{H} - \mathcal{H} \mathcal{O}_S)}_{[\mathcal{O}, \mathcal{H}]_S} \mathcal{S} \\ &= \mathcal{S}^\dagger \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} \mathcal{S} - i\mathcal{S}^\dagger [\mathcal{O}, \mathcal{H}]_S \mathcal{S} = \left(\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \right)_H - i[\mathcal{O}, \mathcal{H}]_H, \end{aligned}$$

i.e., a equação dinâmica, obtida pelo cálculo do valor esperado na representação Heisenberg $\langle \Psi_H | \dots | \Psi_H \rangle$, para os operadores é

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{O}(t) \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \right\rangle - i \langle [\mathcal{O}, \mathcal{H}] \rangle, \quad (\text{B.10})$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{O}_H(t)}{\partial t} = \mathcal{S}^\dagger(t, t_0) \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} \mathcal{S}(t, t_0) = e^{i\mathcal{H}(t-t_0)} \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} e^{-i\mathcal{H}(t-t_0)}, \quad (\text{B.11})$$

lembrando que na representação de Schrödinger, \mathcal{O} 's não dependem do tempo, exceto por dependência temporal explícita.

Seja agora $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t)$, onde $\mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}_0(t)$, *i.e.*, o hamiltoniano pode ser escrito como uma parte conhecida³ independente do tempo, \mathcal{H}_0 ; mais uma perturbação, $\mathcal{H}_1(t) = \lambda \mathcal{W}(t)$, sobre a qual recai toda a dependência temporal, função de algum parâmetro, $\lambda \ll 1$, o suficientemente pequeno para que possamos fazer a expansão em torno dele.

Enquanto \mathcal{H}_0 tem um espectro bem definido,

$$\mathcal{H}_0 |\Psi^{(0)}\rangle = E_0 |\Psi^{(0)}\rangle; \quad (\text{B.12})$$

$\mathcal{H}(t)$, por ser dependente do tempo, não tem estados próprios de energia, *i.e.*, a fatoração $\Psi(x, t) = e^{-iEt} \psi(x)$ não é possível quando $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$.

Queremos resolver (B.2) com $|\Psi(t_0)\rangle = |\Psi^{(0)}(t_0)\rangle = e^{-i\mathcal{H}_0 t_0} |\Psi^{(0)}(0)\rangle$ e com $\mathcal{H}_0 |\Psi^{(0)}(0)\rangle = E_0 |\Psi^{(0)}(0)\rangle$; onde $|\Psi(t)\rangle$ é associado a $\mathcal{S}(t, t_0)$ da forma (B.1).

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = [\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t)] |\Psi(t)\rangle. \quad (\text{B.13})$$

Em situações típicas, a perturbação desaparece para $t < t_0$, existe por um tempo finito e depois some para $t > t_f$, como se pode ver na figura B.1. Então, o sistema começa num estado próprio de \mathcal{H}_0 , $|\Psi(t_0)\rangle = |\Psi^{(0)}(t_0)\rangle = e^{-i\mathcal{H}_0 t_0} |\Psi^{(0)}(0)\rangle$ tal que $\mathcal{H}_0 |\Psi^{(0)}(0)\rangle = E_0 |\Psi^{(0)}(0)\rangle$; ou numa combinação linear de autoestados de \mathcal{H}_0 . Além

³Como é usual em teoria de perturbações, assumimos que o problema com $\mathcal{H}_1(t) \equiv 0$ é conhecido de forma exata.

disso, tanto $|\Psi(t_0)\rangle$ quanto $|\Psi(t_f)\rangle$ podem ser perfeitamente descritos em termos dos estados próprios de \mathcal{H}_0 ; de fato, para $t_0 < t < t_f$ (período de tempo que a perturbação dura), também podemos usar os autoestados de \mathcal{H}_0 para descrever o sistema, já que eles formam uma base completa. O problema agora é a não trivialidade na dependência temporal (fatoração da função de onda).

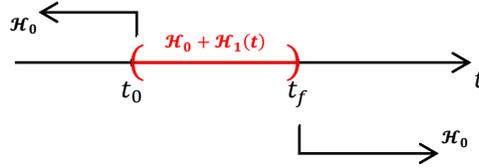


Figura B.1: Representação ilustrativa da perturbação ativa no intervalo t_0 a t_f .

Seja $\mathcal{S}_0(t, t_0)$, operador unitário, solução do PVI análogo a (B.3) para \mathcal{H}_0 :

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{S}_0(t, t_0) = \mathcal{H}_0 \mathcal{S}_0(t, t_0), \quad \mathcal{S}_0(t_0, t_0) = \mathbb{1}, \quad (\text{B.14})$$

com a ajuda dele, definimos:

- o estado do sistema (ket) na representação de interação,

$$|\Psi_I(t)\rangle \equiv \mathcal{S}_0^\dagger(t, 0) |\Psi_S\rangle = e^{i\mathcal{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{B.15})$$

- o observável (operador) na representação de interação,

$$\mathcal{O}_I(t) \equiv \mathcal{S}_0^\dagger(t, 0) \mathcal{O}_S \mathcal{S}_0(t, 0) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{O} e^{-i\mathcal{H}_0 t}. \quad (\text{B.16})$$

Nesta descrição, os operadores têm uma dependência temporal bastante simples, dependente somente de \mathcal{H}_0 . De fato, seguindo um processo semelhante ao usado para obter a equação B.10, neste caso, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{O}_I}{dt} &= \frac{d\mathcal{S}_0^\dagger}{dt} \mathcal{O}_S \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_0^\dagger \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_0^\dagger \mathcal{O}_S \frac{d\mathcal{S}_0}{dt} = \mathcal{S}_0^\dagger \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} \mathcal{S}_0 - i\mathcal{S}_0^\dagger (\mathcal{O}_S \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_0 \mathcal{O}_S) \mathcal{S}_0 \\ &= \mathcal{S}_0^\dagger \frac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} \mathcal{S}_0 - i\mathcal{S}_0^\dagger [\mathcal{O}_S, \mathcal{H}_0] \mathcal{S}_0 = \frac{\partial \mathcal{O}_I}{\partial t} - i[\mathcal{O}_I, \mathcal{H}_0], \end{aligned}$$

i.e., os operadores na representação de interação satisfazem uma equação dinâmica tipo Heisenberg com hamiltoniano \mathcal{H}_0 ,

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{O}_I(t) \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{O}_I}{\partial t} \right\rangle - i \langle [\mathcal{O}_I, \mathcal{H}_0] \rangle. \quad (\text{B.17})$$

Mas ... os estados $|\Psi_I(t)\rangle$ têm uma dependência temporal um pouquinho mais

complexa. Vejamos:

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} |\Psi_I\rangle &= i \frac{d}{dt} (e^{i\mathcal{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle) \\
 &= i \left(i\mathcal{H}_0 e^{i\mathcal{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle + e^{i\mathcal{H}_0 t} \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle \right) \\
 &= -\underbrace{\mathcal{H}_0 e^{i\mathcal{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle}_{|\Psi_I\rangle} + e^{i\mathcal{H}_0 t} \underbrace{\left(i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle \right)}_{\mathcal{H}|\Psi(t)\rangle = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1)|\Psi(t)\rangle} \\
 &= \cancel{-\mathcal{H}_0 |\Psi_I\rangle} + \underbrace{e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_0 |\Psi(t)\rangle}_{\mathcal{H}_0 e^{i\mathcal{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle} + e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_1(t) |\Psi(t)\rangle \\
 &= e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_1(t) \mathbb{1} |\Psi(t)\rangle \\
 &= \underbrace{e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_1(t)}_{\mathcal{H}_1} \underbrace{e^{-i\mathcal{H}_0 t} e^{i\mathcal{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle}_{|\Psi_I\rangle} \\
 &= \mathcal{H}_1 |\Psi_I\rangle,
 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{H}_1(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_1(t) e^{-i\mathcal{H}_0 t}$ é, por definição, a perturbação escrita na representação de interação. Assim, os estados na representação de interação satisfazem uma equação tipo Schrödinger com hamiltoniano $\mathcal{H}_1(t)$,

$$i \frac{d}{dt} |\Psi_I(t)\rangle = \mathcal{H}_1(t) |\Psi_I(t)\rangle. \quad (\text{B.18})$$

Então, temos “particionado” a evolução temporal do sistema. Os estados $|\Psi_I(t)\rangle$ evoluem sob a influência do termo de interação $\mathcal{H}_1(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_1(t) e^{-i\mathcal{H}_0 t}$, por meio de uma equação tipo Schrödinger, enquanto os operadores evoluem sob a influência do termo de não-interagente \mathcal{H}_0 , por meio de uma equação tipo Heisenberg.

Além disso, convém observar que a equação B.15 pode ser escrita em termos do operador de evolução escrito na representação de interação,

$$\begin{aligned}
 |\Psi_I(t)\rangle &= \mathcal{S}_0^\dagger(t, 0) |\Psi(t)\rangle = \mathcal{S}_0^\dagger(t, 0) \mathcal{S}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \\
 &= \underbrace{\mathcal{S}_0^\dagger(t, 0) \mathcal{S}(t, t_0) \mathcal{S}_0(t_0, 0)}_{\mathcal{S}_I(t, t_0)} \underbrace{\mathcal{S}_0^\dagger(t_0, 0) |\Psi(t_0)\rangle}_{|\Psi_I(t_0)\rangle},
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$|\Psi_I(t)\rangle = \Omega(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle, \quad (\text{B.19})$$

em que $\Omega(t, t_0) = \mathcal{S}_0^\dagger(t, 0) \mathcal{S}(t, t_0) \mathcal{S}_0(t_0, 0) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{S}(t, t_0) e^{-i\mathcal{H}_0 t}$ representa ao operador de evolução temporal e $|\Psi_I(t_0)\rangle = \mathcal{S}_0^\dagger(t_0, 0) |\Psi(t_0)\rangle = e^{i\mathcal{H}_0 t_0} |\Psi(t_0)\rangle$ ao estado inicial do sistema, escritos na representação de interação. Então, substituindo (B.19) em (B.18),

encontramos a equação dinâmica a ser satisfeita por $\Omega(t, t_0)$,

$$i \frac{d}{dt} \Omega(t, t_0) = \mathcal{H}_1(t) \Omega(t, t_0), \quad (\text{B.20})$$

com a condição inicial $\Omega(t_0, t_0) = \mathbb{1}$. Note que o PVI (B.20) é idêntico ao (B.3) com $\mathcal{H}_1(t)$ no lugar de $\mathcal{H}(t)$. Então, como sabemos, a solução formal para (B.20) será dada por

$$\Omega(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t dt' \mathcal{H}(t') \Omega(t', t_0); \quad (\text{B.21})$$

e dada a similaridade exibida, as propriedades de $\Omega(t, t_0)$ são as mesmas que já conhecemos para $\mathcal{S}(t, t_0)$, tais como conservação da informação quântica, unitariedade, composição, continuidade, reversibilidade, etc. (algumas delas mostradas na equação B.4). Em seguida, de forma semelhante, o PVI (B.20) é resolvido calculando iterativamente $\Omega(t, t_0)$ por meio da série de Dyson⁴,

$$\begin{aligned} \Omega(t, t_0) = & \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{H}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \\ & + \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{H}(t_1) \mathcal{H}(t_2) \dots \mathcal{H}(t_n) + \dots, \end{aligned}$$

ou, na sua forma equivalente,

$$\Omega(t, t_0) = \sum_{n \geq 0} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{H}(t_1) \dots \mathcal{H}(t_n), \quad (\text{B.22})$$

que é a expansão que estávamos procurando para o operador de evolução.

⁴Também é comum chamar a expansão perturbativa do operador de evolução temporal na representação de interação de “série de Dyson”, em homenagem ao seu formulador, Freeman Dyson [170].

APÊNDICE C - PROBABILIDADE DE OSCILAÇÃO NO SETOR ELETRÔNICO

Expressões perturbativas das probabilidades de oscilação no setor eletrônico

Neste apêndice, vamos apresentar as expressões perturbativas restantes das probabilidades de oscilação em todo o setor eletrônico até a segunda ordem de expansão, em cada um dos dois formalismos desenvolvidos neste projeto, a saber, a teoria da perturbação $\sqrt{\epsilon}$ de Asano e Minakata [8] e o bonus da teoria, a renormalização atmosférica. Ou seja, são mostradas novas expressões perturbativas: a probabilidade de sobrevivência, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^i)$, e a probabilidade no canal restante, *i.e.*, no $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^i)$. Além disso, também estendemos o formalismo de Asano e Minakata para mais de um meio material com densidade constante nos dois canais restantes. Observação: os termos ausentes são zero.

C.1 Um único meio com densidade constante

C.1.1 Na teoria da perturbação $\sqrt{\epsilon}$ de Asano e Minakata [8]

Probabilidade de sobrevivência, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e)$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^0) = 1, \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^1) = -\frac{4s_{13}^2}{(1-r_A)^2} \sin^2 \left[\frac{(1-r_A)\Delta L}{2} \right], \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^2) = & -4c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left[\frac{1}{r_A^2} \sin^2 \left(\frac{r_A \Delta L}{2} \right) \right] \\ & + \frac{4s_{13}^2}{(1-r_A)^4} \left\{ [s_{13}^2 (1+r_A)^2 - 2s_{12}^2 r_A (1-r_A) r_\Delta] \sin \left[\frac{(1-r_A)\Delta L}{2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (1-r_A) [s_{12}^2 (1-r_A) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_A] (\Delta L) \sin [(1-r_A)\Delta L] \right\}. \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

Probabilidade de oscilação, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 4s_{13}^2 s_{23}^2 \frac{1}{(1-r_A)^2} \sin^2 \left[\frac{(1-r_A)\Delta L}{2} \right], \quad (\text{C.4})$$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) = \frac{8J_r r_\Delta}{r_A (1-r_A)} \cos \left(\delta - \frac{\Delta L}{2} \right) \sin \left(\frac{r_A \Delta L}{2} \right) \sin \left[\frac{(1-r_A)\Delta L}{2} \right], \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2) &= 4c_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left[\frac{1}{r_A^2} \sin^2 \left(\frac{r_A \Delta L}{2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_A)^4} \left\{ [s_{13}^2 (1+r_A)^2 - 2s_{12}^2 r_A (1-r_A) r_\Delta] \sin \left[\frac{(1-r_A) \Delta L}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (1-r_A) [s_{12}^2 (1-r_A) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_A] (\Delta L) \sin [(1-r_A) \Delta L] \right\}. \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$

Probabilidade de oscilação, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^1) = 4s_{13}^2 c_{23}^2 \frac{1}{(1-r_A)^2} \sin^2 \left[\frac{(1-r_A) \Delta L}{2} \right], \quad (\text{C.7})$$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^{3/2}) = -\frac{8J_r r_\Delta}{r_A (1-r_A)} \cos \left(\delta - \frac{\Delta L}{2} \right) \sin \left(\frac{r_A \Delta L}{2} \right) \sin \left[\frac{(1-r_A) \Delta L}{2} \right], \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^2) &= 4s_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left[\frac{1}{r_A^2} \sin^2 \left(\frac{r_A \Delta L}{2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{4c_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_A)^4} \left\{ [s_{13}^2 (1+r_A)^2 - 2s_{12}^2 r_A (1-r_A) r_\Delta] \sin \left[\frac{(1-r_A) \Delta L}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (1-r_A) [s_{12}^2 (1-r_A) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_A] (\Delta L) \sin [(1-r_A) \Delta L] \right\}. \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

C.1.2 Renormalização atmosférica de Δm^2

Probabilidade de sobrevivência, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e)$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^0) = 1, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^1) = -\frac{4s_{13}^2}{(1-r_{A_{\text{ren}}})^2} \sin^2 \left[\frac{(1-r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right], \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^2) &= -4c_{12}^2 s_{12}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}}^2 \left[\frac{1}{r_{A_{\text{ren}}}^2} \sin^2 \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}} \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{4s_{13}^4}{(1-r_{A_{\text{ren}}})^4} \left\{ (1+r_{A_{\text{ren}}})^2 \sin^2 \left[\frac{(1-r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - r_{A_{\text{ren}}} (1-r_{A_{\text{ren}}}) (\Delta_{\text{ren}} L) \sin [(1-r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L] \right\}. \quad (\text{C.12})
\end{aligned}$$

Probabilidade de oscilação, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = 4s_{13}^2 s_{23}^2 \frac{1}{(1-r_{A_{\text{ren}}})^2} \sin^2 \left[\frac{(1-r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right], \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) &= \frac{8J_r r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}} (1-r_{A_{\text{ren}}})} \cos \left(\delta - \frac{\Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \sin \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}} \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \\
&\quad \cdot \sin \left[\frac{(1-r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right], \quad (\text{C.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2) &= 4c_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}}^2 \left[\frac{1}{r_{A_{\text{ren}}}^2} \sin^2 \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}} \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{4s_{13}^4 s_{23}^2}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^4} \left\{ (1 + r_{A_{\text{ren}}})^2 \sin^2 \left[\frac{(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - r_{A_{\text{ren}}} (1 - r_{A_{\text{ren}}}) (\Delta_{\text{ren}} L) \sin [(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Probabilidade de oscilação, $\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$

$$\mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^1) = 4s_{13}^2 c_{23}^2 \frac{1}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^2} \sin^2 \left[\frac{(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right], \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^{3/2}) &= -\frac{8J_r r_{\Delta_{\text{ren}}}}{r_{A_{\text{ren}}} (1 - r_{A_{\text{ren}}})} \cos \left(\delta - \frac{\Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \sin \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}} \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \\ &\quad \cdot \sin \left[\frac{(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^2) &= 4s_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_{\Delta_{\text{ren}}}^2 \left[\frac{1}{r_{A_{\text{ren}}}^2} \sin^2 \left(\frac{r_{A_{\text{ren}}} \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{4s_{13}^4 c_{23}^2}{(1 - r_{A_{\text{ren}}})^4} \left\{ (1 + r_{A_{\text{ren}}})^2 \sin^2 \left[\frac{(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - r_{A_{\text{ren}}} (1 - r_{A_{\text{ren}}}) (\Delta_{\text{ren}} L) \sin [(1 - r_{A_{\text{ren}}}) \Delta_{\text{ren}} L] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

C.2 Extensão de Asano e Minakata [8] a mais de um meio material

C.2.1 Evolução com só uma mudança de meio: dois meios

Ordem ϵ^0

$$\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^0) = 1, \quad (\text{C.19})$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^0) = 0, \quad (\text{C.20})$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^0) = 0. \quad (\text{C.21})$$

Ordem $\epsilon^{1/2}$

$$\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^{1/2}) = 0, \quad (\text{C.22})$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{1/2}) = 0, \quad (\text{C.23})$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^{1/2}) = 0. \quad (\text{C.24})$$

Ordem ϵ^1

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^1) = & -4s_{13}^2 \left\{ \frac{1}{(1-r_1)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \frac{1}{(1-r_2)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & - \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \left[\sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & \left. \left. - \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) = & 4s_{13}^2 s_{23}^2 \left\{ \frac{1}{(1-r_1)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \frac{1}{(1-r_2)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & - \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \left[\sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & \left. \left. - \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^1) = & 4s_{13}^2 c_{23}^2 \left\{ \frac{1}{(1-r_1)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \frac{1}{(1-r_2)^2} \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & - \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \left[\sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right. \\ & \left. \left. - \sin^2\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Ordem $\epsilon^{3/2}$

$$\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^{3/2}) = 0, \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^{3/2}) = & 8J_r r_\Delta \left[\frac{1}{r_1(1-r_1)} \cos\left(\delta - \frac{\Delta L_1}{2} - \Delta L_2\right) \sin\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \right. \\ & + \frac{1}{r_1(1-r_2)} \cos\left(\delta - \frac{r_1 \Delta L_1 + (1+r_2)\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \\ & + \frac{1}{r_2(1-r_1)} \cos\left(\delta - \frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (2-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \\ & \left. + \frac{1}{r_2(1-r_2)} \cos\left(\delta - \frac{\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right], \quad (\text{C.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^{3/2}) = & -8J_r r_\Delta \left[\frac{1}{r_1(1-r_1)} \cos\left(\delta - \frac{\Delta L_1}{2} - \Delta L_2\right) \sin\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \right. \\ & + \frac{1}{r_1(1-r_2)} \cos\left(\delta - \frac{r_1 \Delta L_1 + (1+r_2)\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \\ & + \frac{1}{r_2(1-r_1)} \cos\left(\delta - \frac{(1-r_1)\Delta L_1 + (2-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_1)\Delta L_1}{2}\right) \\ & \left. + \frac{1}{r_2(1-r_2)} \cos\left(\delta - \frac{\Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2}\right) \sin\left(\frac{(1-r_2)\Delta L_2}{2}\right) \right]. \quad (\text{C.30}) \end{aligned}$$

Ordem ϵ^2

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^2) = & -4c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} \sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2} \right) + \frac{1}{r_2^2} \sin^2 \left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2} \right) - \frac{1}{r_1 r_2} \left[\sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1 + r_2 \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
 & + \frac{4s_{13}^2}{(1-r_1)^4} \left\{ [s_{13}^2 (1+r_1)^2 - 2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta] \sin^2 \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_1] (\Delta L_1) \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{4s_{13}^2}{(1-r_1)^3 (1-r_2)} \left\{ \left[\frac{2s_{13}^2}{2} \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 - (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_1) (2+r_1)) \right] \right. \\
 & \quad \left. \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13} r_1] (\Delta L_1) \left[\sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
 & + \frac{32s_{13}^4}{(1-r_1)^2 (1-r_1)^2} \sin^2 \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \\
 & - \frac{4s_{13}^2}{(1-r_1) (1-r_2)^3} \left\{ \left[\frac{2s_{13}^2}{2} \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 - (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_2) (2+r_2)) \right] \right. \\
 & \quad \left. \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13} r_2] (\Delta L_2) \left[\sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
 & + \frac{4s_{13}^2}{(1-r_2)^4} \left\{ [s_{13}^2 (1+r_2)^2 - 2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta] \sin^2 \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_2] (\Delta L_2) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right\},
 \end{aligned}
 \tag{C.31}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^2) = & 4c_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} \sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2} \right) + \frac{1}{r_2^2} \sin^2 \left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2} \right) - \frac{1}{r_1 r_2} \left[\sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1 + r_2 \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
 - & \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1)^4} \left\{ \left[s_{13}^2 (1+r_1)^2 - 2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta \right] \sin^2 \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_1] (\Delta L_1) \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \right\} \\
 + & \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1)^3 (1-r_2)} \left\{ \left[2s_{13}^2 \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 - (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_1) (2+r_1)) \right] \right. \\
 & \left. \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \\
 & \left. + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13} r_1] (\Delta L_1) \left[\sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
 - & \frac{32s_{23}^2 s_{13}^4}{(1-r_1)^2 (1-r_1)^2} \sin^2 \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \\
 + & \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1) (1-r_2)^3} \left\{ \left[2s_{13}^2 \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 - (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_2) (2+r_2)) \right] \right. \\
 & \left. \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \\
 & \left. + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13} r_2] (\Delta L_2) \left[\sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
 - & \frac{4s_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_2)^4} \left\{ \left[s_{13}^2 (1+r_2)^2 - 2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta \right] \sin^2 \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_2] (\Delta L_2) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right\},
 \end{aligned}
 \tag{C.32}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(2)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^2) &= 4s_{23}^2 c_{12}^2 s_{12}^2 r_\Delta^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} \sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2} \right) + \frac{1}{r_2^2} \sin^2 \left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2} \right) - \frac{1}{r_1 r_2} \left[\sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{r_2 \Delta L_2}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{r_1 \Delta L_1 + r_2 \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
&- \frac{4c_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1)^4} \left\{ \left[s_{13}^2 (1+r_1)^2 - 2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta \right] \sin^2 \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_1] (\Delta L_1) \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \right\} \\
&+ \frac{4c_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1)^3 (1-r_2)} \left\{ \left[2s_{13}^2 \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 - (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (2s_{12}^2 r_1 (1-r_1) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_1) (2+r_1)) \right] \right. \\
&\quad \left. \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (1-r_1) [s_{12}^2 (1-r_1) r_\Delta - 2s_{13} r_1] (\Delta L_1) \left[\sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
&- \frac{32c_{23}^2 s_{13}^4}{(1-r_1)^2 (1-r_1)^2} \sin^2 \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \\
&+ \frac{4c_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_1) (1-r_2)^3} \left\{ \left[2s_{13}^2 \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 - (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta - s_{13}^2 (3+r_2) (2+r_2)) \right] \right. \\
&\quad \left. \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1}{2} \right) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13} r_2] (\Delta L_2) \left[\sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_1) \Delta L_1 + (1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right] \right\} \\
&- \frac{4c_{23}^2 s_{13}^2}{(1-r_2)^4} \left\{ \left[s_{13}^2 (1+r_2)^2 - 2s_{12}^2 r_2 (1-r_2) r_\Delta \right] \sin^2 \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) + (1-r_2) [s_{12}^2 (1-r_2) r_\Delta - 2s_{13}^2 r_2] (\Delta L_2) \sin \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \cos \left(\frac{(1-r_2) \Delta L_2}{2} \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{C.33}$$

C.2.2 Evolução com múltiplas mudanças de meio: n meios

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{(n)}(\nu_e \rightarrow \nu_e; \epsilon^1) &= -2s_{13}^2 \Lambda_n, \\ \mathcal{P}^{(n)}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; \epsilon^1) &= 2s_{13}^2 s_{23}^2 \Lambda_n, \\ \mathcal{P}^{(n)}(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; \epsilon^1) &= 2s_{13}^2 c_{23}^2 \Lambda_n. \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

onde,

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \underbrace{\frac{1 - \cos \lambda_1}{\kappa_1^2} + \dots + \frac{1 - \cos \lambda_n}{\kappa_n^2}}_{n\text{-termos}} \underbrace{\frac{1 - \cos \lambda_1 - \cos \lambda_2 + \cos \lambda_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} \dots \frac{1 - \cos \lambda_{n-1} - \cos \lambda_n + \cos \lambda_{n-1, n}}{\kappa_{n-1} \kappa_n}}_{(n-1)\text{-termos}} \\ &\quad \underbrace{\frac{\cos \lambda_2 - \cos \lambda_{12} - \cos \lambda_{23} + \cos \lambda_{123}}{\kappa_1 \kappa_3} \dots \frac{\cos \lambda_{n-1} - \cos \lambda_{n-2, n-1} - \cos \lambda_{n-1, n} + \cos \lambda_{n-2, n-1, n}}{\kappa_{n-1} \kappa_n}}_{(n-2)\text{-termos}} \\ &\quad \underbrace{\frac{\cos \lambda_{23} - \cos \lambda_{123} - \cos \lambda_{234} + \cos \lambda_{1234}}{\kappa_1 \kappa_4} \dots \frac{\cos \lambda_{n-2, n-1} - \cos \lambda_{n-3, n-2, n-1} - \cos \lambda_{n-2, n-1, n} + \cos \lambda_{n-3, n-2, n-1, n}}{\kappa_{n-3} \kappa_n}}_{(n-3)\text{-termos}} \\ &\quad \dots \underbrace{\frac{\cos \lambda_{234} \dots (n-1) - \cos \lambda_{1234} \dots (n-1) - \cos \lambda_{234} \dots n + \cos \lambda_{1234} \dots n}{\kappa_1 \kappa_n}}_{\text{um termo}}. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$