

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

CARLOS HENRIQUE TRIGO NASSER FELIX

Uma Nova Abordagem para Construção de Intervalos de Confiança Aleatorizados

Campinas

2025

Carlos Henrique Trigo Nasser Felix

Uma Nova Abordagem para Construção de Intervalos de Confiança Aleatorizados

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientadora: Nancy Lopes Garcia

Coorientador: Alex Rodrigo dos Santos Sousa

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Carlos Henrique Trigo Nasser Felix e orientada pela Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia.

Campinas

2025

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F335n Felix, Carlos Henrique Trigo Nasser, 2001-
Uma nova abordagem para construção de intervalos de confiança
aleatorizados / Carlos Henrique Trigo Nasser Felix. – Campinas, SP : [s.n.],
2025.

Orientador: Nancy Lopes Garcia.
Coorientador: Alex Rodrigo dos Santos Sousa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas
(UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Intervalos de confiança. 2. Lema de Neyman-Pearson. 3. Teoria das
medidas. 4. Tamanho esperado (Estatística). 5. Lógica fuzzy. I. Garcia, Nancy
Lopes, 1964-. II. Sousa, Alex Rodrigo dos Santos, 1989-. III. Universidade
Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. IV. Título.

Informações complementares

Título em outro idioma: A new approach to building randomized confidence intervals

Palavras-chave em inglês:

Confidence intervals
Neyman-Pearson lemma
Measure theory
Expected length (Statistics)
Fuzzy logic

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora:

Nancy Lopes Garcia [Orientador]
Laécio Carvalho de Barros
Denise Duarte

Data de defesa: 07-03-2025

Programa de Pós-Graduação: Estatística

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)
Não se aplica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0007-5822-0945>
- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/1410081808137457>

**Dissertação de Mestrado defendida em 07 de março de 2025 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Profa. Dra. NANCY LOPES GARCIA

Prof. Dr. LAÉCIO CARVALHO DE BARROS

Profa. Dra. DENISE DUARTE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

À Professora Doutora Nancy Lopes Garcia e ao Professor Doutor Alex Rodrigo dos Santos Sousa por suas orientações, incentivos e paciência que tornaram esse trabalho possível.

Aos meus pais, Jeanette Trigo Nasser e Carlos Cezar da Silva Felix, por estarem presentes em toda minha vida, me aconselhando e sempre incentivando meus estudos.

À Laura Ferro por me acompanhar durante essa jornada tornando meus dias mais felizes.

Aos colegas de graduação e pós-graduação por compartilharem momentos nessa caminhada.

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas e aos docentes e funcionários que o compõem pelo aprendizado ao longo dos anos.

Em especial, ao Professor Doutor Rafael Pimentel Maia que me acolheu desde o início da graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Nesta dissertação são apresentados os estudos realizados na área de teoria da medida, com o objetivo de elaborar intervalos de confiança aleatorizados baseados no lema de Neyman-Pearson, de forma a torná-los mais abrangentes para distribuições que não atendem as condições de regularidade. Isto é alcançado utilizando a definição de intervalos de confiança fuzzy. Esses intervalos são comparados com os métodos descritos na literatura para distribuições conhecidas como a normal, binomial e Poisson. Os resultados mostram que, em situações de alta variância, os novos intervalos apresentam um melhor resultado. Além disso, por meio desses intervalos, é possível calcular o limite inferior para o tamanho esperado, demonstrando que eles apresentam o menor valor máximo de tamanho esperado para uma observação de ensaio de Bernoulli.

Palavras-chave: Intervalos de confiança. lema de Neyman-Pearson. Teoria da medida. Tamanho esperado. Lógica fuzzy.

Abstract

This dissertation presents studies carried out in the area of measure theory, with the aim of developing randomized confidence intervals based on the Neyman-Pearson lemma, in order to make them suitable for distributions that do not satisfy the regularity conditions. This is achieved using the definition of fuzzy confidence intervals. These intervals are compared with the methods described in the literature for known distributions such as normal, binomial and Poisson. The results show that, the new intervals presents a better result in situations of high variance. Furthermore, through these intervals, it is possible to calculate the lower limit for the expected length, demonstrating that they present the lowest maximum value of expected length for single Bernoulli trial.

Keywords: Confidence intervals. Neyman–Pearson lemma. Measure theory. Expected length. Fuzzy logic.

Lista de ilustrações

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Exemplo da solução gráfica descrita em George B. Dantzig (1957) para o problema da mochila | 21 |
| Figura 2 – Funções ψ_o (painel esquerdo superior) e ψ^N (painel direito superior). A região colorida indica os valores onde a função vale 1, fora na região em branco a função vale 0, em pontilhados temos retas que definem a fronteira dessa região. No painel inferior temos a sobreposição dessas regiões. | 32 |
| Figura 3 – Funções ψ_o (painel esquerdo) e ψ^N (painel direito). A região em azul indica a região onde o valor das funções é 1, fora da região vale 0, em pontilhados temos retas que definem a fronteira dessa região. | 33 |
| Figura 4 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso binomial com $\tau = o$ | 36 |
| Figura 5 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso binomial com $\tau = o$ | 38 |
| Figura 6 – Função de pertinência fuzzy $\psi_o \tau \omega$ no caso da distribuição binomial com $n = 10$ e $o = 0.2$ para o painel da esquerda, $o = 0.5$ para o painel central e $o = 0.8$ no painel da direita. | 39 |
| Figura 7 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{0.5}$ e ψ^{AC} com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição binomial com $n = 10$ | 40 |
| Figura 8 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{0.5}$ e ψ^{GM} com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição binomial com $n = 10$ | 41 |
| Figura 9 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso Poisson com $\tau = o$ | 44 |
| Figura 10 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso Poisson com $\tau = o$ | 46 |
| Figura 11 – Função de pertinência fuzzy $\psi_o \tau \omega$ no caso da distribuição de Poisson com $o = 4$ para o painel da esquerda, $o = 8$ para o painel central e $o = 12$ no painel da direita. | 47 |
| Figura 12 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{3.8}$ e ψ^S com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição de Poisson. | 48 |
| Figura 13 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{3.8}$ e ψ^{GM} com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição de Poisson. | 49 |
| Figura 14 – Tamanho esperado multiplicado por $\frac{n}{\sigma^2}$ no caso da distribuição normal com parâmetros de média θ e variância σ^2 , para ψ^N e ψ_o . A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior, λ se refere a medida de Lebesgue. | 52 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 15 – Tamanho esperado no caso da distribuição normal com parâmetros de media $\mu = 0,1$ e variância σ^2 , para ψ^{NL} e ψ_o , com $o = 0.5$. A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue, em cada painel é utilizado um valor diferente de $\frac{\sigma}{n}$ | 56 |
| Figura 16 – Tamanho esperado no caso binomial com parâmetro $n = 10$ e θ , para 5 métodos discutidos, sendo 3 deles referentes a ψ_o para $o_1 = 0.1$, $o_2 = 0.5$ e $o_3 = 0.9$, ψ^{GM} e ψ^{AC} . A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue. | 57 |
| Figura 17 – Tamanho esperado no caso binomial com parâmetro $n = 1$ e θ , para ψ_o com $o = 0.5$. A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue. | 58 |
| Figura 18 – Tamanho esperado no caso Poisson com parâmetro θ , para 5 métodos discutidos, sendo 3 deles referentes a ψ_o para $o_1 = 0$, $o_2 = 5$ e $o_3 = 10$, ψ^{GM} e ψ^S . A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue. | 59 |

Sumário

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Introdução | 11 |
| 1.1 | Definições | 12 |
| 1.2 | Métodos existentes | 14 |
| 1.2.1 | Método padrão para distribuição normal com variância conhecida | 14 |
| 1.2.2 | Método de Agresti-Coull | 15 |
| 1.2.3 | Método Score | 15 |
| 1.2.4 | Método de Geyer-Medeen | 16 |
| 2 | Método de minimização | 19 |
| 2.1 | Versão não paramétrica | 19 |
| 2.1.1 | O problema da mochila | 19 |
| 2.2 | Demonstração do Teorema 1 | 24 |
| 2.2.1 | Interpretações | 26 |
| 3 | Exemplos de funções de pertinência de intervalos de confiança fuzzy | 28 |
| 3.1 | Distribuição Normal | 28 |
| 3.2 | Distribuição Normal com média limitada | 32 |
| 3.3 | Distribuição Binomial | 33 |
| 3.4 | Distribuição Poisson | 41 |
| 4 | Tamanho Esperado | 50 |
| 4.1 | Exemplos de tamanhos esperados | 51 |
| 4.1.1 | Distribuição Normal | 51 |
| 4.1.2 | Distribuição Normal com média limitada | 53 |
| 4.1.3 | Distribuição Binomial | 56 |
| 4.1.4 | Distribuição de Poisson | 58 |
| 5 | Considerações Finais | 60 |
| | REFERÊNCIAS | 61 |

1 Introdução

A construção de intervalo de confiança é um tópico inicialmente proposto em [LaPlace \(1820\)](#), com o desenvolvimento de um intervalo de confiança para o parâmetro que representa a proporção de sucessos de uma distribuição binomial. O intervalo proposto possui um estimador pontual para a proporção (proporção amostral) como centro e comprimento proporcional ao erro padrão do estimador.

Entretanto, a construção de um intervalo de confiança para parâmetros de uma distribuição discreta pela definição dada pode apresentar problemas pois sua taxa de cobertura pode não se igual ao nível de confiança desejado. Uma abordagem que foi adotada é de considerar que essa taxa também possa ser superior ao valor de referência. Em [Agresti e Coull \(1998\)](#) é mostrado que essa abordagem gera intervalos maiores, se comparados aos métodos assintóticos, em que a taxa de cobertura se aproxima do nível de confiança a medida que o tamanho da amostra aumenta. Esses intervalos são adequados para amostras com tamanho maior que um certo valor, para não possuir uma taxa de cobertura muito inferior ao nível de confiança.

Uma forma de contornar esse problema é utilizar intervalos de confiança aleatorizados, propostos inicialmente em [Stevens \(1950\)](#), ou a abordagem apresentada por [Geyer e Meeden \(2005\)](#) de intervalo de confiança fuzzy. Ambos os casos possibilitam a obtenção de taxa de cobertura igual ao nível de confiança. O segundo método se baseia no teste de hipótese não viesado uniformemente mais poderoso e na definição de função de pertinência da lógica fuzzy. Uma comparação desse com outros presentes na literatura pode ser encontrada em [Holladay \(2019\)](#).

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um método de intervalo de confiança fuzzy baseado no lema de Neyman-Pearson de hipótese simples de tal forma que o mesmo esteja definido para qualquer família paramétrica de distribuições e tenha um menor tamanho esperado em um valor específico se comparado a qualquer outro método. Foi possível determinar um limite inferior para o tamanho esperado. Além disso, o estimador proposto foi calculado para as distribuições normal, binomial e Poisson e comparado com outros presentes na literatura.

1.1 Definições

Nesta seção apresentaremos definições disponíveis na literatura de intervalos de confiança e suas modificações, e o critério de comparação entre eles de tamanho esperado. Primeiramente vejamos algumas definições presentes em [Mood, Graybill e Boes \(1974\)](#).

Definição 1. (Intervalo de Confiança) Dado X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da densidade $f; \theta$, com o parâmetro que determina a distribuição $\theta \in \Theta$, uma função conhecida $\iota : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, e $T_1 = T_1(X_1, \dots, X_n)$ e $T_2 = T_2(X_1, \dots, X_n)$ duas estatísticas satisfazendo $T_1 \leq T_2$ de tal forma que $P_\theta(T_1 \leq \iota(\theta) \leq T_2) = \gamma$, onde γ não depende de θ ; então o intervalo aleatório $[T_1, T_2]$ é chamado de intervalo de $100\gamma\%$ de confiança para $\iota(\theta)$; γ é chamado de nível de confiança; e T_1 e T_2 são chamados de limite inferior e limite superior, respectivamente, para $\iota(\theta)$. O intervalo observado $[t_1, t_2]$ do intervalo aleatório $[T_1, T_2]$ também é chamado de intervalo de $100\gamma\%$ de confiança para $\iota(\theta)$.

Essa definição prevê uma estimação do valor da função no verdadeiro valor do parâmetro $\iota(\theta)$, por exemplo poderia ser a média de uma distribuição definida por múltiplos parâmetros, nesse texto exemplificaremos os métodos no caso uniparamétrico, ou seja, quando $\iota(\theta) = \theta$ e $\Theta \subset \mathbb{R}$.

Definição 2. (Tamanho Esperado) Dado X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da densidade $f; \theta$, com $\theta \in \Theta$, $\iota : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, e o intervalo de $100\gamma\%$ de confiança para $\iota(\theta)$ dado por $[T_1(X_1, \dots, X_n), T_2(X_1, \dots, X_n)]$, então a função $TE(\theta) = E_\theta(T_2 - T_1 | X_1, \dots, X_n)$ é o tamanho esperado do intervalo de confiança.

Outro conceito utilizado para se determinar intervalos de confiança se dá pela sua dualidade com teste de hipótese com $H_0 : \theta \leq \tau$ contra $H_1 : \theta > \tau$.

Para denotar um teste de hipótese utilizaremos o símbolo Υ , e no caso de hipótese nula $H_0 : \theta \leq \tau$ contra $H_1 : \theta > \tau$ denotaremos o teste como Υ_τ , para enfatizar que para cada τ temos um teste de hipótese diferente.

Os conceitos utilizados nesse texto referentes a teste de hipótese são de região de rejeição, função poder, teste uniformemente mais poderoso, teste não enviesado e teste não enviesado uniformemente mais poderoso.

Definição 3. (Região de rejeição) A região de rejeição de um teste de hipótese Υ com hipótese nula H_0 é um conjunto $C_\Upsilon \subset \Omega$ que define o teste Υ pelo seguinte procedimento, dado que o valor $X = x$ é observado, se rejeita H_0 se $x \in C_\Upsilon$ e não se rejeita H_0 se $x \notin C_\Upsilon$.

Definição 4. (Função poder) A função poder de um teste de hipótese Υ com hipótese nula H_0 é a uma função $\pi_\Upsilon : \Theta \rightarrow [0, 1]$ dada pela probabilidade de rejeitar H_0 dado que a distribuição da amostra é definida pelo parâmetro $\tau \in \Theta$.

Definição 5. (Teste uniformemente mais poderoso) Um teste Υ com hipótese nula $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ é chamado de teste uniformemente mais poderoso (**UMP**) de tamanho α se e somente se

$$\sup_{\tau \in \Theta_0} \pi_{\Upsilon}(\tau) = \alpha, \text{ e}$$

$$\pi_{\Upsilon}(\tau) \leq \alpha \text{ para todo } \tau \in \Theta \setminus \Theta_0,$$

para qualquer teste de hipótese Υ com tamanho menor ou igual a α .

Para encontrar o teste **UMP** no caso de hipóteses simples, ou seja $H_0 : \theta = \tau_0$ contra $H_1 : \theta = \tau_1$, se utiliza o lema de Neyman–Pearson, para hipóteses compostas um teste com essa característica pode não existir, uma alternativa utilizada é restringir os testes de hipóteses para os que são não enviesados.

Definição 6. (Teste não enviesado) Um teste Υ com hipótese nula $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$ é não enviesado se e somente se

$$\sup_{\tau \in \Theta_0} \pi_{\Upsilon}(\tau) = \inf_{\tau \in \Theta_1} \pi_{\Upsilon}(\tau).$$

Definição 7. (Teste não enviesado uniformemente mais poderoso) Um teste não enviesado Υ com hipótese nula $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ é chamado de teste não enviesado uniformemente mais poderoso (**UMPU**) de tamanho α se e somente se

$$\sup_{\tau \in \Theta_0} \pi_{\Upsilon}(\tau) = \alpha, \text{ e}$$

$$\pi_{\Upsilon}(\tau) \leq \alpha \text{ para todo } \tau \in \Theta \setminus \Theta_0$$

para qualquer teste de hipótese Υ com tamanho menor ou igual a α .

Observe que podemos obter um teste de hipótese de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \tau$ contra $H_1 : \theta \neq \tau$ utilizando um intervalo de confiança com nível de confiança $1 - \alpha$ definindo a seguinte região de rejeição, $C_{\Upsilon, \tau} = \{x \in \Omega : T_1(x) > \tau, T_2(x) < \tau\}$.

O processo inverso é obtido de forma similar, tendo a questão que nem sempre se obtêm um intervalo, e portanto se necessita expandir a definição de para conjunto de confiança.

Outra questão presente na literatura se refere a impossibilidade de obter um teste de tamanho exatamente igual a α para distribuições discretas, uma forma de contornar isso é utilizando testes aleatorizados.

Definição 8. (Teste de hipótese aleatorizado) Um teste de hipótese aleatorizado é definido pela sua probabilidade de rejeitar H_0 dado que $X = x$ foi observado, dado pela função $\phi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ denominada por função de rejeição.

Com a dualidade entre intervalos de confiança e teste de hipótese é possível obter intervalos de confiança aleatorizados, como descrito em [Geyer e Meeden \(2005\)](#), que devido a baixa adesão desses métodos aleatorizados por se obter resultados diferentes para os mesmos dados apresentam uma nova abordagem utilizando lógica fuzzy.

A ideia é definir a região de rejeição C_γ como um conjunto fuzzy com função de pertencimento sendo a função de rejeição ϕ . No caso do intervalo de confiança aleatorizado associado ao teste se utiliza a definição da região de não rejeição, dado pelo complementar da região da rejeição, com função de pertencimento $\psi = 1 - \phi$. Com as ideias apresentadas no artigo desenvolvemos as seguintes definições.

Definição 9. (Intervalo de Confiança Fuzzy) Dado Θ um espaço paramétrico, $\Omega, \mathcal{A}, \mu, \tau$ um espaço de probabilidade para todo $\tau \in \Theta$ e $\gamma \in [0, 1]$ o nível de confiança desejado, a função de pertinência ao intervalo $\psi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ \mathcal{A} -mensurável com $\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \tau) = \gamma$ define um intervalo de confiança fuzzy de 100 γ % de confiança.

Definição 10. (Tamanho Esperado Fuzzy) Dado Θ um espaço paramétrico, o espaço de probabilidade $\Omega, \mathcal{A}, \mu, \tau$ para todo $\tau \in \Theta$ e $\gamma \in [0, 1]$ o nível de confiança desejado, um espaço de medida Θ, \mathcal{O}, ν que define o tamanho no conjunto Θ e a função de pertinência ao intervalo ψ que define um intervalo de confiança fuzzy, a função $TE(\psi, \theta, \nu) = \int_{\Theta} E_{\theta}(\psi(\tau, \omega)) d\nu(\tau)$ é o tamanho esperado do intervalo de confiança fuzzy.

1.2 Métodos existentes

Nesta seção apresentaremos métodos disponíveis na literatura para obtenção de intervalos de confiança para a média da distribuição normal com variância conhecida, proporção da distribuição binomial, média da distribuição Poisson e desenvolvidos para distribuições pertencentes a família exponencial uniparamétrica.

1.2.1 Método padrão para distribuição normal com variância conhecida

Sejam X_1, \dots, X_n amostra aleatória de tamanho n com distribuição normal com média μ e variância conhecida σ^2 , $\sigma > 0$ e \bar{X} a média amostral, então um intervalo de confiança de nível 100 γ % para μ é dado por

$$\bar{X} \pm Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (1.1)$$

em que $Z_{\frac{1-\gamma}{2}}$ é o quantil com $\frac{1-\gamma}{2}$ de probabilidade acumulada para a distribuição normal padrão. Para mais detalhes, ver [Mood, Graybill e Boes \(1974\)](#).

Sua função de pertinência fuzzy é definida por

$$\psi^N(\tau; \bar{X}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \tau < \bar{X} - Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ 1, & \text{se } \bar{X} - Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \tau \leq \bar{X} + Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ 0, & \text{se } \tau > \bar{X} + Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

1.2.2 Método de Agresti-Coull

Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial com n ensaios e probabilidade de sucesso $p \in (0, 1)$, então um intervalo de confiança de nível $100\gamma\%$ para p é dado por

$$\tilde{p} \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\tilde{n}}} \sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}; \tilde{p} = \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\tilde{n}}} \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\tilde{n}}}, \quad (1.2)$$

em que $\tilde{n} = n + Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2$, $\tilde{p} = \frac{X + Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{\tilde{n}}$ e $Z_{\frac{1-\gamma}{2}}$ é o quantil com $\frac{1-\gamma}{2}$ de probabilidade acumulada para a distribuição normal padrão. Para mais detalhes, ver [Agresti e Coull \(1998\)](#).

Sua função de pertinência fuzzy é definida por

$$\psi^{AC}(\tau; X) = \begin{cases} 0, & \text{se } \tau < \tilde{p} - \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\tilde{n}}} \sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})} \\ 1, & \text{se } \tilde{p} - \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\tilde{n}}} \sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})} \leq \tau \leq \tilde{p} + \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\tilde{n}}} \sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})} \\ 0, & \text{se } \tau > \tilde{p} + \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\tilde{n}}} \sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})}. \end{cases}$$

1.2.3 Método Score

Seja X uma variável aleatória com distribuição Poisson com média $\lambda > 0$, então um intervalo de confiança de nível $100\gamma\%$ para λ é dado por

$$X \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{2} \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{2} \sqrt{X \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{4}}; X \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{2} \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{2} \sqrt{X \pm \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{4}}, \quad (1.3)$$

em que $Z_{\frac{1-\gamma}{2}}$ é o quantil com $\frac{1-\gamma}{2}$ de probabilidade acumulada para a distribuição normal padrão. Para mais detalhes, ver [Holladay \(2019\)](#).

Sua função de pertinência fuzzy é definida por

$$\psi^S_{\tau, X} = \begin{cases} 0, & \text{se } \tau \leq X \leq \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{2} \\ 1, & \text{se } X \leq \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{2} \text{ e } X \leq \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{4} \\ 0, & \text{se } \tau \leq X \leq \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{2} \text{ e } X \leq \frac{Z_{\frac{1-\gamma}{2}}^2}{4}. \end{cases}$$

1.2.4 Método de Geyer-Meeden

Definido por [Geyer e Meeden \(2005\)](#) para o caso de uma variável aleatória X definida pela função de densidade $f; \theta$ pertencente à família exponencial uniparamétrica, com estatística suficiente $T = X$, trata-se da transformação do teste de hipótese não viesado uniformemente mais poderoso (**UMPU**, sigla em inglês) para um intervalo de confiança, no caso uma distribuição contínua. De forma mais geral, é definido no artigo como um intervalo de confiança fuzzy.

O método é definido em torno da função de pertinência fuzzy ϕ , referente ao conjunto de rejeição do teste de hipótese **UMPU**, de $H_0 : \theta \leq \tau$ contra $H_1 : \theta > \tau$. Porém, para poder compará-lo aos outros métodos utilizaremos função de pertinência fuzzy ψ^{GM} referente ao conjunto de não rejeição definido por $\psi^{GM} = 1 - \phi$,

$$\psi^{GM}_{\tau, \omega} = \begin{cases} 0, & \text{se } T \leq \omega \leq C_1 \\ \alpha_1, & \text{se } T \leq \omega \leq C_1 \\ 1, & \text{se } C_1 < T \leq \omega \leq C_2 \\ \alpha_2, & \text{se } T \leq \omega \leq C_2 \\ 0, & \text{se } T \leq \omega \leq C_2. \end{cases}$$

Os valores α_1, α_2, C_1 e C_2 são obtidos pelas igualdades $E_{\tau} \psi^{GM}(X, \tau) = \gamma$ e $E_{\tau} T | X \leq \psi^{GM}(X, \tau) = \gamma E_{\tau} T | X$. No caso de X ser uma variável aleatória discreta as seguintes equações podem ser utilizadas para se obter os valores de α_1 e α_2 em função de C_1, C_2 e τ . Considerando $\mu = E_{\tau} T | X$, $p_1 = P_{\tau}(T \leq C_1)$, $p_2 = P_{\tau}(T \leq C_2)$, $p_{12} = P_{\tau}(C_1 < T \leq C_2)$ e $m_{12} = E_{\tau} T | C_1 < T < C_2$, temos

$$\alpha_1 = \frac{\gamma C_2 - \mu - m_{12} - C_2 p_{12}}{p_1 C_2 - C_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma \mu - C_1 - m_{12} - C_1 p_{12}}{p_2 C_2 - C_1}.$$

Os valores são obtidos ao se encontrar os valores de C_1 e C_2 que fazem $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$. O algoritmo para realizar esse processo e obter ψ^{GM} está implementado para o caso da distribuição binomial na função `umpu.binom` do pacote `ump` de [Geyer e Meeden \(2017\)](#) para a linguagem de programação desenvolvida por [R Core Team \(2019\)](#). Para o caso da distribuição Poisson, foi utilizado o processo descrito no Algoritmo 1.

No caso da distribuição normal com variância conhecida, o intervalo pelo método de Geyer-Meeden coincide com o método padrão descrito anteriormente, por esse também se tratar da transformação do teste **UMPU** em intervalo de confiança por meio de sua região de não rejeição.

O método descrito por Geyer e Meeden é o uniformemente mais poderoso dentre os métodos não enviesados. A abordagem que será desenvolvida a seguir visa não restringir os métodos, alterando o critério a ser considerado baseado no trabalho de [Neyman e Pearson \(1933\)](#) sobre o conceito de testes uniformemente mais poderosos (UMP) e como calculá-los no caso de hipóteses simples, definiremos o critério de minimização similar ao erro do tipo 2, mas restrito a um valor específico α como hipótese nula. Além disso, utilizaremos uma versão mais abrangente do lema, conforme descrito em [Shao \(2003\)](#).

Algoritmo 1 – Cálculo do $\psi_{\tau, \omega}$ do método descrito por Geyer-Medeen no caso de distribuição discreta

Data: valores de $\gamma \in (0, 1)$, $\omega \in \Omega$ e $\tau \in \Theta$ e o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}_\tau)$ pertencendo a família exponencial uniparamétrica que define a variável aleatória discreta X e a estatística suficiente $T(X)$

Result: $\psi^{GM}_{\tau, \omega}$

$erro_1 \leftarrow 1;$

$erro_2 \leftarrow 1;$

$erro \leftarrow 1;$

$\mu \leftarrow E_\tau T(X);$

$t \leftarrow T(X, \omega);$

$C_1 \leftarrow \mu;$

$C_2 \leftarrow \mu - 1;$

$\alpha_1 \leftarrow 1;$

$\alpha_2 \leftarrow 1;$

while $erro$ **do**

$p_1 \leftarrow P_\tau T(X) \mid C_1;$

$p_2 \leftarrow P_\tau T(X) \mid C_2;$

$p_{12} \leftarrow P_\tau C_1 \mid T(X) \mid C_2;$

$m_{12} \leftarrow E_\tau T(X) \mid_{C_1, C_2} T(X);$

$\alpha_1 \leftarrow \frac{\gamma C_2 \mu + m_{12} C_2 p_{12}}{p_1 C_2 + C_1};$

$\alpha_2 \leftarrow \frac{\gamma \mu + C_1 m_{12} + C_1 p_{12}}{p_2 C_2 + C_1};$

$erro_1 \leftarrow \frac{1}{2} \alpha_1;$

$erro_2 \leftarrow \alpha_2 \frac{1}{2};$

$erro \leftarrow \max(erro_1, erro_2);$

if $erro < \frac{1}{2}$ **then**

if $t \in C_1$ **then**

return 0

else if $t \in C_1$ **then**

return α_1

else if $C_1 \subset t \subset C_2$ **then**

return 1

else if $t \in C_2$ **then**

return α_2

else

return 0

end

else if $erro_1 > erro_2$ **then**

$C_1 \leftarrow C_1 \cup \text{sgn}(erro_1);$

else

$C_2 \leftarrow C_2 \cup \text{sgn}(erro_2);$

end

end

2 Método de minimização

Dado um espaço paramétrico Θ , seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de probabilidade indexado por $\tau \in \Theta$. A ideia é fixar um valor de referência $\omega \in \Theta$, e dado esse obter uma função $\psi_\omega : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que minimize a probabilidade de não rejeitar τ considerando a distribuição associada a ω como verdadeira, para um $\tau \in \Theta$.

Note que para ψ_ω ser um intervalo de confiança, a probabilidade de não rejeitar τ considerando a distribuição associada a τ como verdadeira tem de ser superior ou igual a γ , para todo $\tau \in \Theta$. Esse valor é a restrição da minimização.

Podemos escrever a restrição no conjunto em que avaliaremos os ψ , ou seja, queremos minimizar $\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega)$ para $\psi \in \mathcal{A}$, em que

$$\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega) \geq \gamma, \quad \forall \tau \in \Theta. \quad (2.1)$$

2.1 Versão não paramétrica

Primeiramente vamos apresentar a versão não paramétrica do teorema de interesse.

Teorema 1. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ dois espaços de probabilidade, e $\gamma \in [0, 1]$ o nível de confiança desejado, defina*

$$\mathcal{A}_{\gamma, \mu} = \left\{ \psi : \Omega \rightarrow [0, 1] \mid \psi \in \mathcal{A} \text{ e } \int_{\Omega} \psi(\omega) d\mu(\omega) \geq \gamma \right\},$$

o conjunto das funções \mathcal{A} -mensuráveis com taxa de cobertura superior a γ . Temos que existe $\psi \in \mathcal{A}_{\gamma, \mu}$ tal que para todo $\psi \in \mathcal{A}_{\gamma, \mu}$,

$$\int_{\Omega} \psi(\omega) d\nu(\omega) \leq \int_{\Omega} \psi(\omega) d\mu(\omega).$$

Antes de provar o teorema, vejamos uma motivação para utilização da função de pertinência fuzzy em intervalos de confiança, através da visualização do funcionamento do método por meio do problema da mochila e algumas de suas propriedades.

2.1.1 O problema da mochila

O problema da mochila, também conhecido como *Knapsack problem*, possui várias formulações na literatura. Vamos considerar nesse texto a seguinte formulação, considere uma coleção de n objetos numerados de 1 a n , sendo que o objeto i possui os

valores de peso e valor dados por w_i e v_i respectivamente, com $i = 1, \dots, n$, e uma mochila capaz de carregar um subconjunto desses objetos, de tal forma que a soma dos pesos dos objetos selecionados não ultrapasse o limite de peso máximo de W . O objetivo é encontrar um subconjunto dos objetos que possua a maior soma dos valores de tal forma que não supere a capacidade máxima de peso da mochila W .

Considere $x_i \in \{0, 1\}$ como uma variável que indica se o objeto i está na mochila. O problema pode ser formulado como maximizar $\sum_{i=1}^n v_i x_i$ restrito a $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$, cuja solução exata pode ser obtida calculando todas as combinações possíveis. Porém, dependendo dos pesos, valores e o total de objetos isso pode ser inviável, e neste caso, pode-se utilizar programação dinâmica.

Se a condição $x_i \in \{0, 1\}$ for relaxada para $x_i \in [0, 1]$, a solução pode ser descrita de forma simples. Além disso, essa nova condição pode ser interpretada como a possibilidade de selecionar apenas uma parte do objeto, de tal forma que o valor e o peso sejam proporcionais da totalidade do objeto selecionado [Dantzig \(1957\)](#). Um exemplo de solução pode ser visualizada na [Figura 1](#), a qual contém o gráfico de dispersão do valor pelo peso dos objetos, a semirreta divide os objetos em 3 grupos, os acima do segmento, os abaixo e os contidos, que serão chamados de A , B e C respectivamente. A solução é dada colocando na mochila todos os pontos acima, e parte dos contidos, de tal forma que o peso total da mochila seja igual ao limite de peso.

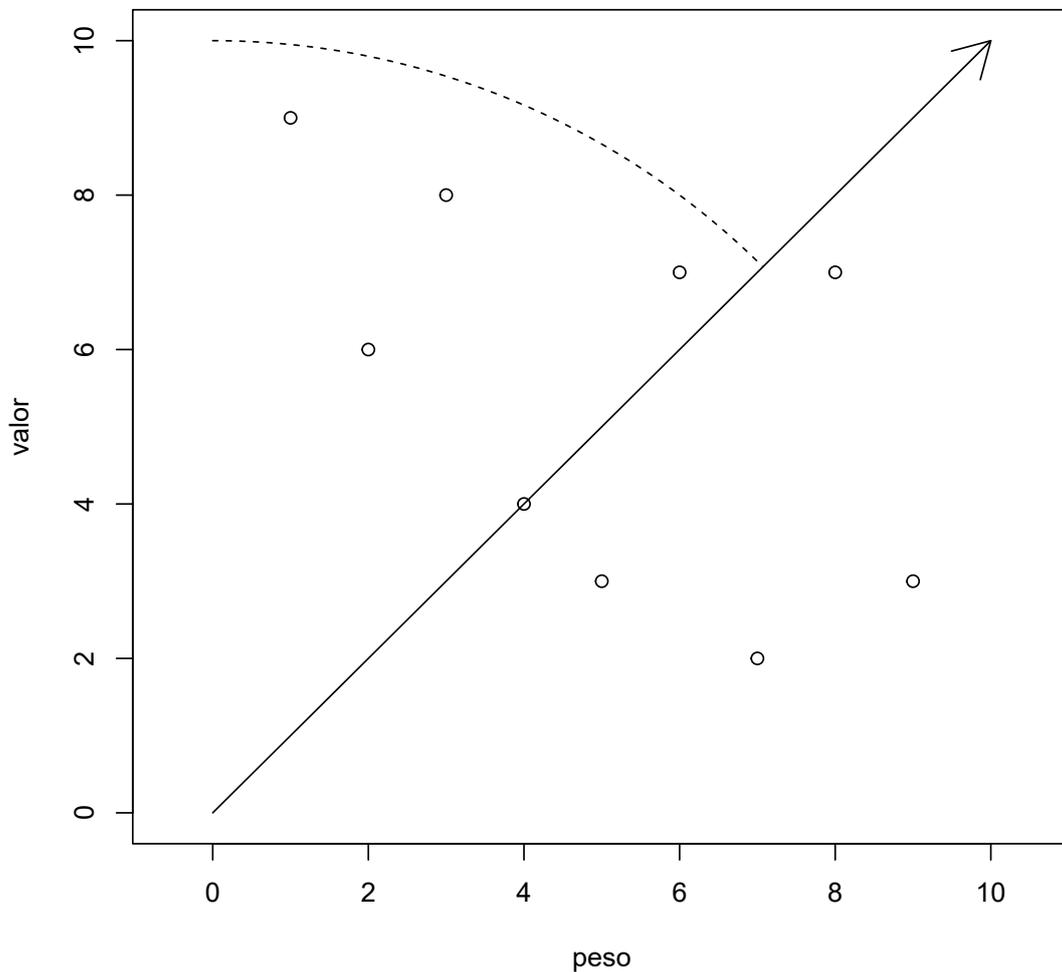


Figura 1 – Exemplo da solução gráfica descrita em George B. Dantzig (1957) para o problema da mochila

Comece com a semirreta com origem em $(0,0)$ e inicialmente paralela ao eixo do **valor**, ou seja todos os objetos estão em B . Em seguida rotacionar a semirreta no sentido horário, até essa conter pelo menos um objeto e sua intersecção com a semirreta antes da rotação seja apenas a origem, os objetos contidos na semirreta estão no conjunto C , agora avaliar se a soma dos pesos dos objetos em $A \cup C$ é superior a W , se não, continuar a rotacionar a semirreta, fazendo com que os objetos em C passem para A , se sim parar o processo.

Com os conjuntos A , B e C , a solução pode ser obtida adicionando os objetos de A na mochila, os em B não serão adicionados na mochila, os objetos em C serão parcialmente adicionados, com a proporção de $\frac{W - W_A}{W_C}$, com W_A sendo a soma dos pesos dos objetos em A e W_C sendo a soma dos pesos dos objetos em C , podemos escrever a

solução da seguinte forma.

$$x_i = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i \in A \\ 0 & , \text{ se } i \in B \\ \frac{W - W_A}{W_C} & , \text{ se } i \in C, \end{cases} \quad (2.2)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Agora vejamos porque esse método maximiza a soma dos valores. Sem perda de generalidade, considere que os objetos são numerados de tal forma que $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{v_{n-1}}{w_{n-1}} \geq \frac{v_n}{w_n}$. Seja θ_i o ângulo formado entre o segmento de reta que liga os pontos (w_i, v_i) e $(0, 0)$ e o eixo dos **valores**, e θ o ângulo formado entre a semirreta obtida na solução e o eixo dos **valores**, obtendo as seguintes igualdades 2.3.

$$\begin{aligned} A &= \{i \mid 1, 2, \dots, n, \theta_i \leq \theta\} \\ B &= \{i \mid 1, 2, \dots, n, \theta_i > \theta\} \\ C &= \{i \mid 1, 2, \dots, n, \theta_i = \theta\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Note que $\theta_i = \arctan \frac{v_i}{w_i}$, como a função $\arctan x$ é crescente e x^{-1}

é decrescente para valores positivos, a função $\arctan x^{-1}$ é decrescente, e portanto a rotação necessária para a semirreta conter o objeto i é inversamente proporcional ao seu valor da razão $\frac{v_i}{w_i}$. Considere o valor $r = \tan \theta^{-1}$, podemos fazer a substituição desses valores em (2.3), obtendo os conjuntos descritos em (2.4). A saber,

$$\begin{aligned} A &= \{i \mid 1, 2, \dots, n, \frac{v_i}{w_i} \geq r\} \\ B &= \{i \mid 1, 2, \dots, n, \frac{v_i}{w_i} < r\} \\ C &= \{i \mid 1, 2, \dots, n, \frac{v_i}{w_i} = r\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{v_{n-1}}{w_{n-1}} \geq \frac{v_n}{w_n}$ temos que

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, \dots, \min C - 1\} \\ B &= \{\max C + 1, \dots, n\} \\ C &= \{i \mid 1, 2, \dots, n, \frac{v_i}{w_i} = r\} = \{\min C, \dots, \max C\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para provar que x_1, \dots, x_n definido por (2.2), (2.3) e (2.4) maximiza a soma dos valores condicionado pela soma dos pesos ser inferior a W , mostraremos que para

qualquer $y_1, \dots, y_n \in [0, 1]^n$, que satisfaça $\sum_{i=1}^n w_i y_i \leq W$ teremos que $\sum_{i=1}^n v_i y_i \leq \sum_{i=1}^n v_i x_i$, ou seja $\sum_{i=1}^n v_i x_i - y_i \geq 0$. Note que

$$\sum_{i=1}^n v_i x_i - y_i = \sum_A \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i = \sum_C \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i = \sum_B \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i. \quad (2.6)$$

A ideia é utilizar as definições dos conjuntos A , B e C presentes em (2.4) para estabelecer restrições para os valores de $\frac{v_i}{w_i}$:

- Para $i \in A$ temos que $x_i = 1 - y_i$ e portanto $x_i - y_i = 0$. Além disso, em A temos que $\frac{v_i}{w_i} = r$ e portanto $\sum_A \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i = \sum_A r w_i x_i - y_i$.
- Para $i \in B$ temos que $x_i = 0 - y_i$ e portanto $x_i - y_i = 0$. Além disso, temos que $\frac{v_i}{w_i} = r$ e portanto $\sum_B \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i = \sum_B r w_i x_i - y_i$.
- Para $i \in C$ temos $\frac{v_i}{w_i} = r$.

Portanto, temos a seguinte inequação

$$\sum_A \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i = \sum_C \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i = \sum_B \frac{v_i}{w_i} w_i x_i - y_i = \sum_A r w_i x_i - y_i = \sum_C r w_i x_i - y_i = \sum_B r w_i x_i - y_i = r \sum_A w_i x_i - y_i = r \sum_C w_i x_i - y_i = r \sum_B w_i x_i - y_i = r \sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i y_i. \quad (2.7)$$

Pelas definições de x_i e y_i temos que $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^n w_i y_i \leq W$ e portanto $\sum_{i=1}^n v_i x_i - y_i = \sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i y_i \geq 0$.

A relação desse resultado com o Teorema 1 se dá por enxergar essa formulação do problema da mochila como um caso específico no qual $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $\gamma = 1 - \frac{W}{\sum_{i=1}^n w_i}$ com $\mu_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ e $v_i = \frac{v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$. Nesse caso o $\psi = \sum_{i=1}^n x_i$.

2.2 Demonstração do Teorema 1

A parte principal dessa demonstração se baseia na divisão do espaço amostral Ω em quatro conjuntos disjuntos similarmente ao que foi visto na Seção 2.1.1. O aumento das partições se deve à necessidade de incluir um termo para conter a parte singular da decomposição de Lebesgue de ν por μ . Os conjuntos D e D^c são definidos de forma que, existem medidas ν_1 e ν_2 tais que para $O \subseteq \Omega$, $\nu_1(O) = \nu(D \cap O)$ e $\nu_2(O) = \nu(D^c \cap O)$, com $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$.

De acordo com o Teorema de Radon-Nikodym, como $\nu_2 \ll \mu$, temos que existe uma função $\frac{d\nu_2}{d\mu} : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ de tal forma que

$$\nu_2(O) = \int_O \frac{d\nu_2}{d\mu} \omega \, d\mu \, \omega,$$

como $\frac{d\nu_2}{d\mu}$ é uma função mensurável em um espaço de medida, podemos vê-la como uma variável aleatória Y , para utilizar notações de variáveis aleatórias, $Y(\omega) = \frac{d\nu_2}{d\mu}(\omega) \geq 0$.

Com essa notação temos a definição da função de probabilidade acumulada $F(y) = P(Y \leq y)$, e sua inversa a função quantílica $Q : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ definida por $Q(p) = \inf\{x : P(Y \leq x) \geq p\}$.

Com base nisso, dado um $\gamma \in [0, 1]$, definimos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} A_\gamma &= \{Y \leq Q(\gamma)\}, \\ B_\gamma &= \{Y > Q(\gamma)\}, \\ C_\gamma &= \{Y = Q(\gamma)\}. \end{aligned}$$

Observe que $A_\gamma, B_\gamma, C_\gamma, D \in \mathcal{A}$, $A_\gamma \cap B_\gamma \cap C_\gamma \cap D = \Omega$, $\mu(A_\gamma) = \gamma$ e $\mu(B_\gamma) = 1 - \gamma$.

Dado um $\gamma \in [0, 1]$, definimos a função $\psi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ da seguinte forma

$$\psi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A_\gamma \\ 0 & \text{se } \omega \in B_\gamma \cap D_\gamma \\ \frac{\gamma - \mu(A_\gamma \cap C_\gamma)}{\mu(C_\gamma)} & \text{se } \omega \in C_\gamma \text{ e } \mu(C_\gamma) > 0 \\ 0 & \text{se } \omega \in C_\gamma \text{ e } \mu(C_\gamma) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Observe que $\psi \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pois ψ é \mathcal{A} -mensurável por se tratar de uma função \mathcal{A} -simples, e $\int_\Omega \psi \, d\mu = \gamma$ como visto em (2.9). Assim,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \psi \, \omega \, d\mu \, \omega \\
 & \int_{A_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\mu \, \omega \quad \int_{B_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\mu \, \omega \quad \int_{C_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\mu \, \omega \\
 & \int_{A_{\gamma}} d\mu \, \omega = 0 \quad \int_{C_{\gamma}} \frac{\gamma}{\mu} \frac{\mu A_{\gamma}}{C_{\gamma}} d\mu \, \omega \\
 & \mu A_{\gamma} \quad \frac{\gamma}{\mu} \frac{\mu A_{\gamma}}{C_{\gamma}} \quad \mu C_{\gamma} \\
 & \mu A_{\gamma} \quad \gamma \quad \mu A_{\gamma} \\
 & \gamma.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Agora mostraremos que para todos $\psi \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, γ, μ ,

$$\int_{\Omega} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega \geq \int_{\Omega} \psi \, \omega \, d\mu \, \omega,$$

ou seja, mostraremos que $\int_{\Omega} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega \geq \int_{\Omega} \psi \, \omega \, d\mu \, \omega$.

Primeiramente, façamos a divisão de Ω em $A_{\gamma}, B_{\gamma}, C_{\gamma}$ e D na integral e como $\psi \, \omega \geq 0$ para $\omega \in D$ o valor $\int_{\omega \in D} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega \geq \int_{\omega \in D} \psi \, \omega \, d\mu \, \omega = 0$, e portanto o valor da integral em Ω é maior do que o valor em $A_{\gamma} \cup B_{\gamma} \cup C_{\gamma} \cup D^c$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega & \geq \int_{A_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega + \int_{B_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega + \int_{C_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega, \\
 & \geq \int_{A_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega + \int_{B_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega + \int_{C_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Utilizando a propriedade da derivada de Radon-Nikodym $X \, \omega$ podemos reescrever uma integral de um conjunto contido em D^c na medida ν como uma integral do mesmo conjunto na medida μ da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 \int_{A_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega & = \int_{A_{\gamma}} X \, \omega \, \psi \, \omega \, d\mu \, \omega \\
 \int_{B_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega & = \int_{B_{\gamma}} X \, \omega \, \psi \, \omega \, d\mu \, \omega \\
 \int_{C_{\gamma}} \psi \, \omega \, d\nu \, \omega & = \int_{C_{\gamma}} X \, \omega \, \psi \, \omega \, d\mu \, \omega.
 \end{aligned}$$

Note que,

- para $\omega \in A_\gamma$ temos $\psi(\omega) = 1 - \psi(\omega)$ e portanto $\psi(\omega) - \psi(\omega) = 0$,
- para $\omega \in B_\gamma$ temos $\psi(\omega) = 0 - \psi(\omega)$ e portanto $\psi(\omega) - \psi(\omega) = 0$.

Além disso, pela definição dos conjuntos $A_\gamma = \{ \omega \in Y : Q(\gamma, \omega) \geq \gamma \}$, $B_\gamma = \{ \omega \in Y : Q(\gamma, \omega) < \gamma \}$ e $C_\gamma = Y \setminus Q(\gamma)$, temos

$$\int_{A_\gamma} \psi(\omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega) = \int_{A_\gamma} Q(\gamma, \omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega), \quad (2.11)$$

$$\int_{B_\gamma} \psi(\omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega) = \int_{B_\gamma} Q(\gamma, \omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega), \quad (2.12)$$

$$\int_{C_\gamma} \psi(\omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega) = \int_{C_\gamma} Q(\gamma, \omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega). \quad (2.13)$$

Note que pela definição de D e D^c temos $\mu(D) = 0$ e portanto somando as equações (2.11)–(2.13) obtemos

$$\int_{D^c} \psi(\omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} Q(\gamma, \omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega). \quad (2.14)$$

Para finalizar a demonstração basta mostrar que $\int_{\Omega} Q(\gamma, \omega) - \psi(\omega) d\mu(\omega) = 0$, como $Q(\gamma, \omega) \geq 0$ e $\psi(\omega) \in [\gamma, \mu]$ sua taxa de cobertura é superior ao nível de confiança γ , enquanto a de ψ é igual a γ , portanto $\int_{\Omega} \psi(\omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} \psi(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \psi(\omega) d\mu(\omega) - \gamma = 0$.

2.2.1 Interpretações

Para criar o intervalo de confiança aleatorizado utilizamos algumas interpretações do Teorema 1, podendo ser visto como um teste de hipótese com hipóteses simples, com $H_0 : \mu$ descrevendo a distribuição dos dados contra $H_1 : \nu$ descrevendo a distribuição dos dados. Podemos parametrizar essas medidas em uma família paramétrica mantendo a propriedade de ser o teste **UMP** como visto anteriormente.

Considere o espaço paramétrico Θ e os valores θ_0 e $\theta_\tau \in \Theta$, escrevendo as medidas de probabilidade associadas como μ_{θ_0} e μ_{θ_τ} , respectivamente. Podemos obter a função de pertinência dado θ_0 juntando a funções indexadas por τ definida como a função minimizadora $\psi_\tau : \Omega \rightarrow [0, 1]$ com $\psi_\tau(\omega) = Q(\gamma, \mu_{\theta_\tau}, \mu_{\theta_0})$ e $\nu = \mu_{\theta_0}$ definindo $\psi_{\theta_0, \theta_\tau}(\omega) = \psi_\tau(\omega)$, e portanto $\psi_{\theta_0, \theta_\tau}$ é **UMP** para $\theta = \theta_0$.

Teorema 2. *Sejam Θ um espaço paramétrico, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_{\theta_\tau})$ um espaço de probabilidade para todo $\tau \in \Theta$, e $\gamma \in [0, 1]$ o nível de confiança desejado. Seja*

$$\psi_\gamma : \Omega \rightarrow [0, 1] \text{ tal que } \psi_\gamma(\omega) = \inf_{\tau \in \Theta} \psi_\tau(\omega) \text{ e } \int_{\Omega} \psi_\gamma(\omega) d\mu(\omega) = \gamma$$

o conjunto das funções \mathcal{A} -mensuráveis com taxa de cobertura superior a γ . Temos que dado um $\theta \in \Theta$ existe $\psi \in \mathcal{A}_\gamma$ tal que para todo $\psi \in \mathcal{A}_\gamma$,

$$\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega) \leq \int_{\Omega} \theta(\tau, \omega) d\mu(\omega).$$

Este teorema possui menos condições que o Lema de Neyman-Pearson, mas em troca a propriedade de unicidade é perdida. No caso análogo do problema da mochila, a troca do problema de intervalo de confiança para intervalo de confiança fuzzy possibilita escrever a solução do problema em torno da avaliação da derivada de Radon-Nikodym, tornando mais simples.

3 Exemplos de funções de pertinência de intervalos de confiança fuzzy

Em seguida exemplificaremos o processo de obter a função de pertinência fuzzy ψ_o do método descrito no Teorema 2 por meio das regiões A_γ , B_γ , C_γ e D para cada τ , e compararemos com outros métodos descritos na literatura para as distribuições Normal, Binomial e Poisson.

3.1 Distribuição Normal

Considere o caso de n observações independentemente distribuídas com distribuição normal com média $\theta \in \Theta$ e desvio padrão $\sigma > 0$ conhecido. Neste caso, $\Omega = \mathcal{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{R}^n$, a medida de Lebesgue $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$ e

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega - \theta)^2\right] d\lambda(\omega).$$

Neste caso, $D^c = \mathcal{R}^n$. Além disso,

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{d\mu(\omega)}{d\lambda(\omega)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega - \theta)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\omega - \theta}{\sigma}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Para definir os conjuntos A_γ , B_γ e C_γ é possível calcular a função quantil de Y em γ ou Q_γ , mas é mais fácil encontrar uma equivalência aos conjuntos $Y \leq Q_\gamma$, $Y \geq Q_\gamma$ e $Y = Q_\gamma$ utilizando uma variável aleatória auxiliar.

Definindo a variável aleatória pela função $X(\omega) = \frac{\omega - \theta}{\sigma}$ temos $X \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ e $Y(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\omega - \theta)^2\right]$, para $\omega \geq \theta$ podemos reescrever como $X(\omega) = \frac{\sigma^2}{n(\omega - \theta)^2} \ln Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\tau}{\omega - \theta}$, note que a função é crescente em $X(\omega)$ para $\omega \geq \theta$ e decrescente se $\omega < \theta$, então dividiremos em dois casos e escrevemos os conjuntos A_γ , B_γ , C_γ em função de X .

Caso 1: $o = \tau$

- $A_\gamma = Y - Q_\gamma - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Y - \frac{o \tau}{2} - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$
 $X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$,
- $B_\gamma = Y - Q_\gamma - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Y - \frac{o \tau}{2} - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$
 $X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$,
- $C_\gamma = Y - Q_\gamma - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Y - \frac{o \tau}{2} - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$
 $X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$.

Note que essas definições implicam que $P C_\gamma = 0$, pois X tem distribuição Normal e a probabilidade acumulada em um ponto é igual a 0, com isso $P A_\gamma = \gamma$ e $P B_\gamma = 1 - \gamma$, além disso a função quantil de X pode ser escrita em função do valor $\frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$ e como $P X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2} = \gamma$ então $Q_X \gamma = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$.

Como $X \sim N\left(\tau, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ temos que $Q_X \gamma = \tau - Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$ e portanto

- $A_\gamma = X - \tau + Z_\gamma \frac{\sigma}{n} = \tau - X + Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$,
- $B_\gamma = X - \tau + Z_\gamma \frac{\sigma}{n} = \tau - X + Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$,
- $C_\gamma = X - \tau + Z_\gamma \frac{\sigma}{n} = \tau - X + Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$.

Portanto para $o = \tau$

$$\psi_\theta(x, \tau) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau - x \geq Z_\gamma \frac{\sigma}{n} \text{ e } o = \tau, \\ 0 & , \text{ se } \tau - x < Z_\gamma \frac{\sigma}{n} \text{ e } o = \tau. \end{cases}$$

Caso 2: $o \neq \tau$

- $A_\gamma = Y - Q_\gamma - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Y - \frac{o \tau}{2} - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$
 $X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$,

- $B_\gamma = Y - Q_\gamma - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Y - \frac{o \tau}{2} - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$
 $X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$,
- $C_\gamma = Y - Q_\gamma - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Y - \frac{o \tau}{2} - \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$
 $X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$.

De forma similar ao caso anterior essas definições implicam que $P C_\gamma = 0$, e $P A_\gamma = \gamma$ e $P B_\gamma = 1 - \gamma$, além disso a função quantil de X pode ser escrita em função do valor $\frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$ e como $P X = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2} = 1 - \gamma$ então $Q_X(1 - \gamma) = \frac{\sigma^2}{n o \tau} \ln Q_\gamma - \frac{o \tau}{2}$.

Como $X \sim N(\tau, \frac{\sigma^2}{n})$ temos que $Q_X(1 - \gamma) = \tau - Z_{1-\gamma} \frac{\sigma}{n} = \tau - Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$ e portanto

- $A_\gamma = X - \tau + Z_\gamma \frac{\sigma}{n} = \tau - X + Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$,
- $B_\gamma = X - \tau - Z_\gamma \frac{\sigma}{n} = \tau - X - Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$,
- $C_\gamma = X - \tau + Z_\gamma \frac{\sigma}{n} = \tau - X + Z_\gamma \frac{\sigma}{n}$.

Portanto para $o < \tau$

$$\psi_o(x, \tau) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau - x \geq Z_\gamma \frac{\sigma}{n} \text{ e } o < \tau, \\ 0 & , \text{ se } \tau - x \geq Z_\gamma \frac{\sigma}{n} \text{ e } o > \tau. \end{cases}$$

Juntando os dois casos, obtemos a seguinte função de pertinência fuzzy do método descrito

$$\psi_o(x, \tau) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau - x \geq Z_\gamma \frac{\sigma}{n} \text{ e } o < \tau \\ 1 & , \text{ se } \tau - x \geq Z_\gamma \frac{\sigma}{n} \text{ e } o > \tau \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \\ 1 & , \text{ se } \tau - \min(o, x) \geq Z_\gamma \frac{\sigma}{n} , \max(o, x) \geq Z_\gamma \frac{\sigma}{n} \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Para comparar os resultados utilizaremos o intervalo de confiança comumente utilizado dado por

$$\psi = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau \in \left[\frac{w^t 1}{n} - Z_{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\overline{\sigma^2}}{n}, \frac{w^t 1}{n} + Z_{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\overline{\sigma^2}}{n} \right] \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Em ambos os casos as funções podem ser escritas como uma função da estatística $x = \frac{w^t 1}{n}$ e de τ , e assumem apenas os valores 0 ou 1, e portanto em ambos se encaixam no caso clássico de intervalos de confiança, devido a isso é possível visualizar ψ_o e ψ em um gráfico com os eixos representando $\frac{w^t 1}{n}$ e τ e pela região onde se assume o valor 1 de acordo com a Figura 2.

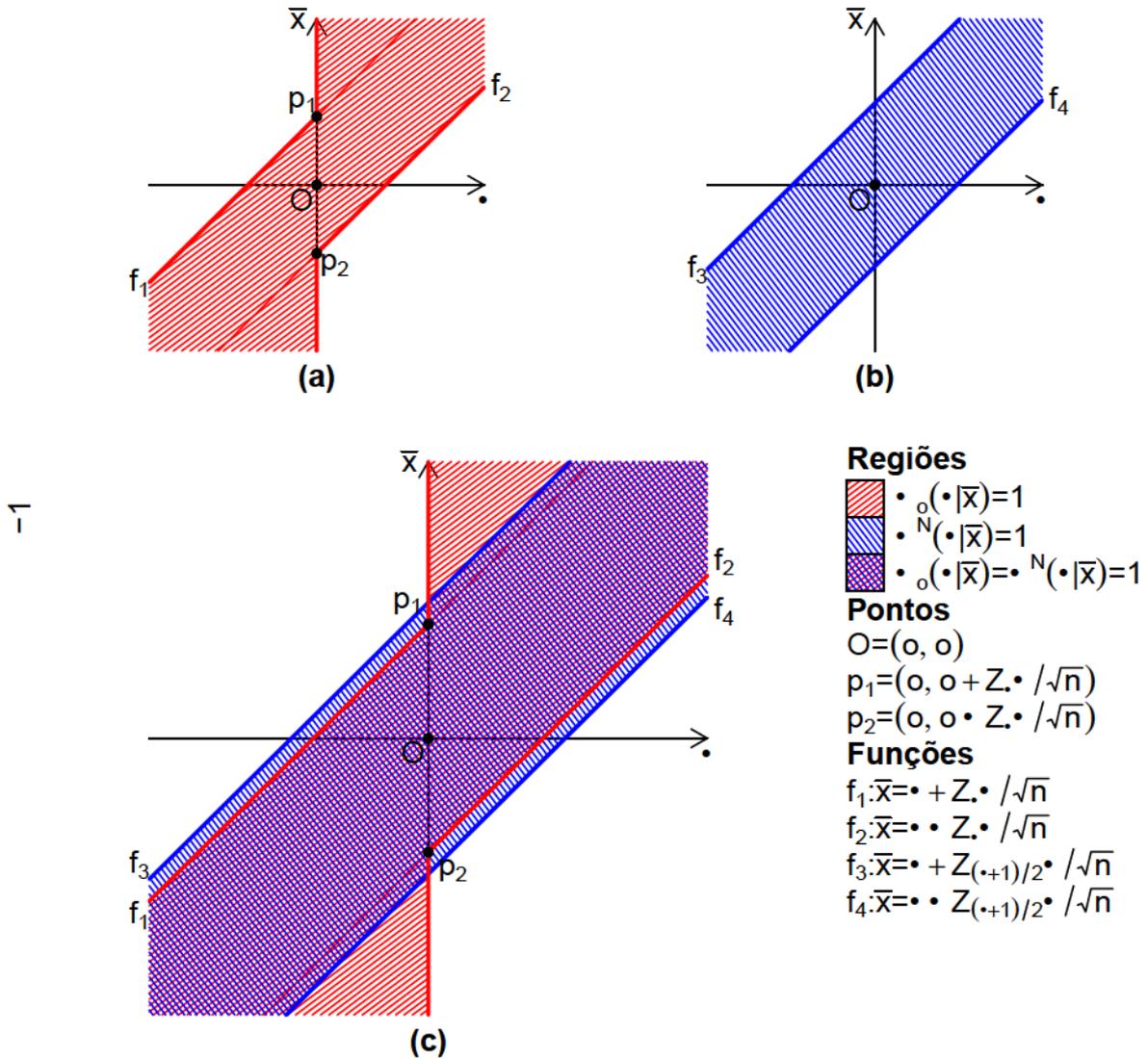


Figura 2 – Funções ψ_o (painel esquerdo superior) e ψ^N (painel direito superior). A região colorida indica os valores onde a função vale 1, fora na região em branco a função vale 0, em pontilhados temos retas que definem a fronteira dessa região. No painel inferior temos a sobreposição dessas regiões.

3.2 Distribuição Normal com média limitada

Considere o exemplo anterior fazendo a seguinte modificação no espaço paramétrico $\Theta = [a, b] \subset \mathbb{R}$, com essa modificação a nova função de pertinência para o método padrão ψ^{NL} tem o mesmo valor que ψ^N para $\tau \in [a, b]$.

Nesse caso a Figura 3 mostra a região de confiança para o caso do espaço paramétrico ser limitado.

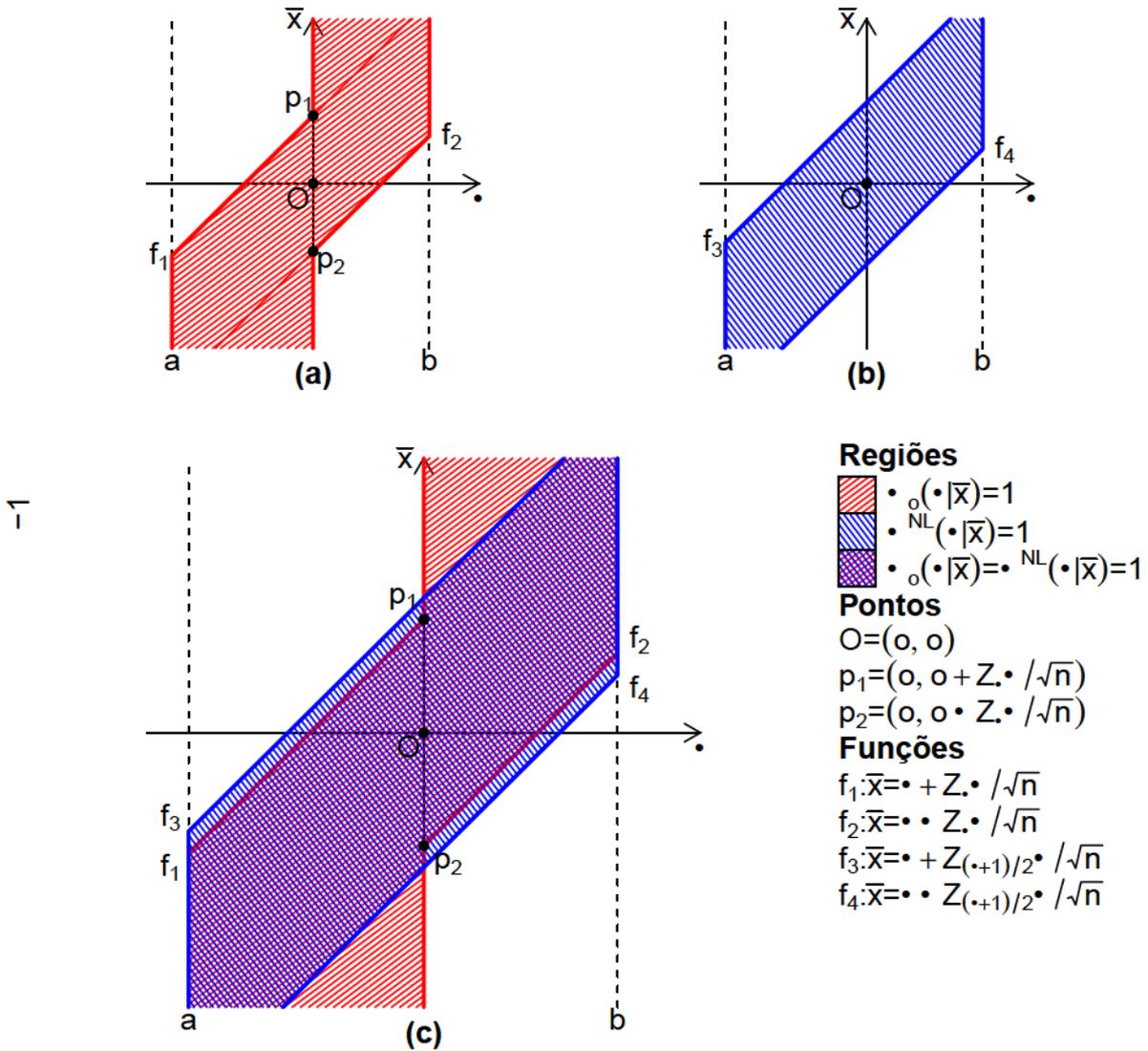


Figura 3 – Funções ψ_o (painel esquerdo) e ψ^{NL} (painel direito). A região em azul indica a região onde o valor das funções é 1, fora da região vale 0, em pontilhados temos retas que definem a fronteira dessa região.

3.3 Distribuição Binomial

Considere o caso de uma amostra aleatória de tamanho 1 com distribuição binomial com parâmetros n e $\theta \in \Theta = (0, 1)$. Neste caso, temos $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, a medida de contagem $\# : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ e

$$\mu(A|\theta) = \int_A \binom{n}{\omega} \theta^\omega (1 - \theta)^{n-\omega} 1_\Omega(\omega) d\#(\omega) = \sum_{\omega \in A} \binom{n}{\omega} \theta^\omega (1 - \theta)^{n-\omega}.$$

Como $\binom{n}{\omega} \theta^\omega (1 - \theta)^{n-\omega} > 0$ para todo $\theta > 0$ e $\omega \in \Omega$ temos que $D^c = \Omega$ e podemos obter

$$Y \omega = \frac{d\mu}{d\omega} \frac{o}{\tau} \omega = \frac{o}{1-o} \omega^n = \frac{1-\tau}{\tau} \omega^{1-\tau}$$

Para definir os conjuntos A_γ , B_γ e C_γ é possível calcular a função quantil de Y em Q_γ , mas é mais fácil encontrar uma equivalência aos conjuntos $Y \leq Q_\gamma$, $Y \geq Q_\gamma$ e $Y = Q_\gamma$ utilizando uma variável aleatória auxiliar.

Definindo a variável aleatória pela função $X \omega = \omega$ temos $X \sim Bi(\tau, n)$ e $Y \omega = \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau} X^\omega = \frac{1-o}{1-\tau} \omega^n$, para $o < \tau$ e $o, \tau \in (0, 1)$ podemos reescrever como $X \omega = \frac{\ln Y \omega}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}}$, note que a função é crescente em $Y \omega$ para $o < \tau$ e decrescente se $o > \tau$, então dividiremos em dois casos e escrevemos os conjuntos A_γ , B_γ , C_γ em função de X .

Caso 1: $\tau < o$

- $A_\gamma = \{Y \leq Q_\gamma\} = \left\{ \frac{\ln Y \omega}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \leq \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \right\} = \left\{ X \leq \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \right\}$,
- $B_\gamma = \{Y \geq Q_\gamma\} = \left\{ \frac{\ln Y \omega}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \geq \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \right\} = \left\{ X \geq \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \right\}$,
- $C_\gamma = \{Y = Q_\gamma\} = \left\{ \frac{\ln Y \omega}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} = \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \right\} = \left\{ X = \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}} \right\}$

Como $X \sim Bi(\tau, n)$ temos que $Q_X \gamma = 0, \dots, n$ e $\mu = 0, \dots, Q_X \gamma = 1 - \tau = \gamma$ e $\mu = 0, \dots, Q_X \gamma = \tau = \gamma$, pelas definições de A_γ e B_γ temos que

- $P(X \leq \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}}) = \gamma$,

$$\bullet P_X = \frac{\ln Q_\gamma}{\ln \frac{1-o}{1-o-\tau}} = 1 - \gamma.$$

Portanto podemos definir os conjuntos como $A_\gamma = X - Q_X(\gamma)$, $B_\gamma = X - Q_X(\gamma)$ e $C_\gamma = X - Q_X(\gamma)$.

Utilizando a relação entre a probabilidade acumulada da distribuição binomial e a função beta regularizada definida por $I(x, a, b) = \frac{\int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt}{\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt}$, temos

- $\mu = 0, \dots, Q_X(\gamma) - 1 - \tau - 1 - I(\tau, Q_X(\gamma), n - Q_X(\gamma) - 1 - \gamma)$, e
- $\mu = 0, \dots, Q_X(\gamma) - \tau - 1 - I(\tau, Q_X(\gamma) - 1, n - Q_X(\gamma) - \gamma)$.

Essas inequações são equivalentes a

- $\tau = I^{-1}(1 - \gamma, Q_X(\gamma), n - Q_X(\gamma) - 1)$, e
- $\tau = I^{-1}(1 - \gamma, Q_X(\gamma) - 1, n - Q_X(\gamma))$.

Como a parte direita das inequações pode ser escrita em função de $I^{-1}(1 - \gamma, i, n - i - 1)$, com $i = Q_X(\gamma)$ para o superior e $i = Q_X(\gamma) - 1$ para o inferior, por ser uma função crescente em função de i , podemos definir $Q_X(\gamma)$ da seguinte forma,

$$Q_X(\gamma) = \sup \{ i = 0, 1, 2, \dots, n - \tau - I^{-1}(1 - \gamma, i, n - i - 1) \}.$$

Em outras palavras, temos que $Q_X(\gamma) = i$ se, e somente se, $I^{-1}(1 - \gamma, i, n - i - 1) - \tau = I^{-1}(1 - \gamma, i - 1, n - i)$. Nessa condição temos as definições dos conjuntos $A_\gamma = \{0, 1, \dots, i - 1\}$, $B_\gamma = \{i - 1, i - 2, \dots, n\}$ e $C_\gamma = \{i\}$, e portanto $\mu_{A_\gamma}(\tau) = 1 - I(\tau, i, n - i - 1)$ e $\mu_{C_\gamma}(\tau) = \frac{n - \tau^\omega - 1}{\tau^\omega - 1} = \tau^{n - \omega}$, trocando o valor de i por ω é possível escrever a função $\psi_o(\tau, \omega)$ para o caso $\tau = o$ presente em 3.1.

$$\psi_o(\tau, \omega) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau = I^{-1}(1 - \gamma, \omega - 1, n - \omega) , \\ 0 & , \text{ se } \tau = I^{-1}(1 - \gamma, \omega, n - \omega - 1) , \\ \frac{\gamma - 1 - I(\tau, \omega, n - \omega - 1)}{\omega - \tau^\omega - 1 - \tau^{n - \omega}} & , \text{ se } \tau = I^{-1}(1 - \gamma, \omega, n - \omega - 1) , \\ & , \text{ se } \tau = I^{-1}(1 - \gamma, \omega - 1, n - \omega) . \end{cases} \quad (3.1)$$

Essa função é não decrescente em relação a τ com ω fixado, por se tratar do caso $\tau = o$ temos que a função de pertinência fuzzy do método descrito é não decrescente em τ até o valor o .

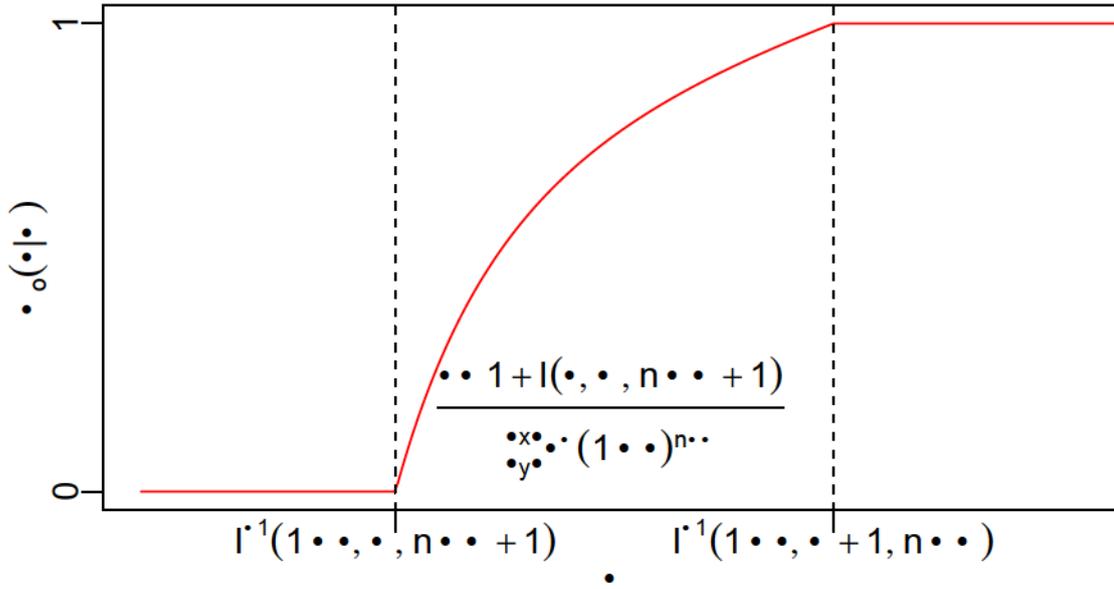


Figura 4 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso binomial com $\tau < o$.

Caso 2: $\tau > o$

- $A_\gamma = [Y < Q(\gamma)] = \left[\frac{\ln(Y) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} > \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right]$
 $= \left[X > \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right],$
- $B_\gamma = [Y > Q(\gamma)] = \left[\frac{\ln(Y) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} < \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right]$
 $= \left[X < \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right],$
- $C_\gamma = [Y = Q(\gamma)] = \left[\frac{\ln(Y(\omega)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} = \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right]$
 $= \left[X = \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right].$

Como $X \sim Bi(\tau, n)$ temos que $Q_X(\gamma) \in \{0, \dots, n\}$ e $\mu(\{0, \dots, Q_X(\gamma) - 1\}|\tau) < \gamma$ e $\mu(\{0, \dots, Q_X(\gamma)\}|\tau) \geq \gamma$. pelas definições de A_γ e B_γ temos que

- $P \left[X > \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right] \leq \gamma, \text{ e}$
- $P \left[X < \frac{\ln(Q(\gamma)) - n \ln\left(\frac{1-o}{1-\tau}\right)}{\ln\left(\frac{o}{1-o} \frac{1-\tau}{\tau}\right)} \right] \leq 1 - \gamma.$

Portanto podemos definir os conjuntos como $A_\gamma = \{X \mid Q_X(1-\gamma) \leq \tau \leq 1\}$, $B_\gamma = \{X \mid Q_X(1-\gamma) \leq \tau \leq 1\}$ e $C_\gamma = \{X \mid Q_X(1-\gamma) \leq \tau \leq 1\}$.

Utilizando a relação entre a probabilidade acumulada da distribuição binomial e a função beta regularizada definida por $I(x, a, b) = \frac{\int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt}{\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt}$, e a definição de $Q_X(\gamma)$ temos

- $\mu = 0, \dots, Q_X(1-\gamma) - 1, \tau = 1 - I(\tau, Q_X(1-\gamma), n - Q_X(1-\gamma) - 1, 1-\gamma)$, e
- $\mu = 0, \dots, Q_X(1-\gamma) - \tau - 1 - I(\tau, Q_X(1-\gamma) - 1, n - Q_X(1-\gamma) - 1, \gamma)$.

Essas inequações são equivalentes a

- $\tau = I^{-1}(\gamma, Q_X(1-\gamma), n - Q_X(1-\gamma) - 1)$, e
- $\tau = I^{-1}(\gamma, Q_X(1-\gamma) - 1, n - Q_X(1-\gamma))$.

Como a parte direita das duas inequações pode ser escritas em função com respeito a i de $I^{-1}(\gamma, i, n - i - 1)$, com $i = Q_X(1-\gamma)$ para o superior e $i = Q_X(1-\gamma) - 1$ para o inferior, por ser uma função crescente em função de i , podemos definir $Q_X(1-\gamma)$ da seguinte forma: $Q_X(1-\gamma) = \sup \{i \mid 0, 1, 2, \dots, n - \tau = I^{-1}(\gamma, i, n - i - 1)\}$.

Em outras palavras temos que $Q_X(1-\gamma) = i$ se e somente se $I^{-1}(\gamma, i, n - i - 1) = \tau = I^{-1}(\gamma, i - 1, n - i)$. Nessa condição, temos as definições dos conjuntos $A_\gamma = \{i = 1, 2, \dots, n\}$, $B_\gamma = \{0, 1, \dots, i - 1\}$ e $C_\gamma = \{i\}$, e portanto $\mu_{A_\gamma}(\tau) = I(\tau, i, n - i - 1)$ e $\mu_{C_\gamma}(\tau) = \frac{n - \tau^\omega - 1}{\tau^\omega - 1} = \tau^{n-\omega}$, trocando o valor de i por ω é possível escrever a função $\psi_o(\tau, \omega)$ para o caso $\tau = o$ presente em (3.2).

$$\psi_o(\tau, \omega) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \tau = I^{-1}(\gamma, \omega - 1, n - \omega) , \\ 1 & , \text{ se } \tau = I^{-1}(\gamma, \omega, n - \omega - 1) , \\ \frac{\gamma - I(\tau, \omega, n - \omega - 1)}{\omega - \tau^\omega - 1} & , \text{ se } \tau = I^{-1}(\gamma, \omega, n - \omega - 1) , \\ & \tau = I^{-1}(\gamma, \omega - 1, n - \omega) . \end{cases} \quad (3.2)$$

Essa função é não crescente em relação a τ com ω fixado, por se tratar do caso $\tau = o$ temos que a função de pertinência fuzzy do método descrito é não crescente em τ após o valor o .

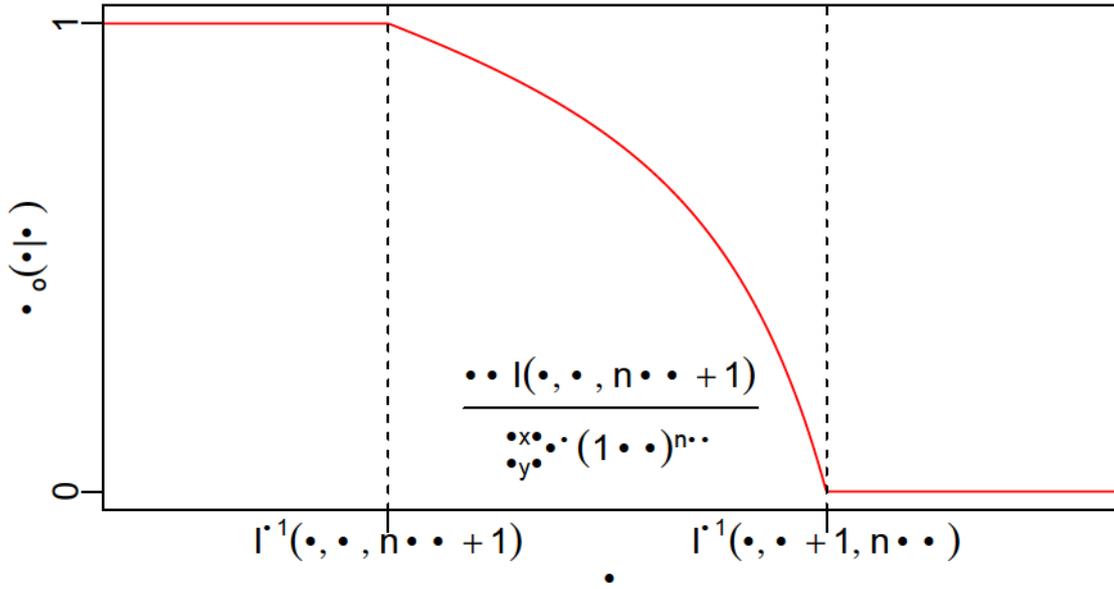


Figura 5 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso binomial com $\tau > o$.

Juntando os dois casos, a função ψ_o é obtida conforme (3.3). A função é não decrescente até o e não crescente após esse valor se avaliado em relação a τ com ω e o fixos, como exemplificado na Figura 6.

$$\psi_o(\tau|\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \begin{cases} \tau \leq I^{-1}(\gamma, \omega, n - \omega + 1), \\ \tau > o, \end{cases} \\ 1, & \text{se } \begin{cases} \tau > I^{-1}(1 - \gamma, \omega + 1, n - \omega), \\ \tau < o, \end{cases} \\ 0, & \text{se } \begin{cases} \tau > I^{-1}(\gamma, \omega + 1, n - \omega), \\ \tau > o, \end{cases} \\ 0, & \text{se } \begin{cases} \tau \leq I^{-1}(1 - \gamma, \omega, n - \omega + 1), \\ \tau < o, \end{cases} \\ \frac{\gamma - I(\tau, \omega + 1, n - \omega)}{\binom{n}{\omega} \tau^\omega (1 - \tau)^{n - \omega}}, & \text{se } \begin{cases} \tau > I^{-1}(\gamma, \omega, n - \omega + 1), \\ \tau \leq I^{-1}(\gamma, \omega + 1, n - \omega), \\ \tau > o, \end{cases} \\ \frac{\gamma - 1 + I(\tau, \omega, n - \omega + 1)}{\binom{n}{\omega} \tau^\omega (1 - \tau)^{n - \omega}}, & \text{se } \begin{cases} \tau > I^{-1}(1 - \gamma, \omega, n - \omega + 1), \\ \tau \leq I^{-1}(1 - \gamma, \omega + 1, n - \omega), \\ \tau < o. \end{cases} \end{cases} \quad (3.3)$$

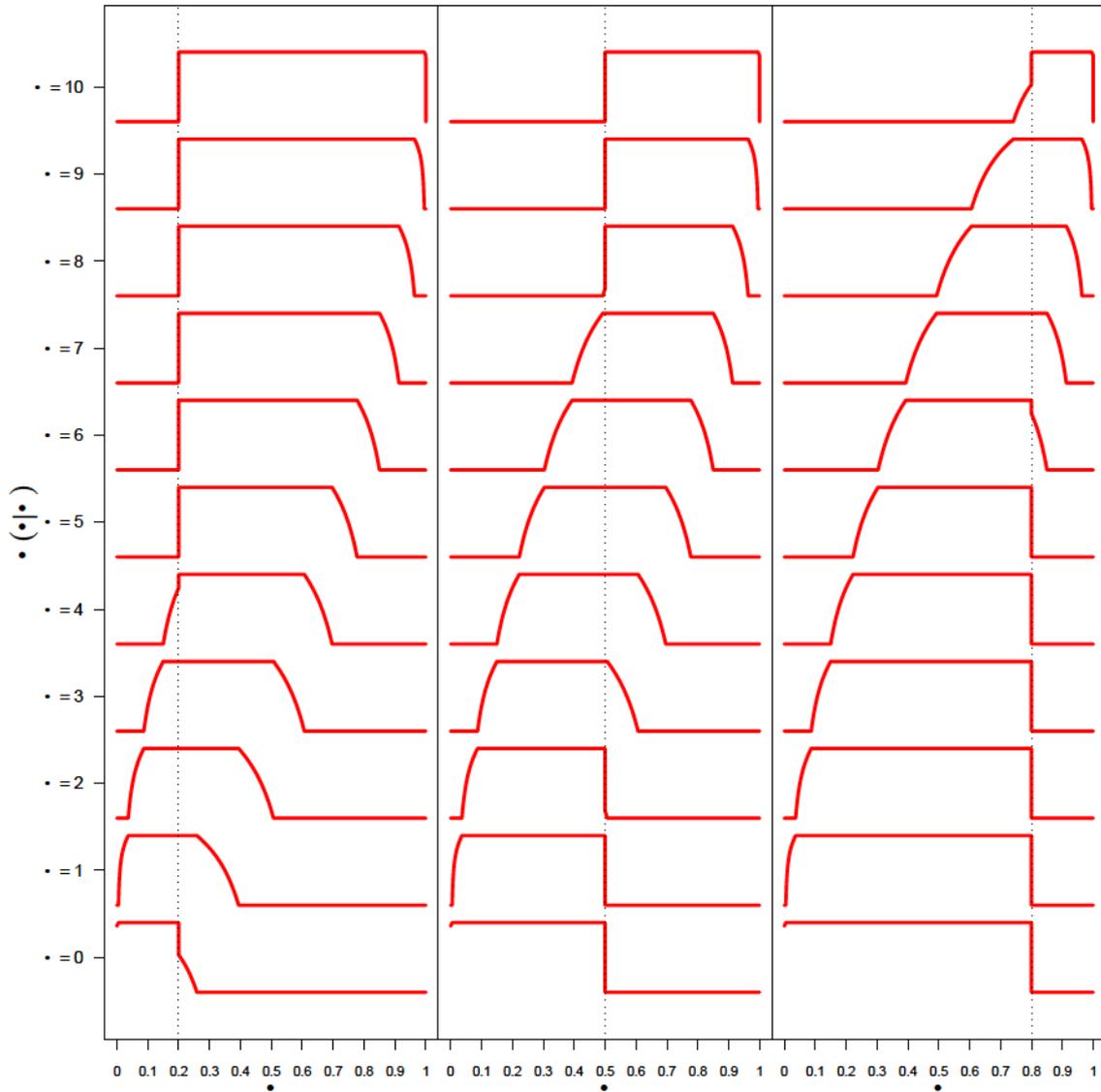


Figura 6 – Função de pertinência fuzzy $\psi_o(\tau|\omega)$ no caso da distribuição binomial com $n = 10$ e $o = 0.2$ para o painel da esquerda, $o = 0.5$ para o painel central e $o = 0.8$ no painel da direita.

A principal característica dessa função é que seu limite a esquerda ou seu limite a direita em o é igual a 1, com uma descontinuidade em o para ω distante do valor $\lfloor o(n + 1) \rfloor$, contendo apenas valores inferiores a o se $\omega < \lfloor o(n + 1) \rfloor$, e apenas valores superiores a o se $\omega > \lfloor o(n + 1) \rfloor$.

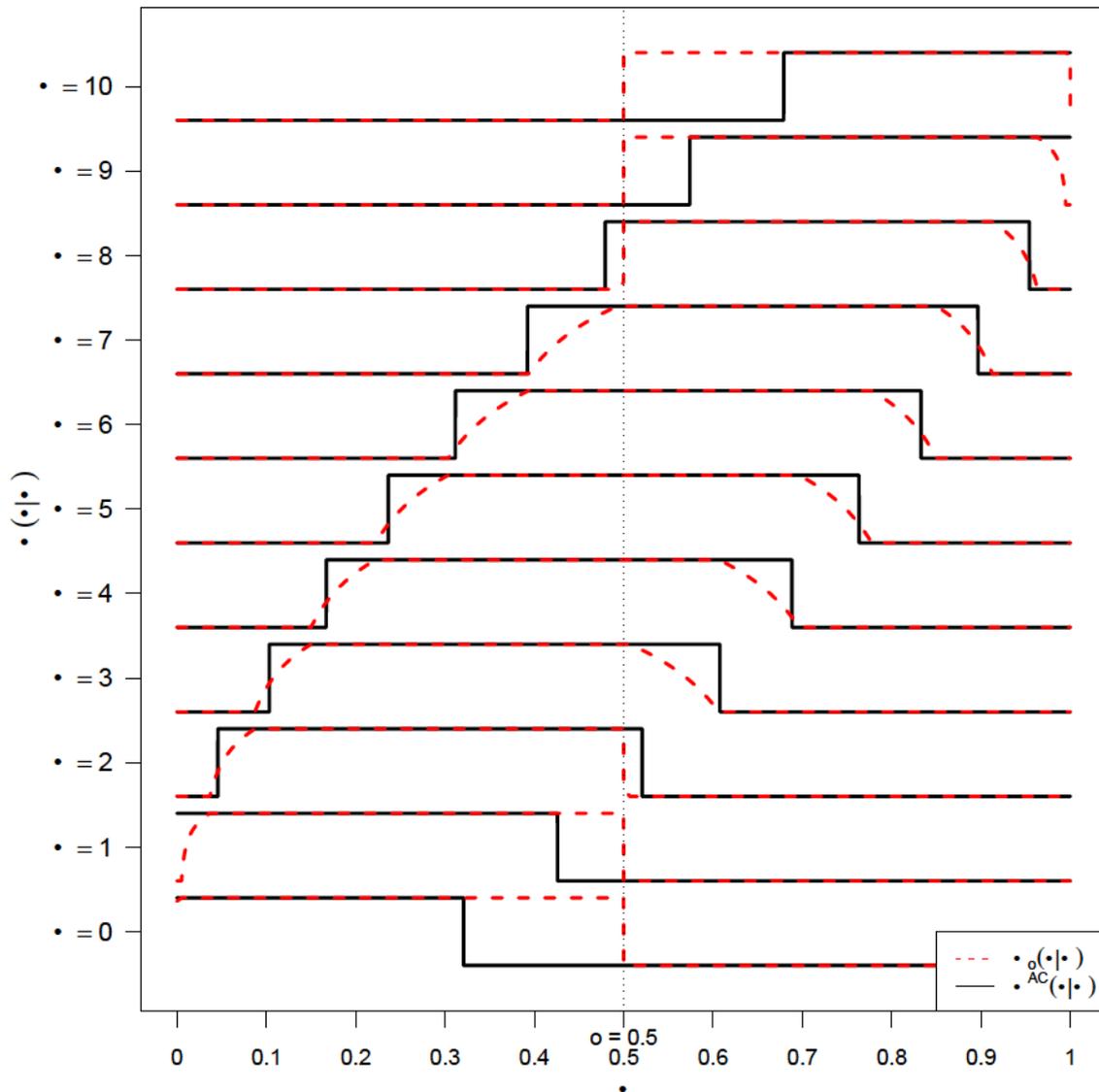


Figura 7 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{0.5}$ e ψ^{AC} com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição binomial com $n = 10$.

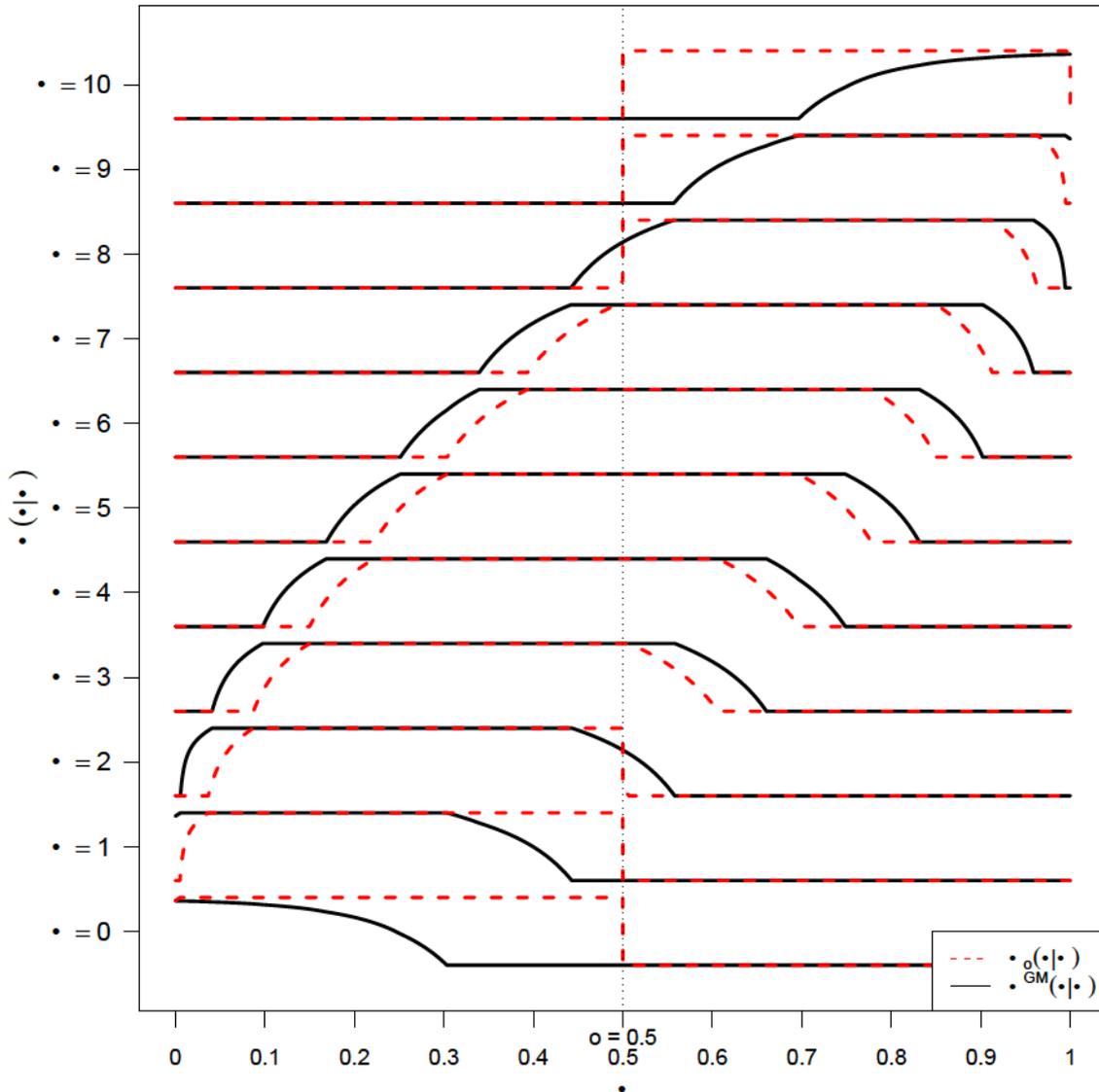


Figura 8 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{0.5}$ e ψ^{GM} com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição binomial com $n = 10$.

Comparando com outros métodos para distribuição binomial, as Figuras 7 e 8, mostram que em ambos os casos o método descrito é melhor do que os outros para os valores de ω em que esse não apresenta uma descontinuidade em o , por apresentar menores valores que os outros para todo $\tau \in [0, 1]$, mas para os outros valores de ω apresenta um pior desempenho a medida que ω de distancia de $[o(n + 1)]$.

3.4 Distribuição Poisson

Considere o caso de uma observação com distribuição de Poisson com parâmetro $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Neste caso, temos $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, a medida de contagem $\# : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow$

0, e

$$\mu_A(\theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^\omega}{\omega!} \mathbb{1}_{\Omega}(\omega) \quad \omega \in \mathbb{N}$$

Como $\frac{e^{-\theta} \theta^\omega}{\omega!} > 0$ para todo $\theta > 0$ e $\omega \in \mathbb{N}$ temos que D^c e podemos obter

$$Y(\omega) = \frac{d\mu}{d\mu_\tau}(\omega) = e^{-\frac{\omega}{\tau}}$$

Para definir os conjuntos A_γ , B_γ e C_γ é possível calcular a função quantil de Y em γ o Q_γ , mas é mais fácil encontrar uma equivalência aos conjuntos $Y \leq Q_\gamma$, $Y > Q_\gamma$ e $Y = Q_\gamma$ utilizando uma variável aleatória auxiliar.

Definindo a variável aleatória pela função $X(\omega) = \omega$ temos $X \sim \text{Poisson}(\tau)$ e $Y(\omega) = e^{-\frac{\omega}{\tau}}$, para $0 < \tau$ e $0, \tau > 0$ podemos reescrever como $X(\omega) = \frac{\omega}{\tau} \ln Y(\omega)$, note que a função é crescente em $Y(\omega)$ para $0 < \tau$ e decrescente se $0 > \tau$, então dividiremos em dois casos e escrevemos os conjuntos A_γ , B_γ , C_γ em função de X .

Caso 1: $\tau > 0$

- $A_\gamma = \{Y \leq Q_\gamma\} = \left\{ \frac{\omega}{\tau} \ln Y(\omega) \leq \frac{\omega}{\tau} \ln Q_\gamma \right\}$
 $X \leq \frac{\omega}{\tau} \ln Q_\gamma$,
- $B_\gamma = \{Y > Q_\gamma\} = \left\{ \frac{\omega}{\tau} \ln Y(\omega) > \frac{\omega}{\tau} \ln Q_\gamma \right\}$
 $X > \frac{\omega}{\tau} \ln Q_\gamma$,
- $C_\gamma = \{Y = Q_\gamma\} = \left\{ \frac{\omega}{\tau} \ln Y(\omega) = \frac{\omega}{\tau} \ln Q_\gamma \right\}$
 $X = \frac{\omega}{\tau} \ln Q_\gamma$.

Como $X \sim \text{Poisson}(\tau)$ temos que $Q_X(\gamma) = \mu(0, \dots, Q_X(\gamma) - 1) = \gamma$ e $\mu(0, \dots, Q_X(\gamma) - \tau) = \gamma$, pelas definições de A_γ e B_γ temos que

- $P_X \left(\frac{\omega}{\tau} \ln Q_\gamma \right) = \gamma$, e

$$\bullet P_X = \frac{o - \tau \ln Q_\gamma}{\ln o - \ln \tau} \quad 1 - \gamma.$$

Portanto podemos definir os conjuntos como $A_\gamma = [X - Q_\gamma, X + Q_\gamma]$, $B_\gamma = [X - Q_\gamma, X + Q_\gamma]$ e $C_\gamma = [X - Q_\gamma, X + Q_\gamma]$.

Utilizando a relação entre a distribuição de Poisson e a distribuição qui-quadrado, temos

$$\bullet \mu_{0, \dots, Q_\gamma} = 1 - \tau = 1 - \int_0^\tau \frac{x^{\frac{2Q_\gamma - \gamma}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{2Q_\gamma - \gamma}{2}} \Gamma(\frac{2Q_\gamma - \gamma}{2})} d\lambda \quad \gamma, \text{ e}$$

$$\bullet \mu_{0, \dots, Q_\gamma} = \tau = 1 - \int_0^\tau \frac{x^{\frac{2Q_\gamma - \gamma}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{2Q_\gamma - \gamma}{2} - 1} \Gamma(\frac{2Q_\gamma - \gamma}{2} - 1)} d\lambda \quad \gamma.$$

Essas inequações são equivalentes a

$$\bullet \tau \leq \chi_{2Q_\gamma - 1, 1 - \gamma}^2,$$

$$\bullet \tau \leq \chi_{2Q_\gamma - 2, 1 - \gamma}^2.$$

Com $\chi_{q, \gamma}^2$ sendo a função quantílica da distribuição qui-quadrado com q graus de liberdade em função de γ , como a parte direita das inequações podem ser escritas em função de $\chi_{2i, 1 - \gamma}^2$, com $i = Q_\gamma$ para o superior e $i = Q_\gamma - 1$ para o inferior, por ser uma função crescente em função de i , podemos definir Q_γ como

$$Q_\gamma = \sup \{ i \mid \tau \leq \chi_{2i, 1 - \gamma}^2 \}.$$

Em outras palavras, temos que $Q_\gamma = i$ se, e somente se, $\chi_{2i, 1 - \gamma}^2 = \tau = \chi_{2i - 2, 1 - \gamma}^2$. Nessa condição, temos as definições dos conjuntos $A_\gamma = \{0, 1, \dots, i - 1\}$, $B_\gamma = \{i - 1, i - 2, \dots\}$ e $C_\gamma = \{i\}$, e portanto $\mu_{A_\gamma} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{e^{-\tau} \tau^j}{j!}$ e $\mu_{C_\gamma} = \frac{e^{-\tau} \tau^i}{i!}$. Trocando o valor de i por ω é possível escrever a função $\psi_\omega = \psi_\omega(\tau)$ para o caso $\tau = o$ presente em (3.4) dado por

$$\psi_\omega(\tau) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau \leq \chi_{2\omega - 2, 1 - \gamma}^2 \\ 0 & , \text{ se } \tau \leq \chi_{2\omega, 1 - \gamma}^2 \\ \frac{\gamma}{\frac{e^{-\tau} \tau^\omega}{\omega!}} & , \text{ se } \chi_{2\omega, 1 - \gamma}^2 < \tau < \chi_{2\omega - 2, 1 - \gamma}^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Essa função é não decrescente em relação a τ com ω fixado, por se tratar do caso $\tau = o$ temos que a função de pertinência fuzzy do método descrito é não decrescente em τ até o valor o .

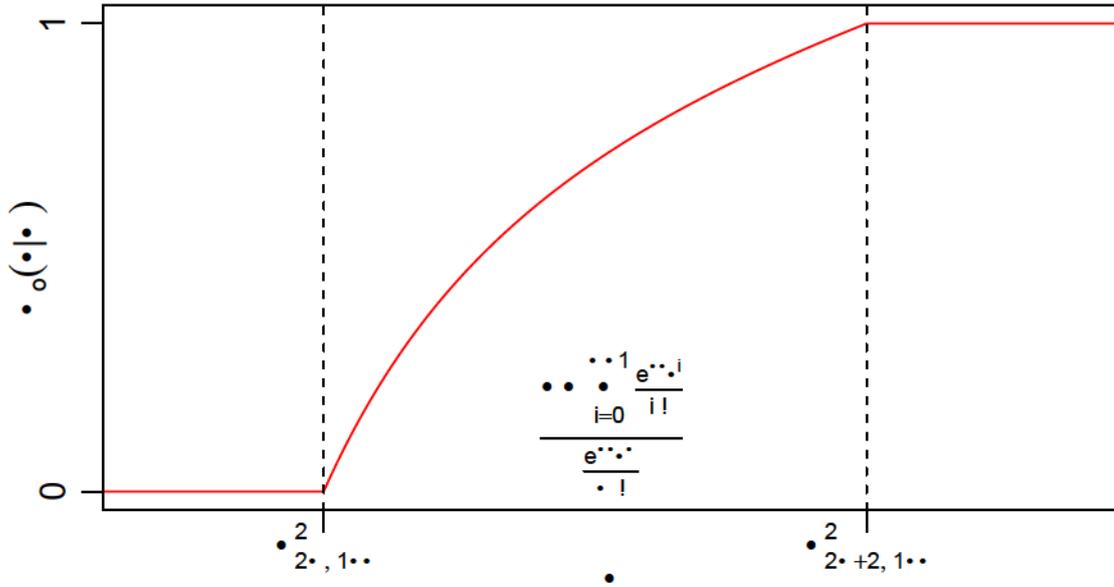


Figura 9 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso Poisson com $\tau < o$.

Caso 2: $\tau > o$

- $A_\gamma = [Y < Q(\gamma)] = \left[\frac{o - \tau + \ln(Y(\omega))}{\ln o - \ln \tau} > \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right]$
 $= \left[X > \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right],$
- $B_\gamma = [Y > Q(\gamma)] = \left[\frac{o - \tau + \ln(Y(\omega))}{\ln o - \ln \tau} < \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right]$
 $= \left[X < \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right],$
- $C_\gamma = [Y = Q(\gamma)] = \left[\frac{o - \tau + \ln(Y(\omega))}{\ln o - \ln \tau} = \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right]$
 $= \left[X = \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right].$

Como $X \sim \text{Poisson}(\tau)$ temos que $Q_X(\gamma) \in \mathbb{N}$ e $\mu(\{0, \dots, Q_X(\gamma) - 1\}|\tau) < \gamma$ e $\mu(\{0, \dots, Q_X(\gamma)\}|\tau) \geq \gamma$, pelas definições de A_γ e B_γ temos que

- $P \left[X > \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right] \leq \gamma,$ e
- $P \left[X < \frac{o - \tau + \ln(Q(\gamma))}{\ln o - \ln \tau} \right] \leq 1 - \gamma.$

Portanto podemos definir os conjuntos como $A_\gamma = [X > Q_X(1 - \gamma)], B_\gamma = [X < Q_X(1 - \gamma)]$ e $C_\gamma = [X = Q_X(1 - \gamma)].$

Utilizando a relação entre a distribuição de Poisson e a distribuição qui-quadrado, temos

$$\begin{aligned} \bullet \mu &= 0, \dots, Q_X - 1 - \gamma - 1 - \tau - 1 \int_0^\tau \frac{x^{\frac{2Q_X - 1 - \gamma}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{2Q_X - 1 - \gamma}{2}} \Gamma\left(\frac{2Q_X - 1 - \gamma}{2}\right)} d\lambda \quad x = 1 - \gamma, e \\ \bullet \mu &= 0, \dots, Q_X - 1 - \gamma - \tau - 1 \int_0^\tau \frac{x^{\frac{2Q_X - 1 - \gamma}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{2Q_X - 1 - \gamma}{2}} \Gamma\left(\frac{2Q_X - 1 - \gamma}{2}\right)} d\lambda \quad x = 1 - \gamma. \end{aligned}$$

Essas inequações são equivalentes a

$$\begin{aligned} \bullet \tau &\leq \chi_{2Q_X - 1 - \gamma, \gamma}^2, \\ \bullet \tau &\leq \chi_{2Q_X - 1 - \gamma - 2, \gamma}^2, \end{aligned}$$

onde $\chi_{q, \gamma}^2$ é a função quantílica da distribuição qui-quadrado com q graus de liberdade em função de γ . Como a parte direita das inequações pode ser escrita em função de $\chi_{2i, \gamma}^2$, com $i = Q_X - 1 - \gamma$ para o superior e $i = Q_X - 1 - \gamma - 1$ para o inferior, por ser uma função crescente em função de i , podemos definir $Q_X - 1 - \gamma$ como

$$Q_X - 1 - \gamma = \sup \{ i \mid \tau \leq \chi_{2i, \gamma}^2 \}.$$

Em outras palavras, temos que $Q_X - 1 - \gamma = i$ se, e somente se, $\tau \leq \chi_{2i, \gamma}^2$ e $\tau > \chi_{2i - 2, \gamma}^2$. Nessa condição, temos as definições dos conjuntos $A_\gamma = \{ i = 1, i = 2, \dots \}$, $B_\gamma = \{ 0, 1, \dots, i = 1 \}$ e $C_\gamma = \{ i \}$, e portanto $\mu_{A_\gamma}(\tau) = 1 - \sum_{j=0}^i \frac{e^{-\tau} \tau^j}{j!}$ e $\mu_{C_\gamma}(\tau) = \frac{e^{-\tau} \tau^i}{i!}$. Trocando o valor de i por ω é possível escrever a função $\psi_o(\tau, \omega)$ para o caso $\tau = o$ presente em (3.5), temos

$$\psi_o(\tau, \omega) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau \leq \chi_{2\omega, \gamma}^2, \\ 0 & , \text{ se } \tau > \chi_{2\omega - 2, \gamma}^2, \\ \frac{\gamma - 1 - \sum_{i=0}^{\omega} \frac{e^{-\tau} \tau^i}{i!}}{e^{-\tau} \tau^\omega / \omega!} & , \text{ se } \chi_{2\omega, \gamma}^2 < \tau < \chi_{2\omega - 2, \gamma}^2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Essa função é não crescente em relação a τ com ω fixado, por se tratar do caso $\tau = o$ temos que a função de pertinência fuzzy do método descrito é não crescente em τ após o valor o .

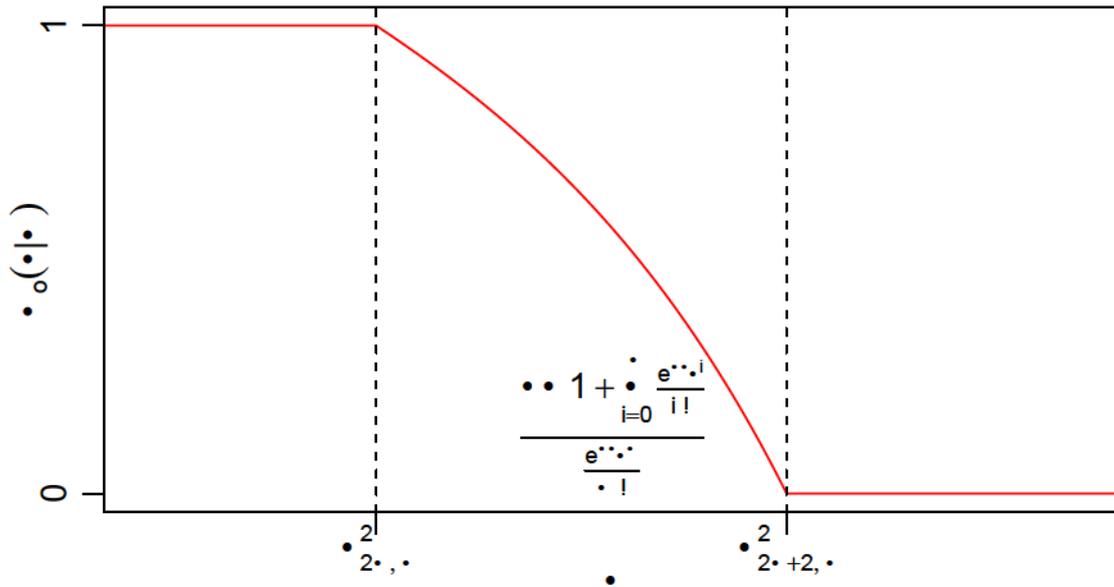


Figura 10 – Função de pertinência fuzzy do método desenvolvido pelo valor de τ para o caso Poisson com $\tau > o$.

Juntando os dois casos, a função ψ_o é obtida conforme (3.6), a função é não decrescente até o e não crescente após esse valor se avaliado em relação a τ com ω e o fixos, como exemplificado na Figura 11.

$$\psi_o(\tau|\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \tau > \chi_{2\omega+2,1-\gamma}^2 \text{ e } \tau < o \\ 1 & , \text{ se } \tau \leq \chi_{2\omega,\gamma}^2 \text{ e } \tau > o \\ 0 & , \text{ se } \tau \leq \chi_{2\omega,1-\gamma}^2 \text{ e } \tau < o \\ 0 & , \text{ se } \tau > \chi_{2\omega+2,\gamma}^2 \text{ e } \tau > o \\ \frac{\gamma - \sum_{i=0}^{\omega-1} \frac{e^{-\tau} \tau^i}{i!}}{\frac{e^{-\tau} \tau^\omega}{\omega!}} & , \text{ se } \chi_{2\omega,1-\gamma}^2 < \tau \leq \chi_{2\omega+2,1-\gamma}^2 \text{ e } \tau < o \\ \frac{\gamma - 1 + \sum_{i=0}^{\omega} \frac{e^{-\tau} \tau^i}{i!}}{\frac{e^{-\tau} \tau^\omega}{\omega!}} & , \text{ se } \chi_{2\omega,\gamma}^2 < \tau \leq \chi_{2\omega+2,\gamma}^2 \text{ e } \tau > o. \end{cases} \quad (3.6)$$

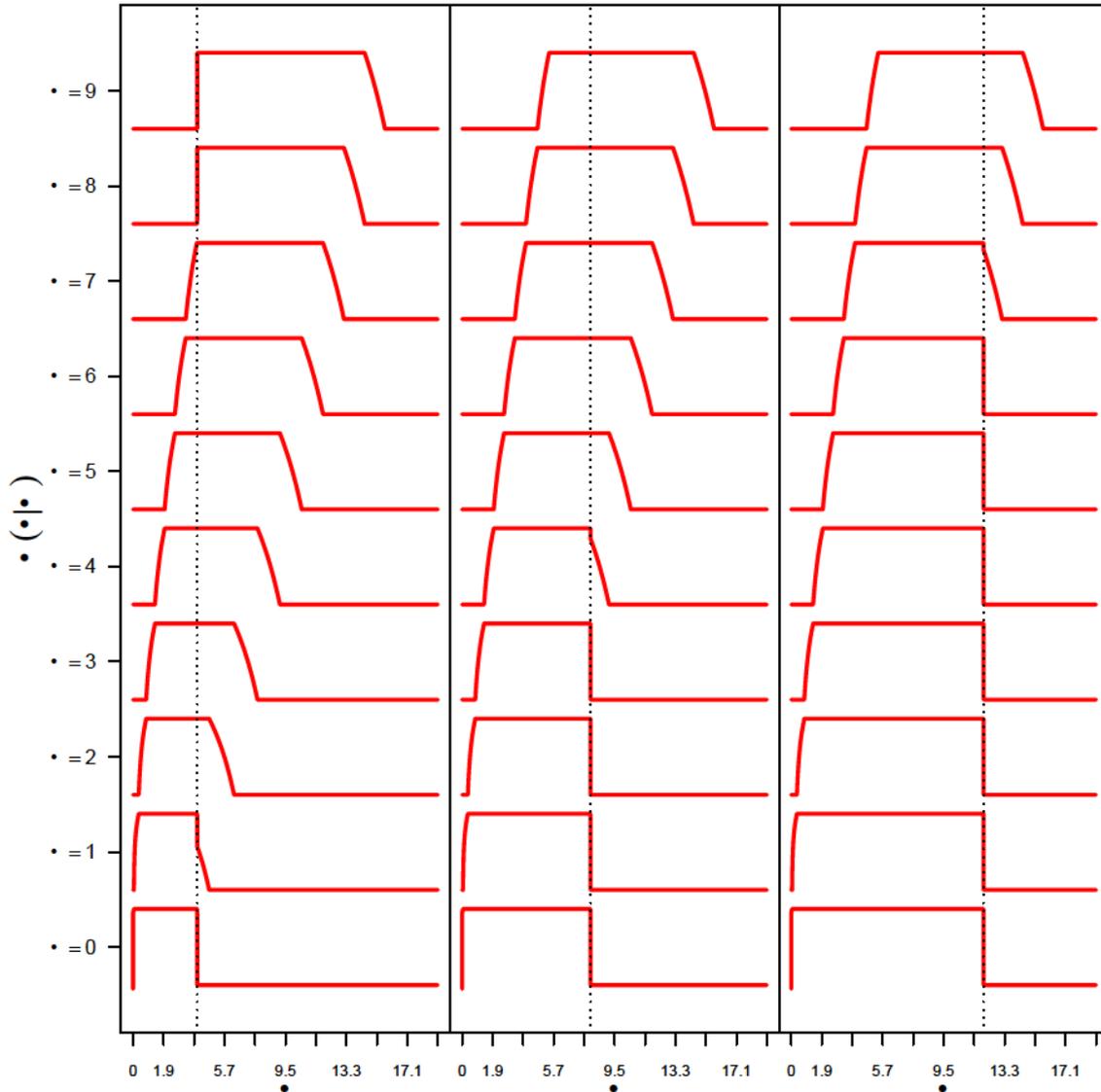


Figura 11 – Função de pertinência fuzzy $\psi_o(\tau|\omega)$ no caso da distribuição de Poisson com $o = 4$ para o painel da esquerda, $o = 8$ para o painel central e $o = 12$ no painel da direita.

A principal característica dessa função é que, seu limite à esquerda ou seu limite à direita em o é igual a 1, com uma descontinuidade em o para ω distante do valor $[o(n + 1)]$, contendo apenas valores inferiores a o se $\omega < [o(n + 1)]$, e apenas valores superiores a o se $\omega > [o(n + 1)]$.

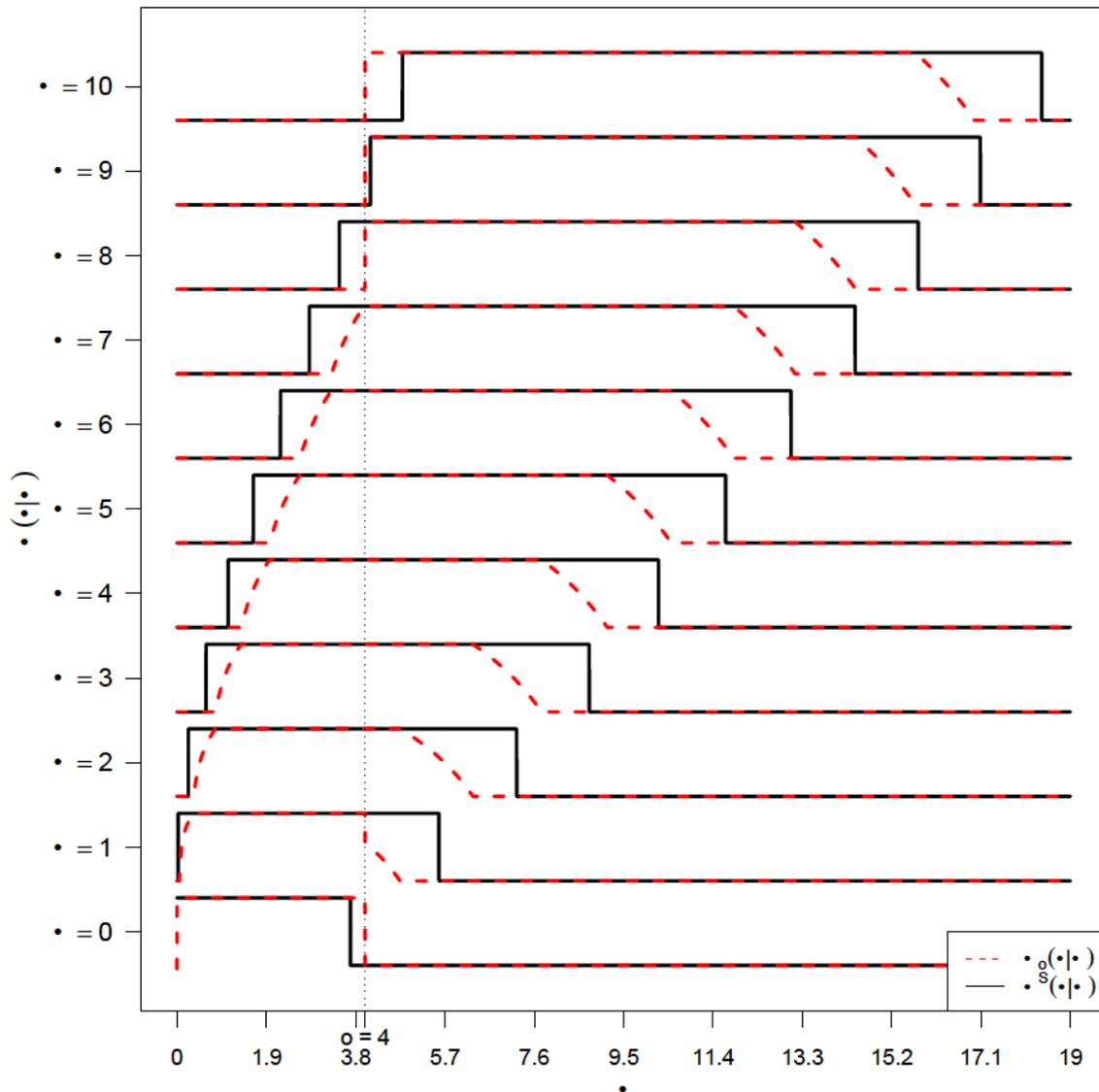


Figura 12 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{3.8}$ e ψ^S com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição de Poisson.

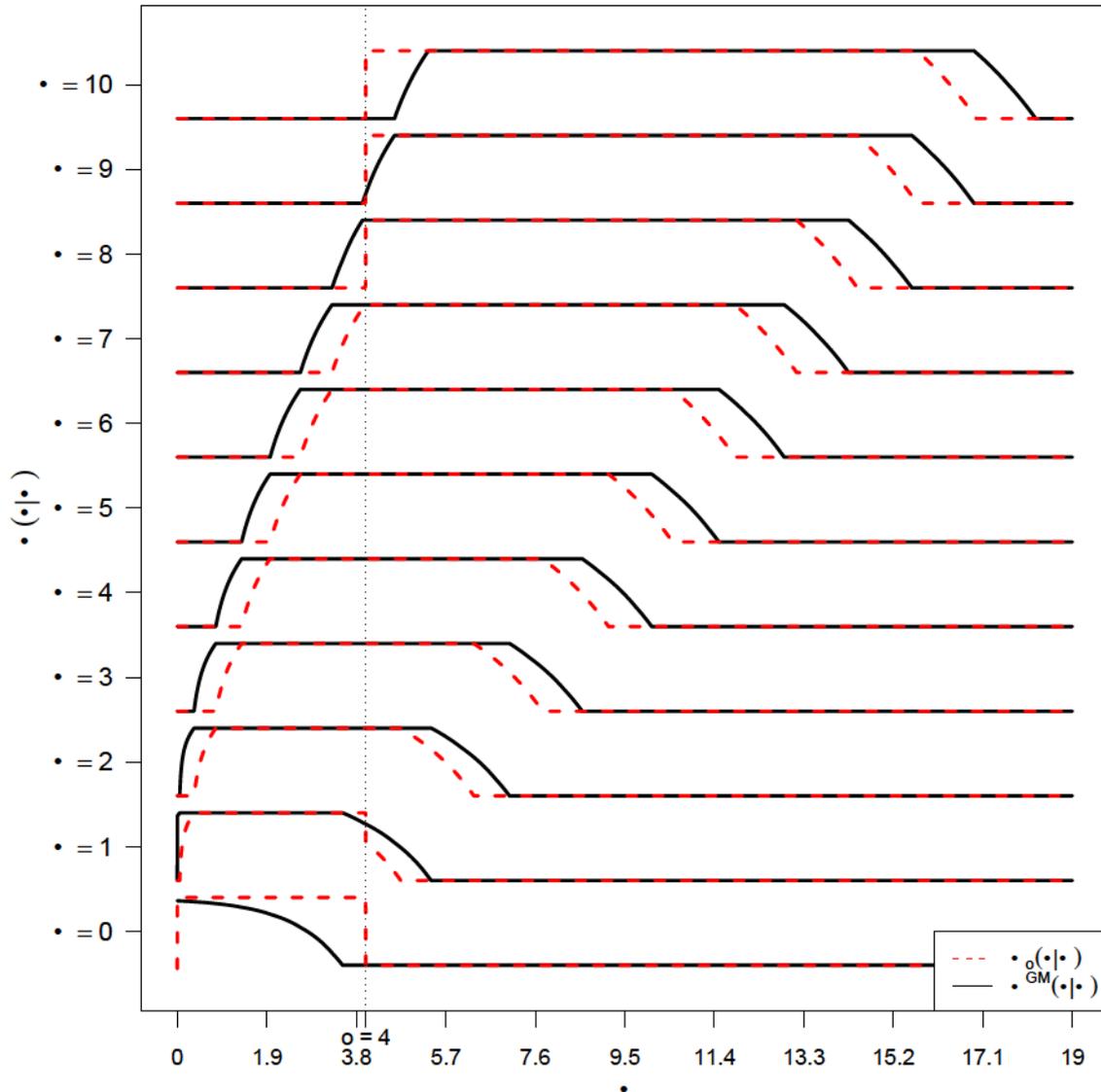


Figura 13 – Funções de pertinência fuzzy $\psi_{3,8}$ e ψ^{GM} com o nível de confiança $\gamma = 0.95$ para a distribuição de Poisson.

Comparando com outros métodos para distribuição Poisson, as Figuras 12 e 13 mostram que, em ambos os casos o método descrito é melhor do que os outros para os valores de ω em que esse não apresenta uma descontinuidade em o , por apresentar menores valores que o outros para todo $\tau \in [0, 1]$, mas para os outros valores de ω apresenta um pior desempenho a medida que ω de distancia de $[o(n + 1)]$.

4 Tamanho Esperado

Dado um espaço de medida $(\Theta, \mathcal{O}, \nu)$, o tamanho esperado de uma função $\psi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ com respeito à medida ν é dado por $TE(\psi, \theta, \nu) = \int_{\Theta} \psi(\omega) d\mu(\omega, \theta) d\nu(\tau)$, se

$\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta)$ é \mathcal{O} -mensurável,

Corolário 1. *Dados as condições e definições dados no Teorema 1, considere o espaço de medida $(\Theta, \mathcal{O}, \nu)$ de tal forma que, para todo $\theta \in \Theta$,*

$$\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta)$$

é \mathcal{O} -mensurável. Seja o subconjunto γ de Θ definido por

$$\gamma = \left\{ \theta \in \Theta : \int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) \text{ é } \mathcal{O}\text{-mensurável} \right\}$$

e definindo a função $TE(\theta, \psi) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$TE(\theta, \psi) = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) d\nu(\tau),$$

temos que para todo $\gamma \subseteq \Theta$, $0 < \nu(\gamma) < 1$ e $\theta \in \gamma$ existe $\psi_{\theta} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$TE(\theta, \psi) = TE(\theta, \psi_{\theta}), \text{ para todo } \theta \in \gamma.$$

Demonstração:

Da demonstração anterior temos que $\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) \geq 0$, portanto

$$\int_{\Theta} \int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) d\nu(\tau) \geq 0$$

$$TE(\theta, \psi) = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) d\nu(\tau) \geq \int_{\Theta} \int_{\Omega} \psi_{\theta}(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) d\nu(\tau) = TE(\theta, \psi_{\theta}).$$

Dessa demonstração temos que o valor $TE(\theta, \psi_{\theta})$ é o limite inferior das funções de tamanho esperado para as funções de pertinência presentes em γ , escrito como

$$\int_{\Theta} \mu(A_{\gamma}(\theta)) \int_{\Omega} \mu(A_{\gamma}(\tau)) Q_{Y}(\gamma) d\nu(\tau).$$

4.1 Exemplos de tamanhos esperados

A fim de comparar o tamanho esperado dos métodos, utilizaremos a medida de Lebesgue por ser a definição de tamanho de intervalo convencional.

Nesses exemplos utilizaremos a propriedade da troca da ordem de integração, devido ao teorema de Tonelli-Fubini considerando a medida $\lambda = \lambda$ no caso da distribuição normal, e $\neq \lambda$ nos outrosw. Assim,

$$TE(\theta, \psi) = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) d\nu(\tau) = \int_{\Omega} \int_{\Theta} \psi(\tau, \omega) d\nu(\tau) d\mu(\omega, \theta)$$

Além disso para distribuição normal as fórmulas podem ser obtidas de forma explícita, enquanto para as distribuições Binomial e Poisson, as mesmas são obtidas de forma numérica.

4.1.1 Distribuição Normal

A seguir, avaliaremos a probabilidade do conjunto gerado pelo método conter τ dado que a distribuição é dada por $\mu = \theta$, ou seja $\int_{\Omega} \psi(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta)$.

Como $\frac{w^t 1}{n} = N(\theta, \frac{\sigma^2}{n})$ temos que

$$\int_{\Omega} \psi_o(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) = \Phi\left(\frac{-\tau - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) Z_{\gamma} \quad , \text{ se } \tau < \theta$$

$$\int_{\Omega} \psi_o(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) = \Phi\left(\frac{-\tau - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) Z_{\gamma} \quad , \text{ se } \tau > \theta$$

e

$$\int_{\Omega} \psi^N(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) = \Phi\left(\frac{-\tau - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) Z_{\frac{\gamma-1}{2}} = \Phi\left(\frac{-\tau - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) Z_{\frac{\gamma+1}{2}} \quad ,$$

onde $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d\lambda(x)$.

Com essas desigualdades é possível estabelecer para que valores de τ e θ , ψ_o é menor que ψ^N em relação a probabilidade do conjunto gerado pelo método conter τ dado que a distribuição é dada por $\mu = \theta$. Neste caso,

$$\int_{\Omega} \psi_o(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) < \int_{\Omega} \psi^N(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) \quad , \text{ se } \theta < \tau \text{ ou } \theta > \tau$$

$$\int_{\Omega} \psi_o(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) > \int_{\Omega} \psi^N(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) \quad , \text{ se } \theta < \tau$$

$$\int_{\Omega} \psi_o(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) = \int_{\Omega} \psi^N(\tau, \omega) d\mu(\omega, \theta) \quad , \text{ c.c..}$$

Para simplificar as contas consideramos que $\gamma > 0.5$, com isso temos que $Z_\gamma > 0$, e portanto $o - Z_\gamma\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} < o + Z_\gamma\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$. Neste caso, o tamanho esperado das funções ψ_o e ψ^N são dados por

$$TE(\psi_o, \theta, \lambda) = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \psi_o(\tau|\omega) d\mu(\omega|\theta) d\lambda(\tau) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \left(f\left(Z_\gamma + \frac{o - \theta}{\sigma^2} \sqrt{n}\right) + f\left(Z_\gamma - \frac{o - \theta}{\sigma^2} \sqrt{n}\right) \right)$$

onde $f(x) = x\Phi(x) + (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$, e

$$TE(\psi^N, \theta, \lambda) = \int_{\Theta} \int_{\Omega} \psi_o(\tau|\omega) d\mu(\omega|\theta) d\lambda(\tau) = 2\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} Z_{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

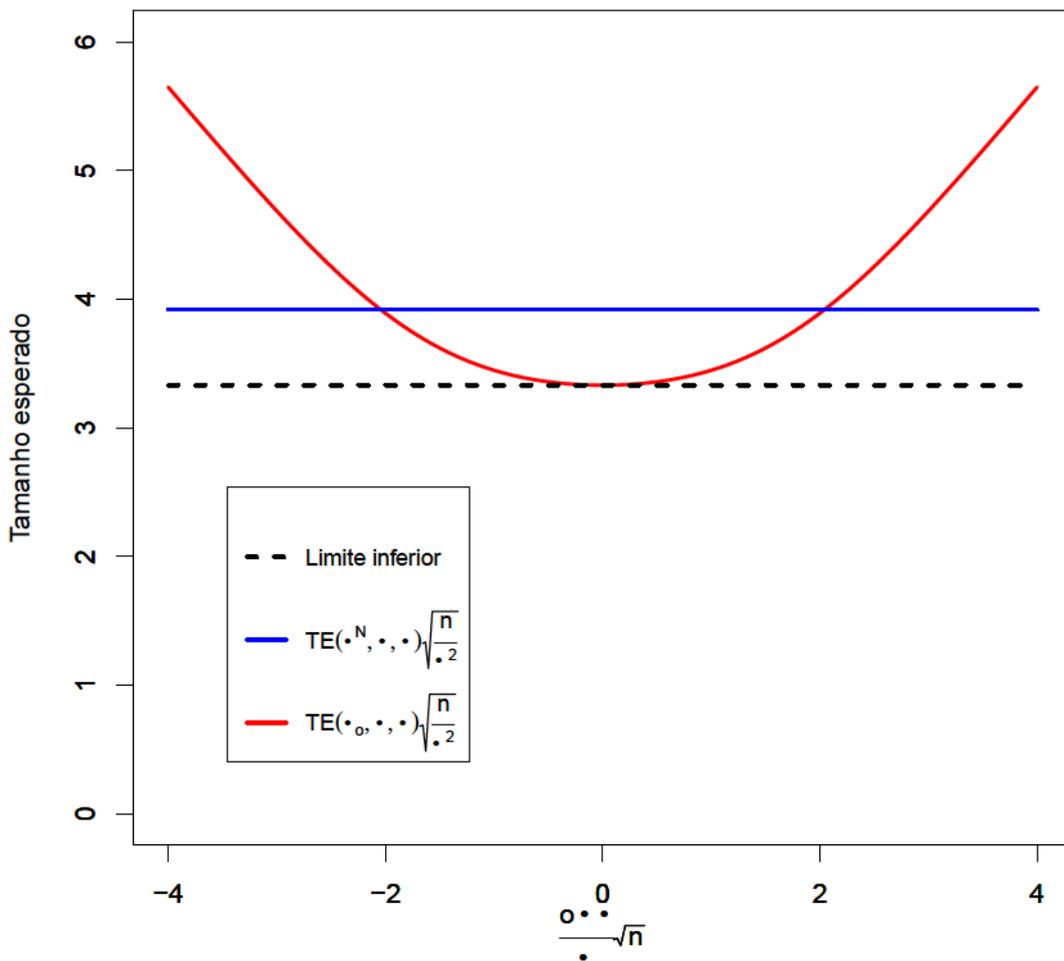


Figura 14 – Tamanho esperado multiplicado por $\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}$ no caso da distribuição normal com parâmetros de média θ e variância σ^2 , para ψ^N e ψ_o . A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior, λ se refere a medida de Lebesgue.

A Figura 16 apresenta o tamanho esperado bem como o limite inferior dado por $TE \psi_{\theta, \theta, \lambda} = 2 \frac{\sigma^2}{n} f(Z_{\gamma})$.

4.1.2 Distribuição Normal com média limitada

Neste exemplo será calculado o tamanho esperado do intervalo de confiança para a média θ da distribuição normal no caso $\theta \in [a, b]$, $a < b$, isto é, sabe-se que a média é limitada. Em ambos os casos, primeiramente calcularemos $\int_{\Theta} \psi(\tau) \omega(d\lambda, \tau)$ separando em regiões para em seguida integrá-lo pela medida μ_{θ} .

Para ψ_{θ} temos que

$$\int_{\Theta} \psi_{\theta}(\tau) \omega(d\lambda, \tau) = \int_{[b - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega(b)] \cup [a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega(a)]} \omega \cup [Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega] \cup [a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, b - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}] \omega \cup [Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega] .$$

Utilizando as as igualdades

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \text{ e } \int_{z_1}^{z_2} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{z_1^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{z_2^2}{2}\right),$$

o valor de $TE \psi_{\theta, \theta, \lambda}$ é obtido pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} TE \psi_{\theta, \theta, \lambda} &= \int_{[b - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega(b)] \cup [a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega(a)]} \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} (b - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}) - \theta\right) \\ &\quad - \int_{[a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega(a)]} \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} (a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}) - \theta\right) \\ &\quad - \int_{[Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega]} \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} (b - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}) - \theta\right) - \int_{[Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega]} \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} (a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}) - \theta\right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2\pi n} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} (b - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n})^2\right) - \frac{\sigma}{2\pi n} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} (a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n})^2\right) \\ &\quad - \int_{[a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega(a)]} \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} (a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}) - \theta\right) - \int_{[Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}, \omega]} \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} (a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n}) - \theta\right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2\pi n} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} (a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n})^2\right) - \frac{\sigma}{2\pi n} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} (a - Z_{\gamma} \frac{\sigma}{n})^2\right) . \end{aligned}$$

Para ψ^{NL} temos que dividir em dois casos, referentes a $a \in [Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, b]$ e $a \in [Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, b]$.

Caso 1:

Se $a \in [Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, b]$, temos que

$$\int_{\Theta} \psi^{NL}(\tau) \omega(d\lambda, \tau) = \int_{[a - Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, a - Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}] \cup [a - Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, \omega(a)]} \omega \cup [Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, \omega] \cup [a - Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, b - Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}] \omega \cup [Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, \omega] .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 TE \psi^{NL}, \theta, \lambda & \quad \theta \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad a \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad a \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \\
 & \quad \frac{\sigma}{2\pi n} \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 \\
 & \quad \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 \\
 & \quad 2Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad b \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad a \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \\
 & \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad b \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad b \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \\
 & \quad \frac{\sigma}{2\pi n} \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 \\
 & \quad \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 .
 \end{aligned}$$

Caso 2:

Se $a = Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}$ e $b = Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}$ temos que

$$\begin{aligned}
 \Theta \psi^{NL} \tau \omega d\lambda \tau & \quad 1 \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \omega \quad \omega \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \\
 & \quad 1 \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \omega \quad b \quad a \\
 & \quad 1 \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n}, b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \omega \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \omega .
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 TE \psi^{NL}, \theta, \lambda & \quad \theta \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad b \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad a \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \\
 & \quad \frac{\sigma}{2\pi n} \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 \\
 & \quad \frac{\sigma}{2\pi n} \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 \\
 & \quad b \quad a \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad a \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad b \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \\
 & \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad b \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \Phi \frac{\bar{n}}{\sigma} \quad a \quad \theta \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \\
 & \quad \frac{\sigma}{2\pi n} \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad a \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 \\
 & \quad \frac{\sigma}{2\pi n} \exp \frac{n}{2\sigma^2} \quad b \quad Z_{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{\sigma}{n} \quad \theta^2 .
 \end{aligned}$$

O limite inferior é dado por

$$TE_{\psi_{\theta}, \theta, \lambda} = \frac{b - \theta}{1 - \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} \frac{b - \theta}{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}\right)} \cdot \frac{\theta - a}{\Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} \frac{\theta - a}{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} \frac{b - \theta}{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}\right)} \cdot \frac{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}{1 - \gamma} \cdot \frac{\sigma}{2\pi n} \exp\left(-\frac{Z_{\gamma}^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} \frac{b - \theta}{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}\right) \cdot \theta^2 \cdot \frac{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}{\gamma} \cdot \frac{\Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} \frac{\theta - a}{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{n}}{\sigma} \frac{b - \theta}{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}\right)}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{2\pi n} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} \frac{\theta - a}{Z_{\gamma} \frac{\sigma}{\bar{n}}}\right) \cdot \theta^2 \cdot \exp\left(-\frac{Z_{\gamma}^2}{2}\right)$$

A Figura 15 apresenta os tamanhos esperados calculados pelo método proposto e pelo método disponível na literatura para diferentes valores dos erros padrões $\frac{\sigma}{\bar{n}}$, a saber, $\frac{\sigma}{\bar{n}} = 1, 10, 1, 6, 1, 3, 1$. É possível observar diferenças entre os comportamentos dos tamanhos esperados para os diferentes erros padrões considerados. Além disso, o método proposto apresentou melhor desempenho em relação ao método da literatura para maiores valores do erro padrão, isto é, apresentou tamanhos esperados menores. Observa-se ainda que a medida que o erro padrão diminui, o comportamento do método proposto se aproxima do comportamento obtido para o tamanho esperado da média sem restrição apresentado no exemplo anterior.

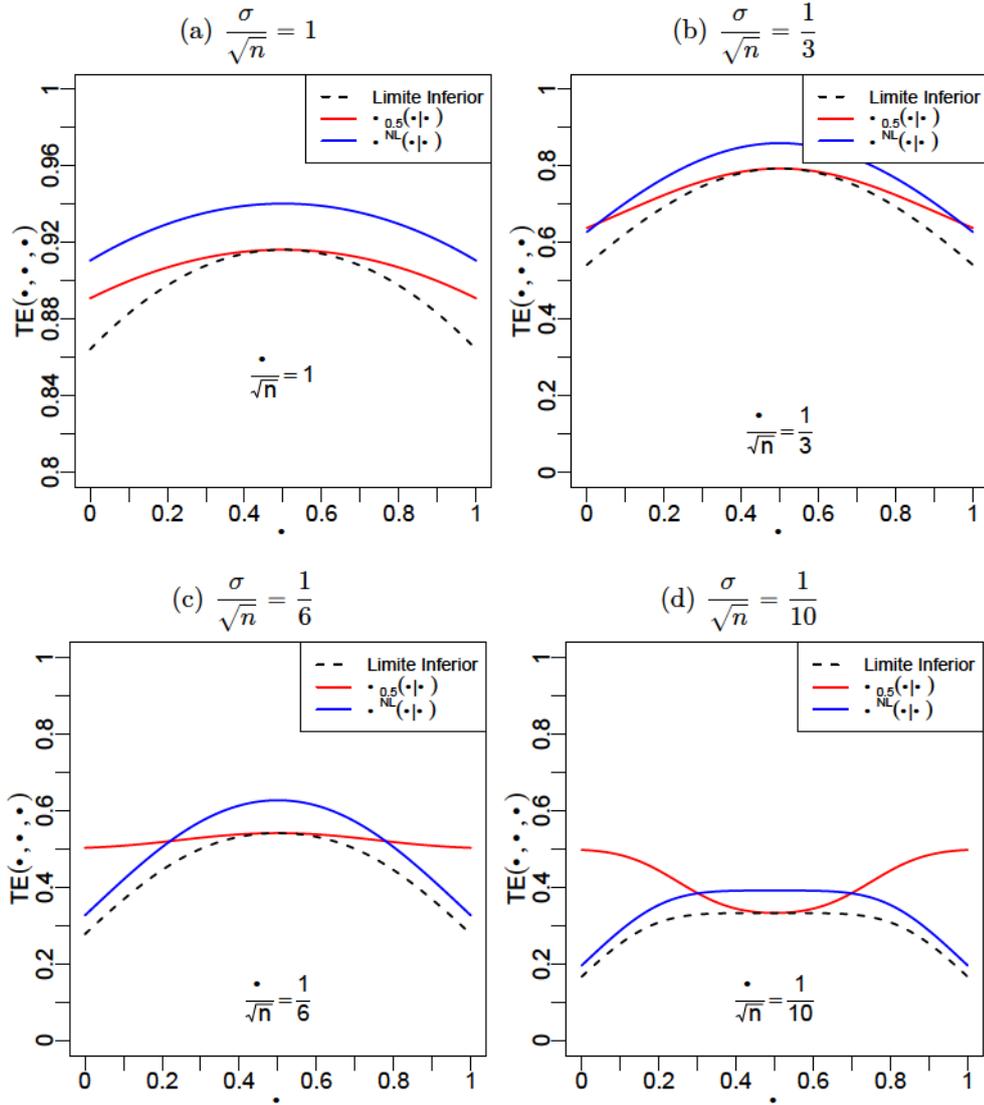


Figura 15 – Tamanho esperado no caso da distribuição normal com parâmetros de media $\mu \in [0, 1]$ e variância σ^2 , para ψ^{NL} e ψ_o , com $o = 0.5$. A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue, em cada painel é utilizado um valor diferente de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

4.1.3 Distribuição Binomial

Neste exemplo apresentamos o cálculo do tamanho esperado do intervalo para a proporção θ da distribuição binomial pelo método proposto para $o \in \{0, 0.5, 1\}$ e pelos métodos de Geyer-Meeden e de Agresti-Coull. Importante destacar que neste caso os cálculos foram realizados numericamente, de modo a obter a Figura 16 para $n = 10$.

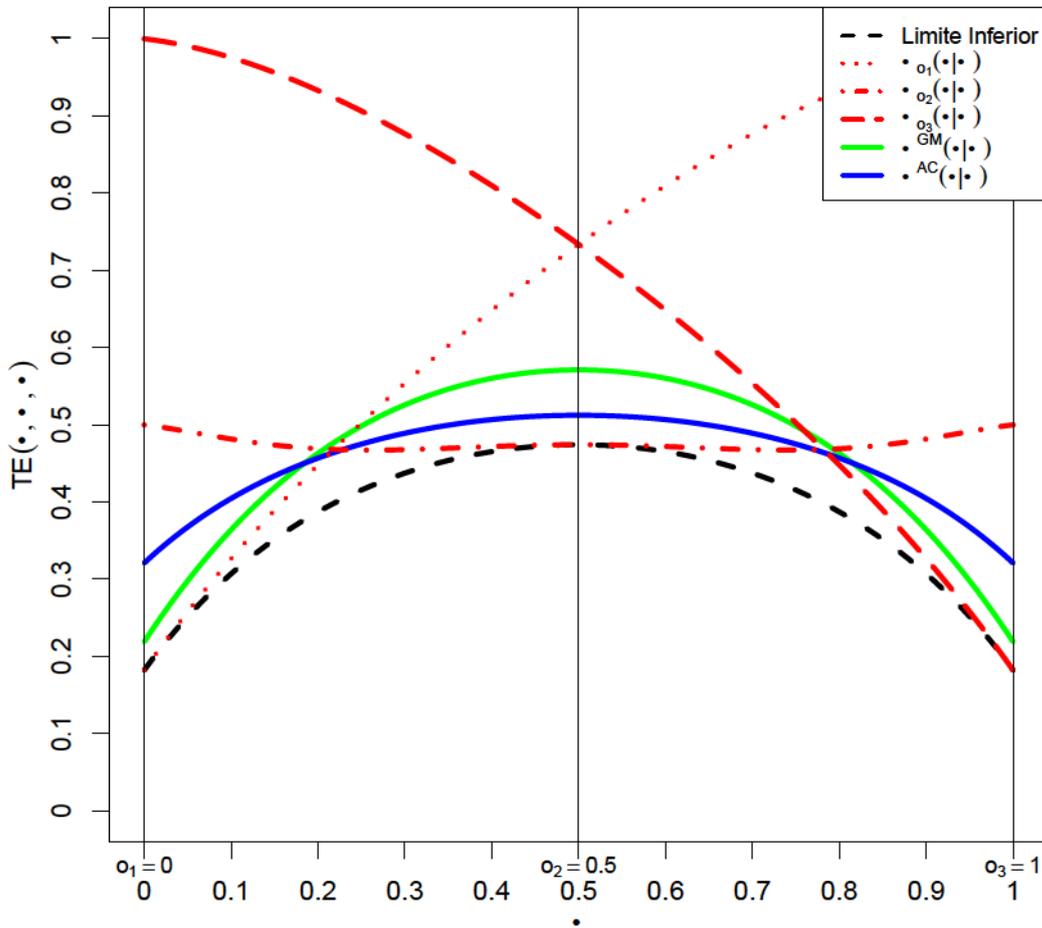


Figura 16 – Tamanho esperado no caso binomial com parâmetro $n = 10$ e θ , para 5 métodos discutidos, sendo 3 deles referentes a ψ_o para $o_1 = 0.1$, $o_2 = 0.5$ e $o_3 = 0.9$, ψ^{GM} e ψ^{AC} . A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue.

Pela Figura 16, podemos observar que o método proposto tangencia o limite inferior para $\theta = o$. A medida que θ se distancia de o , o método apresenta aumento do tamanho esperado. Além disso, no caso em que $o = 0.5$, os tamanhos esperados do método proposto são mais próximos dos métodos disponíveis na literatura, entretanto, a medida que θ se aproxima das extremidades, o tamanho esperado do método proposto aumenta, ao passo que os tamanhos esperados dos métodos usuais diminuem.

Um caso interessante ocorre para $n = 1$, em que todas as funções de tamanhos esperados são funções lineares e por serem necessariamente superiores ou iguais ao limite inferior, os máximos do tamanho esperado em relação à θ para os diferentes métodos são maiores ou iguais ao obtido pelo método proposto para $o = 0.5$, como pode ser observado

na Figura 17.

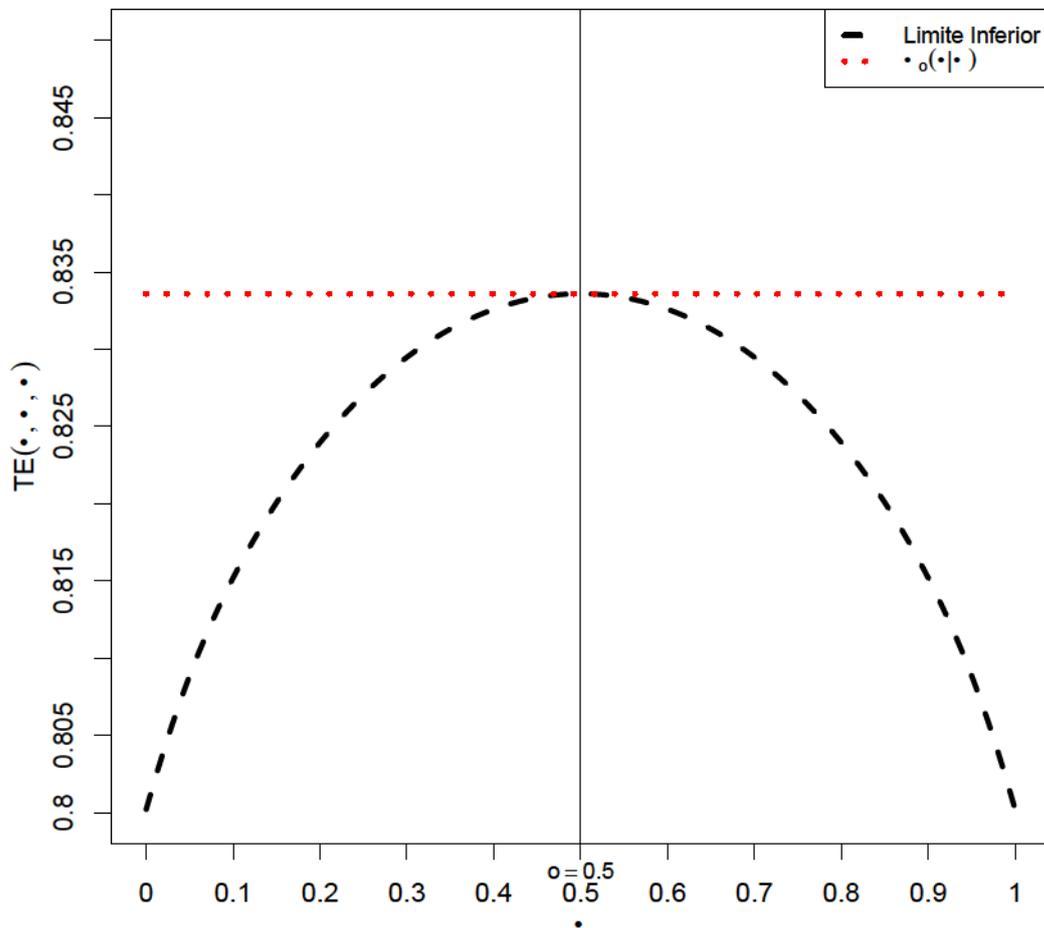


Figura 17 – Tamanho esperado no caso binomial com parâmetro $n = 1$ e θ , para ψ_o com $o = 0.5$. A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue.

4.1.4 Distribuição de Poisson

Neste exemplo calculamos os tamanhos esperados para o intervalo de confiança para a média θ da distribuição de Poisson pelo método proposto e pelos métodos de Geyer-Meeden e *Score*. Assim como no caso da distribuição binomial, os tamanhos foram calculados numericamente e são apresentados na Figura 18. Pela figura, observamos que o método proposto tangencia o limite inferior para $\theta = o$, como nos demais exemplos. Além disso, o método apresenta melhor desempenho para valores de θ próximos a o em relação aos métodos usuais. Especificamente para $o = 5$, o tamanho esperado obtido pelo método

proposto é próximo aos tamanhos calculados pelos métodos considerados para θ próximos de zero.

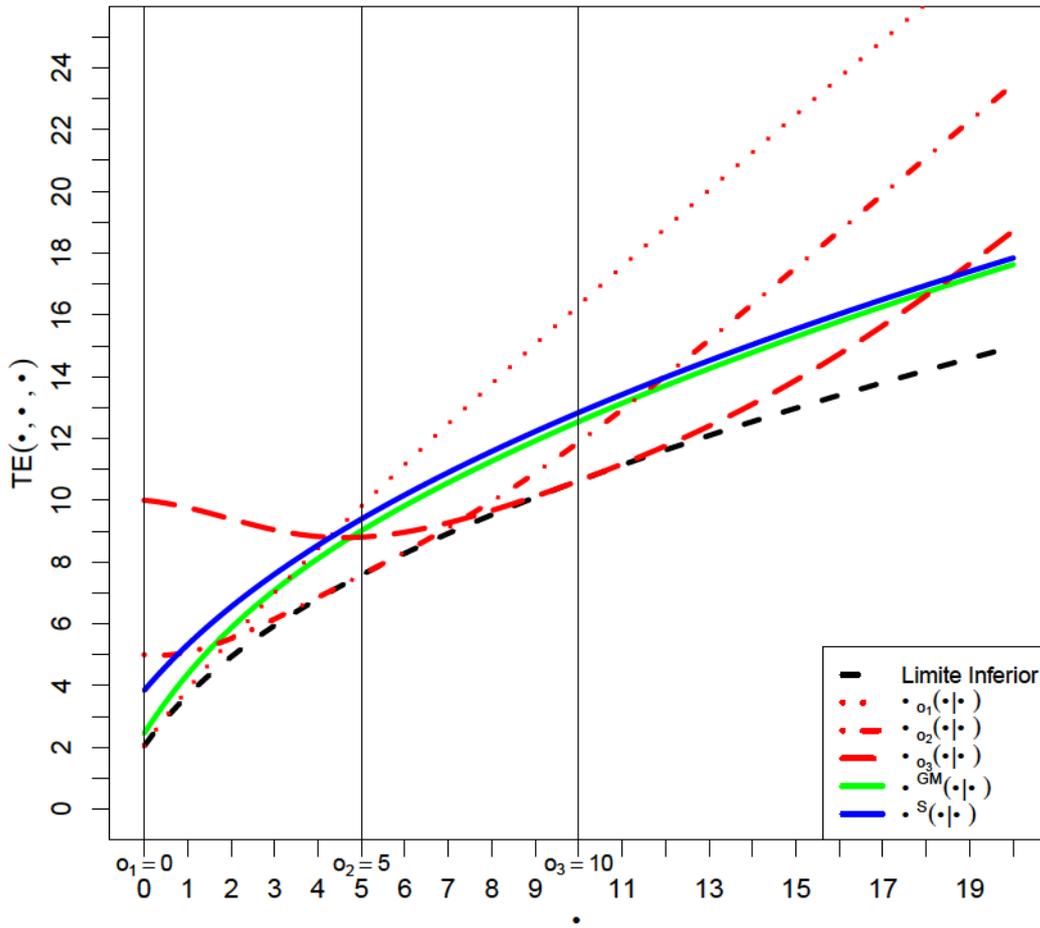


Figura 18 – Tamanho esperado no caso Poisson com parâmetro θ , para 5 métodos discutidos, sendo 3 deles referentes a ψ_o para $o_1 = 0$, $o_2 = 5$ e $o_3 = 10$, ψ^{GM} e ψ^S . A curva preta pontilhada apresenta o Limite Inferior obtido por $TE(\theta, \psi_\theta, \lambda)$, λ se refere a medida de Lebesgue.

5 Considerações Finais

A presente dissertação teve como objetivo principal propor um novo método para construção de intervalos de confiança fuzzy com base no Lema de Neyman-Pearson para hipóteses simples.

O desempenho do método proposto foi analisado na construção de intervalos para a média da distribuição normal, proporção da distribuição binomial e para a média da distribuição de Poisson e comparado com métodos usuais para obtenção de tais intervalos.

No caso das distribuições discretas consideradas (binomial e Poisson), o método proposto apresentou melhor desempenho em termos de tamanho esperado do intervalo obtido em relação aos métodos considerados, especificamente nos cenários em que a literatura descreve que o métodos usuais não são apropriados para aplicação, levando-se em consideração a taxa de cobertura dos intervalos.

Ao considerar a distribuição normal, o método proposto apresentou melhor desempenho no contexto em que a média é limitada e a variância é grande em relação ao tamanho do suporte da média. Já no caso em que a média não é limitada, o método não apresentou desempenho competitivo em relação ao método padrão.

A abordagem considerada pode ser utilizada na avaliação de casos em que não se pretende utilizar a abordagem fuzzy nem a aleatorizada, como mostrado no caso da distribuição binomial com $n \geq 1$. A definição de um limite inferior do tamanho esperado possibilita fazer demonstrações envolvendo o espaço dos intervalos de confiança.

Referências

- AGRESTI, A.; COULL, B. A. Approximate is better than "exact" for interval estimation of binomial proportions. *The American Statistician*, [American Statistical Association, Taylor & Francis, Ltd.], v. 52, n. 2, p. 119–126, 1998. ISSN 00031305, 15372731. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2685469>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 15.
- DANTZIG, G. B. Discrete-variable extremum problems. *Operations Research*, v. 5, n. 2, p. 266–288, 1957. Disponível em: <https://doi.org/10.1287/opre.5.2.266>. Citado na página 20.
- GEYER, C. J.; MEEDEN, G. D. Fuzzy and randomized confidence intervals and p-values. *Statistical Science*, v. 20, n. 4, p. 358–366, 2005. ISSN 08834237. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/20061193>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 14 e 16.
- _____. *ump: Uniformly Most Powerful Tests*. [S.l.], 2017. R package version 0.5-8. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=ump>. Citado na página 17.
- HOLLADAY, B. A. *Contributions to Interval Estimation for Parameters of Discrete Distributions*. Tese (Doutorado) — University of California Santa Barbara, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 16.
- LAPLACE, P. S. *Théorie analytique des probabilités*. Courcier, 1820. Disponível em: <http://eudml.org/doc/203444>. Citado na página 11.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. *Introduction to the Theory of Statistics*. [S.l.]: McGraw-Hill Kogakusha, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.
- NEYMAN, J.; PEARSON, E. S. IX. on the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, v. 231, p. 289–337, 1933. ISSN 2053-9258. Citado na página 17.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2019. Disponível em: <https://www.R-project.org>. Citado na página 17.
- SHAO, J. *Mathematical Statistics*. [S.l.]: Springer Science+Business Media, 2003. ISSN 1431-875X. ISBN 9780387217185. Citado na página 17.
- STEVENS, W. L. Fiducial limits of the parameter of a discontinuous distribution. *Biometrika*, [Oxford University Press, Biometrika Trust], v. 37, n. 1/2, p. 117–129, 1950. ISSN 00063444, 14643510. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2332154>. Citado na página 11.