

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

FRANCISCO DE MELLO CALDERARO

**A teoria de Nyman-Beurling em espaços de
Hardy: relação entre zeros de zeta, densidade e
ortogonalidade em H^2**

Campinas

2025

Francisco de Mello Calderaro

A teoria de Nyman-Beurling em espaços de Hardy: relação entre zeros de zeta, densidade e ortogonalidade em H^2

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Francisco de Mello Calderaro e orientada pelo Prof. Dr. Sahibzada Waleed Noor.

Campinas
2025

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C127t Calderaro, Francisco de Mello, 2001-
A teoria de Nyman-Beurling em espaços de Hardy : relação entre zeros de zeta, densidade e ortogonalidade em H^2 / Francisco de Mello Calderaro. – Campinas, SP : [s.n.], 2025.

Orientador: Sahibzada Waleed Noor.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Critério de Báez-Duarte. 2. Hipótese de Riemann. 3. Espaços de Hardy. 4. Espaços de De Branges-Rovnyak. 5. Análise funcional. 6. Sistemas biortogonais. 7. Dualidade de Cauchy. I. Noor, Sahibzada Waleed, 1984-. II. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações complementares

Título em outro idioma: The Nyman-Beurling theory on Hardy spaces : relationship between zeta-zeros, density and orthogonality in H^2

Palavras-chave em inglês:

Báez-Duarte criterion

Riemann hypothesis

Hardy spaces

De Branges-Rovnyak spaces

Functional analysis

Biorthogonal systems

Cauchy duality

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Sahibzada Waleed Noor [Orientador]

Osmar Rogerio Reis Severiano

Charles Ferreira dos Santos

Data de defesa: 07-03-2025

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)

Não se aplica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0006-4864-7083>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4151762154272474>

**Dissertação de Mestrado defendida em 07 de março de 2025 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof. Dr. SAHIBZADA WALEED NOOR

Prof. Dr. OSMAR ROGERIO REIS SEVERIANO

Prof. Dr. CHARLES FERREIRA DOS SANTOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico esse trabalho aos meus pais, Jean e Vera, e aos meus irmãos, Mia e Jean.

Agradecimentos

Agradeço à minha família o apoio e os momentos de diversão que sempre proporcionam. Em especial, agradeço aos meus pais, Vera e Jean, o apoio financeiro e por sempre me motivarem e apoiarem minhas decisões e agradeço também à minha irmã Mia os inúmeros conselhos, os momentos de descontração e por aguentar me ouvir falar sobre matemática o tempo todo.

Agradeço ao IMECC e à Unicamp, aos docentes, funcionários e colegas discentes a estrutura que me permitiu aprender muito, tanto sobre matemática como sobre a vida, e me tornar um matemático. Agradeço em especial ao meu orientador, Sahibzada Waleed Noor, os conselhos (não só sobre estudo), reuniões, momentos de descontração e, principalmente, por compartilhar o seu entusiasmo com a matemática e com a vida. Agradeço à Hardy space gang, em especial ao Artur, ao Ben e ao Charles, aos inimigos de Dirichlet, aos meus amigos da geometria e de sistemas dinâmicos e, especialmente, meu amigo Gabriel Guzatti por toda a parceria, conversas e risadas, que fizeram essa experiência ser extremamente mais prazerosa.

Agradeço aos meus amigos do pensionato da Penha todas as risadas, conversas bobas e sérias e, principalmente, o companheirismo. Agradeço, em especial, ao meu amigo Lucas Henrique que me acompanhou desde a graduação e cujo apoio durante a escrita desse trabalho foi essencial para que eu conseguisse realizá-lo.

Agradeço aos meus amigos de Taubaté, que me acompanham desde o ensino fundamental e com quem sou capaz de manter contato apesar da distância e dos diferentes caminhos tomados. Agradeço em especial à minha amiga Gabriella Nakamura, cuja amizade foi de extrema importância para que eu conseguisse me manter são durante a pandemia e é ainda muito importante.

Agradeço aos membros da banca, Charles e Osmar, pelas inúmeras e valiosas sugestões e correções.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Estou hoje perplexo, como quem pensou e achou e esqueceu.”
(Fernando Pessoa)

Resumo

Este trabalho estuda o critério de Báez-Duarte no espaço de Hardy H^2 , que mostra que a hipótese de Riemann é equivalente à densidade de um dado subespaço $\mathcal{N}$ de H^2 . Em particular, são estudados resultados parciais nesse contexto, tanto sobre a densidade de $\mathcal{N}$ como o problema dual de ortogonalidade, e consequências de tais resultados, bem como algumas de suas generalizações. Para tanto, os conceitos utilizados nesse estudo, como a teoria dos espaços de Hardy, as classes de Nevanlinna e Smirnov e os espaços de de Branges-Rovnyak, são apresentados num capítulo preliminar. Em seguida, é feito o estudo do artigo (1), que primeiro introduz a versão em H^2 do critério de Báez-Duarte e apresenta os primeiros resultados parciais, como a densidade de $\mathcal{N}$ no espaço das funções holomorfas no disco unitário $\text{Hol}(\mathbb{D})$ e a existência de um subespaço denso de H^2 livre de funções ortogonais a $\mathcal{N}$. Por fim, é estudado parte da pré-publicação (2), que aprofunda os resultados do artigo anterior, introduzindo uma nova abordagem para o estudo do problema de ortogonalidade, estuda o problema de biortogonalidade e relaciona a dimensão do complemento ortogonal de $\mathcal{N}$ com uma conjectura folclórica sobre o incumprimento da hipótese de Riemann. Para essa análise, é feito também o estudo de alguns dos resultados de (3).

Palavras-chave: Critério de Báez-Duarte. Hipótese de Riemann. Espaço de Hardy. Espaços de de Branges-Rovnyak. Análise funcional. Biortogonalidade. Dual de Cauchy.

Abstract

This work studies the Báez-Duarte criterion in the Hardy space H^2 , which shows that the Riemann hypothesis is equivalent to the density of a given linear subspace $\mathcal{N}$ of H^2 . In particular, partial results in this context, both concerning the density of $\mathcal{N}$ and the dual problem of orthogonality, and consequences of such results, as well as some generalizations, are studied. In order to do so, the concepts used in this study, such as the theory of Hardy spaces, the Nevanlinna and Smirnov classes and the de Branges-Rovnyak spaces, are presented in a preliminar chapter. Then, a study of the paper (1), which first introduces the H^2 version of this criterion and presents the first partial results, such as the density of $\mathcal{N}$ in the space of holomorphic functions in the unit disk $\text{Hol}(\mathbb{D})$ and the existence of a dense subspace of H^2 free of functions orthogonal to $\mathcal{N}$, is done. In the end, part of the preprint (2) is studied, which strengthens the results from the previous paper, introducing a new approach for the study of the orthogonality problem, studies the biorthogonal problem and relates the dimension of the orthogonal complement of $\mathcal{N}$ with a folklore conjecture on the failure of the Riemann hypothesis. For this analysis, a study of some of the results in (3) is also made.

Keywords: Báez-Duarte criterion. Riemann hypothesis. Hardy space. de Branges-Rovnyak spaces. Functional analysis. Biorthogonality. Cauchy dual.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	O conjunto dos números naturais $\{0, 1, 2, \dots\}$.
$\mathbb{N}^*$	O conjunto dos números naturais positivos $\{1, 2, \dots\}$.
$\mathbb{R}$	O conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}_{>0}$	O conjunto dos reais positivos $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
$\mathbb{C}$	O conjunto dos números complexos.
$\mathbb{D}$	O disco unitário $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$.
$\mathbb{T}$	O círculo unitário $\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$.
$\operatorname{Re}(s)$	Parte real do número complexo s .
$\operatorname{Im}(s)$	Parte imaginária do número complexo s .
$\bar{s}$	O conjugado complexo do número $s \in \mathbb{C}$.
$ s $	O valor absoluto do número complexo s .
$\mathbb{C}_\alpha$	O semiplano dos números complexos com parte real maior que α .
$\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$	O espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ das funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.
$\mathfrak{B}(X)$	O espaço de Banach das funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ com a norma do sup.
$\mathcal{C}(X)$	O espaço vetorial das funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.
$\operatorname{Hol}(U)$	O espaço das funções holomorfas em $U \subset \mathbb{C}$.
$\oint_\gamma f$	A integral de linha de f ao longo do caminho fechado γ orientado no sentido anti-horário.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$	O produto interno no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.
$\ \cdot\ _{\mathcal{B}}$	A norma do espaço de Banach $\mathcal{B}$.

A^c	O conjunto complementar de A .
$\overline{X}$	O fecho (topológico) do conjunto X .
∂X	A fronteira do conjunto X .
B_X	A bola unitária aberta do espaço métrico X (veja página 1.5.3).
$\mathcal{B}(X)$	O espaço dos operadores lineares limitados do espaço de Banach X .
X'	O dual topológico do espaço vetorial topológico X .
X^*	O dual de Cauchy do espaço vetorial topológico $X \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ (veja definição 1.6.1).
$ X $	A cardinalidade do conjunto X .
$\delta_{n,m}$	Delta de Kronecker (veja página 22).
$\ell^2(\mathbb{N}), \ell^2(\mathbb{Z}), \ell^2$	O espaço das sequências quadrado-somáveis de números complexos (veja Definição 1.1.1).
ℓ_w^2	O espaço das sequências de números complexos cuja soma ponderada dos módulos ao quadrado é finita (veja Definição 1.2.3).
$H^2, H^2(\mathbb{D})$	O espaço de Hardy-Hilbert no disco (veja Definição 1.1.2).
$H^2(\mathbb{T})$	O espaço de Hardy-Hilbert no círculo (veja página 28).
$H^p, H^p(\mathbb{D})$	O espaço de Hardy no disco (veja Definição 1.1.9).
$L^p, L^p(X), L^p(X, \mu)$	O espaço das classes de equivalência de funções p-integráveis por Lebesgue (veja Definição B.1.1).
f^*	O limite radial da função f (veja página 28).
$\text{span } X$	O conjunto das combinações lineares (finitas) de $X \subset V$, onde V é um espaço vetorial.
S	O operador shift em H^2 (veja Proposição 1.1.19).
$\mathcal{A}_\alpha^p, \mathcal{A}$	Espaço de Bergman ponderado (veja Definição 1.2.1).
$\mathcal{D}$	Espaço de Dirichlet (veja Definição 1.3.1).
$\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\zeta$	Espaços de Dirichlet harmonicamente ponderados (veja Definição 1.3.4).
$P[\mu], P[f]$	A integral de Poisson de μ ou f (veja página 44).
N	A classe de Nevanlinna (veja Definição 1.4.1).

N^+	A classe de Smirnov (veja Definição 1.4.5).
T^*	A transformação adjunta do operador linear (possivelmente descontínuo) T .
$\ker T$	O núcleo da transformação linear T .
$\text{Ran } T$	A imagem da transformação linear T .
$\mathcal{G}(f)$	O gráfico da função f .
$\text{Dom}(f)$	O domínio da função f .
$X^\perp$	O complemento ortogonal de $X \subset \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial com produto interno.
P_X	O operador de projeção ortogonal sobre o subespaço X de um espaço de Hilbert.
T_φ	O operador de Toeplitz com símbolo φ (veja as Definições 1.5.1 e 1.5.6).
M_g	O operador de multiplicação por g .
$\mathcal{H}(b)$	O espaço de de Branges-Rovnyak associado a $b \in \overline{B}_{H^\infty}$ (veja Definição 1.5.3).
$O(g)$	Notação O-grande (veja apêndice A).
$o(g)$	Notação o-pequeno (veja apêndice A).
$f \sim g$	Notação de igualdade assintótica (veja apêndice A).
$f * g$	O produto de Dirichlet das funções aritméticas f e g .
(m, n)	O máximo divisor comum entre os números naturais m e n .
$[x]$	O maior inteiro menor ou igual a x .
$\{x\}$	A parte fracionária do número real x .
$\pi(x)$	A quantidade de primos menores ou iguais a x .
Log	O ramo principal da função logaritmo.

Sumário

Introdução	15
1 Preliminares	18
1.1 O Espaço de Hardy-Hilbert no Disco	18
1.1.1 Teorema de Beurling e a fatoração canônica	29
1.2 Um Espaço de Bergman ponderado	36
1.3 Espaços de Dirichlet generalizados	41
1.4 Classes de Nevanlinna e Smirnov	47
1.4.1 Pares pitagóricos de funções em H^∞	48
1.5 Espaços de de Branges-Rovnyak	52
1.5.1 Produto interno induzido por mapas lineares contínuos	52
1.5.2 Operadores de Toeplitz contínuos e $\mathcal{H}(b)$	53
1.5.3 Elementos não-extremos de $\overline{B}_{H^\infty}$ e operadores de Toeplitz analíticos descontínuos	55
1.6 Dualidade de Cauchy	60
1.7 Biortogonalidade, minimalidade e completude	62
1.8 Noções de Teoria Analítica dos Números	64
1.8.1 Funções Aritméticas e o produto de Dirichlet	64
1.8.2 Estimativa do crescimento de $\sigma_0(n)$	69
1.8.3 Fórmulas de soma	72
1.9 A função ζ e a hipótese de Riemann	75
1.9.1 Critérios de Nyman, Beurling e Báez-Duarte	78
1.10 Comentários	80
2 Critério de Báez-Duarte em H^2: Densidade e Ortogonalidade	82
2.1 Critério de Báez-Duarte em H^2	82
2.2 Um semigrupo de composições ponderadas	88
2.3 Densidade de $(I - S)\mathcal{N}$ em H^2	90
2.4 Funções ortogonais a $\{h_k : k \geq 2\}$	94
3 Ortogonalidade e Biortogonalidade em H^2 e zeros de ζ	96
3.1 Densidade, ortogonalidade e semiplanos livres de zeros	97
3.1.1 Dualidade de Cauchy: densidade e ortogonalidade	98
3.1.2 Uma abordagem para a questão ortogonal	99
3.2 Biortogonalidade e $\{h_k : k \geq 2\}$	102
3.2.1 Coeficientes de $(I - S^*)h_k$	103
3.2.2 Uma sequência biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$	104
3.2.3 Sequências biortogonais a $(v_k)_{k \geq 2}$	105
3.2.4 Completude de $(u_k)_{k \geq 2}$	106

3.3	A fórmula dos núcleos de zeta	107
3.4	A conjectura do incumprimento da HR	109
REFERÊNCIAS		113
Apêndices		118
APÊNDICE A Notação de comportamento assintótico		119
APÊNDICE B Resultados clássicos		121
B.1	Espaços L^p	121
B.2	Análise Complexa	122
B.3	Análise Funcional	124

Introdução

Os números primos são objetos de extremo interesse para a matemática por cumprirem um papel análogo ao do átomo de Leucipo para os números naturais com respeito à multiplicação, i.e., serem elementos indivisíveis que geram todos os demais, conforme o Teorema Fundamental da Aritmética. Desde a antiguidade clássica, já é conhecido que existem infinitos números primos, por uma demonstração clássica de Euclides. Apesar disso, entender a forma como os números primos se distribuem é ainda um trabalho que elude os matemáticos.

Uma das questões na qual estamos interessados é entender o comportamento assintótico da função $\pi(x)$ que conta a quantidade de números primos no intervalo $[1, x]$. Gauss, em 1849, propôs em uma carta ao astrônomo Hencke (de acordo com (4)) que $\pi(x)$ é bem-aproximada pela função

$$\text{Li}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\log t} dt + \int_{1+\delta}^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Como estamos olhando apenas para o comportamento assintótico, é comum trabalharmos, alternativamente, com a função

$$\text{li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt = \text{Li}(x) - \text{Li}(2).$$

Essa observação feita por Gauss ficou demonstrada com o célebre Teorema dos números primos (TNP), provado independentemente por Hadamard (5) e de la Vallée Poussin (6) em 1896. De fato, usando integração por partes, é fácil concluir que

$$\text{li}(x) - \frac{x}{\log x} = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Em particular, $\text{li}(x) \sim x/\log x$ e assim, segue de uma das famosas formulações do TNP, que $\pi(x) \sim x/\log x \implies \pi(x) \sim \text{li}(x)$.

Vale ressaltar que, em ambas as demonstrações mencionadas do TNP, um passo fundamental envolve mostrar que a função ζ (lê-se zeta) de Riemann não se anula na reta $\text{Re}(s) = 1$. Essa função é definida no semiplano $\mathbb{C}_1$ pela série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

e estendida a uma função meromórfica no plano complexo por continuação analítica. A relação da função ζ com os números primos era conhecida por Euler, por meio de seu produto infinito

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \forall s \in \mathbb{C}_1.$$

Além disso, o erro da aproximação assintótica $\pi(x) \sim \text{li}(x)$ depende dos zeros de ζ . Um estudo da continuação analítica da função ζ nos permite concluir que seus zeros podem ser divididos em dois tipos: os zeros triviais (se $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}^*$) e os zeros não triviais (se $0 < \text{Re}(s) < 1$). Analisando essa função, Riemann (7) conjecturou que os zeros não triviais pertencem todos à reta $\text{Re}(s) = 1/2$. Essa conjectura é o que chamamos de hipótese de Riemann (HR).

A hipótese de Riemann é um dos grandes problemas em aberto da matemática, sendo um dos sete problemas do milênio propostos pelo Clay Institute (4). Uma das consequências da HR está relacionada ao termo de erro da aproximação $\pi(x) \sim \text{li}(x)$. De fato, se a HR for verdadeira conseguimos obter a estimativa para o termo de erro a seguir

$$\pi(x) = \text{li}(x) + O(\sqrt{x} \log x).$$

Não só isso, mas também regiões livres de zeros na faixa crítica $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(s) < 1/2\}$ nos dão boas estimativas para esse termo de erro.

Na década de 1950, Nyman (8) e Beurling (9) provaram que a HR é equivalente a um problema em espaços de Banach.

Teorema 0.0.1. *Para cada $0 \leq \lambda \leq 1$, seja $f_\lambda : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f_\lambda(x) = \left\{ \frac{\lambda}{x} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{x} \right\},$$

onde $\{x\}$ denota a parte fracionária de x . Então, para cada $1 < p < \infty$, o semiplano $\mathbb{C}_{1/p} = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 1/p\}$ é livre de zeros de ζ se, e somente se, $\text{span}\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ é denso em $L^p(0, 1)$. Isso ocorre se, e somente se, $1 \in \overline{\text{span}}\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Esse resultado fornece uma abordagem que permite utilizar ferramentas de análise funcional e teoria de operadores para estudar a HR, um problema cujas principais abordagens convencionais envolvem teoria dos números e análise complexa. Chamamos a abordagem de estudar a HR por meio de densidade e aproximação em espaços vetoriais topológicos e os resultados parciais nesses contextos de teoria de Nyman-Beurling por conta desse teorema. Em 2003, Báez-Duarte (10) provou uma versão forte desse resultado no caso $p = 2$, que enunciamos a seguir.

Teorema 0.0.2. *Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, seja $s_k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$s_k(x) = \left\{ \frac{1}{kx} \right\} - \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{x} \right\}.$$

Então, a hipótese de Riemann é equivalente à função constante 1 pertencer ao fecho em $L^2(0, 1)$ de $\text{span}\{s_k : k \in \mathbb{N}^*\}$.

Em particular, como $L^2(0, 1)$ é um espaço de Hilbert separável, é unitariamente equivalente a qualquer espaço de Hilbert separável. Logo, em todo espaço desse tipo existe um problema sobre aproximação com uma família enumerável de vetores equivalente a HR. Nesse texto, estudamos a versão desse Teorema no espaço de Hardy-Hilbert H^2 introduzida por Noor (1) e resultados parciais nesse contexto, apresentados em (1, 2). A vantagem em estudar a versão do critério de Báez-Duarte em H^2 é que podemos fazer uso da extensa teoria e ferramentas desenvolvidas para os espaços de Hardy, que relacionam análise funcional, teoria de operadores e análise complexa.

O texto é dividido em 3 capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo, intitulado *Preliminares*, são apresentados os conceitos e resultados necessários para compreensão de todo o texto. Começamos definindo o espaço de Hardy e desenvolvendo parte de sua teoria, além de apresentar outros espaços vetoriais topológicos de funções holomorfas no disco utilizados no artigo (1) e na pré-publicação (2). É também apresentado o conceito de dualidade de Cauchy para esses espaços, que cumpre um papel fundamental na pré-publicação (2). Ainda nesse capítulo, discutimos o conceito de biortogonalidade e sua relação com completude de sequências, o que motiva um dos resultados de (2). Por fim, discutimos alguns conceitos e resultados em teoria analítica dos números, usados em ambos os textos citados, e apresentamos com maior detalhe a função ζ de Riemann, a hipótese de Riemann e os critérios de Nyman e Beurling e Báez-Duarte.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo do artigo (1), sendo as quatro seções desse capítulo referentes às seções 2 a 5 do artigo. No terceiro capítulo estudamos parte da pré-publicação (2), omitindo parte dos resultados da seção 2 desse texto. Por fim, no apêndice definimos e discutimos brevemente as notações de comportamento assintótico, como $f = O(g)$ e $f \sim g$, utilizadas extensivamente ao longo do texto.

Esse texto é escrito tendo em mente que o leitor tem um conhecimento relativo a um curso de álgebra linear de graduação, um curso de análise real relativamente completo, um curso de análise complexa, um curso básico de análise funcional e um curso introdutório de teoria dos números (conheça, por exemplo, o Teorema de Bézout). Compilamos no Apêndice B os resultados clássicos que não são discutidos, mas são usados no texto.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é dedicado à apresentação dos conceitos utilizados nos capítulos 2 e 3. As seções 1.1 a 1.3 e 1.5 apresentam diferentes espaços de Hilbert de funções holomorfas, a saber, o espaço de Hardy no disco $H^2(\mathbb{D})$, os espaços de Bergman ponderados mcA_α^2 , em especial o espaço $\mathcal{A}_1^2$, os espaços de Dirichlet harmonicamente ponderados $\mathcal{D}_\mu$ e os espaços de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$, enquanto a seção 1.4 apresenta dois espaços vetoriais topológicos de funções holomorfas, a classe de Nevanlinna N e de Smirnov N^+ , que estão relacionados aos espaços apresentados nas seções 1.1 e 1.5. Na seção 1.6 apresentamos uma noção de dualidade específica para espaços de funções holomorfas. Na seção 1.7 definimos o conceito de biortogonalidade em espaços de Hilbert e o relacionamos com minimalidade e completude. Na seção 1.8 introduzimos e discutimos algumas definições e resultados de teoria analítica dos números. Por fim, na seção 1.9 definimos a famosa função ζ de Riemann, enunciamos a célebre hipótese de Riemann (HR) e dois critérios em espaços de Hilbert para HR.

As seções 1.1 a 1.5, 1.9 e as subseções 1.8.2 e 1.8.3 apresentam os conceitos que serão usados no capítulo 2. As seções 1.1, 1.3 a 1.7 e a subseção 1.8.1 contém as preliminares para o capítulo 3.

1.1 O Espaço de Hardy-Hilbert no Disco

A forma como iremos definir o espaço de Hardy destaca a relação natural entre esse espaço e $\ell^2(\mathbb{N})$. Portanto, vamos primeiro definir $\ell^2(\mathbb{N})$.

Definição 1.1.1. Seja

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\},$$

i.e., o conjunto das sequências de números complexos que são quadrado-somáveis. $\ell^2(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar usuais (coordenada a

coordenada). Além disso, $\ell^2(\mathbb{N})$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

De forma análoga, podemos definir $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ e

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Quando estiver claro pelo contexto qual é o conjunto de índices, iremos simplificar a notação, denotando por ℓ^2 e as sequências $(a_n)_{n \in I}$ por (a_n) , onde $I = \mathbb{N}, \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{Z}$. Na seção 1.2, definimos uma generalização para esses espaços, porém nos restringimos ao caso $I = \mathbb{N}$.

De acordo com (11), podemos definir o espaço de Hardy no disco como segue.

Definição 1.1.2 (Espaço de Hardy-Hilbert). O espaço de Hardy-Hilbert no disco, denotado por $H^2(\mathbb{D})$, é o conjunto das funções holomorfas na origem com coeficientes de Taylor quadrado-somáveis, i.e.,

$$H^2 = \left\{ f \in \text{Hol}(0) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, (a_n) \subset \mathbb{C} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Por simplicidade, por vezes denotamos esse espaço por H^2 ao invés de $H^2(\mathbb{D})$. O espaço de Hardy é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right\rangle_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \langle (a_n), (b_n) \rangle_{\ell^2}.$$

Notação. Como é usual, quando o espaço estiver subentendido, o omitimos na notação de produto interno.

Uma simples computação mostra que o mapa $(a_n) \in \ell^2 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$ é uma transformação unitária, i.e. linear isométrica e sobrejetiva. Em particular, H^2 é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita em que $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal. Além disso, apesar da definição só pedir que as funções de H^2 sejam holomorfas na origem, é fácil verificar que temos uma condição ainda mais forte.

Proposição 1.1.3. *Toda função que pertence ao espaço de Hardy H^2 é holomorfa no disco unitário $\mathbb{D}$, i.e., $H^2 \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$.*

Demonstração. Veja (11, Teorema 1.1.2) ou observe que, se $(a_n) \in \ell^2$, então $a_n = O(1)$ (veja Apêndice A) e $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq 1$, logo o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é maior ou igual a 1. □

Vale ressaltar que essa inclusão é estrita. De fato, o exemplo a seguir será relevante no futuro (veja Teorema 3.1.7).

Exemplo 1.1.4. A função $f(z) = \frac{1}{1-z}$ pertence a $\text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus H^2$. De fato, como $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, a sequência dos coeficientes da série de Taylor de f não é quadrado-somável.

O espaço de Hardy-Hilbert é um exemplo de um espaço de Hilbert com núcleos de reprodução, que definimos a seguir.

Definição 1.1.5. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e X um conjunto tal que $\mathcal{H}$ é um subespaço vetorial de

$$\mathcal{F}(X; \mathbb{C}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}\},$$

onde a soma e produto por escalar em $\mathcal{F}(X; \mathbb{C})$ são os usuais (coordenada a coordenada). Dizemos que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert com núcleos de reprodução se para todo $x \in X$, existe $k_x \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Nesse caso, dizemos que k_x é um núcleo de reprodução para x em $\mathcal{H}$.

Note que, pelo Teorema de representação de Riesz, isso é equivalente às funções de avaliação $f \in \mathcal{H} \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ serem contínuas para todo $x \in X$. Indicamos (12) como uma referência para o estudo desses espaços.

A Proposição 1.1.3 nos mostra, em particular, que H^2 é subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{D}; \mathbb{C})$. O resultado a seguir mostra que H^2 é um espaço de Hilbert com núcleos de reprodução e fornece uma expressão para as funções k_z .

Proposição 1.1.6. Para cada $z_0 \in \mathbb{D}$, a função

$$k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0}^n z^n = \frac{1}{1 - \overline{z_0}z}$$

é um núcleo de reprodução para z_0 em H^2 . Além disso, $\|k_{z_0}\|_{H^2} = (1 - |z_0|^2)^{-1/2}$.

Demonstração. Note que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{z_0}^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} = \frac{1}{1 - |z_0|^2} < \infty,$$

para todo $z_0 \in \mathbb{D}$. Logo, $k_{z_0} \in H^2$ e

$$\|k_{z_0}\|_{H^2} = \sqrt{\frac{1}{1 - |z_0|^2}} = (1 - |z_0|^2)^{-1/2}.$$

Além disso, se $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$,

$$\langle f, k_{z_0} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{z_0^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = f(z_0).$$

□

Um importante corolário desse resultado relaciona as topologias de H^2 e $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Aqui, consideramos em $\text{Hol}(\mathbb{D})$ a topologia compacto-aberto, que é a sua topologia usual. Essa topologia é metrizável, logo pode ser caracterizada pelo fato de uma sequência convergir nessa topologia se, e somente se, converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Corolário 1.1.7. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^2$ tal que $f_n \rightarrow f$ em H^2 . Então, $f_n \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Ou seja, a topologia de H^2 é mais fina que a topologia compacto-aberto (i.e., a topologia de H^2 como subespaço de $\text{Hol}(\mathbb{D})$).*

Demonstração. Para cada $z \in \mathbb{D}$, temos, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$|f_n(z) - f(z)| = |\langle f_n - f, k_z \rangle| \leq \|f_n - f\| \|k_z\|. \quad (1.1)$$

Seja $K \subset \mathbb{D}$ um compacto. Como $z \mapsto \|k_z\|$ é contínua em $\mathbb{D}$ pela Proposição 1.1.6, segue que existe

$$M := \max_{z \in K} \|k_z\| < \infty.$$

Logo,

$$|f_n(z) - f(z)| \leq M \|f_n - f\|,$$

para todo $z \in K$. Disso segue a primeira afirmação. A afirmação sobre as topologias segue do fato de a topologia de H^2 ser métrica e a convergência uniforme em compactos coincidir com a convergência na topologia compacto-aberto. □

O teorema a seguir fornece uma outra caracterização das funções de H^2 .

Teorema 1.1.8. *Seja $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Então $f \in H^2$ se e só se*

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty$$

e nesse caso,

$$\|f\|_{H^2} = \left(\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Além disso, a função $M_f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$M_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

é crescente. Em particular, se $f \in H^2$, $\|f\|_{H^2}^2 = \lim_{r \rightarrow 1^-} M_f(r)$.

Demonstração. O Teorema segue da fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad \forall 0 < r < 1, \quad (1.3)$$

onde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.4)$$

é a expansão de $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ em série de potências. Vamos, então, primeiro verificar (1.3). Sejam $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ com a série de potências dada por (1.4) e $0 < r < 1$. Temos que

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})|^2 &= f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Essa série converge absoluta e uniformemente em relação a θ . De fato,

$$|a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}| = |a_n| r^n |a_m| r^m,$$

e a série (1.4) converge absolutamente se $r = l|z| < 1$ (pois $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$). A convergência uniforme segue do teste M de Weierstrass. Assim,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

e obtemos (1.3), pois

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m, \\ 0, & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

Com isso, se $f \in H^2$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq \|f\|_{H^2}^2$ para todo $0 < r < 1$,

logo

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|f\|_{H^2}^2 < \infty.$$

Reciprocamente, suponha que $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus H^2$. Então, dado $M > 0$, existem $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \geq 2M$ e $0 < r < 1$ tal que $r^{2N} \geq 1/2$. Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \geq M \implies \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \infty.$$

Dessa forma, concluímos que

$$H^2 = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty \right\},$$

como queríamos.

Podemos refinar o argumento anterior para mostrar (1.2). Note que a igualdade é trivial no caso $f = 0$. Tomemos, então, $f \in H^2 \setminus \{0\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=0}^N |a_n|^2 > \|f\|_{H^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2}$ e $0 < r < 1$ tal que $r^{2N} > 1 - \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{H^2}^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta &\geq \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n} \geq r^{2N} \sum_{n=0}^N |a_n|^2 > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{H^2}^2}\right) \left(\|f\|_{H^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &> \|f\|_{H^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f\|_{H^2}^2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, se $f \in H^2$, obtemos

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \|f\|_{H^2}^2,$$

como queríamos. Por fim, (1.3) implica diretamente que M_f é crescente. $\square$

Observação 1.1. A equação (1.3) pode também ser obtida pela aplicação da Identidade de Parseval à função $e^{i\theta} \mapsto f(re^{i\theta})$, que pertence a $L^2(\mathbb{T})$ (veja a Definição B.1.1).

Note que o Teorema 1.1.8 nos dá também uma nova maneira de definir o produto interno em H^2 . De fato, segue da identidade de polarização que, dados $f, g \in H^2$,

$$\begin{aligned} 4\langle f, g \rangle_{H^2} &= \|f + g\|_{H^2}^2 - \|f - g\|_{H^2}^2 + i\|f + ig\|_{H^2}^2 - i\|f - ig\|_{H^2}^2 \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f + g|^2(re^{i\theta}) - |f - g|^2(re^{i\theta}) + i|f + ig|^2(re^{i\theta}) - i|f - ig|^2(re^{i\theta})] d\theta \\ &= 4 \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} d\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} d\theta. \quad (1.5)$$

Alternativamente, podemos adaptar a demonstração do Teorema 1.1.8 para obter (1.5).

Como comentado anteriormente, com o Teorema 1.1.8 temos uma nova maneira de definir o espaço de Hardy. De fato, esse teorema é um caso particular do Teorema de convexidade de Hardy (cf. (13, Teorema 1.5)), que originalmente motivou a definição dos espaços de Hardy H^p para $0 < p \leq \infty$.

Definição 1.1.9 (Espaços de Hardy). Seja $0 < p < \infty$. O espaço de Hardy H^p é o conjunto

$$H^p = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\}.$$

Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in H^p$, definimos também a norma

$$\|f\|_{H^p} = \left(\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Além disso, no caso $p = \infty$ a norma é dada por

$$H^\infty = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\}$$

e, para $f \in H^\infty$,

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Note que $\|f\|_{H^p}$ pode ser reescrita como o supremo das normas em L^p (veja Definição B.1.1) de funções relacionadas a f . De fato, dados $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ e $0 \leq r < 1$, denotemos por $f_r : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}, \quad \text{onde} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1.6)$$

Como $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, então f_r é contínua em $\mathbb{T}$, logo limitada, portanto $f_r \in L^p(\mathbb{T})$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Com essa notação, temos, para $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p} &= \left(\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} = \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_{L^p}, \end{aligned}$$

onde a igualdade $(*)$ segue do fato de $x \mapsto x^{1/p}$ ser crescente e contínua em $x > 0$ sempre que $p > 0$.

Notação. Para toda $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, denotaremos por f_r a função definida em (1.6).

Não é imediato da definição que $\|\cdot\|_{H^p}$ são de fato normas. Verificamos isso a seguir.

Proposição 1.1.10. *Os espaços de Hardy H^p são espaços de Banach se $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Para o caso $p = \infty$, observe que H^∞ é um subespaço vetorial do espaço de Banach $\mathfrak{B}(\mathbb{D})$ das funções $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ limitadas com a norma

$$\|f\|_{\mathfrak{B}(\mathbb{D})} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Note que a norma de H^∞ é exatamente a norma herdada de $\mathfrak{B}(\mathbb{D})$ e H^∞ é um subespaço fechado para a topologia induzida por essa norma, pois limite uniforme de funções holomorfas é também uma função holomorfa (veja Teorema B.2.2). Isso mostra que H^∞ é um espaço de Banach.

Para o caso $1 \leq p < \infty$, vamos primeiro verificar que $\|\cdot\|_{H^p}$ é uma norma. A única propriedade na definição de norma cuja verificação não é imediata nesse caso é a

desigualdade triangular. Considere, então, $f, g \in H^p$. Pela desigualdade de Minkowski, para cada $0 < r < 1$ temos

$$\|(f + g)_r\|_{L^p} = \|f_r + g_r\|_{L^p} \leq \|f_r\|_{L^p} + \|g_r\|_{L^p} \leq \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_{L^p} + \sup_{0 < r < 1} \|g_r\|_{L^p}.$$

Como isso vale para todo $0 < r < 1$, segue que

$$\|f + g\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \|(f + g)_r\|_{L^p} \leq \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_{L^p} + \sup_{0 < r < 1} \|g_r\|_{L^p} = \|f\|_{H^p} + \|g\|_{H^p}.$$

O que mostra que $\|\cdot\|_{H^p}$ é uma norma.

Por fim, precisamos verificar que H^p é um espaço métrico completo para a distância induzida por essa norma. Para isso, fixe $1 \leq p < \infty$ e considere uma sequência de Cauchy $(f_n) \subset H^p$. Vamos primeiro mostrar que (f_n) é uniformemente de Cauchy sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, i.e., para cada $K \subset \mathbb{D}$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \leq N \implies \sup_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Isso mostrará que (f_n) converge localmente uniformemente para uma função $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$.

Considere, então, $K \subset \mathbb{D}$ compacto. Sejam

$$r = \max_{z \in K} |z| < 1$$

e R tal que $r < R < 1$. Para cada $z \in K$ e $n, m \in \mathbb{N}$, aplicamos a fórmula integral de Cauchy (veja Teorema B.2.3) para $f_n - f_m$ em z , integrando ao longo de $R\mathbb{T}$, o círculo de raio R centrado em 0, e obtemos

$$f_n(z) - f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{R\mathbb{T}} \frac{f_n(s) - f_m(s)}{z - s} ds = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} e^{i\theta} d\theta.$$

Note que $f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta}) = (f_n - f_m)_R(e^{i\theta})$. Além disso, como $|z| \leq r < R$, temos a cota inferior para o denominador $|Re^{i\theta} - z| \geq R - r$. Com isso, obtemos

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|(f_n - f_m)_R(e^{i\theta})|}{|Re^{i\theta} - z|} d\theta \leq \frac{R}{R - r} \|(f_n - f_m)_R\|_{L^1}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para $(f_n - f_m)_R \in L^p$ e a função constante $1 \in L^\infty \subset L^q$, onde $q^{-1} + p^{-1} = 1$, temos que $\|(f_n - f_m)_R\|_{L^1} \leq \|(f_n - f_m)_R\|_{L^p}$. Logo,

$$(R - r) |f_n(z) - f_m(z)| \leq R \|(f_n - f_m)_R\|_{L^1} \leq \|(f_n - f_m)_R\|_{L^p} \leq \|f_n - f_m\|_{H^p}.$$

Portanto (f_n) é uniformemente de Cauchy em K , pois (f_n) é Cauchy em H^p . Como $K \subset \mathbb{D}$ era um compacto qualquer, segue que (f_n) é localmente uniformemente de Cauchy.

Seja, então, $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ o limite localmente uniforme de (f_n) . Vamos mostrar que $f_n \rightarrow f$ na norma de H^p , o que também implica que $f \in H^p$. Com isso, teremos provado que H^p é um espaço de Banach.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_{H^p} < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $n, m \leq N$. Tal N existe pois (f_n) é uma sequência de Cauchy na norma de H^p . Além disso, para cada $0 < r < 1$, existe $m \geq N$ tal que

$$\|(f - f_m)_r\|_{L^\infty} = \sup_{|z|=r} |f(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pois (f_n) converge uniformemente para f no compacto $\{z \in \mathbb{D} : |z| = r\} \subset \mathbb{D}$. Assim, para todo $n \geq N$, temos

$$\|(f - f_n)_r\|_{L^p} \leq \|(f - f_m)_r\|_{L^p} + \|(f_m - f_n)_r\|_{L^p} \leq \|(f - f_m)_r\|_{L^\infty} + \|f_m - f_n\|_{H^p} < \varepsilon.$$

Como isso vale para todo $0 < r < 1$, obtemos

$$\|f - f_n\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \|(f - f_n)_r\|_{L^p} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

como queríamos. □

A demonstração acima é baseada nos itens (b) e (c) da Observação 17.8 de (14). Uma outra demonstração desse resultado pode ser encontrada na seção 3.2 de (13).

É possível também definir

$$\|f\|_{H^p} = \left(\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

para $f \in H^p$, onde $0 < p < 1$. Nesse caso, $\|\cdot\|_{H^p}$ não é uma norma, pois não satisfaz a desigualdade triangular. Contudo, é um exercício simples verificar que

$$d_{H^p}(f, g) = \|f - g\|_{H^p}^p = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad \forall f, g \in H^p$$

define uma distância em H^p para $0 < p < 1$. De fato, é possível mostrar que H^p , $0 < p < 1$, é um espaço métrico completo para essa distância (veja (13, seção 3.2)). Como, além disso, d_{H^p} é invariante por translação, i.e., $d_{H^p}(f + h, g + h) = d_{H^p}(f, g)$ para todos $f, g, h \in H^p$, dizemos que H^p é um F-espaço.

A teoria dos espaços de Hardy H^p é bastante rica e tem em (13, 15) excelentes exposições. Nesse trabalho, iremos nos restringir ao estudo de parte da teoria de H^2 e, para tanto, estudar também H^∞ . É claro da definição acima que $H^\infty \subset H^2$. Vale ressaltar que muitos dos resultados a serem mostrados para H^2 possuem uma versão geral para os demais H^p , porém com demonstrações diferentes, em geral.

Comparando a definição anterior dos espaços H^p com a definição 1.1.2, é natural questionar se a mesma caracterização vale para os coeficientes de Taylor de funções em H^p . O Teorema 6.1 de (13) responde essa pergunta, mostrando que, em geral, é falso que o conjunto das séries de potências cujos coeficientes formam uma sequência em ℓ^p , com

algum $0 < p \leq \infty$ é igual ao espaço de Hardy H^p . Mais precisamente, esse teorema mostra que se $f \in H^p$ com $1 \leq p \leq 2$, então seus coeficientes de Taylor formam uma sequência em ℓ^q , onde $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Reciprocamente, se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ com $1 \leq p \leq 2$, então a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pertence a H^q , onde $q^{-1} + p^{-1} = 1$.

Vamos agora apresentar uma terceira maneira de enxergar o espaço H^2 , desta vez como subespaço de $L^2(\mathbb{T})$.

Note que, em H^2 , $\{z \mapsto z^n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Hilbert e, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, existe uma forma simples de mapear isometricamente funções de H^2 a funções de L^2 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2 \mapsto f^*(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \in L^2. \quad (1.7)$$

Mais precisamente, o mapa acima é uma transformação unitária entre $H^2(\mathbb{D})$ e o subespaço fechado de L^2 formado pelas funções f tais que $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n < 0$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.11. O espaço de Hardy no círculo é o conjunto

$$H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = 0, \quad \forall n < 0\}$$

com a estrutura de espaço vetorial e o produto interno herdados de $L^2(\mathbb{T})$.

Com essa notação, temos que o mapa dado por (1.7) é um isomorfismo isométrico de $H^2(\mathbb{D})$ para $H^2(\mathbb{T})$. Esse isomorfismo é bastante importante no estudo dos espaços de Hardy e satisfaz algumas propriedades bastante interessantes. Antes de enunciá-las, é necessário definir o núcleo de Poisson.

O núcleo de Poisson é dado, para cada $0 \leq r < 1$ e $\theta \in \mathbb{R}$, por

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. \quad (1.8)$$

Como usamos muitas vezes essa função na forma $P_r(\theta - t)$ para definir uma função de $z = re^{i\theta}$, iremos nesse caso denotá-la por $P(z, e^{it})$, i.e., $P(re^{i\theta}, e^{it}) = P_r(\theta - t)$. Note que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} = \operatorname{Re} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (re^{i\theta})^n e^{-int} \right) = \operatorname{Re} \left(1 + 2 \frac{ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right).$$

Por outro lado,

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 + 2i \operatorname{Im}(ze^{-it}) - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} \Rightarrow P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}.$$

$$\text{Logo, } P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Teorema 1.1.12. *Seja $f \in H^2(\mathbb{D})$ e denote por f_r e f^* as funções definidas em (1.6) e (1.7), respectivamente. Então,*

1. $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|f^* - f_r\|_{L^2} = 0$;
2. $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$ para m-q.t.p. θ .
3. **(Fórmula Integral de Poisson)**

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta}) P_r(\theta - t) d\theta,$$

onde $P_r(\theta)$ é o núcleo de Poisson.

Observação 1.2. Segue do item (1) do Teorema anterior que

$$\|f^*\|_{L^2} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|f_r\|_{L^2} = \|f\|_{H^2}.$$

Isso também vale para os demais espaços H^p , $0 < p \leq \infty$. O caso $p = \infty$ será tratado no Corolário 1.1.14. Para os casos $0 < p < \infty$, veja, por exemplo, (13, Teorema 2.6) ou (14, Teorema 17.11).

O item 1 do teorema anterior nos diz que f^* é o limite em L^2 das restrições f_r de f sobre os círculos $r\mathbb{T}$. O item 2 diz que f^* é q.t.p. o limite radial de f . Omitiremos as demonstrações desses resultados, que podem ser encontradas em (11, Teorema 1.1.10, Corolário 1.1.28 e Teorema 1.1.21). Vale ressaltar que a demonstração do item 2 do teorema anterior é bastante extensa, sendo um corolário do Teorema de Fatou (11, Teorema 1.1.26). Ademais, esse item é apenas um caso particular de um resultado maior. De fato, f^* é q.t.p. o limite não-tangencial de f (veja (14, Parágrafo 11.21)). Uma versão do Teorema 1.1.12 para os demais H^p , $0 < p < \infty$ é apresentada no Teorema 17.11 de (14).

Uma aplicação imediata do item 3 do Teorema 1.1.12 nos permite calcular a integral do núcleo de Poisson.

Corolário 1.1.13. *Para todo $0 \leq r < 1$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta = 1.$$

Demonstração. Basta aplicar o item 3 do Teorema 1.1.12 para a função constante $1 \in H^2$. □

Devido às propriedades do isomorfismo definido em (1.7), iremos usá-lo para identificar $H^2(\mathbb{D})$ e $H^2(\mathbb{T})$, denotando ambos por H^2 , muitas vezes escrevendo $f^*(e^{i\theta})$ como $f(e^{i\theta})$ sem maior ressalva. Pelo mesmo motivo, iremos por vezes chamar os coeficientes de Taylor de uma função $f \in H^2$ de coeficientes de Fourier e denotá-los por $\hat{f}(n)$.

O Teorema 1.1.12 nos fornece também uma nova maneira de caracterizar as funções de $H^\infty(\mathbb{D})$.

Corolário 1.1.14. *Uma função $f \in H^2(\mathbb{D})$ está em $H^\infty(\mathbb{D})$ se e somente se seu limite radial f^* pertence a $L^\infty(\mathbb{T})$. Nesse caso, $\|f\|_{H^\infty} = \|f^*\|_{L^\infty}$.*

Demonstração. Seja $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Segue do item 2 do Teorema 1.1.12 que

$$|f^*(e^{i\theta})| = \lim_{r \rightarrow 1^-} |f(re^{i\theta})| \leq \|f\|_{H^\infty}$$

para m-q.t.p. $\theta \in [0, 2\pi]$. Logo, $f^* \in L^\infty$ e $\|f^*\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty}$. Reciprocamente, se $f \in H^2(\mathbb{D})$ e $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$, o item 3 do Teorema 1.1.12 nos dá que

$$|f(re^{it})| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta}) P_r(\theta - t) d\theta \right|.$$

Como $P_r(\theta) > 0$ para todo $0 \leq r < 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtemos, pelo Corolário 1.1.13,

$$\begin{aligned} |f(re^{it})| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})| P_r(\theta - t) d\theta \leq \frac{\|f^*\|_{L^\infty}}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta \\ &= \|f^*\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Logo, $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ e $\|f\|_{H^\infty} \leq \|f^*\|_{L^\infty}$. □

Note que a hipótese $f \in H^2(\mathbb{D})$ no corolário anterior é bastante natural, uma vez que $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.15. O espaço $H^\infty(\mathbb{T})$ é o conjunto

$$H^\infty(\mathbb{T}) = H^2(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}).$$

1.1.1 Teorema de Beurling e a fatoração canônica

Após a apresentação do espaço de Hardy no disco nas três formas com as quais trabalharemos, vamos apresentar nessa subseção uma importante aplicação do espaço de Hardy, o Teorema de Beurling, e, a partir disso, construir a fatoração canônica de funções de H^2 .

O Teorema de Beurling classifica os subespaços invariantes do *shift unilateral*. Portanto, vamos primeiro definir os conceitos necessários para enunciar o teorema.

Definição 1.1.16. Sejam V um espaço vetorial topológico e $T : V \rightarrow V$ um operador linear contínuo.

- (i) Chamamos de subespaço invariante por T (ou T -invariante) os subespaços fechados $U \subset V$ tais que

$$TU \subset U.$$

- (ii) Dado um vetor $v \in V$, chamamos de o subespaço T -invariante gerado por v o menor subespaço invariante que contém v . Este subespaço coincide com

$$\overline{\text{span}}\{T^n v : n \in \mathbb{N}\}.$$

- (iii) Dizemos que um vetor v é cíclico para T (ou T -cíclico) se o subespaço T -invariante gerado por v é o espaço todo V . Ou seja,

$$\overline{\text{span}}\{T^n v : n \in \mathbb{N}\} = V.$$

Um simples e importante operador no espaço de sequências é o chamado *shift unilateral*, que definimos a seguir para o espaço ℓ^2 .

Definição 1.1.17 (Shift Unilateral). Chamamos de shift unilateral em ℓ^2 o operador $U : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definido por

$$U(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots),$$

para toda sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

Um cálculo direto mostra que U é linear, isométrico e sua adjunta U^* é dada por

$$U^*(a_0, a_1, \dots) = (a_1, a_2, \dots).$$

Uma questão natural nesse contexto é como caracterizar os subespaços de ℓ^2 invariantes pelo shift. Isso é extremamente difícil puramente em termos de sequências. Porém, ao estudar o operador unitariamente equivalente ao shift no espaço de Hardy H^2 , isso se torna factível.

Proposição 1.1.18. O operador $S : H^2 \rightarrow H^2$ dado por

$$Sf(z) = zf(z), \quad \forall f \in H^2$$

é unitariamente equivalente a U , o shift unilateral em ℓ^2 .

Demonstração. Seja $T : \ell^2 \rightarrow H^2$ o mapa unitário dado por

$$T((a_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dada uma sequência $(a_n) \in \ell^2$, temos que

$$TU((a_n)) = T(0, a_0, a_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = ST((a_n)).$$

□

A proposição anterior motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.19 (Shift em H^2). O shift em H^2 é o operador $S : H^2 \rightarrow H^2$ dado por

$$Sf(z) = zf(z), \quad \forall f \in H^2.$$

Como U e S são unitariamente equivalentes, quando não houver confusão iremos denotar ambos por S .

A caracterização dada pelo Teorema de Beurling depende de uma classe de funções em H^2 .

Definição 1.1.20 (Função Interior). Uma função $f \in H^\infty$ é dita interior se $|f^*(e^{i\theta})| = 1$ q.t.p. em $\mathbb{T}$.

Com isso, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1.1.21 (Teorema de Beurling). *Todo subespaço de H^2 invariante pelo shift e diferente de $\{0\}$ é da forma φH^2 , onde φ é uma função interior. Além disso, $\varphi H^2 = \psi H^2$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $\varphi = \lambda\psi$.*

Uma demonstração do Teorema 1.1.21 está feita em (11, Corolário 2.2.12 e Teorema 2.2.8). Esse importante teorema nos leva naturalmente à fatoração canônica das funções de H^2 .

Corolário 1.1.22. *Se $f \in H^2 \setminus \{0\}$, então existem uma função interior φ e uma função S -cíclica F tais que $f = \varphi F$. Essa fatoração é única a menos de um fator constante unimodular.*

Demonstração. Dado $f \in H^2 \setminus \{0\}$, temos que $\overline{\text{span}}\{S^n f : n \in \mathbb{N}\}$ é um subespaço shift-invariante e diferente de $\{0\}$, portanto, existe uma função interior φ tal que $\overline{\text{span}}\{S^n f : n \in \mathbb{N}\} = \varphi H^2$. Em particular, existe $F \in H^2$ tal que $f = \varphi F$.

Vamos mostrar que F é S -cíclico. Claramente F não é a função identicamente nula. Portanto, $\overline{\text{span}}\{S^n F : n \in \mathbb{N}\} = \psi H^2$ para alguma função interior ψ . Note que

$$S^n f(z) = S^n(\varphi F)(z) = z^n \varphi(z) F(z) = \varphi(z)(S^n F)(z).$$

Observe também que o mapa $f \mapsto \varphi f$ é contínuo em H^2 , pois $\varphi \in H^\infty$. De fato, pelo Teorema 1.1.8 temos que

$$\|\varphi f\|_{H^2}^2 = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|\varphi\|_{H^\infty}^2 \|f\|_{H^2}^2.$$

Assim, $\varphi H^2 = \overline{\text{span}}\{S^n f : n \in \mathbb{N}\} = \varphi \overline{\text{span}}\{S^n F : n \in \mathbb{N}\} = \varphi \psi H^2$. Segue do Teorema 1.1.21 que existe uma constante unimodular $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $\psi\varphi = \lambda\varphi$, portanto

$\psi(z) = \lambda$ sempre que $\varphi(z) \neq 0$). Como esse conjunto é denso em $\mathbb{D}$, pois $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$, segue que $\psi = \lambda$ é uma constante unimodular e assim $\overline{\text{span}}\{S^n F : n \in \mathbb{N}\} = H^2$, i.e., F é S -cíclico.

Por fim, note que se $f = \tilde{\varphi}\tilde{F}$ é outra fatoração de f , então $\overline{\text{span}}\{S^n f : n \in \mathbb{N}\} = \tilde{\varphi}H^2$ e $\tilde{\varphi} = \lambda\varphi$ para algum $\lambda \in \mathbb{T}$ pelo Teorema 1.1.21, consequentemente $\tilde{F} = \bar{\lambda}F$. $\square$

O resultado anterior motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.23 (Função Exterior de H^2). Uma função $F \in H^2$ é dita exterior se $\overline{\text{span}}\{S^n F : n \in \mathbb{N}\} = H^2$, i.e., se F é S -cíclica.

É fácil ver que uma função exterior não se anula no disco unitário, pois $F(z_0) = 0 \implies S^n F(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim toda função no subespaço invariante gerado por F se anulava em z_0 e, por exemplo, $1 \in H^2$ não se anula em nenhum ponto do disco. Por conta disso, os zeros de uma função $f \in H^2$ coincidem com os zeros da função interior na sua fatoração. Essa observação motiva a busca de uma maneira de fatorar a função interior em um fator gerado exclusivamente pelos zeros e um fator interior livre de zeros.

Para tanto, é necessário primeiro estudar o conjunto de zeros de uma função de H^2 , que definimos a seguir.

Definição 1.1.24. Sejam X um conjunto e $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}(X; \mathbb{C})$ uma classe de funções de X a $\mathbb{C}$. Dizemos que $A \subset X$ é um conjunto de zeros para a classe $\mathcal{I}$ se existe $f \in \mathcal{I}$ tal que

$$A = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Exemplo 1.1.25. Seja $X = \mathbb{C}$ e $\mathcal{I} = \text{Hol}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ a classe das funções inteiras. Então $A \subset \mathbb{C}$ é um conjunto de zeros de $\text{Hol}(\mathbb{C})$ se, e somente se, $A = \mathbb{C}$ ou A não possui ponto de acumulação. De fato, é um resultado clássico de análise complexa (veja, por exemplo, (14, Teorema 10.18)) que se $A \subset \mathbb{C}$ é um conjunto de zeros de $\text{Hol}(\mathbb{C})$, então $A = \mathbb{C}$ ou A não possui ponto de acumulação. Por outro lado, o Teorema de fatoração de Weierstrass nos mostra que se $A \subset \mathbb{C}$ não possui ponto de acumulação, então A é um conjunto de zeros de $\text{Hol}(\mathbb{C})$ (veja, por exemplo, (14, Teorema 15.9)).

Sabemos que, como $H^2 \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$, o conjunto de zeros de $f \in H^2 \setminus \{0\}$ não possui ponto de acumulação em $\mathbb{D}$ (veja Teorema B.2.4). Em particular, esse conjunto é enumerável. O resultado a seguir caracteriza os conjuntos de zeros de funções de H^2 .

Teorema 1.1.26. Sejam $f \in H^2 \setminus \{0\}$ e $z_0, z_1, \dots \in \mathbb{D}$ a sequência (finita ou infinita) dos zeros de f repetidos de acordo com a multiplicidade. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |z_n| < \infty. \quad (1.9)$$

Reciprocamente, se $z_0, z_1, \dots \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ é uma sequência (finita ou infinita) que satisfaz a condição (1.9) e $k \in \mathbb{N}$, então

$$B(z) = z^k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n}z} \frac{|z_n|}{z_n} \quad (1.10)$$

define uma função interior $B \in H^\infty$ cujos zeros são exatamente $z_0, z_1, \dots$ e a origem com multiplicidade k .

Para a demonstração desse Teorema, veja (11, Corolário 2.4.10 e Teorema 2.4.13) ou (14, Teorema 15.21 e Teorema 15.23). A condição (1.9) que caracteriza os zeros de uma função de H^2 é chamada *condição de Blaschke* e a função definida em (1.10) é chamada de *produto de Blaschke*. Note que, apesar de (1.9) classificar os zeros de todas as funções de H^2 , os produtos de Blaschke são sempre funções de H^∞ , ou seja, apesar de $H^2 \supsetneq H^\infty$, a classificação do conjunto de zeros em ambos os espaços é a mesma. De fato, veremos na seção 1.4 que o Teorema 1.1.26 vale em uma classe ainda maior de funções.

O Teorema anterior nos permite refinar a fatoração do Teorema 1.1.21, escrevendo $f = BVF$, onde B é o produto de Blaschke gerado pelos zeros de f , F é a parte exterior de f e V é uma função interior que não se anula em $\mathbb{D}$. Essa observação leva à seguinte definição.

Definição 1.1.27 (Função interior singular). Dizemos que uma função interior não-constante $V \in H^\infty$ é *singular* se V não se anula em $\mathbb{D}$.

O seguinte resultado fornece uma representação dessas funções.

Teorema 1.1.28. *Seja $f \in H^\infty$ uma função interior singular. Então existem $K \in \mathbb{T}$ e uma medida de Borel μ sobre $\mathbb{T}$ positiva, finita e singular com respeito à medida de Lebesgue tais que*

$$V(z) = K \exp \left(- \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right).$$

Demonstrações desse teorema se encontram em (11, Teorema 2.6.5) e (14, Teorema 17.15). Note que, apesar de a fatoração apresentada no Corolário 1.1.22 ser bastante simples, não temos ainda uma fórmula que nos evidencie de que maneira as partes interior e exterior de uma função $f \in H^2$ qualquer dependem da função. Com isso em mente, o Teorema a seguir possui duas importantes consequências: uma expressão para a parte exterior de uma função $f \in H^2$ e uma caracterização alternativa das funções exteriores.

Teorema 1.1.29. *Se $f \in H^2 \setminus \{0\}$, então $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ e*

$$F(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta \right) \in H^2$$

é a parte exterior de f , i.e., existe uma função interior φ tal que $f = \varphi F$. Em particular, $|F^*(e^{i\theta})| = |f^*(e^{i\theta})|$ q.t.p.

Reciprocamente, se $G \in H^2$ é uma função exterior, então

$$G(z) = \lambda \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |G^*(e^{i\theta})| d\theta \right),$$

onde $\lambda \in \mathbb{T}$.

Veja (11, Teorema 2.7.7 e Corolário 2.7.8) e (14, Teorema 17.17) para demonstrações desse teorema.

Esse resultado nos permite obter os seguintes fatos sobre funções exteriores em H^2 , que serão usadas posteriormente (veja Exemplo 1.4.10).

Proposição 1.1.30. Para $f, g \in H^2$, temos que:

1. se f e g são funções exteriores e $fg \in H^2$, então fg é uma função exterior;
2. se f é uma função exterior e $f/g \in H^2$, então g e f/g são funções exteriores.

Demonstração. Para o item 1, note que se f e g são funções exteriores em H^2 , segue da segunda parte do Teorema 1.1.29 que existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{T}$ tais que

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \lambda_1 \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta \right) \lambda_2 \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |g^*(e^{i\theta})| d\theta \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (\log |f^*(e^{i\theta})| + \log |g^*(e^{i\theta})|) d\theta \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |(fg)^*(e^{i\theta})| d\theta \right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Pela primeira parte do Teorema 1.1.29, a função

$$H(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |(fg)^*(e^{i\theta})| d\theta \right)$$

é a parte exterior de fg . Logo, $fg = \lambda H$ é uma função exterior, pois $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{T}$.

Para o item 2, seja $h = f/g \in H^2$. Sejam, respectivamente, φ e ψ as partes interiores de g e h e G, H as suas partes exteriores. Logo,

$$f = gh = (\varphi G)(\psi H) = (\varphi \psi)(GH).$$

Note que $\varphi \psi$ é uma função interior, logo (veja Observação 1.2)

$$\begin{aligned} \|(GH)^*\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(GH)^*(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(\varphi \psi)^*(e^{i\theta})(GH)^*(e^{i\theta})|^2 d\theta = \|f^*\|_{L^2}^2 = \|f\|_{H^2}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Além disso, a equação (1.11) aplicada às funções G e H nos mostra que, para todo $0 < r < 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} |G(re^{i\theta})H(re^{i\theta})|^2 &= \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right) 2 \log |(GH)^*(e^{it})| dt \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) \log |(GH)^*(e^{it})|^2 dt \right). \end{aligned}$$

Como a exponencial é uma função convexa e as medidas μ_θ dadas por $d\mu_\theta = \frac{1}{2\pi} P_r(t - \theta) dt$ são não-negativas e satisfazem $\mu_\theta([0, 2\pi]) = 1$ (pelo Corolário 1.1.13), segue da desigualdade de Jensen (veja Teorema B.1.2) que

$$|G(re^{i\theta})H(re^{i\theta})|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) |(GH)^*(e^{it})|^2 dt$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(re^{i\theta})H(re^{i\theta})|^2 d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) |(GH)^*(e^{it})|^2 dt \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - \theta) d\theta \right) |(GH)^*(e^{it})|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(GH)^*(e^{it})|^2 dt = \|f\|_{H^2}^2 < \infty, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Tonelli para trocar a ordem das integrais. Usando o Teorema 1.1.8, segue da desigualdade acima que $GH \in H^2$. Assim, pelo item 1, GH é uma função exterior. Portanto, $(\varphi\psi)(GH)$ é uma fatoração de f como produto de uma função interior e uma função exterior. Como f é uma função exterior, segue do Corolário 1.1.22 que $\varphi\psi$ é uma constante unimodular. Como φ e ψ são funções interiores e $\varphi\psi$ é uma constante unimodular, segue do Corolário 1.1.14 que $|\varphi(z)| \leq 1$, $|\psi(z)| \leq 1$ e $|\varphi(z)\psi(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Em particular,

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|\psi(z)|} \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Logo, $|\varphi(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ e segue do Teorema do Módulo Máximo (veja Teorema B.2.5) que φ é uma constante unimodular e, consequentemente, ψ também é uma constante unimodular. Segue que g e h são exteriores, como queríamos. $\square$

De forma análoga ao que foi feito com o Teorema 1.1.8, o Teorema 1.1.29 nos dá a forma como as funções exteriores são definidas em geral. De fato, o Teorema 2.2 de (13) nos mostra que, para todo $p > 0$, se $f \in H^p \setminus \{0\}$ então $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ e portanto podemos definir a parte exterior de uma função não nula em H^p .

Definição 1.1.31. Seja $f \in H^p \setminus \{0\}$. Dizemos que

$$F(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta \right)$$

é a parte exterior de f . Se $f = \lambda F$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{T}$, dizemos que f é uma função exterior de H^p .

Segue novamente do (13, Teorema 2.2) e da desigualdade de Jensen (veja Teorema B.1.2) que a função F da definição pertence a H^p .

Com o Teorema 1.1.29, temos uma descrição completa da fatoração de funções de $f \in H^2$, que resumiremos a seguir.

Corolário 1.1.32 (Fatoração canônica). *Sejam $f \in H^2 \setminus \{0\}$ e B o produto de Blaschke gerado pelos zeros de f . Então existem $\lambda \in \mathbb{T}$ e uma medida μ positiva, finita e singular (com respeito à medida de Lebesgue) tais que*

$$f(z) = \lambda B(z) \exp \left(- \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta \right).$$

De forma análoga ao que ocorre com a condição de Blaschke, veremos na seção 1.4 que essa fatoração vale em uma classe maior de funções, que em particular contém H^p para todo $0 < p \leq \infty$.

1.2 Um Espaço de Bergman ponderado

Nesta seção, apresentaremos outra família de espaços de funções holomorfas no disco, os espaços de Bergman. De forma análoga aos espaços de Hardy, os espaços de Bergman são definidos para todo $0 < p < \infty$ e, quando $1 \leq p < \infty$, são espaços de Banach de funções holomorfas no disco cuja norma é dada por meio de uma integral.

Definição 1.2.1 (Espaços de Bergman ponderados). Sejam $0 < p < \infty$ e $-1 < \alpha < \infty$. O espaço de Bergman ponderado $\mathcal{A}_\alpha^p$ no disco é o conjunto

$$\mathcal{A}_\alpha^p = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) < \infty \right\},$$

onde $dA = \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$ é a medida de área do disco normalizada. Se $1 \leq p < \infty$, a norma em $\mathcal{A}_\alpha^p$ é dada por

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha^p} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dA(z) \right)^{1/p}.$$

Se $p = 2$, a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_\alpha^2}$ é induzida pelo produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{A}_\alpha^2} = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} (1 - |z|^2)^\alpha dA(z).$$

Com as normas definidas acima, $\mathcal{A}_\alpha^p$ são espaços de Banach para $1 \leq p < \infty$. O livro (16) é uma excelente referência para o estudo desses espaços. A definição que demos

aqui difere por uma constante multiplicativa da definição usada em (16), porém isso não afeta os resultados que enunciaremos.

Nesse seção, iremos estudar apenas o espaço $\mathcal{A}_1^2$, que denotaremos por $\mathcal{A}$. Semelhantemente ao H^2 , esse espaço possui uma equivalência unitária natural a um espaço de sequências.

Proposição 1.2.2. *Sejam $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sua representação em série de potências. Então $f \in \mathcal{A}$ se e somente se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(n+1)(n+2)} < \infty$$

e nesse caso,

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(n+1)(n+2)} \right)^{1/2}.$$

Demonstração. Seja $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ com

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

De forma análoga ao Teorema 1.1.8, vale a igualdade (1.3) e temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 (1 - r^2) r d\theta dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 r(1 - r^2) \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) dr \stackrel{(1.3)}{=} 2 \int_0^1 r(1 - r^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right) dr. \end{aligned}$$

Como $|a_n|^2 r^{2n+1} (1 - r^2) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do teorema da convergência monótona (veja Teorema B.1.3) que a integral acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 r(1 - r^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right) dr &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \left(\int_0^1 r^{2n+1} (1 - r^2) dr \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

O resultado segue da igualdade

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{(n+1)(n+2)}.$$

□

A proposição anterior nos indica que $\mathcal{A}$ é unitariamente equivalente a um espaço ℓ^2 ponderado, que definiremos agora.

Definição 1.2.3. Seja $w = (w_n)$ uma sequência de números reais estritamente positivos. O espaço ℓ_w^2 é conjunto das sequências de números complexos (a_n) tais que

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n |a_n|^2 < \infty.$$

Munimos esse espaço com o produto interno

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle_{\ell_w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n \overline{b_n}.$$

Os espaços ℓ_w^2 com o produto interno definido acima são espaços de Hilbert. Iremos denotar por ω a sequência

$$\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Assim, segue da Proposição 1.2.2 que o mapa $\Psi : \ell_{\omega}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ dado por

$$\Psi((a_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.12)$$

é um mapa unitário (i.e., um isomorfismo isométrico). Para verificar que Ψ está bem-definido, observamos que $\Psi(\ell_{\omega}^2) \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$. De fato, essa inclusão segue de uma simples adaptação da demonstração da Proposição 1.1.3, observando que $(a_n) \in \ell_{\omega}^2$ implica que $a_n = O(n)$, logo $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (Cn)^{1/n} = 1$. Observe que o mapa Ψ mostra, em particular, que $\mathcal{A}$ é de fato um espaço de Hilbert e tem em $\{\sqrt{(n+1)(n+2)}z^n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal.

O resultado a seguir mostra que $\mathcal{A}$, semelhantemente ao espaço de Hardy H^2 , é um espaço com núcleo de reprodução (veja a Definição 1.1.5).

Proposição 1.2.4. Para todo $z_0 \in \mathbb{D}$, a função

$$K_{z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \overline{z_0}^n z^n = \frac{2}{(1 - \overline{z_0}z)^3}$$

é um núcleo de reprodução para z_0 em $\mathcal{A}$ com $\|K_{z_0}\|_{\mathcal{A}}^2 = 2(1 - |z_0|^2)^{-3}$. Em particular, a topologia de $\mathcal{A}$ é mais fina que a topologia compacto-aberto.

Demonstração. A demonstração da primeira parte da proposição é análoga à demonstração da Proposição 1.1.6, usando a Proposição 1.2.2 e a fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n = \frac{2}{(1-z)^3}, \quad \forall |z| < 1.$$

A segunda parte é análoga ao Corolário 1.1.7. □

Por fim, vamos apresentar um isomorfismo isométrico de H^2 para $\mathcal{A}$. Esse resultado é enunciado em (17, Lema 7.2.3) como um lema para uma caracterização dos elementos de um espaço de Dirichlet local (veja o Teorema 1.3.6), contudo ele é interessante por si só e cumpre um papel fundamental no artigo estudado.

Teorema 1.2.5. *Defina $T : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ por*

$$Tf(z) = \frac{((z-1)f(z))'}{z-1}. \quad (1.13)$$

Então, a restrição de T a H^2 gera um isomorfismo isométrico de H^2 a $\mathcal{A}$.

Para a demonstração desse teorema, precisamos de dois lemas.

Lema 1.2.6. *A diferenciação $D : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ é contínua na topologia compacto-aberto.*

Demonstração. É claro que D é linear. Em particular, basta verificar que D é contínua em 0. Como a topologia compacto-aberto em $\text{Hol}(\mathbb{D})$ é metrizável, é suficiente mostrar que se $f_n \rightarrow 0$ na convergência localmente uniforme, então $Df_n = f'_n \rightarrow 0$ também converge nesse sentido.

Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ com $f_n \rightarrow 0$ na convergência localmente uniforme, $K \subset \mathbb{D}$ compacto e

$$a = \text{dist}(K, \mathbb{D}^c) = \inf_{z \in K, w \in \mathbb{D}^c} |z - w| > 0.$$

Seja $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, K) < a/2\}$. Então $K \subset U \subset \bar{U} \subset \mathbb{D}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z \in \bar{U}} |f_n(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Como, para todo $z \in K$, $\bar{B}(z, a/2) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < a/2\} \subset \bar{U} \subset \mathbb{D}$, obtemos pela fórmula integral de Cauchy (veja Teorema B.2.3)

$$\begin{aligned} f'_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z, a/2)} \frac{f_n(s)}{(z-s)^2} ds \\ \stackrel{(n \geq N)}{\implies} |f'_n(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial B(z, a/2)} \frac{f_n(s)}{(z-s)^2} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon \frac{4}{a^2} 2\pi \frac{a}{2} = \frac{2\varepsilon}{a} \\ \implies \sup_{z \in K} |f'_n(z)| &\leq \frac{2\varepsilon}{a} \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Assim, $f'_n \rightarrow 0$ na convergência localmente uniforme, como queríamos. $\square$

O principal objetivo do lema anterior é mostrar que T é contínua na topologia compacto-aberto. Para concluir isso, note que $T = M_{\frac{1}{z-1}} \circ D \circ M_{z-1}$, onde $M_g : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$, com $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, é dada por

$$M_g f(z) = g(z)f(z).$$

Como $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ é contínua, logo limitada em cada compacto $K \subset \mathbb{D}$, é imediato que M_g é contínua na topologia de $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Com isso, T é um mapa linear contínuo em $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

O próximo lema exhibe uma base ortogonal de H^2 .

Lema 1.2.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, defina*

$$p_n(z) = nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Então $\{p_n : n \in \mathbb{N}^\}$ é uma base ortogonal de H^2 e $\|p_n\|_{H^2}^2 = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstração. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} (z^n - z^k).$$

Logo, se $1 \leq m < n$, então $\langle p_n, z^k \rangle = -1$ para todo $0 \leq k \leq m$ e temos

$$\langle p_n, p_m \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} \langle p_n, z^k \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} (-1) = -m.$$

Portanto, $\{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é um conjunto ortogonal. Como H^2 é um espaço de Hilbert, para mostrar que esse conjunto é também uma base, basta verificar que $\{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}^\perp = \{0\}$. Note que, se $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} p_n(z) - p_{n-1}(z) &= nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k - \left((n-1)z^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} z^k \right) = nz^n - z^{n-1} - (n-1)z^{n-1} \\ &= n(z^n - z^{n-1}). \end{aligned}$$

Se denotarmos $p_0 = 0$, então $p_n(z) - p_{n-1}(z) = n(z^n - z^{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, se $f \in \{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}^\perp$,

$$\langle f, z^n \rangle - \langle f, z^{n-1} \rangle = \frac{1}{n} (\langle f, p_n \rangle - \langle f, p_{n-1} \rangle) = 0.$$

Portanto, os coeficientes de Taylor de f , $\langle f, z^n \rangle$, são todos iguais. Como $f \in H^2$, isso só pode ocorrer se $f = 0$, como queríamos.

Por fim, como $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de H^2 , segue do Teorema de Pitágoras que

$$\|p_n\|_{H^2}^2 = \sum_{k=0}^n |\langle p_n, z^k \rangle|^2 = n^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 1^2 = n^2 + n = n(n+1).$$

□

A demonstração anterior foi adaptada de (17, Lema 7.2.2). Temos agora as ferramentas necessárias para provar o Teorema 1.2.5.

Demonstração do Teorema 1.2.5. Seja $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a base definida no Lema 1.2.7. É fácil ver que $(z - 1)p_n(z) = nz^{n+1} - (n + 1)z^n + 1$, logo $Tp_n = n(n + 1)z^{n-1}$. Como $\{\sqrt{(n + 1)(n + 2)}z^n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{A}$, $\{Tp_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é uma base ortogonal de $\mathcal{A}$. Ademais,

$$\|Tp_n\|_{\mathcal{A}}^2 = n(n + 1) \left\| \sqrt{n(n + 1)}z^{n-1} \right\|_{\mathcal{A}}^2 = n(n + 1) = \|p_n\|_{H^2}^2.$$

Como $\{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ também é ortogonal em H^2 , segue do Teorema de Pitágoras que $\|Tf\|_{\mathcal{A}} = \|f\|_{H^2}$ para todo $f \in \text{span}\{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Considere agora $f \in H^2$ qualquer. Como $\{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é uma base de H^2 , existe uma sequência $(f_k) \subset \text{span}\{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ tal que $f_k \rightarrow f$ em H^2 . Já vimos que T é uma isometria em $\text{span}\{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, assim segue em particular que (Tf_k) é de Cauchy em $\mathcal{A}$. Como esse espaço é Hilbert, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $Tf_k \rightarrow g$ em $\mathcal{A}$. Seguem do Corolário 1.1.7 e da Proposição 1.2.4 que $f_k \rightarrow f$ e $Tf_k \rightarrow g$ convergem na topologia compacto-aberto. Como T é contínua em $\text{Hol}(\mathbb{D})$ e a topologia desse espaço é Hausdorff, segue que $g = Tf$. Logo,

$$\|Tf\|_{\mathcal{A}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Tf_k\|_{\mathcal{A}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{H^2} = \|f\|_{H^2},$$

i.e., $T|_{H^2}$ é uma isometria de H^2 para $\mathcal{A}$.

Por fim, $TH^2 = \mathcal{A}$. De fato, TH^2 é fechado em $\mathcal{A}$, pois T é uma isometria e H^2 é Hilbert, e $\text{span}\{Tp_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset TH^2$ é denso em $\mathcal{A}$. $\square$

1.3 Espaços de Dirichlet generalizados

Nesta seção, iremos definir e estudar algumas propriedades básicas do espaço de Dirichlet, análogas às propriedades de H^2 e $\mathcal{A}$. Em seguida, vamos apresentar uma de suas generalizações, os espaços de Dirichlet harmonicamente ponderados e, em especial, os espaços de Dirichlet locais. Por fim, iremos provar uma caracterização dos espaços de Dirichlet locais que ilustra como eles são grandes subespaços de H^2 . As definições e resultados apresentados foram retirados de (17), uma excelente referência para o estudo desses espaços.

Definição 1.3.1 (Espaço de Dirichlet). Seja $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. A integral de Dirichlet de f é dada por

$$\mathcal{D}(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z),$$

onde dA é a medida de área do disco normalizada, como na seção anterior. O espaço de Dirichlet é o conjunto

$$\mathcal{D} = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \mathcal{D}(f) < \infty\}.$$

Munimos esse espaço com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}} = \langle f, g \rangle_{H^2} + \int_{\mathbb{D}} f'(z) \overline{g'(z)} \, dA(z)$$

e a norma induzida por ele

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = (\|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}(f))^{1/2}.$$

Não é claro da definição acima que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ é um produto interno, pois não garantimos que $\langle f, g \rangle_{H^2}$ está bem-definido para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}$. Resolvemos esse problema mostrando que, de fato, $\mathcal{D} \subset H^2$. Para isso, vamos mostrar que $\mathcal{D}$ é também naturalmente isomorfo a um espaço ℓ^2 ponderado.

Proposição 1.3.2. *Sejam $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sua representação em série de potências. Então,*

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2.$$

Em particular, $\mathcal{D} \subset H^2$ e

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |a_n|^2.$$

Demonstração. Como $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, temos que $f' \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ e

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Com isso, a demonstração segue de maneira similar à Proposição 1.2.2. De fato, a equação (1.3) vale para f' e temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r \, d\theta \, dr \\ &\stackrel{(1.3)}{=} 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-2} r \, dr = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 2 \int_0^1 r^{2n-1} \, dr \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 = |f(0)|^2 + \mathcal{D}(f).$$

Logo, $\mathcal{D} \subset H^2$. Por fim, note que

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |a_n|^2.$$

□

A proposição anterior não só mostra que o produto interno em $\mathcal{D}$ está bem-definido, como também que $\mathcal{D}$ é um espaço de Hilbert. De fato, é claro pelo resultado anterior que o mapa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é um isomorfismo isométrico entre ℓ_{n+1}^2 e $\mathcal{D}$, onde

$$\ell_{n+1}^2 = \left\{ (a_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

O espaço de Dirichlet é bastante análogo aos espaços H^2 e $\mathcal{A}$, possuindo muitas propriedades similares às desses espaços. Por exemplo, $\mathcal{D}$ é um espaço com núcleos de reprodução (veja (17, Teorema 1.2.3)). Contudo, não trabalharemos com $\mathcal{D}$ mas sim com uma família de generalizações chamadas *espaços de Dirichlet locais*. Esses espaços são um caso particular dos chamados *espaços de Dirichlet harmonicamente ponderados*. Antes de defini-los, vamos primeiro tecer alguns comentários breves sobre funções harmônicas, inspirados na exposição feita em (14, Capítulo 11).

Uma função f é dita harmônica em um aberto $U \subset \mathbb{C}$ se $f \in C(U)$ e

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad \text{em } U.$$

Aqui interpretamos $f(x, y) = f(x + iy)$ e é nesse sentido que são definidas $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. As propriedades das funções harmônicas são bastantes numerosas e a teoria dos espaços de Hardy H^p está bastante relacionado a essas funções. Um importante resultado, cuja versão para os espaços de Hardy foi enunciada no Teorema 1.1.12, diz respeito à relação entre as funções harmônicas e o núcleo de Poisson, que definimos no teorema.

Recorde que o núcleo de Poisson é dado por

$$\begin{aligned} P(z, e^{it}) &= P_r(\theta - t) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} = \operatorname{Re} \left(1 + 2 \frac{ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right), \end{aligned}$$

onde $z = re^{i\theta}$ (cf. (1.8)).

Um resultado clássico de análise complexa (veja (14, Teorema 10.7)) nos mostra que, para qualquer medida finita (real) μ , a função

$$z \mapsto \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(e^{it})$$

é holomorfa no disco unitário. Em particular, a função

$$P[\mu](z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it}) d\mu(e^{it}) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} d\mu(e^{it})$$

é a parte real de uma função holomorfa em $\mathbb{D}$, logo harmônica em $\mathbb{D}$. Por linearidade, μ pode ser qualquer medida (finita) complexa sobre $\mathbb{T}$. Essa função é chamada de a *integral de Poisson* da medida μ . Um importante resultado mostra que todas as funções harmônicas positivas podem ser representadas dessa forma.

Teorema 1.3.3 (Teorema de Representação Herglotz). *Seja u uma função harmônica e positiva em $\mathbb{D}$, então existe uma única medida de Borel positiva e finita μ em $\mathbb{T}$ tal que $u = P[\mu]$.*

Omitiremos a demonstração desse resultado clássico, que é provado de diferentes formas em, por exemplo, (11, Teorema 2.6.3), (13, Teorema 1.1) e (14, Teorema 11.30). Vale ressaltar que o Teorema 1.1.28 é uma das aplicações desse resultado. Temos agora contexto para definir os espaços de Dirichlet generalizados.

Definição 1.3.4. Seja μ uma medida de Borel positiva e finita em $\mathbb{T}$. A integral de Dirichlet harmonicamente ponderada associada a μ de uma função $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ é a seguinte integral

$$\mathcal{D}_\mu(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 P[\mu](z) dA(z).$$

Analogamente, o espaço de Dirichlet harmonicamente ponderado associado a μ é o conjunto

$$\mathcal{D}_\mu = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \mathcal{D}_\mu(f) < \infty\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\mu}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}_\mu(f).$$

Se $\mu = \delta_\zeta$, a medida de Dirac em $\zeta \in \mathbb{T}$, denotamos $\mathcal{D}_{\delta_\zeta}$ por $\mathcal{D}_\zeta$ e chamamos de espaço de Dirichlet local em ζ .

Como esperado, esses espaços são versões ponderadas do espaço de Dirichlet, onde os pesos são funções harmônicas. Como os pesos são positivos, o Teorema 1.3.3 justifica a definição por meio das integrais de Poisson de medidas positivas. Note que, novamente, a norma definida não está bem definida se não tivermos que $\mathcal{D}_\mu \subset H^2$. Isso de fato ocorre e mais, $\mathcal{D}_\mu$ é sempre um espaço de Hilbert. Mostraremos mais adiante que o Teorema 1.3.6 nos permite provar isso para os espaços de Dirichlet locais. Indicamos (17, Teorema 7.1.2) para a demonstração desses fatos para medidas positivas e finitas quaisquer.

Vamos agora provar uma caracterização das funções dos espaços de Dirichlet locais. Um dos lemas necessários para prová-lo foi enunciado na seção 1.2, faltando apenas o seguinte.

Lema 1.3.5. *Se $g \in H^2$, então $\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1 - |z|^2) |g(z)|^2 = 0$.*

Demonstração. Sejam $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sua representação em série de potências e $g_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$ as somas parciais dessa série. Dado $\varepsilon > 0$, como $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal, é possível tomar k suficientemente grande para que $\|g - g_k\|_{H^2}^2 < \frac{\varepsilon}{8}$. Seja $C = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g_k(z)|^2 < \infty$. Note que, para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |g(z) - g_k(z)| + |g_k(z)| \leq 2 \max\{|g(z) - g_k(z)|, |g_k(z)|\} \\ \therefore |g(z)|^2 &\leq 4 \max\{|g(z) - g_k(z)|^2, |g_k(z)|^2\} \leq 4(|(g - g_k)(z)|^2 + |g_k(z)|^2). \end{aligned}$$

Então, para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$(1 - |z|^2) |g(z)|^2 \leq 4(1 - |z|^2)(|(g - g_k)(z)|^2 + |g_k(z)|^2) \leq 4\|g - g_k\|_{H^2}^2 + 4C^2(1 - |z|^2),$$

onde usamos (1.1) para a segunda desigualdade, i.e.,

$$|(g - g_k)(z)|^2 = |\langle g - g_k, k_z \rangle|^2 \leq \|g - g_k\|_{H^2}^2 (1 - |z|^2)^{-1}.$$

Com isso, basta tomar $|1 - |z||$ pequeno o suficiente para que

$$4C^2(1 - |z|^2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Temos todas as ferramentas para provar o seguinte.

Teorema 1.3.6. *Sejam $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ e $\zeta \in \mathbb{T}$. Então $\mathcal{D}_\zeta(f) < \infty$ se, e somente se,*

$$f(z) = a + (z - \zeta)g(z),$$

onde $g \in H^2$ e $a \in \mathbb{C}$. Nesse caso, $\mathcal{D}_\zeta(f) = \|g\|_{H^2}^2$ e $a = f^*(\zeta)$ é o limite radial de f em ζ .

Demonstração. Iremos primeiro provar para o caso $\zeta = 1$. Note que $P[\delta_1](z) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}$, logo

$$\mathcal{D}_1(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \frac{1 - |z|^2}{|z - 1|^2} dA(z) = \left\| \frac{f'(z)}{z - 1} \right\|_{\mathcal{A}}^2.$$

Assim, $f \in \mathcal{D}_1$ se, e somente se, $f'(z)/(z - 1) \in \mathcal{A}$. Segue do Teorema 1.2.5 que isso é equivalente a existir $g \in H^2$ tal que

$$\frac{f'(z)}{z - 1} = Tg(z) \iff f'(z) = ((z - 1)g(z))' \iff f(z) = a + (z - 1)g(z).$$

Nesse caso, como T é uma isometria, temos que

$$\|g\|_{H^2}^2 = \|Tg\|_{\mathcal{A}}^2 = \left\| \frac{f'(z)}{z - 1} \right\|_{\mathcal{A}}^2 = \mathcal{D}_1(f).$$

Além disso, segue do Lema 1.3.5 que

$$|f(r) - a|^2 = (r - 1)^2 |g(r)|^2 \leq (1 - r^2) |g(r)|^2 \longrightarrow 0, \quad \text{quando } r \rightarrow 1^-.$$

Por fim, sejam $\zeta \in \mathbb{T}$ qualquer e $f_\zeta \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ o mapa dado por $f_\zeta(z) = f(\zeta z)$. Observe que $P[\delta_\zeta](z) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - \bar{\zeta}z|^2}$, logo aplicando a mudança de variáveis $w = \bar{\zeta}z$, obtemos

$$\mathcal{D}_\zeta(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \frac{1 - |z|^2}{|\bar{\zeta}z - 1|^2} dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f'(\zeta w)|^2 \frac{1 - |w|^2}{|w - 1|^2} |\zeta|^2 dA(w) = \mathcal{D}_1(f_\zeta).$$

Em particular, $f \in \mathcal{D}_\zeta$ se e somente se $f_\zeta \in \mathcal{D}_1$. Pelo caso anterior,

$$f \in \mathcal{D}_\zeta \iff f_\zeta(z) = a + (z - 1)g(z) \iff f(z) = f_\zeta(\bar{\zeta}z) = a + (z - \zeta)\bar{\zeta}g(\bar{\zeta}z),$$

onde $a = f_\zeta^*(1) = f^*(\zeta)$ e $g \in H^2$ é tal que $\|g\|_{H^2}^2 = \mathcal{D}_1(f_\zeta)$. Portanto a seguinte observação conclui a demonstração: se $\tilde{g}(z) = \bar{\zeta}g(\bar{\zeta}z)$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então

$$\tilde{g}(z) = \bar{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{\zeta}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{\zeta}^{n+1} z^n,$$

logo $\tilde{g} \in H^2$ se e somente se $g \in H^2$ e, nesse caso, $\|\tilde{g}\|_{H^2}^2 = \|g\|_{H^2}^2 = \mathcal{D}_1(f_\zeta) = \mathcal{D}_\zeta(f)$. $\square$

Como mencionamos anteriormente, o Teorema 1.3.6 nos permite concluir que os espaços de Dirichlet locais são subespaços de H^2 e são espaços de Hilbert. De fato, para todo $\zeta \in \mathbb{T}$,

$$\mathcal{D}_\zeta \subset (S - \zeta I)H^2 + \mathbb{C} \subset H^2,$$

onde S é o operador shift (veja Definição 1.1.19) e I é a identidade. Considere agora $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_\zeta$ uma sequência de Cauchy, com $f_n(z) = a_n + (z - \zeta)g_n(z)$ as decomposições dadas pelo Teorema 1.3.6. Como $\|g_n - g_m\|_{H^2}^2 = \mathcal{D}_\zeta(f_n - f_m) \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_\zeta}^2$, temos que (f_n) e (g_n) são sequências de Cauchy, logo convergentes, em H^2 . Sejam f e g seus respectivos limites. Note que

$$f(z) = f^*(\zeta) + (z - \zeta)g(z).$$

De fato, basta mostrar que $f - (S - \zeta I)g$ é constante ou, equivalentemente, ortogonal (em H^2) a $\{k_z - k_w : z, w \in \mathbb{D}\}$, que é imediato de $f_n - (S - \zeta I)g_n$ ser constante pra cada n . Com isso,

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{D}_\zeta}^2 = \|f - f_n\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}_\zeta(f - f_n) = \|f - f_n\|_{H^2}^2 + \|g - g_n\|_{H^2}^2 \longrightarrow 0.$$

Logo, $\mathcal{D}_\zeta$ é um espaço de Hilbert.

Por fim, note que $\mathcal{D}_\zeta$ é um subespaço denso de H^2 , pois os polinômios pertencem a $\mathcal{D}_\zeta$, novamente pelo Teorema 1.3.6.

1.4 Classes de Nevanlinna e Smirnov

Nesta seção iremos definir as classes de Nevanlinna e Smirnov e comentar algumas de suas propriedades básicas. Em especial, iremos apresentar caracterizações alternativas de cada espaço e definir a representação canônica de funções na classe de Smirnov.

Definição 1.4.1. Seja $\log^+ : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\} = \begin{cases} \log x, & \text{se } x \geq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

A classe de Nevanlinna N é o conjunto

$$N = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty \right\}.$$

É fácil verificar que, para todo $x, p \in (0, \infty)$, $\log x \leq x^p/p$. Em particular, o mesmo vale para $\log^+$ e assim $H^\infty \subset H^p \subset N$ para todo $0 < p < \infty$. Apesar disso, os conjuntos de zeros de N (veja Definição 1.1.24) não são diferentes daqueles de H^∞ .

Teorema 1.4.2. *Sejam $f \in N \setminus \{0\}$ e $(z_n)_{n \in I} \subset \mathbb{D}$, onde $I \subset \mathbb{N}$ a sequência (possivelmente finita) de zeros de f repetidos de acordo com a multiplicidade. Então,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |z_n| < \infty.$$

Esse resultado, cuja demonstração pode ser vista em (14, Teorema 15.23) e (13, Teorema 2.3), estende o Teorema 1.1.26 para essa nova classe de funções. Além disso, podemos também fatorar os zeros das funções de N .

Teorema 1.4.3. *Sejam $f \in N \setminus \{0\}$ e B o produto de Blaschke formado pelos zeros de f . Então $g = f/B \in N$ e*

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Se, além disso, $f \in H^p$ para algum $0 < p \leq \infty$, então $g = f/B \in H^p$ e $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.

Temos também a seguinte caracterização das funções de N .

Teorema 1.4.4. *Seja $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Então, $f \in N$ se, e somente se, existem $b_1, b_2 \in H^\infty$, com $b_2(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ tais que $f = b_1/b_2$.*

Com isso, é claro do Teorema 1.1.12(ii) aplicados a b_1 e b_2 que se $f \in N$, então seu limite radial f^* existe q.t.p em $\mathbb{T}$. Note que b_1^* e b_2^* são zero em quase nenhum ponto

pois $\log |b_i^*| \in L^1(\mathbb{T})$ pelo Teorema 1.1.29. Como $f^* = b_1^*/b_2^*$, $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ademais, como b_2 não se anula em $\mathbb{D}$, se aplicarmos o Corolário 1.1.32 a b_1 e b_2 obtemos que

$$f(z) = \lambda B(z) \exp \left(- \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f^*(e^{i\theta})| d\theta \right), \quad (1.14)$$

onde B é o produto de Blaschke formado pelos zeros de b_1 (ou f) e μ é uma medida com sinal, finita e singular (com respeito à medida de Lebesgue). Note que a fatoração canônica só não se aplica também às funções de N pois a medida μ nesse caso não é uma medida positiva. Isso motiva a definição da seguinte classe.

Definição 1.4.5. A classe de Smirnov N^+ é o conjunto das funções $f \in N$ para as quais a medida μ da fatoração dada em (1.14) é positiva ou $f = 0$.

A definição acima diz que N^+ é a maior classe de funções em que vale a fatoração canônica. Como isso vale para toda função não identicamente nula em H^p para $0 < p \leq \infty$ (veja (13, Teorema 2.8) e (18, Teorema 4.19)) segue que $H^p \subset N^+ \subset N$ para todo $0 < p \leq \infty$.

A seguir enunciamos uma outra caracterização de N^+ .

Teorema 1.4.6. *Seja $f \in N$. Então $f \in N^+$ se, e somente se,*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})| d\theta.$$

Veja (13, Teorema 2.10) e (18, Teorema 5.3) para demonstrações desse resultado. Como consequência dos teoremas de fatoração, obtemos o seguinte interessante resultado,

Observe que segue da definição de N^+ que, se $f \in N^+$,

$$f = \frac{b_1}{b_2} = BV \frac{F_1}{F_2},$$

onde B é um produto de Blaschke, V uma função interior singular e F_1, F_2 funções exteriores de H^∞ . Por conta disso, podemos definir a classe de Smirnov por

$$N^+ = \{b_1/b_2 : b_1, b_2 \in H^\infty \text{ e } b_2 \text{ é exterior}\}. \quad (1.15)$$

Note que a representação de uma função $f \in N^+$ como quociente de funções em H^∞ não é única. Na subseção a seguir definiremos um tipo especial de pares em $H^\infty \times H^\infty$ e veremos que toda função em N^+ possui uma representação única como o quociente de um par desse tipo.

1.4.1 Pares pitagóricos de funções em H^∞

Vamos agora apresentar o conceito de par pitagórico de funções em H^∞ e sua relação com funções na classe de Smirnov N^+ . Essa exposição é inspirada nas seções 23.1 e 23.9 de (18).

Definição 1.4.7. Dizemos que um par $(a, b) \in H^\infty \times H^\infty$ é um par pitagórico se

1. $\|a\|_{H^\infty}, \|b\|_{H^\infty} \leq 1$,
2. a é uma função exterior (de H^∞),
3. $a(0) > 0$ e
4. $|a^*|^2 + |b^*|^2 = 1$ q.t.p em $\mathbb{T}$.

Observe que $a \in H^\infty$ implica que $\log |a^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Assim, em particular,

$$\log(1 - |b^*|) = 2 \log |a^*| - \log(1 + |b^*|) \in L^1(\mathbb{T}). \quad (1.16)$$

Isso não só é uma condição necessária como também suficiente para, dado $b \in H^\infty$, existir $a \in H^\infty$ tal que (a, b) seja um par pitagórico. De fato, é claro da definição que, dado $b \in H^\infty$ com $\log(1 - |b^*|) \in L^1(\mathbb{T})$, a única função $a \in H^\infty$ que torna o par (a, b) pitagórico é dada por

$$a(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(1 - |b^*(e^{i\theta})|^2)^{1/2} d\theta \right).$$

Note ainda que, por (1.15), o quociente b/a do par pitagórico (a, b) pertence à classe de Smirnov. O resultado a seguir complementa essa observação.

Proposição 1.4.8. *Seja $f \in N^+ \setminus \{0\}$. Então existe um único par pitagórico (a, b) tal que $f = b/a$.*

Demonstração. Por (1.15), existem $b_1, b_2 \in H^\infty$ tais que $f = b_1/b_2$ com b_2 exterior. A partir de b_1 e b_2 iremos construir um par pitagórico que satisfaça $f = b/a$. Para o par (a, b) satisfazer $f = b/a$ é necessário que

$$\frac{1 - |a^*|^2}{|a^*|^2} = \frac{|b^*|^2}{|a^*|^2} = \frac{|b_1^*|^2}{|b_2^*|^2},$$

ou seja,

$$|a^*|^2 = \frac{|b_2^*|^2}{|b_1^*|^2 + |b_2^*|^2}.$$

As igualdades acima, como usual, valem q.t.p em $\mathbb{T}$. Como $b_2 \in H^\infty$, segue que $\log |b_2^*|^2 \in L^1(\mathbb{T})$ e, em particular, $\log(|b_1^*|^2 + |b_2^*|^2) \in L^1(\mathbb{T})$. Assim,

$$a(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \left(\frac{|b_2^*|^2}{|b_1^*|^2 + |b_2^*|^2} \right)^{1/2} d\theta \right)$$

é a única função exterior em H^∞ que satisfaz a igualdade acima e $a(0) > 0$. Definindo $b = af$, temos

$$|a^*|^2 + |b^*|^2 = \frac{|b_2^*|^2}{|b_1^*|^2 + |b_2^*|^2} + \frac{|b_2^*|^2}{|b_1^*|^2 + |b_2^*|^2} \frac{|b_1^*|^2}{|b_2^*|^2} = 1.$$

Logo (a, b) definidos dessa maneira formam um par pitagórico que satisfaz $f = b/a$. Note ainda que a é a única função exterior que satisfaz a condição necessária para que $f = b/a$, o que prova a unicidade dessa representação. $\square$

A demonstração acima foi retirada de (18, Lema 23.27). Chamamos a representação de uma função $f \in N^+$ dada pela Proposição 1.4.8 de representação canônica de f .

No Exemplo 1.4.10, iremos calcular a representação canônica da função $\varphi(z) = \frac{1}{1-z} \in N^+$, que será de interesse no futuro. Para tanto, aplicaremos o Teorema de Féjer-Riesz, que enunciaremos a seguir. O enunciado e a demonstração abaixo são adaptados de (19).

Teorema 1.4.9 (Teorema de Féjer-Riesz). *Seja $p(e^{it}) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ um polinômio trigonométrico com coeficientes $c_k \in \mathbb{C}$ tal que $p(e^{it}) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, existe um polinômio $q(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ tal que $p(e^{it}) = |q(e^{it})|^2$. O polinômio q pode ser escolhido de modo a não ter raízes em $\mathbb{D}$.*

Demonstração. Provaremos por indução em n , o grau do polinômio trigonométrico p . Se $n = 0$, então $p(e^{it}) = c_0$ é uma constante não negativa, logo $p(e^{it}) = |q(e^{it})|^2$ onde $q(e^{it}) = \sqrt{c_0}$, o que conclui o caso base.

Suponha, agora, que o teorema seja satisfeito para algum $n \geq 0$ e tome p um polinômio trigonométrico de grau $n+1$ tal que $p(e^{it}) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $p(e^{it}) = \sum_{k=-n-1}^{n+1} c_k e^{ikt}$ com $c_k \in \mathbb{C}$ para $-n-1 \leq k \leq n+1$. Estendemos p para uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $p(z) = \sum_{k=-n-1}^{n+1} c_k z^k$ e definimos o polinômio $r(z) = z^{n+1} p(z)$. Como $p(e^{it}) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular

$$\sum_{k=-n-1}^{n+1} c_k e^{ikt} = p(e^{it}) = \overline{p(e^{it})} = \sum_{k=-n-1}^{n+1} \overline{c_k} e^{-ikt} = \sum_{j=-n-1}^{n+1} \overline{c_{-j}} e^{ijt},$$

logo $c_k = \overline{c_{-k}}$ para todo $-n-1 \leq k \leq n+1$. Além disso, como p tem grau $n+1$, c_{n+1} ou c_{-n-1} é não-nulo, então pela observação anterior c_{n+1} e c_{-n-1} são não nulos. Em particular, r é um polinômio de grau $2n+2$ e $r(0) \neq 0$. Assim, r possui $2n+2 \geq 2$ raízes (contando com multiplicidade) e 0 não é raiz de r .

Seja $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ uma raiz de r . Iremos dividir a demonstração em dois casos: $\alpha \notin \mathbb{T}$ e $\alpha \in \mathbb{T}$.

Para o caso $\alpha \notin \mathbb{T}$, observe que $\tilde{p}(z) = \overline{p(1/\bar{z})} = p(z)$ pois

$$\tilde{p}(z) = \overline{p(1/\bar{z})} = \overline{\sum_{k=-n-1}^{n+1} c_k \bar{z}^{-k}} = \sum_{k=-n-1}^{n+1} \overline{c_k} z^{-k} = \sum_{j=-n-1}^{n+1} \overline{c_{-j}} z^j = p(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

onde usamos que $c_k = \overline{c_{-k}}$ para todo $-n-1 \leq k \leq n+1$. Em particular,

$$r(1/\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}^{-n-1} p(1/\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}^{-n-1} \overline{p(\alpha)} = \bar{\alpha}^{-2n-2} \overline{r(\alpha)} = 0,$$

logo $1/\bar{\alpha}$ é raiz de r . Note que $\alpha \neq 1/\bar{\alpha}$ pois $\alpha \notin \mathbb{T}$. Além disso, como $|1/\bar{\alpha}| = 1/|\alpha|$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $|\alpha| > 1$. Defina o polinômio $q_1(z) = z - \alpha$. Observe que, se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\overline{q_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}} - \alpha\right)} = (z^{-1} - \bar{\alpha}) = -\bar{\alpha} z^{-1} \left(z - \frac{1}{\bar{\alpha}}\right).$$

Logo, $z q_1(z) \overline{q_1(1/\bar{z})} = -\bar{\alpha}(z - \alpha)(z - 1/\bar{\alpha})$ divide $r(z)$, i.e., existe um polinômio r_1 de grau $2n$ tal que $r(z) = r_1(z) z q_1(z) \overline{q_1(1/\bar{z})}$. Seja $p_1(z) = z^{-n} r_1(z)$. Note que $p_1(e^{it})$ é um polinômio trigonométrico de grau n e

$$p_1(e^{it}) = \frac{p(e^{it})}{q_1(e^{it}) \overline{q_1(1/e^{-it})}} = \frac{p(e^{it})}{q_1(e^{it}) \overline{q_1(e^{it})}} = \frac{p(e^{it})}{|q_1(e^{it})|^2} \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pela hipótese de indução, existe um polinômio q_2 sem raízes em $\mathbb{D}$ tal que $p_1(e^{it}) = |q_2(e^{it})|^2$. Logo, tomando $q = q_1 q_2$, temos que q não possui raízes em $\mathbb{D}$ (pois escolhemos α com $|\alpha| > 1$) e

$$p(e^{it}) = p_1(e^{it}) |q_1(e^{it})|^2 = |q_2(e^{it})|^2 |q_1(e^{it})|^2 = |q(e^{it})|^2,$$

como queríamos.

Consideremos agora o caso $\alpha \in \mathbb{T}$. Nesse caso, temos que α é uma raiz de r com multiplicidade maior ou igual a 2. De fato, suponha por absurdo que α é uma raiz simples de r . Assim, $r(\alpha) = 0$ e $r'(\alpha) \neq 0$, logo $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$. Considere agora a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = p(e^{it})$. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = e^{i\gamma}$. Então, $f(\gamma) = p(\alpha) = 0$ e $f'(\gamma) = i\alpha p'(\alpha) \neq 0$. Assim, $f'(\gamma)$ é um número real não-nulo. Se $f'(\gamma) > 0$, podemos tomar $t_0 < \gamma$ suficientemente próximo de γ tal que

$$f(t_0) = f(t_0) - f(\gamma) = \frac{f(t_0) - f(\gamma)}{t_0 - \gamma} (t_0 - \gamma) < 0.$$

Porém, isso implica que $p(e^{it_0}) = f(t_0) < 0$, absurdo. Semelhantemente, caso $f'(\gamma) < 0$, existe $t_1 > \gamma$ tal que $p(e^{it_1}) < 0$, novamente uma contradição.

Logo, α é raiz de r com multiplicidade maior ou igual a 2. Considere novamente o polinômio $q_1(z) = z - \alpha$. Analogamente ao caso $\alpha \notin \mathbb{T}$, temos que $z q_1(z) \overline{q_1(1/\bar{z})} = -\bar{\alpha}(z - \alpha)(z - 1/\bar{\alpha}) = -\bar{\alpha}(z - \alpha)^2$ divide $r(z)$ e o mesmo argumento do caso anterior encerra o passo indutivo. $\square$

Esse resultado nos permite calcular a representação canônica de funções racionais (quociente de polinômios) em N^+ (20, Observação 3.2).

Exemplo 1.4.10. Seja $\varphi \in N^+$ a função dada por $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$. Pelo mesmo argumento da Proposição 1.4.8, temos que

$$|a^*|^2(e^{it}) = \frac{|1 - e^{it}|^2}{1 + |1 - e^{it}|^2}.$$

Usando o método do Teorema de Féjer-Riesz para o polinômio trigonométrico $1 + |1 - e^{it}|^2$, concluímos que $\frac{2}{3 + \sqrt{5}} \left| e^{it} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right|^2 = 1 + |1 - e^{it}|^2$ e assim, como $\frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)^2$,

$$|a^*|(e^{it}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left| \frac{e^{it} - 1}{e^{it} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \right|.$$

Como a função no lado direito da igualdade acima está em $H^\infty \subset H^2$ e é o quociente de funções exteriores de $H^\infty \subset H^2$, é também uma função exterior pela Proposição 1.1.30. Como a é a única função exterior com esse limite radial e $a(0) > 0$, então

$$a(z) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{z - 1}{z - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{e} \quad b(z) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - z}.$$

1.5 Espaços de de Branges-Rovnyak

Nesta seção, iremos definir os espaços de de Branges-Rovnyak, dando maior atenção ao caso não-extremo. Para tanto, primeiro discutiremos a construção que utilizaremos para definir esses espaços, em seguida introduziremos o conceito de operadores de Toeplitz limitados para enfim definir tais espaços. Depois, discutiremos brevemente sobre elementos não-extremos da bola unitária de H^∞ , enunciando uma de suas caracterizações e relacionando-os à operadores de Toeplitz descontínuos. Por fim, enunciaremos um resultado que relaciona alguns espaços de de Branges-Rovnyak com espaços de Dirichlet ponderados.

1.5.1 Produto interno induzido por mapas lineares contínuos

Considere um isomorfismo linear $T : \mathcal{H} \rightarrow V$ entre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um espaço vetorial V . Podemos, a partir dele, definir um produto interno em V por

$$\langle Tx, Ty \rangle_V = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Dessa maneira, colocamos uma (possivelmente nova) estrutura de espaço de Hilbert em V . Essa construção pode ser generalizada para transformações lineares contínuas que não são necessariamente bijetivas. De fato, considere $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ um mapa linear contínuo entre espaços de Hilbert. É claro que o núcleo desse operador, $\ker T = \{x \in \mathcal{H}_1 : Tx = 0\} =$

$f^{-1}(0)$, é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_1$. É um resultado clássico de análise funcional que, nesse caso, $\mathcal{H}_1/\ker T$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|x + \ker T\|_{\mathcal{H}_1/\ker T} = \inf_{z \in \ker T} \|x + z\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Como $\mathcal{H}_1$ é um espaço de Hilbert e $\ker T$ é um subespaço fechado, existem as projeções ortogonais $P_{\ker T}, P_{(\ker T)^\perp}$. Assim, é fácil ver que

$$\|x + \ker T\|_{\mathcal{H}_1/\ker T} = \|P_{(\ker T)^\perp} x\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Além disso,

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1/\ker T} = \langle P_{(\ker T)^\perp} x, P_{(\ker T)^\perp} y \rangle_{\mathcal{H}_1}$$

define um produto interno em $\mathcal{H}_1/\ker T$ que induz a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1/\ker T}$. A verificação de que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1/\ker T}$ é de fato um produto interno é uma computação direta. Logo, $\mathcal{H}_1/\ker T$ é um espaço de Hilbert com esse produto interno. Ademais, pelo Teorema do Isomorfismo, o mapa T induz um isomorfismo linear entre $\mathcal{H}_1/\ker T$ e $\text{Ran } T$, a imagem do operador T . Assim, podemos usar a construção anterior para definir uma nova estrutura de espaço de Hilbert em $\text{Ran } T$ por

$$\langle Tx, Ty \rangle_{\text{Ran } T} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1/\ker T} = \langle P_{(\ker T)^\perp} x, P_{(\ker T)^\perp} y \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Para diferenciar o produto interno herdado de $\mathcal{H}_2$ e esse novo produto interno, denotaremos por $\mathcal{M}(T)$ o espaço de Hilbert dado por $\text{Ran } T$ com o produto interno definido acima.

Claramente,

$$\langle x, P_{(\ker T)^\perp} y \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle P_{(\ker T)^\perp} x, P_{(\ker T)^\perp} y \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle P_{(\ker T)^\perp} x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Assim, podemos usar qualquer uma das expressões acima para definir o produto interno de $\mathcal{M}(T)$. Com essa observação, é simples concluir que, se $x \in (\ker T)^\perp$, então

$$\langle Tx, Ty \rangle_{\mathcal{M}(T)} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall y \in \mathcal{H}_1.$$

Além disso,

$$\|Tx\|_{\mathcal{M}(T)} = \|P_{(\ker T)^\perp} x\|_{\mathcal{H}_1} = \|x\|_{\mathcal{H}_1},$$

onde a última igualdade vale somente se $x \in (\ker T)^\perp$.

1.5.2 Operadores de Toeplitz contínuos e $\mathcal{H}(b)$

Os operadores de Toeplitz contínuos constituem uma família de operadores em H^2 de extrema importância, possuindo uma teoria bastante desenvolvida. A sua definição faz uso da identificação $H^2 \simeq H^2(\mathbb{T})$ comentada na seção 1.1. Note que, como

$H^2(\mathbb{T})$ é um subespaço fechado do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, existe uma projeção ortogonal $P_+ : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow H^2(\mathbb{T})$ dada por

$$P_+ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Chamamos esse mapa de projeção de Riesz.

Definição 1.5.1. Seja $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. O operador de Toeplitz $T_\varphi : H^2(\mathbb{T}) \rightarrow H^2(\mathbb{T})$ associado a φ (ou com símbolo φ) por

$$T_\varphi f = P_+(\varphi f).$$

Se $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$, dizemos que T_φ é um operador de Toeplitz analítico.

Como P_+ é uma projeção ortogonal, é claro que $\|P_+\| = 1$. Por outro lado, $T_\varphi = P_+ \circ M_\varphi \circ i$, onde $M_\varphi : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ é a multiplicação por φ e $i : H^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ é a inclusão. Logo, $\|T_\varphi\| \leq \|P_+\| \|M_\varphi\| \|i\| = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$. De fato, vale a igualdade $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ (veja (18, Teorema 12.2) ou (11, Corolário 3.3.2)).

Um importante exemplo de operador de Toeplitz é o shift S . Observe que $S = T_z$, portanto S é um exemplo de operador de Toeplitz analítico. Note que, se $b \in H^\infty$, $bf \in H^2$, logo T_b se reduz ao mapa M_b de multiplicação por b quando T_b é um operador de Toeplitz analítico. Além disso, quando $b \in H^\infty$, temos uma expressão simples para a transformação adjunta T_b^* , como mostramos a seguir.

Proposição 1.5.2. Se $b \in H^\infty$, então $T_b^* = T_{\bar{b}}$.

Demonstração. Sejam $f, g \in H^2(\mathbb{T})$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle T_b f, g \rangle_{H^2(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{b(e^{i\theta}) g(e^{i\theta})} d\theta \\ &= \langle f, M_{\bar{b}} g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, T_{\bar{b}} g \rangle_{H^2(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade se dá pois $f \in H^2(\mathbb{T})$ implica que $\langle f, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f, P_+ \varphi \rangle_{H^2(\mathbb{T})}$ para todo $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$. Como isso vale para todo $f \in H^2(\mathbb{T})$, segue que $T_b^* g = T_{\bar{b}} g$. Em particular, como isso também vale para todo $g \in H^2(\mathbb{T})$ obtemos que $T_b^* = T_{\bar{b}}$. $\square$

Com isso, podemos observar que, para todo $b \in H^\infty$ e $f \in H^2$,

$$\langle T_b T_{\bar{b}} f, f \rangle = \langle T_{\bar{b}} f, T_b f \rangle \leq \|T_{\bar{b}}\|^2 \|f\|_{H^2}^2 = \|b\|_{H^\infty}^2 \|f\|_{H^2}^2.$$

Para a última igualdade acima, utilizamos o fato de $\|\bar{b}\|_{L^\infty} = \|b\|_{L^\infty} = \|b\|_{H^\infty}$, conforme a observação 1.2. Assim, se $\|b\|_{H^\infty} \leq 1$, temos que o operador $I - T_b T_{\bar{b}}$ é positivo, i.e.,

$$\langle (I - T_b T_{\bar{b}}) f, f \rangle \geq 0, \quad \forall f \in H^2.$$

Um resultado clássico de análise funcional (veja Teorema B.3.3) nos dá que, nesse caso, existe um único operador positivo $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} \in \mathcal{B}(H^2)$ tal que $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} \circ (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} = I - T_b T_{\bar{b}}$. Podemos agora definir os espaços de Branges-Rovnyak.

Definição 1.5.3. Seja $b \in \overline{B}_{H^\infty} = \{f \in H^\infty : \|f\| \leq 1\}$. O espaço de Branges-Rovnyak associado a b por

$$\mathcal{H}(b) = \mathcal{M}((I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}),$$

ou seja, $\text{Ran } (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$ com o produto interno dado por

$$\langle (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} x, (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} y \rangle_{\mathcal{H}(b)} = \left\langle P_{(\ker(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})^\perp} x, P_{(\ker(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})^\perp} y \right\rangle_{H^2}.$$

Pela construção discutida na subseção 1.5.1, $\mathcal{H}(b)$ é um espaço de Hilbert que está continuamente contido em H^2 , i.e., $\mathcal{H}(b) \subset H^2$ como conjunto e a inclusão $i : \mathcal{H}(b) \rightarrow H^2$ é contínua pois

$$\begin{aligned} \|(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} x\|_{H^2} &= \left\| (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} P_{(\ker(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})^\perp} x \right\|_{H^2} \\ &\leq \|(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}\| \left\| P_{(\ker(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})^\perp} x \right\|_{H^2} \\ &= \|(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}\| \|(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2} x\|_{\mathcal{H}(b)}. \end{aligned}$$

1.5.3 Elementos não-extremos de $\overline{B}_{H^\infty}$ e operadores de Toeplitz analíticos descontínuos

Muitas propriedades dos espaços $\mathcal{H}(b)$ dependem se b é um elemento extremo ou não-extremo do fecho da bola unitária $\overline{B}_{H^\infty}$. Iremos nos restringir a estudar apenas o caso não-extremo. Por conta disso, vamos apresentar uma caracterização dos elementos não-extremos de $\overline{B}_{H^\infty}$ e algumas de suas consequências.

Primeiramente, vamos recordar a definição de um elemento extremo.

Definição 1.5.4. Sejam V um espaço vetorial e $A \subset V$ um subconjunto convexo. Dizemos que $x \in A$ é um elemento extremo de A se $y, z \in A$ satisfazem $x = ty + (1 - t)z$ para algum $t \in (0, 1)$ somente se $x = y = z$. Ou seja, x é um elemento extremo se ele não pode ser escrito como combinação convexa não-trivial de outros vetores. Se x não é extremo, dizemos que x é um elemento não-extremo de A .

Por exemplo, o conjunto dos elementos extremos de $\overline{\mathbb{D}}$ é $\mathbb{T}$ e do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ coincide com o conjunto dos seus vértices $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. O resultado a seguir classifica os elementos extremos da bola unitária fechada de H^∞ .

Teorema 1.5.5. Um ponto $f \in \overline{B}_{H^\infty}$ é um ponto extremo desse conjunto se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - |f^*(e^{i\theta})|) d\theta = -\infty.$$

O Teorema anterior foi retirado de (18, Teorema 6.7). Esse resultado e a discussão feita na subseção 1.4.1 mostram que existe uma relação biunívoca entre elementos não-extremos de $\overline{B}_{H^\infty}$ e pares pitagóricos. Por outro lado, pela Proposição 1.4.8, esses pares estão numa relação bijetiva com as funções não nulas de N^+ . Essa inesperada relação nos sugere uma conexão entre os espaços $\mathcal{H}(b)$ para b não-extremo e funções de N^+ . No artigo (20), Sarason faz uma excelente exposição sobre esta conexão, que se dá por meio de operadores de Toeplitz analíticos descontínuos, que adaptamos a seguir.

Definição 1.5.6. Seja $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. O operador de Toeplitz analítico descontínuo associado a φ , $T_\varphi : \text{Dom}(T_\varphi) \rightarrow H^2$, por

$$T_\varphi(f) = \varphi f,$$

onde domínio de T_φ é $\text{Dom}(T_\varphi) = \{f \in H^2 : \varphi f \in H^2\}$.

É imediato da definição que T_φ é um operador fechado, i.e., o seu gráfico $\mathcal{G}(T_\varphi) = \{(f, \varphi f) \in H^2 \times H^2\}$ é um subespaço fechado de $H^2 \oplus H^2$. De fato, se $f_n \rightarrow f$ em H^2 e $\varphi f_n \rightarrow g$ em H^2 , em particular (veja Teorema 1.1.7) $f_n(z) \rightarrow f(z)$ e $\varphi(z)f_n(z) \rightarrow g(z)$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Assim, $g(z) = \lim_n \varphi(z)f_n(z) = \varphi(z)f(z)$, i.e., $g = \varphi f$, logo $f \in \text{Dom}(T_\varphi)$ e $(f, g) \in \mathcal{G}(T_\varphi)$, como queríamos.

Uma pergunta natural surge ao se ver a definição anterior: Para quais símbolos $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, o domínio $\text{Dom}(T_\varphi)$ é não trivial?

Proposição 1.5.7. *Seja $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Então $\text{Dom}(T_\varphi) \neq \{0\}$ se, e somente se, $\varphi \in N$.*

Demonstração. O caso $\varphi = 0$ é trivial, portanto supomos φ não identicamente nula.

Se $\varphi \in N$, segue do Teorema 1.4.4 que $\varphi = b_1/b_2$, onde $b_1, b_2 \in H^\infty$ e $b_2 \neq 0$. Em particular, $\varphi b_2 H^2 = b_1 H^2 \subset H^2$, logo $b_2 H^2 \subset \text{Dom}(T_\varphi)$.

Reciprocamente, seja $f \in \text{Dom}(T_\varphi) \setminus \{0\}$. Então $0 \neq \varphi f \in H^2 \subset N$. Assim, existem $b_1, b_2, c_1, c_2 \in H^\infty$ com $b_2(z) \neq 0 \neq c_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ tais que $f = b_1/b_2$ e $\varphi f = c_1/c_2$. Como $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, todo zero de f também é zero de φf com pelo menos a mesma multiplicidade. Assim, se B_b e B_c são os produtos de Blaschke respectivamente de f e φf , segue que B_c/B_b é uma função interior. Assim,

$$\varphi = \frac{\varphi f}{f} = \frac{c_1/c_2}{b_1/b_2} = \frac{(B_c/B_b)(c_1/B_c)b_2}{c_2(b_1/B_b)},$$

i.e., φ é o quociente de funções em H^∞ onde o denominador não se anula em $\mathbb{D}$. Logo, $\varphi \in N$. $\square$

Observe que na demonstração do resultado anterior, provamos também que, se $\varphi = b_1/b_2 \in N$, com $b_1, b_2 \in H^\infty$, então $b_2 H^2 \subset \text{Dom}(T_\varphi)$. Em particular, se $\varphi \in N^+$, $b_2 \in H^\infty$ é uma função exterior, logo $b_2 H^2$ é denso em H^2 , consequentemente, $\text{Dom}(T_\varphi)$

também é denso em H^2 . É interessante que a recíproca dessa afirmação é também verdadeira, de modo que temos o seguinte resultado.

Proposição 1.5.8. *Seja $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Então $\text{Dom}(T_\varphi)$ é denso em H^2 se, e somente se, $\varphi \in N^+$.*

Para uma demonstração desse resultado, veja (20, Lema 5.2) ou (18, Lema 23.29). Mais pode ser dito sobre $\text{Dom}(T_\varphi)$ quando $\varphi \in N^+$. De fato, é possível usar a representação canônica de φ para descrever $\text{Dom}(T_\varphi)$.

Proposição 1.5.9. *Seja $\varphi \in N^+ \setminus \{0\}$ com representação canônica $\varphi = b/a$. Então $\text{Dom}(T_\varphi) = aH^2$.*

Para uma demonstração desse resultado, veja (20, Proposição 5.3) ou (18, Lema 23.30). Note que, pela Proposição 1.5.8, quando $\varphi \in N^+$, T_φ está densamente definido, logo sua adjunta T_φ^* existe e é um operador fechado (veja, por exemplo, (21, seção 2.6)). Por outro lado, como T_φ também é fechado e H^2 é um espaço de Hilbert (logo reflexivo), T_φ^* está densamente definido. Os espaços de Branges-Rovnyak surgem naturalmente como o domínio desses operadores. Para mostrar isso, precisamos antes apresentar uma descrição alternativa de $\mathcal{H}(b)$, que é bastante útil para determinar quando uma função de H^2 pertence a $\mathcal{H}(b)$.

Proposição 1.5.10. *Sejam b um elemento não-extremo de $\overline{B}_{H^\infty}$ e $a \in H^\infty$ tal que (a, b) seja um par pitagórico. Então $f \in H^2$ pertence a $\mathcal{H}(b)$ se, e somente se, existe $g \in H^2$ tal que $T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}g$. Nesse caso, a função g com essa propriedade é única e*

$$\|f\|_{\mathcal{H}(b)}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \|g\|_{H^2}^2.$$

Não iremos provar esse resultado, apenas apresentar a ideia da demonstração, como feito na seção 23.3 de (18). Primeiramente, usamos o fato de que, se $f \in H^2$, então $f \in \mathcal{H}(b)$ se e somente se $T_{\bar{b}}f \in \mathcal{H}(\bar{b})$ e, nesse caso,

$$\|f\|_{\mathcal{H}(b)}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \|T_{\bar{b}}f\|_{\mathcal{H}(\bar{b})}^2.$$

Como mostrado, por exemplo, no Teorema 17.8 de (18). Em seguida, utilizamos o fato de que, se b é um elemento não-extremo de $\overline{B}_{H^\infty}$ e $a \in H^\infty$ é tal que (a, b) é um par pitagórico, então $\mathcal{H}(\bar{b}) = \mathcal{M}(T_{\bar{a}})$ com igualdade de norma (veja (18, Teorema 23.2)). Em particular, se $f \in \mathcal{H}(b)$, $T_{\bar{b}}f \in \mathcal{M}(T_{\bar{a}})$, logo existe $g \in H^2$ tal que $T_{\bar{a}}g = T_{\bar{b}}f$ e

$$\|T_{\bar{b}}f\|_{\mathcal{H}(\bar{b})} = \|T_{\bar{b}}f\|_{\mathcal{M}(T_{\bar{a}})} = \|T_{\bar{a}}g\|_{\mathcal{M}(T_{\bar{a}})} = \|P_{(\ker T_{\bar{a}})^\perp}g\|_{H^2}.$$

Por fim, usamos o fato de $a \in H^\infty$ ser uma função exterior, portanto $T_{\bar{a}}$ é injetiva (veja (18, Teorema 12.19)). Logo, a função $g \in H^2$ tal que $T_{\bar{a}}g = T_{\bar{b}}f$ é única e

$$\|f\|_{\mathcal{H}(b)}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \|P_{(\ker T_{\bar{a}})^\perp}g\|_{H^2}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \|g\|_{H^2}^2.$$

Com isso, temos agora ferramentas suficientes para mostrar como os espaços de de Branges-Rovnyak se relacionam com os operadores T_φ^* .

Teorema 1.5.11. *Seja $\varphi \in N^+ \setminus \{0\}$ com representação canônica $\varphi = b/a$. Então,*

$$\text{Dom}(T_\varphi^*) = \mathcal{H}(b).$$

Demonstração. Seja $f \in H^2$. Recorde que $f \in \text{Dom}(T_\varphi^*)$ se, e somente se, existe $g \in H^2$ tal que

$$\langle T_\varphi h, f \rangle_{H^2} = \langle h, g \rangle_{H^2}, \quad \forall h \in \text{Dom}(T_\varphi).$$

Como $\varphi \in N^+ \setminus \{0\}$, segue da Proposição 1.5.9 que $\text{Dom}(T_\varphi) = aH^2$. Logo, $f \in \text{Dom}(T_\varphi^*)$ se, e somente se, existe $g \in H^2$ tal que

$$\langle a\tilde{h}, g \rangle_{H^2} = \langle T_\varphi(a\tilde{h}), f \rangle_{H^2} = \langle T_b\tilde{h}, f \rangle_{H^2}, \quad \forall \tilde{h} \in H^2,$$

onde usamos que $\varphi = b/a$, logo $T_\varphi(a\tilde{h}) = T_b\tilde{h}$, para a última igualdade. Pela Proposição 1.5.2, a igualdade anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h}, T_{\bar{a}}g \rangle_{H^2} &= \langle T_a\tilde{h}, g \rangle_{H^2} = \langle T_b\tilde{h}, f \rangle_{H^2} = \langle \tilde{h}, T_{\bar{b}}f \rangle_{H^2} \\ &\iff \langle \tilde{h}, T_{\bar{a}}g - T_{\bar{b}}f \rangle_{H^2} = 0, \quad \forall \tilde{h} \in H^2. \end{aligned}$$

Ou seja, $f \in \text{Dom}(T_\varphi^*)$ se, e somente se, existe $g \in H^2$ tal que $T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}g$. Por outro lado, pela Proposição 1.5.10 isso ocorre se, e somente se, $f \in \mathcal{H}(b)$, o que conclui a demonstração. $\square$

Essa demonstração é adaptada de (20, Proposição 5.4) e (18, Teorema 23.31). Um grande obstáculo ao se trabalhar com os espaços de de Branges-Rovnyak é conseguir descrever de maneira simples os elementos de um $\mathcal{H}(b)$ fixado. Por esse motivo, mesmo usando o Teorema 1.5.11, pode não ser simples descrever os elementos de $\text{Dom}(T_\varphi^*)$ para uma função $\varphi \in N^+ \setminus \{0\}$ fixada.

No exemplo a seguir, usamos o Teorema 1.5.11 para descrever o domínio de T_φ^* quando $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$. Para isso, adaptamos a demonstração da Proposição 2 de (22) para mostrar que o espaço $\mathcal{H}(b)$ dado pelo teorema é igual, como conjunto, ao espaço de Dirichlet local em 1, $\mathcal{D}_1$ (veja Definição 1.3.4).

Exemplo 1.5.12. Seja $\varphi \in N^+ \setminus \{0\}$ dada por $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$. Calculamos no Exemplo 1.4.10 que a representação canônica $\varphi = b/a$ é dada pelas funções

$$a(z) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1 - z}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - z} \quad \text{e} \quad b(z) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - z}.$$

Em particular, segue do Teorema 1.5.11 que $\text{Dom}(T_\varphi^*) = \mathcal{H}(b)$.

Vamos agora mostrar que $\mathcal{H}(b) = \mathcal{D}_1$, como conjunto. Seja $f \in H^2$. Pela Proposição 1.5.10, $f \in \mathcal{H}(b)$ se, e somente se, existe $g \in H^2$ tal que $T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}g$. Note que $T_{\bar{b}}f = T_{\bar{a}}g$ se, e somente se, $P_+(\bar{b}^*f^* - \bar{a}^*g^*) = 0$, ou, equivalentemente, $\bar{b}^*f^* - \bar{a}^*g^* \perp H^2(\mathbb{T})$. Com isso em mente, observe que, para todo $\xi \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} (\bar{b}^*f^* - \bar{a}^*g^*)(\xi) &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \bar{\xi}} f^*(\xi) - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1 - \bar{\xi}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \bar{\xi}} g^*(\xi) \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \bar{\xi}} (f^*(\xi) - (1 - \bar{\xi})g^*(\xi)) \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{\bar{\xi}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \bar{\xi}} (\xi f^*(\xi) - (\xi - 1)g^*(\xi)). \end{aligned}$$

Logo, $\bar{b}^*f^* - \bar{a}^*g^* \perp H^2(\mathbb{T})$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{b}^*f^* - \bar{a}^*g^*, h^* \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{\bar{\xi}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \bar{\xi}} (\xi f^*(\xi) - (\xi - 1)g^*(\xi)) \bar{h}^* dm(\xi) \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \int_{\mathbb{T}} (\xi f^*(\xi) - (\xi - 1)g^*(\xi)) \frac{\bar{\xi}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \bar{\xi}} h^* dm(\xi), \quad \forall h \in H^2. \end{aligned}$$

Note que, pela Observação 1.2 e a identidade de polarização, a equação anterior é equivalente a

$$\left\langle zf - (z - 1)g, \frac{z}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - z} h \right\rangle_{H^2} = 0 \quad \forall h \in H^2.$$

Por sua vez, é fácil ver que isso é equivalente a $zf - (z - 1)g \perp zH^2$. Como $zf - (z - 1)g \in H^2$, isso é equivalente a $zf - (z - 1)g$ ser constante.

Em suma, temos que $f \in \mathcal{H}(b)$ se, e somente se, existem $g \in H^2$ e $c \in \mathbb{C}$ tais que

$$zf(z) = c + (z - 1)g(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Por sua vez, isso é equivalente a $Sf \in \mathcal{D}_1$ pelo Teorema 1.3.6 (aqui S denota o shift em H^2 como na Definição 1.1.19). Assim, para finalizar o exemplo basta mostrar que $Sf \in \mathcal{D}_1 \iff f \in \mathcal{D}_1$.

Se $f \in \mathcal{D}_1$, existem $c \in \mathbb{C}$ e $g \in H^2$ tais que $f(z) = c + (z - 1)g(z)$. Em particular,

$$Sf(z) = zf(z) = cz + (z - 1)zg(z) = c + (z - 1)(c + zg(z)).$$

Como $g \in H^2$, então $c + Sg \in H^2$, logo $Sf \in \mathcal{D}_1$.

Reciprocamente, se $Sf \in \mathcal{D}_1$, existem $c \in \mathbb{C}$, $g \in H^2$ tais que $Sf(z) = c + (z - 1)g(z)$. Em particular,

$$0 = 0f(0) = Sf(0) = c + (0 - 1)g(0) \implies g(0) = c.$$

Logo, $g = c + S\tilde{g}$, onde $\tilde{g} \in H^2$. Portanto,

$$zf(z) = c + (z - 1)(c + z\tilde{g}) = z(c + (z - 1)\tilde{g}) \quad \therefore f(z) = c + (z - 1)\tilde{g},$$

então $f \in \mathcal{D}_1$, como queríamos.

Ou seja, $\text{Dom}(T_\varphi^*) = \mathcal{H}(b) = \mathcal{D}_1$.

1.6 Dualidade de Cauchy

Nas seções anteriores estudamos diversos exemplos de espaços vetoriais topológicos de funções analíticas no disco, cujas relações de inclusão estão resumidas abaixo:

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \cup \\ \text{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \subset H^\infty \subset H^q \subset H^2 \subset H^p \subset N^+ \subset N \subset \text{Hol}(\mathbb{D}) \\ \cup \\ \mathcal{D}_\mu, \mathcal{H}(b) \end{array}$$

onde $2 < q < \infty$, $0 < p < 2$, $b \in \overline{B}_{H^\infty}$ e todas as inclusões são contínuas.

Como espaços vetoriais topológicos, uma importante ferramenta para seus estudos são os seus duais topológicos, i.e., os espaços dos funcionais lineares contínuos. No contexto específico de espaços de funções analíticas no disco, é bastante útil poder expressar a relação de dualidade de forma análoga ao produto interno de H^2 . Nessa seção, iremos definir o dual de Cauchy de um espaço de funções analíticas e comentar alguns exemplos. Tomamos (23, 24, 25, 26) como referências para esse tópico.

Definição 1.6.1. Seja X um espaço de Banach continuamente contido em $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Dizemos que $X^* \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ é o dual de Cauchy de X se existe uma bijeção $\Upsilon : X^* \rightarrow X'$, onde X' é o dual topológico de X , tal que

$$\Upsilon(g)(f) = \langle f, g \rangle := \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} f(r\zeta) \overline{g(r\zeta)} dm(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} r^{2n}, \quad \forall f \in X, g \in X^*, \quad (1.17)$$

onde m denota a medida de Lebesgue normalizada no círculo e $(a_n), (b_n)$ são, respectivamente, os coeficientes de Taylor de f e g .

Vale ressaltar que o mapa Υ é apenas uma bijeção entre conjuntos, não impondo nenhuma restrição na topologia de X^* , que pode até não ser um espaço topológico. Em alguns casos, como por exemplo o espaço $\mathcal{A}_0^2$, o espaço X é Hilbert, portanto é canonicamente identificado ao seu dual, mas não satisfaz a relação (1.17). Assim, o seu dual de Cauchy, que para esse exemplo é $\mathcal{D}$ (veja (24, seção 4.1)), não coincide com a identificação canônica do dual topológico $\mathcal{A}_0^2$.

Não é claro da definição sob quais hipóteses X possui um dual de Cauchy e, se esse existir, como encontrá-lo. De fato, não encontramos na literatura um método geral

para responder essas perguntas. Na seção 1 de (26), é mostrado que se X é um espaço de Banach e $\text{Hol}(\mathbb{D}) \subset X$ é denso em X , então o dual de Cauchy X^* existe e pode ser calculado com o mapa $U : X' \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ dado por

$$U\varphi(\lambda) = \overline{\varphi\left(\frac{1}{1-\bar{\lambda}z}\right)},$$

onde X' é o dual topológico de X (cf. (25, p. 616)). Nesse caso, U é injetivo e $\|U\varphi\|_{UX'} = \|\varphi\|_{X'}$ define uma norma em UX' . O espaço $X^* = UX'$ com essa norma é Banach e é um dual de Cauchy de X .

Enunciamos a seguir, alguns exemplos de espaços de Banach contidos em $\text{Hol}(\mathbb{D})$ e seus duais de Cauchy, que serão bastante usados na seção 3.1.

Teorema 1.6.2. *Sejam $1 < p < \infty$ e q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Então, $(H^p)^* = H^q$.*

Para uma demonstração desse fato, indicamos (13, Teorema 7.3). É interessante observar que, nesse exemplo, o mapa Υ não é uma isometria (veja (13, p.113)).

Para o próximo resultado, é necessário definir outro espaço de Banach continuamente contido em $\text{Hol}(\mathbb{D})$.

Definição 1.6.3. O espaço das funções analíticas de oscilação média limitada, denotado por BMOA, é o conjunto

$$\text{BMOA} = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup \frac{1}{m(I)} \int_I \left| f^*(\zeta) - \frac{1}{m(I)} \int_I f^*(s) dm(s) \right| dm(\zeta) < \infty \right\},$$

onde m é a medida de Lebesgue normalizada em $\mathbb{T}$ e o supremo é tomado sobre os arcos $I \subset \mathbb{T}$. Munimos esse espaço com a norma

$$\|f\|_{\text{BMOA}} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} \left| f^*(\zeta) - \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \xi|^2} f^*(\xi) dm(\xi) \right| dm(\zeta).$$

Teorema 1.6.4. *Temos que $(H^1)^* = \text{BMOA}$.*

Esse resultado é um teorema clássico de Fefferman (27).

Em (24, seção 4.1), é mencionado que se $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência com $w_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} (w_n)^{1/n} = 1$, então $(H^2(w))^* = H^2(w^*)$, onde $w^* = (1/w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e

$$H^2(w) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} w_n |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Por exemplo, um resultado análogo à Proposição 1.2.2 mostra que $\mathcal{A}_0^2 = H^2((n+1)^{-1})$ e a Proposição 1.3.2 mostra que $\mathcal{D} = H^2(n+1)$, logo $(\mathcal{A}_0^2)^* = \mathcal{D}$, como comentamos anteriormente.

Apesar de a definição de dual de Cauchy pedir que X seja um espaço de Banach, existem exemplos de espaços vetoriais topológicos $X \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$, que não são espaços de Banach, mas para os quais existem conjuntos $X^* \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ tais que a função Υ dada em (1.17) é uma bijeção. O resultado a seguir apresenta um desses exemplos.

Teorema 1.6.5. *Sejam $1/2 < p < 1$ e $\alpha = 1/p - 1$. Então,*

$$(H^p)^* = \Lambda_\alpha := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}) : \sup_{0 \leq t < s \leq 2\pi} \frac{|f(e^{it}) - f(e^{is})|}{|e^{it} - e^{is}|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Para uma demonstração desse resultado, indicamos (13, Teorema 7.5).

1.7 Biortogonalidade, minimalidade e completude

A principal pergunta estudada no artigo (1) e na pré-publicação (2) diz respeito à completude de uma sequência em H^2 . Uma das diversas abordagens para se estudar isso faz uso das chamadas sequências biortogonais. Nessa seção, definiremos esse conceito e apresentaremos a sua relação com a questão de completude, sempre no contexto de espaços de Hilbert.

Definição 1.7.1. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $(f_n), (g_n)$ duas sequências de elementos de $\mathcal{H}$. Dizemos que (f_n) e (g_n) são biortogonais, (f_n) é biortogonal a (g_n) ou vice-versa, se

$$\langle f_n, g_m \rangle = \delta_{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

onde δ_{nm} denota o delta de Kronecker.

A existência e unicidade de uma sequência biortogonal está relacionada a minimalidade e completude das sequências. Vamos relembrar esses conceitos.

Definição 1.7.2. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $X \subset \mathcal{H}$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{H}$. Dizemos que X é completo (ou total) em $\mathcal{H}$ se

$$\overline{\text{span}} X = \mathcal{H}.$$

Dizemos que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é minimal se

$$f_m \notin \overline{\text{span}}\{f_n : n \neq m\}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

O resultado a seguir relaciona esses conceitos e motiva o estudo feito na seção 3.2.

Proposição 1.7.3. *Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{H}$. Então,*

1. *Existe uma sequência biortogonal a (f_n) se, e somente se, (f_n) é minimal.*

2. Se existe uma sequência biortogonal a (f_n) , essa sequência é única se, e somente se, (f_n) é completa.

Demonstração. Seja (g_n) uma sequência biortogonal a (f_n) e suponha por absurdo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_m \in \overline{\text{span}}\{f_n : n \neq m\}$. Então existe uma sequência $h_k \rightarrow f_m$ de termos em $\text{span}\{f_n : n \neq m\}$. Logo,

$$1 = \langle f_m, g_m \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle h_k, g_m \rangle = 0,$$

uma contradição. Assim, a existência de uma sequência biortogonal implica minimalidade. Reciprocamente, suponha que (f_n) é minimal. Seja P_m a projeção ortogonal sobre $\overline{\text{span}}\{f_n : n \neq m\}$. Pela minimalidade, $f_m \neq P_m f_m$ e assim podemos definir a sequência

$$g_m = \frac{f_m - P_m f_m}{\|f_m - P_m f_m\|^2}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

que é biortogonal a (f_n) . De fato, $g_m \in (\overline{\text{span}}\{f_n : n \neq m\})^\perp$, logo

$$\langle f_m, g_m \rangle = \langle f_m - P_m f_m, g_m \rangle = \frac{\langle f_m - P_m f_m, f_m - P_m f_m \rangle}{\|f_m - P_m f_m\|^2} = 1.$$

Claramente $\langle f_n, g_m \rangle = 0$ se $n \neq m$, como queríamos.

Para a segunda parte da proposição, seja (g_n) uma sequência biortogonal a (f_n) . Se (f_n) não é completa, existe $h \in \{f_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp \setminus \{0\}$, portanto $(g_n + h)$ é uma sequência biortogonal a (f_n) e diferente de (g_n) . Reciprocamente, se existe uma sequência biortogonal (h_n) diferente de (g_n) , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g_m \neq h_m$. Assim,

$$\langle f_n, g_m - h_m \rangle = \delta_{nm} - \delta_{nm} = 0,$$

e $g_m - h_m \in \{f_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp \setminus \{0\}$, logo (f_n) não é completa. $\square$

É importante ressaltar que a condição 2 da proposição não é simétrica! Assim, é possível que (f_n) seja completa e biortogonal apenas a (g_n) e (g_n) não seja completa. De fato, o exemplo a seguir, retirado de (28), mostra que, dado qualquer subespaço fechado $K \subset \mathcal{H}$ de dimensão infinita, existem sequências biortogonais (f_n) e (g_n) tais que (f_n) é completa e $\overline{\text{span}}\{g_n : n \in \mathbb{N}\} = K$.

Seja $K \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado de dimensão infinita e $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal de K . Seja β uma base ortonormal de $K^\perp$. Seja (y_n) uma sequência em que cada elemento de β aparece infinitas vezes. Se β for finita, é fácil construir a sequência (y_n) . Se β for infinito, $\beta = \{b_1, b_2, \dots\}$, basta definir (y_n) por

$$b_1, b_1, b_2, b_1, b_2, b_3, b_1, b_2, b_3, b_4, b_1, \dots$$

Assim, $(g_n) = (e_n + y_n)$ é biortogonal a (e_n) e completa em $\mathcal{H}$, pois se $f \perp \{e_n + y_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\langle f, b \rangle = C \neq 0$ para algum $b \in \beta$, então $\langle f, e_n \rangle \neq 0$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$, contradizendo o fato de

$$\sum_{m=0}^{\infty} |C|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Se $\langle f, e_m \rangle \neq 0$ para algum $m \in \mathbb{N}$, $\langle f, y_m \rangle \neq 0$ e caímos no caso anterior. Logo $f \perp K$ e $f \perp K^\perp$ e assim $f = 0$. $\square$

Apesar disso, em alguns casos, essa propriedade é simétrica, como em (28, Teorema) e no caso de bases de Schauder em um espaço de Hilbert (veja, por exemplo, (29, Teorema 3.3.2)).

1.8 Noções de Teoria Analítica dos Números

Nesta seção, iremos primeiramente introduzir os conceitos de funções aritméticas e o produto de Dirichlet, além de apresentar alguns exemplos de tais funções, como a função de Möbius, que será importante na seção 3.2. Em seguida, discutimos sobre funções multiplicativas e provamos uma estimativa que será necessária na seção 2.3. Por fim, apresentamos brevemente algumas fórmulas de soma, com ênfase à fórmula de soma de Euler, usada na seção 2.1.

1.8.1 Funções Aritméticas e o produto de Dirichlet

Um objeto de estudo bastante importante na teoria analítica dos números são as seqüências. Nesse contexto, é comum as chamarmos de funções aritméticas.

Definição 1.8.1. Chamamos uma função $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ de uma função aritmética.

Aproveitamos a oportunidade para definir algumas importantes funções aritméticas.

Exemplo 1.8.2. (i) Seja $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ a função constante igual a 1.

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $I_n : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por $I_n(m) = \delta_{nm}$. Em particular, denotamos I_1 por I .

(iii) Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, seja $\sigma_\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha.$$

Em particular, $\sigma_0(n)$ nos dá o número de divisores de n .

(iv) Seja $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{se } n = p_1 \cdots p_k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Aqui, $p_1, \dots, p_k$ denotam primos distintos. Essa função é conhecida como função de Möbius.

É claro que o conjunto das funções aritméticas é um espaço vetorial complexo com as somas e produto por escalar usuais. Definimos a seguir um produto para esse espaço, fazendo dele uma álgebra.

Definição 1.8.3. Sejam f, g funções aritméticas. O seu produto de Dirichlet $f * g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ é a função

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Esse produto surge naturalmente no estudo de séries de Dirichlet. De fato, uma computação direta nos mostra que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f * g(n)n^{-s}$$

na região onde as duas séries do lado esquerdo convergem absolutamente (veja (30, Teorema 11.5)).

Ao dizermos que esse produto faz do espaço das funções aritméticas uma álgebra, estamos assumindo que $*$ é associativo. De fato, a associatividade e a comutatividade seguem da simples observação (veja (30, Teorema 2.6))

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{a \cdot b = n} f(a)g(b),$$

onde a última soma é sobre todos os pares $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ que satisfazem $ab = n$. A comutatividade é imediata da igualdade acima. Já a associatividade segue de

$$\begin{aligned} f * (g * h)(n) &= \sum_{a \cdot d = n} f(a)(g * h)(d) = \sum_{a \cdot d = n} f(a) \left(\sum_{b \cdot c = d} g(b)h(c) \right) \\ &= \sum_{a \cdot b \cdot c = n} f(a)g(b)h(c) = (f * g) * h(n), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue fazendo a conta análoga para $(f * g) * h$.

Além disso, I é uma unidade para $*$,

$$f * I(n) = \sum_{d|n} f(d)I\left(\frac{n}{d}\right) = f(n),$$

i.e., o conjunto das funções aritméticas é uma álgebra com unidade.

Uma pergunta interessante e relevante para seção 3.2 é se existe uma caracterização dos elementos invertível dessa álgebra e uma forma de calcular as inversas. O resultado a seguir responde essas questões.

Proposição 1.8.4. *Se f é uma função aritmética e $f(1) \neq 0$, então existe uma única função aritmética f^{-1} tal que $f * f^{-1} = I$. Essa função pode ser calculada recursivamente pelas fórmulas*

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d), \quad \text{para } n > 1.$$

A demonstração dessa proposição é bastante direta e está em (30, Teorema 2.8). Um resultado clássico conhecido como fórmula de inversão de Möbius segue do fato de que $u^{-1} = \mu$, que mostramos a seguir, com a demonstração de (30, Teorema 2.1).

Proposição 1.8.5. *Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos*

$$\mu * u(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1n} = I(n).$$

Demonstração. O resultado é claro quando $n = 1$. Se $n > 1$, seja $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ a sua fatoração em números primos. Assim, os divisores $d|n$ são todos da forma $d = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$, onde $0 \leq b_j \leq a_j$. Pela definição de μ , $\mu(d) \neq 0$ somente se $b_j \in \{0, 1\}$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= 1 + \sum_{j=1}^k \mu(p_j) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mu(p_i p_j) + \cdots + \mu(p_1 \cdots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = (1 - 1)^k = 0. \end{aligned}$$

□

Disso segue uma das formas mais comuns da fórmula de inversão de Möbius.

Corolário 1.8.6. *Sejam f uma função aritmética e g a função dada por*

$$g(n) = (f * u)(n) = \sum_{ab=n} f(a).$$

Então,

$$f(n) = (g * \mu)(n) = \sum_{ab=n} g(a)\mu(b).$$

Demonstração. É imediato das igualdades

$$g * \mu = f * u * \mu = f * I = f.$$

□

Vamos também comentar uma versão da fórmula de inversão de Möbius para séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) f(nx),$$

onde α é uma função aritmética e f é uma função definida em um espaço X em que $nx \in X$ faça sentido. Vamos elaborar melhor isso. Essa exposição é baseada em (31). Considere $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ o semigrupo multiplicativo dos inteiros positivos. Dado um conjunto X , dizemos que $\varphi : \mathbb{N}^* \times X \rightarrow X$ é uma ação do semigrupo $\mathbb{N}^*$ sobre X se:

$$\varphi(1, x) = x, \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad \varphi(n, \varphi(m, x)) = \varphi(nm, x), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*, x \in X.$$

Alguns exemplos de ações do semigrupo $\mathbb{N}^*$ são apresentados a seguir.

Exemplo 1.8.7. (i) O semigrupo $\mathbb{N}^*$ age sobre o conjunto dos reais positivos $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}$ com a multiplicação. Ou seja, $\varphi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dada por $\varphi(n, x) = nx$ é uma ação.

(ii) O semigrupo $\mathbb{N}^*$ age sobre o disco unitário $\mathbb{D}$ com a potenciação. Ou seja, a função $\varphi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $\varphi(n, z) = z^n$ é uma ação.

Dada uma função aritmética positiva w , definimos $L_\varphi(X, w)$ como o conjunto das funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) |f(\varphi(n, x))| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

É fácil ver que se α é uma função aritmética com $|\alpha(n)| \leq w(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $f \in L_\varphi(X, w)$, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) f(\varphi(n, x))$$

converge absolutamente para cada $x \in X$. Denotaremos a série acima por $\alpha \odot f$. Nesse contexto, a fórmula de inversão de Möbius para séries é um caso particular do Teorema a seguir, adaptado de (31, Teorema 1).

Teorema 1.8.8. *Sejam α, β funções aritméticas e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Se $f \in L_\varphi(X, |\beta|) \cap L_\varphi(X, |\alpha| * |\beta|)$, então $f \in L_\varphi(X, |\alpha * \beta|)$, $\beta \odot f \in L_\varphi(X, |\alpha|)$ e*

$$\alpha \odot (\beta \odot f) = (\alpha * \beta) \odot f.$$

Demonstração. Note que

$$|\alpha * \beta|(n) = \left| \sum_{ab=n} \alpha(a) \beta(b) \right| \leq \sum_{ab=n} |\alpha(a)| |\beta(b)| = |\alpha| * |\beta|(n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Em particular, $L_\varphi(X, |\alpha| * |\beta|) \subset L_\varphi(X, |\alpha * \beta|)$. Além disso, como $f \in L_\varphi(X, |\beta|)$, temos que $g = \beta \odot f$ está definido e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n)| |g(\varphi(n, x))| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha(n)| |\beta(m)| |f(\varphi(m, \varphi(n, x)))| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha(n)| |\beta(m)| |f(\varphi(nm, x))| \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{nm=k} |\alpha(n)| |\beta(m)| \right) |f(\varphi(k, x))| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha| * |\beta|)(k) |f(\varphi(k, x))| < \infty, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Aqui podemos reordenar a série em $(\dagger)$ pois os termos são todos positivos. Logo, $\beta \odot f \in L_\varphi(X, |\alpha|)$. Assim, $\alpha \odot (\beta \odot f)$ está definida e

$$\begin{aligned} (\alpha \odot (\beta \odot f))(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) (\beta \odot f)(\varphi(n, x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n) \beta(m) f(\varphi(m, \varphi(n, x))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha(n) \beta(m) f(\varphi(nm, x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{nm=k} \alpha(n) \beta(m) \right) f(\varphi(k, x)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha * \beta)(k) f(\varphi(k, x)) = ((\alpha * \beta) \odot f)(x), \quad \forall x \in X, \end{aligned}$$

onde podemos reordenar a soma pois $f \in L_\varphi(X, |\alpha| * |\beta|)$ implica que a soma dupla acima é absolutamente convergente. $\square$

Podemos agora mostrar essa versão da fórmula de inversão de Möbius para séries.

Corolário 1.8.9. *Seja α uma função aritmética invertível e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Se $f \in L_\varphi(X, |\alpha|) \cap L_\varphi(X, |\alpha^{-1}| * |\alpha|)$, então $g = \alpha \odot f \in L_\varphi(X, |\alpha^{-1}|)$ e $f = \alpha^{-1} \odot g$. Em particular, se $f \in L_\varphi(X, u) \cap L_\varphi(X, u * |\mu|)$ e $g = u \odot f$, então $f = \mu \odot g$.*

Como aplicação desse resultado, podemos expressar a função característica do intervalo $(0, 1]$ como uma série de dilatações da função parte inteira.

Exemplo 1.8.10. Seja $X = \mathbb{R}_{>0}$ e considere a ação $\varphi(n, x) = nx$, como no Exemplo 1.8.7(i). Se $[x]$ denota a parte inteira de x e $\chi_{(0,1]}$ denota a função característica do intervalo $(0, 1]$, é fácil ver que

$$\left[\frac{1}{x} \right] = \sum_{n \leq 1/x} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{(0,1]}(nx), \quad \forall x \in (0, 1].$$

Como toda soma da forma $\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \chi_{(0,1]}(nx)$ é uma soma finita (logo convergente), $\chi_{(0,1]} \in L_\varphi(\mathbb{R}_{>0}, u) \cap L_\varphi(\mathbb{R}_{>0}, u * |\mu|)$. Além disso, a equação anterior nos mostra que $g(x) :=$

$\left[\frac{1}{x}\right] = u \odot \chi_{(0,1]}(x)$. Logo, segue do Corolário 1.8.9 que $\chi_{(0,1]} = \mu \odot g$, ou seja,

$$\chi_{(0,1]}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left[\frac{1}{kx}\right], \quad \forall x \in (0, 1].$$

O exemplo anterior foi inspirado na seção 2.2 de (32). Usaremos esse exemplo para motivar a escolha de uma importante série na seção 2.3.

1.8.2 Estimativa do crescimento de $\sigma_0(n)$

Vamos agora andar em direção a mostrar uma estimativa sobre o crescimento de σ_0 , a função que conta o número de divisores (veja Exemplo 1.8.2(iii)). Para tanto, discutiremos brevemente as funções multiplicativas.

Definição 1.8.11. Seja $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ uma função não nula. Dizemos que f é multiplicativa se $f(nm) = f(n)f(m)$ sempre que n e m são coprimos, i.e., seu m.d.c. é $(n, m) = 1$.

Se $f(nm) = f(n)f(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$, dizemos que f é completamente multiplicativa.

Um exemplo simples de tais funções completamente multiplicativas são as $f_\alpha(n) = n^\alpha$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$. Note que toda função completamente multiplicativa é também uma função multiplicativa. A próxima proposição nos mostra uma maneira de construir funções multiplicativas.

Proposição 1.8.12. Se f, g são funções multiplicativas, então $f * g$ também é multiplicativa.

Demonstração. Denotemos por D_n o conjunto dos divisores de n . O resultado segue da seguinte afirmação.

Afirmação. Se $(n, m) = 1$, o mapa $(a, b) \in D_n \times D_m \mapsto c = ab \in D_{nm}$ é uma bijeção.

Prova da Afirmação. É claro que o mapa está bem-definido, i.e., que $ab|nm$ se $a|n$ e $b|m$. Note também que, como $(n, m) = 1$, se $a|n$ e $b|m$, então $(a, b) = 1$. Com isso, podemos mostrar que o mapa é injetivo. De fato, se $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in D_n \times D_m$ são tais que $a_1 b_1 = a_2 b_2$, em particular $a_1 | a_2 b_2$. Pela observação anterior, $(a_1, b_2) = 1$, logo $a_1 | a_2$. Por simetria, $a_2 | a_1$ e assim $a_1 = a_2$. Logo $b_1 = b_2$ e o mapa é injetivo.

Para a sobrejetividade, considere $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ e $m = q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}$ as suas fatorações em números primos. Como $(n, m) = 1$, $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ são todos distintos. Se $c|nm = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}$, então $c = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k} q_1^{\delta_1} \cdots q_l^{\delta_l}$, com $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i$ e $0 \leq \delta_j \leq \beta_j$. Assim, é suficiente tomar $a = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$ e $b = q_1^{\delta_1} \cdots q_l^{\delta_l}$ para que $(a, b) \in D_n \times D_m$ e $c = ab$. #

Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ coprimos. Então,

$$f * g(nm) = \sum_{c|nm} f(c)g\left(\frac{nm}{c}\right) = \sum_{\substack{a|n \\ b|m}} f(ab)g\left(\frac{nm}{ab}\right).$$

Como $(a, b) = 1 = (n/a, m/b)$ e f, g são multiplicativas, temos que

$$\begin{aligned} f * g(nm) &= \sum_{a|n} \sum_{b|m} f(a)f(b)g\left(\frac{n}{a}\right)g\left(\frac{m}{b}\right) \\ &= \left(\sum_{a|n} f(a)g\left(\frac{n}{a}\right)\right) \left(\sum_{b|m} f(b)g\left(\frac{m}{b}\right)\right) = f * g(n)f * g(m). \end{aligned}$$

□

O corolário a seguir apresenta uma família de funções multiplicativas.

Corolário 1.8.13. *Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, σ_α é multiplicativa.*

Demonstração. Note que,

$$f_\alpha * u(n) = \sum_{d|n} d^\alpha = \sigma_\alpha(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

onde $f_\alpha(n) = n^\alpha$ e $u(n) = 1$ como no Exemplo 1.8.2(i). □

Para mostrar a estimativa de crescimento de σ_0 , precisamos de um último lema, retirado de (30, Exercício 13.12). Lembre que $\pi(n)$ é a quantidade de números primos menores ou iguais a n .

Lema 1.8.14. *Seja f uma função multiplicativa que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$\begin{aligned} &\text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } N(\varepsilon) \text{ tal que se } p \text{ é primo, } m \in \mathbb{N}^* \text{ e } p^m > N(\varepsilon), \\ &\text{então } |f(p^m)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Então, $f(n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Por hipótese, existe $B > 0$ tal que $|f(p^m)| < 1$ para toda potência de primo $p^m > B$. Em particular, como existem apenas uma quantidade finita de potências de primo menores ou iguais a B , existe $A > 0$ tal que $|f(p^m)| < A$ para todo primo p e natural m .

Dado $\varepsilon > 0$, seja N tal que $|f(p^m)| < \varepsilon A^{-B}$ para toda potência de primo $p^m > N$, onde A e B são as constantes definidas no parágrafo anterior. Afirimo que se $n > N^N$, então $|f(n)| < \varepsilon$. De fato, seja $n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ a fatoração de n em números primos. Existe algum $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $p_i^{m_i} > N$, caso contrário teríamos $n \leq N^k \leq N^N$, pois nesse caso todo $p_i \leq N$ e existem $\pi(N) \leq N$ números primos menores ou iguais a N ,

logo $k \leq N$. Sem perda de generalidade, suponha que $p_1^{m_1} > N$ e $l \in \mathbb{N}^*$ é tal que $1 \leq l \leq k$ e $p_i^{m_i} > B$ para todo $l < i \leq k$. Note que se $p_i^{m_i} \leq B$, então $p_i \leq B$, assim existem no máximo $\pi(B) \leq B$ primos dessa forma, i.e., $|\{p_2, \dots, p_l\}| = l - 1 \leq B$. Portanto,

$$|f(n)| = |f(p_1^{m_1})| \cdots |f(p_k^{m_k})| < \frac{\varepsilon}{A^B} A^{l-1} 1^{k-l} \leq \varepsilon.$$

□

Com isso, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 1.8.15. *Seja $\alpha \geq 0$. Então, para todo $\delta > 0$, temos que*

$$\sigma_\alpha(n) = o(n^{\alpha+\delta}) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Em particular, $\sigma_0(n) = o(n^\delta)$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $\delta > 0$.

Demonstração. Como $n \mapsto n^{-\alpha-\delta} \sigma_\alpha(n)$ é multiplicativo, pelo lema anterior basta verificar que $\frac{\sigma_\alpha(p^m)}{p^{m(\alpha+\delta)}}$ satisfaz a propriedade (1.18). Faremos isso para $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$ separadamente. Suponha que $\alpha > 0$. Então

$$\sigma_\alpha(p^m) = \sum_{k=0}^m p^{k\alpha} = \frac{p^{\alpha(m+1)} - 1}{p^\alpha - 1}.$$

Logo,

$$\frac{\sigma_\alpha(p^m)}{p^{m(\alpha+\delta)}} = \frac{p^{\alpha m + \alpha - m\alpha - m\delta} - p^{-m\delta - m\alpha}}{p^\alpha - 1} = p^{-m\delta} \left(\frac{p^\alpha - p^{-m\alpha}}{p^\alpha - 1} \right).$$

Note que

$$0 < \frac{p^\alpha - p^{-m\alpha}}{p^\alpha - 1} \leq \frac{p^\alpha}{p^\alpha - 1} = 1 + \frac{1}{p^\alpha - 1} \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha - 1} =: C.$$

Assim,

$$\left| \frac{\sigma_\alpha(p^m)}{p^{m(\alpha+\delta)}} \right| \leq C(p^m)^{-\delta}$$

satisfaz (1.18) para qualquer $\delta > 0$.

Considere agora $\alpha = 0$. Nesse caso,

$$\sigma_0(p^m) = \sum_{k=0}^m (p^k)^0 = m + 1.$$

Portanto,

$$\frac{\sigma_0(p^m)}{p^{m\delta}} = \frac{m + 1}{p^{m\delta}} = \frac{\frac{\log p^m}{\log p} + 1}{p^{m\delta}} = \frac{1}{\log p} \frac{\log p^m}{(p^m)^\delta} + \frac{1}{(p^m)^\delta}.$$

Observe que o lado direito da igualdade acima satisfaz a propriedade (1.18), pois $(\log p)^{-1} \leq (\log 2)^{-1}$, $\log x/x^\delta \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ e $x^{-\delta} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$. Logo $\sigma_0(n) = o(n^\delta)$ quando $n \rightarrow \infty$ para qualquer $\delta > 0$. □

Iremos usar esse resultado na seção 2.3 junto com outras duas relações, que enunciamos a seguir para futura referência.

Teorema 1.8.16. *Seja $\pi(x) = |\{p \leq x : p \text{ primo}\}|$. São equivalentes:*

1. $\pi(x) \sim x/\log x$, i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

2.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0, \quad (1.19)$$

3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k) \log k}{k} = -1. \quad (1.20)$$

O item 1 é conhecido como Teorema dos Números Primos (TNP) e foi provado originalmente por Hadamard (5) e de la Vallée Poussin (6) em 1896. Para uma exposição sobre o TNP, veja (33). Em (34), Landau mostrou que 1 implica 2 e também que 3 implica 2. Que 2 implica 1 pode ser visto em (30, Teorema 4.16). Em (35), Landau prova o item 3 a partir de 1.

1.8.3 Fórmulas de soma

É comum no estudo de teoria dos números estarmos interessados no comportamento assintótico de somas do tipo

$$\sum_{k=1}^n f(k)$$

quando $n \rightarrow \infty$, para alguma função aritmética f . Nesse contexto, é comum denotarmos por

$$\sum_{k \leq x} f(k) = \sum_{k=1}^{[x]} f(k)$$

a soma sobre os números naturais menores ou iguais a x . Aqui, $[x]$ denota a parte inteira de x , i.e., o maior inteiro $\leq x$. Quando $0 < x < 1$, a soma é vazia e convencionamos que vale 0.

Para avaliar esse tipo de soma, existem alguns métodos que chamamos de fórmulas de soma. A seguir apresentamos dois desses métodos, cuja exposição foi inspirada nas notas de aula (36).

Teorema 1.8.17 (Fórmula de soma de Abel). *Sejam $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função absolutamente contínua sobre compactos e g uma função aritmética. Denotemos por*

$G(x) = \sum_{n \leq x} g(n)$. Então,

$$\sum_{n \leq x} f(n)g(n) = G(x)f(x) - \int_1^x G(t)f'(t)dt, \quad \forall x \geq 1.$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f(n) = f(x) - (f(x) - f(n)) = f(x) - \int_n^x f'(t)dt.$$

Logo,

$$\sum_{n \leq x} f(n)g(n) = \sum_{n \leq x} \left(f(x) - \int_n^x f'(t)dt \right) g(n) = f(x)G(x) - \sum_{n \leq x} \int_n^x g(n)f'(t)dt.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \int_n^x g(n)f'(t)dt &= \sum_{n \leq x} \int_1^x \chi_{[n,x]}(t)g(n)f'(t)dt = \int_1^x \sum_{n \leq x} \chi_{[n,x]}(t)g(n)f'(t)dt \\ &= \int_1^x f'(t) \sum_{n \leq t} g(n)dt = \int_1^x G(t)f'(t)dt, \end{aligned}$$

onde $\chi_{[n,x]}$ denota a função característica do intervalo $[n, x]$. $\square$

Observação 1.3. A hipótese de f ser absolutamente contínua é necessária para o teorema fundamental do cálculo. Normalmente consideramos funções f de classe C^1 , o que implica que também é absolutamente contínua sobre compactos.

A segunda fórmula que apresentaremos é um caso particular da anterior.

Corolário 1.8.18 (Fórmula de soma de Euler). *Seja $f : [1, \infty)$ uma função absolutamente contínua sobre compactos. Então,*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \int_1^x f(t)dt + f(1) - \{x\}f(x) + \int_1^x \{t\}f'(t)dt, \quad \forall x \geq 1,$$

onde $\{x\} = x - [x]$ denota a parte fracionária de x .

Demonstração. Aplicando o Teorema anterior para f e $g = u$, onde u é a função constante igual a 1, temos $G(x) = [x]$ e

$$\sum_{n \leq x} f(n) = [x]f(x) - \int_1^x [t]f'(t)dt. \quad (1.21)$$

Como $[t] = t - \{t\}$, temos que

$$\int_1^x [t]f'(t)dt = \int_1^x tf'(t)dt - \int_1^x \{t\}f'(t)dt = xf(x) - f(1) - \int_1^x f(t)dt - \int_1^x \{t\}f'(t)dt, \quad (1.22)$$

onde usamos integração por partes na última igualdade (pois f e t são absolutamente contínuas em $[1, x]$). O resultado segue ao substituírmos (1.22) em (1.21). $\square$

Por fim, aplicamos a fórmula de soma de Euler para provar uma estimativa que usaremos futuramente. Antes, contudo, é necessário definir a constante de Euler-Mascheroni.

Definição 1.8.19. A constante de Euler-Mascheroni é o limite

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log n \right).$$

Não é imediato que esse limite exista. Uma consequência do Corolário a seguir é mostrar que essa constante está bem-definida.

Corolário 1.8.20. *Seja $H(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$. Temos que*

$$H(x) = \log x + \gamma - \frac{\{x\}}{x} + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni e $O(1/x)$ para $x \rightarrow \infty$.

Demonstração. Aplicando a fórmula de soma de Euler para a função $f(x) = 1/x$, que é analítica, logo absolutamente contínua em compactos, em $[1, x]$, obtemos

$$H(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t} dt + 1 - \frac{\{x\}}{x} + \int_1^x -\frac{\{t\}}{t^2} dt = \log x - \frac{\{x\}}{x} + 1 - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt. \quad (1.23)$$

Observe que

$$\int_1^\infty \left| \frac{\{t\}}{t^2} \right| dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = 1 < \infty,$$

logo $\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt$ existe e é finita. Seja

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt,$$

então,

$$1 - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt = \gamma + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt, \quad \forall x \geq 1.$$

Com isso, podemos reescrever a equação (1.23) como

$$H(x) = \log x + \gamma - \frac{\{x\}}{x} + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt,$$

como queríamos. Note que

$$\left| \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt \right| = \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$-\frac{\{x\}}{x} + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

o que mostra a segunda igualdade do enunciado. Por fim, observe que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n = \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \gamma, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

□

1.9 A função ζ e a hipótese de Riemann

Nessa dissertação estudamos diversos aspectos de um critério em H^2 para a hipótese de Riemann (HR). Por conta disso, temos essa seção para definir a função ζ de Riemann, apresentar algumas de suas propriedades, motivar e enunciar a HR. No fim, apresentamos dois critérios em $L^2(0, 1)$ para HR, o primeiro provado por Nyman (8) e Beurling (9) na década de 1950 e o segundo por Báez-Duarte (10) em 2003. Essa seção segue as exposições feitas em (15, Capítulo 6) e (37). Indicamos a dissertação (38) para uma exposição mais completa.

Definição 1.9.1. Seja $s \in \mathbb{C}_1 = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$. A função $\zeta : \mathbb{C}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (1.24)$$

é chamada de função zeta de Riemann ou simplesmente de função ζ de Riemann.

A definição acima só faz sentido se soubermos que a série dada em (1.24) converge para todo $s \in \mathbb{C}_1$.

Proposição 1.9.2. A série em (1.24) converge absolutamente e uniformemente em $\mathbb{C}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \alpha\}$ para todo $\alpha > 1$. Em particular, $\zeta \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C}_1)$.

Demonstração. Sejam $\alpha > 1$ e $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_\alpha$. Então,

$$|n^{-s}| = n^{-\sigma} \leq n^{-\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Como $\alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ é convergente, logo a série (1.24) converge absolutamente e uniformemente em $\mathbb{C}_\alpha$ pelo teste M de Weierstrass.

Observe que $s \mapsto n^{-s} = e^{-s \log n}$ é uma função inteira (holomorfa em $\mathbb{C}$) para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Além disso, para cada compacto $K \subset \mathbb{C}_1$, existe $\alpha = \alpha(K) > 1$ tal que $K \subset \mathbb{C}_\alpha$. Logo ζ é o limite uniforme sobre compactos em $\mathbb{C}_1$ de uma sequência de funções holomorfas, logo $\zeta \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C}_1)$. $\square$

Apesar de não ser claro da definição (1.24), a função ζ está bastante relacionada aos números primos. O resultado a seguir ilustra um dos aspectos dessa relação.

Teorema 1.9.3 (Produto infinito de Euler). Para todo $s \in \mathbb{C}_1$, temos

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (1.25)$$

Demonstração. Seja

$$P_m(s) = \prod_{\substack{p \leq m \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Note que, para todo primo p

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}.$$

Assim,

$$P_m(s) = \prod_{\substack{p \leq m \\ p \text{ primo}}} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks} = \sum_{n \in A_m} n^{-s},$$

onde A_m denota o conjunto dos inteiros positivos cujos fatores primos são menores ou iguais a m . Observe que podemos reordenar a soma acima pois os termos são todos positivos. Além disso, $\{1, \dots, m\} \subset A_m$, logo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - P_m(s) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-\sigma} \rightarrow 0, \quad \text{quando } m \rightarrow \infty,$$

para todo $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_1$, pela proposição anterior. Dessa forma,

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}_1.$$

□

Esse tipo de produto, chamado produto de Euler, pode ser generalizado para somas $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ de qualquer função multiplicativa f (veja (30, Teorema 11.6)). Uma interessante consequência desse resultado diz respeito aos zeros de ζ .

Corolário 1.9.4. *Para todo $s \in \mathbb{C}_1$, temos*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s}).$$

Em particular, ζ não se anula em $\mathbb{C}_1$.

Demonstração. Fixe $s = \sigma + it \in \mathbb{C}_1$. Como

$$\sum_{p \text{ primo}} |p^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} < \infty,$$

e $1 - p^{-s} \neq 0$ para todo p primo, um resultado clássico sobre produtos infinitos (veja (14, Teorema 15.4)) nos diz que

$$\prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s})$$

converge para um valor diferente de 0. Pelo Teorema anterior, temos que

$$\zeta(s) \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{\substack{p > m \\ p \text{ primo}}} (1 - p^{-s})^{-1} = 1,$$

pela convergência desse produtório para um número não nulo. Dessa maneira,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s}) \in \mathbb{C}.$$

Em particular, $\zeta(s) \neq 0$. □

Até agora só consideramos a função ζ no semi-plano $\mathbb{C}_1$. De fato, a definição e as igualdades provadas só estão bem definidas nessa região. Iremos agora provar alguns resultados que nos permitem estender a função ζ para região maiores do plano complexo.

Teorema 1.9.5. *Para todo $s \in \mathbb{C}_0$, vale a igualdade*

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx,$$

onde $\{x\}$ denota a parte fracionária de x . Com isso, ζ pode ser estendida analiticamente para $\mathbb{C}_0 \setminus \{1\}$, onde 1 é um polo simples de resíduo 1 pela fórmula

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - 1 - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx. \quad (1.26)$$

Esse teorema foi retirado de (15, Corolário 6.1.4). A função ζ pode ser estendida ainda mais, mas para isso precisamos usar uma outra função. Seja Γ a função dada em $\mathbb{C}_0$ por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

São resultados clássicos que Γ definida dessa forma é holomorfa em $\mathbb{C}_0$ e satisfaz a equação $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Com essa equação, Γ possui uma extensão analítica em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, com polos simples em $\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Além disso, a extensão analítica de Γ não se anula em nenhum ponto.

Teorema 1.9.6. *A função ζ possui uma extensão analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, com um polo simples em 1 de resíduo 1, sendo definida por (1.26) em $\mathbb{C}_0$ e satisfazendo a equação funcional*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\pi} (2\pi)^s \operatorname{sen} \left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Equivalentemente,

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s), \quad (1.27)$$

onde $\xi \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C})$ satisfaz a equação $\xi(s) = \xi(1-s)$ para todo $s \in \mathbb{C}$.

Para a demonstração desse resultado, indicamos (15, Teorema 6.1.5). A relação (1.27) nos dá algumas informações sobre os zeros de ζ . Por exemplo, como Γ tem polos simples em $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ e ξ é uma função inteira, $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (esses zeros são chamados de zeros triviais de ζ). Note que $\zeta(0) \neq 0$ e isso não é um problema pelo fator s

em $\xi(s)$ e, de maneira semelhante, o fator $s - 1$ cancela o polo de ζ em 1. Para os demais pontos, i.e. além dos zeros triviais, 0 e 1, o único fator de ξ que pode se anular é ζ . Assim, a relação $\xi(s) = \xi(1 - s)$ mostra que os zeros não-triviais de ζ são simétricos em relação a reta $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = 1/2\}$. Vimos que ζ não se anula em $\mathbb{C}_1$ e Hadamard (5) e de la Vallée Poussin (6) provaram que ζ também não se anula na reta $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = 1\}$. Assim, segue da simetria dos zeros que os zeros não-triviais de ζ estão na faixa $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(s) < 1\}$. Por fim, como $\zeta(s) \in \mathbb{R}$ sempre que $s \in \mathbb{R} \cap \mathbb{C}_1$ (por (1.26)), segue do Princípio da reflexão de Schwartz (veja Teorema B.2.6) que os zeros de ζ são simétricos em relação a reta real, i.e., a reta $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(s) = 0\}$ (veja (37)).

Esse interesse em torno dos zeros de ζ se justifica pois existe uma conexão entre esses zeros e a distribuição dos números primos. De fato, um passo fundamental para a demonstração do Teorema dos Números Primos é que $\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \neq 1$ com $\operatorname{Re}(s) = 1$. Além disso, regiões livres de zeros de ζ na faixa $\{0 < \operatorname{Re}(s) < 1\}$ nos fornecem melhores estimativas de erro para a aproximação dada pelo Teorema dos Números Primos (veja, por exemplo, (39, p. 67)), com o erro sendo mínimo se todos os zeros não-triviais de ζ pertencerem à reta $\{\operatorname{Re}(s) = 1/2\}$. Essa condição é a chamada Hipótese de Riemann.

Conjectura 1.1 (Hipótese de Riemann). *Todos os zeros não-trivias da função ζ de Riemann pertencem à reta $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = 1/2\}$.*

1.9.1 Critérios de Nyman, Beurling e Báez-Duarte

Vamos agora apresentar dois Teoremas que relacionam a HR com perguntas em $L^2((0, 1])$. Para isso, considere as funções $f_\lambda : (0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, para cada $0 \leq \lambda \leq 1$, dadas por

$$f_\lambda(x) = \left\{ \frac{\lambda}{x} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{x} \right\}, \quad \forall x \in (0, 1].$$

É claro que $f_\lambda \in L^2((0, 1])$ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Lembre que $\chi_{(0,1]}$ denota a função característica do intervalo $(0, 1]$.

Teorema 1.9.7 (Critério de Nyman e Beurling). *São equivalentes:*

1. a hipótese de Riemann,
2. $\chi_{(0,1]}$ pertence ao fecho em $L^2((0, 1])$ de $\operatorname{span}\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$,
3. o conjunto $\{f_\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ é total (completo) em $L^2((0, 1])$.

Enunciamos esse resultado da forma como é apresentado em (37, Teorema 5). Note que esse critério relaciona a HR a um problema sobre aproximação e completude de um conjunto em $L^2((0, 1])$. Em 2003, Báez-Duarte provou uma versão mais forte do critério de Báez-Duarte, reduzindo o conjunto de funções considerado. Considere as funções

$s_k = f_{1/k}$ para $k \in \mathbb{N}^*$ e $\mathcal{M}$ o subespaço fechado de $L^2((0, 1])$ das funções q.t.p. constantes nos subintervalos $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ para $n \in \mathbb{N}^*$, i.e.,

$$\mathcal{M} = \overline{\text{span}} \left\{ \chi_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]} : n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

onde o fecho é na topologia de $L^2((0, 1])$. Note que

$$s_k(x) = \left\{ \frac{1}{kx} \right\} - \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{kx} - \left[\frac{1}{kx} \right] - \frac{1}{k} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{x} \right] - \left[\frac{1}{kx} \right].$$

Assim, para todo $n, k \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, temos que $\left[\frac{1}{x} \right] = n$ e $\left[\frac{1}{kx} \right] = \left[\frac{n}{k} \right]$, logo

$$s_k(x) = \frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k} \right] = \left\{ \frac{n}{k} \right\}, \quad \forall x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \quad (1.28)$$

i.e., s_k é q.t.p. constante nos intervalos $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ e pertence a $L^2((0, 1])$ (pois, por exemplo, $|s_k(x)| \leq 1$, para todo $x \in (0, 1]$). Em particular, $s_k \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 1.9.8 (Critério de Báez-Duarte). *São equivalentes:*

1. a hipótese de Riemann,
2. $\chi_{(0,1]} \in \overline{\text{span}}\{s_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ e
3. $\{s_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ é um conjunto total (completo) em $\mathcal{M}$.

O Teorema que Báez-Duarte prova em (10) é, na verdade, apenas a implicação $1 \implies 2$. Enunciamos da maneira como é apresentado em (37, Teorema 7). A implicação $2 \implies 3$ é um resultado que mostra que o critério de Báez-Duarte é também sobre um problema de densidade, mas em um subespaço próprio de $L^2((0, 1])$. Vale ressaltar que a demonstração dessa parte do Teorema (veja (37, p.145)) faz uso do fato de $\text{span}\{s_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ ser invariante pelo semigrupo (discreto) de operadores de composição ponderados $\{D_m : m \in \mathbb{N}^*\}$ dados por

$$D_m f(x) = m^{1/2} \chi_{\left(0, \frac{1}{m}\right]}(x) f(mx).$$

Relembremos a definição de um semigrupo discreto de operadores em um espaço de Hilbert.

Definição 1.9.9. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\{T_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ uma família de operadores limitados de $\mathcal{H}$. Dizemos que $\{T_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é um semigrupo multiplicativo (discreto) de operadores em $\mathcal{H}$ se

1. $T_1 = I$ é a identidade, e
2. $T_n T_m = T_{nm}$, para todos $n, m \in \mathbb{N}^*$.

É fácil ver que $D_1 = I$, a identidade, e $D_m D_n = D_{mn}$, logo $\{D_m : m \in \mathbb{N}^*\}$ é de fato um semigrupo multiplicativo. Além disso, um cálculo bastante direto nos dá que $D_m s_k = s_{mk} - s_m/k$, demonstrando que $\text{span}\{s_k : k \geq 2\}$ é de fato invariante pelo semigrupo. Essas observações motivarão o estudo feito na seção 2.2.

Por fim, note que como $\mathcal{M}$ é um subespaço fechado de $L^2((0, 1])$, então é também um espaço de Hilbert. De fato, é fácil ver que o mapa $\ell_\omega^2 \rightarrow \mathcal{M}$ dado por

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]}]$$

é unitário, i.e., um isomorfismo isométrico (ℓ_ω^2 é o espaço da equação (1.12)). Logo, podemos transferir o critério de Báez-Duarte para ℓ_ω^2 usando esse mapa.

A conta feita em (1.28) nos mostra que as sequências $\left(\left\{\frac{n+1}{k}\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ são mapeadas em s_k . Em particular, a sequência $r_k(n) = k \left\{\frac{n+1}{k}\right\}$ é mapeada em ks_k . Além disso, claramente a sequência $\mathbf{1}$ constante igual a 1 é mapeada em $\chi_{(0,1]}$. Como, ademais, $\text{span}\{s_k : k \in \mathbb{N}^*\} = \text{span}\{ks_k : k \in \mathbb{N}^*\} = \text{span}\{ks_k : k \geq 2\}$, pois $s_1 \equiv 0$, temos a seguinte versão unitariamente equivalente do critério de Báez-Duarte.

Corolário 1.9.10 (Critério de Báez-Duarte em ℓ_ω^2). *São equivalentes:*

1. a hipótese de Riemann,
2. $\mathbf{1} \in \overline{\text{span}}\{r_k : k \geq 2\}$ e
3. o conjunto $\{r_k : k \geq 2\}$ é total (completo) em ℓ_ω^2 .

1.10 Comentários

A teoria dos espaços de Hardy, Bergman e Dirichlet, e das classes de Nevanlinna e Smirnov são bastante extensas e vão muito além do que foi apresentado nesse capítulo. Buscou-se traçar um caminho que apresentasse parte dessa grande teoria, especialmente os resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Para um estudo mais aprofundado de cada tema, indicamos as referências (11, 13, 14, 15, 18) para o estudo dos espaços H^p e as classes de Nevanlinna e Smirnov. Para o estudo dos espaços de Bergman e de Dirichlet, indicamos os livros (16) e (17), respectivamente.

Semelhantemente, a teoria em torno dos espaços de Branges-Rovnyak se desenvolve bastante além do que foi exposto na seção 1.5. Parte dessa teoria foi desenvolvida por Sarason, por exemplo nos artigos (20, 22). O livro de Fricain e Mashreghi (18) compila grande parte dessa teoria e consiste em uma excelente referência, tanto para pesquisa, quanto para aprendizado.

Finalizamos a seção 1.5 demonstrando que $\text{Dom}(T_{1/1-z}^*) = \mathcal{D}_1$. Essa prova na verdade se resumiu a mostrar que um espaço de de Branges-Rovnyak é igual, como conjunto, a $\mathcal{D}_1$. Como comentado, isso foi feito adaptando a Proposição 2 de (22). Nesse artigo, Sarason mostra uma família de espaços de de Branges-Rovnyak que são iguais, com igualdade de norma, aos espaços de Dirichlet locais $\mathcal{D}_\zeta$. Em (40), Costara e Ransford caracterizam quando ocorre igualdade $\mathcal{H}(b) = \mathcal{D}_\mu$, sem ter necessariamente igualdade de norma.

É interessante apontar que o estudo de funções aritméticas e o produto de Dirichlet está bastante relacionado ao estudo das séries de Dirichlet. Com respeito a teoria da função zeta de Riemann, de forma análoga ao que buscamos fazer com a teoria dos espaços de Hardy, tínhamos como objetivo apresentar parte da grande teoria, mas não se aprofundar em resultados que não serão utilizados. Indicamos a monografia de Titchmarsh (39) como referência para essa extensa teoria.

Capítulo 2

Critério de Báez-Duarte em H^2 : Densidade e Ortogonalidade

Esse capítulo é dedicado ao estudo da parte do artigo (1) na qual Noor introduz uma versão unitariamente equivalente do critério de Báez-Duarte (Teorema 1.9.8 e Corolário 1.9.10) em H^2 e investiga esse novo problema de densidade (equivalente a HR) em H^2 , resolvendo uma versão fraca dele.

Na seção 2.1 enunciamos e provamos a versão em H^2 do critério de Báez-Duarte (Teorema 2.1.3). Na seção 2.2 definimos um semigrupo de operadores de composição ponderados que permite generalizar o critério apresentado anteriormente (veja o Teorema 2.2.2). Na seção 2.3, usamos o semigrupo de operadores definido na seção anterior e algumas estimativas de teoria dos números (veja subseção 1.8.2) para resolver uma versão fraca do problema de densidade equivalente à HR (Corolário 2.3.2). Por fim, na seção 2.4, estudamos a consequência do Teorema 2.3.1 para o problema de ortogonalidade dual ao problema de densidade estudado. Essa observação sobre alguns problemas de densidade possuem problemas de ortogonalidade duais é estudada mais a fundo na seção 3.1.

2.1 Critério de Báez-Duarte em H^2

O objetivo dessa seção é demonstrar uma versão unitariamente equivalente em H^2 do Corolário 1.9.10. Para isso, precisamos de um mapa unitário entre ℓ_ω^2 e H^2 . Na seção 1.2, vimos que o mapa $\Psi : \ell_\omega^2 \rightarrow \mathcal{A}$ definido em (1.12) é unitário. Além disso, o Teorema 1.2.5 mostra que o mapa T definido por (1.13) quando restrito a H^2 é um isomorfismo isométrico de H^2 para $\mathcal{A}$. Assim, $\Phi = T|_{H^2}^{-1} \circ \Psi : \ell_\omega^2 \rightarrow H^2$ é unitário.

Dessa forma, basta calcularmos $\Phi \mathbf{1}$ e Φr_k para cada $k \geq 2$, onde r_k são as sequências do Corolário 1.9.10.

Seja $R = \Psi \mathbf{1}$. Então,

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Além disso, é fácil ver que

$$T(-1)(z) = \frac{(1-z)'}{z-1} = \frac{-1}{z-1} = R(z), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

logo $\Phi \mathbf{1} = T|_{H^2}^{-1} R = -1$, pois $-1 \in H^2$.

Analogamente, sejam $R_k = \Psi r_k$. Observe que a sequência $r_k(n) = k \{(n+1)/k\}$ é periódica de período k , sendo da forma $(1, 2, \dots, k-1, 0, 1, 2, \dots)$. Além disso, $r_k \in \ell_\omega^2$ implica que a série $\sum_{n=0}^{\infty} r_k(n) z^n$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{D}$, pois $(a_n) \in \ell_\omega^2 \implies a_n = O(n)$, logo $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \leq 1$, por exemplo. Assim, podemos reordenar a série que define R_k , agrupando os termos de mesmo coeficiente, e obter

$$\begin{aligned} R_k(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} k \left\{ \frac{n+1}{k} \right\} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{nk} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{nk+1} + \dots + (k-1) \sum_{n=0}^{\infty} z^{nk+k-2} \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} m \sum_{n=0}^{\infty} z^{nk+m-1} = \sum_{m=1}^{k-1} m \frac{z^{m-1}}{1-z^k} = \frac{1}{1-z^k} \sum_{m=1}^{k-1} m z^{m-1} \\ &= \frac{1}{1-z} \frac{(1+z+\dots+z^{k-1})'}{1+z+\dots+z^{k-1}}, \quad \forall z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

A última expressão nos motiva a escrever $R_k(z) = (1-z)^{-1} (\log(1+z+\dots+z^{k-1}))'$. Note que a função $\log(1+z+\dots+z^{k-1})$ existe e é holomorfa em $\mathbb{D}$ pois $z \mapsto 1+z+\dots+z^{k-1}$ é holomorfa e não se anula em $\mathbb{D}$, um aberto simplesmente conexo. Contudo, é interessante para algumas aplicações futuras podermos expressar essa função em termos do ramo principal do logaritmo (observe que não é claro que o mapa $z \mapsto 1+z+\dots+z^{k-1}$ leva o disco unitário para um subconjunto do domínio do ramo principal do logaritmo). Para tanto, notamos que $1-z^k = (1-z)(1+z+\dots+z^{k-1})$, logo substituir $\log(1+z+\dots+z^{k-1})$ por $\log(1-z^k) - \log(1-z)$ deveria funcionar. Note que nesse caso, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, o mapa $z \mapsto 1-z^k$ leva o disco unitário para uma região dentro do semiplano $\mathbb{C}_0$ que está contido no domínio do ramo principal do logaritmo. Com essa consideração em mente, de agora em diante adotaremos a seguinte convenção.

Notação. Log denota o ramo principal do logaritmo.

Observe que, de fato, essa outra definição funciona, pois para cada $z \in \mathbb{D}$ por um lado

$$(\text{Log}(1-z^k) - \text{Log}(1-z))' = \frac{-kz^{k-1}}{1-z^k} + \frac{1}{1-z} = \frac{1+z+\dots+z^{k-2} - (k-1)z^{k-1}}{1-z^k}$$

e por outro,

$$(1 - z) \sum_{m=1}^{k-1} mz^{m-1} = \sum_{m=0}^{k-2} (m+1)z^m - \sum_{m=1}^{k-1} mz^m = 1 + z + \cdots + z^{k-2} - (k-1)z^{k-1}.$$

Assim,

$$R_k(z) = \frac{1}{1 - z^k} \sum_{m=1}^{k-1} mz^{m-1} = \frac{1}{1 - z} (\text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z))', \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad (2.1)$$

Encontrar $T|_{H^2}^{-1}R_k$ não é tão direto, pois T não é injetiva em $\text{Hol}(\mathbb{D})$. Contudo é simples encontrar o conjunto $T^{-1}R_k = \{f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : Tf = R_k\}$ e, com isso, restaria apenas encontrar qual $f \in H^2 \cap T^{-1}R_k$. Note que sabemos que existe exatamente uma função em $H^2 \cap T^{-1}R_k$ pelo Teorema 1.2.5. Vamos, então, primeiro calcular $T^{-1}R_k$.

Lema 2.1.1. *Sejam $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ e $k \geq 2$ um inteiro. Então $Tf = R_k$ se, e somente se, existe uma constante $C \in \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = \frac{\text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z) + C}{1 - z}, \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad (2.2)$$

Demonstração. O resultado segue das equivalências, onde $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$.

$$\begin{aligned} \frac{((1 - z)f(z))'}{1 - z} &= Tf(z) = R_k(z) \stackrel{(2.1)}{=} \frac{(\text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z))'}{1 - z}, \quad \forall z \in \mathbb{D} \\ \iff ((1 - z)f(z) - \text{Log}(1 - z^k) + \text{Log}(1 - z))' &= 0, \quad \forall z \in \mathbb{D} \\ \iff \exists C \in \mathbb{C} : (1 - z)f(z) - \text{Log}(1 - z^k) + \text{Log}(1 - z) &= C, \quad \forall z \in \mathbb{D} \\ \iff \exists C \in \mathbb{C} : f(z) = \frac{\text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z) + C}{1 - z}, &\quad \forall z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

□

Vamos denotar por $h_{k,C}$ a função dada por (2.2). Em (1, Seção 2), são apresentadas duas maneiras de encontrar a constante $C \in \mathbb{C}$ para a qual $h_{k,C} \in H^2$. A primeira usa alguns resultados sobre os espaços $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{\delta_1}$ (veja as seções 1.2 e 1.3) e a conveniente forma como a expressão de R_k em (2.1) se relaciona com esses dois espaços. A segunda calcula explicitamente os coeficientes da série de Taylor de $h_{k,C}$ e usa a definição 1.1.2 para encontrar que valor de C torna $h_{k,C}$ um elemento de H^2 . Começemos pela primeira forma.

Lema 2.1.2. *Sejam $k \geq 2$ um inteiro e, para cada $C \in \mathbb{C}$, $h_{k,C}$ a função dada por (2.2). Então, $h_{k,C} \in H^2$ se, e somente se, $C = -\log k$.*

Demonstração. Fixe $k \geq 2$ e considere a função $f_k(z) = \text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z) \in \text{Hol}(\mathbb{D})$. Como $P[\delta_1](z) = \frac{1 - |z|^2}{|z - 1|^2}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(f_k) &= \int_{\mathbb{D}} |(\text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z))'|^2 \frac{1 - |z|^2}{|z - 1|^2} dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |R_k(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) = \|R_k\|_{\mathcal{A}}^2 < \infty, \end{aligned}$$

pois $R_k \in \mathcal{A}$. Logo, $f_k \in \mathcal{D}_1$ e segue do Teorema 1.3.6 que existe $g \in H^2$ tal que

$$f_k(z) = f_k^*(1) + (z - 1)g(z), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

onde $f_k^*(1)$ é o limite radial de f_k em 1. Então,

$$\begin{aligned} f_k^*(1) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \text{Log}(1 - r^k) - \text{Log}(1 - r) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \log \left(\frac{1 - r^k}{1 - r} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \log(1 + r + \cdots + r^{k-1}) = \log k. \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que $1 - r, 1 - r^k \in \mathbb{R}_{>0}$ para concluir que nesses pontos Log coincide com a função $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ usual. Assim, segue que

$$g(z) = \frac{\text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z) - \log k}{z - 1} \in H^2$$

e $h_{k, -\log k} = -g \in H^2$. Pelo Lema 2.1.1 e o Teorema 1.2.5, $C = -\log k$ é o único número complexo para o qual $h_{k,C} \in H^2$. $\square$

Motivado por esse Lema, denotaremos $h_k = h_{k, -\log k}$ e $\mathcal{N} = \text{span}\{h_k : k \geq 2\}$. Com isso, já podemos enunciar a versão em H^2 do critério de Báez-Duarte.

Teorema 2.1.3 (Critério de Báez-Duarte em H^2). *Para cada inteiro $k \geq 2$, sejam h_k a função dada por*

$$h_k(z) = \frac{1}{1 - z} (\text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z) - \log k), \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad (2.3)$$

Então, são equivalentes:

1. a hipótese de Riemann,
2. a função constante igual a 1 pertence ao fecho (em H^2) de $\mathcal{N} = \text{span}\{h_k : k \geq 2\}$,
3. o conjunto $\{h_k : k \geq 2\}$ é completo em H^2 .

Demonstração. O Teorema é imediato do Corolário 1.9.10 e do fato do mapa unitário $\Phi = T|_{H^2} \circ \Psi : \ell_\omega^2 \rightarrow H^2$ satisfazer $\Phi 1 = -1$ e $\Phi r_k = h_k$. $\square$

Por fim, apresentemos a segunda maneira de encontrar $C \in \mathbb{C}$ tal que $h_{k,C} \in H^2$. Como foi comentado, essa nova maneira em particular nos dá uma fórmula explícita para os coeficientes de Taylor de $h_{k,C}$, o que será bastante útil na seção 3.2.

Proposição 2.1.4. *Sejam $k \geq 2$ inteiro e $C \in \mathbb{C}$. Então, para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$h_{k,C}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k, C) z^n,$$

onde $c_n(k, C) = H(n) - H(n/k) + C$ e $H(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$. Em particular, $h_{k,C} \in H^2$ se, e somente se, $C = -\log k$.

Demonstração. Para $k, n \in \mathbb{N}^*$, seja $[k|n]$ a função que vale 1 se $k|n$ e 0 caso contrário. Lembre que a série de Taylor de Log em torno de 1 é

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Em particular,

$$\text{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{e} \quad \text{Log}(1-z^k) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n} = -\sum_{m=1}^{\infty} k[k|m] \frac{z^m}{m},$$

onde as séries convergem absolutamente para todo $z \in \mathbb{D}$. Assim,

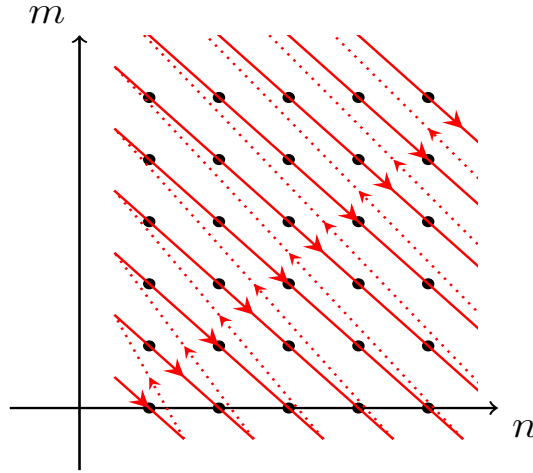
$$\begin{aligned} h_{k,C}(z) &= \frac{1}{1-z} (\text{Log}(1-z^k) - \text{Log}(1-z) + C) = \frac{1}{1-z} \left(-\sum_{n=1}^{\infty} k[k|n] \frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + C \right) \\ &= C \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{1-z} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - k[k|n]) \frac{z^n}{n}, \quad \forall z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Queremos reescrever a expressão acima na forma de uma série de potências. Com esse fim, reescrever a segunda parcela como

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - k[k|n]) \frac{z^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - k[k|n]}{1-z} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \left(\sum_{m=0}^{\infty} (1 - k[k|n]) z^m \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - k[k|n]}{n} z^{n+m}. \end{aligned}$$

Note que a última série acima converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{D}$, pois $\left| \frac{1 - k[k|n]}{n} \right| \leq$

1 e claramente $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |z|^{n+m} = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por conta disso, qualquer reordenação dessa série é também convergente e converge para o mesmo valor (veja, por exemplo, (41, p. 197)). Em particular, a bijeção $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ dada pela Figura 2.1 (equivalentemente, a mudança de variáveis $l = n + m$, $j = n$) mostra que


 Figura 1 – Bijeção entre $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - k[k|n]}{n} z^{n+m} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^l \frac{1 - k[k|j]}{j} \right) z^l.$$

Assim,

$$h_{k,C}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C + \sum_{j=1}^n \frac{1 - k[k|j]}{j} \right) z^n, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

onde adotamos a convenção $\sum_{j=1}^0 a_j = 0$. Em particular,

$$\begin{aligned} c_n(k, C) &= C + \sum_{j=1}^n \frac{1 - k[k|j]}{j} = C + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ k|j}} \frac{k}{j} \\ &= C + H(n) + \sum_{m \leq n/k} \frac{k}{mk} = C + H(n) + H\left(\frac{n}{k}\right), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da mudança $j = mk$.

Por fim, temos do Corolário 1.8.20 que, fixado $k \geq 2$,

$$c_n(k, C) = \log n + \gamma - \log(n/k) - \gamma + C + O\left(\frac{1}{n}\right) = \log k + C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Como, pela definição 1.1.2, $h_{k,C} \in H^2$ se, e somente se, $(c_n(k, C))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, então para que $h_{k,C}$ pertença a H^2 é necessário que $c_n(k, C) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Pela equação acima, isso só ocorre se $C = -\log k$. Por outro lado, $c_n(k) := c_n(k, -\log k) = O(1/n)$, logo pertence a ℓ^2 , pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. $\square$

2.2 Um semigrupo de composições ponderadas

Como foi comentado na subseção 1.9.1, uma peça chave na demonstração de que o item 2 do Teorema 1.9.8 implica o item 3 do mesmo teorema é a existência de um semigrupo $\{D_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ de operadores que deixam invariante o subespaço gerado pelos nossos vetores de interesse. Noor (1, p. 249) afirma que a relação entre subespaços invariantes por semigrupos e a HR é evidente desde o trabalho de Nyman (8). Essas observações motivam a busca de um semigrupo de operadores em H^2 análogo ao usado no Teorema 1.9.8. Destacamos na seção 1.9.1 que uma propriedade que torna esse semigrupo especial para o nosso estudo é o fato de $D_n s_k = s_{nk} - s_n/k$ para todo $n, k \in \mathbb{N}^*$, onde $\{s_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ são as funções unitariamente equivalentes a $\{h_k : k \in \mathbb{N}^*\}$.

Usemos uma adaptação dessa propriedade para guiar a busca por um semigrupo análogo em H^2 . Primeiro, definimos $h_1(z) = \frac{\text{Log}(1-z) - \text{Log}(1-z) - \log 1}{1-z} = 0$ e assim, para todo $n, k \in \mathbb{N}^*$ e $z \in \mathbb{D}$, temos que

$$\begin{aligned} h_{nk}(z) - h_n(z) &= \frac{1}{1-z} (\text{Log}(1-z^{nk}) - \text{Log}(1-z) - \log nk) \\ &\quad - \frac{1}{1-z} (\text{Log}(1-z^k) - \text{Log}(1-z) - \log n) \\ &= \frac{1}{1-z} (\text{Log}(1-z^{nk}) - \text{Log}(1-z^n) - \log k). \end{aligned}$$

Note como a expressão acima é semelhante a $h_k(z^n)$. De fato,

$$h_k(z^n) = \frac{1}{1-z^n} (\text{Log}(1-z^{nk}) - \text{Log}(1-z^n) - \log k) = \frac{1-z}{1-z^n} (h_{nk}(z) - h_n(z)), \quad (2.4)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Isso sugere a definição dos operadores

$$f(z) \mapsto \frac{1-z^n}{1-z} f(z^n) = (1+z+\dots+z^{n-1})f(z^n).$$

Esse tipo de operador é chamado de operador de composição ponderado.

Proposição 2.2.1. *Seja, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o operador $W_n : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$ dado por*

$$W_n f(z) = (1+z+\dots+z^{n-1})f(z^n) = \frac{1-z^n}{1-z} f(z^n).$$

Então,

1. *para todo $n \in \mathbb{N}^*$, W_n são operadores limitados em H^2 com $\|W_n\|_{\mathcal{B}(H^2)} = n^{1/2}$. Além disso, $n^{-1/2}W_n$ são isometrias em H^2 .*
2. *$W_1 = I$ e $W_n W_m = W_{nm}$ para todos $n, m \in \mathbb{N}^*$. Assim, $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é um semigrupo multiplicativo.*
3. *Para todos $n, k \in \mathbb{N}^*$, temos $W_n h_k = h_{nk} - h_n$, onde $h_1 = 0$. Em particular, $\mathcal{N}$ é invariante por $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$.*

Demonstração. Considere uma função $f \in H^2$ com representação em série de potências dada por

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m.$$

Para o item 1, note que

$$W_n f(z) = (1 + z + \cdots + z^n) f(z^n) = \sum_{j=0}^{n-1} z^j \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{nm} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_m z^{nm+j}.$$

Logo, segue da definição 1.1.2 que

$$\|W_n f\|_{H^2}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} |a_m|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} n |a_m|^2 = n \|f\|_{H^2}^2.$$

Como $f \in H^2$ era arbitrário, segue em particular que $W_n \in \mathcal{B}(H^2)$ e $\|W_n\|_{\mathcal{B}(H^2)} = n^{1/2}$. Além disso, é claro da igualdade anterior que $\|n^{-1/2} W_n f\|_{H^2} = \|f\|_{H^2}$, logo $n^{-1/2} W_n$ é uma isometria em H^2 .

Para o item 2, observe que, dados $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $f \in H^2$,

$$W_n W_m f(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z} W_m f(z^n) = \frac{1 - z^n}{1 - z} \frac{1 - z^{nm}}{1 - z^n} f(z^{nm}) = W_{nm} f(z).$$

Além disso, $W_1 f(z) = \frac{1 - z}{1 - z} f(z) = f(z)$, i.e., $W_1 = I$. Com isso, $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é um semigrupo multiplicativo discreto de operadores de composição ponderados.

Por fim, o item 3 segue de (2.4). □

Observação 2.1. Uma adaptação simples do argumento anterior mostra que os mapas de composição $f(z) \mapsto f(z^n)$ são limitados em H^2 . Em geral, todo mapa $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analítico induz um operador de composição limitado em H^2 (veja, por exemplo, (11, Teorema 5.1.5)).

Dizemos que um vetor $x \in \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, é cíclico para um semigrupo $\{S_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ se $\text{span}\{S_n x : n \in \mathbb{N}^*\}$ é denso em $\mathcal{H}$. Essa definição nos permite generalizar o Teorema 2.1.3.

Teorema 2.2.2. *São equivalentes:*

1. a hipótese de Riemann,
2. o fecho (em H^2) de $\mathcal{N} = \text{span}\{h_k : k \geq 2\}$ contém um vetor cíclico para $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$,
3. $\{h_k : k \geq 2\}$ é completo em H^2 .

Demonstração. A equivalência $1 \iff 3$ é a mesma do Teorema 2.1.3. Para $1 \implies 2$, note que $W_n 1(z) = (1 + z + \cdots + z^{n-1})$, logo $\text{span}\{W_n 1 : n \in \mathbb{N}^*\}$ contém os polinômios e é,

portanto, denso em H^2 . Ou seja, 1 é um vetor cíclico para $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ e o Teorema 2.1.3 mostra que HR implica que $1 \in \overline{\text{span}}\{h_k : k \geq 2\}$. Por fim, note que $\overline{\mathcal{N}}$ é invariante pelo semigrupo $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ pela proposição anterior. Assim, se existe um vetor $f \in \overline{\mathcal{N}}$ cíclico para $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, então, $H^2 = \overline{\text{span}}\{W_n f : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \overline{\text{span}}\{h_k : k \geq 2\}$, i.e., $2 \implies 3$. $\square$

Além de possibilitar essa generalização, o semigrupo $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ cumpre um papel importante na próxima seção e na seção 3.4.

2.3 Densidade de $(I - S)\mathcal{N}$ em H^2

Nessa seção iremos provar uma versão fraca do item 3 do Teorema 2.1.3. Com esse objetivo, vamos primeiro apresentar essa versão. Seja S o operador shift em H^2 como na Definição 1.1.19. Observe que $I - S$ tem imagem densa. De fato, é suficiente mostrar que $((I - S)H^2)^\perp = \{0\}$, mas para $g \in ((I - S)H^2)^\perp$ temos que

$$\langle (I - S^*)g, f \rangle = \langle g, (I - S)f \rangle = 0, \quad \forall f \in H^2 \implies (I - S^*)g = 0,$$

onde S^* denota a adjunta de S , que é dada por

$$S^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad S^* f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}. \quad (2.5)$$

Logo, se $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $(I - S^*)g = 0$ implica que $a_n = a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $g \in H^2$, $n |a_0|^2 \leq \|g\|_{H^2}^2 < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $a_n = a_0 = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, i.e., $g = 0$. Em síntese, $I - S^*$ é injetivo, logo $I - S$ tem imagem densa.

Em particular, se $\mathcal{N}$ for denso em H^2 , temos que

$$\overline{(I - S)\mathcal{N}} \supset (I - S)\overline{\mathcal{N}} = (I - S)H^2,$$

pois $I - S$ é contínua. Assim, como $I - S$ tem imagem densa, a densidade de $\mathcal{N}$ implica densidade de $(I - S)\mathcal{N}$. O objetivo dessa subseção será provar o teorema a seguir que mostra que essa conclusão vale independentemente da HR.

Teorema 2.3.1. *O conjunto $(I - S)\mathcal{N} = \text{span}\{(I - S)h_k : k \geq 2\}$ é denso em H^2 .*

Recorde que a topologia de H^2 como espaço de Hilbert é mais fina que a topologia compacto-aberto (veja Corolário 1.1.7). Disso segue o próximo corolário, que pode ser visto como uma versão fraca do item 3 do Teorema 2.1.3 (logo uma versão fraca da HR).

Corolário 2.3.2. *O conjunto $\mathcal{N} = \text{span}\{h_k : k \geq 2\}$ é denso em H^2 na topologia compacto-aberto.*

Demonstração do Corolário 2.3.2. Denotemos por M_g o operador em $\text{Hol}(\mathbb{D})$ de multiplicação por $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ ($M_g f(z) = g(z)f(z)$). Como comentamos na página 40, esses operadores são contínuos em $\text{Hol}(\mathbb{D})$, i.e., na topologia compacto-aberto. É simples ver que $(I - S) = M_{1-z}$ e $M_{\frac{1}{1-z}}$ é sua inversa. Em particular,

$$(I - S)H^2 \subset H^2 \implies H^2 = M_{\frac{1}{1-z}}(I - S)H^2 \subset M_{\frac{1}{1-z}}H^2.$$

Por outro lado, como $M_{\frac{1}{1-z}}$ é contínua na topologia compacto-aberto, temos que

$$\overline{\mathcal{N}}^{\text{Hol}(\mathbb{D})} = \overline{M_{\frac{1}{1-z}}(I - S)\mathcal{N}}^{\text{Hol}(\mathbb{D})} \supset M_{\frac{1}{1-z}}\overline{(I - S)\mathcal{N}}^{\text{Hol}(\mathbb{D})},$$

onde $\overline{X}^{\text{Hol}(\mathbb{D})}$ denota o fecho de X na topologia compacto-aberto. Pelo Corolário 1.1.7 temos que $\overline{(I - S)\mathcal{N}}^{\text{Hol}(\mathbb{D})} \supset \overline{(I - S)\mathcal{N}} = H^2$, onde o fecho da segunda expressão é na topologia de espaço de Hilbert de H^2 , assim a última igualdade segue do Teorema 2.3.1. Com isso, temos que

$$\overline{\mathcal{N}}^{\text{Hol}(\mathbb{D})} \supset M_{\frac{1}{1-z}}H^2 \supset H^2,$$

i.e., $\mathcal{N}$ é denso em H^2 com a topologia compacto-aberto. $\square$

Inspirado na demonstração do Teorema 2.2.2, note que

$$(I - S)W_n f(z) = (1 - z)\frac{1 - z^n}{1 - z}f(z^n) = (1 - z^n)f(z^n), \quad \forall f \in H^2.$$

Assim, se definirmos T_n por $T_n f(z) = f(z^n)$ temos que $(I - S)W_n = T_n(I - S)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Note que uma simples adaptação da Proposição 2.2.1 mostra que cada T_n é uma isometria em H^2 , $T_1 = I$ e $T_n T_m = T_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$, logo $\{T_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é um semigrupo multiplicativo de operadores limitados em H^2 . Além disso, como $\mathcal{N}$ é invariante por $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ e $T_n(I - S) = (I - S)W_n$, então $(I - S)\mathcal{N}$ é invariante por $\{T_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Por conta disso, para provar o Teorema 2.3.1 basta verificarmos que existe um vetor cíclico para $\{T_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ em $(I - S)\mathcal{N}$. Consideraremos o vetor $1 - z \in H^2$. Note que $T_n(1 - z) = 1 - z^n$, assim se $f \in \{T_n(1 - z) : n \in \mathbb{N}^*\}^\perp$ tem série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então $a_n = a_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $f \in H^2 \implies f = 0$. Com isso, o Lema a seguir prova o Teorema 2.3.1.

Lema 2.3.3. *A série*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} (I - S)h_k$$

converge para $1 - z$ em H^2 , onde μ é a função de Möbius (veja Exemplo 1.8.2).

Demonstração. Temos que provar que

$$\left\| \sum_{k=2}^n \frac{\mu(k)}{k} (I - S)h_k + z - 1 \right\|_{H^2} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue de (2.3) que $(I - S)h_k(z) = \text{Log}(1 - z^k) - \text{Log}(1 - z) - \log k$, logo, como $h_1 = 0$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{\mu(k)}{k} (I - S)h_k = \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k} \text{Log}(1 - z^k) - \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k} (\text{Log}(1 - z) + \log k). \quad (2.6)$$

Note que, pela expansão em série de potências de $\text{Log}(1 - z)$ (veja a demonstração da Proposição 2.1.4), temos que $\|\text{Log}(1 - z)\|_{H^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$. Assim, como

$$\left\| \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k} (\text{Log}(1 - z) + \log k) + 1 \right\|_{H^2} \leq \|\text{Log}(1 - z)\|_{H^2} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k} \right| + \left| \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k) \log k}{k} + 1 \right|,$$

segue de (1.19) e (1.20) que a expressão acima tende a 0, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, o lema fica provado se mostrarmos que a primeira parcela de (2.6) converge para $-z$ em H^2 .

Usando a representação de $\text{Log}(1 - z^k)$ em série de potências (veja Proposição 2.1.4), podemos reescrever a primeira parcela de (2.6) como

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k} \text{Log}(1 - z^k) = - \sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{jk}}{j} = - \sum_{k=1}^n \mu(k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{jk}}{jk}.$$

Note que, para cada $1 \leq k \leq n$, a série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{jk}}{jk}$ converge absolutamente para cada $z \in \mathbb{D}$. Como a expressão acima é uma soma finita de séries desse tipo, então também é absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{D}$. Logo, podemos reordenar a série acima.

Para tanto, observe que todo número $m \in \mathbb{N}^*$ aparece na soma na forma de um produto jk . Além disso, a quantidade de vezes que um número $m \in \mathbb{N}^*$ aparece na soma é igual à quantidade de seus divisores que são menores ou iguais a n . Mais precisamente, para cada divisor $d|m$, tal que $d \leq n$, temos um termo da forma $\mu(d)z^m/m$. Por conta disso, podemos reescrever a soma substituindo $m = jk$ e reordenando-a como

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{\substack{d|m \\ 1 \leq d \leq n}} \mu(d) &= - \sum_{m=1}^n \frac{z^m}{m} \sum_{d|m} \mu(d) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{\substack{d|m \\ 1 \leq d \leq n}} \mu(d) \\ &= - \sum_{m=1}^n \frac{z^m}{m} \delta_{1m} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{z^m}{m} \sum_{\substack{d|m \\ 1 \leq d \leq n}} \mu(d) = -z - \phi_n(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Observe que usamos a Proposição 1.8.5 para a segunda igualdade. Com isso, o lema será provado quando mostrarmos que $\|\phi_n\|_{H^2} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Temos que

$$\phi_n(z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \sum_{\substack{d|m \\ 1 \leq d \leq n}} \mu(d) \right) z^m.$$

Em particular, os coeficientes de Taylor de ϕ_n satisfazem

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{\substack{d|m \\ 1 \leq d \leq n}} \mu(d) \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{d|m} 1 = \frac{\sigma_0(m)}{m},$$

onde $\sigma_0(m)$ denota o número de divisores de m (veja Exemplo 1.8.2). Como $\sigma_0(n) = o(n^\delta)$ para todo $\delta > 0$ (veja Teorema 1.8.15), em particular $\sigma_0(n) = O(n^{1/4})$, logo

$$\|\phi_n\|_{H^2}^2 \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_0(m)^2}{m^2} \leq C \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-3/2} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Isso conclui o lema. $\square$

Observação 2.2. Em (3, Lema 4.3), é mostrado que esse argumento pode ser adaptado, usando o (13, Teorema 6.1) mencionado na seção 1.1, para concluir que, para todo $0 < p < \infty$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} (I - S)h_k \rightarrow 1 - z,$$

em H^p .

Vamos comentar brevemente sobre o que motivou a escolha da série do lema anterior. Em (42), Báez-Duarte nota que (cf. Exemplo 1.8.10)

$$\chi_{(0,1]}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left[\frac{1}{kx} \right], \quad \forall x \in (0, 1].$$

Como $[x] = x - \{x\}$, segue que

$$\chi_{(0,1]}(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{ \frac{1}{kx} \right\} = - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{ \frac{1}{kx} \right\}, \quad \forall x \in (0, 1], \quad (2.7)$$

por (1.19). Além da convergência pontual, Báez-Duarte mostra que (2.7) converge para $-\chi_{(0,1]}$ na norma de L^1 (42), contudo diverge na norma de L^2 (32, Teorema 2.2).

Novamente por (1.19), temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) s_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left\{ \frac{1}{kx} \right\} - \left\{ \frac{1}{x} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = -\chi_{(0,1]}(x),$$

onde a convergência é novamente pontual, em L^1 , mas diverge em L^2 . Aqui s_k são as funções do Teorema 1.9.8. Pela transformação unitária Φ , a série unitariamente equivalente em H^2 é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} h_k,$$

que, portanto, diverge em H^2 , mas motiva a escolha de

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} (I - S)h_k$$

como um candidato a série que aproxime $1 - z$. Note que o Lema 2.3.3 e a continuidade de $M_{\frac{1}{1-z}}$ na topologia compacto-aberto mostram que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} h_k$ converge para 1 localmente uniformemente em $\mathbb{D}$.

2.4 Funções ortogonais a $\{h_k : k \geq 2\}$

O Teorema 2.1.3 nos mostra que HR é equivalente a $\{h_k : k \geq 2\}$ ser completo em H^2 . Por outro lado, isso é equivalente a $\{h_k : k \geq 2\}^\perp = \{0\}$. Nessa seção, iremos usar o Teorema 2.3.1 para mostrar que um subespaço denso de H^2 não pertence a $\{h_k : k \geq 2\}^\perp$.

A importante observação a se fazer é que a inversa $M_{\frac{1}{1-z}}$ de $I - S$ é um operador de Toeplitz analítico descontínuo, pois $\frac{1}{1-z} \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus H^\infty$. Estudamos na seção 1.5 algumas propriedades desses mapas e, em particular, mostramos no Exemplo 1.5.12 que, para $\varphi(z) = \frac{1}{1-z}$ e $T_\varphi = M_{\frac{1}{1-z}}$, temos

$$\text{Dom}(T_\varphi^*) = \mathcal{D}_1,$$

onde T_φ^* denota a adjunta de T_φ e $\mathcal{D}_1$ é o espaço de Dirichlet local em 1 (veja definição 1.3.4).

Teorema 2.4.1. *Seja $\mathcal{D}_1$ o espaço de Dirichlet local em 1. Temos que*

$$\{h_k : k \geq 2\}^\perp \cap \mathcal{D}_1 = \{0\}.$$

Em particular, $\{h_k : k \geq 2\}^\perp$ não possui nenhuma função holomorfa em uma vizinhança do disco fechado $\overline{\mathbb{D}}$.

Demonstração. Lembre que $\mathcal{N} = \text{span}\{h_k : k \geq 2\}$, logo $\mathcal{N}^\perp = \{h_k : k \geq 2\}^\perp$. Sejam $f \in \mathcal{N}^\perp \cap \text{Dom}(T_\varphi^*)$ e $g \in (I - S)\mathcal{N}$. Note que $T_\varphi g \in \mathcal{N}$, logo $g \in \text{Dom}(T_\varphi)$ e

$$\langle T_\varphi^* f, g \rangle = \langle f, T_\varphi g \rangle = 0.$$

Como $(I - S)\mathcal{N}$ é denso em H^2 , segue que $T_\varphi^* f = 0$. Assim,

$$\langle f, T_\varphi h \rangle = \langle T_\varphi^* f, h \rangle = 0, \quad \forall h \in \text{Dom}(T_\varphi).$$

Como $\text{Dom}(T_\varphi) = (I - S)H^2$, então $T_\varphi \text{Dom}(T_\varphi) = H^2$ e assim $f = 0$, i.e.,

$$\mathcal{N}^\perp \cap \text{Dom}(T_\varphi^*) = \{0\}.$$

e o resultado segue do Exemplo 1.5.12.

Por fim, note que se $f \in \text{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, temos que $f^*(1) = f(1)$ e

$$\frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$$

possui uma singularidade removível em 1, logo é novamente holomorfa em $\overline{\mathbb{D}}$. Em particular é limitada em $\overline{\mathbb{D}}$, portanto pertence a $H^\infty \subset H^2$. Portanto, $f(z) = f^*(1) + (z - 1)g(z)$, onde $g \in H^2$. Segue do Teorema 1.3.6 que $\text{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{D}_1$, o que justifica a observação feita no Teorema. $\square$

Capítulo 3

Ortogonalidade e Biortogonalidade em H^2 e zeros de ζ

Nesse capítulo estudamos parte dos resultados da pré-publicação (2), de cuja escrita o autor dessa dissertação participou. Iniciamos a seção 3.1 apresentando um panorama atual do estudo do critério de Báez-Duarte em H^2 (Teorema 2.1.3), enunciando uma generalização desse critério e uma versão mais forte do Corolário 2.3.2 provadas em (3). Destacamos que esses novos resultados se concentram em questões de densidade, mas, como foi comentado na seção 2.4, existe também uma questão sobre ortogonalidade equivalente à HR. A Proposição 3.1.2 usa o conceito de dualidade de Cauchy (veja seção 1.6) para mostrar que, sob certas hipóteses, questões de densidade são equivalentes a questões envolvendo ortogonalidade. Essa observação motiva o estudo de problemas sobre ortogonalidade e, na subseção 3.1.2, apresentamos uma possível abordagem para esse tipo de pergunta, inspirada nas ideias do Teorema 2.4.1. Isso acaba produzindo uma nova forma de encontrar semiplanos livres de zeros da função ζ .

Na seção 3.2, mostramos que a sequência $\{h_k : k \geq 2\}$ (do Teorema 2.1.3) possui uma sequência biortogonal completa em H^2 . Como comentado na seção 1.7, isso não implica que $\{h_k : k \geq 2\}$ seja completo. Contudo, como em alguns casos a completude de sequências biortogonais é simétrica (veja seção 1.7), é intrigante que possamos construir tal sequência independentemente da HR.

Sabemos que $\{h_k : k \geq 2\}$ não é completa se e somente se a HR é falsa. Nesse caso, a Proposição 1.7.3 nos diz que possui mais sequências biortogonais. Na seção 3.3 introduzimos uma família de funções definidas em (3) e apresentamos uma demonstração direta de que elas satisfazem uma relação que conecta de maneira explícita as funções $\{h_k : k \geq 2\}$ e a função ζ de Riemann. Como uma aplicação, utilizamos essas funções para exibir outras sequências biortogonais a $\{h_k : k \geq 2\}$ caso a HR seja falsa.

Por fim, na seção 3.4, apresentamos uma conjectura relacionada a HR e a relacionamos com o complemento ortogonal $\mathcal{N}^\perp$ das nossas funções de interesse.

É interessante ressaltar que o autor dessa dissertação foi responsável por parte dos resultados das seções 3.2, 3.3 e 3.4.

3.1 Densidade, ortogonalidade e semiplanos livres de zeros

Em (3), é apresentada uma abordagem geral para determinar quando $\mathcal{N}$ (do Teorema 2.1.3) ser denso em um espaço vetorial topológico $H^2 \subset X \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ produz semiplanos livres de zeros de ζ (3, Proposição 2.3). Em particular, essa abordagem torna possível uma generalização do Teorema 2.1.3, que enunciamos agora.

Teorema 3.1.1. *Sejam $\{h_k : k \geq 2\} \subset H^2$ as funções definidas em (2.3) e $1 < p \leq 2$. Se 1 pertence ao fecho em H^p de $\mathcal{N} = \text{span}\{h_k : k \geq 2\}$, ou equivalentemente, o conjunto $\mathcal{N}$ é denso em H^p , então*

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{C}_{1/p} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 1/p\}.$$

Além disso, o caso $p = 1$ implica que $\zeta(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}_1}$.

Esse é o (3, Teorema 4.8), que pode ser visto como uma versão fraca de (9, Teorema) para os espaços de Hardy. Observe que, diferentemente de (9, Teorema) e Teorema 2.1.3, não é claro se a recíproca vale nesse caso. Por exemplo, sabemos que a função ζ não se anula no semiplano $\overline{\mathbb{C}_1}$ pelos resultados de Hadamard (5) e de la Vallée Poussin (6), de fato isso é usado para demonstrar o Teorema dos números primos (TNP), contudo não sabemos se $\mathcal{N}$ é denso em H^1 .

Motivado por essa abordagem, é provado em (3, Corolário 4.6) que $\mathcal{N}$ é denso em H^p para todo $0 < p < 1$. Isso não nos fornece um semiplano livre de zeros novo (nos dá apenas o semiplano $\mathbb{C}_1$), mas é uma versão mais forte do Corolário 2.3.2.

Esses dois resultados avançam o estudo do que chamaremos de questão de densidade:

Questão 1. Para quais espaços vetoriais topológicos $H^2 \subset X \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$, temos que $\mathcal{N}$ é denso em X ?

Por outro lado, na seção 2.4 observamos que a HR é equivalente a $\mathcal{N}^\perp = \{0\}$ e mostramos que $\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{D}_1 = \{0\}$, i.e., $\mathcal{N}^\perp$ é “pequeno” no sentido de ter interseção trivial com um subespaço denso de H^2 . Esse é um resultado arquetípico do que chamaremos de a questão de ortogonalidade:

Questão 2. Para quais espaços vetoriais topológicos $L \subset H^2$, temos que $\mathcal{N}^\perp \cap L = \{0\}$?

Na subseção 3.1.1 iremos estudar a relação entre essas duas perguntas, o que nos permitirá, em particular, levar os avanços mencionados da questão 1 para a questão 2. Na subseção 3.1.2 discutimos uma abordagem para a questão 2, inspirada no Teorema 2.4.1.

3.1.1 Dualidade de Cauchy: densidade e ortogonalidade

As noções de densidade e ortogonalidade estão relacionadas pelo clássico Teorema de Hahn-Banach. Como mencionado na seção 1.6, no contexto de espaços de funções analíticas, é comum os argumentos de dualidade se tornarem mais simples quando consideramos os duais de Cauchy. Isso fica claro no próximo resultado, que utiliza esse conceito para relacionar as questões 1 e 2.

Proposição 3.1.2. *Seja X um espaço vetorial topológico tal que $H^2 \subset X \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$, onde as inclusões são contínuas, X possua um dual de Cauchy X^* e $X^* \subset H^2$. Se $\mathcal{N}$ é denso em X , com respeito a topologia de X , então*

$$\mathcal{N}^\perp \cap X^* = \{0\}.$$

Se, além disso, X for um espaço de Fréchet, vale a recíproca.

Observação 3.1. Um espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico Hausdorff completo em que a topologia é dada por uma família enumerável de seminormas (veja, por exemplo, (43, p.167)). Equivalentemente, é um espaço vetorial localmente convexo e completamente metrizável. Em particular, todo espaço de Banach é Fréchet. O Teorema de Hahn-Banach vale em espaços de Fréchet (veja, por exemplo, (21, p.17)).

Demonstração. Como $X^* \subset H^2$, então $\mathcal{N}^\perp \cap X^* \subset H^2$, assim dado $g \in \mathcal{N}^\perp \cap X^*$ temos

$$\langle f, g \rangle = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} f(r\zeta) \overline{g(r\zeta)} d\mathbf{m}(\zeta) = \langle f, g \rangle_{H^2} = 0, \quad \forall f \in \mathcal{N} \subset H^2.$$

Como $\mathcal{N}$ é denso em X , segue que $g = 0$, provando a primeira parte da proposição. Reciprocamente, suponha que X é um espaço de Fréchet. Em particular, vale o Teorema de Hahn-Banach. Assim, se $\mathcal{N}$ não é denso em X , existe $g \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $\langle f, g \rangle_{H^2} = \langle f, g \rangle = 0$ para todo $f \in \mathcal{N}$, logo $g \in \mathcal{N}^\perp \cap X^* \neq \{0\}$. $\square$

Essa Proposição nos permite transportar os resultados mencionados anteriormente no contexto da questão de densidade para a questão de ortogonalidade. O Teorema 3.1.1 nos dá o seguinte resultado.

Corolário 3.1.3. *Se $\mathcal{N}^\perp \cap H^q = \{0\}$ para algum $2 \leq q < \infty$, então $\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}_{1/p}$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se $\mathcal{N}^\perp \cap \text{BMOA} = \{0\}$, então $\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \overline{\mathbb{C}_1}$.*

Demonstração. Se $1 < p \leq 2$, pelo Teorema 1.6.2 temos que $(H^p)^* = H^q$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$, logo $2 \leq q < \infty$. Como H^p é espaço de Banach, logo Fréchet, para todo $1 \leq p \leq \infty$, segue da Proposição 3.1.2 que $\mathcal{N}$ é denso em H^p se e somente se $\mathcal{N}^\perp \cap H^q = \{0\}$. Analogamente, $(H^1)^* = \text{BMOA}$, pelo Teorema 1.6.4, e H^1 é um espaço de Banach, logo $\mathcal{N}$ é denso em H^1 se e somente se $\mathcal{N}^\perp \cap \text{BMOA} = \{0\}$. O resultado segue, então, do Teorema 3.1.1. $\square$

Isso nos mostra que responder a questão 2 mesmo para um subespaço próprio de H^2 pode nos fornecer resultados não triviais, como um novo semiplano livre de zeros de ζ .

Além disso, podemos usar o fato de $\mathcal{N}$ ser denso em H^p para todo $0 < p < 1$ e a Proposição 3.1.2 para obter novos subespaços L tais que $\mathcal{N}^\perp \cap L = \{0\}$.

Corolário 3.1.4. *Para cada $0 < \alpha < 1$, seja Λ_α o conjunto das funções analíticas no disco $\mathbb{D}$, contínuas em $\overline{\mathbb{D}}$ e com a restrição $f|_{\mathbb{T}}$ α -Hölder (veja seção 1.6). Temos que*

$$\mathcal{N}^\perp \cap \Lambda_\alpha = \{0\}, \quad \forall 0 < \alpha < 1.$$

Demonstração. Como $\mathcal{N}$ é denso em H^p para todo $0 < p < 1$ (3, Corolário 4.6) e $(H^p)^* = \Lambda_\alpha$ para $\alpha = 1/p - 1$ pelo Teorema 1.6.5, o resultado segue da Proposição 3.1.2. $\square$

Note que $\text{Hol}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \Lambda_\alpha$ para todo $0 < \alpha < 1$. Em particular, todo Λ_α é denso em H^2 . Comparando o Corolário anterior e o Teorema 2.4.1, uma pergunta natural é: existe uma relação de continência entre $\mathcal{D}_1$ e Λ_α , com $0 < \alpha < 1$? Mais precisamente, $\mathcal{D}_1 \subset \Lambda_\alpha$ para algum $0 < \alpha < 1$? Ou $\Lambda_\alpha \subset \mathcal{D}_1$ para todo $0 < \alpha < 1$? A resposta é não para ambas as perguntas. De fato, um cálculo direto mostra que $f(z) = (1 - z)^{1/2} \in \Lambda_{1/2}$, contudo $f^*(1) = 0$ e

$$g(z) = \frac{f(z) - f^*(1)}{z - 1} = -(1 - z)^{-1/2} \notin H^2,$$

logo $f \notin \mathcal{D}_1$ pelo Teorema 1.3.6. Por outro lado, dado qualquer $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, temos que $\text{Log}(1 - \zeta z) \in H^2$ (os coeficientes de Taylor são $O(n^{-1})$ como na Proposição 2.1.4), logo $(z - 1)\text{Log}(1 - \zeta z) \in \mathcal{D}_1$ pelo Teorema 1.3.6, mas $\lim_{r \rightarrow 1^-} (r\bar{\zeta} - 1)\text{Log}(1 - r) = \infty$, logo $(z - 1)\text{Log}(1 - \zeta z) \notin C(\overline{\mathbb{D}}) \supset \Lambda_\alpha$, para todo $0 < \alpha < 1$. Ou seja, o Corolário 3.1.4 e o Teorema 2.4.1 se complementam.

3.1.2 Uma abordagem para a questão ortogonal

Vamos agora generalizar o argumento do Teorema 2.4.1 para obter um método para encontrar subespaços $L \subset H^2$ que respondam a questão 2. Note que, como observado na seção 2.4, a demonstração desse resultado usa basicamente dois fatos: $(I - S)\mathcal{N} = T_{1-z}\mathcal{N}$ é denso em H^2 e $1/(1 - z) \in N^+$, logo $\text{Dom}(T_{\frac{1}{1-z}}^*)$ é um espaço de de Branges-Rovnyak. Resumimos essas observações a seguir.

Proposição 3.1.5. *Sejam φ uma unidade de N^+ , i.e., $\varphi, 1/\varphi \in N^+$ e $T_\varphi, T_{1/\varphi}$ seus operadores de Toeplitz. Se $T_\varphi(\mathcal{N} \cap \text{Dom}(T_\varphi))$ é denso em H^2 , então*

$$\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{H}(b) = \{0\},$$

onde $1/\varphi = b/a$ é sua representação canônica, i.e., (a, b) é um par pitagórico (veja subseção 1.4.1).

Observação 3.2. A proposição anterior é apenas um caso particular de (2, Proposição 11).

Demonstração. Seja $g \in \mathcal{N}^\perp \cap \text{Dom}(T_{1/\varphi}^*)$. Claramente, se $f \in \text{Dom}(T_\varphi)$, então $T_\varphi f \in \text{Dom}(T_{1/\varphi})$ e $T_{1/\varphi} T_\varphi f = f$. Assim,

$$\langle T_\varphi f, T_{1/\varphi}^* g \rangle = \langle f, g \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{N} \cap \text{Dom}(T_\varphi).$$

Como $T_\varphi(\mathcal{N} \cap \text{Dom}(T_\varphi))$ é denso em H^2 , segue que $T_{1/\varphi}^* g = 0$.

Note que, como $\varphi, 1/\varphi \in N^+$, $1/\varphi$ não se anula em $\mathbb{D}$, logo seu produto de Blaschke é 1. Como observado na seção 1.4, vale a fatoração canônica e temos $\varphi = S f_1 / f_2$, onde S é uma função interior singular e $f_1, f_2 \in H^\infty$ são exteriores. Como $1/\varphi = (1/S)(f_2/f_1)$, segue que $1/S$ também é interior singular. Isso só é possível se $S = 1/S = 1$, ou seja, como φ é uma unidade de N^+ , então $\varphi, 1/\varphi$ são quocientes de funções exteriores de H^∞ . Assim, sejam $b_1, b_2 \in H^\infty$ exteriores tais que $1/\varphi = b_1/b_2$. É claro que $b_2 H^2 \subset \text{Dom}(T_{1/\varphi})$, logo $T_{1/\varphi} \text{Dom}(T_{1/\varphi}) \supset T_{1/\varphi} b_2 H^2 = b_1 H^2$ é denso. Consequentemente, para todo $f \in \text{Dom}(T_{1/\varphi})$,

$$0 = \langle f, T_{1/\varphi}^* g \rangle = \langle T_{1/\varphi} f, g \rangle.$$

Logo, $g = 0$ pois $T_{1/\varphi} \text{Dom}(T_{1/\varphi})$ é denso.

Com isso, mostramos que

$$\mathcal{N}^\perp \cap \text{Dom}(T_{1/\varphi}^*) = \{0\}.$$

Pelo Teorema 1.5.11, temos que $\text{Dom}(T_{1/\varphi}^*) = \mathcal{H}(b)$, onde b/a é a representação canônica de $1/\varphi \in N^+$, o que conclui a demonstração. $\square$

Finalizamos essa seção com uma aplicação dessa proposição, que descreve uma forma de encontrar semiplanos livres de zero de ζ . Por um lado, a proposição anterior nos dá uma forma de encontrar subespaços $L \subset H^2$ tais que $\mathcal{N}^\perp \cap L = \{0\}$. Por outro lado, pelo Corolário 3.1.3 estamos interessados em saber se isso vale para $L = H^q$, para algum $2 \leq q < \infty$, ou $L = \text{BMOA}$. Nesse contexto, seria bastante útil um critério para quando um espaço de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ contém algum H^q ou BMOA . Isso é feito na pré-publicação (24, seção 3.1), como enunciamos a seguir.

Proposição 3.1.6. *Seja $\varphi \in N^+$ com representação canônica $\varphi = b/a$. Então,*

1. $\text{BMOA} \subset \mathcal{H}(b)$ se, e somente se, $\varphi \in H^2$;
2. $H^p \subset \mathcal{H}(b)$, com $2 < p < \infty$, se, e somente se, $\varphi \in H^{\tilde{p}}$, onde

$$\tilde{p} = \frac{2p}{p-2}.$$

Veja (24, Corolário 3.2 e Proposição 3.3) para as demonstrações desses resultados. Esse proposição nos permite obter o seguinte resultado.

Teorema 3.1.7. *Seja $\varphi \in N^+$ tal que $\varphi\mathcal{N} \cap H^2$ é denso em H^2 e $1/\varphi \in H^p$. Temos que:*

1. se $p = 2$, então $\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \overline{\mathbb{C}_1}$,
2. se $2 < p < \infty$, então $\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}$, e
3. se $p = \infty$, então $\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, i.e., a HR é verdadeira.

Demonstração. Segue da Proposição 3.1.5 que

$$\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{H}(b) = \{0\},$$

onde b/a é a representação canônica de $1/\varphi \in H^p \subset N^+$. Se $1/\varphi \in H^2$, segue do item 1 da Proposição 3.1.6 que $\text{BMOA} \subset \mathcal{H}(b)$. Se $1/\varphi \in H^\infty$, então $T_{1/\varphi}^* = T_{1/\bar{\varphi}}$ é um operador limitado em H^2 , pois $1/\bar{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Em particular, $\mathcal{H}(b) = \text{Dom}(T_{1/\varphi}^*) = H^2$. Com isso e o Corolário 3.1.3, concluimos os itens 1 e 3.

Se $2 < p < \infty$, o item 2 da Proposição 3.1.6 nos diz que $H^{\tilde{p}} \subset \mathcal{H}(b)$ para $p = \frac{2\tilde{p}}{\tilde{p}-2}$. Dessa forma, podemos usar o Corolário 3.1.3 e concluir que $\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}_{1/q}$, onde $q^{-1} + \tilde{p}^{-1} = 1$. Note que

$$p = \frac{2\tilde{p}}{\tilde{p}-2} \implies \tilde{p} = \frac{2p}{p-2} \implies \frac{1}{q} = 1 - \frac{p-2}{2p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p},$$

o que conclui a demonstração. □

Ainda não conhecemos nenhum exemplo de φ que satisfaça algumas das hipótese do teorema anterior. Apesar disso, em (2), é observado que as funções $f_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$ para $0 < \alpha < 1/2$ são bons candidatos para funcionarem como φ no Teorema 3.1.7. De fato, $f_\alpha \in H^\infty$ e $1/f_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha} \in H^p$ para todo $p < 1/\alpha$ (veja, por exemplo, (11, Exemplo 1.1.14)). Em particular, mostrar que $f_\alpha\mathcal{N}$ é denso em H^2 para algum $0 < \alpha < 1/2$ nos daria o semiplano não-trivial $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}+\alpha}$.

3.2 Biortogonalidade e $\{h_k : k \geq 2\}$

Essa seção é dedicada a provar o seguinte resultado.

Teorema 3.2.1. *Para cada $k \geq 2$, seja $u_k \in H^2$ dada por*

$$u_k(z) = \sum_{d|k} \frac{\mu(k/d)}{k/d} (z^{d-1} - z^d), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

onde μ denota a função de Möbius. Então, $(u_k)_{k \geq 2}$ é uma sequência completa e biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$ (definida em (2.3)) em H^2 .

Antes disso, contudo, iremos comentar brevemente sobre o contexto e a motivação desse Teorema. Como observado anteriormente, a HR é equivalente à completude de $\{h_k : k \geq 2\}$ em H^2 . A Proposição 1.7.3 mostra que é possível estudar completude de sequências em um espaço de Hilbert estudando suas sequências biortogonais, desde que essas existam ou, equivalentemente, que a sequência de interesse seja minimal.

Em (44, Teorema 7), Vasyunin mostra que a sequência $(r_k)_{k \geq 2}$ do Corolário 1.9.10 é minimal construindo uma sequência biortogonal a $(-r_k/k)_{k \geq 2}$ em ℓ_ω^2 . Com o mapa unitário de ℓ_ω^2 a H^2 usado na seção 2.1, somos capazes de encontrar a sequência $(u_k)_{k \geq 2}$ definida acima, que é biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$ pelo mapa ser unitário. Contudo, é possível mostrar diretamente que $(h_k)_{k \geq 2}$ e $(u_k)_{k \geq 2}$ são biortogonais, como faremos no Teorema 3.2.3.

Com isso, segue da Proposição 1.7.3 e do Teorema 2.1.3 que a HR é equivalente a $(u_k)_{k \geq 2}$ ser a única sequência biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$. Por outro lado, é interessante perguntarmos se $(u_k)_{k \geq 2}$ ser completa está relacionada à HR. Balazard observa em (45, seção 2.2) que $(u_k)_{k \geq 1}$ é completa, i.e., a sequência $(u_k)_{k \geq 2}$ com o elemento adicional $u_1(z) = 1 - z$. O Teorema principal dessa seção, como mencionado, mostra que u_1 não é necessário para garantir a completude.

A ideia da demonstração do Teorema 3.2.1 é mostrar que $(h_k)_{k \geq 2}$ é a única sequência biortogonal a $(u_k)_{k \geq 2}$, o que prova que $(u_k)_{k \geq 2}$ é completo pela Proposição 1.7.3. A observação chave que nos possibilita mostrar isso é que $u_k = (I - S)v_k$, onde $(v_k)_{k \geq 2}$ é a sequência de funções dadas por

$$v_k(z) = \sum_{d|k} \frac{\mu(k/d)}{k/d} z^{d-1}.$$

Note que, para todo $k \geq 2$, v_k é um polinômio, em particular, $\{v_k : k \geq 2\} \subset H^2$. Além disso,

$$\langle h_k, u_j \rangle = \langle h_k, (I - S)v_j \rangle = \langle (I - S^*)h_k, v_j \rangle. \quad (3.1)$$

Isso nos permite estudar as sequências biortogonais a $(u_k)_{k \geq 2}$ através de $(v_k)_{k \geq 2}$.

A demonstração do Teorema 3.2.1 será dividida em quatro passos:

Passo 1. Calcular os coeficientes de Taylor de $(I - S^*)h_k$ (subseção 3.2.1).

Passo 2. Mostrar que $(h_k)_{k \geq 2}$ e $(u_k)_{k \geq 2}$ são biortogonais (subseção 3.2.2).

Passo 3. Caracterizar as sequências biortogonais a $(v_k)_{k \geq 2}$ (subseção 3.2.3).

Passo 4. Mostrar que $(h_k)_{k \geq 2}$ é a única sequência biortogonal a $(u_k)_{k \geq 2}$ (subseção 3.2.4).

3.2.1 Coeficientes de $(I - S^*)h_k$

Usemos a Proposição 2.1.4 para calcular os coeficientes de $(I - S^*)h_k$.

Lema 3.2.2. Para cada $k \geq 2$, temos que

$$(I - S^*)h_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_k(n+1)z^n,$$

onde

$$B_k(n) = \begin{cases} \frac{k}{n} - \frac{1}{n}, & k|n \\ -\frac{1}{n}, & k \nmid n \end{cases}.$$

Demonstração. Como na Proposição 2.1.4, sejam

$$c_n(k) = H(n) - H\left(\frac{n}{k}\right) - \log k,$$

os coeficientes de Taylor (em torno de 0) de h_k , onde $H(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$. Ou seja,

$$h_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k)z^n$$

Assim, por (2.5), temos que o coeficiente de z^n de $(I - S^*)h_k$ é dado por $c_n(k) - c_{n+1}(k)$.

Equivalentemente, o coeficiente de z^{n-1} é dado por

$$\begin{aligned} c_{n-1}(k) - c_n(k) &= H(n-1) - H\left(\frac{n-1}{k}\right) - \log k - \left(H(n) - H\left(\frac{n}{k}\right) - \log k\right) \\ &= -\frac{1}{n} + \sum_{\frac{n-1}{k} < m \leq \frac{n}{k}} \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Note que existe $m \in \mathbb{N}$ com $\frac{n-1}{k} < m \leq \frac{n}{k}$ se e somente se $mk \leq n < mk+1$, i.e., se $n = mk$. Assim, o somatório acima é não nulo se e só se $k|n$, e nesse caso tem soma $1/m = k/n$. Desse modo,

$$B_k(n) = c_{n-1}(k) - c_n(k) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & k \nmid n \\ \frac{k}{n} - \frac{1}{n}, & k|n \end{cases}$$

e

$$(I - S^*)h_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_k(n)z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_k(n+1)z^n.$$

□

3.2.2 Uma sequência biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$

Com isso, somos capazes de verificar diretamente em H^2 que as sequências são, de fato, biortogonais.

Teorema 3.2.3. *A sequência $(u_k)_{k \geq 2}$ é biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$.*

Demonstração. Por (3.1) e pelo Lema 3.2.2, basta mostrarmos que

$$\sum_{d|j} B_k(d) \frac{\mu(j/d)}{j/d} = \langle (I - S^*)h_k, v_j \rangle = \delta_{kj}, \quad \forall k, j \geq 2.$$

Vamos dividir em dois casos, motivados pela definição de B_k :

(i) Caso $k \nmid j$. Nesse caso, $k \nmid d$ para todo $d|j$, logo

$$\sum_{d|j} B_k(d) \frac{\mu(j/d)}{j/d} = \sum_{d|j} -\frac{1}{d} \frac{\mu(j/d)}{j/d} = -\frac{1}{j} \sum_{d|j} \mu(j/d) = -\frac{1}{j} \delta_{1j} = 0,$$

onde as últimas duas igualdades seguem da Proposição 1.8.5 e do fato de $j \geq 2$.

Como $k \nmid j \implies k \neq j$, a equação acima pode ser reescrita como $\langle h_k, u_j \rangle = \langle (I - S^*)h_k, v_j \rangle = \delta_{kj}$ se $j, k \geq 2$ e $k \nmid j$.

(ii) Caso $k|j$. Seja $q = \frac{j}{k}$. Então

$$\sum_{d|j} B_k(d) \frac{\mu(j/d)}{j/d} = \sum_{\substack{d|j \\ k \nmid d}} -\frac{1}{d} \frac{\mu(j/d)}{j/d} + \sum_{\substack{d|j \\ k|d}} \left(\frac{k}{d} - \frac{1}{d} \right) \frac{\mu(j/d)}{j/d}.$$

O último somatório é sobre a variável d que percorre o conjunto dos naturais que satisfazem $k|d$ e $d|j$. Observe que $k|d \iff d = mk$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $j = qk$, segue que $d|j \iff m|q$ e, nesse caso, $j/d = q/m$. Dessa forma, o último somatório pode ser reescrito como

$$\sum_{\substack{d|j \\ k|d}} \left(\frac{k}{d} - \frac{1}{d} \right) \frac{\mu(j/d)}{j/d} = \sum_{\substack{d|j \\ k|d}} -\frac{1}{d} \frac{\mu(j/d)}{j/d} + \sum_{m|q} \frac{1}{m} \frac{\mu(q/m)}{q/m}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{d|j} B_k(d) \frac{\mu(j/d)}{j/d} &= \sum_{d|j} -\frac{1}{d} \frac{\mu(j/d)}{j/d} + \sum_{m|q} \frac{1}{m} \frac{\mu(q/m)}{q/m} \\ &= -\frac{1}{j} \sum_{d|j} \mu(j/d) + \frac{1}{q} \sum_{m|q} \mu(q/m) = -\frac{1}{j} \delta_{1j} + \frac{1}{q} \delta_{1q}. \end{aligned}$$

Como $j \geq 2$, o primeiro termo do lado direito da equação é sempre 0. Já o segundo termo vale 1 precisamente quando $q = 1$, ou equivalentemente, $k = j$ (ou seja, $\delta_{1q}/q = \delta_{kj}$).

Juntando os dois casos acima, temos que $\langle h_k, u_j \rangle = \delta_{kj}$ for all $k, j \geq 2$. $\square$

3.2.3 Sequências biortogonais a $(v_k)_{k \geq 2}$

Vamos agora caracterizar as sequências em H^2 biortogonais a $(v_k)_{k \geq 2}$.

Lema 3.2.4. *Uma sequência $(f_k)_{k \geq 2} \subset H^2$ é biortogonal a $(v_k)_{k \geq 2}$ se, e somente se, existe uma sequência de números complexos $(c_k)_{k \geq 2}$ tal que*

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n+1) z^n, \quad \forall k \geq 2,$$

onde a sequência $(A_k(n))_{n \geq 1}$ para cada $k \geq 2$ é dada por

$$A_k(n) = \begin{cases} \frac{c_k}{n} + \frac{k}{n}, & k|n \\ \frac{c_k}{n}, & k \nmid n \end{cases}.$$

Demonstração. Sejam $(f_k)_{k \geq 2} \subset H^2$ uma sequência biortogonal a $(v_k)_{k \geq 2}$ e $A_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ a função aritmética dada pelos seus coeficientes de Taylor, i.e.,

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n+1) z^n, \quad \forall k \geq 2.$$

Como os coeficientes de v_j são reais, a condição de biortogonalidade é dada por

$$\sum_{d|j} A_k(d) \frac{\mu(j/d)}{j/d} = \langle f_k, v_j \rangle = \delta_{kj}, \quad \forall k, j \geq 2. \quad (3.2)$$

Sejam $I_k, \nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ as funções aritméticas $I_k(n) = \delta_{kn}$ (como no Exemplo 1.8.2) e $\nu(n) = \frac{\mu(n)}{n}$. Então (3.2) é equivalente a

$$\forall k \geq 2, \exists c_k \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad A_k * \nu = c_k I_1 + I_k, \quad (3.3)$$

onde $*$ denota o produto de Dirichlet (veja a definição 1.8.3). De fato, (3.2) não impõe nenhuma restrição sobre $A_k * \nu(1)$, pois só vale para $j \geq 2$, logo $c_k = A_k * \nu(1)$ pode assumir qualquer valor complexo e (3.2) e (3.3) são equivalentes. Observe que

$$\sum_{d|k} \frac{\mu(k/d)}{k/d} \frac{1}{d} = \frac{1}{k} \delta_{1k} = I_1(k),$$

i.e., $\nu^{-1}(n) = \frac{1}{n}$, pois $I_1 = I$ é a unidade para $*$. Além disso,

$$I_k * \nu^{-1}(n) = \sum_{d|n} \delta_{kd} \frac{1}{n/d} = \begin{cases} \frac{k}{n}, & k|n \\ 0, & k \nmid n \end{cases}.$$

Assim, (3.3) é equivalente a

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \exists c_k \in \mathbb{C} \text{ such that } A_k(n) &= c_k \nu^{-1}(n) + I_k * \nu^{-1}(n) \\ &= \begin{cases} \frac{c_k}{n} + \frac{k}{n}, & k|n \\ \frac{c_k}{n}, & k \nmid n \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto, a condição de biortogonalidade (3.2) é equivalente à condição acima, como queríamos. Finalmente $f_k \in H^2$ pois a sua sequência de coeficientes A_k claramente pertence a ℓ^2 (pois é a soma de duas sequências de ℓ^2 , por exemplo). $\square$

3.2.4 Completude de $(u_k)_{k \geq 2}$

Por fim, mostraremos que $(h_k)_{k \geq 2}$ é a única sequência em H^2 biortogonal a $(u_k)_{k \geq 2}$. Para tanto, observe que

$$\langle \varphi_k, u_j \rangle = \langle \varphi_k, (I - S)v_j \rangle = \langle (I - S^*)\varphi_k, v_j \rangle,$$

para toda sequência $(\varphi_k)_{k \geq 2}$ de funções de H^2 . Assim, $I - S^*$ mapeia (sobrejetivamente) sequências em H^2 biortogonais a $(u_k)_{k \geq 2}$ a sequências em $(I - S^*)H^2$ biortogonais a $(v_k)_{k \geq 2}$. Note que essa correspondência é bijetiva pois $I - S^*$ é injetiva em H^2 (veja a seção 2.3). Por conta disso, é suficiente provar que $((I - S^*)h_k)_{k \geq 2}$ é a única sequência em $(I - S^*)H^2$ biortogonal a $(v_k)_{k \geq 2}$.

Lema 3.2.5. *Uma sequência $(f_k)_{k \geq 2}$ de elementos de $(I - S^*)H^2$ é biortogonal a $(v_k)_{k \geq 2}$ se, e somente se,*

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_k(n+1)z^n = (I - S^*)h_k, \quad (3.4)$$

onde B_k são as funções aritméticas definidas no Lema 3.2.2.

Demonstração. Sejam $(f_k)_{k \geq 2} \subset (I - S^*)H^2$ uma sequência biortogonal a $(v_k)_{k \geq 2}$ e $\varphi_k \in H^2$ tal que $f_k = (I - S^*)\varphi_k$. Se $b_k(n)$ é o coeficiente de z^n na representação em série de potências de φ_k , então

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_k(n) - b_k(n+1))z^n.$$

Pelo Lema 3.2.4, para todo $k \geq 2$, existe uma constante $c_k \in \mathbb{C}$ tal que

$$b_k(n-1) - b_k(n) = A_k(n) = \begin{cases} \frac{k}{n} + \frac{c_k}{n}, & k|n \\ \frac{c_k}{n}, & k \nmid n \end{cases}, \quad \forall n \geq 1.$$

Olhando para a primeira igualdade da equação anterior, observamos que a soma $\sum_{j=1}^n A_k(j)$ é telescópica, logo

$$\begin{aligned} b_k(n) &= b_k(0) - \sum_{j=1}^n A_k(j) = b_k(0) - \sum_{j \leq n} \frac{c_k}{j} - \sum_{\substack{j \leq n \\ k|j}} \frac{k}{j} \\ &= b_k(0) - c_k \sum_{j \leq n} \frac{1}{j} - \sum_{m \leq n/k} \frac{1}{m} = b_k(0) - c_k H(n) - H\left(\frac{n}{k}\right), \end{aligned}$$

onde H é novamente a função definida no Corolário 1.8.20. Para cada $k \geq 2$, temos que $\varphi_k \in H^2$, ou seja, $(b_k(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, assim, em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_k(n) = 0$. Logo, $(c_k H(n) + H(n/k))_{n \in \mathbb{N}}$ também é convergente para todo $k \geq 2$. Usando a estimativa do Corolário 1.8.20, obtemos

$$\begin{aligned} c_k H(n) + H\left(\frac{n}{k}\right) &= c_k \log n + c_k \gamma + \log n - \log k + \gamma + O\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= (c_k + 1) \log n + (c_k + 1) \gamma - \log k + O\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

que converge quando $n \rightarrow \infty$ se, e somente se, $c_k = -1$. Por conta disso, $c_k = -1$ para todo $k \geq 2$. Note que, nesse caso, $A_k = B_k$ e obtemos (3.4). A recíproca é equivalente ao Teorema 3.2.3 por conta da observação do início da subseção 3.2.4. $\square$

3.3 A fórmula dos núcleos de zeta

No artigo (3), é definida uma família de funcionais lineares em $\mathcal{P} = \text{span}\{z^k : k \in \mathbb{N}\}$, parametrizada por $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dada por

$$\Lambda^{(s)}(1) = -\frac{1}{s} \quad \text{e} \quad \Lambda^{(s)}(z^k) = -\frac{1}{s}((k+1)^{1-s} - k^{1-s}), \quad \forall k \geq 1.$$

Se $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, esses funcionais são contínuos para a norma de H^2 (3, Lema 2.1). Como $\mathcal{P}$ é denso em H^2 , a condição acima define para cada $s \in \mathbb{C}_{1/2}$ um único funcional linear limitado em H^2 . Como H^2 é um espaço de Hilbert, segue do Teorema de representação de Riesz-Fréchet (veja B.3.1) que isso determina unicamente, para cada $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, uma função $\kappa_s \in H^2$ tal que $\langle f, \kappa_s \rangle = \Lambda^{(s)}(f)$ para todo $f \in H^2$. Em particular, pela definição de $\Lambda^{(s)}$ sabemos que

$$\kappa_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\bar{s}) z^k, \quad \text{onde} \quad \phi_k(s) = \Lambda^{(s)}(z^k), \quad \forall k \geq 1, \quad (3.5)$$

pois $\overline{\phi_k(s)} = \phi_k(\bar{s})$. De fato, temos um resultado ainda mais forte, (3, Proposição 4.7) nos diz que, se $1 \leq p \leq 2$ e $s \in \mathbb{C}_{1/p}$, então $\Lambda^{(s)}$ é limitado em H^p . Pela dualidade de Cauchy (veja Teorema 1.6.2), temos que $\kappa_s \in H^q$, onde $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Denominamos as funções $\{\kappa_s : s \in \mathbb{C}_{1/2}\}$ de núcleos de zeta. Isso se deve à importante relação:

$$\langle h_k, \kappa_s \rangle = \Lambda^{(s)}(h_k) = -\frac{\zeta(s)}{s}(k^{1-s} - 1), \quad \forall s \in \mathbb{C}_{1/2}, k \geq 2. \quad (3.6)$$

Note que isso deixa claro a “parte fácil” do critério de Báez-Duarte, i.e., que se $\{h_k : k \geq 2\}$ é completo, então HR é verdadeira.

O objetivo dessa seção será apresentar a demonstração feita em (2) para (3.6). Essa demonstração é feita em dois passos. Primeiro, provamos que (3.6) vale quando $s \in \mathbb{C}_1$ e, depois, mostramos que a função $s \mapsto \langle h_k, \kappa_s \rangle$ possui uma continuação analítica em $\mathbb{C}_0$ e é holomorfa em $\mathbb{C}_{1/2}$. Isso conclui a demonstração pois a função $s \mapsto -\frac{\zeta(s)}{s}(k^{1-s} - 1)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, portanto o resultado segue pelo princípio da continuação analítica.

Lema 3.3.1. *A equação (3.6) vale quando $s \in \mathbb{C}_1$.*

Demonstração. Seja $(c_n(k))_n$ a sequência dos coeficientes de Taylor de h_k , calculados na Proposição 2.1.4. Como $\overline{\phi_n(\bar{s})} = \phi_n(s)$, temos

$$\begin{aligned} \langle h_k, \kappa_s \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) \overline{\phi_n(\bar{s})} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) \phi_n(s) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{c_0(k)}{s} - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N c_n(k) ((n+1)^{1-s} - n^{1-s}) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} \sum_{n=0}^N c_n(k) (n+1)^{1-s} + \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N c_n(k) n^{1-s} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} \sum_{n=1}^N (c_{n-1}(k) - c_n(k)) n^{1-s} - \frac{1}{s} c_N(k) (N+1)^{1-s} \right). \end{aligned}$$

Como $c_n(k) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (veja a Proposição 2.1.4), temos que $c_N(k)(N+1) = O(1)$. Além disso, $(N+1)^{-s} \rightarrow 0$ para qualquer $\operatorname{Re}(s) > 0$. Assim, usando a fórmula de $c_{n-1}(k) - c_n(k)$ obtida no Lema 3.2.2, temos que

$$\begin{aligned} \langle h_k, \kappa_s \rangle &= -\frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N (c_{n-1}(k) - c_n(k)) n^{1-s} \right) \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N -\frac{1}{n} n^{1-s} + \sum_{\substack{n=1 \\ k|n}}^N \frac{k}{n} n^{1-s} \right) \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N n^{-s} + \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{k}\right]} \frac{1}{m} (mk)^{1-s} \right) \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\sum_{n=1}^N n^{-s} + k^{1-s} \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{k}\right]} \frac{1}{m} m^{1-s} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{s} (-\zeta(s)) - \frac{k^{1-s}}{s} \zeta(s) = -\frac{\zeta(s)}{s} (k^{1-s} - 1), \end{aligned}$$

onde em (*) separamos o limite em dois e usamos a definição de ζ para $\operatorname{Re}(s) > 1$. $\square$

Agora, mostramos que a série usada para definir o produto interno $\langle h_k, \kappa_s \rangle$ define uma função holomorfa em $\mathbb{C}_0$.

Lema 3.3.2. *A função $\Phi_k : \mathbb{C}_{1/2} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$\Phi_k(s) := \langle h_k, \kappa_s \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) \phi_n(s). \quad (3.7)$$

tem uma continuação analítica em $\mathbb{C}_0$ para cada $k \geq 2$.

Demonstração. Como cada ϕ_n é holomorfa em $\mathbb{C}_0$, é suficiente provar que a série em (3.7) converge uniformemente em cada semiplano $\mathbb{C}_\rho$ com $\rho > 0$. Note que

$$|\phi_n(s)| = \frac{|1-s|}{|s|} \left| \int_n^{n+1} y^{-s} dy \right| \leq \frac{|1-s|}{|s|} n^{-\operatorname{Re}(s)} = O(n^{-\rho})$$

para $s \in \mathbb{C}_\rho$ com $\rho > 0$, onde a constante implícita depende de ρ , mas não de s . Além disso, $c_n(k) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ para cada $k \geq 2$, logo obtemos $c_n(k)\phi_n(s) = O(n^{-1-\rho})$ para $s \in \mathbb{C}_\rho$. Então, segue do teste M de Weierstrass que Φ_k converge uniformemente em $\mathbb{C}_\rho$ para $\rho > 0$. $\square$

Observação 3.3. Note que a estimativa calculada acima nos dá uma prova alternativa de que $\kappa_s \in H^2$ quando $s \in \mathbb{C}_{1/2}$. Além disso, se $s \in \mathbb{C}_{1/p}$ a mesma estimativa mostra que $(\phi_n(\bar{s}))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, logo, se $1 \leq p \leq 2$, $\kappa_s \in H^q$, onde $q^{-1} + p^{-1} = 1$, pelo (13, Teorema 6.1). Em particular, como H^q é o dual de Cauchy de H^p pelo Teorema 1.6.2, obtemos que $\Lambda^{(s)} \in (H^p)^*$ se $1 \leq p \leq 2$ e $s \in \mathbb{C}_{1/p}$. Isso é parte da demonstração de (3, Proposição 4.7).

Como comentado na seção 3.2, a HR é equivalente a $(u_k)_{k \geq 2}$ ser a única sequência biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$. Caso exista um zero não-trivial de ζ fora da reta $\operatorname{Re}(s) = 1/2$, a identidade (3.6) nos permite encontrar outras sequências biortogonais a $(h_k)_{k \geq 2}$.

Corolário 3.3.3. *Se $\zeta(s_0) = 0$ para algum $1/2 < \operatorname{Re}(s_0) < 1$, então*

$$\langle h_k, u_j + c_j \kappa_{s_0} \rangle = \delta_{kj} \quad \forall \quad k, j \geq 2, c_j \in \mathbb{C}.$$

Então, para cada sequência de números complexos $(c_j)_{j \geq 2}$, a sequência $(u_j + c_j \kappa_{s_0})_{j \geq 2}$ também é biortogonal a $(h_k)_{k \geq 2}$.

Demonstração. Isso segue de (3.6) e do Teorema 3.2.3 pois $\langle h_k, \kappa_{s_0} \rangle = 0$ para todo $k \geq 2$. $\square$

3.4 A conjectura do incumprimento da HR

Iremos discutir nessa seção uma conjectura sobre o número de zeros não-triviais fora da reta crítica $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Conjectura 3.1. *Se a hipótese de Riemann é falsa, existem infinitos zeros de ζ na faixa crítica e fora da reta crítica, i.e., tais que $0 < \operatorname{Re}(s) < 1/2$ ou $1/2 < \operatorname{Re}(s) < 1$.*

Chamamos essa conjectura de conjectura do incumprimento da hipótese de Riemann (IHR). O objetivo principal dessa seção é mostrar a seguinte relação.

Teorema 3.4.1. *A conjectura IHR implica que a dimensão de $\mathcal{N}^\perp$ é 0 ou ∞ .*

Denotemos por $\mathcal{K} := \{\kappa_s : s \in \mathbb{C}_{1/2}\}$ a família dos núcleos de zeta. Se $\zeta(s) = 0$ para algum $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, então $\langle h_k, \kappa_s \rangle = 0$ para todo $k \geq 2$ por (3.6), logo $\kappa_s \in \mathcal{N}^\perp$. Então, a conjectura IHR implica que $\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{K}$ é vazia (pelo Teorema 2.1.3) ou tem infinitos elementos. Assim, o Teorema 3.4.1 segue se mostrarmos que $\mathcal{K}$ é linearmente independente em H^2 . Primeiro, mostramos que os elementos de $\mathcal{K}$ são autovetores em comum para as adjuntas dos operadores $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ definidos na seção 2.2.

Note que se $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H^2$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos pela definição de W_n que

$$\langle W_n^* f, z^k \rangle = \langle f, W_n z^k \rangle = \langle f, (1 + z + \cdots + z^{n-1}) z^{nk} \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} a_{nk+j},$$

logo

$$W_n^* f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{nk+j} \right) z^k.$$

Essa fórmula apareceu primeiro em (46). Vamos agora caracterizar completamente os autovetores comuns a todos os $\{W_n^* : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Proposição 3.4.2. *Seja $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$. Então $f \in H^2$ e é um autovetor em comum para os $\{W_n^* : n \in \mathbb{N}^*\}$ se, e somente se, existe uma sequência multiplicativa $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ com $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2$ e*

$$a_n = (\lambda_{n+1} - \lambda_n) a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (3.8)$$

onde a_n é o n -ésimo coeficiente de Taylor de f . Nesse caso, $W_n^* f = \lambda_n f$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Aqui, uma sequência multiplicativa é uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\lambda_n \lambda_m = \lambda_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $\lambda_1 = 1$.

Demonstração. Seja $f \in H^2 \setminus \{0\}$ tal que $W_n^* f = \lambda_n f$ para $n \in \mathbb{N}^*$, onde $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência de números complexos. Como $W_1^* = I$ e $W_{nm}^* = W_n^* W_m^*$, pois o mesmo vale para $\{W_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ (veja Proposição 2.2.1), e $f \neq 0$, segue que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é multiplicativa. Além disso,

$$\lambda_n a_k = \langle \lambda_n f, z^k \rangle = \langle W_n^* f, z^k \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} a_{nk+j}.$$

Em particular, $a_n = \lambda_{n+1} a_0 - \lambda_n a_0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, logo $a_0 \neq 0$ (pois $f \neq 0$) e $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2$.

Reciprocamente, suponha que $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ é uma função satisfazendo (3.8) para alguma sequência multiplicativa $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. A equação (3.8) implica, em particular, que $f \in H^2$ e $a_0 \neq 0$, pois $f \neq 0$. Sem perda de generalidade,

podemos assumir que $a_0 = 1$. Logo

$$\begin{aligned} (W_n^* f)(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{nk+j} \right) z^k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{nk+j} \right) z^k \\ &= \lambda_n + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{nk+n} - \lambda_{nk}) z^k = \lambda_n \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) z^k \right) = \lambda_n f(z) \end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$, onde usamos o fato das somas serem telescópicas. Portanto, $f \in H^2$ é um autovetor em comum para os operadores $\{W_n^* : n \in \mathbb{N}^*\}$, com autovalores $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. $\square$

Note que se escolhermos $\lambda_k = k^{1-\bar{s}}$ e $a_0 = -1/\bar{s}$ na Proposição 3.4.2 para qualquer $s \in \mathbb{C}_{1/2}$, temos que cada $\kappa_s \in \mathcal{K}$ é um autovetor em comum para $\{W_n^* : n \in \mathbb{N}^*\}$ (veja (3.5)) com

$$W_n^* \kappa_s = n^{1-\bar{s}} \kappa_s \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.9)$$

Queremos mostrar que para todo subconjunto finito $\{\kappa_{s_1}, \dots, \kappa_{s_\ell}\} \subset \mathcal{K}$ existe um W_n^* para o qual os autovalores correspondentes a cada κ_{s_j} sejam distintos. Isso prova a independência linear de todo subconjunto finito de $\mathcal{K}$, provando que $\mathcal{K}$ é linearmente independente. Se as partes reais de $s_1, \dots, s_\ell$ forem todas distintas, como $|n^{1-\bar{s}}| = n^{1-\text{Re}(s)}$ segue que os autovalores de W_n^* (para todo $n > 1$) correspondentes a $\kappa_{s_1}, \dots, \kappa_{s_\ell}$ são todos distintos. Se as partes reais de $s_1, \dots, s_\ell$ não forem todas distintas, precisamos usar o seguinte resultado.

Lema 3.4.3. *Dados distintos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, para apenas uma quantidade finita de números primos p existe algum par a_i, a_j com $1 \leq i < j \leq n$ tal que*

$$(a_i - a_j) \log p \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existam infinitos primos que satisfazem a propriedade (3.10). Para cada um desses primos p existem $1 \leq i < j \leq n$ e $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tais que

$$(a_i - a_j) \log p = 2\pi k \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \frac{2\pi k}{\log p} = a_i - a_j.$$

Como existem apenas uma quantidade finita de números da forma $a_i - a_j$ com $i < j$, e nenhum deles é 0, existem primos distintos p, q e $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tais que

$$\frac{2\pi k_1}{\log p} = a_i - a_j = \frac{2\pi k_2}{\log q} \implies k_2 \log p = k_1 \log q \neq 0.$$

para algum par $i < j$. Em particular, $p^{k_2} = q^{k_1} \neq 1$, uma contradição. $\square$

O próximo resultado conclui a demonstração do Teorema 3.4.1.

Proposição 3.4.4. *A família dos núcleos de zeta $\mathcal{K}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Seja $\{s_{i,j} \in \mathbb{C}_{1/2} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i\}$ um conjunto finito indexado de modo que para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m_i$, temos $\operatorname{Re}(s_{i,j}) = r_i$, onde $r_i \in (1/2, \infty)$ são tais que $r_{i_1} \neq r_{i_2}$ se $i_1 \neq i_2$. Denotemos por $a_{i,j}$ a parte imaginária de $s_{i,j}$. Assim, $a_{i,j_1} \neq a_{i,j_2}$ sempre que $j_1 \neq j_2$. Para cada $1 \leq i \leq n$, o Lema 3.4.3 aplicado a $a_{i,1}, \dots, a_{i,m_i}$ nos diz que existem apenas uma quantidade finita de primos p para os quais

$$(a_{i,j_1} - a_{i,j_2}) \log p \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad \text{para algum par } 1 \leq j_1 < j_2 \leq m_i.$$

Logo, existem infinitos primos q tais que

$$(a_{i,j_1} - a_{i,j_2}) \log q \notin 2\pi\mathbb{Z}, \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 \leq m_i. \quad (3.11)$$

Para um primo q com essa propriedade, afirmamos que $\{\kappa_{s_{i,j}} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i\}$ são autovetores de W_q^* com autovalores distintos. Para ver isso lembre que $W_q^* \kappa_s = q^{1-\bar{s}} \kappa_s$ por (3.9). Como comentado anteriormente, $|q^{1-\bar{s}_{i,j}}| = q^{1-r_i}$, o que mostra que os autovalores de $\kappa_{s_{i_1,j_1}}$ e $\kappa_{s_{i_2,j_2}}$ são distintos quando $i_1 \neq i_2$. Para o caso $i_1 = i_2 = i$, observe que

$$q^{1-\bar{s}_{i,j}} = e^{(1-\bar{s}_{i,j}) \log q} = e^{(1-r_i) \log q} e^{ia_{i,j} \log q}.$$

Dessa forma, como $e^{ia_{i,j_1} \log q} = e^{ia_{i,j_2} \log q}$ se e somente se $a_{i,j_1} \log q - a_{i,j_2} \log q \in 2\pi\mathbb{Z}$, segue de (3.11) que os autovalores são distintos também nesse caso. Portanto, $\mathcal{K}$ é linearmente independente. $\square$

Referências

- 1 NOOR, S. W. A Hardy space analysis of the Báez-Duarte criterion for the RH. *Advances in Mathematics*, v. 350, p. 242–255, 2019. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870819302336>. Citado 7 vezes nas páginas 8, 9, 17, 62, 82, 84 e 88.
- 2 CALDERARO, F.; MANZUR, J.; NOOR, W.; SANTOS, C. *Orthogonality questions in the Hardy space related to ζ -zeros*. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2203.05030>. Citado 8 vezes nas páginas 8, 9, 17, 62, 96, 100, 101 e 107.
- 3 GHOSH, A.; KREMNIZER, K.; NOOR, S. W.; SANTOS, C. F. Zero-free half-planes of the ζ -function via spaces of analytic functions. *Advances in Mathematics*, v. 455, p. 109872, 2024. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870824003876>. Citado 8 vezes nas páginas 8, 9, 93, 96, 97, 99, 107 e 109.
- 4 BOMBIERI, E. Problems of the millennium : the riemann hypothesis. In: . [s.n.], 2000. Disponível em: <http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- 5 HADAMARD, J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, v. 24, p. 199–220, 1896. Citado 4 vezes nas páginas 15, 72, 78 e 97.
- 6 POUSSIN, C. d. l. V. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, v. 20-2, p. 183 – 256, 281 – 297, 1896. Citado 4 vezes nas páginas 15, 72, 78 e 97.
- 7 RIEMANN, B. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. 1859. 671-680 p. Citado na página 16.
- 8 NYMAN, B. *On some groups and semigroups of translations*. Tese (Doutorado) — Thesis, Uppsala, 1950. Citado 3 vezes nas páginas 16, 75 e 88.
- 9 BEURLING, A. A closure problem related to the Riemann zeta-function. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 41, n. 5, p. 312–314, 1955. Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.41.5.312>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 75 e 97.
- 10 BÁEZ-DUARTE, L. A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni*, Accademia Nazionale dei Lincei, v. 14, n. 1, p. 5–11, 3 2003. Disponível em: <http://eudml.org/doc/252348>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 75 e 79.

- 11 MARTÍNEZ-AVENDAÑO, R. A.; ROSENTHAL, P. *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*. [S.l.]: Springer New York, NY, 2007. Citado 10 vezes nas páginas 19, 28, 31, 33, 34, 44, 54, 80, 89 e 101.
- 12 ARONSZAJN, N. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 68, p. 337–404, 1950. Citado na página 20.
- 13 DUREN, P. *Theory of H^p Spaces*. [S.l.]: Dover Publications, 2000. (Dover books on mathematics). ISBN 9780486411842. Citado 13 vezes nas páginas 23, 26, 28, 35, 36, 44, 47, 48, 61, 62, 80, 93 e 109.
- 14 RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. Third. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987. (Mathematics series). ISBN 9780071002769. Citado 12 vezes nas páginas 26, 28, 32, 33, 34, 43, 44, 47, 76, 80, 121 e 122.
- 15 NIKOLSKI, N. *Hardy Spaces*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). Citado 4 vezes nas páginas 26, 75, 77 e 80.
- 16 HEDENMALM, H.; KORENBLUM, B.; ZHU, K. *Theory of Bergman Spaces*. 1. ed. New York: Springer, 2000. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 978-0-387-98791-0. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 80.
- 17 EL-FALLAH, O.; KELLAY, K.; MASHREGHI, J.; RANSFORD, T. *A Primer on the Dirichlet Space*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. (Cambridge Tracts in Mathematics). Citado 5 vezes nas páginas 39, 41, 43, 44 e 80.
- 18 FRICAIN, E.; MASHREGHI, J. *The Theory of $H(b)$ Spaces*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. (New Mathematical Monographs). Citado 7 vezes nas páginas 48, 50, 54, 56, 57, 58 e 80.
- 19 European Mathematical Society. Fejér-Riesz theorem. In: *Encyclopedia of Mathematics*. [s.n.], 2025. Disponível em: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fej%C3%A9r-Riesz_theorem&oldid=53455. Citado na página 50.
- 20 SARASON, D. Unbounded Toeplitz operators. *Integral Equations and Operator Theory*, v. 61, p. 281–298, 2008. ISSN 1420-8989. Citado 5 vezes nas páginas 52, 56, 57, 58 e 80.
- 21 BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 1. ed. [S.l.]: Springer New York, NY, 2010. XIV, 600 p. (Universitext). ISBN 978-0-387-70913-0. Citado 3 vezes nas páginas 57, 98 e 124.
- 22 SARASON, D. Local Dirichlet spaces as de Branges-Rovnyak spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 125, n. 7, p. 2133–2139, 1997. ISSN 00029939, 10886826. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2162319>. Citado 3 vezes nas páginas 58, 80 e 81.
- 23 ROSS, W.; SHAPIRO, H. *Generalized Analytic Continuation*. American Mathematical Society, 2002. (Memoirs of the American Mathematical Society). ISBN 9780821831755. Disponível em: <https://books.google.pn/books?id=r7oFCAAQBAJ>. Citado na página 60.

- 24 MALMAN, B.; SECO, D. *Embeddings into de Branges-Rovnyak spaces*. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2404.00736>. Citado 4 vezes nas páginas 60, 61, 100 e 101.
- 25 ALEMAN, M. C. A.; PERSSON, A.-M. Preduals of Q_p -spaces. *Complex Variables and Elliptic Equations*, Taylor & Francis, v. 52, n. 7, p. 605–628, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/17476930701273515>. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- 26 PIETRZYCKI, P. On the cauchy dual operator and duality for banach spaces of analytic functions. *Studia Mathematica*, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, v. 271, n. 2, p. 121–150, 2023. ISSN 1730-6337. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4064/sm210907-19-9>. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- 27 FEFFERMAN, C. Characterization of bounded mean oscillation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 77, p. 587–588, 1971. Citado na página 61.
- 28 YOUNG, R. M. On complete biorthogonal systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 83, n. 3, p. 537–540, 1981. ISSN 00029939, 10886826. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2044113>. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.
- 29 CHRISTENSEN, O. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. 2. ed. [S.l.]: Birkhäuser Cham, 2016. XXV, 704 p. (Applied and Numerical Harmonic Analysis). ISBN 978-3-319-25611-5. Citado na página 64.
- 30 APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. 1. ed. [S.l.]: Springer New York, NY, 1976. (Undergraduate Texts in Mathematics). Citado 5 vezes nas páginas 65, 66, 70, 72 e 76.
- 31 BENITO, M.; NAVAS, L. M.; VARONA, J. L. Möbius inversion formulas for flows of arithmetic semigroups. *Journal of Number Theory*, v. 128, n. 2, p. 390–412, 2008. ISSN 0022-314X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X07001205>. Citado na página 67.
- 32 BÁEZ-DUARTE, L. A class of invariant unitary operators. *Advances in Mathematics*, v. 144, n. 1, p. 1–12, 1999. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870898918011>. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 93.
- 33 OLIVEIRA, W. D. *Zeros da função zeta de Riemann e o teorema dos números primos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2013. Citado na página 72.
- 34 LANDAU, E. *Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$* . Tese (Doutorado), 1899. Tradução de Coons, M. em arXiv:0803.3787. Citado na página 72.
- 35 LANDAU, E. Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 129, p. 812 – 815, 1899. Collected Works, Vol. 1. Essen: Thales Verlag, 1985, pp. 84–88. Citado na página 72.

- 36 COLEMAN, M. *Elementary Prime Number Theory*. 2018. Disponível em: <https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/coleman/old/MATH41022/Present/Notes/Notes%202021-19%20Elementary%20Prime%20Theory.pdf>. Citado na página 72.
- 37 BAGCHI, B. On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Mathematical Sciences*, v. 116, p. 137–146, 2006. ISSN 0973-7685. Citado 3 vezes nas páginas 75, 78 e 79.
- 38 VILLA, J. C. M. *A abordagem de Nyman-Beurling para a hipótese de Riemann*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, 2018. Acessado em: 5 mai. 2025. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1633233>. Citado na página 75.
- 39 TITCHMARSH, E.; HEATH-BROWN, D. *The Theory of the Riemann Zeta-function*. Clarendon Press, 1986. (Oxford science publications). ISBN 9780198533696. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1CyfApMt8JYC>. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 81.
- 40 COSTARA, C.; RANSFORD, T. Which de branges–rovnyak spaces are dirichlet spaces (and vice versa)? *Journal of Functional Analysis*, v. 265, n. 12, p. 3204–3218, 2013. ISSN 0022-1236. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123613003273>. Citado na página 81.
- 41 STEIN, E.; SHAKARCHI, R. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2010. (Princeton lectures in analysis). ISBN 9781400831159. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=0ECHh9tjPUAC>. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 122.
- 42 BÁEZ-DUARTE, L. On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis. *Advances in Mathematics*, v. 101, n. 1, p. 10–30, 1993. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870883710388>. Citado na página 93.
- 43 FOLLAND, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. [S.l.]: Wiley, 2013. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts). ISBN 9781118626399. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 121.
- 44 VASYUNIN, V. I. On a biorthogonal system associated with the Riemann hypothesis. *Algebra i Analiz*, v. 7, p. 118 – 335, 1995. Tradução em St. Petersburg Math. J., v. 7, n. 3, p. 405-419, 1996. Citado na página 102.
- 45 BALAZARD, M. An arithmetical function related to Báez-Duarte's criterion for the Riemann hypothesis. In: _____. *Harmonic Analysis and Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2021. p. 43–58. ISBN 978-3-030-61887-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-030-61887-2_3. Citado na página 102.
- 46 MANZUR, J.; NOOR, W.; SANTOS, C. F. A weighted composition semigroup related to three open problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 525, n. 1, p. 127261, 2023. ISSN 0022-247X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X23002640>. Citado na página 110.

-
- 47 BACHMAN, G.; NARICI, L. *Functional analysis*. New York: Dover, 2000. Citado na página 124.

Apêndices

APÊNDICE A

Notação de comportamento assintótico

Nesse apêndice iremos definir e comentar sobre as notações que usamos no texto para indicar o comportamento assintótico de funções e sequências.

Definição A.0.1. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ funções definidas em um espaço topológico X e suponha que $g(x) > 0$ para todo $x \in X$. Dizemos que:

1. f é da ordem de g em torno de $x_0 \in X$, e denotamos por $(f = O(g))$ quando $x \rightarrow x_0$, se existe uma constante $C > 0$ e uma vizinhança U de x_0 tais que

$$|f(x)| \leq Cg(x), \quad \forall x \in U.$$

2. $f = o(g)$ quando $x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3. $f \sim g$ quando $x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Analogamente, se $X = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, dizemos que:

- 1'. $f = O(g)$ quando $x \rightarrow \infty$ se existem constantes $C, M > 0$ tais que

$$|f(x)| \leq Cg(x), \quad \text{sempre que } x > M.$$

- 2'. $f = o(g)$ quando $x \rightarrow \infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- 3'. $f \sim g$ quando $x \rightarrow \infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Normalmente usamos essa notação omitindo em torno de que ponto estamos considerando, que está claro pelo contexto. Por exemplo, quando utilizamos essa notação para sequências, i.e., quando $X = \mathbb{N}$, sempre estamos nos referindo ao caso $n \rightarrow \infty$. Além disso, nesse caso, como existem apenas uma quantidade finita de números naturais $\leq M$, é claro que $f = O(g)$ implica que existe uma constante C' , possivelmente diferente de C tal que

$$|f(n)| \leq C'g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O mesmo vale se $X = \mathbb{R}_{>0}$ e f é contínua, por exemplo.

Note ainda que tanto $f = o(g)$ como $f \sim g$ implicam $f = O(g)$.

APÊNDICE B

Resultados clássicos

B.1 Espaços L^p

As definições e resultados a seguir podem ser encontrados em (43) e (14).

Definição B.1.1 (Espaços L^p). Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $0 < p < \infty$ e

$$\mathcal{L}^p = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Considere a relação de equivalência $f \sim g$ se $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Definimos então

$$L^p(X, \mu) = \mathcal{L}^p / \sim = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p\}$$

o conjunto das classes de equivalência de $\sim$ que possuem elementos em $\mathcal{L}^p$. Analogamente, definimos

$$\mathcal{L}^\infty = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e existe } C > 0 \text{ tal que } \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}$$

$$\text{e } L^\infty(X, \mu) = \mathcal{L}^\infty / \sim.$$

Notação. Como usual, tratamos os elementos de $L^p(X, \mu)$ como funções, tendo em mente que a igualdade só vale μ -q.t.p. Além disso, escrevemos somente $L^p(X)$, $L^p(\mu)$ ou até L^p quando estiver claro qual é o espaço de medida usado.

Para todo espaço de medida, $L^p(\mu)$ é um espaço vetorial. Se $1 \leq p < \infty$, então

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

define uma norma em $L^p(\mu)$. Caso $p = \infty$, a norma é dada por

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f| = \inf\{L \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| > L\}) = 0\}.$$

Em ambos os casos acima, a norma definida torna $L^p(\mu)$ um espaço de Banach. Em particular, $L^2(\mu)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int f \bar{g} d\mu.$$

No caso em que o espaço de medida é $(\mathbb{T}, \mathfrak{L}, m)$, i.e., o círculo unitário com a medida de Lebesgue normalizada, a teoria é bastante desenvolvida. Em particular, as funções

$$e_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, \quad e_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

formam uma base de Hilbert de $L^2(\mathbb{T})$. Em particular, cada $f \in L^2$ possui uma representação única da forma

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n,$$

onde $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$ são os coeficientes de Fourier de f , $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e a série acima converge na norma de L^2 . De fato, o mapa $f \mapsto (\hat{f}(n))$ é uma transformação unitária entre $L^2(\mathbb{T})$ e $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Teorema B.1.2 (Desigualdade de Jensen). *Seja (X, μ) um espaço de medida tal que μ é uma medida positiva e $\mu(X) = 1$. Se $f \in L^1(X, \mu)$ é uma função real, $a < f(x) < b$ para todo $x \in X$ e φ é uma função convexa em (a, b) , então*

$$\varphi \left(\int_X f d\mu \right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu.$$

Veja (14, Teorema 3.3).

Teorema B.1.3 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em $(X, \mathfrak{L})$, tais que*

$$0 \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots, \quad \forall x \in X$$

e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pontualmente para todo $x \in X$. Então f é mensurável em X e

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

B.2 Análise Complexa

As definições e resultados a seguir podem ser encontrados em (41).

Definição B.2.1. Seja $U \subset \mathbb{C}$ aberto. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em U se f é diferenciável em todo ponto $z_0 \in U$, i.e., existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

para todo $z_0 \in U$. Denotamos por $\text{Hol}(U)$ o espaço das funções holomorfas em U .

Se $X \subset \mathbb{C}$ não é aberto, dizemos que f é holomorfa em X se existe aberto $U \supset X$ tal que $f \in \text{Hol}(U)$. Semelhantemente, denotamos por $\text{Hol}(X)$ o espaço das funções holomorfas em X .

Se $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, dizemos que f é uma função inteira.

Teorema B.2.2. *Seja $(f_n) \subset \text{Hol}(U)$ uma sequência que converge uniformemente nos subconjuntos compactos de U . Então, existe $f \in \text{Hol}(U)$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de U .*

Teorema B.2.3 (Fórmula Integral de Cauchy). *Sejam $f \in \text{Hol}(U)$ e $\Gamma = z_0 + r\mathbb{T}$ um círculo em U tal que o seu interior $z_0 + r\mathbb{D}$ está contido em U . Então, para todo $z \in z_0 + r\mathbb{D}$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(s)}{(z-s)^{n+1}} ds.$$

Teorema B.2.4. *Seja $f \in \text{Hol}(U)$. Se $\{z \in U : f(z) = 0\}$ possui ponto de acumulação em U , então $f = 0$.*

Teorema B.2.5 (Teorema do Módulo Máximo). *Seja $f \in \text{Hol}(U)$ uma função não constante. Então*

$$|f(z)| < \sup_{w \in U} |f(w)|, \quad \forall z \in U.$$

Além disso, se $\bar{U}$ é compacto,

$$\max_{z \in \bar{U}} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|.$$

Dizemos que um aberto $U \subset \mathbb{C}$ é simétrico em relação a reta real se

$$z \in U \iff \bar{z} \in U.$$

Teorema B.2.6 (Princípio da reflexão de Schwartz). *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simétrico em relação a reta real. Suponha que $g \in \text{Hol}(\{z \in U : \text{Im}(z) > 0\})$ e $h \in \text{Hol}(\{z \in U : \text{Im}(z) < 0\})$ se estendem continuamente para $I = U \cap \mathbb{R}$ e*

$$g(x) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então a função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} g(z), & \text{se } \text{Im}(z) > 0, \\ h(z), & \text{se } \text{Im}(z) < 0, \\ g(x) = h(x), & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é holomorfa em U .

B.3 Análise Funcional

Teorema B.3.1. (*Teorema de representação de Riesz-Fréchet*) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para todo funcional linear limitado $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, existe um único $x \in \mathcal{H}$ tal que

$$\varphi(y) = \langle y, x \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|y\| = \|\varphi\|$.

Veja, por exemplo, (21, Teorema 5.5).

Definição B.3.2. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito positivo se

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Teorema B.3.3. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador positivo. Então existe um único operador positivo $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $U^2 = T$.

Veja, por exemplo, (47, Teorema 23.2).