UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

FREDERICK LAWTON AZEVEDO

As equações da magneto-hidrodinâmica em espaços do tipo Besov-Herz

Campinas

2023

Frederick Lawton Azevedo

As equações da magneto-hidrodinâmica em espaços do tipo Besov-Herz

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Frederick Lawton Azevedo e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Az25e Azevedo, Frederick Lawton, 1992-
As equações da magneto-hidrodinâmica em espaços do tipo Besov-Herz / Frederick Lawton Azevedo. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações da magneto-hidrodinâmica. 2. Espaços de Besov-Lorentz-Herz. 3. Espaços de Besov-weak-Herz. 4. Existência de solução (Equações diferenciais parciais). 5. Unicidade de solução (Equações diferenciais parciais). 6. Critério de blow-up. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: The magnetohydrodynamics equations in Besov-Herz type spaces
Palavras-chave em inglês:
Magnetohydrodynamics equations
Besov-Lorentz-Herz spaces
Besov-weak-Herz spaces
Existence of solution (Partial differential equations)
Uniqueness of solution (Partial differential equations)
Blow-up criterion
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Lucas Catão de Freitas Ferreira
João Vitor da Silva
Mahendra Prasad Panthee
Juliana Conceição Precioso Pereira
Vladimir Angulo Castillo
Data de defesa: 17-03-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0003-9196-2992
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0601225421830859

Tese de Doutorado defendida em 17 de março de 2023 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). JOÃO VITOR DA SILVA

Prof(a). Dr(a). MAHENDRA PRASAD PANTHEE

Prof(a). Dr(a). JULIANA CONCEIÇÃO PRECIOSO PEREIRA

Prof(a). Dr(a). VLADIMIR ANGULO CASTILLO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Aos meus pais, Oléssio (em memória) e Claudete, minha irmã Leticia e ao amigo e companheiro Wender

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos membros da equipe da Coordenação do Programa de Pós-graduação em matemática do IMECC e a todos os funcionários do IMECC por terem possibilitado a excelente formação que tive no programa.

Agradeço também à toda minha família, minha mãe Claudete, meu pai Oléssio (em memória) e minha irmã Letícia que me ajudaram muito nesse processo de estudos e sempre me incentivaram a estudar, acreditando que a educação é o maior processo de transformação da sociedade e do mundo. Também agradeço ao meu amigo e companheiro Wender que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos desse processo de doutorado e agradeço à minha querida amiga Juliana, que sempre acreditou em mim e me incentivou na vida e nos estudos. Sem todas essas pessoas eu não seria a pessoa que sou hoje.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira, que me orientou durante todos os anos de doutorado, e contribuiu extremamente na minha formação profissional e pessoal. Agradeço ao professor Lucas por toda a paciência e ensinamentos no campo profissional e pessoal, pois além de um grande pesquisador na área de Matemática é um ser humano extraordinário. Também o agradeço pelas inúmeras contribuições na confecção desta tese de doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, e com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) mediante ao processo 141172/2019-3.

Resumo

Nesta tese de doutorado, investigamos resultados de existência e unicidade de solução para as equações da magneto-hidrodinâmica (MHD), nos espaços de Besov-Lorentz-Herz. No primeiro problema tratamos das equações MHD no caso totalmente viscoso, considerando o efeito de derivadas fracionárias no espaço e no tempo. Para esse problema, provamos resultados de existência e unicidade de solução global no tempo em espaços de Besov-weak-Herz com condição de pequenez no dado inicial. Além disso, foram investigadas propriedades da solução obtida, por exemplo, dependência contínua do dado inicial, autossimilaridade e comportamento assintótico.

No segundo problema, tratamos as equações MHD no caso invíscido. Para esse problema provamos resultados de existência e unicidade de solução local no tempo em espaços de Besov-Lorentz-Herz. Além disso, investigamos a dependência contínua do dado inicial em um sentido adequado para modelos invíscidos. Por fim, investigamos condições para que a solução local no tempo possa ser uma solução global, obtendo um critério de blow-up para o problema MHD invíscido.

Palavras chaves: Equações da magneto-hidrodinâmica; Espaços de Besov-Lorentz-Herz; Espaços de Besov-weak-Herz; Existência e unicidade de solução; Critério de blow-up.

Abstract

In this doctoral thesis, we investigate results of existence and uniqueness of solution for the magneto-hydrodynamic equations (MHD) in Besov-Lorentz-Herz spaces. In the first problem we deal with the MHD equations in the totally viscous case, considering the effect of fractional derivatives in space and time. For this problem, we prove the existence and uniqueness of a global mild solution in Besov-weak-Herz spaces with smallness condition on the initial data. In addition, some qualitative properties of the obtained solutions are investigated, such as continuous dependence on the initial data, self-similarity and asymptotic behavior.

In the second problem, we deal with the MHD equations in the inviscid case. For this problem we prove the existence and uniqueness of a local-in-time solution in Besov-Lorentz-Herz spaces. In addition, we investigate the continuous dependence on the initial data in a suitable sense for inviscid models. Finally, we investigate conditions so that the local-in-time solution can be extended globally in time, by means of a blow-up criterion for the inviscid MHD problem.

Key words: Magnetohydrodynamics equations; Besov-Lorentz-Herz spaces; Besov-weak-Herz spaces; Existence and uniqueness of solution; blow-up criterion.

Lista de símbolos

$A \approx B$	existem constantes $K, L > 0$ tais que $KA \leqslant B \leqslant LA$
∂_t^θ	Derivada fracionária no tempo
$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$	Laplaciano fracionário de ordem β
$\mathcal{F}$ ou $\wedge$	Transformada de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}$ ou $\vee$	Transformada de Fourier inversa
$\mathbb{P}$	Projetor de Leray
$\mathcal{R}_j$	j-ésima Transformada de Riesz
Γ	Função Gama
$\mathcal{S}$	Espaço de Schwartz
$\mathcal{P}$	Conjuntos dos polinômios de n-variáveis em $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{S}'$	Espaço das distribuições temperadas
$\mathcal{D}'$	Espaço das distribuições
L^p	Espaço de Lebesgue
$L^{p,q}$	Espaço de Lorentz
H^s	Espaço de Sobolev
$B^s_{p,r}$	Espaço de Besov não-homogêneo
$\dot{B}^s_{p,r}$	Espaço de Besov homogêneo
$\mathcal{PM}^a$	Espaço de pseudomedidas
$\mathcal{B}^s_q$	Espaço de Fourier-Herz
$\mathcal{M}^s_{p,\mu}$	Espaço de Morrey
$N^\sigma_{p,\mu,s}$	Espaço de Besov-Morrey
$\mathcal{FN}^s_{p,\lambda,q}$	Espaço de Fourier-Besov-Morrey homogêneo
$F^s_{p,q}$	Espaço de Triebel-Lizorkin

$K^{\alpha}_{p,d,q}$	Espaço de Lorentz-Herz
$\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}$	Espaço de Lorentz-Herz homogêneo
$WK^{\alpha}_{p,q}$	Espaço de weak-Herz
$\dot{W}K^{\alpha}_{p,q}$	Espaço de weak-Herz homogêneo
$BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$	Espaço de Besov-Lorentz-Herz não-homogêneo
$\dot{B}K^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$	Espaço de Besov-Lorentz-Herz homogêneo
$\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,r}$	Espaço de Besov-weak-Herz homogêneo

Sumário

Introdução

Neste trabalho, consideramos as equações da magneto-hidrodinâmica (MHD) nos casos totalmente viscoso e totalmente invíscido. No decorrer do trabalho são investigadas questões sobre existência e unicidade de solução, bem como propriedades de tais soluções. As equações MHD são de grande interesse na pesquisa científica nas áreas de física e matemática, dentre outras. Essas equações modelam problemas que envolvem movimentos de fluidos eletricamente condutores como metais, plasmas, etc. Inicialmente abordamos o caso viscoso, considerando o efeito de derivadas fracionárias duplamente no tempo e no espaço, tendo assim o sistema a seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t^\theta u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = (b \cdot \nabla) b, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \partial_t^\theta b + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} b + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ e } b(x,0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

onde $n \geqslant 2$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ denota o campo velocidade do fluido, $b = b(x,t) \in \mathbb{R}^n$ denota o campo magnético e $p = p(x,t) \in \mathbb{R}$ denota a função pressão. Além disso, u_0 e b_0 denotam os dados iniciais do campo velocidade e campo magnético, respectivamente, com a condição de compatibilidade $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot b_0 = 0$. Também $(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$, com $\beta \geqslant 0$, denota o laplaciano fracionário de ordem β, definido via transformada de Fourier por $\mathcal{F}((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f) = |\cdot|^\beta \mathcal{F} f$ e $\partial_t^\theta f = D_t^{\theta-1}(\partial_t f)$, onde $D_t^{\theta-1}$, com $1 \leqslant \theta < 2$, denota a derivada de Riemann-Liouville de ordem $\theta - 1$. A derivada de Riemann-Liouville de ordem $\gamma \geqslant 0$ pode ser definida (veja [1]) por

$$D_t^\gamma f = \frac{1}{\Gamma(k-\gamma)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\gamma+1-k}} ds, \quad \forall t > 0, \tag{2}$$

onde Γ denota a função Gama, $k = \lfloor \gamma \rfloor + 1$ e $\lfloor \gamma \rfloor$ é a parte inteira de γ.

Problemas como (1), com derivada fracionária na variável temporal, tem sido de grande interesse nos trabalhos na área de equações diferenciais. Por exemplo, em [2] Almeida e Ferreira trabalharam com resultados de existência e unicidade para o problema da onda fracionária em espaços de Morrey $\mathcal{M}^s_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$. Também em [1], Almeida e Precioso apresentaram resultados de existência e unicidade de solução nos espaços de Besov-Morrey $\mathcal{N}^\sigma_{p,\mu,s}(\mathbb{R}^n)$ para um problema com derivada fracionária no tempo e em [11] Carvalho-Neto e Planas trabalharam resultados de existência e unicidade para as equações de Navier-Stokes com derivada fracionária no tempo em espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Inúmeros outros trabalhos considerando equações diferenciais com derivada fracionária no tempo podem ser vistos em [5, 17, 19, 20, 25–27, 38, 49, 53, 58, 59, 67, 68] e suas correspondentes referências.

Aplicando o projetor de Leray $\mathbb{P} = I + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$ na primeira linha do problema (1), onde I é o operador identidade em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{R}$ é o vetor das transformadas de Riez, isto é, $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$, e em seguida aplicando o princípio de Duhamel (veja [33]), segue que o problema (1) pode ser convertido formalmente no seguinte sistema de equações integrais

$$\begin{aligned} u(t) &= M_\theta^\beta(t)u_0 + \int_0^t M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u - b\otimes b)d\tau\right)ds \\ b(t) &= M_\theta^\beta(t)b_0 + \int_0^t M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\nabla\cdot(u\otimes b - b\otimes u)d\tau\right)ds, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $r_\gamma(t) = \dfrac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$ e a família de operadores $M_\theta^\beta(t)$ é definida via transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}(M_\theta^\beta(t)f)(\xi) = E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)\widehat{f}(\xi). \tag{4}$$

Uma solução (u, b) do problema (3) é denominada solução branda para o problema (1). Todos os detalhes da formulação branda do problema (1) podem ser vistos na Seção 2.3 (veja página 46).

Note que quando $\theta = 1$, segue que $\partial_t^\theta = \partial_t$ e o problema (1) é conhecido como equações (MHD) generalizadas (gMHD), existindo neste caso uma vasta literatura tratando do problema em diferentes espaços funcionais. Em [64], Wu apresentou um resultado de existência e unicidade de solução fraca para o problema (1), com dados iniciais $u_0, b_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\beta > 0$. Em [71], Yuan provou um resultado de existência e unicidade de solução local no tempo para as equações (gMHD), para $0 < \beta < 3$ e dado inicial $u_0, b_0 \in H^d(\mathbb{R}^3)$ com $d > \dfrac{5}{2} - \beta$. Também em [42], Liu *et al.* apresentaram resultados de existência e unicidade de solução branda global em $\mathbb{R}^n$, com $n \geqslant 2$, $1 < \beta < \dfrac{n+2}{2}$, e condição de pequenez nos dados iniciais u_0, b_0 pertencentes ao espaço de pseudomedidas $\mathcal{PM}^a(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\mathcal{PM}^a(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\, \widehat{f} \in L^1_{loc} \text{ e } \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\xi|^a|\widehat{f}(\xi)| < \infty\}.$$

Além disso, em [43], Liu e Zhao obtiveram resultados de existência e unicidade de solução branda global para o problema (gMHD) em $\mathbb{R}^n$ com $n \geqslant 3, 1 < \beta \leqslant 2$ e dados iniciais u_0, b_0 pequenos em espaços de Fourier-Herz $\mathcal{B}_q^{-(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$. Também, recentemente, em [72] Zhao provou resultado de boa-colocação global para as equações (gMHD) em $\mathbb{R}^3$ com $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ e dado inicial u_0, b_0 com condição de pequenez no espaço $\mathcal{X}^{1-\beta}(\mathbb{R}^3)$, onde

$$\mathcal{X}^s(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3);\, \int_{\mathbb{R}^3}|\xi|^s|\widehat{f}(\xi)|d\xi < \infty\}.$$

Em [18], EL Baraka e Toumlilin apresentaram resultados de existência e unicidade de solução branda global para o problema (gMHD) para dado inicial u_0, b_0 com condição de pequenez nos espaços de Fourier-Besov-Morrey $\mathcal{FN}^{1-\beta+\frac{3}{p'}+\frac{\lambda}{p}}_{p,\lambda,q}$ com as seguintes condições para os índices, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, $0 \leqslant \lambda < 3$ e $1 < \beta < 2 + \dfrac{3}{p'} + \dfrac{\lambda}{p}$, onde p' denota o expoente conjugado de p. Complementando a lista de resultados para as equações (gMHD), resultados de boa-colocação global em espaços de Lei-Lin-Gevrey, Lei-Lin e espaços anisotrópicos podem ser vistos em Melo *et al.* [45] e Yamazaki [70], respectivamente. Para resultados de regularidade, sugerimos uma consulta a [65, 73] e suas referências.

Tomando $\theta = 1$ e $\beta = 2$ no problema (1), obtemos o sistema (MHD) clássico, ou simplesmente sistema (MHD), o qual também tem sido de grande interesse na pesquisa científica e há uma vasta literatura de resultados de existência e unicidade de solução, critérios de blow-up e teoremas de regularidade. Sem a pretenção de esgotar toda a lista de resultados para o problema (MHD), no campo de existência e unicidade de solução podemos citar os trabalhos [8, 9, 16, 46, 48, 55, 63]. Por outro lado, resultados de regularidade podem ser encontrados em [10, 14, 31, 32, 62, 66, 74].

Além disso, tomando $\theta = 1$, $\beta = 2$ e $b \equiv 0$ no problema (1), obtemos as equações de Navier-Stokes e para esse problema há inúmeros trabalhos com resultados de existência e unicidade de solução, regularidade, dentre outros. Certamente, sem a pretenção de tratar de todos os trabalhos para as equações de Navier-Stokes, citamos as seguintes referências [6, 22, 28, 29, 34, 35, 39, 40, 57] para maiores detalhes.

O primeiro resultado deste trabalho (veja Teorema 2.1, página 37) consiste no resultado de existência e unicidade de solução branda global para o problema (1), com condição de pequenez no dado inicial em espaços de Besov-weak-Herz $\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$. Os espaços de Besov-weak-Herz foram introduzidos por Ferreira e Pérez-López [22] com o objetivo de se obter uma nova classe crítica para boa-colocação global para as equações de Navier-Stokes. Também é digno de se mencionar que em [57] as equações de Navier-Stokes foram analisadas em espaços de Herz e weak-Herz. Nosso resultado de existência e unicidade, Teorema 2.1, é obtido para dados iniciais $u_0, b_0 \in \dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ com as condições $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\dfrac{n}{2} < p < \infty$, $1 \leqslant \theta < \beta \leqslant 2$ e $0 \leqslant \alpha < \min\left\{1 - \dfrac{n}{2p}, \dfrac{n}{p}, \dfrac{\beta}{\theta} - \dfrac{n}{2p} - 1\right\}$.

Note que das inclusões $\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,r} \subset \dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,\infty} \subset \dot{B}W\dot{K}^{0,\frac{n}{p}-1}_{p,\infty,\infty}$ e tomando $\theta = 1$ e $\beta = 2$ no Teorema 2.1, segue que nossa classe de dados iniciais estende a classe de dados de [46], bem como a classe de [42] em espaço $\mathcal{PM}^a(\mathbb{R}^n)$ e o espaço de Sobolev crítico $H^d(\mathbb{R}^n)$ ligado ao resultado de [71], o que constitui uma contribuição para o sistema MHD clássico.

Agora, note que considerando o escalonamento (do inglês *scaling*)

$$(u_\lambda, b_\lambda)(x,t) = (\lambda^{\beta-1}u(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}}t), \lambda^{\beta-1}b(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}}t)), \tag{5}$$

segue que se (u, b) é uma solução clássica de (3) então (u_λ, b_λ) também o é com dados iniciais

$$(u_0(x), b_0(x)) = \lambda^{\beta-1}(u_0, b_0)(\lambda x). \tag{6}$$

Soluções para o problema (3) invariantes pelo escalonamento (5) são chamadas soluções autossimilares. Para os detalhes da análise de escalonamento do problema (1), veja a Seção 2.2, página 42.

De posse das definições anteriores, podemos comentar o próximo resultado do trabalho, Teorema 2.2 (página 38), o qual é um resultado de propriedades da solução obtida no Teorema 2.1. No primeiro item afirmamos que a solução obtida no Teorema 2.1 depende continuamente do dado inicial (u_0, b_0). Já o segundo item afirma que a solução $(u, b)(t) \rightharpoonup (u_0, b_0)$, quando $t \to 0^+$, na topologia fraca-$\star$ de $B^{1-\beta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, e por fim, a terceira afirmação do Teorema 2.2 nos garante que se os dados iniciais u_0, b_0 são homogêneos de grau $1-\beta$ então a solução (u, b) é autossimilar. Por fim, o nosso último resultado (veja Teorema 2.3, página 38) para o problema (MHD) fracionário, é um resultado de comportamento assintótico para as soluções globais obtidas no Teorema 2.1.

O segundo problema estudado neste trabalho é o problema MHD invíscido, o qual é descrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u - (b\cdot\nabla)b + \nabla P = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ \partial_t b + (u\cdot\nabla)b - (b\cdot\nabla)u = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ e } b(x,0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{7}$$

onde $n \geqslant 2$, $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ denota o campo velocidade do fluido, $b = b(x,t) \in \mathbb{R}^n$ denota o campo magnético e $P = P(x,t) \in \mathbb{R}$ denota a função pressão, e $T \in (0,\infty]$ é o tempo de existência da solução. Além disso, u_0 e b_0 denotam os dados iniciais do campo velocidade e campo magnético, respectivamente, com a condição de compatibilidade $\nabla\cdot u_0 = \nabla\cdot b_0 = 0$.

Resultados de existência e unicidade de solução para o problema (MHD) invíscido tem sido apresentados em vários espaços funcionais. Em [54], Secchi provou um resultado de existência e unicidade de solução local para o problema (MHD) invíscido em espaços de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^n)$, para $n \geqslant 2$ e $k > 1 + \dfrac{n}{2}$, e além disso provou um resultado de dependência contínua do dado inicial no mesmo contexto. Posteriormente, em [47], Miao e Yuan provaram existência e unicidade de solução local para o problema, com dados iniciais u_0, b_0 em espaços de Besov crítico, $B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Também, em [15], Chen *et al.* provaram existência e unicidade de solução local no contexto dos espaços de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p, q < \infty$ e $s > 1 + \dfrac{n}{p}$.

Agora, note que, quando fazemos $b \equiv 0$ no problema (7), obtemos a famosa equação de Euler, a qual tem sido objeto de estudo em vários trabalhos. Para as equações de Euler, alguns resultados de existência e unicidade de solução local podem ser vistos em [36, 37] para espaços de Sobolev, [60, 61] para espaços de Besov, [12, 13] para espaços de Triebel-Lizorkin e recentemente, em [21], Ferreira e Pérez-López provarem existência e unicidade de solução local em espaços de Besov-Herz.

Nosso primeiro resultado para o problema (7) (veja Teorema 3.1, página 71), é um resultado de existência e unicidade de solução local em espaços de Besov-Lorentz-Herz $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$ (para definição dos espaços veja página 73), com as condições $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant d, r, q \leqslant \infty$ e $0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$, e ainda com $d = 1$ se $p = 1$ e $\alpha = 0$ se $p = 1$. Nosso resultado de existência e unicidade de solução é considerado no caso subcrítico $s > 1 + \dfrac{n}{p}$ para $1 \leqslant r \leqslant \infty$, e no caso crítico $s = 1 + \dfrac{n}{p}$ somente para $r = 1$. Além disso, é verificado a dependência contínua do dado inicial, em um sentido adequado para modelos invíscidos e aos resultados de existência e as estimativas obtidas.

Os espaços de Besov-Lorentz-Herz, contexto no qual é provado o Teorema 3.1, foram introduzidos em [21] e [51]. De fato, em [21] Ferreira e Pérez-López utilizaram um caso particular desta família de espaços, denominados Besov-Herz, onde eles provaram resultados de existência e unicidade de solução local para as equações de Euler.

Note que, para os espaços de Besov-Lorentz-Herz, temos

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) \subset BWK^{0,s}_{p,\infty,r}(\mathbb{R}^n), \quad \forall 1 \leqslant p, r \leqslant \infty \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) = BK^{0,s}_{p,p,p,r}(\mathbb{R}^n),$$

logo, nosso resultado estende e cobre o resultado obtido por Miao e Yuan [47], bem como estende os resultados de [15] e [54].

Nosso segundo resultado para o problema (7) (veja Teorema 3.2, página 72), é um resultado de blow-up para soluções em espaços de Besov-Lorentz-Herz, ou seja, investigamos condições para que a solução local no tempo possa (ou não) ser uma solução global no tempo. Critérios de blow-up têm sido investigados em diferentes contextos. Por exemplo, Chen *et al.* [15] obtiveram um critério de blow-up em espaços de Triebel-Lizorkin. Em nosso resultado (Teorema 3.2) um critério de blow-up foi obtido para soluções em espaços de Besov-Lorentz-Herz nos casos crítico e subcrítico.

A organização desta tese é como segue. No capítulo 1 apresentamos as preliminares que serão utilizadas para os demais capítulos. Na Seção 1.1 são relembrados definições e notações1 básicas e alguns resultados essenciais dos espaços de Lebesgue e espaços de Lorentz. Já na Seção 1.2 tratamos da teoria da transformada de Fourier, espaço das funções de Schwartz e das distribuições temperadas. Seção 1.3 tratamos das transformadas de Riez e projetor de Leray, e finalmente Seções 1.4 e 1.5 são dedicadas a relembrar elementos da teoria dos espaços de interpolação e espaços de Lorentz-Herz, respectivamente.

No capítulo 2 tratamos o problema MHD fracionário (1), enunciando e provando os resultados para tal problema. Iniciamos com a Seção 2.1 tratando da teoria dos espaços de Besov-Lorentz-Herz, os quais serão o ambiente em que provaremos o resultado de existência e unicidade, Teorema 2.1. A Seção 2.2 trata da análise de escalonamento do problema (1) para determinarmos os índices adequados que iremos trabalhar. Já a Seção 2.3 é dedicada à formulação branda de (1) e, por fim, na Seção 2.4 fazemos as demonstrações dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3.

No capítulo 3 tratamos o problema (MHD) invíscido (7), também enunciando e provando os resultados de existência e unicidade de solução e o critério de blow-up obtido para tal problema. Na Seção 3.1 tratamos os espaços de Besov-Lorentz-Herz não-homogêneos, os quais são os espaços onde provaremos os resultados de existência e unicidade de solução para o problema (7). As Seções 3.2 e 3.3 são dedicadas às demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2, respectivamente.

1 Preliminares

Dedicamos esta seção de preliminares para tratar de tópicos básicos e algumas ferramentas essenciais para o desenvolvimento dos resultados apresentados nos próximos capítulos.

1.1 Espaços L^p e espaços de Lorentz

Esta primeira seção é dedicada à teoria dos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ e os espaços de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Tais espaços são a base de outros espaços que serão os ambientes de resolução dos problemas de existência e unicidade apresentados posteriormente. Toda a teoria desenvolvida nesta seção foi baseada nas referências [23] e [30], no entanto, [7] é uma referência adicional para mais detalhes sobre a teoria dos espaços de Lebesgue.

A fim de introduzirmos os espaços L^p, considere $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e, para uma função f mensurável em X, definimos

$$\| f \|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leqslant p < \infty \\ ess \sup\limits_{x \in X} |f(x)| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

Definição 1.1. *Para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *definimos*

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \textit{ mensurável} \, ; \| f \|_p < \infty \}.$$

Agora, definiremos o produto de convolução de duas funções. Sejam f e g funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. A convolução de f e g é a função $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy,$$

para todo x tal que a integral acima exista.

As próximas três proposições nos fornecem alguns resultados sobre o produto de convolução de duas funções. A saber, Proposição 1.2 nos dá uma estimativa para o produto de convolução nos espaços de Lebesgue. Proposição 1.3 trata de propriedades de limitação e decaimento do produto de convolução de duas funções e Proposição 1.4 trata da derivada de um produto de convolução. As demonstrações dos seguintes resultados podem ser encontradas em [23], páginas 241 e 242.

Proposição 1.2. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam* $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ *satisfazendo* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. *Se* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$, *então* $f * g \in L^r$ *e*

$$\| f * g \|_r \leqslant \| f \|_p \| g \|_q .$$

Proposição 1.3. *Sejam* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *satisfazendo* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^q$ *e* $g \in L^q$ *então* $f * g(x)$ *existe para quase todo* x *e* $f * g$ *é limitada e uniformemente contínua. Além disso, se* $1 < p < \infty$, *então* $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.4. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, *e* ∂^α *é limitada para todo* $|\alpha| \leqslant k$, *então* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g), \quad \forall |\alpha| \leqslant k.$$

Agora, o próximo passo desta seção é definirmos espaços de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Mais detalhes sobre a teoria desses espaços podem ser encontrados em [30]. Nesse intuito, faremos inicialmente a definição da função distribuição e função rearranjo de uma função mensurável f.

Definição 1.5. *Para uma função f mensurável em X, define-se a função distribuição de* f,d_f, *como*

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\}), \qquad \forall \alpha \in [0, \infty).$$

Definição 1.6. *Para* $f \to \mathbb{C}$, *definimos a função rearranjo de* f, *denotada por* f^*, *como*

$$f^*(t) := \inf\{s > 0; d_f(s) \leqslant t\} = \inf\{s \geqslant 0; d_f(s) \leqslant t\}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Observação 1.7. *Adotaremos a convenção que* $\inf \varnothing = \infty$, *e assim, teremos* $f^*(t) = \infty$ *sempre que* $d_f(\alpha) > t$, *para todo* $\alpha \geqslant 0$.

A próxima proposição é uma lista de propriedades envolvendo a função rearranjo e função distribuição (veja [30], Proposição 1.4.5, página 50).

Proposição 1.8. *Sejam* f, g, f_n *funções mensuráveis,* $k \in \mathbb{C}$ *e* $0 \leqslant t, s, t_1, t_2 < \infty$. *Então,*

(1) $f^*(d_f(\alpha)) \leqslant \alpha$ *sempre que* $\alpha > 0$;

(2) $d_f(f^*(t)) \leqslant t$;

(3) $f^*(t) > s$ *se, e somente se,* $t < d_f(s)$, *ou seja,* $\{t \geqslant 0; f^*(t) > s\} = [0, d_f(s))$;

(4) Se $|g| \leqslant |f|$, *q.t.p em X, então* $g^* \leqslant f^*$ *e* $|f|^* = f^*$;

(5) $(kf)^* = |k| f^*$;

(6) $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leqslant f^*(t_1) + g^*(t_2)$;

(7) $(fg)^*(t_1 + t_2) \leqslant f^*(t_1)g^*(t_2)$;

(8) Se $|f| \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} |f_n|$ *q.t.p em* X*, então* $f^* \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} f_n^*$;

(9) f^* *é contínua à direita em* $[0, \infty)$;

(10) Se $f^*(t) < \infty, c > 0$, *e* $\mu(\{|f| \geqslant f^*(t) - c\}) < \infty$, *então* $t \leqslant \mu(\{|f| > f^*(t)\})$;

(11) $d_f = d_{f^*}$;

(12) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, *sempre que* $0 < p < \infty$;

(13) $\displaystyle\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt$, *sempre que* $0 < p < \infty$;

(14) $\| f \|_{L^\infty} = f^*(0)$;

(15) $\sup\limits_{t>0} t^q f^*(t) = \sup\limits_{\alpha>0} \alpha (d_f(\alpha))^q, \quad \forall\ 0 < q < \infty$.

De posse da definição da função rearranjo podemos definir a seguinte quantidade, para finalmente definirmos os espaços de Lorentz.

Definição 1.9. *Sejam* f *função mensurável em* X *e* $0 \leqslant p, q \leqslant \infty$*. Definimos*

$$\| f \|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}.f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & se\ q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\ se\ p = \infty \end{cases}.$$

O conjunto das funções f que satisfazem $\| f \|_{L^{p,q}} < \infty$ é denotado por $L^{p,q}(X)$ e denomidado espaço de Lorentz com índices p e q.

Observação 1.10. *(i) Note que* $L^{p,q}(X)$ *é um espaço quase-normado com a quase-norma* $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$*, pois não é verdade que desigualdade triangular vale para quaisquer* $f, g \in L^{p,q}(X)$*,isto é, nem sempre é válida a seguinte desigualdade*

$$\|f + g\|_{L^{p,q}} \leqslant \|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}}.$$

(ii) Quando $q = \infty$*, o espaço* $L^{p,\infty}(X)$ *é chamado espaço* L^p*−fraco.*

(iii) Quando $p = q$ *então espaços de Lorentz coincidem com os espaços de Lebesgue, isto é,* $L^{p,p} = L^p$.

O item (i) da observação anterior nos afirma que $L^{p,q}$ é um espaço quase-normado. No entanto, para o caso $1 < p, q < \infty$ veremos que $L^{p,q}(X)$ é um espaço normado completo, ou seja, um espaço de Banach. Nesse intuito, para uma função mensurável f, defina

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu,$$

e
$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q) \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Verifica-se que $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ é uma norma para $L^{p,q}(X)$, e vale
$$\|f\|_{L^{p,q}} \leqslant \|f\|^*_{L^{p,q}} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{L^{p,q}}, \ \forall f \in L^{p,q}(X).$$

A seguinte proposição nos fornece um resultado de inclusão para os espaços de Lorentz (veja [30], Proposição 1.4.10, página 53).

Proposição 1.11. *Suponha que* $0 < p \leqslant \infty$ *e* $0 < q < r \leqslant \infty$. *Então existe uma constante* $C(p,q,r)$ *tal que*
$$\| f \|_{L^{p,r}} \leqslant C(p,q,r) \| f \|_{L^{p,q}} .$$

Em outras palavras, $L^{p,q}(X)$ é subespaço de $L^{p,r}(X)$.

Finalizamos a teoria dos espaços de Lorentz, fazendo uma observação sobre a relação de escala nesses espaços. Nos espaços de Lorentz temos a seguinte relação de escala $x \mapsto f_\lambda(x) = f(\lambda x), \quad \lambda > 0$,

$$\| f(\lambda\cdot) \|_{L^{p,q}} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \| f \|_{L^{p,q}}, \quad \forall \lambda > 0,$$

ou seja, os espaços de Lorentz e os espaços L^p tem a mesma relação de escala.

1.2 Transformada de Fourier, espaço de Schwartz e das distribuições temperadas

Nesta seção trataremos da Transformada de Fourier, uma importante ferramenta para o trabalho com equações diferenciais parciais e também abordaremos o espaço de Schwartz que será a base para definirmos a Transformada de Fourier e o espaço das distribuições temperadas. A teoria apresentada nesta seção foi baseada nas referências [30] capítulo 2, e [23] capítulos 8 e 9.

Inicialmente, definiremos uma importante classe de funções, a saber, as funções de Schwartz, e para tal fixemos algumas notações. Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multi-índice, definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Agora, podemos definir o espaço das funções de Schwartz em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.12. ***(Classe de Schwartz)*** *Uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, *de classe* C^∞, *é uma função de Schwartz se satisfaz a condição de que para qualquer par de multi-índices* α *e* β *existe constante* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *tal que*
$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

Os valores $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ são denominadas seminormas de Schwartz de f e o conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C};\ \text{f é função de Schwartz }\}$, é denominado espaço de Schwartz em $\mathbb{R}^n$.

Na próxima definição estabelecemos a noção de convergência no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.13. *Sejam $f_k, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para $k = 1, 2, \ldots$. Dizemos que a sequência f_k converge para f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se para todo par de multi-índice α e β temos*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha(\partial^\beta(f_k - f))| \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Pode-se observar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo quando consideramos a família de seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$(para definições de espaços vetoriais topológicos veja [52]). O espaço de Schwartz é metrizável, pois

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f-g)}{1 + \rho_j(f-g)},$$

define uma métrica em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, onde ρ_j é uma enumeração de todas as seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$, para multi-índices α e β.

Também pode-se verificar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é completo com relação à métrica d, e portanto, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Fréchet, ou seja, um espaço vetorial topológico localmente convexo, metrizável e completo.

Na proposição seguinte apresentamos três propriedades do espaço de Schwartz com relação ao produto de convolução e os espaços L^p, (veja [23], páginas 237 e 242).

Proposição 1.14. *(i) Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ temos a inclusão contínua $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leqslant p < \infty$, e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C_0(\mathbb{R}^n)$.

A seguir introduzimos a noção de transformada de Fourier para uma função em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Geralmente se inicia definindo a transformada de Fourier para funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$, mas no presente texto definiremos inicialmente para funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e em seguida faremos a extensão da definição para uma classe mais ampla de funções.

Definição 1.15. *(**Transformada de Fourier**) Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definimos a transformada de Fourier de f, denotada por $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F}(f)$, por*

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx.$$

A seguir, definimos a transformada de Fourier inversa de uma função de Schwartz.

Definição 1.16. *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definimos a transformada de Fourier inversa de f, denotada por $f^\vee$ ou $\mathscr{F}^{-1}(f)$, por*

$$f^\vee(x) = \widehat{f}(-x).$$

Na próxima proposição investigamos as relações entre a transformada de Fourier e a transformada de Fourier inversa (veja [30], Teorema 2.2.14, página 112).

Proposição 1.17. *Para $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos*

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx;$

(2) (Inversão) $(\widehat{f})^\vee = f = \widehat{(f^\vee)};$

(3) (Identidade de Parseval $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi;$

(4) (Identidade de Plancherel) $\| f \|_{L^2} = \| \widehat{f} \|_{L^2} = \| f^\vee \|_{L^2};$

(5) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)h^\vee(x)dx.$

Até o momento apresentamos a definição e propriedades da transformada de Fourier para funções no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mas note que a Definição 1.15 faz sentido para toda função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, podemos estender a transformada de Fourier para o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$, como podemos verificar a seguir no Teorema de Plancherel (veja [23], Teorema 8.29, página 252).

Teorema 1.18. *(**Teorema de Plancherel**) Se $f \in L^1 \cap L^2$ então $\widehat{f} \in L^2$ e $\mathscr{F}|_{L^1 \cap L^2}$ estende unicamente a um isomorfismo unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

No próximo resultado, a desigualdade de Hausdorff - Young, temos uma estimativa para a norma da transformada de Fourier de funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant 2$ (veja [30], Proposição 2.2.16, página 114).

Proposição 1.19. *(**Desigualdade de Hausdorff-Young**) Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant 2$. Então, temos a seguinte estimativa*

$$\| \widehat{f} \|_{L^{p'}} \leqslant \| f \|_{L^p},$$

em que p' é o expoente conjugado de p, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

Para finalizar os resultados sobre a transformada de Fourier, concluímos com o Lema de Riemann-Lebesgue, que nos apresenta o comportamento da transformada de Fourier no infinito (veja [30], Proposição 2.2.17, página 114).

Proposição 1.20. ***(Lema de Riemann - Lebesgue)*** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

Nos próximos passos definiremos um importante espaço para o trato com equações diferenciais parciais, a saber, o espaço das distribuições temperadas. O espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o espaço dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denominado espaço das distribuições temperadas e denotado $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A ação de uma distribuição temperada u sobre uma função teste $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pode ser representada de duas maneiras

$$\langle u, f \rangle = u(f).$$

Inúmeras definições podem ser estendidas ao espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, como, por exemplo, derivação, transformada de Fourier e produto de convolução. Para mais detalhes de tais definições, veja [30], capítulo 2.

Finalizamos esta seção definindo o espaço das distribuições temperadas módulo polinômios. Esse, por sua vez, será um espaço útil quando definirmos os espaços de Sobolev e Besov homogêneos.

Começamos definindo o espaço dos polinômios em $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os polinômios de n variáveis reais, isto é, funções da forma

$$\sum_{|\beta| \leqslant m} c_\beta x^\beta = \sum_{\substack{\beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \beta_1 + \ldots + \beta_n \leqslant m}} c_{\beta_1, \ldots, \beta_n} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n},$$

onde m é um inteiro e c_β coeficientes complexos.

Em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definimos a seguinte relação de equivalência $\sim$

$$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

O espaço das classes de equivalência resultante da relação de equivalência $\sim$ é chamado espaço das distribuições temperadas módulo polinômios. Denotada-se tal espaço por $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Transformadas de Riesz e o Projetor de Leray

Nesta seção trataremos inicialmente das Transformadas de Riesz para em seguida definirmos e examinarmos algumas propriedades do Projetor de Leray. O Projetor de Leray será uma ferramenta essencial para simplificarmos o problema (1) eliminando o termo da pressão p da primeira equação. Para esta seção, a teoria das transformadas de

Riesz foi extraída de [30], capítulo 5, e a teoria do Projetor de Leray foi extraída de [3, 41], capítulo 1.

A fim de definir a transformada de Riesz, primeiramente definiremos a distribuição temperada W_j em $\mathbb{R}^n$, para $1 \leqslant j \leqslant n$. Para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, seja

$$\langle W_j, \phi \rangle = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} \phi(y) dy,$$

onde Γ é a função Gama de Euler.

De posse da definição da distribuição temperada W_j, podemos definir as transformadas de Riesz como segue:

Definição 1.21. *Para $1 \leqslant j \leqslant n$, a j-ésima transformada de Riesz de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\mathcal{R}_j(f)$, é definida por*

$$\mathcal{R}_j(f)(x) = (f * W_j)(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy.$$

A seguir apresentamos uma caracterização das transformadas de Riesz via transformada de Fourier e também uma identidade para as transformadas de Riesz em $L^2(\mathbb{R}^n)$, (veja [30], Proposições 5.1.14 e 5.1.16, páginas 325 e 327).

Proposição 1.22. *Para a j-ésima transformada de Riesz $\mathcal{R}_j$, é válida a seguinte igualdade*

$$\mathcal{R}_j(f)(x) = \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}(\xi) \right)^{\vee} (x), \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Proposição 1.23. *As transformadas de Riesz gozam da seguinte propriedade em $L^2(\mathbb{R}^n)$*

$$-I = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_j^2,$$

onde I é o operador identidade.

Motivados pela Proposição 1.22, podemos estender a definição das transformadas de Riesz para o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.24. *A j-ésima transformada de Riesz de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$, denotada por $\mathcal{R}_j(f)$, é definida via transformada de Fourier por*

$$\widehat{\mathcal{R}_j f}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}(\xi).$$

De posse da definição anterior, podemos definir o projetor de Leray no espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$.

Definição 1.25. *O Projetor de Leray $\mathbb{P}$ é definido por*

$$\mathbb{P} = I + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R},$$

onde I é o operador identidade em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{R}$ é o vetor das transformadas de Riesz, isto é, $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n)$.

Observação 1.26. *Note que, de acordo com a definição anterior podemos escrever*

$$(\mathbb{P}f)_j = f_j + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}_j \mathcal{R}_k f_k.$$

No que segue, apresentamos algumas propriedades de $\mathbb{P}$, como por exemplo, a linearidade do operador $\mathbb{P}$ e o cálculo de sua transformada de Fourier. Tal resultado pode ser encontrado em [3], capítulo 1.

Proposição 1.27. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) $\mathbb{P}(\alpha f + g) = \alpha \mathbb{P}(f) + \mathbb{P}(g),$ *ou seja, $\mathbb{P}$ é operador linear.*

(2) $\widehat{\mathbb{P}(f)}(\xi) = \left(\delta_{ij} - \dfrac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \widehat{f}(\xi),$ *onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.*

(3) $div(\mathbb{P}f) = 0,$ *onde div denota o divergente.*

(4) Se $div(f) = 0$ então $\mathbb{P}(f) = f$.

Para finalizar esta seção, enunciamos a seguinte proposição que trata de algumas propriedades do operador $\mathbb{P}$ que serão úteis na formulação branda do Problema (1) que será tratado no próximo capítulo. Tal resultado pode ser encontrado em [3], capítulo 1.

Proposição 1.28. *Para o operador $\mathbb{P}$ são verificadas as seguintes propriedades:*

(1) $\mathbb{P}\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbb{P},$ *isto é, $\mathbb{P}$ comuta com a derivada no tempo.*

(2) $\mathbb{P}\Delta = \Delta \mathbb{P},$ *ou seja, o operador $\mathbb{P}$ comuta com o laplaciano.*

(3) $(\mathbb{P}\nabla)^\wedge = 0.$

1.4 Espaços de Interpolação

Nesta seção tratamos da teoria básica dos espaços de interpolação. Esses por sua vez são de extrema importância na teoria do espaços de funções, pois muitos espaços são obtidos através de interpolação de outros espaços já conhecidos. Todo o conteúdo apresentado nesta seção foi extraído da referência [4], capítulos 2 e 3.

Com o intuito de definirmos espaços de interpolação, iniciamos com a definição de espaços compatíveis.

Definição 1.29. *Dizemos que dois espaços vetoriais topológicos A_0 e A_1 são compatíveis, se existe um espaço vetorial topológico de Hausdorff X, tal que A_0 e A_1 são subespaços de X.*

Para dois espaços compatíveis A_0 e A_1, podemos definir

$$A_0 + A_1 = \{x \in X; x = a_0 + a_1, \text{ com } a_0 \in A \text{ e } a_1 \in A_1\}$$

e

$$A_0 \cap A_1 = \{x \in X; x \in A_0 \text{ e } x \in A_1\}.$$

O próximo resultado afirma que os espaços $A_0 + A_1$ e $A_0 \cap A_1$ são espaços normados, (veja [4], Lema 2.3.1, página 24).

Lema 1.30. *Suponha que A_0 e A_1 são espaços vetoriais normados compatíveis. Então $A_0 \cap A_1$ é espaço vetorial normado com a norma definida por*

$$\| a \|_{A_0 \cap A_1} = \max\{\| a \|_{A_0}, \| a \|_{A_1}\}.$$

Além disso, $A_0 + A_1$ é espaço vetorial normado com a norma

$$\| a \|_{A_0 + A_1} = \inf_{a = a_0 + a_1} \{\| a_0 \|_{A_0}, \| a_1 \|_{A_1}\}.$$

Note que, se A_0 e A_1 são completos, então $A_0 \cap A_1$ e $A_0 + A_1$ também o são.

Dado um par de espaços normados compatíveis $\overline{A} = (A_0, A_1)$ definimos dois novos espaços normados

$$\Delta(\overline{A}) = A_0 \cap A_1 \text{ e } \Sigma(\overline{A}) = A_0 + A_1.$$

A seguir definimos a noção de espaço intermediário entre dois espaços compatíveis A_0 e A_1.

Definição 1.31. *Seja $\overline{A} = (A_0, A_1)$ um par de espaços normados compatíveis. O espaço normado A é chamado espaço intermediário entre A_0 e A_1 se vale as inclusões contínuas*

$$\Delta(\overline{A}) \subset A \subset \Sigma(\overline{A}).$$

De posse das definições e observações anteriores, podemos definir o espaço de interpolação entre os espaços compatíveis A_0 e A_1.

Definição 1.32. *Seja $\overline{A} = (A_0, A_1)$ um par de espaços normados compatíveis. O espaço A é denominado espaço de interpolação entre A_0 e A_1 (ou com relação a $\overline{A}$) se*

(i) A é espaço intermediário entre A_0 e A_1

(ii) se para cada operador linear contínuo $T : \overline{A} \to \overline{A}$ implica que $T : A \to A$ é contínuo.

De forma mais geral, considerando $\overline{A}$ e $\overline{B}$ dois pares de espaços normados compatíveis, então dizemos que A e B são espaços de interpolação com relação a $\overline{A}$ e $\overline{B}$, se A e B são espaços intermediários de $\overline{A}$ e $\overline{B}$, respectivamente, e se para todo operador linear contínuo $T : \overline{A} \to \overline{B}$ implica que $T : A \to B$ é contínuo.

Note que, $\Delta(\overline{A})$ e $\Delta(\overline{B})$ são espaços de interpolação com relação a $\overline{A}$ e $\overline{B}$, e o mesmo é válido para $\Sigma(\overline{A})$ e $\Sigma(\overline{B})$.

Além disso, se $A = \Delta(\overline{A})($ ou $\Sigma(\overline{A}))$ e $B = \Delta(\overline{B})($ ou $\Sigma(\overline{B}))$, então temos

$$\| T \|_{A,B} \leqslant \max\{\| T \|_{A_0,B_0}; \| T \|_{A_1,B_1}\}. \tag{1.1}$$

Quando (1.1) ocorrer então A e B são denominados espaços de interpolação **exatos**.

Em vários casos é possível verificar que existe constante $C > 0$ tal que

$$\| T \|_{A,B} \leqslant C \max\{\| T \|_{A_0,B_0}; \| T \|_{A_1,B_1}\}, \tag{1.2}$$

e nesses casos dizemos que A e B são denominados espaços de interpolação **uniformes**.

Também há casos que pode-se verificar que

$$\| T \|_{A,B} \leqslant C \| T \|^{1-\eta}_{A_0,A_1} \| T \|^{\eta}_{A_0,A_1}, \text{ com } 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{1.3}$$

e nesse caso dizemos que A e B são denominados espaços de interpolação de expoente η, e quando $C = 1$ em (1.3) dizemos que A e B são denominados espaços de interpolação **exatos** de expoente η.

O principal objetivo da teoria de espaços de interpolação é a construção e estudo das propriedades desses espaços. No que segue, trabalhamos com a construção de espaços de interpolação, e o faremos através de dois métodos, o K método e o J método para interpolação real.

Iniciemos com o K método e para tal definiremos um funcional na próxima definição.

Definição 1.33. *Sejam $\overline{A} = (A_0, A_1)$ um par de espaços normados compatíveis e $t > 0$. Definimos*

$$K(t, a) = K(t, a; \overline{A}) = \inf_{a=a_0+a_1} \{\| a_0 \|_{A_0} + t \| a_1 \|_{A_1}\}, a \in \Sigma(\overline{A}).$$

Note que, $K(t, a)$ é uma norma equivalente para $\Sigma(\overline{A})$.

O próximo Lema nos fornece informações sobre a função K, (veja [4], Lema 3.1.1, página 38).

Lema 1.34. *Para todo $a \in \Sigma(\overline{A}), K(t,a)$ é uma função positiva, crescente e côncava em t. Em particular,*

$$K(t,a) \leqslant \max\{1, \frac{t}{s}\} K(s,a), \ \forall s > 0.$$

Para todo $t > 0$, $K(t,a)$ é uma norma no espaço de interpolação $\Sigma(\overline{A})$. Agora, definiremos um novo espaço de interpolação impondo condições na função $t \mapsto K(t,a)$.

Seja $\Phi_{\eta,q}$ definido por

$$\Phi_{\eta,q}(\phi(t)) = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{-\eta}\phi(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \text{ para } 1 \leqslant q < \infty \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\eta}\phi(t), \text{ para } q = \infty, \end{cases}$$

onde ϕ é uma função não-negativa.

De posse da definição da função Φ podemos construir um novo espaço de interpolação.

Definição 1.35. *Considere $0 < \eta < 1$ se $1 \leqslant q \leqslant \infty$ ou $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ se $q = \infty$. O espaço de interpolação $\overline{A}_{\eta,q;K}$ é definido por*

$$\overline{A}_{\eta,q;K} = K_{\eta,q}(\overline{A}) = \{a \in \Sigma(\overline{A}); \Phi_{\eta,q}(K(t,a)) < \infty\}.$$

Note que, $\overline{A}_{\eta,q;K}$ é um espaço normado com a norma

$$\| a \|_{\eta,q;K} = \Phi_{\eta,q}(K(t,a)).$$

De posse das definições anteriores, enunciamos o próximo Teorema, o qual afirma que os espaços $\overline{A}_{\eta,q;K}$, construídos através do K método são espaços de interpolação exato de expoente η, (veja [4], Teorema 3.1.2, página 40).

Teorema 1.36. *Sejam $\overline{A} = (A_0, A_1)$ espaços normados compatíveis e $0 < \eta < 1$ se $1 \leqslant q \leqslant \infty$ ou $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ se $q = \infty$. O espaço $\overline{A}_{\eta,q:K}$ é espaço de interpolação exato de expoente η compatível com A_0 e A_1. Além disso,*

$$K(s,a;\overline{A}) \leqslant \gamma_{\eta,q} s^\eta \| a \|_{\eta,q;K} .$$

Tendo construído anteriormente espaços de interpolação através do K método, no que segue faremos uma construção alternativa de tais espaços através do J método. Iniciemos com a definição do funcional J.

Definição 1.37. *Sejam $\overline{A} = (A_0, A_1)$ par de espaços normados compatíveis e $t > 0$. Definimos*

$$J(t,a) = J(t,a;\overline{A}) = \max\{\| a \|_{A_0}, t \| a \|_{A_1}\}, a \in \Delta(\overline{A}).$$

Note que, $J(t, a)$ é norma equivalente para o espaço $\Delta(\overline{A})$.

O próximo lema nos fornece informações do funcional J e uma relação entre J e K, (veja [4], Lema 3.2.1, página 42).

Lema 1.38. *Para $a \in \Delta(\overline{A})$, $J(t, a)$ é uma função positiva, crescente e convexa em t. Além disso,*

$$J(t, a) \leqslant \max\{1, \frac{t}{s}\} J(s, a), \quad K(t, a) \leqslant \min\{1, \frac{t}{s}\} J(s, a), \ \forall s > 0.$$

Agora, vamos definir um novo espaço de interpolação $\overline{A}_{\eta,q;J} = J_{\eta,q}(\overline{A})$, com $0 < \eta < 1$ se $1 \leqslant q \leqslant \infty$ ou $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ se $q = 1$. Os elementos $a \in J_{\eta,q}(\overline{A})$ são os elementos $a \in \Sigma(\overline{A})$ que podem ser representados da forma

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}, \text{ com convergência em } \Sigma(\overline{A}), \tag{1.4}$$

onde $u(t)$ é mensurável e com valores em $\Delta(\overline{A})$, satifazendo a condição

$$\Phi_{\eta,q}(J(t, u(t))) < \infty. \tag{1.5}$$

Também, definimos a seguinte norma em $J_{\eta,q}(\overline{A})$

$$\| a \|_{\eta,q;J} = \inf_u \Phi_{\eta,q}(J(t, u(t))),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os elementos u tais que (1.4) e (1.5) são satisfeitas.

A seguir enunciamos o próximo Teorema, o qual afirma que o espaços $\overline{A}_{\eta,q:J}$, construído através do J método é um espaço de interpolação exato de expoente η, (veja [4], Teorema 3.2.2, página 43).

Teorema 1.39. *Sejam $\overline{A} = (A_0, A_1)$ espaços normados compatíveis e $0 < \eta < 1$ se $1 \leqslant q \leqslant \infty$ ou $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ se $q = 1$. O espaço $\overline{A}_{\eta,q;J}$ é um espaço de interpolação exato de expoente η, compatível com A_0 e A_1. Além disso,*

$$\| a \|_{\eta,q;J} \leqslant C s^{-\eta} J(s, a; \overline{A}), \ a \in \Delta(\overline{A}),$$

onde C é independente de η e q.

Anteriormente, construímos espaços de interpolação através do K e J métodos. O próximo resultado, conhecido como teorema de equivalência, nos diz que para determinadas condições os dois métodos são equivalentes, (veja [4], Teorema 3.3.1, página 44).

Teorema 1.40. *(**Teorema de Equivalência**) Se $0 < \eta < 1$ e $1 \leqslant q \leqslant \infty$ então $J_{\eta,q}(\overline{A}) = K_{\eta,q}(\overline{A})$ com normas equivalentes.*

Note que, pelo Teorema de Equivalência 1.40 para $0 < \eta < 1$ a construção de espaços de interpolação é equivalente se utilizarmos o K ou J método. Com isso, para $0 < \eta < 1$ denotaremos por $\overline{A}_{\eta,q}$ os espaços $\overline{A}_{\eta,q;K}$ ou $\overline{A}_{\eta,q;J}$. Também, se $\eta = 0$ ou 1 e $q = \infty$, então o espaço $\overline{A}_{\eta,q;K}$ será denotado por $\overline{A}_{\eta,q}$. Por fim, denotaremos por $\| \cdot \|_{\eta,q}$ a norma do espaço $\overline{A}_{\eta,q}$.

Na próxima proposição apresentamos uma lista de propriedades e resultados a respeito dos espaços de interpolação construídos previamente, (veja [4], Teoremas 3.4.1 e 3.4.2, página 47).

Proposição 1.41. *Seja $\overline{A} = (A_0, A_1)$ um par de espaços compatíveis. Temos*

(1) $(A_0, A_1)_{\eta,q} = (A_0, A_1)_{1-\eta,q}$ com normas iguais;

(2) $\overline{A}_{\eta,q} \subset \overline{A}_{\eta,r}$ se $q \leqslant r$;

(3) $\overline{A}_{\eta_0,q_0} \cap \overline{A}_{\eta_1,q} \subset \overline{A}_{\eta,q}$ se $\eta_0 < \eta < \eta_1$;

(4) $A_1 \subset A_0 \Rightarrow \overline{A}_{\eta_1,q} \subset \overline{A}_{\eta_0,q}$ se $\eta_0 < \eta_1$;

(5) $A_1 = A_0 \Rightarrow \overline{A}_{\eta,q} = A_0$ e $\| a \|_{A_0} = (q\eta(1-\eta))^{\frac{1}{q}}$;

(6) Se A_0 e A_1 são completos então $\overline{A}_{\eta,q}$ também é completo;

(7) Se $q < \infty$ então $\Delta(\overline{A})$ é denso em $\overline{A}_{\eta,q}$;

(8) O completamento de $\Delta(\overline{A}) \subset \overline{A}_{\eta,\infty}$, é o espaço $\overline{A}^0_{\eta,\infty}$ de todos os elementos a tais que

$$t^{-\eta} K(t, a; \overline{A}) \to 0 \text{ quando } t \to 0 \text{ ou } t \to \infty;$$

(9) Se A^0_j denota o completamento de $\Delta(\overline{A}) \subset A_j$ então para $q < \infty$ temos

$$(A_0, A_1)_{\eta,q} = (A^0_0, A_1)_{\eta,q} = (A_0, A^0_1)_{\eta,q} = (A^0_0, A^0_1)_{\eta,q}.$$

Finalizamos a teoria dos espaços de interpolação com o Teorema de Reiteração, um dos mais importantes resultados da teoria da interpolação, que será importante na demonstração das estimativas lineares do semigrupo associado ao Problema (1), (veja [4], Teorema 3.5.3, página 50).

Teorema 1.42. *(**Teorema de Reiteração**) Sejam $\overline{A} = (A_0, A_1)$ e $\overline{X} = (X_0, X_1)$ dois pares de espaços normados compatíveis e assuma que $X_i (i = 0, 1)$ são completos e satisfazem*

$$K(t, a; \overline{A}) \leqslant Ct^{\eta} \| a \|_{X_i}, \quad a \in X_i \text{ com } 0 \leqslant \eta_i \leqslant 1 \text{ e } \eta_0 \neq \eta_1.$$

Fixando,

$$\eta = (1-\lambda)\eta_0 + \lambda\eta_1, \qquad (0 < \lambda < 1),$$

então, para $1 \leqslant q \leqslant \infty$

$$\overline{X}_{\lambda,q} = \overline{A}_{\eta,q} \text{ com normas equivalentes .}$$

Em particular, se $0 < \eta_i < 1$ *e* $\overline{A}_{\eta_i,q_i}$ *são completos, então*

$$(\overline{A}_{\eta_0,q_0}, \overline{A}_{\eta_1,q_1})_{\lambda,q} = \overline{A}_{\eta,q} \text{ com normas equivalentes .}$$

Observe que no teorema anterior exigimos que $\eta_0 \neq \eta_1$. No caso $\eta_0 = \eta_1$ temos o seguinte complemento para o Teorema de Reiteração, (veja [4], Teorema 3.5.4, página 51).

Teorema 1.43. *Seja* $\overline{A}$ *um par de espaços de Banach compatíveis e considere*

$$X_0 = \overline{A}_{\eta,q_0} \text{ e } X_1 = \overline{A}_{\eta,q_1},$$

onde $0 < \eta < 1, 1 \leqslant q_i \leqslant \infty$ $(i = 0, 1)$. *Então,*

$$\overline{X}_{\lambda,q} = \overline{A}_{\eta,q},$$

onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{q_0} + \frac{\lambda}{q_1}.$$

1.5 Espaços de Lorentz-Herz

Esta seção é dedicada aos espaços de Lorentz-Herz, que por sua vez servirão de base para posteriormente definirmos os espaços de Besov-Lorentz-Herz e obtermos resultados de existência e unicidade para os problemas (1) e (7). Os espaços de Lorentz-Herz foram considerados em [22] e [51], como uma extensão natural dos espaços de Herz. Nesta seção, além da definição dos espaços de Lorentz-Herz, também são apresentadas várias propriedades importantes desses espaços. O conteúdo desta seção pode ser encontrado em [22] Seção 2, e [51] capítulo 2.

No intuito de definirmos os espaços de Lorentz-Herz, inicialmente, definamos alguns conjuntos para obtermos um tipo de decomposição de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Definição 1.44. *Para* $k \in \mathbb{Z}$ *e* $k \geqslant -1$, *definimos os seguintes conjuntos* $A_k \subset \mathbb{R}^n$

(1) $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n; 2^{k-1} \leqslant |x| < 2^k\}$;

(2) $A_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Também, para $k \in \mathbb{Z}$ *definimos* $\dot{A}_k \subset \mathbb{R}^n$ *como*

$$\dot{A}_k = \{x \in \mathbb{R}^n; 2^{k-1} \leqslant |x| < 2^k\}.$$

Observação 1.45. *Note que*

$$\mathbb{R}^n - \{0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \dot{A}_k, \ \ e\ \mathbb{R}^n = \sup_{k\geqslant -1} A_k.$$

Para, $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < d \leqslant \infty$ e $0 < p, q \leqslant \infty$, definimos as seguintes quantidades

$$\| f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k\geqslant -1} 2^{k\alpha q} \| f \|^q_{L^q_{p,d}(A_k)} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ se } q < \infty \\ \displaystyle\sup_{k\geqslant -1} 2^{k\alpha} \| f \|_{L^{p,d}(A_k)}, \text{ se } q = \infty \end{cases} \tag{1.6}$$

e

$$\| f \|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} \| f \|^q_{L^q_{p,d}(\dot{A}_k)} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ se } q < \infty \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\alpha} \| f \|_{L^{p,d}(\dot{A}_k)}, \text{ se } q = \infty. \end{cases} \tag{1.7}$$

Finalmente, podemos definir os espaços de Lorentz-Herz e Lorentz-Herz homogêneo.

Definição 1.46. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < d \leqslant \infty$ e $0 < p, q \leqslant \infty$. O espaço de Lorentz-Herz, denotado $K^{\alpha}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n)$, é definido como*

$$K^{\alpha}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n) = \{f; f \textit{ é função mensurável em } \mathbb{R}^n \textit{ e } \| f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} < \infty\}.$$

Também o espaço de Lorentz-Herz homogêneo, denotado $\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n)$, é definido como

$$\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n) = \{f; f \textit{ é função mensurável em } \mathbb{R}^n \textit{ e } \| f \|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}} < \infty\}.$$

Note que, quando $d = \infty$ os espaços $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ são os espaços L^p-fraco, e nessas condições, ou seja, quando $d = \infty$ os espaços $K^{\alpha}_{p,\infty,q}(\mathbb{R}^n)$ e $\dot{K}^{\alpha}_{p,\infty,q}(\mathbb{R}^n)$ serão chamados de espaços weak-Herz e weak-Herz homogêneos e denotados por $WK^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ e $W\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

Ao definirmos um espaço, naturalmente buscamos propriedades dos mesmos, como estimativas para o produto de dois elementos do espaço, estimativas para o produto de convolução, etc. Na próxima proposição enunciamos uma espécie de desigualdade de Hölder nos espaços de Lorentz-Herz não-homogêneos, no entanto, o resultado também é válidos para os espaços de Lorentz-Herz homogêneos.

Proposição 1.47. *Sejam $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, 1 \leqslant q, q_1, q_2 \leqslant \infty, 1 \leqslant p, p_1, p_2 \leqslant \infty$ e $1 \leqslant d, d_1, d_2 \leqslant \infty$ satisfazendo*

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2; \ \ \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}; \ \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}; \ \ \frac{1}{d} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}.$$

Então

$$\| fg \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant C \| f \|_{K^{\alpha_1}_{p_1,d_1,q_1}} \| g \|_{K^{\alpha_2}_{p_2,d_2,q_2}} .$$

No trabalho com equações diferenciais parciais frequentemente utilizamos estimativas do produto de convolução nos espaços trabalhados, por isso, a seguir enunciamos dois resultados de estimativas do produto de convolução nos espaços de Lorentz-Herz homogêneo e não-homogêneo.

Proposição 1.48. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}, 1 \leqslant q \leqslant \infty, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $1 \leqslant d \leqslant \infty$, com $d = 1$ se $p = 1$. Além disso, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ considere*

$$M = \begin{cases} \max\{\| \, |\cdot|^{2\gamma+\alpha} f \|_{L^1}, \| \, |\cdot|^{\gamma} f \|_{L^1}, \| f \|_{L^1}\}, & se\ \alpha \geqslant 0, \\ \max\{\| \, |\cdot|^{2\gamma} f \|_{L^1}, \| \, |\cdot|^{\gamma-\alpha} f \|_{L^1}, \| f \|_{L^1}\}, & se\ \alpha < 0, \end{cases}$$

para algum $\gamma > 0$. Nessas condicões, existe $C > 0$ (que não depende da função f) tal que

$$\| f * g \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant MC \| g \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}, \ \forall g \in K^{\alpha}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n).$$

Um resultado similar ao resultado anterior, o qual será enunciado na próxima proposição, é verificado para os espaços de Lorentz-Herz homogêneo com algumas restrições nos índices do espaço.

Proposição 1.49. *Sejam $1 \leqslant p_1 < \infty, 1 < \tilde{p}, p_2 < \infty$ satisfazendo $1 + \dfrac{1}{\tilde{p}} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ e $1 \leqslant d, d_1, d_2 \leqslant \infty$, satifazendo $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2}$, ou $d \geqslant d_2$ se $\tilde{p} = p_2$. Também, sejam $1 \leqslant q \leqslant \infty, -\dfrac{n}{\tilde{p}} < \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right)$. Além disso, considere $f \in L^{p_1,d_1}(\mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se $\tilde{p} = p_2$ de modo que $|\cdot|^{\frac{n}{p_1}} f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Nessas condições, definindo*

$$M_f = \begin{cases} \max\{\| \, |\cdot|^{\frac{n}{p_1}} f \|_{L^{\infty}}, \| f \|_{L^{p_1,d_1}}\}, & se\ p_2 \neq \tilde{p} \\ \max\{\| \, |\cdot|^{n} f \|_{L^{\infty}}, \| f \|_{L^1}\}, & se\ p_2 = \tilde{p}, \end{cases}$$

então, existe uma constante $C > 0$ (que não depende da função f) tal que

$$\| f * g \|_{\dot{K}^{\alpha}_{\tilde{p},d,q}} \leqslant CM_f \| g \|_{\dot{K}^{\alpha}_{p_2,d_2,q}}, \ \forall g \in \dot{K}^{\alpha}_{p_2,d_2,q}.$$

Depois de relembrar algumas estimativas para o produto de convolução nos espaços de Lorentz-Herz, na próxima proposição apresentamos uma desigualdade do tipo Berstein nesses espaços (veja [22] ou [51], página 50).

Proposição 1.50. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, d, q \leqslant \infty$, com $d = 1$ se $p = 1$. As seguintes afirmações são verificadas*

(1) Dado $M_1 > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\| D^{\theta} f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant C 2^{j|\theta|} \| f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}},$$

para todo $j \geqslant 0$ *e* $f \in K^{\alpha}_{p,d,q}$ *satisfazendo* $supp(\widehat{f}) \subset D(0, M_1 2^j)$.

(2) Para $\alpha \geqslant 0$ *e* $j \in Z$ *temos*

$$\| f \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{j\frac{n}{p}} \| f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}},$$

para toda $f \in K^{\alpha}_{p,d,q}$ *tal que* $supp(\widehat{f}) \subset D(0, M_1 2^j)$.

(3) Dado $M_1, M_2 > 0$ *existe* $C > 0$*, dependente somente de* M_1, M_2, θ, n*, tal que*

$$\| f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant C 2^{-j|\theta|} \| D^{\theta} f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}},$$

para todo $j \geqslant 0$ *e* $f \in K^{\alpha}_{p,d,q}$ *satisfazendo* $supp(\widehat{f}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; M_1 2^j \leqslant |\xi| < M_2 2^j\}$.

Para finalizar a seção sobre os espaços de Lorentz-Herz vamos enunciar alguns resultados sobre a ação de operadores nesses espaços. Estes resultados são úteis para por exemplo provar limitação das transformadas de Riesz e estimativas para o semigrupo associado à parte linear da equação do problema (1). Iniciemos com dois resultados para o espaço $K^{\alpha}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.51. *Sejam* $\alpha \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *e* $1 \leqslant d \leqslant \infty$*, com* $d = 1$ *se* $p = 1$*. Nessas condições, existe* $M(\alpha, p) > 0$ *tal que, se* P *é uma função de classe* C^∞ *em* $D(0, 4/3)$*, e satisfaz*

$$\partial^{\theta} P(\xi) \leqslant C, \forall \xi \in D(0, 4/3) \text{ e } \forall \theta \in \mathbb{N}^n_0 \text{ com } |\theta| \leqslant M,$$

então

$$\| (P\widehat{f})^{\vee} \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant C \| f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}, \ \forall f \in K^{\alpha}_{p,d,q} \text{ tal que } supp\widehat{f} \subset D(0, 3/4).$$

Para enunciarmos a próxima proposição, para $j \in \mathbb{Z}$ defina

$$D_j = \left\{ x; \frac{3}{4} 2^j \leqslant |xvert \leqslant \frac{8}{3} 2^j \right\}.$$

Proposição 1.52. *Sejam* $\alpha \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *e* $1 \leqslant d \leqslant \infty, m \in \mathbb{R}$ *e* $j \geqslant 0$*. Nessas condições, existe* $M(\alpha, p) > 0$*, tal que, se* P *é uma função de classe* C^∞ *em* $\tilde{D}_j = D_{j-1} \cup D_j \cup D_{j+1}$*, e satisfaz*

$$|\partial^{\theta} P(\xi)| \leqslant C 2^{(m-|\theta|)j}, \forall \xi \tilde{D}_j \text{ e } \forall \theta \in \mathbb{N}^n_0, \text{ com } |\theta| \leqslant M,$$

então

$$\| (P\widehat{f})^{\vee} \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant C 2^{jm} \| f \|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}, \ \forall f \in K^{\alpha}_{p,d,q} \text{ tal que } supp\widehat{f} \subset D_j.$$

Agora enunciamos duas estimativas para determinados operadores nos espaços $\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.53. *Sejam* $1 < p < \infty, 1 \leqslant d, q \leqslant \infty, -\dfrac{n}{p} < \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ *e* $m \in \mathbb{R}$. *Considere* P *uma função de classe* C^∞ *em* $\tilde{D}_j = D_{j-} \cup D_j \cup D_{j+}$, *satisfazendo*

$$|\partial^\theta P(\xi)| \leqslant C2^{(m-|\theta|)j}, \forall \xi \in \tilde{D}_j \text{ e } \forall \theta \in \mathbb{N}_0^n \text{ com } |\theta| \leqslant [n/2] + 1.$$

Nessas condições, temos a seguinte desigualdade

$$\| (P\widehat{f})^\vee \|_{\dot{K}^\alpha_{p,d,q}} \leqslant C2^{jm} \| f \|_{\dot{K}^\alpha_{p,d,q}}, \ \forall f \in \dot{K}^\alpha_{p,d,q} \text{ tal que } supp\widehat{f} \subset D_j.$$

Proposição 1.54. *Sejam* $1 < p < \infty, 1 \leqslant d \leqslant \infty$ *e* $-\dfrac{n}{p} < \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$. *Nessas condições, se* P *é um operador linear em* $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo*

$$|Pf(x)| \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)||x - z|^{-n} dz, x \notin supp(f),$$

então, P *é limitado em* $K^\alpha_{p,d,q}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.55. *O resultado anterior 1.54 também é válido para o espaço* $\dot{K}^\alpha_{p,d,q}(\mathbb{R}^n)$,

2 Equações MHD fracionárias

Neste capítulo tratamos dos resultados para as equações da magneto-hidrodinâmica (MHD) fracionárias, ou seja, problema (1). Provaremos resultados de existência, unicidade e propriedades da solução nos espaços de Besov-weak-Herz. Iniciamos recordando o problema (1)

$$\begin{cases} \partial_t^\theta u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = (b\cdot\nabla)b, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ \partial_t^\theta b + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} b + (u\cdot\nabla)b = (b\cdot\nabla)u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0) = u_0(x) \text{ e } b(x,0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $u = u(t,x)$ denota o campo velocidade, $b = b(t,x)$ o campo magnético e $p = p(t,x)$ a função pressão. Além disso, $\partial_t^\theta u = D_t^{\theta-1}(\partial_t u)$, onde $D_t^{\theta-1}$ denota a derivada de Riemann-Liouville de ordem $\theta - 1$, como definido em (2), página 12.

O nosso principal resultado deste capítulo é o Teorema de existência e unicidade para o problema (1) nos espaços de Besov-weak-Herz. Tal resultado é enunciado a seguir:

Teorema 2.1. *Sejam* $1 \leqslant q \leqslant \infty, \dfrac{n}{2} < p < \infty, 1 \leqslant \theta < \beta \leqslant 2$ *e*

$$0 \leqslant \alpha < \min\left\{1 - \frac{n}{2p}, \frac{n}{2p}, \frac{\beta}{\theta} - \frac{n}{2p} - 1\right\}.$$

Nessas condições, existem $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$*, de modo que, se* $u_0, b_0 \in \dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\nabla\cdot u_0 = \nabla\cdot b_0 = 0$ *e*

$$\|u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}} + \|b_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}} \leqslant \delta, \tag{2.2}$$

então existe uma única solução branda

$$(u,b) \in L^\infty((0,\infty); \dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}) \times L^\infty((0,\infty); \dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}),$$

para o problema (1)*, satisfazendo*

$$\begin{aligned} \|(u,b)\|_{Y\times Y} \quad &= \quad \|u\|_{L^\infty((0,\infty);\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha})} + \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{\theta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|u\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}} \\ &+ \quad \|b\|_{L^\infty((0,\infty);\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha})} + \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{\theta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|b\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}} \leqslant \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde

$$Y := \{w \in L^\infty((0,\infty); \dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}); t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} w \in L^\infty((0,\infty); W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha})\}, \tag{2.4}$$

com norma

$$\|w\|_Y = \|w\|_{L^\infty((0,\infty);\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha})} + \sup_{t>0} t^{\frac{\beta}{\theta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|w\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}}. \tag{2.5}$$

Para a demonstração do Teorema 2.1, utilizaremos um argumento de contração, o qual consiste em construir estimativas para operadores associados ao problema para posteriormente aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e obter a solução no espaço desejado. Além disso, observe que a solução obtida no Teorema 2.1 é uma solução branda, e para dar sentido a esse tipo de solução se faz necessário uma formulação branda para o problema (1), a qual discutiremos em mais detalhes na Seção 2.3 deste capítulo.

O próximo teorema que trataremos neste capítulo é um resultado que nos fornece algumas propriedades para a solução obtida no Teorema 2.1. Tal resultado é como segue.

Teorema 2.2. *Sejam $q, p, \alpha, \theta, \beta$ como no Teorema 2.1, e (u, b) solução do problema (1) obtida no Teorema 2.1. Então, temos as seguintes propriedades:*

*(i)(**Dependência contínua do dado inicial**) A solução (u, b) depende continuamente do dado inicial.*

*(ii) (**Convergência fraca-$\star$**) A solução $(u, b)(t) \rightharpoonup (u_0, b_0)$, quando $t \to 0^+$, na topologia fraca-$\star$ de $B^{1-\beta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

*(iii) (**Autossimilaridade**) Se u_0, b_0 são homogêneos de grau $1-\beta$ então a solução (u, b) é autossimilar.*

Como último resultado desta seção, provamos um resultado de comportamento assintótico da solução global obtida no Teorema 2.1, quando $t \to \infty$. Tal resultado é como segue.

Teorema 2.3. *(**Comportamento Assintótico**) Sejam $\alpha, \beta, \theta, p, q$ como no Teorema 2.1 e, $(u, b), (\tilde{u}, \tilde{b})$ duas soluções do problema (1) para dados iniciais $(u_0, b_0), (\tilde{u}_0, \tilde{b}_0)$, respectivamente. Então, temos que*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} = \lim_{t\to\infty} t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\ = &\lim_{t\to\infty} \|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} = \lim_{t\to\infty} t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \left(\|M^\beta_\theta(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} + t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \|M^\beta_\theta(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \right) \\ = &\lim_{t\to\infty} \left(\|M^\beta_\theta(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} + t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \|M^\beta_\theta(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \right) = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observação 2.4. *Considerando $\tilde{u}_0$ e $\tilde{b}_0$ vetores homogêneos de grau $1-\beta$, e usando o Teorema 2.2 (iii) e Teorema 2.3, obtemos uma família de soluções que são assintoticamente autossimilares.*

Tendo apresentado os três teoremas principais deste capítulo, finalizamos esta introdução do capítulo discorrendo brevemente sobre a organização do mesmo. Na Seção 2.1 tratamos da teoria dos espaços de Besov-Lorentz-Herz, os quais serão o ambiente em que provaremos o resultado de existência e unicidade, Teorema 2.1. A Seção 2.2 trata da análise de escalonamento do problema (1) para determinarmos os índices adequados que iremos trabalhar. Já a Seção 2.3 é dedicada à formulação branda do problema (1) e, por fim, na Seção 2.4 apresentamos as demonstrações dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3.

2.1 Espaços de Besov-Lorentz-Herz homogêneos

Nesta seção, definiremos os espaços de Besov-Lorentz-Herz homogêneos, no qual serão provados os resultados de boa-colocação global. A teoria desta seção pode ser encontrada em [22, 51], estando com mais detalhes em [51], capítulo 2. Para tal, iniciemos com a decomposição de Littlewood-Paley.

Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função radial e $\varphi_j(\xi) = \varphi(\xi 2^{-j})$, satisfazendo

$$supp(\varphi) \subset \left\{\xi; \frac{3}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\right\},$$

e

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(\xi) = 1, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Definamos os operadores $\Delta_j f = \varphi_j(D) f = (\mathcal{F}^{-1}\varphi_j) * f$, e $S_k f = \sum_{j\leqslant k} \Delta_j f$.

Note que, se $|j-k| \geqslant 2$ então $\Delta_j \Delta_k f = 0$. Além disso, se $|j-k| \geqslant 5$ então $\Delta_j(S_{k-2} g \Delta_k f) = 0$.

Agora, vamos definir os espaços de Besov-Lorentz-Herz homogêneos $\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$ e, para tal comecemos definindo em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$ a quantidade

$$\| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr} \| \Delta_j f \|^r_{\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}} \right)^{\frac{1}{r}}, & \text{se } r < \infty, \\ \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js} \| \Delta_j f \|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,d,q}}, & \text{se } r = \infty, \end{cases} \tag{2.8}$$

Tendo definido a quantidade (2.8) podemos finalmente definir os espaços.

Definição 2.5. *Para $\alpha, s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, d, q, r \leqslant \infty$, o espaço de Besov-Lorentz-Herz homogêneo $\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$ é definido como*

$$\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}; \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} < \infty \}.$$

Observação 2.6. *Quando $d = \infty$ na definição anterior, o espaço definido é denominado espaço de Besov-weak-Herz e denotado por $\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$, e é no contexto desses espaços que serão provados os resultados desta seção. Para mais detalhes sobre esses espaços, veja [22] e [51], seção 2 e capítulo 2, respectivamente.*

Ao definir um espaço é natural investigar relações de inclusões desses com outros espaços conhecidos. Na próxima proposição enunciamos uma relação de inclusão e um caso de não inclusão entre os espaços de Besov-Lorentz-Herz e os espaços de Besov.

Proposição 2.7. *Sejam $s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant r \leqslant \infty, 1 < p < \infty$ e $0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$. Nessas condições, temos*

(1)

$$\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,\infty,r} \hookrightarrow \dot{B}^{s-(\alpha+n/p)}_{\infty,r}.$$

Em particular,

$$\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,\alpha+\frac{n}{p}-1}_{p,\infty,\infty} \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}, \ e\ \dot{B}W\dot{K}^{0,\frac{n}{p}}_{p,\infty,1} \hookrightarrow \dot{B}^{0}_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty.$$

(2) Para $1 \leqslant \sigma < \infty$ não é verdadeira a inclusão

$$\dot{B}W\dot{K}^{0,s}_{p,\infty,r} \hookrightarrow \dot{B}^{s-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}\right)}_{\sigma,\infty}.$$

Na sequência dos lembretes dos resultados de inclusão, a próxima proposição nos fornece relações entre os próprios espaços de Besov-Lorentz-Herz homogêneos.

Proposição 2.8. *Sejam $s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty, 1 \leqslant d, q \leqslant \infty$ e $0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$. Nessas condições, temos as seguintes inclusões contínuas*

$$\dot{B}\dot{K}^{\alpha,0}_{p,d,q,1} \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha}_{p,d,q} \hookrightarrow \dot{B}\dot{K}^{\alpha,0}_{p,d,q,\infty}.$$

Finalizando os resultados de inclusão, enunciamos um resultado do tipo imersão de Sobolev, o qual é importante para provar algumas estimativas.

Proposição 2.9. *Sejam $s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty, 1 \leqslant d_1, q, r \leqslant \infty, p \leqslant p_1 < \infty, 1 < p_2 \leqslant p_1$ e*

$$-\frac{n}{p} < \alpha < n\left(1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\right).$$

Nessas condições, vale a seguinte desigualdade

$$\| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right),s+\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)}_{p_2,d_1,q,r}}. \tag{2.9}$$

Também, se $\dfrac{n}{2} < p < \infty$ e $0 \leqslant \alpha < \min\left\{1 - \dfrac{n}{2p}, \dfrac{n}{2p}\right\}$, então

$$\| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{2p,d,q,r}} \leqslant C \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{2\alpha,s+\alpha+\frac{n}{2p}}_{p,d_1,q,r}}. \tag{2.10}$$

Observação 2.10. *Note que nas condições da proposição anterior e em vista das desigualdades* (2.9) *e* (2.10), *obtemos as seguintes inclusões contínuas*

(1)

$$\dot{B}\dot{K}^{\alpha+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right),s+n\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)}_{p_2,d_1,q,r} \hookrightarrow \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}.$$

(2)

$$\dot{B}\dot{K}^{2\alpha,s+\alpha+\frac{n}{2p}}_{p,d_1,q,r} \hookrightarrow \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{2p,d,q,r}.$$

A próxima proposição é um resultado para operadores do tipo multiplicadores de Fourier, a qual será útil para provarmos estimativas para a família de operadores $M_\theta^\beta(t)$ associada à parte linear do problema (1). Além disso, também nos permite provar a limitação das transformadas de Riesz $\mathcal{R}_j$ e do projetor de Leray $\mathbb{P}$ nos espaços $\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$.

Proposição 2.11. *Sejam* $m, s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty, 1 \leqslant q, r \leqslant \infty$ *e* $-\dfrac{n}{p} < \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$. *Considere* P *uma função de classe* $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, *tal que*

$$|\partial^\beta P(\xi)| \leqslant C|\xi|^{(m-|\beta|)}, \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ com } |\beta| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Nessas condições, temos que

$$\| P(D)f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s-m}_{p,d,q,r}} \leqslant C \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} .$$

Finalizamos as propriedades dos espaços de Besov-Lorentz-Herz homogenêneos com um resultado de interpolação. Resultados deste tipo são úteis pois em vários casos provamos estimativas para determinados índices do espaço e estendemos os resultados para outros índices via resultados de interpolação.

Proposição 2.12. *Sejam* $1 < p < \infty, 1 \leqslant d, q, r, r_0, r_1 \leqslant \infty, 0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \dfrac{n}{p}\right), s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ *tais que* $s = (1-\eta)s_0 + \eta s_1$ *com* $\eta \in (0,1)$. *Nessas condições, temos que*

$$\left(\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s_0}_{p,d,q,r_0}, \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s_1}_{p,d,q,r_1}\right)_{\eta,r} = \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}.$$

2.2 Análise de Escalonamento (scaling)

Nesta seção faremos a análise de escalonamento da equação, importante para estabelecermos índices adequados tanto para a equação, quanto para o espaço em que provaremos o resultado de existência e unicidade. Aqui assumimos que todos os termos são suaves o suficiente para permitir os cálculos, ou seja, procedemos formalmente.

Primeiramente, faremos a análise do escalonamento para as equações MHD fracionárias, para tal, consideremos o problema (1) na sua forma mais geral

$$\begin{cases} \partial_t^{\theta_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = (b\cdot\nabla)b, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \partial_t^{\theta_2} b + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} b + (u\cdot\nabla)b = (b\cdot\nabla)u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ e } b(x,0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Para $\lambda > 0$, defina $u_\lambda(x,t) = \lambda^{k_1} u(\lambda x, \lambda^{k_2} t)$ e $b_\lambda(x,t) = \lambda^{k_3} b(\lambda x, \lambda^{k_2} t)$.

Aplicando a regra da cadeia e uma mudança de variáveis na integral, para u_λ temos

$$\begin{aligned} \partial_t^\theta u_\lambda(x,t) &= D_t^{\theta-1}(\partial_t u_\lambda) = \frac{1}{\Gamma(2-\theta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial_s u_\lambda(x,s)}{(t-s)^{\theta-1}} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\theta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\lambda^{k_1} \partial_s (u(\lambda x, \lambda^{k_2} s))}{(t-s)^{\theta-1}} ds \\ &= \lambda^{k_1} \frac{1}{\Gamma(2-\theta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{(\partial_s u)(\lambda x, \lambda^{k_2} s)}{(t-s)^{\theta-1}} \lambda^{k_2} ds \\ &= \frac{\lambda^{k_1}}{\lambda^{-k_2(\theta-1)}} \frac{1}{\Gamma(2-\theta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t\lambda^{k_2}} \frac{(\partial_w u)(\lambda x, w)}{(t\lambda^{k_2} - w)^{\theta-1}} dw \\ &= \frac{\lambda^{k_1}\lambda^{k_2}}{\lambda^{-k_2(\theta-1)}} (\partial_t^\theta u)(\lambda x, \lambda^{k_2} t) = \lambda^{k_1 + k_2\theta} (\partial_t^\theta u)(\lambda x, \lambda^{k_2} t). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Portanto,

$$\partial_t^\theta u_\lambda(x,t) = \lambda^{k_1+\theta k_2} (\partial_t^\theta u)(\lambda x, \lambda^{k_2} t). \tag{2.13}$$

Note que, de forma similiar ao que foi feito para u_λ, podemos concluir que para b_λ temos

$$\partial_t^\theta b_\lambda(x,t) = \lambda^{k_3+\theta k_2} (\partial_t^\theta b)(\lambda x, \lambda^{k_2} t). \tag{2.14}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u_\lambda(x,t) &= (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} [\lambda^{k_1} u(\lambda x, \lambda^{k_2} t)] \\ &= \lambda^{k_1+\beta} [(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u](\lambda x, \lambda^{k_2} t). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Analogamente, prova-se que

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} b_\lambda(x,t) = \lambda^{k_3+\beta} [(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} b](\lambda x, \lambda^{k_2} t). \tag{2.16}$$

Para os demais termos da equação podemos calcular

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(u_\lambda \cdot \nabla u_\lambda) &= \mathbb{P}(\lambda^{k_1} u(\lambda x, \lambda^{k_2} t) \cdot \nabla(\lambda^{k_1} u(\lambda x, \lambda^{k_2} t)) \\ &= \lambda^{2k_1} \mathbb{P}(u(\lambda x, \lambda^{k_2} t) \cdot \nabla(u(\lambda x, \lambda^{k_2} t)) \\ &= \lambda^{2k_1+1} [\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)](\lambda x, \lambda^{k_2} t). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Também temos as seguintes igualdades

$$\mathbb{P}(b_\lambda \cdot \nabla b_\lambda) = \lambda^{2k_3+1}[\mathbb{P}(b \cdot \nabla b)](\lambda x, \lambda^{k_2} t); \tag{2.18}$$

$$(u_\lambda \cdot \nabla b_\lambda) = \lambda^{k_1+k_3+1}(u \cdot \nabla b)(\lambda x, \lambda^{k_2} t); \tag{2.19}$$

$$(b_\lambda \cdot \nabla u_\lambda) = \lambda^{k_1+k_3+1}(b \cdot \nabla u)(\lambda x, \lambda^{k_2} t). \tag{2.20}$$

Note que, das igualdades (2.13) a (2.20), obtemos

$$\begin{aligned}
&\partial_t^{\theta_1} u_\lambda + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u_\lambda + \mathbb{P}(u_\lambda \cdot \nabla) u_\lambda - \mathbb{P}(b_\lambda \cdot \nabla) b_\lambda = \\
&\lambda^{k_1+\theta_1 k_2}(\partial_t^{\theta_1} u)(\lambda x, \lambda^{k_2} t) + \lambda^{k_1+\beta_1}(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u(\lambda x, \lambda^{k_2} t) \\
&+ \lambda^{2k_1+1}[\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)](\lambda x, \lambda^{k_2} t) - \lambda^{2k_3+1}[\mathbb{P}(b \cdot \nabla b)](\lambda x, \lambda^{k_2} t), \\
&\partial_t^{\theta_2} b_\lambda + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} b_\lambda + (u_\lambda \cdot \nabla) b_\lambda - (b_\lambda \cdot \nabla) u_\lambda = \\
&\lambda^{k_3+\theta_2 k_2}(\partial_t^{\theta_2} b)(\lambda x, \lambda^{k_2} t) + \lambda^{k_3+\beta_2}(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} b(\lambda x, \lambda^{k_2} t) \\
&+ \lambda^{k_1+k_2+1}(u \cdot \nabla b)(\lambda x, \lambda^{k_2} t) - \lambda^{k_1+k_2+1}(b \cdot \nabla u)(\lambda x, \lambda^{k_2} t).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Observando as duas igualdades anteriores (2.21), note que se (u, b) é solução do problema (2.11), então (u_λ, b_λ) também será solução desde que

$$\lambda^{k_1+\theta_1 k_2} = \lambda^{k_1+\beta_1} = \lambda^{2k_1+1} = \lambda^{2k_3+1} \text{ e } \lambda^{k_3+\theta_2 k_2} = \lambda^{k_3+\beta_2} = \lambda^{k_1+k_3+1}.$$

Logo, desde que $\lambda > 0$, as relações acima nos levam a

$$k_1 = k_3, \theta_1 = \theta_2, \beta_1 = \beta_2, k_3 + \beta_2 = k_1 + k_3 + 1 \text{ e } k_1 = \beta_2 - 1 = k_3.$$

Além disso, do fato de $k_1 + \theta_1 k_2 = k_1 + \beta_1$, pode-se concluir que $k_2 = \dfrac{\beta_1}{\theta_1}$.

Unindo todas as informações anteriores, e considerando $\beta = \beta_1 = \beta_2$ e $\theta = \theta_1 = \theta_2$, podemos concluir que se (u, b) é solução do problema (1), então

$$(u_\lambda, b_\lambda) = (\lambda^{\beta-1} u(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t), \lambda^{\beta-1} b(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t)) \tag{2.22}$$

também será solução de (1).

Com isso, podemos definir a função de escalonamento para as equações (1) como

$$(u(x,t), b(x,t)) \mapsto (u_\lambda(x,t), b_\lambda(x,t)). \tag{2.23}$$

Fazendo $t \to 0^+$ em (2.23), o escalonamento da solução das equações induz o seguinte escalonamento para o dado inicial

$$(u_0(x), b_0(x)) \mapsto (u_{0\lambda}(x), b_{0\lambda}(x)) = \lambda^{\beta-1}(u_0, b_0)(\lambda x). \tag{2.24}$$

Finalizamos a parte de escalonamento das equações MHD fracionárias dando a definição de solução autossimilar como segue:

Definição 2.13. *Uma solução da equação* (1) *é dita autossimilar se é uma solução invariante pelo escalonamento* (u_λ, b_λ) *dado em* (2.22).

Tendo feito anteriormente a análise de escalonamento do problema (1), para finalizar esta seção faremos uma análise de escalonamento dos espaços de Besov-Lorentz-Herz homogêneos. Iniciemos com algumas definições.

Definição 2.14. *Seja X um espaço de Banach de distribuições e $k \in \mathbb{R}$.*

(1) O espaço X tem escalonamento de grau k se

$$\| f(\lambda\cdot) \|_X \approx \lambda^k \| f \|_X, \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } f \in X.$$

(2) O espaço X é crítico para a equação (1) *se X tem escalonamento de grau $k = 1 - \beta$.*

A seguir, temos dois resultados sobre a relação de escalonamento nos espaços de Besov-weak-Herz.

Proposição 2.15. *(veja [57], Lema 2.5) Sejam $0 < p, q \leqslant \infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Nessas condições, temos a seguinte relação de escalonamento*

$$\| f(\lambda\cdot) \|_{W\dot{K}^\alpha_{p,q}} \approx \lambda^{-\left(\alpha+\frac{n}{p}\right)} \| f \|_{W\dot{K}^\alpha_{p,q}}, \forall \lambda > 0 \text{ e } f \in W\dot{K}^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

De posse da proposição anterior e conhecimentos sobre os espaços de Besov, prova-se facilmente a seguinte propriedade:

Proposição 2.16. *Para $\alpha, s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, temos*

$$\| f(\lambda\cdot) \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,r}} \approx \lambda^{s-\left(\alpha+\frac{n}{p}\right)} \| f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,r}}, \forall \lambda > 0, \forall f \in \dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n).$$

O espaço Y no qual é provado o teorema de existência e unicidade para o problema (1) é baseado em uma norma da seguinte forma

$$\| v \|_Y = \sup_{t>0} t^\eta \| v(\cdot, t) \|_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} + \| v \|_{L^\infty((0,\infty);\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,\infty})} . \tag{2.25}$$

Para finalizarmos esta seção, faremos alguns cálculos de modo a determinar índices adequados para que a norma definida em (2.25) seja invariante pelo escalonamento (2.22).

Note que, pela Proposição 2.15, segue que

$$\begin{aligned} t^{\eta} \parallel u_{\lambda}(\cdot,t) \parallel_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} &= t^{\eta}\lambda^{\beta-1} \parallel u(\lambda\cdot,\lambda^{\frac{\beta}{\theta}}t) \parallel_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} \\ &\approx t^{\eta}\lambda^{\beta-1}\lambda^{-\left(\alpha_1+\frac{n}{p_1}\right)} \parallel u(\cdot,\lambda^{\frac{\beta}{\theta}}t) \parallel_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{p_1,q_1}} \\ &\approx (\lambda^{\frac{\beta}{\theta}}t)^{\eta}\lambda^{-\frac{\beta\eta}{\theta}+\beta-1-\left(\alpha_1+\frac{n}{p_1}\right)} \parallel u(\cdot,\lambda^{\frac{\beta}{\theta}}t) \parallel_{W\dot{K}^{\alpha_1}_{o_1,q_1}}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Além disso, pela Proposição 2.16, segue que

$$\parallel u_{\lambda}(\cdot,t) \parallel_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,\infty}} \approx \lambda^{\beta-1}\lambda^{s-\left(\alpha+\frac{n}{p}\right)} \parallel u(\cdot,\lambda^{\frac{\beta}{\theta}}t) \parallel_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,\infty}}. \tag{2.27}$$

Observando as relações anteriores (2.26) e (2.27), então a norma definida em (2.25) será invariante pelo escalonamento (2.22) se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\eta = \frac{\theta}{\beta}\left(\beta - 1 - \alpha - \frac{n}{2p}\right) \text{ e } s = 1 - \beta + \frac{n}{p} + \alpha. \tag{2.28}$$

Com a relação acima, obtemos uma restrição para η e s. As demais restrições para os índices dos espaços são impostas para obter-se as devidas estimativas dos termos da formulação branda (2.37).

2.3 Formulação branda para as equações MHD fracionárias

Nesta seção, trataremos da formulação integral para o problema (1). Antes de partirmos para os cálculos da formulação, trataremos da função de Mittag-Leffler, essa por sua vez, será fundamental para obtermos a família de operadores associada à parte linear do problema (1). Mais detalhes sobre a função de Mittag-Leffler podem ser encontrados em [1, 2, 24, 33].

Iniciemos com a definição da função de Mittag-Leffler.

Definição 2.17. ***(Função de Mittag-Leffler)*** *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $\theta \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\theta) > 0$. A função de Mittag-Leffler é definida a partir da série de potências*

$$E_{\theta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\theta k + 1)},$$

onde Γ denota a função Gamma de Euler.

Note que, quando $\theta = 1$ temos $\Gamma(k+1) = k!$ e consequentemente

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

A seguir enunciamos algumas propriedades e resultados da função de Mittag-Leffler. Para tal, considere $\mathcal{K}_\theta$ a solução fundamental do problema (veja [1])

$$\partial_t^\theta u - \Delta u = 0,$$

e note que $\mathcal{K}_\theta$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathcal{K}_\theta(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} E_\theta(-t^\theta|\xi|^2)d\xi.$$

A próxima proposição nos fornece uma forma de escrita da função de Mittag-Leffler e as derivadas de $\mathcal{K}_\theta$. As demonstrações das afirmações da próxima proposição podem ser encontradas em [1, 24, 33], Lema 2.3, Proposição 1 e Lema 3.1, respectivamente.

Proposição 2.18. *Sejam* $1 < \theta < 2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Então, temos*

$$E_\theta(-|\xi|^2) = \frac{1}{\theta}\left(e^{a_\theta(\xi)} + e^{b_\theta(\xi)}\right) + l_\theta(\xi), \tag{2.29}$$

onde

$$a_\theta(\xi) = |\xi|^{\frac{2}{\theta}} e^{\frac{i\pi}{\theta}}, b_\theta(\xi) = |\xi|^{\frac{2}{\theta}} e^{-\frac{i\pi}{\theta}}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.30}$$

e

$$l_\theta(\xi) = \begin{cases} \dfrac{sen(\theta\pi)}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{|\xi|^2 s^{\theta-1} e^{-s}}{s^{2\theta} + 2|\xi|^2 cos(\theta\pi) + |\xi|^4} & se \quad \xi \neq 0 \\ 1 - \dfrac{2}{\theta} & se \quad \xi = 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Além disso,

$$\frac{\partial^k \mathcal{K}_\theta}{\partial x_i^k}(t,x) = \lambda^{n+k} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \mathcal{K}_\theta(\lambda x, \lambda^{\frac{2}{\theta}} t). \tag{2.32}$$

Agora, de posse da definição da função de Mittag-Leffer, podemos fazer a formulação integral para as equações (2.1).

Primeiramente, note que do fato de $\nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0$, podemos escrever

$$(u\cdot\nabla)u = \nabla\cdot(u\otimes u), (b\cdot\nabla)b = \nabla\cdot(b\otimes b), (u\cdot\nabla)b = \nabla\cdot(u\otimes b) \text{ e } (b\cdot\nabla)u = \nabla\cdot(b\otimes u),$$

onde $(w \otimes v)_{k,j} = w_k v_j$.

Além disso, aplicando o projetor de Leray $\mathbb{P}$ na primeira linha de (2.1) e utilizando as propriedades de $\mathbb{P}$ (veja Proposição 1.28, página 26), podemos reescrever (2.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t^\theta u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u = \mathbb{P}\nabla\cdot(b\otimes b) - \mathbb{P}\nabla\cdot u\otimes u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \partial_t^\theta b + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} b = \nabla\cdot(b\otimes u) - \nabla\cdot(u\otimes b), & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ e } b(x,0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.33}$$

Aplicando um princípio do tipo Duhamel (veja [33], Proposição 2.1) em (2.33), podemos formalmente obter que

$$\begin{aligned} u(t) &= M_\theta^\beta(t)u_0 + \int_0^t M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u - b\otimes b)d\tau\right)ds \\ b(t) &= M_\theta^\beta(t)b_0 + \int_0^t M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\nabla\cdot(u\otimes b - b\otimes u)d\tau\right)ds, \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $r_\gamma(t) = \dfrac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$ e a família de operadores $M_\theta^\beta(t)$ é definida via transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}(M_\theta^\beta(t)f)(\xi) = E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)\widehat{f}(\xi). \tag{2.35}$$

Agora, escrevendo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(u,b)(t) &= \int_0^t M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes b)d\tau\right)ds, \\ \mathcal{B}_2(u,b)(t) &= \int_0^t M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(t-\tau)\nabla\cdot(u\otimes b)d\tau\right)ds, \end{aligned} \tag{2.36}$$

então podemos reescrever (2.34) da seguinte forma

$$\left\{ \begin{aligned} u(t) &= M_\theta^\beta(t)u_0 + \mathcal{B}_1(u,u) - \mathcal{B}_1(b,b) \\ b(t) &= M_\theta^\beta(t)b_0 + \mathcal{B}_2(u,b) - \mathcal{B}_2(b,u). \end{aligned} \right. \tag{2.37}$$

Observação 2.19. *Para finalizar esta seção, dizemos que (u,b) é solução branda para o problema (1) se (u,b) satisfaz (2.37).*

2.4 Demonstração dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3

Nesta seção, faremos as demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2 (veja página 37). Com o objetivo de demonstrar o Teorema 2.1, faremos duas subseções, uma dedicada às estimativas da parte linear e outra às estimativas das partes não-lineares. Iniciamos a próxima subseção para as primeiras estimativas lineares.

2.4.1 Estimativas da parte linear

No intuito de obtermos estimativas para a família de operadores $M_\theta^\beta(t)$, iniciaremos com um lema que nos fornece estimativas para o símbolo da família $E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)$.

Lema 2.20. *Sejam $1 \leqslant \theta < \beta \leqslant 2$ e $-\beta < m \leqslant 0$. Então, existe $C = C(\beta,\theta,m) > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)\right| \leqslant Ct^{m\frac{\theta}{\beta}}|\xi|^{(m-|k|)}, \tag{2.38}$$

$\forall\xi \neq 0$ e $\forall k \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ com $|k| \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

Demonstração. Observe que fazendo $|w| = |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{2}}$, podemos escrever

$$E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta) = E_\theta(-(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{2}})^2) = E_\theta(-|w|^2). \tag{2.39}$$

Por outro lado, da Proposição 2.18 (veja página 46), podemos escrever

$$E_\theta(-|w|^2) = \frac{1}{\theta}\left(e^{a_\theta(w)} + e^{b_\theta(w)}\right) + l_\theta(w), \tag{2.40}$$

onde a_θ, b_θ e l_θ são como definidos em (2.30) e (2.31), respectivamente.

Logo, se $\xi \neq 0$ então, das igualdades (2.39) e (2.40), podemos escrever

$$\begin{aligned} E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta) &= \frac{1}{\theta}\left(\exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}e^{\frac{i\pi}{\theta}}) + (\exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}e^{-\frac{i\pi}{\theta}}\right) \\ &+ \frac{\operatorname{sen}(\theta\pi)}{\pi}\int_0^\infty \frac{|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^\beta s^{\theta-1}e^{-s}}{s^{2\theta} + 2|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^\beta s^\theta\cos(\theta\pi) + |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{2\beta}}ds \\ &:= I_\theta(\xi) + \tilde{l}_\theta(\xi). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Fazendo a mudança de variável $s \mapsto |t^{\frac{\beta}{\theta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}w^{\frac{1}{\theta}}$, obtemos $\dfrac{ds}{dw} = |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\theta}{\beta}}\dfrac{1}{\theta}w^{(\frac{1}{\theta}-1)}$ e podemos escrever a integral do último termo de (2.41) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{l}_\theta(\xi) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta\pi)}{\pi}\int_0^\infty \frac{|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\beta+\frac{\theta}{\beta}(\theta-1)+\frac{\theta}{\beta}}w^{\frac{\theta-1}{\theta}+\frac{1}{\theta}-1}\theta^{-1}e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}w^{\frac{1}{\theta}}}}{|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{2\beta}w^2 + 2|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{2\beta}w\cos(\theta\pi) + |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{2\beta}}dw \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\theta\pi)}{\theta\pi}\int_0^\infty \frac{|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{2\beta}e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}w^{\frac{1}{\theta}}}}{|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{2\beta}(w^2 + 2w\cos(\theta\pi) + 1)}dw \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\theta\pi)}{\theta\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}w^{\frac{1}{\theta}}}}{w^2 + 2w\cos(\theta\pi) + 1}dw \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\theta\pi)}{\theta\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}s^{\frac{1}{\theta}}}}{s^2 + 2s\cos(\theta\pi) + 1}ds. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Depois de reescrevermos alguns termos nos passos anteriores, vamos provar a desigualdade (2.38) e começaremos fazendo estimativas para o termo

$$I_\theta(\xi) = \frac{1}{\theta}(\exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\theta}{\beta}}e^{\frac{i\pi}{\theta}}) + \exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}e^{-\frac{i\pi}{\theta}})). \tag{2.43}$$

Seja $k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ tal que $|k| = 1$ e, sem perda de generalidade, consideremos $k = (1, 0, \ldots, 0)$. Note que

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}I_\theta(\xi) = \frac{1}{\theta}\left[\exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}e^{\frac{i\pi}{\theta}})e^{\frac{i\pi}{\theta}}t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1 + \exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}e^{-\frac{i\pi}{\theta}})e^{-\frac{i\pi}{\theta}}t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1\right] \tag{2.44}$$

Em vista da igualdade anterior, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial \xi_1} I_\theta(\xi)\right| &\leqslant \frac{\beta}{\theta^2} t|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-1} \exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right) \\
&\leqslant \frac{\beta}{\theta^2} t|\xi|^{-m}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)|\xi|^{m-1} \\
&\leqslant \frac{\beta}{\theta^2} t^{m\frac{\theta}{\beta}} |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{-m+\frac{\beta}{\theta}} \exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)|\xi|^{m-1} \\
&\leqslant C t^{m\frac{\theta}{\beta}} |\xi|^{m-1}, \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

em que na última desigualdade de (2.45) foi utilizado o fato de que, uma vez que $m \leqslant 0$, então

$$|x|^{-m\frac{\beta}{\theta}} e^{-|x|^{\frac{\beta}{\theta}}} \leqslant C,$$

onde $C > 0$ é o máximo da função $g(x) = |x|^{-m+\frac{\beta}{\theta}} e^{-|x|^{\frac{\beta}{\theta}}}$, para $x \geqslant 0$.

Agora, no intuito de provarmos a estimativa para o caso geral, iremos provar uma desigualdade para $k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ tal que $|k| = 2$ e, novamente, sem perda de generalidade, consideramos $k = (1, 1, 0, \ldots, 0)$.

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} I_\theta(\xi) &= \frac{1}{\theta}\Bigg[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\Bigg(\exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\theta}{\beta}} e^{\frac{i\pi}{\theta}}) e^{\frac{i\pi}{\theta}} t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1 \\
&+ \exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{-\frac{i\pi}{\theta}}) e^{-\frac{i\pi}{\theta}} t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1\Bigg)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\theta}\Bigg[e^{\frac{i\pi}{\theta}} \exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{\frac{i\pi}{\theta}}) t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1 t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1 \\
&+ e^{\frac{i\pi}{\theta}} \exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{\frac{i\pi}{\theta}}) t\frac{\beta}{\theta}\left(|\xi|^{\frac{\theta}{\beta}-2} + \xi_1\left(\frac{\beta}{\theta}-2\right)|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-4}\xi_1\right) \\
&+ e^{-\frac{i\pi}{\theta}} \exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{-\frac{i\pi}{\theta}}) e^{-\frac{i\pi}{\theta}} t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1 t\frac{\beta}{\theta}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1 \\
&+ \exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{-\frac{i\pi}{\theta}}) e^{-\frac{i\pi}{\theta}} t\frac{\beta}{\theta}\left(|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2} + \xi_1\left(\frac{\beta}{\theta}-2\right)|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-4}\xi_1\right)\Bigg]. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Da igualdade (2.46), segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} I_\theta(\xi)\right| &\leqslant C\Big[|\exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{\frac{i\pi}{\theta}})|(t^2|\xi|^{2\frac{\beta}{\theta}-2} + t|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2} + t|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}) \\
&+ |\exp(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{-\frac{i\pi}{\theta}})|(t^2|\xi|^{2\frac{\beta}{\theta}-2} + t|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2} + t|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2})\Big] \\
&\leqslant C\exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)(t^2|\xi|^{2\frac{\beta}{\theta}-2} + t|\xi|^{\frac{\theta}{\beta}-2}) \\
&\leqslant C\exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)|\xi|^{-2}(t^2|\xi|^{2\frac{\beta}{\theta}} + t|\xi|^{\frac{\theta}{\beta}}) \\
&\leqslant C|\xi|^{-2}\exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{2\frac{\beta}{\theta}} + |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}). \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Observando a desigualdade (2.47) verificada para $k \in \mathbb{N}^n$, com $|k| = 2$, pode-se de forma similar generalizar tal desigualdade para $k \in \mathbb{N}^n$, com $|k| \geqslant 2$, obtendo a seguinte estimativa

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} I_\theta(\xi)\right| \leqslant C \exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} + \ldots + |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{|k|\frac{\beta}{\theta}})|\xi|^{-|k|}. \tag{2.48}$$

Multiplicando o segundo membro da desigualdade (2.48) por

$$t^{-m\frac{\theta}{\beta}} t^{m\frac{\theta}{\beta}} |\xi|^{-m}|\xi|^{m},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} I_\theta(\xi)\right| &\leqslant Ct^{m\frac{\theta}{\beta}}|\xi|^{m-|k|} \exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{-m+\frac{\beta}{\theta}} + \ldots + |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{-m+|k|\frac{\beta}{\theta}})\\ &\leqslant Ct^{m\frac{\theta}{\beta}}|\xi|^{m-|k|}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

onde na última desigualdade de (2.49) foi utilizado o fato de que

$$\exp\left(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)(|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{-m+\frac{\beta}{\theta}} + \ldots + |t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{-m+|k|\frac{\beta}{\theta}}) \leqslant \tilde{C},$$

onde $\tilde{C}$ é o máximo da função $h(x) = \exp\left(|x|^{\frac{\beta}{\theta}} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\right)\right)(|x|^{-m+\frac{\beta}{\theta}} + \ldots + |x|^{-m+|k|\frac{\beta}{\theta}})$, para $x \geqslant 0$.

Das desigualdades (2.45) e (2.49), para m, k nas condições do lema, podemos concluir que

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} I_\theta(\xi)\right| \leqslant Ct^{m\frac{\theta}{\beta}}|\xi|^{m-|k|}, \forall \xi \neq 0. \tag{2.50}$$

O próximo passo é trabalhar estimativas para o termo $\tilde{I}_\theta(\xi)$, que em vista de (2.42) pode ser escrito da seguinte forma

$$\tilde{I}_\theta(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(\theta\pi)}{\theta\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}}}{s^2 + 2s\cos(\theta\pi) + 1} ds.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, construíremos estimativas para o caso $k \in \mathbb{N}^n$ com $|k| = 1$ e $|k| = 2$ e em seguida faremos a generalização para o caso geral. Iniciemos com $|k| = 1$ e, sem perda de generalidade, podemos considerar $k = (1, 0, \ldots, 0)$.

Note que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} = \left(\frac{\beta}{\theta} - 2\right) e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} (-ts^{\frac{1}{\theta}}|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2}\xi_1). \tag{2.51}$$

Em vista da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial \xi_1} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}}\right| &\leqslant \left(\frac{\beta}{\theta}-2\right) e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} t s^{\frac{1}{\theta}} |\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} |\xi|^{-1} \\ &\leqslant C|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}}} |\xi|^{-1}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Multiplicando $|\xi|^m|\xi|^{-m}$ no segundo membro da desigualdade (2.52), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial \xi_1} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}}\right| &\leqslant C|\xi|^{-m}|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}}} |\xi|^{m-1} \\ &\leqslant C t^{m\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{m}{\beta}} |\xi|^{m-1} |t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{-m+\frac{\beta}{\theta}} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}}}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Agora, analisemos o caso $|k| = 2$ e, sem perda de generalidade, faremos $k = (1, 1, 0, \ldots, 0)$.

Da igualdade (2.51), podemos calcular

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\left(\frac{\beta}{\theta}-2\right) e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} (-t s^{\frac{1}{\theta}} |\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2} \xi_1)\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\theta}-2\right)^2 e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} (-t s^{\frac{1}{\theta}} |\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-} \xi_1)(-t s^{\frac{1}{\theta}} |\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2} \xi_1) \\ &+ \left(\frac{\beta}{\theta}-2\right) e^{-|t^{\frac{\beta}{\theta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} t s^{\frac{1}{\theta}} \left(-|\xi|^{\frac{\beta}{\theta}-2} - \xi_1\left(\frac{\theta}{\beta}-6\right)|\xi|^{\frac{\theta}{\beta}-4}\xi_1\right). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Da igualdade (2.54) concluímos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}}\right| &\leqslant C e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}} s^{\frac{1}{\theta}}} (t^2 s^{\frac{2}{\theta}} |\xi|^{2\frac{\beta}{\theta}-2} + 2 t s^{\frac{1}{\theta}} |\xi|^{2\frac{\beta}{\theta}-2}) \\ &\leqslant C e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi s^{\frac{1}{\beta}}|^{\frac{\beta}{\theta}}} (|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\theta}} \xi|^{2\frac{\beta}{\theta}} + |t^{\frac{\beta}{\theta}} \xi s^{\frac{1}{\theta}}|^{\frac{\beta}{\theta}}) |\xi|^{-2}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Multiplicando $|\xi|^m|\xi|^{-m}$ no segundo membro da desigualdade anterior, temos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi s^{\frac{1}{\beta}}|^{\frac{\beta}{\theta}}}\right| &\leqslant C|\xi|^{-m} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi s^{\frac{1}{\theta}}|^{\frac{\theta}{\beta}}} |\xi|^{m-2}(|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}} + |t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{2\frac{\beta}{\theta}}) \\ &\leqslant C t^{m\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{m}{\beta}} |\xi|^{m-2} e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}}} (|t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{\frac{\beta}{\theta}-m} + |t^{\frac{\theta}{\beta}} s^{\frac{1}{\beta}} \xi|^{2\frac{\beta}{\theta}-m}). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Observando os cálculos realizados nas estimativas (2.53) e (2.56), podemos facilmente generalizar tais estimas e concluir que

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}\xi|^{\frac{\beta}{\theta}}s^{\frac{1}{\theta}}}\right| \leqslant Ct^{m\frac{\beta}{\theta}}s^{\frac{m}{\beta}}|\xi|^{m-|k|}e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}s^{\frac{1}{\beta}}\xi|^{\frac{\theta}{\beta}}}(|t^{\frac{\theta}{\beta}}s^{\frac{1}{\beta}}\xi|^{-m+\frac{\beta}{\theta}}+\ldots+|t^{\frac{\theta}{\beta}}s^{\frac{1}{\beta}}\xi|^{-m+|k|\frac{\beta}{\theta}}), \quad (2.57)$$

$\forall\xi\neq 0, k\in\mathbb{N}^n$ com $|k|\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$ e $-\beta<m\leqslant 0$.

Em vista de (2.57) e do fato que

$$e^{-|t^{\frac{\theta}{\beta}}s^{\frac{1}{\beta}}\xi|^{\frac{\theta}{\beta}}}(|t^{\frac{\theta}{\beta}}s^{\frac{1}{\beta}}\xi|^{-m+\frac{\beta}{\theta}}+\ldots+|t^{\frac{\theta}{\beta}}s^{\frac{1}{\beta}}\xi|^{-m+|k|\frac{\beta}{\theta}})\leqslant C_1,$$

onde $C_1(m,n,\beta,\theta)>0$ é uma constante que independe de ξ, s, t, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\tilde{l}_\theta(\xi)\right| &\leqslant C\int_0^\infty \frac{t^{m\frac{\beta}{\theta}}|\xi|^{m-|k|}s^{\frac{m}{\beta}}}{s^2+2s\cos(\theta\pi)+1}ds\\ &\leqslant Ct^{m\frac{\beta}{\theta}}|\xi|^{m-|k|}\int_0^\infty\frac{s^{\frac{m}{\beta}}}{s^2+2s\cos(\theta\pi)+1}ds\\ &\leqslant Ct^{m\frac{\beta}{\theta}}|\xi|^{m-|k|}, \end{aligned}\quad (2.58)$$

desde que $-m\leqslant\beta$.

De (2.50) e (2.58), obtemos (2.38) concluindo a demonstração do lema. □

De posse do Lema 2.20 (veja página 47) podemos partir para as estimativas da família de operadores $M_\theta^\beta(t)$. Iniciamos com um estimativa em espaços de Besov-Lorentz-Herz como enunciado na próxima proposição.

Proposição 2.21. *Sejam* $1<p<\infty, 1\leqslant r,d,q\leqslant\infty, -\frac{n}{p}<\alpha<n\left(1-\frac{1}{p}\right), 1\leqslant\theta<\beta\leqslant 2,$ *e* $\sigma, s\in\mathbb{R}$ *com* $s\leqslant\sigma$ *e* $s-\sigma>-\beta$. *Então, existe* $C>0$ *tal que*

$$\| M_\theta^\beta(t)f\|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,\sigma}_{p,d,q,r}}\leqslant Ct^{\frac{\theta}{\beta}(s-\sigma)}\| f\|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}, \quad (2.59)$$

para todo $t>0$ *e* $f\in\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, se $s<\sigma, 2(s-\sigma)>-\beta$ *e* $0\leqslant\alpha<n\left(1-\frac{1}{p}\right)$, *então*

$$\| M_\theta^\beta(t)f\|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,\sigma}_{p,d,q,1}}\leqslant Ct^{\frac{\theta}{\beta}(s-\sigma)}\| f\|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty}}, \quad (2.60)$$

$\forall t>0, f\in\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiramente, note que do Lema 2.20 (veja página 47), temos

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)\right|\leqslant Ct^{m\frac{\theta}{\beta}}|\xi|^{m-|k|},\ \forall\xi\neq 0, \quad (2.61)$$

onde $-\beta < m \leqslant 0$ e $|k| \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$.

Em vista da estimativa (2.61), podemos aplicar a Proposição 2.11 (veja página 41) para $P(D) = M_\theta^\beta(t)$, obtendo que

$$\| M_\theta^\beta(t) f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s-m}_{p,d,q,r}} \leqslant C t^{m\frac{\theta}{\beta}} \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}. \tag{2.62}$$

Como $s - \sigma \leqslant 0$ e $s - \sigma > -\beta$, podemos tomar $m = s - \sigma$ em (2.62) e concluir que

$$\| M_\theta^\beta(t) f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,\sigma}_{p,d,q,r}} \leqslant C t^{\frac{\theta}{\beta}(s-\sigma)} \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}, \tag{2.63}$$

$\forall t > 0$ e $f \in \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$, concluindo a primeira parte da demonstração da proposição.

Agora, passemos para a demonstração de (2.60). Note que, tomando $s < \sigma$ e $2(s - \sigma) > -\beta$, então de (2.63) com $r = \infty$, obtemos

$$\| M_\theta^\beta(t) f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,2\sigma-s}_{p,d,q,\infty}} \leqslant C t^{\frac{\theta}{\beta}2(s-\sigma)} \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty}}. \tag{2.64}$$

Além disso, de (2.63) com $s = \sigma$ e $r = \infty$, tem-se

$$\| M_\theta^\beta(t) f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty}} \leqslant C \| f \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty}}. \tag{2.65}$$

Note que, fixado $t > 0$, das estimativas (2.64) e (2.65), podemos concluir que

$$M_\theta^\beta(t) : \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty} \mapsto \dot{B}\dot{K}^{\alpha,2\sigma-s}_{p,d,q,\infty} \tag{2.66}$$

e

$$M_\theta^\beta(t) : \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty} \mapsto \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty}. \tag{2.67}$$

De (2.64), (2.65),(2.66), (2.67) e da Proposição 2.12 (veja página 41), segue que

$$M_\theta^\beta(t) : \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty} \mapsto (\dot{B}\dot{K}^{\alpha,2\sigma-s}_{p,d,q,\infty}, \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty})_{\frac{1}{2},1} = \dot{B}\dot{K}^{\alpha,\sigma}_{p,d,q,1}, \tag{2.68}$$

com a norma do operador

$$\| M_\theta^\beta(t) \|_{\dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,\infty} \to \dot{B}\dot{K}^{\alpha,s}_{p,d,q,1}} \leqslant C t^{\frac{\theta}{\beta}(s-\sigma)}. \tag{2.69}$$

De (2.68) e (2.69) obtemos a estimativa (2.60) concluindo a demonstração da proposição. □

Finalizamos esta subseção com uma proposição que contém uma estimativa para $M_\theta^\beta(t)$ em espaços funcionais que também dependem do tempo, o que facilitará a demonstração dos resultados para o problema (1).

Proposição 2.22. *Sejam* $1 < p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, 0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right), 1 + \alpha + \dfrac{n}{2p} < \beta \leqslant 2$ *e* $1 \leqslant \theta < \beta$. *Então, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\| M_\theta^\beta(\cdot) f \|_{L^\infty((0,\infty);\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty})} + \sup_{t>0} t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \| M_\theta^\beta(t) f \|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\ \leqslant\ & C \| f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}, \end{aligned} \tag{2.70}$$

para toda $f \in \dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Note que, pelas Proposições 2.8, 2.9 e 2.21 (veja páginas 40 e 52, respectivamente), temos

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \| M_\theta^\beta(t) f \|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} &\leqslant C\sup_{t>0} t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \| M_\theta^\beta(t) f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,0}_{2p,2q,1}} \\ &\leqslant C\sup_{t>0} t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \\ &\quad\ t^{\frac{\theta}{\beta}\left(1+\alpha+\frac{n}{2p}-\beta\right)} \| f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{2p}+\alpha}_{2p,2q,\infty}} \\ &\leqslant C \| f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{2p}+\alpha}_{2p,2q,\infty}} \\ &\leqslant C \| f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Além disso, pela Proposição 2.21 (veja página 52), temos a seguinte estimativa

$$\| M_\theta^\beta(t) f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \leqslant C \| f \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}, \tag{2.72}$$

$\forall f \in \dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}(\mathbb{R}^n)$. De (2.71) e (2.72), segue a estimativa (2.70), concluindo a demonstração da proposição. □

2.4.2 Estimativas das partes não-lineares

Esta subseção é dedicada a demonstração das estimativas não-lineares. Mais precisamente, provamos uma estimativa para as formas bilineares $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ nos espaços Y definido no Teorema 2.1 (veja página 37), como segue.

Proposição 2.23. *Sejam* $\dfrac{n}{2} < p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, 1 \leqslant \theta < \beta \leqslant 2$ *e* $0 \leqslant \alpha < \min\left\{1 - \dfrac{n}{2p}, \dfrac{n}{2p}, \dfrac{\beta}{\theta} - \dfrac{n}{2p} - 1\right\}$. *Então, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\| \mathcal{B}_1(u,b) \|_Y \leqslant C \| u \|_Y \| b \|_Y, \tag{2.73}$$

e

$$\| \mathcal{B}_2(u,b) \|_Y \leqslant C \| u \|_Y \| b \|_Y, \tag{2.74}$$

para todo $u, b \in Y$.

Demonstração. Primeiramente, note que, como $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ diferem apenas pelo fato que em $\mathcal{B}_1$ aparece o projetor de Leray $\mathbb{P}$, faremos somente a estimativa (2.73), enquanto que (2.74) pode ser obtida de forma análoga a demonstração de (2.73).

Aplicando os resultados das Proposições 2.8, 2.9 e 2.21 (veja páginas 40 e 52), existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{B}_1(u,b)(t) \|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} &\leqslant C \| \mathcal{B}_1(u,b)(t) \|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,0}_{2p,2q,1}} \\
&\leqslant C \| \mathcal{B}_1(u,b)(t) \|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,\alpha+\frac{n}{2p}}_{p,2q,1}} \\
&\leqslant C \int_0^t \left\| M^{\beta}_{\theta}(t-s) \left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes b)d\tau \right) \right\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,\alpha+\frac{n}{2p}}_{p,2q,1}} ds \\
&\leqslant C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes b)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,-1}_{p,2q,\infty}} d\tau ds.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Além disso, aplicando a Proposição 2.11 (veja página 41) para obter a limitação do projetor de Leray $\mathbb{P}$ e estimativa para ∇ no espaços de Besov-Lorentz-Herz homogêneo e, aplicando também a Proposição 2.8 (veja página 40), podemos estimar o lado esquerdo de (2.75) como segue:

$$\begin{aligned}
& C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes b)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,-1}_{p,2q,\infty}} d\tau ds \\
\leqslant\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|\nabla\cdot(u\otimes b)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,-1}_{p,2q,\infty}} d\tau ds \\
\leqslant\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\otimes b\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,0}_{p,2q,\infty}} d\tau ds \\
\leqslant\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\otimes b\|_{W\dot{K}^{2\alpha}_{p,2q}} d\tau ds
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Finalizando essa primeira estimativa, aplicando a inclusão $l^q \subset l^{2q}$ e desigualdade de Hölder para os espaços $W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}$ (veja Proposição 1.47 , página 33), chegamos a

$$\begin{aligned}
& C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\otimes b\|_{W\dot{K}^{2\alpha}_{p,2q}} d\tau ds \\
\leqslant\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\otimes b\|_{W\dot{K}^{2\alpha}_{p,q}} d\tau ds \\
\leqslant\ & C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}\|b\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} d\tau ds \\
\leqslant\ & C\|u\|_Y\|b\|_Y \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} d\tau ds.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

De (2.75), (2.76) e (2.77), segue que

$$\|\mathcal{B}_1(u,b)(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \leqslant C\|u\|_Y\|b\|_Y \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} d\tau ds. \tag{2.78}$$

Agora, verifiquemos que

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} d\tau ds \leqslant Ct^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}. \tag{2.79}$$

Observando o fato de $r_{\theta-1}(s-\tau) = \dfrac{(s-\tau)^{\theta-2}}{\Gamma(\theta-1)}$ e fazendo as mudanças de variáveis $\tau = zs$ e em seguida $s = tw$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} d\tau ds \\
&= C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^s (s-\tau)^{\theta-2}\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} d\tau ds \\
&= C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \int_0^1 s^{\theta-2}(1-z)^{\theta-2}z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} s^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} s dz ds \\
&= C\int_0^1 t^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)}(1-w)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} t^{\theta-2}w^{\theta-2}t^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1}w^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1} t dw \\
&\left(\int_0^1 (1-z)^{\theta-2}z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}dz\right) \\
&= Ct^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)+\theta-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \left(\int_0^1 (1-w)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} w^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1+\theta-2}dw\right) \\
&\left(\int_0^1 (1-z)^{\theta-2}z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}dz\right) \\
&= Ct^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} B\left(-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+\theta, -\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)+1\right) \\
&B\left(-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1, \theta-1\right) \\
&= Ct^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)},
\end{aligned} \tag{2.80}$$

onde $B(\cdot,\cdot)$ denota a função Beta e, com os cálculos de (2.80) concluímos a verificação da afirmação (2.79).

Além disso, de (2.78) e (2.79) segue que

$$\|\mathcal{B}_1(u,b)(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \leqslant C\|u\|_Y\|b\|_Y t^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}, \tag{2.81}$$

e, consequentemente, concluímos que

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u,b)(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \leqslant C\|u\|_Y\|b\|_Y. \tag{2.82}$$

Agora, verifiquemos que

$$\|\mathcal{B}_1(u,b)(t)\|_{L^\infty((0,\infty);\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty})} \leqslant C\|u\|_Y\|b\|_Y \tag{2.83}$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski para integrais e Proposições 2.9, 2.21, 2.11 (veja páginas 40, 52, 41), podemos estimar

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{B}_1(u,b)(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \\
&\leqslant \int_0^t \|M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes b)d\tau\right)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} ds \\
&\leqslant C\int_0^t \|M_\theta^\beta(t-s)\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes b)d\tau\right)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,2\alpha+\frac{n}{p}-\beta+1}_{p,q,\infty}} ds \\
&\leqslant C\int_0^t (t-s)^{\frac{\theta}{\beta}\left(-1-2\alpha-\frac{n}{p}+\beta-1\right)}\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|\nabla\cdot(u\otimes b)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,-1}_{p,q,\infty}}\right) ds.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Além disso, pelas Proposições 2.11, 2.8 e 1.47 (veja páginas 41, 40, 33), temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{\frac{\theta}{\beta}\left(-1-2\alpha-\frac{n}{p}+\beta-1\right)}\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|\nabla\cdot(u\otimes b)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,-1}_{p,q,\infty}}\right) ds \\
&\leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\otimes b\|_{\dot{B}W\dot{K}^{2\alpha,0}_{p,q,\infty}} d\tau\right) ds \\
&\leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\otimes b\|_{W\dot{K}^{2\alpha}_{p,q}} d\tau\right) ds \\
&\leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}\|b\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} d\tau\right) ds \\
&\leqslant C\|u\|_Y\|b\|_Y\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} d\tau\right) ds.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Agora, note que pelo fato de $r_{\theta-1}(s-\tau) = \dfrac{(s-\tau)^{\theta-2}}{\Gamma(\theta-1)}$ e fazendo a mudança de variáveis $\tau = zs$ e $s = tw$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)} \left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}d\tau\right) ds \\
&\leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)} \left(\int_0^s (s-\tau)^{\theta-2}\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}d\tau\right) ds \\
&= C\left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)} s^{\theta-1-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}ds\right)\left(\int_0^1 (1-z)^{\theta-2}z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}dz\right) \\
&= Ct^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)+\theta-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\left(\int_0^1 (1-z)^{\theta-2}z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}dz\right) \\
&\cdot\left(\int_0^1 (1-w)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)} w^{\theta-1-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}dw\right) \\
&= CB\left(-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1,\theta-1\right) \\
&\cdot B\left(-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+\theta,-2\frac{\theta}{\beta}\left(1+\alpha+\frac{n}{2p}-\frac{\beta}{2}\right)+1\right).
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

Das estimativas (2.84), (2.85) e (2.86), segue a estimativa (2.83). Além disso, de (2.82) e (2.83), obtemos que

$$
\|\mathcal{B}_1(u,b)\|_Y \leqslant C\|u\|_Y\|b\|_Y, \tag{2.87}
$$

concluindo a demonstração da proposição. □

2.4.3 Demonstração do Teorema 2.1

Depois de termos desenvolvido estimativas para termos das partes lineares e não-lineares nas subseções 2.4.1 e 2.4.2, respectivamente, dedicaremos esta subseção à demonstração do Teorema de existência e unicidade de solução para o problema (1), Teorema 2.1.

Demonstração. Considere $\Psi : Y\times Y \to Y\times Y$ definida por

$$
\Psi(u,b) = (M_\theta^\beta(t)u_0 + \mathcal{B}_1(u,u) - \mathcal{B}_2(b,b), M_\theta^\beta(t)B_0 + \mathcal{B}_2(u,b) - \mathcal{B}_2(b,u))
$$

Seja C a constante obtida nas Proposições 2.22 e 2.23 (veja página 54) e tome $0<\varepsilon<\min\left\{1,\dfrac{1}{24C}\right\}$ e $0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{C}$. Considerando $D(0,2\varepsilon)$ a bola fechada de raio 2ε e centro 0 em $Y\times Y$, mostremos que $\Psi : D(0,2\varepsilon)\to D(0,2\varepsilon)$ desde que

$$
\|u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta-\frac{n}{p}+\alpha}} + \|b_0\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta-\frac{n}{p}+\alpha}} \leqslant \delta.
$$

Primeiramente, para $(u,b) \in D(0,2\varepsilon)$, aplicando as Proposições 2.22 e 2.23 (veja página 54), temos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u,b)\|_{Y\times Y} &\leqslant \|M_\theta^\beta(t)u_0\|_Y + \|M_\theta^\beta(t)b_0\|_Y + \|\mathcal{B}_1(u,u)\|_Y + \|\mathcal{B}_1(b,b)\|_Y \\
&+ \|\mathcal{B}_2(u,b)\|_Y + \|\mathcal{B}_2(b,u)\|_Y \\
&\leqslant C\|u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta-\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} + C\|b_0\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta-\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \\
&+ C(\|u\|_Y^2 + \|b\|_Y^2 + 2\|u\|_Y\|b\|_Y) \\
&\leqslant C\delta + C(\|u\|_Y + \|b\|_Y)^2 \\
&\leqslant C\delta + C4\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

o que implica que $\Psi : D(0,2\varepsilon) \to D(0,2\varepsilon)$.

Agora, provemos que Ψ é uma contração em $D(0,2\varepsilon)$. Tomando $(u_1,b_1),(u_2,b_2) \in D(0,2\varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(u_1,b_1) - \Psi(u_2,b_2)\|_{Y\times Y} \\
&= \|\mathcal{B}_1(u_1,u_1) - \mathcal{B}_1(b_1,b_1) - \mathcal{B}_1(u_2,u_2) + \mathcal{B}_1(b_2,b_2)\|_Y \\
&+ \|\mathcal{B}_2(u_1,b_1) - \mathcal{B}_2(b_1,u_1) - \mathcal{B}_2(u_2,b_2) + \mathcal{B}_2(b_2,u_2)\|_Y \\
&\leqslant \|\mathcal{B}_1(u_1,u_1) - \mathcal{B}_1(u_2,u_2)\|_Y + \|\mathcal{B}_1(b_2,b_2) - \mathcal{B}_1(b_1,b_1)\|_Y \\
&+ \|\mathcal{B}_2(u_1,b_1) - \mathcal{B}_2(u_2,b_2)\|_Y + \|\mathcal{B}_2(b_2,u_2) - \mathcal{B}_2(b_1,u_1)\|_Y.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Agora, note que, pela Proposição 2.23 (veja página 54), temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}_1(u_1,u_1) - \mathcal{B}_1(u_2,u_2)\|_Y &= \|\mathcal{B}_1(u_1-u_2,u_1) + \mathcal{B}_1(u_2,u_1-u_2)\|_Y \\
&\leqslant C\|u_1-u_2\|_Y\|u_1\|_Y + C\|u_2\|_Y\|u_1-u_2\|_Y \\
&\leqslant C\|u_1-u_2\|_Y(\|u_1\|_Y + \|u_2\|_Y).
\end{aligned} \tag{2.90}$$

De forma análoga ao que foi feito em (2.90), obtemos

$$\|\mathcal{B}_1(b_2,b_2) - \mathcal{B}_1(b_1,b_1)\|_Y \leqslant C\|b_1-b_2\|_Y(\|b_1\|_Y + \|b_2\|_Y). \tag{2.91}$$

Além disso, novamente pela Proposição 2.23 (veja página 54), temos

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{B}_2(u_1,b_1) - \mathcal{B}_2(u_2,b_2)\|_Y \\
&= \|\mathcal{B}_2(u_1-u_2,b_1) + \mathcal{B}_2(u_2,b_1) - \mathcal{B}(u_2,b_2-b_1) - \mathcal{B}_2(u_2,b_1)\|_Y \\
&\leqslant \|\mathcal{B}_2(u_1-u_2,b_1)\|_Y + \|\mathcal{B}_2(u_2,b_2-b_1)\|_Y \\
&\leqslant C\|u_1-u_2\|_Y\|b_1\|_Y + C\|u_2\|_Y\|b_2-b_1\|_Y.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

De forma análoga ao que foi feito em (2.92), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{B}_2(b_2,u_2)-\mathcal{B}_2(b_1,u_1)\|_Y\\
&=\|\mathcal{B}_2(b_2-b_1,u_2)+\mathcal{B}_2(b_1,u_2)-\mathcal{B}_2(b_1,u_1-u_2)-\mathcal{B}_2(b_1,u_2)\|_Y\\
&\leqslant\|\mathcal{B}_2(b_2-b_1,u_2)\|_Y+\|\mathcal{B}_2(b_1,u_1-u_2)\|_Y\\
&\leqslant C\|b_2-b_1\|_Y\|u_2\|_Y+C\|b_1\|_Y\|u_1-u_2\|_Y
\end{aligned}\tag{2.93}$$

Unindo as desigualdades (2.89), (2.90), (2.91), (2.92) e (2.93) segue que

$$\begin{aligned}
&\|\Psi(u_1,b_1)-\Psi(u_2,b_2)\|_Y\\
\leqslant\;& C\|u_1-u_2\|_Y(\|u_1\|_Y+\|u_2\|_Y)+C\|b_1-b_2\|_Y(\|b_1\|_Y+\|b_2\|_Y)+C\|u_1-u_2\|_Y\|b_1\|_Y\\
+\;& C\|u_2\|_Y\|b_2-b_1\|_Y+C\|b_2-b_1\|_Y\|u_2\|_Y+C\|b_1\|_Y\|u_1-u_2\|_Y\\
\leqslant\;& C(\|u_1-u_2\|_Y+\|b_1-b_2\|_Y)12\varepsilon\\
=\;& 12\varepsilon C\|(u_1,b_1)-(u_2,b_2)\|_Y\leqslant\frac{1}{2}\|(u_1,b_1)-(u_2,b_2)\|_Y,
\end{aligned}\tag{2.94}$$

pois $12\varepsilon C<1/2$.

Da desigualdade (2.94) segue que Ψ é contração em $D(0,2\varepsilon)\subset Y$, e portanto, do Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que existe uma única $(u,b)\in D(0,2\varepsilon)$ tal que $\Psi(u,b)=(u,b)$, a qual é a única solução branda para o problema (1), como desejado. □

2.4.4 Demonstração do Teorema 2.2

Esta subseção é dedicada à demonstração do Teorema 2.2. Iniciamos com a primeira afirmação que nos diz que a solução branda do problema (1) depende continuamente do dado inicial.

Demonstração da parte (i)

Sejam (u_0,b_0) e (u_1,b_1) dados iniciais para o problema (1) satisfazendo

$$\|u_0\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}+\|b_0\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\leqslant\delta,$$

e

$$\|u_1\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}+\|b_1\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\leqslant\delta,$$

onde δ é como no Teorema 2.1 (Teorema de Existência e Unicidade).

Pelo Teorema 2.1 (veja página 37), existem únicas $(u,b),(\tilde{u},\tilde{b})\in D(0,2\varepsilon)\subset Y$ soluções brandas para o problema (1) com dados iniciais (u_0,b_0) e (u_1,b_1), respectivamente.

Note que, pela Proposição 2.22 (veja página 54) e procedendo de forma análoga ao que foi feito para se obter a estimativa (2.94) (veja página 60), temos

$$\begin{aligned}
&\|(u,b)-(\tilde{u},\tilde{b})\|_{Y\times Y}\\
\leqslant\ &\|M_\theta^\beta(t)(u_0-u_1)\|_Y+\|M_\theta^\beta(t)(b_0-b_1)\|_Y\\
+\ &\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})+\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b})\|_Y\\
+\ &\|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})+\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u})\|_Y\\
\leqslant\ &C(\|u_0-u_1\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}+\|b_0-b_1\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}+\frac{1}{2}\|(u,b)-(\tilde{u},\tilde{b})\|_{Y\times Y}).
\end{aligned}\tag{2.95}$$

Agora estimativa (2.95) implica que

$$\|(u,b)-(\tilde{u},\tilde{b})\|_{Y\times Y}\leqslant 2C\|(u_0,b_0)-(u_1,b_1)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}},\tag{2.96}$$

o que nos leva à desejada continuidade.

Demonstração da parte (ii)

No intuito de provarmos a convergência da parte (ii) do Teorema 2.2, enunciamos um lema que nos diz sobre o comportamento do símbolo $E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)$ quando $t\to 0^+$. A demonstração do lema é uma simples adaptação da Proposição 3.2 da referência [2].

Lema 2.24. *Seja $\xi\in\mathbb{R}^n$ e $1\leqslant\theta<\beta\leqslant 2$. Então*

$$\lim_{t\to 0^+}E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)=1.$$

Agora, iniciemos a demonstração da convergência fraca-$\star$. Primeiramente provemos que $M_\theta^\beta(t)u_0\rightharpoonup u_0$ na topologia fraca-$\star$ de $\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$ quando $t\to 0^+$.

Para tal é suficiente provar que para w no pré-dual de $\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}$, ou seja $w\in\dot{B}^{\beta-1}_{1,1}$, tem-se

$$|\langle M_\theta^\beta(t)u_0-u_0,w\rangle|\to 0 \text{ quando } t\to 0^+.\tag{2.97}$$

Mas, note que para provar (2.97) basta provar que

$$|\langle M_\theta^\beta(t)w-w,u_0\rangle|\to 0 \text{ quando } t\to 0^+.\tag{2.98}$$

De fato, como $E_\theta(-t^\theta|x-y|^\beta)=E_\theta(-t^\theta|y-x|^\beta)$ podemos concluir que

$$\langle M_\theta^\beta(t)u_0,w\rangle=\langle M_\theta^\beta(t)w,u_0\rangle,\tag{2.99}$$

e com isso, temos

$$\begin{aligned}
\langle M_\theta^\beta(t)u_0-u_0,w\rangle &= \langle M_\theta^\beta(t)u_0-u_0,\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}w\rangle\\
&= \frac{1}{2}\langle M_\theta^\beta(t)u_0-u_0,w\rangle+\frac{1}{2}\langle M_\theta^\beta(t)u_0-u_0,w\rangle\\
&= \frac{1}{2}\langle M_\theta^\beta(t)u_0,w\rangle-\frac{1}{2}\langle u_0,w\rangle+\frac{1}{2}\langle M_\theta^\beta(t)u_0,w\rangle-\frac{1}{2}\langle u_0,w\rangle\\
&= \frac{1}{2}\langle M_\theta^\beta(t)w,u_0\rangle-\frac{1}{2}\langle w,u_0\rangle+\frac{1}{2}\langle M_\theta^\beta(t)w,u_0\rangle-\frac{1}{2}\langle w,u_0\rangle\\
&= \langle M_\theta^\beta(t)w-w,u_0\rangle.
\end{aligned}\tag{2.100}$$

Note que, pela Proposição 2.7 (veja página 40), podemos proceder como segue

$$\begin{aligned}
|\langle M_\theta^\beta(t)w - w, u_0\rangle| &\leqslant \|M_\theta^\beta(t)w - w\|_{\dot{B}^{\beta-1}_{1,1}}\|u_0\|_{\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}}\\
&\leqslant C\|M_\theta^\beta(t)w - w\|_{\dot{B}^{\beta-1}_{1,1}}\|u_0\|_{\dot{BWK}^{\alpha,\alpha+\frac{n}{p}+1-\beta}_{p,\infty,\infty}}\\
&\leqslant C\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j(\beta-1)}\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j[E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)-1]\widehat{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\right) \quad (2.101)
\end{aligned}$$

Do Lema 2.24 (veja página 61) e Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j(\beta-1)}\|\mathcal{F}^{-1}\varphi_j[E_\theta(-t^\theta|\xi|^\beta)-1]\widehat{w}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ quando } t \to 0^+. \tag{2.102}$$

De (2.101) e (2.102) conclui-se a afirmação (2.97), e consequentemente $M_\theta^\beta(t)u_0 \rightharpoonup u_0$, quando $t \to 0^+$, na topologia fraca-$\star$ de $\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}$. Também, de forma análoga prova-se que $M_\theta^\beta(t)b_0 \rightharpoonup b_0$, quando $t \to 0^+$, na topologia fraca-$\star$ de $\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}$.

Para finalizar a demonstração nos resta verificar que $\mathcal{B}_1(u,u)(t), \mathcal{B}_1(b,b)(t)$, $\mathcal{B}_2(u,b)(t), \mathcal{B}_2(b,u)(t) \rightharpoonup 0$ na topologia fraca-$\star$ de $\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, quando $t \to 0^+$. Faremos a demonstração do fato

$$\mathcal{B}_1(u,u)(t) \rightharpoonup 0 \text{ quando } t \to 0^+, \tag{2.103}$$

na topologia fraca-$\star$ de $\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}$, e os demais casos da convergência decorrem de forma análoga a (2.103).

Seja $w \in \dot{B}^{\beta-1}_{1,1}$ e $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\dot{B}^{\beta-1}_{1,1}$ segue que existe $\tilde{w} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|w - \tilde{w}\|_{\dot{B}^{\beta-1}_{1,1}} < \varepsilon. \tag{2.104}$$

Note que, pelas Proposições 2.7, 2.23 (veja páginas 40 e 54) e (2.104), temos

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{B}_1(u,u)(t), w - \tilde{w}\rangle| &\leqslant \|\mathcal{B}_1(u,u)(t)\|_{\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}}\|w - \tilde{w}\|_{\dot{B}^{\beta-1}_{1,1}}\\
&\leqslant C\|\mathcal{B}_1(u,u)(t)\|_{\dot{BWK}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\|w - \tilde{w}\|_{\dot{B}^{\beta-1}_{1,1}}\\
&\leqslant C\|u\|_Y^2\varepsilon. \quad (2.105)
\end{aligned}$$

Além disso, pelas Proposições 2.11 e 1.47 (veja páginas 41 e 33), podemos estimar

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{B}_1(u,u)(t),\tilde{w}\rangle| &\leqslant \int_0^t\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)|\langle M_\theta^\beta(t-\tau)\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)(\tau),\tilde{w}\rangle|d\tau ds\\
&\leqslant \int_0^t\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)|\langle \mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)(\tau),M_\theta^\beta(t-\tau)\tilde{w}\rangle|d\tau ds\\
&\leqslant \int_0^t\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)\|_{\dot{B}^{-1-2\alpha-\frac{n}{p}}_{\infty,\infty}}\|M_\theta^\beta(t-\tau)\tilde{w}\|_{\dot{B}^{1+2\alpha+\frac{n}{p}}_{1,1}}d\tau ds\\
&\leqslant CC(\tilde{w})\int_0^t\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u\otimes u\|_{\dot{B}^{-2\alpha-\frac{n}{p}}_{\infty,\infty}}d\tau ds\\
&\leqslant CC(\tilde{w})\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{\theta-2}\|u\otimes u\|_{W\dot{K}^{2\alpha}_{p,q}}d\tau ds\\
&\leqslant CC(\tilde{w})\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{\theta-2}\|u\|^2_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}\\
&\leqslant CC(\tilde{w})\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{\theta-2}\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\tau^{2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|u\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}d\tau ds\\
&\leqslant CC(\tilde{w})\|u\|_Y^2\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{\theta-2}\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}d\tau ds. \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = sz$ na última integral de (2.106), chegamos a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^s (s-\tau)^{\theta-2}\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}d\tau ds =\\
&= \mathcal{B}(\theta-1,-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1)\int_0^t s^{\theta-1-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}ds\\
&= C\mathcal{B}(\theta-1,-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1)t^{\theta-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}. \qquad (2.107)
\end{aligned}$$

Em vista das estimativas (2.106) e (2.107) e do fato de $\theta-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)>0$, conclui-se que

$$|\langle \mathcal{B}_1(u,u)(t),\tilde{w}\rangle| \leqslant CC(\tilde{w})t^{\theta-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \to 0 \text{ quando } t\to 0^+. \qquad (2.108)$$

Agora, de (2.105) e (2.108), segue que

$$\begin{aligned}
0\leqslant \limsup_{t\to 0^+}|\langle \mathcal{B}_1(u,u)(t),w\rangle| &\leqslant \limsup_{t\to 0^+}\langle \mathcal{B}_1(u,u)(t),w-\tilde{w}\rangle| + \limsup_{t\to 0^+}|\langle \mathcal{B}_1(u,u)(t),\tilde{w}\rangle|\\
&\leqslant C\varepsilon + 0.
\end{aligned} \qquad (2.109)$$

Observando (2.109) e pelo fato de $\varepsilon>0$ ter sido tomado arbitrário no início da demonstração, segue que

$$\lim_{t\to 0^+}|\langle \mathcal{B}_1(u,u)(t),w\rangle| = 0,\ \ \forall w\in \dot{B}^{\beta-1}_{1,1}. \qquad (2.110)$$

Portanto, $\mathcal{B}_1(u,u)(t) \rightharpoonup 0$ quando $t \to 0^+$ na topologia fraca-$\star$ de $\dot{B}^{1-\beta}_{\infty,\infty}$, concluindo o resultado do teorema.

Demonstração da parte (iii)

Nesta parte mostraremos que se os dados iniciais u_0, b_0 são homogêneos de grau $1-\beta$ então a solução (u,b), obtida no Teorema 2.1, é autossimilar.

Primeiramente, note que a solução (u,b) do Teorema 2.1 foi obtida através do Teorema do Ponto Fixo de Banach, e portanto podemos dizer que (u,b) é limite da seguinte sequência de Picard

$$(u^1, b^1) = (M^\beta_\theta(t)u_0, M^\beta_\theta(t)b_0) \tag{2.111}$$

e

$$\begin{aligned}(u^k, b^k) &= (M^\beta_\theta(t)u_0, M^\beta_\theta(t)b_0) \\ &+ (\mathcal{B}_1(u_{k-1},u_{k-1}) - \mathcal{B}_1(b_{k-1},b_{k-1}), \mathcal{B}_2(u_{k-1},b_{k-1}) - \mathcal{B}_2(b_{k-1},u_{k-1})),\ \forall k \geqslant 2.\end{aligned} \tag{2.112}$$

Mostremos por indução que (u^k, b^k) é homogêneo de grau $1-\beta$, $\forall k \geqslant 1$. Para $k=1$, temos

$$\begin{aligned}u^1(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) &= M^\beta_\theta(\lambda^{\frac{\theta}{\beta}} t)u_0(\lambda x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(\lambda x - y)\cdot\xi} E_\theta(-(\lambda^{\frac{\theta}{\beta}} t)^\theta |\xi|^\beta) d\xi\right) u_0(y)dy.\end{aligned} \tag{2.113}$$

Aplicando as mudanças de varáveis $y = \lambda z$ e $\eta = \lambda\xi$, na última integral de (2.113), e também usando o fato de u_0 ser homogêneo de grau $1-\beta$, obtemos

$$\begin{aligned}u^1(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) &= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-z)\cdot\lambda\xi} E_\theta(-t^\theta|\lambda\xi|^\beta) d\xi\right) u_0(\lambda z)dz \\ &= \lambda^{1-\beta} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-z)\cdot\eta} E_\theta(-t^\theta|\eta|^\beta) d\eta\right) u_0(z)dz \\ &= \lambda^{1-\beta} M^\beta_\theta(t)u_0(x) = \lambda^{1-\beta}u^1(x,t).\end{aligned} \tag{2.114}$$

As relações (2.113) e (2.114) implicam que

$$u^1(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) = \lambda^{1-\beta}u^1(x,t). \tag{2.115}$$

De forma similiar ao que foi feito para u_0, pode-se concluir que

$$b^1(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) = \lambda^{1-\beta}b^1(x,t), \tag{2.116}$$

e, consequentemente, de (2.115) e (2.116) segue que (u^1, b^1) é homogêneo de grau $1-\beta$.

Agora, suponhamos que (u^{k-1}, b^{k-1}) é homogêneo de grau $1-\beta$ e provemos que a afirmação da homogeneidade também é verdade para (u^k, b^k).

Note que, pela própria definição de u^k e por (2.115), temos

$$\begin{aligned} u^k(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) &= u^1(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) + \mathcal{B}_1(u^{k-1}, u^{k-1})(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) + \mathcal{B}_1(b^{k-1}, b^{k-1})(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) \\ &= \lambda^{1-\beta} u^1(x,t) + \mathcal{B}_1(u^{k-1}, u^{k-1})(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) + \mathcal{B}_1(b^{k-1}, b^{k-1})(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t). \end{aligned} \tag{2.117}$$

De forma análoga aos cálculos realizados em (2.114) e utilizando o fato de (u^{k-1}, b^{k-1}) ser homogêneo de grau $1-\beta$, temos

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_1(u^{k-1}, u^{k-1})(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) \\ &= \int_0^{\lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t} M_\theta^\beta(\lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t - s) \left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau) \mathbb{P}\nabla (u_{k-1}(\lambda x) \otimes u_{k-1}(\lambda x))(\tau) d\tau \right) \\ &= \lambda^{1-\beta} \int_0^t M_\theta^\beta(t-s) \left(\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau) \mathbb{P}\nabla (u^{k-1}(x) \otimes u^{k-1}(x))(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \lambda^{1-\beta} \mathcal{B}_1(u^{k-1}, u^{k-1})(x,t), \end{aligned} \tag{2.118}$$

e, similarmente ao que foi feito em (2.118), conclui-se que

$$\mathcal{B}_1(b^{k-1}, b^{k-1})(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) = \lambda^{1-\beta} \mathcal{B}_1(b^{k-1}, b^{k-1})(x,t). \tag{2.119}$$

Das relações (2.117), (2.118) e (2.119), conclui-se que u^k é homogêneo de grau $1-\beta$, e de forma análoga ao que foi feito para u^k, verifica-se que b^k é homogêneo de grau $1-\beta$, concluindo a prova que (u^k, b^k) é homogêneo de grau $1-\beta$, $\forall k \geqslant 1$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} \|(u,b) - (u_\lambda, b_\lambda)\|_{Y\times Y} &\leqslant \|(u,b) - (u^k, b^k) + (u^k, b^k) - (u_\lambda, b_\lambda)\|_{Y\times Y} \\ &\leqslant \|(u,b) - (u^k, b^k)\|_{Y\times Y} + \|(u^k, b^k) - (u_\lambda, b_\lambda)\|_{Y\times Y} \end{aligned} \tag{2.120}$$

Também, como (u^k, b^k) são homogêneas de grau $1-\beta$, segue que

$$((u^k)_\lambda, (b^k)_\lambda) = (u^k, b^k), \tag{2.121}$$

pois

$$(u^k)_\lambda(x,t) = \lambda^{\beta-1} u^k(\lambda x, \lambda^{\frac{\beta}{\theta}} t) = \lambda^{\beta-1}\lambda^{1-\beta} u^k(x,t) = u^k(x,t), \tag{2.122}$$

e o mesmo vale para $(b^k)_\lambda$.

De (2.120), (2.121) e do fato da norma de $Y \times Y$ ser invariante pelo escalonamento dado em (2.22), temos

$$\begin{aligned} \|(u,b) - (u_\lambda, b_\lambda)\|_{Y\times Y} &\leqslant \|(u,b) - (u^k, b^k)\|_{Y\times Y} + \|[(u^k, b^k) - (u,b)]_\lambda\|_{Y\times Y} \\ &\leqslant \|(u,b) - (u^k, b^k)\|_{Y\times Y} + C\|(u^k, b^k) - (u,b)\|_{Y\times Y}. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$ em (2.123) e utilizando o fato de $(u^k, b^k) \to (u, b)$ em $Y \times Y$, segue que $(u, b) = (u_\lambda, b_\lambda)$ provando a autossimilaridade da solução.

2.4.5 Demonstração do Teorema 2.3

Esta subseção é dedicada à demonstração do Teorema 2.3. Iniciemos provando que (2.7) implica (2.6).

Note que, como (u, b) e $(\tilde{u}, \tilde{b})$ são soluções brandas do problema (1), então

$$u(t) - \tilde{u}(t) = M_\theta^\beta(t)(u_0 - \tilde{u}_0) + \mathcal{B}_1(u, u) - \mathcal{B}_1(b, b) - (\mathcal{B}_1(\tilde{u}, \tilde{u}) - \mathcal{B}_1(\tilde{b}, \tilde{b})) \tag{2.124}$$

e

$$b(t) - \tilde{b}(t) = M_\theta^\beta(t)(b_0 - \tilde{b}_0) + \mathcal{B}_2(u, b) - \mathcal{B}_2(b, u) - (\mathcal{B}_2(\tilde{u}, \tilde{b}) - \mathcal{B}_2(\tilde{b}, \tilde{u})). \tag{2.125}$$

Das igualdades acima, concluímos que

$$\begin{aligned} &t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} \\ &\leqslant t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|M_\theta^\beta(t)(u_0 - \tilde{u}_0)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} \\ &+ t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u, u) - \mathcal{B}_1(b, b) - (\mathcal{B}_1(\tilde{u}, \tilde{u}) - \mathcal{B}_1(\tilde{b}, \tilde{b}))\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}}, \end{aligned} \tag{2.126}$$

e

$$\begin{aligned} &t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|b(\cdot,t) - \tilde{b}(\cdot,t)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} \\ &\leqslant t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|M_\theta^\beta(t)(b_0 - \tilde{b}_0)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} \\ &+ t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_2(u, b) - \mathcal{B}_2(b, u) - (\mathcal{B}_2(\tilde{u}, \tilde{b}) - \mathcal{B}_2(\tilde{b}, \tilde{u}))\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}}. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Por outro lado, de (2.75), (2.76), (2.77) e, de $\|(u, b)\|_{Y\times Y} \leqslant \varepsilon$ e $\|(\tilde{u}, \tilde{b})\|_{Y\times Y} \leqslant \varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} &t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u, u) - \mathcal{B}_1(\tilde{u}, \tilde{u})\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} \\ &\leqslant t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\left(\|\mathcal{B}_1(u - \tilde{u}, u)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} + \|\mathcal{B}_1(\tilde{u}, u - \tilde{u})\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}}\right) \\ &\leqslant t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \\ &\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}}(\|u(\tau)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} + \|\tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}})d\tau ds \\ &\leqslant t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}2\varepsilon C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)}\|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^\alpha_{2p,2q}} \\ &\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}d\tau ds. \end{aligned} \tag{2.128}$$

Trabalhando de forma análoga ao que foi feito para obter-se (2.128), obtemos que

$$
\begin{aligned}
& t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(b,b)-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b})\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\
& \leqslant t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} 2\varepsilon C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)}\|b(\tau)-\tilde{b}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\
& \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}d\tau ds. \qquad (2.129)
\end{aligned}
$$

Também, das igualdades (2.124) e (2.125), segue que

$$
\begin{aligned}
& \|u(\cdot,t)-\tilde{u}(\cdot,t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \leqslant \|M^{\beta}_{\theta}(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \\
& + \|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}, \qquad (2.130)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& \|b(\cdot,t)-\tilde{b}(\cdot,t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \leqslant \|M^{\beta}_{\theta}(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \\
& + \|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-(\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})-\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}. \qquad (2.131)
\end{aligned}
$$

Agora, de (2.84), (2.85) e $\|(u,b)\|_{Y\times Y}\leqslant\varepsilon$ e $\|(\tilde{u},\tilde{b}\|_{Y\times Y}\leqslant\varepsilon$, podemos estimar

$$
\begin{aligned}
& \|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)} \\
& \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}(\|u(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|\tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})d\tau ds \\
& \leqslant C2\varepsilon\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}d\tau ds. \\
& \qquad (2.132)
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos que

$$
\begin{aligned}
& \|\mathcal{B}_1(b,b)-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b})\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \\
& \leqslant 2\varepsilon C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|b(\tau)-\tilde{b}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}d\tau ds. \\
& \qquad (2.133)
\end{aligned}
$$

Unindo as desigualdades (2.128), (2.129), (2.132) e (2.133), chegamos a estimativa

$$
\begin{aligned}
& t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\
& + \|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \\
& \leqslant 2\varepsilon C t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)} \\
& \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\
& + \|b(\tau)-\tilde{b}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} d\tau ds + 2\varepsilon C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)} \\
& \int_0^s r_{\theta-1}(s-\tau)\tau^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\tau^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \\
& (\|u(\tau)-\tilde{u}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} + \|b(\tau)-\tilde{b}(\tau)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}) d\tau ds. \qquad (2.134)
\end{aligned}
$$

Fazendo as mudanças de variáveis $\tau = sz$ e $s = t\sigma$ nas integrais da estimativa anterior, concluímos que

$$
\begin{aligned}
& t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\
& + \|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}} \\
& \leqslant 2\varepsilon C \int_0^1 (1-\sigma)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)}\sigma^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+\theta-1} \int_0^1 r_{\theta-1}(1-z)z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \\
& (t\sigma z)^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t\sigma z)-\tilde{u}(t\sigma z)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} + \|b(t\sigma z)-\tilde{b}(t\sigma z)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}) dz d\sigma \\
& + 2\varepsilon C \int_0^1 (1-\sigma)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\sigma^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+1\theta-1} \int_0^1 r_{\theta-1}(1-z)z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} \\
& (t\sigma z)^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t\sigma z)-\tilde{u}(t\sigma z)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} + \|b(t\sigma z)-\tilde{b}(t\sigma z)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}) dz d\sigma. \qquad (2.135)
\end{aligned}
$$

Tomando $\limsup_{t\to\infty}$ na desigualdade anterior (2.135), obtemos que

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} \\
& + \|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\Big] \\
& \leqslant 2\varepsilon C \int_0^1 (1-\sigma)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(\alpha+\frac{n}{2p}+1\right)}\sigma^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+\theta-1} d\sigma \int_0^1 r_{\theta-1}(1-z)z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} dz \\
& \limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} + \|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})\Big] \\
& + 2\varepsilon C \int_0^1 (1-\sigma)^{-\frac{\theta}{\beta}\left(2+2\alpha+\frac{n}{p}-\beta\right)}\sigma^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)+\theta-1} d\sigma \int_0^1 r_{\theta-1}(1-z)z^{-2\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)} dz \\
& \limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} + \|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})\Big] \\
& 2\varepsilon C(C_1+C_2)\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}} + \|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})\Big]. \qquad (2.136)
\end{aligned}
$$

Agora, procedendo com (2.127) e (2.131) de forma análoga às estimativas que foram feitas para (2.126) e (2.130), concluímos também que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-(\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})-\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u})\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}\\
&+\|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-(\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})-\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\Big]\\
&\leqslant 2\varepsilon C(C_1+C_2)\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})\Big].
\end{aligned} \tag{2.137}$$

De (2.126), (2.127), (2.136) e (2.137), temos que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\\
&+t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\Big]\\
&\leqslant \limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|M^{\beta}_{\theta}(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|M^{\beta}_{\theta}(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})\\
&\|M^{\beta}_{\theta}(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}+\|M^{\beta}_{\theta}(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\Big]\\
&+\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}\\
&+\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\\
&t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-(\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})-\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u}))\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}\\
&+\|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-(\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})-\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u}))\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\Big]\\
&\leqslant 0+4\varepsilon C(C_1+C_2)\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}})\Big]\\
&\leqslant 4\varepsilon C(C_1+C_2)\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\\
&+t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\Big].
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Da desigualdade anterior (2.138), segue que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\Big[t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\\
&+t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}^{\alpha}_{2p,2q}}+\|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}_{p,q,\infty}}\Big]=0,
\end{aligned} \tag{2.139}$$

desde que $4\varepsilon C(C_1+C_2)<1$, e de (2.139), obtemos a primeira implicação.

Para provar que (2.6) implica (2.7), ou seja, a recíproca do que foi provado anteriormente, das igualdades (2.124) e (2.125), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|M_\theta^\beta(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}} + t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|M_\theta^\beta(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}}\\
&+\|M_\theta^\beta(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}} + t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|M_\theta^\beta(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}}\\
&\leqslant \|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}} + \|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}}\\
&+t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}(\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}} + \|b(t)-\tilde{b}(t)\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}})\\
&t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}}\\
&+\|\mathcal{B}_1(u,u)-\mathcal{B}_1(b,b)-(\mathcal{B}_1(\tilde{u},\tilde{u})-\mathcal{B}_1(\tilde{b},\tilde{b}))\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}}\\
&t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-(\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})-\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u}))\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}}\\
&+\|\mathcal{B}_2(u,b)-\mathcal{B}_2(b,u)-(\mathcal{B}_2(\tilde{u},\tilde{b})-\mathcal{B}_2(\tilde{b},\tilde{u}))\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}}.
\end{aligned}\tag{2.140}$$

Tomando $\limsup\limits_{t\to\infty}$ na desigualdade anterior e, em vista de (2.136) e (2.137), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\left(\|M_\theta^\beta(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}} + t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|M_\theta^\beta(t)(u_0-\tilde{u}_0)\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}}\right)\\
&=\lim_{t\to\infty}\left(\|M_\theta^\beta(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{\dot{B}W\dot{K}_{p,q,\infty}^{\alpha,1-\beta+\frac{n}{p}+\alpha}} + t^{\frac{\theta}{\beta}\left(\beta-1-\alpha-\frac{n}{2p}\right)}\|M_\theta^\beta(t)(b_0-\tilde{b}_0)\|_{W\dot{K}_{2p,2q}^{\alpha}}\right)=0,
\end{aligned}\tag{2.141}$$

provando (2.7).

3 As equações MHD invíscidas

Neste capítulo tratamos dos resultados para as equações MHD invíscidas, problema (7). Apresentaremos resultados de existência e unicidade de solução para o problema (7), bem como dependência contínua em relação ao dado inicial e critério de blow-up.. Iniciemos recordando as equações que definem o problema,

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u - (b\cdot\nabla)b + \nabla P = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n\times(0,T),\\ \partial_t b + (u\cdot\nabla)b - (b\cdot\nabla)u = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n\times(0,T),\\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n\times(0,T),\\ u(x,0) = u_0(x) \text{ e } b(x,0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $u(x,t) = (u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)$ é o campo velocidade do fluído,

$b(x,t) = (b_1(x,t),\ldots,b_n(x,t))$ é o campo magnético, e $P(x,t)$ denota a pressão. Além disso, $u_0(x), b_0(x)$ são os dados iniciais satisfazendo a condição de compatibilidade $\nabla\cdot u_0 = \nabla\cdot b_0 = 0$.

Iniciamos enunciando o principal resultado deste capítulo, o Teorema de Existência e Unicidade de solução para o problema (7) em espaços de Besov-Lorentz-Herz. Conjuntamente apresentamos a propriedade de dependência contínua em um sentido apropriado. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Sejam $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant d, r, q \leqslant \infty$, com a condição $d = 1$ se $p = 1$. Considere também $s \geqslant \frac{n}{p} + 1$ e $0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, com a condição $\alpha = 0$ se $p = 1$. Assuma adicionalmente que $r = 1$ se $s = \frac{n}{p} + 1$.*

***(i) Existência e unicidade**: Se $u_0, b_0 \in BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$ com $\nabla\cdot u_0 = \nabla\cdot b_0 = 0$, então existe $T > 0$ de modo que o problema (7) admite uma única solução $(u,b) \in (L^\infty(0,T; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \cap C([0,T]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})) \times (L^\infty(0,T; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \cap C([0,T]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}))$. Além disso, se $r < \infty$ então $(u,b) \in C([0,T]; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times C([0,T]; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$.*

***(ii) Dependência contínua do dado inicial**: Considere $((u_0)_m, (b_0)_m)$ sequência de dados iniciais para o problema (7), de modo que $((u_0)_m, (b_0)_m)$ é limitada em $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r} \times BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$ e $((u_0)_m, (b_0)_m) \to (u_0, b_0)$ em $BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r} \times BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}$, quando $m \to \infty$. Além disso, considere (u_m, b_m) e (u,b) soluções para o problema (7), obtidas no item (i), para dados iniciais $((u_0)_m, (b_0)_m)$ e (u_0, b_0), respectivamente. Nessas condições (u_m, b_m) é limitada em $L^\infty(0,T; BK^{s}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0,T; BK^{s}_{p,d,q,r})$ e $(u_m, b_m) \to (u,b)$ em $C([0,T]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times C([0,T]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$ para algum $T > 0$.*

A demonstração da parte (i) do Teorema 3.1 consiste em um argumento padrão de construção de uma sequência através de um método iterativo. Inicialmente, constrói-se a sequência verificando que esta por sua vez é uma sequência de Cauchy em determinado espaço. Uma vez observado que a sequência é de Cauchy, segue que a sequência converge para algum elemento do espaço em questão. Por fim, prova-se que o limite dessa sequência é a solução procurada para o problema (7). A unicidade da solução e dependência contínua do dado inicial seguem posteriormente utilizando algumas estimativas provadas na demonstração da existência da solução.

O segundo resultado deste capítulo consiste em um critério de blow-up para o problema (7). Critérios de blow-up nos dão condições para investigar se uma solução local (u, b) pode ou não ser solução global no tempo t. A seguir enunciamos nosso critério de blow-up.

Teorema 3.2. *Sejam* $1 < p < \infty,\ 0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \frac{1}{p}\right),\ 1 \leqslant d, q, r \leqslant \infty$ *e* $0 < T^* < \infty$.

(i) Seja $s > \frac{n}{p}+1,\ 1 \leqslant r \leqslant \infty$ *e* $(u, b) \in (C([0, T^*); BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \cap L^1((0, T^*); L^\infty)) \times (C([0, T^*); BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \cap L^1((0, T^*); L^\infty))$ *tal que* (u, b) *é uma solução local no tempo para o problema* (7)*. Então*

$$\limsup_{t \to T^*} (\|u(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) = \infty \tag{3.2}$$

se, e somente se,

$$\int_0^{T^*} \|(\nabla \times u, \nabla \times b)(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} dt = \infty. \tag{3.3}$$

(ii) Seja $s = \frac{n}{p} + 1,\ r = 1$ *e* $(u, b) \in (C([0, T^*); BK^{\alpha,\frac{n}{p}+1}_{p,d,q,1}) \cap L^1((0, T^*); L^\infty)) \times (C([0, T^*); BK^{\alpha,\frac{n}{p}+1}_{p,d,q,1}) \cap L^1((0, T^*); L^\infty))$ *tal que* (u, b) *é uma solução local no tempo para o problema* (7)*. Então*

$$\limsup_{t \to T^*} (\|u(t)\|_{BK^{\alpha,\frac{n}{p}+1}_{p,d,q,1}} + \|b(t)\|_{BK^{\alpha,\frac{n}{p}+1}_{p,d,q,1}}) = \infty \tag{3.4}$$

se, e somente se,

$$\int_0^{T^*} \|(\nabla \times u, \nabla \times b)(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} dt = \infty. \tag{3.5}$$

Finalizamos esta introdução de capítulo discorrendo sobre a organização do mesmo. Na Seção 3.1 tratamos dos espaços de Besov-Lorentz-Herz não-homogêneos, que são o ambiente em que provaremos os resultados de existência e unicidade de solução para o problema (7). As Seções 3.2 e 3.3 são dedicadas às demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2, respectivamente.

3.1 Espaços de Besov-Lorentz-Herz

Nesta seção trataremos dos espaços de Besov-Lorentz-Herz no caso não homogêneo, o qual será o espaço em que provaremos o resultado de existência e unicidade para o problema (7). No decorrer desta seção, relembramos as definições e algumas propriedades destes espaços, onde referimos o leitor a [21] e [51], Seção 2 e Capítulo 2, respectivamente, para mais detalhes.

Iniciemos com a definição dos espaços, e para tal considere φ, φ_j e Δ_j como definidos no início da Seção 2.1 (veja página 39) e além disso, defina

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{j \leqslant -1} \varphi_j(\xi), & \text{se } \xi \neq 0, \\ 1, & \text{se } \xi = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

e para todo $j \in \mathbb{Z}$ defina

$$S_j f = \Psi_j(D) f = (\mathcal{F}^{-1}\Psi_j) * f, \tag{3.7}$$

onde $\Psi_j(\xi) = \Psi(\xi/2^j)$.

Agora, para definirmos os espaços de Besov-Lorentz-Herz, considere as quantidades

$$\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} = \begin{cases} \|S_0 f\|^r_{K^\alpha_{p,d,q}} + \left(\sum\limits_{j \geqslant 0} 2^{jsr} \|\Delta_j f\|^r_{K^\alpha_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}}, & \text{se } r < \infty, \\ \max\left\{\|S_0 f\|_{K^\alpha_{p,d,q}}, \sup\limits_{j \geqslant 0} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{K^\alpha_{p,d,q}}\right\}, & \text{se } r = \infty. \end{cases} \tag{3.8}$$

De posse das notações acima, podemos definir os espaços de Besov-Lorentz-Herz como segue:

Definição 3.3. *Sejam $0 < p, d, q \leqslant \infty$, $\alpha, s \in \mathbb{R}$ e $1 \leqslant r \leqslant \infty$. O espaço de Besov-Lorentz-Herz em $\mathbb{R}^n$, denotado por $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$, é definido como*

$$BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} < \infty\}. \tag{3.9}$$

Ao definirmos espaços é natural que se investigue relações de inclusões entre os mesmos. A seguir, enunciamos dois resultados de inclusão para os espaços de Besov-Lorentz-Herz, os quais serão úteis para nossos propósitos. O primeiro deles nos dá inclusões entre os próprios espaços de Besov-Lorentz-Herz e o segundo resultado nos fornece relações de inclusões entre os espaços de Besov-Lorentz-Herz e os espaços de Lorentz-Herz.

Proposição 3.4. *Sejam $0 < p, d, q \leqslant \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}, s_1 > s_2$ e $1 \leqslant r_1, r_2 \leqslant \infty$. Então, temos a seguinte inclusão contínua*

$$BK^{\alpha,s_1}_{p,d,q,r_1} \subset BK^{\alpha,s_2}_{p,d,q,r_2}. \tag{3.10}$$

Proposição 3.5. *Sejam $1 \leqslant p, d, q \leqslant \infty$, com $d = 1$ se $p = 1$ e $\alpha, s \in \mathbb{R}$. Então, temos as seguintes inclusões contínuas*

$$BK^{\alpha,0}_{p,d,q,1} \subset K^\alpha_{p,d,q} \subset BK^{\alpha,0}_{p,d,q,\infty}. \tag{3.11}$$

Na sequência trataremos de alguns resultados que são de extrema importância para a demonstração do Teorema 3.1. Em grande parte dos problemas de equações diferenciais precisamos tratar de não-linearidades do tipo produto, e inspirados por isso enunciamos a próxima proposição que nos fornece estimativas para o produto no espaços de Besov-Lorentz-Herz.

Proposição 3.6. *(1) Sejam $1 \leqslant p, d, q, r \leqslant \infty$, com a condição $d = 1$ se $p = 1, s > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então*

$$\|fg\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|g\|_{L^\infty}),\ \forall f, g \in BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r} \cap L^\infty. \tag{3.12}$$

(2) Sejam $\alpha \geqslant 0, 1 \leqslant p < \infty, s \geqslant \dfrac{n}{p} + 1, 1 \leqslant d, q, r \leqslant \infty$, com $d = 1$ se $p = 1$ e $r = 1$ se $s = \dfrac{n}{p} + 1$. Então, temos que

$$\|f \cdot \nabla g\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} \leqslant C\|f\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}},\ \forall f \in BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r} \text{ e } g \in BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}. \tag{3.13}$$

O próximo resultado nos fornece uma estimativa para o comutador. No entanto, antes de enunciarmos tais resultados fixemos algumas notações. Inicialmente, defina

$$\overline{\Delta}_j f = \begin{cases} \Delta_j f, & \text{se } j \geqslant 0, \\ \mathcal{F}^{-1}(\Psi \widehat{f}), & \text{se } j = -1, \\ 0, & \text{se } j \leqslant -2, \end{cases} \tag{3.14}$$

onde Δ_j é como definido no início da seção 2.1 (veja página 39).

Também, para f, g campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ com divergente nulo, defina

$$R_j(f, g) = \overline{\Delta}_j(f \cdot \nabla g) - S_{j-2}f \cdot \nabla \overline{\Delta}_j g,\ \forall j \geqslant -1. \tag{3.15}$$

De posse das definições anteriores podemos enunciar a proposição das estimativas do comutador, cuja demonstração pode ser encontrada em [51], página 97.

Proposição 3.7. *Sejam $1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant d, q, r \leqslant \infty$, com a condição de $d = 1$ se $p = 1$. Além disso, considere $\alpha \geqslant 0$ e f, g dois campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ com divergente nulo. Nessas condições, temos*

(1) Para $s > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j \geqslant -1} 2^{jsr}\|R_j(f, g)\|^r_{K^r_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C(\|\nabla f\|_{L^\infty}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|\nabla g\|_{L^\infty}\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}), \tag{3.16}$$

$\forall f, g \in BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$ satisfazendo $\nabla f, \nabla g \in L^\infty$.

(2) Para $s \geqslant \dfrac{n}{p} + 1$ com a condição $r = 1$ se $s = \dfrac{n}{p} + 1$, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j \geqslant -1} 2^{jsr}\|R_j(f, g)\|^r_{K^\alpha_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}, \tag{3.17}$$

$$\left(\sum_{j\geqslant -1} 2^{j(s-1)r}\|R_j(f,g)\|^r_{K^{\alpha}_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C\|f\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}, \tag{3.18}$$

$$\left(\sum_{j\geqslant -1} 2^{j(s-1)r}\|R_j(f,g)\|_{K^{r}_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|g\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}. \tag{3.19}$$

Note que para o problema viscoso (1), ao fazermos a formulação branda, eliminamos o termo da pressão ao aplicar o projetor de Leray $\mathbb{P}$. O mesmo não ocorre com o problema invíscido (7), e por essa razão se faz necessário estimativas para trabalhar com o termo da pressão ∇P. O próximo resultado nos fornece estimativas para o termo da pressão, e a demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [21] e [51], Seção 2 e Capítulo 2, respectivamente.

Proposição 3.8. *Sejam $1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant d, q, r \leqslant \infty$ com a condição de $d = 1$ se $p = 1$. Além disso, $0 \leqslant \alpha < n\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ com a condição de $\alpha = 0$ quando $p = 1$.*

(1) Assumindo que $1 < p < \infty$ e $s > 1$, então para f, g campos vetoriais com divergente nulo, existe $C > 0$, independente de f, g, tal que

$$\|\nabla\Delta^{-1}div(f\cdot\nabla g)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C(\|\nabla f\|_{L^\infty}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|\nabla g\|_{L^\infty}\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}), \tag{3.20}$$

$\forall f, g \in BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$ satisfazendo $\nabla f, \nabla g \in L^\infty$.

(2) Para $s \geqslant \dfrac{n}{p} + 1$ com a condição de $r = 1$ se $s = \dfrac{n}{p} + 1$, existe $C > 0$ de modo que se f, g são campos vetoriais com divergente nulo, então vale

$$\|\nabla\Delta^{-1}div(f\cdot\nabla g)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}, \tag{3.21}$$

$$\|\nabla\Delta^{-1}div(f\cdot\nabla g)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} \leqslant C\|f\|_{BK^{`\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|g\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}, \tag{3.22}$$

$$\|\nabla\Delta^{-1}div(f\cdot\nabla g)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} \leqslant C\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|g\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}. \tag{3.23}$$

No que segue, enunciamos um resultado de estimativa para difeomorfismos que preservam volume, o qual será importante para explorar os efeitos da estrutura de transporte contida no problema (7), no desenvolvimento das estimativas. A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [21] e [51], Seção 2 e Capítulo 2, respectivamente.

Proposição 3.9. *Considere $\alpha \geqslant 0, 1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant d, q \leqslant \infty$ com a condição de $d = 1$ se $p = 1$. Além disso, considere Z difeomorfismo em $\mathbb{R}^n$ que preserva volume, satizfazendo*

$$|Z^{\pm}(x) - x| \leqslant K, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.24}$$

onde K é uma constante positiva e, Z^+ e Z^- denotam o difeomorfismo Z e o inverso de Z, respectivamente. Nessas condições, existe $C > 0$ tal que

$$C^{-1}\|f\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant \|f\circ Z\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant C\|f\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}, \ \forall f \in K^{\alpha}_{p,d,q}. \tag{3.25}$$

Em outras palavras, as normas de f e $f\circ Z$ são equivalentes em $K^{\alpha}_{p,d,q}$.

Para finalizar esta seção, dedicada aos espaços de Besov-Lorentz-Herz, definimos os espaços de Sobolev-Lorentz-Herz não-homogêneos para posteriormente enunciarmos um resultado de interpolação para os espaços de Besov-Lorentz-Herz.

Para $\alpha, s \in \mathbb{R}$ e $1 \leqslant p, d \leqslant \infty$, definamos a seguinte quantidade

$$\|f\|_{K^{\alpha,s}_{p,d,q}} = \|J^s f\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}, \tag{3.26}$$

onde $J^s f$ é definido via transformada de Fourier por

$$\mathcal{F}(J^s f) = (1 + |\xi|^{\frac{s}{2}})\widehat{f}. \tag{3.27}$$

De posse da definição anterior, podemos definir os espaços de Sobolev-Lorentz-Herz não-homogêneos.

Definição 3.10. *Para $s, \alpha \in \mathbb{R}$ e $1 \leqslant p, d, q \leqslant \infty$, definimos o espaço de Sobolev-Lorentz-Herz não-homogêneo, denotado por $K^{\alpha,s}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n)$, por*

$$K^{\alpha,s}_{p,d,q}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|f\|_{K^{\alpha,s}_{p,d,q}} < \infty\}.$$

De posse da definição anterior, finalizamos esta seção relembrando um resultado de interpolação, o qual será útil na prova do Teorema 3.1. Tal resultado nos diz que os espaços de Besov-Lorentz-Herz podem ser obtidos via interpolação de espaços de Sobolev-Lorentz-Herz.

Proposição 3.11. *Sejam $1 \leqslant p, d, q, r \leqslant \infty$, com a condição $d = 1$ se $p = 1$. Além disso, considere $\theta \in (0, 1)$ e $\alpha, s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$ de modo que $s_0 \neq s_1$ e $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_0$. Então,*

$$(K^{\alpha,s_0}_{p,d,q}, K^{\alpha,s_1}_{p,d,q})_{\theta,r} = BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}.$$

Da Proposição anterior, podemos concluir que $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$ é um espaço dual, isto é, o espaço $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$ admite um pré-dual.

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Nesta seção trataremos das demonstrações dos itens (i) e (ii) do Teorema 3.1 (veja página 71). Dividiremos as demonstrações em duas subseções. Na subseção 3.2.1 faremos a demonstração do item (i), o qual contempla o resultado de existência e unicidade de solução para o problema (7). Na subseção 3.2.2 faremos a demonstração do item (ii), o qual contempla o resultado de dependência contínua do dado inicial.

3.2.1 Demonstração da parte (i): Existência e Unicidade

Para provar o resultado de existência e unicidade vamos usar um método iterativo. Para tal, considere (u^m, b^m) solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u^m + (u^{m-1}\cdot\nabla)u^m - (b^{m-1}\cdot\nabla)b^m - \Phi(u^{m-1}, b^{m-1}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}b^m + (u^{m-1}\cdot\nabla)b^m - (b^{m-1}\cdot\nabla)u^m = 0, \\ \nabla\cdot u^m = \nabla\cdot b^m = 0, \\ u^m(x,0) = S_m u_0(x), b^m(x,0) = S_m b_0(x),\ \forall m = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.28}$$

e escolhemos $u^0(x,t) = b^0(x,t) = 0$, onde (3.28) é considerado em $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ com $T \in (0,\infty]$ sendo o tempo de existência. Note que faz sentido tomar (u^m, b^m) como solução do problema (3.28), pois este, por sua vez, é um problema linear com dado inicial suave.

Primeiramente, iremos provar a limitação da sequência (u^m, b^m) em um espaço específico, como é enunciado no próximo lema.

Lema 3.12. *Sejam p, d, q, r, α, s como no Teorema 3.1. Se (u^m, b^m) é solução do problema (3.28), então existe uma constante $K > 0$ e $T_2 > 0$ tal que*

$$\|u^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} \leqslant K,\ \forall m \geqslant 1. \tag{3.29}$$

Demonstração. Aplicando $\overline{\Delta}_j$ no sistema (3.28), e aplicando as propriedades desse operador, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j u^m + \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)u^m - \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)b^m - \overline{\Delta}_j\Phi(u^{m-1}, b^{m-1}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j b^m + \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)b^m - \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)u^m = 0, \\ \overline{\Delta}_j\nabla\cdot u^m = \overline{\Delta}_j\nabla\cdot b^m = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

Agora, somando e subtraindo $(S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - (S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m$ e $(S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m - (S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m$ na primeira e segunda equação de (3.30), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j u^m + (S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - (S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m = \\ &(S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)u^m + \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)b^m - (S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m \\ &+ \overline{\Delta}_j\Phi(u^{m-1}, b^{m-1}) \end{aligned} \tag{3.31}$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j b^m + (S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m - (S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m = \\ &(S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m - \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)b^m - (S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m + \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)u^m. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Considere o fluxo $X_j^m(\beta,t)$ associado a equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}X_j^m(\beta,t) = S_{j-2}(u^m - b^m)(X_j^m(\beta,t),t), \\ X_j^m(\beta,0) = \beta, \text{ para } m = 1,2,\dots \end{cases} \tag{3.33}$$

Somando as equações (3.31) e (3.32), e observando as propriedades de $X_j^m(\beta,t)$, chegamos a equação

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\overline{\Delta}_j(u^m + b^m)(X_j^{m-1}(\beta,t),t) = \\ &((S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)u^m) + ((S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)b^m) \\ &-((S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m - \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)b^m) - ((S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)u^m) \\ &+\overline{\Delta}_j\Phi(u^{m-1},b^{m-1})(X_j^{m-1}(\beta,t),t). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Resolvendo a equação (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} &\overline{\Delta}_j(u^m + b^m)(X_j^m(\beta,t),t) = \overline{\Delta}_j(u^m + b^m)(\beta,0) \\ +&\int_0^t((S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)u^m)(X_j^m(\beta,\tau),\tau)d\tau \\ +&\int_0^t((S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m - \overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)b^m)(X_j^m(\beta,\tau),\tau)d\tau \\ -&\int_0^t((S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j b^m - \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)u^m)(X_j^m(\beta,\tau),\tau)d\tau \\ -&\int_0^t((S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j u^m - \overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)u^m)(X_j^m(\beta,\tau),\tau)d\tau \\ +&\int_0^t\overline{\Delta}_j\Phi(u^{m-1},b^{m-1})(X_j^m(\beta,\tau),\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Para a sequência das estimativas, vamos assumir que existe $\gamma_1 > 0$ tal que

$$\|(X_j^m)^{\pm 1}(\cdot,t) - Id\|_{L^\infty} \leqslant \gamma_1, \ \forall j \geqslant -1, m \geqslant 1, t \in [0,T], \tag{3.36}$$

para algum $T > 0$.

Aplicando duas vezes a Proposição 3.9 (veja página 75) em (3.35), obtemos as estimativas

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{\Delta}_j(u^m+b^m)(t)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}} \leqslant C\|\overline{\Delta}_j(u^m+b^m)(X_j^{m-1}(\cdot,t),t)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}\\
&\leqslant C\Bigg[\|\overline{\Delta}_j(u^m+b^m)(0)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}+\int_0^t\|(S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_ju^m-\overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)u^m\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t\|(S_{j-2}u^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_jb^m-\overline{\Delta}_j(u^{m-1}\cdot\nabla)b^m\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t\|(S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_jb^m-\overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)b^m\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t\|(S_{j-2}b^{m-1}\cdot\nabla)\overline{\Delta}_ju^m-\overline{\Delta}_j(b^{m-1}\cdot\nabla)u^m\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau+\int_0^t\|\overline{\Delta}_j\Phi(u^{m-1},b^{m-1})\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau\Bigg]\\
&\leqslant C\Bigg[\|\overline{\Delta}_j(u^m+b^m)(0)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}+\int_0^t\|-R_j(u^{m-1},u^m)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t\|-R_j(u^{m-1},b^m)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau+\int_0^t\|-R_j(b^{m-1},b^m)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t\|-R_j(b^{m-1},u^m)\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau+\int_0^t\|\pi(u^{m-1},u^{m-1})-\pi(b^{m-1},b^{m-1})\|_{K^{\alpha}_{p,d,q}}d\tau\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Tomando a norma de $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$ na desigualdade (3.37) e, aplicando as Proposições 3.7 e 3.8 (veja páginas 74 e 75), segue que

$$
\begin{aligned}
\|(u^m+b^m)(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} &\leqslant C\|u_0+b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\\
&+ C\int_0^t\|u^{m-1}(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|u^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+ C\int_0^t\|u^{m-1}(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|b^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+ C\int_0^t\|b^{m-1}(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|b^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+ C\int_0^t\|b^{m-1}(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|u^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+ C\int_0^t(\|u^{m-1}(\tau)\|^2_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b^{m-1}(\tau)\|^2_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Da desigualdade anterior (3.38), concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\|u^m(t)+b^m(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})\\
&+C\|u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\int_0^t \|u^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\|u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\int_0^t \|b^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\|b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\int_0^t \|b^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\|b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\int_0^t \|u^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+CT(\|u^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}+\|b^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})})\\
&\leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})\\
&+C(\|u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}+\|b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})})\int_0^t(\|u^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})d\tau\\
&+CT(\|u^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}+\|b^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}).
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Agora, considere o fluxo $Y_j^m(\beta,t)$ associado à equação diferencial ordinária

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}Y_j^m(\beta,t)=(S_{j-2}(u^m+b^m))(Y_j^m(\beta,t),t),\\
Y_j^m(\beta,0)=\beta,\ \text{ para } m=1,2,\ldots
\end{cases}
\tag{3.40}
$$

Trabalhando com o fluxo $Y_j^m(\beta,t)$ de forma análoga ao que foi feito em (3.34),(3.35),(3.36),(3.37) e (3.38) para se obter (3.39), podemos concluir a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
&\|u^m(t)-b^m(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})\\
+\ &C(\|u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}+\|b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})})\int_0^t(\|u^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})d\tau\\
+\ &CT(\|u^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}+\|b^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}),
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

desde que exista $\gamma_2>0$ tal que

$$
\|(Y_j^m)^{\pm 1}(\cdot,t)-Id\|_{L^\infty}\leqslant\gamma_2,\ \ \forall j\geqslant -1, m\geqslant 1 \text{ e } t\in[0,T],
\tag{3.42}
$$

para algum $T>0$.

Agora, combinando as estimativas (3.39) e (3.41), segue que

$$\begin{aligned}
&\|u^m(t)\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m(t)\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\\
&\leqslant \|u^m(t)+b^m(t)\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|u^m(t)-b^m(t)\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\\
&\leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})\\
&+ C(\|u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})})\int_0^t (\|u^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b^m(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} d\tau\\
&+ CT(\|u^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Agora, aplicando uma desigualdade do tipo Gronwall na desigualdade anterior (3.43), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\\
&\leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})})\\
&+ CT(\|u^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^{m-1}\|^2_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})})\\
&\exp(CT(\|u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})})).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Note que, para obtermos a desigualdade (3.44), admitimos inicialmente que as desigualdades dos fluxos (3.36) e (3.42) são verdadeiras. Verifiquemos então que as desigualdades dos fluxos são verdadeiras e automaticamente vamos construindo a limitação da sequência (u^m, b^m).

Note que

$$X_j^m(\beta,t) = \beta + \int_0^t (S_{j-2}(u^m - b^m))(X_j^m(\beta,\tau),\tau)d\tau \tag{3.45}$$

e

$$(X_j^m)^{-1}(\beta,t) = \beta + \int_0^t (S_{j-2}(u^m - b^m))(X_j^m((X_j^m)^{-1}(\beta,t),\tau),\tau)d\tau. \tag{3.46}$$

Consequentemente, de (3.45) e (3.46), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|(X_j^m)^{\pm}(\cdot,t) - Id\|_{L^\infty} &\leqslant \int_0^t \|S_{j-2}(u^m-b^m)\|_{L^\infty} d\tau\\
&\leqslant C\int_0^t \|u^m - b^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} d\tau\\
&\leqslant C_1 T\|u^m - b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\\
&\leqslant C_1 T(\|u^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

De forma análoga, verifica-se que

$$\|(Y_j^m)^{\pm}(\cdot,t) - Id\|_{L^\infty} \leqslant C_1T(\|u^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}. \tag{3.48}$$

Além disso, note que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u^1(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b^1(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} &= \|S_1 u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|S_1 b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\ &\leqslant C_2(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Agora, tomemos $K > 0, T_2 > 0$ e $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tais que

$$C_2(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) \leqslant \frac{K}{2}, \quad C_2 T_2 K \leqslant \min\{\gamma_1, \gamma_2\}, \tag{3.50}$$

e

$$\left(\frac{K}{2} + CK^2 T_2\right) \exp(CKT_2) \leqslant K. \tag{3.51}$$

Tomando $T = T_2$ em (3.36) e (3.42), mostremos por meio de um argumento de indução, o fato que

$$\|u^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} \leqslant K, \ \forall m \geqslant 1. \tag{3.52}$$

Para $m = 1$ note que (3.49) implica (3.52). Agora, suponha que a desigualdade (3.52) é válida para (u^m, b^m) e provemos a desigualdade para (u^{m+1}, b^{m+1}).

Das desigualdades (3.47) e (3.48) e usando a hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} \|(X_j^m)^{\pm}(\cdot, t) - Id\|_{L^\infty} &\leqslant C_2 T_2(\|u^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}) \\ &\leqslant C_2 T_2 K \leqslant \gamma_1 \end{aligned} \tag{3.53}$$

e também

$$\|(Y_j^m)^{\pm}(\cdot, t) - Id\|_{L^\infty} \leqslant \gamma_2, \tag{3.54}$$

para todo $j \geqslant -1$ e $t \in [0, T_2]$.

Como (3.53) e (3.54) são válidas, então também é válida a desigualdade (3.44), e, consequentemente, de (3.44) e da hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} & \|u^{m+1}(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b^{m+1}(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\ \leqslant\ & C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\ +\ & T(\|u^m\|^2_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|^2_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}) \\ & \exp(CT_2(\|u^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}) \\ \leqslant\ & (C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) + CT_2K^2) \exp(CT_2K) \\ \leqslant\ & \left(\frac{K}{2} + CT_2K^2\right) \exp(CT_2K) \leqslant K. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Portanto,

$$\|u^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} + \|b^m\|_{L^\infty(0,T_2;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})} \leqslant K, \quad \forall m \geqslant 1, \tag{3.56}$$

o que verifica a limitação da sequência (u^m, b^m) no espaço

$L^\infty(0, T_2; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_2; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$. □

Depois de termos provado a limitação da sequência (u^m, b^m) em espaços como no Lema 3.12, no próximo lema iremos demonstrar que (u^m, b^m) é sequência de Cauchy em espaços adequados.

Lema 3.13. *Sejam p, d, q, r, α, s como no Teorema 3.1 e $u_0, b_0 \in BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$. Se (u^m, b^m) é a solução do problema aproximado (3.28), então existe $T_3 \in (0, T_2]$ tal que (u^m, b^m) é sequência de Cauchy no espaço $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$.*

Demonstração. Considere os seguintes sistemas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u^{m+1} + (u^m \cdot \nabla)u^{m+1} - (b^m \cdot \nabla)b^{m+1} - \Phi(u^m, b^m) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}b^{m+1} + (u^m \cdot \nabla)b^{m+1} - (b^m \cdot \nabla)u^{m+1} = 0, \\ \nabla \cdot u^{m+1} = \nabla \cdot b^{m+1} = 0, \\ u^{m+1}(x,0) = S_{m+1}u_0(x), b^{m+1}(x,0) = S_{m+1}b_0(x). \end{cases} \tag{3.57}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u^{m} + (u^{m-1} \cdot \nabla)u^{m} - (b^{m-1} \cdot \nabla)b^{m} - \Phi(u^{m-1}, b^{m-1}) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}b^{m} + (u^{m-1} \cdot \nabla)b^{m} - (b^{m-1} \cdot \nabla)u^{m} = 0, \\ \nabla \cdot u^{m} = \nabla \cdot b^{m} = 0, \\ u^{m}(x,0) = S_{m}u_0(x), b^{m}(x,0) = S_{m}b_0(x). \end{cases} \tag{3.58}$$

Subtraindo o sistema (3.58) do sistema (3.57), obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(u^{m+1} - u^m) + (u^m \cdot \nabla)((u^{m+1} - u^m)) + ((u^m - u^{m-1}) \cdot \nabla)u^m \\ &= (b^m \cdot \nabla)((b^{m+1} - b^m)) + ((b^m - b^{m-1}) \cdot \nabla)b^m + \pi(u^m - u^{m-1}, u^m) \\ &+ \pi(u^{m-1}, u^m - u^{m-1}) - \pi(b^m - b^{m-1}, b^m) - \pi(b^{m-1}, b^m - b^{m-1}). \end{aligned} \tag{3.59}$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(b^{m+1} - b^m) + (u^m \cdot \nabla)((b^{m+1} - b^m)) + ((u^m - u^{m-1}) \cdot \nabla)b^m \\ &= (b^m \cdot \nabla)((u^{m+1} - u^m)) + ((b^m - b^{m-1}) \cdot \nabla)u^m. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Aplicando $\overline{\Delta}_j$ em ambos os membros de (3.59) e (3.60), e em seguida somando $S_{j-2}(u^m - b^m) \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1} - u^m)$ e $(S_{j-2}(u^m - b^m) \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1} - b^m)$ em ambos os membros de (3.59) e (3.60), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j(u^{m+1} - u^m) + \overline{\Delta}_j(u^m \cdot \nabla)((u^{m+1} - u^m)) + \overline{\Delta}_j((u^m - u^{m-1}) \cdot \nabla)u^m \\ &+ S_{j-2}(u^m - b^m) \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1} - u^m) = \overline{\Delta}_j(b^m \cdot \nabla)(b^{m+1} - b^m) \\ &+ \overline{\Delta}_j((b^m - b^{m-1}) \cdot \nabla)b^m + (S_{j-2}(u^m - b^m) \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1} - u^m) + \overline{\Delta}_j\pi(u^m - u^{m-1}, u^m) \\ &+ \overline{\Delta}_j\pi(u^{m-1}, u^m - u^{m-1}) - \overline{\Delta}_j\pi(b^m - b^{m-1}, b^m)) - \overline{\Delta}_j\pi(b^{m-1}, b^m - b^{m-1}) \end{aligned} \tag{3.61}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)+\overline{\Delta}_j(u^m\cdot\nabla)((b^{m+1}-b^m))+\overline{\Delta}_j((u^m-u^{m-1})\cdot\nabla)b^m$$
$$+(S_{j-2}u^m-b^m)\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)=\overline{\Delta}_j(b^m\cdot\nabla)(u^{m+1}-u^m)$$
$$+\overline{\Delta}_j((b^m-b^{m-1})\cdot\nabla)u^m+S_{j-2}(u^m-b^m)\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m). \tag{3.62}$$

Observe que, nosso objetivo é construir uma estimativa adequada para

$$\|u^{m+1}-u^m\|_{L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}+\|b^{m+1}-b^m\|_{L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}, \tag{3.63}$$

para algum $T_3\in(0,T_2]$.

Para tal fim, procederemos como anteriormente no Lema 3.12 para obtenção da limitação da sequência (u^m,b^m). Considere o fluxo $X_j^m(\beta,t)$ como definido em (3.33) (veja página 78). Somando as equações (3.61) e (3.62) e aplicando as propriedades de X_j^m, temos

$$\frac{d}{dt}\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m+b^{m+1}-b^m)(X_j^m(\beta,t),t)=$$
$$=((S_{j-2}u^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m)-\overline{\Delta}_j((u^m\cdot\nabla)(u^{m+1}-u^m))$$
$$-(S_{j-2}b^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)+\overline{\Delta}_j((b^m\cdot\nabla)(b^{m+1}-b^m))$$
$$+(S_{j-2}u^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)-\overline{\Delta}_j((u^m\cdot\nabla)(b^{m+1}-b^m))$$
$$-(S_{j-2}b^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m)-\overline{\Delta}_j((b^m\cdot\nabla)(u^{m+1}-u^m))$$
$$-\overline{\Delta}_j((u^m-u^{m-1})\cdot\nabla)u^m+\overline{\Delta}_j((b^m-b^{m-1})\cdot\nabla)b^m$$
$$-\overline{\Delta}_j((u^m-u^{m-1})\cdot\nabla)b^m+\overline{\Delta}_j((b^m-b^{m-1})\cdot\nabla)u^m$$
$$+\overline{\Delta}_j\pi(u^m-u^{m-1},u^m)+\overline{\Delta}_j\pi(u^{m-1},u^m-u^{m-1})$$
$$-\overline{\Delta}_j\pi(b^m-b^{m-1},b^m)+\overline{\Delta}_j\pi(b^{m-1},b^m-b^{m-1}))(X_j^m(\beta,t),t). \tag{3.64}$$

Resolvendo a equação anterior (3.64), aplicando a norma de $K^\alpha_{p,d,q}$ e duas vezes a Proposição 3.9 (veja página 75), segue que

$$
\begin{aligned}
&\|\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m+b^{m+1}-b^m\|_{K^\alpha_{p,d,q}}\\
&\leqslant \|\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m+b^{m+1}-b^m)(0)\|_{K^\alpha_{p,d,q}}\\
&+\int_0^t \|(S_{j-2}u^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m)-\overline{\Delta}_j((u^m\cdot\nabla)(u^{m+1}-u^m)\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t \|(S_{j-2}b^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)-\overline{\Delta}_j((b^m\cdot\nabla)(b^{m+1}-b^m))\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t \|(S_{j-2}u^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)-\overline{\Delta}_j((u^m\cdot\nabla)(b^{m+1}-b^m))\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t \|(S_{j-2}b^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m)+\overline{\Delta}_j((b^m\cdot\nabla)(u^{m+1}-u^m))\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t \|\overline{\Delta}_j((u^m-u^{m-1})\cdot\nabla)u^m-\overline{\Delta}_j((b^m-b^{m-1})\cdot\nabla)b^m\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t \|\overline{\Delta}_j((u^m-u^{m-1})\cdot\nabla)b^m-\overline{\Delta}_j((b^m-b^{m-1})\cdot\nabla)u^m\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t \|\overline{\Delta}_j\pi(u^m-u^{m-1},u^m)+\overline{\Delta}_j\pi(u^{m-1},u^m-u^{m-1})\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau\\
&+\int_0^t \|\overline{\Delta}_j\pi(b^m-b^{m-1},b^m)+\overline{\Delta}_j\pi(b^{m-1},b^m-b^{m-1})\|_{K^\alpha_{p,d,q}}d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

Tomando a norma de $BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}$ na desigualdade anterior (3.65) e aplicando as Proposições 3.6, 3.7 e 3.8 (veja páginas 74, 74 e 75), obtemos a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
&\|(u^{m+1}-u^m+b^{m+1}-b^m)(t)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\\
&\leqslant \|\overline{\Delta}_{m+1}(u_0-b_0)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\\
&+C\int_0^t \|u^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|u^{m+1}-u^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|b^{m+1}-b^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\int_0^t \|u^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|b^{m+1}-b^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|u^{m+1}-u^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\int_0^t \|u^m-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|u^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b^m-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|b^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\int_0^t \|u^m-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|b^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b^m-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|u^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\int_0^t \|u^m-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|u^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|u^m-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}d\tau\\
&+C\int_0^t \|b^m-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\|b^m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}\|b^m-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Agrupando termos da desigualdade anterior (3.66) e aplicando o Lema 3.12

(veja página 77), temos

$$
\begin{aligned}
& \|(u^{m+1}-u^m+b^{m+1}-b^m)(t)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} \\
\leqslant\ & C2^{-m}\|u_0-b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\
+\ & CK\int_0^t \|u^{m+1}-u^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^{m+1}-b^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\,d\tau \\
+\ & CK\int_0^t \|u^{m}-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^{m}-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\,d\tau \\
+\ & 2CK\int_0^t \|u^{m}-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^{m}-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\,d\tau, \quad \forall t\in[0,T_2].
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Tomando a norma L^∞ na desigualdade anterior (3.67), segue a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
& \|u^{m+1}-u^m+b^{m+1}-b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})} \\
& \leqslant C2^{-m}(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,d,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})+CKT(\|u^{m+1}-u^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^{m+1}-b^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}) \\
& +3CKT(\|u^m-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^m-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}},\ \forall T\in(0,T_2].
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Agora, no intuito de construir uma estimativa análoga a (3.68), aplicaremos $\overline{\Delta}_j$ em ambos os membros de (3.59) e (3.60) (veja página 83), em seguida somamos $(S_{j-2}(u^m-b^m)\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m)$ e $(S_{j-2}(u^m-b^m)\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)$ em ambos os membros de (3.59) e (3.60), respectivamente. Por fim, subtraindo as equações e utilizando propriedades do fluxo $Y^m_j(\beta,t)$, como definido em (3.40) (veja página 80), temos

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m-(b^{m+1}-b^m))(Y^m_j(\beta,t)) \\
=\ & ((S_{j-2}u^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m)-\overline{\Delta}_j((u^m\cdot\nabla)(u^{m+1}-u^m)) \\
-\ & (S_{j-2}b^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)+\overline{\Delta}_j((b^m\cdot\nabla)(b^{m+1}-b^m)) \\
-\ & (S_{j-2}u^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(b^{m+1}-b^m)+\overline{\Delta}_j((u^m\cdot\nabla)(b^{m+1}-b^m)) \\
+\ & (S_{j-2}b^m\cdot\nabla)\overline{\Delta}_j(u^{m+1}-u^m)-\overline{\Delta}_j((b^m\cdot\nabla)(u^{m+1}-u^m)) \\
-\ & \overline{\Delta}_j(u^m-u^{m-1})\cdot\nabla)u^m+\overline{\Delta}_j((b^m-b^{m-1})\cdot\nabla)b^m \\
+\ & \overline{\Delta}_j((u^m-u^{m-1})\cdot\nabla)b^m-\overline{\Delta}_j((b^m-b^{m-1})\cdot\nabla)u^m \\
+\ & \overline{\Delta}_j\pi(u^m-u^{m-1},u^m)+\overline{\Delta}_j\pi(u^{m-1},u^m-u^{m-1}) \\
-\ & \overline{\Delta}_j\pi(b^m-b^{m-1},b^m)-\overline{\Delta}_j\pi(b^{m-1},b^m-b^{m-1}))(Y^m_j(\beta,t)).
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Resolvendo a equação anterior (3.69), aplicando a norma de $K^\alpha_{p,d,q}$ e procedendo de forma análoga ao que foi feito para se obter as estimativas (3.65), (3.66) e (3.67), obtemos a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
& \|u^{m+1}-u^m-(b^{m+1}-b^m)\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})} \\
& \leqslant C2^{-m}(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) \\
& +CKT(\|u^{m+1}-u^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^{m+1}-b^m\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}) \\
& +3CKT(\|u^m-u^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b^m-b^{m-1}\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}),\ \forall T\in(0,T_2].
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Combinando as estimativas (3.68) e (3.70), segue que

$$\begin{aligned}
&\|u^{m+1}-u^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}+\|b^{m+1}-b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}\\
&\leqslant 2C2^{-m}(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})\\
&+2CKT(\|u^{m+1}-u^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}+\|b^{m+1}-b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})})\\
&+6CKT(\|u^{m}-u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}+\|b^{m}-b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}),\ \forall T\in(0,T_2]. \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Na desigualdade anterior (3.71), tomando $T_3>0$ satisfazendo $T_3\leqslant \min\left\{T_2;\dfrac{1}{2CK}\right\}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\|u^{m+1}-u^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}+\|b^{m+1}-b^m\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}\\
&\leqslant \frac{2C2^{-m}}{1-2CKT_3}(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})\\
&+\frac{6CKT_3}{1-2CKT_3}(\|u^{m}-u^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}+\|b^{m}-b^{m-1}\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})})\\
&\leqslant \tilde{C}_1(2^{-m}(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})m\\
&+2^{-m}(\|u^2-u^1\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}+\|b^2-b^1\|_{L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})}))\\
&\leqslant \tilde{C}(m+1)2^{-m}<\varepsilon, \quad (3.72)
\end{aligned}$$

para m suficientemente grande.

Da estimativa anterior (3.72), concluímos que (u^m,b^m) é uma sequência de Cauchy no espaço $L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})\times L^\infty(0,T;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$.

□

Tendo feito os dois lemas anteriores estamos aptos para demonstrar o item (i) do Teorema 3.1.

Demonstração da existência

Primeiramente, note que pelo Lema 3.13 (veja página 83) sabemos que (u^m,b^m) é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})\times L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$, e consequentemente existe $(\tilde{u},\tilde{b})\in L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})\times L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$ tal que $(u^m,b^m)\to(\tilde{u},\tilde{b})$ quando $m\to\infty$. Além disso, do Lema 3.12 (veja página 77) sabemos que (u^m,b^m) é limitada em $L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})\times L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$ e consequentemente do fato de $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$ ser um espaço dual (veja Proposição 3.11, página 76), então o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki garante a existência de subsequência $(u^{m_j},b^{m_j})_j\subset(u^m,b^m)$ tal que $(u^{m_j},b^{m_j})\rightharpoonup(u,b)$ quando $j\to\infty$ na convergência fraca-$\star$, com $(u,b)\in L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$ $\times L^\infty(0,T_3;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$.

Como $(u^{m_j}, b^{m_j}) \rightharpoonup (u, b)$ na convergência fraca-$\star$ em $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$ então (a menos de subsequência) temos também que $(u^{m_j}, b^{m_j}) \rightharpoonup (u, b)$ na convergência fraca-$\star$ em $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$. Por outro lado, como $(u^{m_j}, b^{m_j}) \to (\tilde{u}, \tilde{b})$ em $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$ então $(u^{m_j}, b^{m_j}) \rightharpoonup (\tilde{u}, \tilde{b})$ na convergência fraca-$\star$ em $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$, e pela unicidade do limite na convergência fraca-$\star$ segue que $(u, b) = (\tilde{u}, \tilde{b})$, e consequentemente o limite forte de (u^m, b^m) em $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$ pertence a $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$.

Agora, resta verificar que (u, b) é solução do problema (7).

Note que do fato de (u^m, b^m) ser solução do problema (3.28) (veja página 77), temos que

$$u^m(x,t) = u^m(x,0) - \int_0^t (b^{m-1} \cdot \nabla) b^m d\tau + \int_0^t (u^{m-1} \cdot \nabla) u^m d\tau - \int_0^t \Psi(u^{m-1}, b^{m-1}) d\tau \quad (3.73)$$

e

$$b^m(x,t) = b^m(x,0) + \int_0^t (u^{m-1} \cdot \nabla) b^m d\tau - \int_0^t (b^{m-1} \cdot \nabla) u^m d\tau. \quad (3.74)$$

Por outro lado, pelo Lema 3.12 e Proposições 3.6, 3.8 (veja páginas 77, 74 e 75), podemos afirmar que os termos das integrais em (3.73) e (3.74) são uniformemente limitados. Portanto, tomando $m \to \infty$ em (3.73) e (3.74) e invocando o Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$u(x,t) = u_0(x) - \int_0^t (b \cdot \nabla) b d\tau + \int_0^t (u \cdot \nabla) u d\tau - \int_0^t \Psi(u, b) d\tau \quad (3.75)$$

e

$$b(x,t) = b_0(x) + \int_0^t (u \cdot \nabla) b d\tau - \int_0^t (b \cdot \nabla) u d\tau, \quad (3.76)$$

concluindo o fato de (u, b) ser solução do problema (7).

Também é claro que $(u^m, b^m) \subset C([0, T_3]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times C([0, T_3]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$ e como $(u^m, b^m) \to (u, b)$ em $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$ segue que $(u, b) \in C([0, T_3]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times C([0, T_3]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$.

Agora, assumamos adicionalmente que $1 \leqslant r < \infty$ e provemos que $(u, b) \in C([0, T_3]; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times C([0, T_3], BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$. Para tal, definamos $\eta_k = (S_k u, S_k b)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Note que, para $t, \tau \in [0, T_3]$ temos

$$\begin{aligned}
&\|\eta_k(t) - \eta_k(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\
&= \|S_k(u(t) - u(\tau))\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|S_k(b(t) - b(\tau))\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\
&\leqslant C\left[\left(\sum_{j=-1}^{k+1} 2^{jsr}\|\overline{\Delta}_j(u(t) - u(\tau))\|^r_{K^{\alpha}_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{j=-1}^{k+1} 2^{jsr}\|\overline{\Delta}_j(b(t) - b(\tau))\|^r_{K^{\alpha}_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}}\right] \\
&\leqslant C2^k\left[\left(\sum_{j=-1}^{k+1} 2^{j(s-1)r}\|\overline{\Delta}_j(u(t) - u(\tau))\|^r_{K^{\alpha}_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\left.+ \left(\sum_{j=-1}^{k+1} 2^{j(s-1)r}\|\overline{\Delta}_j(b(t) - b(\tau))\|^r_{K^{\alpha}_{p,d,q}}\right)^{\frac{1}{r}}\right] \\
&\leqslant C2^k[\|u(t) - u(\tau)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} + \|b(t) - b(\tau)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}]. \qquad (3.77)
\end{aligned}$$

Da última desigualdade (3.77) e do fato de $(u, b) \in C([0, T_3]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times C([0, T_3]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$, seque que $\eta_k \in C([0, T_3]; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times C([0, T_3], BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Mas, note claramente que $\eta_k \to (u, b)$, quando $k \to \infty$, uniformemente em $L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$. Portanto, das duas últimas observações segue que $(u, b) \in C([0, T_3]; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times C([0, T_3]; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$.

Demonstração da Unicidade

Sejam $(u, b), (v, f) \in L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \times L^\infty(0, T_3; BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$ duas soluções para o problema (7) com o mesmo dado inicial, a saber (u_0, b_0). Do fato de $(u, b), (v, f)$ ser solução para o problema (7), temos que

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - (b \cdot \nabla)b - \pi(u, u) + \pi(b, b) = 0, \\
\dfrac{\partial b}{\partial t} + (u \cdot \nabla)b - (b \cdot \nabla)u = 0, \\
\nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, \\
u(x, 0) = u_0 \text{ e } b(x, 0) = b_0.
\end{cases} \qquad (3.78)$$

e

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - (f \cdot \nabla)f - \pi(v, v) + \pi(f, f) = 0, \\
\dfrac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla)f - (f \cdot \nabla)v = 0, \\
\nabla \cdot v = \nabla \cdot f = 0, \\
v(x, 0) = u_0 \text{ e } f(x, 0) = b_0
\end{cases} \qquad (3.79)$$

Subtraindo (3.79) de (3.78), segue que $(u - v, b - f)$ é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u-v)+(u\cdot\nabla)(u-v)+((u-v)\cdot\nabla)v-(b\cdot\nabla)(b-f)+ \\ +((b-f)\cdot\nabla)f-\pi(u,u-v)+\pi(b,b-f)+\pi(v-u,v)-\pi(f-b,f)=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(b-f)+(u\cdot\nabla)(b-f)+((u-v)\cdot\nabla)f-(b\cdot\nabla)(u-v)-((b-f)\cdot\nabla)v=0, \\ \nabla\cdot(u-v)=\nabla\cdot(b-f)=0, \\ (u-v)(x,0)=u_0(x)-u_0(x) \text{ e } (b-f)(x,0)=b_0(x)-b_0(x). \end{cases} \tag{3.80}$$

Procedendo como o sistema anterior (3.80) de forma análoga ao que foi feito para construir a estimativa (3.67) (veja página 86), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \|u-v\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b-f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\ \leqslant\ & 2(\|u_0-u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0-b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) \\ +\ & L\int_0^{T_3}(\|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|v\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) \\ & (\|u-v\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b-f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})dt, \end{aligned} \tag{3.81}$$

onde L é uma constante positiva.

Aplicando a desigualdade de Gronwall na desigualdade anterior (3.81), temos

$$\begin{aligned} & \|u-v\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b-f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \\ & \leqslant 2(\|u_0-u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_0-b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) \\ & \exp\left(L\int_0^{T_3}(\|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|v\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|f\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})dt\right). \end{aligned} \tag{3.82}$$

Note que a última desigualdade implica que

$$\|(u-v)(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|(b-f)(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}=0,$$

e, consequentemente, $(u(t),b(t))=(v(t),f(t)),\ \forall t\in[0,T_3]$, concluindo a demonstração da unicidade de solução.

Tendo provado a existência e unicidade de solução para o problema (7), conclui-se a demonstração do Teorema 3.1.

3.2.2 Demonstração da parte (ii): Dependência contínua do dado inicial

Nesta seção faremos a demonstração da dependência contínua do dado inicial. Para tal, primeiramente vamos observar que existe $T_4>0$ tal que a sequência (u_m,b_m) é limitada em $L^\infty(0,T_4;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})\times L^\infty(0,T_4;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$.

Note que soluções para o problema (7) foram construídas como limite de sequências como definidas em (3.28) (veja página 77). Note ainda que observando a demonstração dos Lemas 3.12 e 3.13 (veja páginas 77 e 83), a constante K da limitação do problema iterado (3.28) e o tempo T_3 de existência da solução dependem unicamente de constantes universais e da norma dos dados iniciais nos espaços $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$.

Em vista dessa última observação e de supormos que a sequência de dados iniciais $((u_0)_m,(b_0)_m)$ é limitada em $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}\times BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}$, pode-se concluir que existe $T_4>0$ tal que a sequência (u_m,b_m) é limitada em $L^\infty(0,T_4;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})\times L^\infty(0,T_4;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})$, ou seja, existe $\tilde{K}>0$ tal que

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T_4;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}+\|b_m\|_{L^\infty(0,T_4;BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r})}\leqslant \tilde{K},\quad \forall m\in\mathbb{N}. \tag{3.83}$$

Procedendo como na demonstração da unicidade da solução, podemos concluir que para cada $m\in\mathbb{N}$, (u_m-u,b_m-b) é solução do problema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}(u_m-u)+(u_m\cdot\nabla)(u_m-u)+((u_m-u)\cdot\nabla)u-(b_m\cdot\nabla)(b_m-b)+\\ +((b_m-b)\cdot\nabla)b-\pi(u_m,u_m-u)+\pi(b_m,b_m-b)+\pi(u-u_m,u)-\pi(b-b_m,b)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}(b_m-b)+(u_m\cdot\nabla)(b_m-b)+((u_m-u)\cdot\nabla)b-(b_m\cdot\nabla)(u_m-u)\\ -((b_m-b)\cdot\nabla)u=0,\\ \nabla\cdot(u_m-u)=\nabla\cdot(b_m-b)=0,\\ (u_m-u)(x,0)=(u_0)_m(x)-u_0(x)\text{ e }(b_m-b)(x,0)=(b_0)_m(x)-b_0(x).\end{cases} \tag{3.84}$$

Também, procedendo de forma análoga aos passos que foram feitos para construir a estimativa (3.67) (veja página 86), conclui-se que

$$\begin{aligned}&\|u_m-u\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b_m-b\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\\ &\leqslant 2(\|(u_0)_m-u_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|(b_0)_m-b_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}})\\ &+L\int_0^{T_4}(\|u_m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})\\ &(\|u_m-u\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b_m-b\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}})dt,\end{aligned} \tag{3.85}$$

onde L é uma constante positiva que não depende de m.

Aplicando a desigualdade de Gronwall na desigualdade anterior (3.85), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}&\|u_m-u\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|b_m-b\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}\\ &\leqslant 2(\|(u_0)_m-u_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}+\|(b_0)_m-b_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}})\\ &\exp\left(L\int_0^{T_4}(\|u_m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b_m\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})dt\right).\end{aligned} \tag{3.86}$$

Agora, de (3.83) e da desigualdade anterior (3.86), segue que existe uma constante $\tilde{L} > 0$, que não depende de m, tal que

$$\begin{aligned} \|(u_m - u)(t)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} + \|(b_m - b)(t)\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} &\leqslant 2(\|(u_0)_m - u_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} \\ &+ \|(b_0)_m - b_0\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}}) \exp(LT_4\tilde{L}), \end{aligned} \tag{3.87}$$

$\forall t \in [0, T_4]$.

Da convergência $((u_0)_m, (b_0)_m) \to (u_0, b_0)$ em $BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,t} \times BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}$, e da desigualdade anterior (3.87), segue que $(u_m, b_m) \to (u, b)$, quando $m \to \infty$, em $C[0, T_4]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}) \times C[0, T_4]; BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r})$, concluindo a demonstração da dependência contínua do dado inicial.

3.3 Demonstração do Teorema 3.2 (Critério de blow-up)

Nesta seção faremos a demonstração do Teorema 3.2 (veja página 72) que nos fornece um critério de blow-up para a solução do problema (7). Para fazermos a demonstração no Teorema 3.2, será útil uma desigualdade logarítmica nos espaços de Besov-Lorentz-Herz (veja [21] e [51] para a demonstração), a qual enunciamos a seguir.

Lema 3.14. *Sejam $1 < p < \infty$, $1 \leqslant d, r \leqslant \infty$, $\gamma > \dfrac{n}{p}$. Nessas condições, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C[1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\log^+ \|f\|_{BK^{\alpha,\gamma}_{p,d,q,r}} + 1)], \quad \forall f \in BK^{\alpha,\gamma}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n). \tag{3.88}$$

De posse do lema anterior, podemos fazer a demonstração.

Seja (u, b) solução para o problema (7), satisfazendo $(u, b) \in (C([0, T^*); BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \cap L^1((0, T^*); L^\infty)) \times (C([0, T^*); BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}) \cap L^1((0, T^*); L^\infty))$. Primeiramente, note que como verificado por Majda [44], temos a seguinte relação para os gradientes de u e b

$$\nabla u = \mathcal{P}(\omega_u) + A\omega_u \text{ e } \nabla b = \mathcal{P}(\omega_b) + A\omega_b, \tag{3.89}$$

onde $\mathcal{P}$ é um operador singular homogêneo de grau $-n$, A é uma matriz constante e ω_u e ω_b são as "vorticidades"dos campos vetoriais u e b, respectivamente, que podemos escrever da seguinte forma

$$(\omega_u)_{ij} = \partial_i u_j - \partial_j u_i \text{ e } (\omega_b)_{ij} = \partial_i b_j - \partial_j b_i. \tag{3.90}$$

Em vista da limitação do operador $\mathcal{P} : \dot{B}^0_{\infty,\infty} \to \dot{B}^0_{\infty,\infty}$ (veja [56]) e das igualdades (3.89) e Lema 3.14, segue que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^\infty} &\leqslant C(1 + \|\nabla u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\log^+ \|\nabla u\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} + 1)) \\ &\leqslant C(1 + \|\mathcal{P}\omega_u + A\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\log^+ \|\nabla u\|_{BK^{\alpha,s-1}_{p,d,q,r}} + 1)) \\ &\leqslant C(1 + \|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\log^+ \|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + 1)), \end{aligned} \tag{3.91}$$

e analogamente

$$\|\nabla b\|_{L^\infty} \leqslant C(1 + \|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty.\infty}}(\log^+ \|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + 1)). \tag{3.92}$$

Agora, procedendo como no desenvolvimento das equações (3.31) e (3.32) (veja página 77), segue que para $j \geqslant -1$, (u, b) satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j u + (S_{j-2}u \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j u - (S_{j-2}b \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j u = \\
&(S_{j-2}u \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j u - \overline{\Delta}_j(u \cdot \nabla)u + \overline{\Delta}_j(b \cdot \nabla)b - (S_{j-2}b \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j u \\
&+ \overline{\Delta}_j \Phi(u, b)
\end{aligned} \tag{3.93}$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta}_j b + (S_{j-2}u \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j b - (S_{j-2}b \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j b = \\
&(S_{j-2}u \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j b - \overline{\Delta}_j(u \cdot \nabla)b - (S_{j-2}b \cdot \nabla)\overline{\Delta}_j b + \overline{\Delta}_j(b \cdot \nabla)u.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Também os fluxos associados aos campos vetoriais $S_{j-2}(u-b)$ e $S_{j-2}(u+b)$ são difeomorfismos que preservam volume, pois da hipótese do Teorema 3.2, temos $\nabla \cdot (S_{j-2}u) = \nabla \cdot (S_{j-2}b) = 0$ e $S_{j-2}u, S_{j-2}b \in L^1(0, T^*; L^\infty)$. Além disso, verifica-se que esses fluxos satisfazem a desigualdade (3.24) (veja página 75) para constantes $K_1, K_2 > 0$, para todo $t \in (0, T^*)$.

Dessa última observação e procedendo de forma similar à demonstração do Teorema 3.1 (Existência e Unicidade) na construção das estimativas (3.39) e (3.41) (veja página 80), segue que

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) \\
&+ C\int_0^t (\|\nabla u\|_{L^\infty} + \|\nabla b\|_{L^\infty})(\|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})d\tau.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Das desigualdades (3.91), (3.92) e (3.95), obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}) \\
&+ C\int_0^t (1 + \|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\log^+ \|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + 1)(1 + \|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}(\log^+ \|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + 1) \\
&(\|u(\tau)_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b(\tau)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}})d\tau.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Aplicando duas vezes a desigualdade de Gronwall na desigualdade anterior (3.96), concluimos a seguinte estimativa

$$\|u(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} + \|b(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}} \leqslant C\exp(C\exp(C\int_0^t (1 + \|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} + 1 + \|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} d\tau))), \tag{3.97}$$

$\forall t \in (0, T^*)$.

Agora, note que em vista da desigualdade anterior (3.97), se

$$\limsup_{t\to T^*}\|u(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}=\infty, \tag{3.98}$$

então

$$\int_0^{T^*}\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}+\|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}dt=\infty, \tag{3.99}$$

provando uma das implicações do item (i).

Para a implicação contrária do item (i), suponhamos que

$$\int_0^{T^*}\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}+\|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}dt=\infty, \tag{3.100}$$

e note que para $s>1+\dfrac{n}{p}$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{T^*}\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}+\|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}dt &\leqslant T^*\sup_{t\in(0,T^*)}(\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}+\|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}})\\ &\leqslant T^*\sup_{t\in(0,T^*)}(\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla b\|_{L^\infty})\\ &\leqslant T^*\sup_{t\in(0,T^*)}(\|u\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}).\end{aligned} \tag{3.101}$$

De (3.100) e (3.101), segue que

$$\limsup_{t\to T^*}\|u(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}+\|b(t)\|_{BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}}=\infty, \tag{3.102}$$

concluindo a demonstração da outra implicação do item (i).

Para a demonstração de (ii), observe que

$$\|\nabla u\|_{L^\infty}\leqslant C\|\nabla u\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\leqslant C\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}, \tag{3.103}$$

e

$$\|\nabla b\|_{L^\infty}\leqslant C\|\nabla b\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\leqslant C\|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}, \tag{3.104}$$

em que as desigualdades anteriores são obtidas através de uma aplicação da inclusão contínua $\dot{B}^0_{\infty,1}\subset L^\infty$ e do fato do operador $\mathcal{P}:\dot{B}^0_{\infty,1}\to\dot{B}^0_{\infty,1}$ ser limitado.

Também, utilizando a desigualdade (3.95) com $s=1+\dfrac{n}{p}$ e $r=1$, e em seguida aplicando as estimativas (3.103) e (3.105), segue que

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|_{BK^{\alpha,n+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}+\|b(t)\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}\leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}})\\ &+C\int_0^t(\|\nabla u\|_{L^\infty}+\|\nabla b\|_{L^\infty})(\|u\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}+\|b\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}})d\tau\\ &\leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}+\|b_0\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}})\\ &+C\int_0^t(\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}+\|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}})(\|u\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}+\|b\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}})d\tau).\end{aligned} \tag{3.105}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.105), chegamos a

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}} + \|b(t)\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}} &\leqslant C(\|u_0\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}} + \|b_0\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}) \\ &\quad \exp(C\int_0^t (\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} + \|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}})d\tau), \end{aligned} \tag{3.106}$$

$\forall t \in (0, T^*)$.

Agora, observe que também é válida a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} (\|\omega_u\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} + \|\omega_b\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}})dt &\leqslant T^* \sup_{t\to T^*} (\|\omega_u(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} + \|\omega_b(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}) \\ &\leqslant T^* \sup_{t\to T^*} (\|u(t)\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}} + \|b(t)\|_{BK^{\alpha,1+\frac{n}{p}}_{p,d,q,1}}). \end{aligned} \tag{3.107}$$

Assim, como foi feito na conclusão do item (i), a desigualdade (3.106) nos dá uma implicação do item (ii) e a desigualdade (3.107) nos dá a implicação contrária do item (ii), finalizando a demonstração do teorema.

4 Conclusão

Finalizamos esta tese fazendo uma recordação dos resultados aqui obtidos e apresentando algumas ideias para futuros trabalhos. Nosso primeiro problema foi as equações MHD duplamente fracionária, o qual pode ser descrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t^\theta u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = (b \cdot \nabla) b, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \partial_t^\theta b + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} b + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ e } b(x, 0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Para o problema MHD fracionário, descrito acima, no Teorema 2.1, obtivemos um resultado de existência e unicidade de solução branda em espaços de Besov-weak-Herz $\dot{B}W\dot{K}^{\alpha,s}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$, sob determinadas condições para os índices. Também no Teorema 2.2 verificamos propriedades das soluções obtidas, como autossimilaridade, dependência contínua do dado inicial e que a solução $(u, b)(t) \rightharpoonup (u_0, b_0)$, quando $t \to 0^+$, na topologia fraca-$\star$ de $B^{1-\beta}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, onde u_0, b_0 são os dados iniciais. Além disso, no Teorema 2.3, obtivemos um resultado de comportamento assintótico para as soluções obtidas no Teorema 2.1.

Nosso segundo problema abordado, foram as equações MHD no caso invíscido, as quais são descritas da seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - (b \cdot \nabla) b + \nabla P = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla) b - (b \cdot \nabla) u = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ e } b(x, 0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.2}$$

No contexto das equações MHD invíscidas obtivemos no Teorema 3.1 um resultado de existência, unicidade e dependência contínua de solução local em espaços de Besov-Lorentz-Herz $BK^{\alpha,s}_{p,d,q,r}(\mathbb{R}^n)$, com condições adequadas para os índices. Além disso, no Teorema 3.2, obtivemos um critério de blow-up para as soluções.

Considerando parte dos desenvolvimentos realizados nesta tese, e os combinando com alguns novos ingredientes tais como uma estimativa do comutador "ajustada", uma possibilidade de investigação futura seria analisar a existência e unicidade de solução para o problema MHD com viscosidade porém sem o termo de difusão magnética, o qual pode ser descrito por

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = (b \cdot \nabla) b, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \partial_t b + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ e } b(x, 0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Na mesma linha, porém com maior dificuldade, podemos investigar, no mesmo contexto de espaços, a existência de solução para o problema MHD sem viscosidade e com o termo de difusão magnética, o qual pode ser descrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = (b \cdot \nabla) b, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \partial_t b - \Delta b + (u \cdot \nabla) b = (b \cdot \nabla) u, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot b = 0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ e } b(x,0) = b_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.4}$$

Além disso, através do estudo do problema (1), com derivada fracionária no tempo, em conjunto com a experiência desenvolvida para problemas invíscidos, podemos investigar outros problemas com derivadas fracionárias no tempo como, por exemplo, as equações de Euler com derivada fracionária, que podem ser descritas da seguinte forma

$$\partial_t^\theta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0. \tag{4.5}$$

Este modelo seria interessante na medida em que estudar-se-ia a evolução de um fluxo não-linear com um nível de regularidade temporal menor em comparação com as equações de Euler padrão. De fato, teria-se uma não-linearidade com derivadas de ordem mais alta no espaço que no tempo, gerando dificuldades adicionais ao problema. Poderia-se explorar esse modelo fracionário invíscido tanto no cenário de Besov-Lorentz-Herz quanto em outros tipos de espaços de Besov.

Referências

1 ALMEIDA, M. de; FERREIRA, L. Self-similarity, symmetries and asymptotic behavior in Morrey spaces for a fractional wave equation. *Differential Integral Equations*, v. 25, n. 9-10, p. 957–976, 2012.

2 ALMEIDA, M. de; PRECIOSO, J. Existence and symmetries of solutions in Besov-Morrey spaces for a semilinear heat-wave type equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 432, n. 1, p. 338–355, 2015.

3 ALVAREZ, L. *Boa-colocação global e má-colocação das equações de Navier-Stokes com força de Coriolis em espaços de Fourier-Besov*. Dissertação de mestrado. [S.l.]: Unicamp, 2016.

4 BERGH, J.; LOFSTROM, J. *Interpolation Spaces: An introduction*. 1. ed. [S.l.]: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

5 BONACCORSI, S. Fractional stochastic evolution equations with Lévy noise. *Differential Integral Equations*, v. 22, p. 1141–1152, 2009.

6 BOURGAIN, J.; PAVLOVIÉ, J. Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D. *Journal of Functional Analysis*, v. 255, p. 2233–2247, 2008.

7 BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. 1. ed. [S.l.]: Springer Science and Business Media, New York, 2010.

8 CANNONE, M. et al. Cauchy problem for the magneto-hydrodynamic system. *Banach Center Publ.*, v. 74, p. 59–93, 2006.

9 CAO, C.; REGMI, D.; WU, J. The 2D MHD equations with horizontal dissipation and horizontal magnetic diffusion. *Journal of Differential Equations*, v. 254, p. 2661–2681, 2013.

10 CAO, C.; WU, J. Two regularity criteria for the 3D MHD equations. *Journal of Differential Equations*, v. 248, p. 2263–2274, 2010.

11 CARVALHO-NETO, P. M. de; PLANAS, G. Mild solutions to the time fractional Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Differential Equations*, v. 259, n. 7, p. 2948–2980, 2015.

12 CHAE, D. On the well-posedness of the Euler equations in the Triebel-Lizorkin spaces. *Commum. Pure Appl. Math.*, v. 55, p. 654–678, 2002.

13 CHAE, D. On the Euler equations in the critical Triebel-Lizorkin spaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 170, p. 185–210, 2003.

14 CHEN, Q.; MIAO, C.; ZHANG, Z. On the regularity criterion of weak solution for the 3D viscous magnetohydrodynamics eqautions. *Commun. Math. Phys.*, v. 284, p. 919–930, 2008.

15 CHEN, Q. L.; MIAO, C. X.; ZHANG, Z. F. On the well-posedness of the ideal MHD equations in the Triebel-Lizorkin spaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 195, p. 561–578, 2010.

16 DUVONT, G.; LIONS, J. L. Inéquations en thermóelasticité et magnétohydrodynamique. *Arch. Ration. Mech. Anal*, v. 46, p. 241–279, 1972.

17 EIDELMAN, S. D.; KOCHUBEI, A. N. Cauchy problem for fractional diffusion equations. *Journal of Differential Equations*, v. 199, p. 211–255, 2004.

18 BARAKA, A. E.; TOUMLILIN, M. Well-posedness and stability for the generalized incompressible magneto-hydrodynamic equations in critical Fourier-Besov-Morrey spaces. *Acta Mathematica Scientia*, v. 39B, n. 6, p. 1551–1567, 2019.

19 ENGLER, H. Similarity solutions for a class of hyperbolic integrodifferential equations. *Differential Integral Equations*, v. 10, p. 815–840, 1997.

20 ENGLER, H. Asymptotic self-simililarity for solutions of partial integro-differential equations. *Z. Anal. Anwend*, v. 26, p. 417–438, 2007.

21 FERREIRA, L.; PÉREZ-LÓPEZ, J. On the theory of Besov-Herz spaces and Euler equations. *Israel Journal of Mathematics*, v. 220, p. 283–332, 2017.

22 FERREIRA, L.; PÉREZ-LÓPEZ, J. Besov-weak-Herz spaces and global solutions for Navier-Stokes equations. *Pacific Journal of Math.*, v. 296, n. 1, p. 57–77, 2018.

23 FOLLAND, G. B. *Real Analysis: modern techniques and their applications*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2013.

24 FUGITA, Y. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 27, n. 2, p. 309–321, 1990.

25 FUGITA, Y. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 27, p. 309–321, 1990.

26 FUGITA, Y. Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation ii. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 27, p. 797–804, 1990.

27 FUGITA, Y. Cauchy problems of fractional order and stable processes. *Japan Jornal of Applied Mathmatics*, v. 7, p. 459–476, 1990.

28 FUGITA, H.; KATO, T. On the Navier-Stokes initial value problem I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 16, p. 269–315, 1964.

29 GIGA, Y.; MIYAKAWA, T. Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 89, p. 267–281, 1985.

30 GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 3. ed. [S.l.]: Springer Science and Business Media, New York, 2014.

31 HE, C.; WANG, Y. On the regularity criteria for weak solutions to the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Differential Equations*, v. 238, p. 1–17, 2007.

32 HE, C.; XIN, Z. On the regularity of solutions to the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Differential Equations*, v. 213, p. 235–254, 2005.

33 HIRATA, H.; MIAO, C. Space-time estimates of linear flow and appplication to some nonlinear integro-differential equations corresponding to fractional-order time derivative. *Advanced Differential Equations*, v. 7, n. 2, p. 217–236, 2002.

34 IWABUCHI, T.; NAKURAMA, M. Small solutions for nonlinear heat equations, the Navier-Stokes equation, and the Keller-Segel system in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces. *Advanced Differential Equations*, v. 18, p. 687–736, 2013.

35 KATO, T. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, v. 187, p. 471–480, 1984.

36 KATO, T. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Functional Analysis*, v. 9, p. 296–305, 1972.

37 KATO, T.; PONCE, G. Commutador estimates and the Euler and Navier-Stokes equations. *Commum. Pure Appl. Math*, v. 41, p. 891–907, 1988.

38 KILBAS, A. A. Partial fractional differential equations and some of their applications. *Analysis*, v. 30, p. 35–66, 2010.

39 KOCH, H.; TATURU, D. Well-posedness for the Navier-Stokes equations. *Advances in Mathematics*, v. 157, p. 22–35, 2001.

40 KOZONO, H.; OGAWA, T.; TANIUCHI, Y. Navier-Stokes equations in the Besov space near L^∞ and BMO. *Kyushu Journal of Math.*, v. 57, p. 303–324, 2003.

41 LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 2002.

42 LIU, Q.; ZHAO, J.; CUI, S. Existence and regularizing rate estimates of solutions to a generalized magneto-hydrodynamic system in pseudomesuare spaces. *Annali di Matematica Pura et Applicata*, v. 191, n. 2, p. 293–309, 2012.

43 LIU, Q.; ZHAO, J. Global well-posedness for the generalized magneto-hydrodynamic equations in critical Fourier-Herz spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 420, p. 1301–1315, 2014.

44 MAJDA, A.; BERTOZZI, A. L. *Vorticity and incompressible flow*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

45 MELO, W.; SANTOS, T.; ZINGANO, P. Global well-posedness of 3D generalized mhd equations in Lei-Lin-Gevrey and Lei-Lin spaces. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 71, n. 195, 2020.

46 MIAO, C.; YUAN, B. On well-posedness of the Cauchy problem for MHD system in Besov spaces. *Math Methods Appl. Sci.*, v. 32, n. 1, p. 53–76, 2009.

47 MIAO, C.; YUAN, B. Well-posedness of the ideal MHD system in critical Besov spaces. *Methods and Applications of Analysis*, v. 13, n. 1, p. 89–106, 2006.

48 MIAO, C.; YUAN, B.; ZHANG, B. Well-posedness for the incompressible magneto-hydrodynamic system. *Math Methods Appl. Sci*, v. 30, p. 961–976, 2007.

49 NGUYEN, A. T.; CARABALLO, T.; TUAN, N. On the initial value problem for a class of nonlinear biharmonic equation with time-fractional derivative. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, v. 152, n. 4, p. 989–1031, 2022.

50 OLIVEIRA, E. C. Sobre a clássica função de Mittag-Leffler. *Revista Matemática Universitária*, v. 1, p. 3–23, 2020.

51 PÉREZ-LÓPEZ, J. E. *Espaços de Besov-Lorentz-Herz, de Besov-Lorentz-Morrey e equações de Euler e Navier-Stokes*. Tese de doutorado. [S.l.]: Unicamp, 2016.

52 REED, M.; SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, II, Fourier Analysis, self-adjointness*. 1. ed. [S.l.]: Academic Press, New York, 1975.

53 SCHNEIDER, W. R.; WYSS, W. Fractional diffusion and wave equations. *Journal of Mathmatical Physics*, v. 30, p. 134–144, 1989.

54 SECCHI, P. On the equations of ideal incompressible magneto-hydrodynamics. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, v. 90, p. 103–119, 1993.

55 SERMANGE, M.; TEMAM, R. Some mathematical questions related to the MHD equations. *Commun. Pure Appl. Math*, v. 36, p. 635–664, 1983.

56 TRIEBEL, H. *Theory of function spaces*. 1. ed. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

57 TSUTSUI, Y. The Navier-Stokes equations and weak Herz spaces. *Adv. Differential Equations*, v. 16, n. 11-12, p. 1049–1085, 2011.

58 TUAN, N. H.; AU, V. V.; XU, R. Semilinear Caputo time-fractional pseudo-parabolic equations. *Communications on Pure and Applied Analysis*, v. 20, n. 2, p. 583–621, 2021.

59 TUAN, N. H. et al. Approximation of mild solutions of a semilinear fractional differential equation with random noise. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 148, n. 8, p. 3339–3357, 2020.

60 VISHIK, M. Hydrodynamics in Besov-spaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 145, p. 197–214, 1998.

61 VISHIK, M. Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type. *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.*, v. 4, n. 32, p. 769–812, 1999.

62 WANG, Y. BMO and the regularity criteria for weak solutions to the magnetohydrodynamic equations. *Journal Math. Anal. Appl.*, v. 328, p. 1082–1086, 2007.

63 WANG, Y.; WANG, K. Global well-posedness of the three dimensional magnetohydrodynamics equations. *Nonlinear Anal RWA*, v. 17, p. 245–251, 2014.

64 WU, J. Generalized MHD equations. *Journal of Differential Equations*, v. 195, p. 284–312, 2003.

65 WU, J. Regularity criteria for generalized MHD equations. *Journal of Math. Fluid Mech.*, v. 13, p. 295–305, 2011.

66 XU, X.; YE, Z.; ZHANG, Z. Remark on an improved regularity criterion for the 3D MHD equations. *Applied Mathematics Letters*, v. 42, p. 41–46, 2015.

67 XU, J.; ZHANG, Z.; CARABALLO, T. Mild solutions to time fractional stochastic 2D-Stokes equations with bounded and unbounded delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, p. 1–21, 2019.

68 XU, J.; ZHANG, Z.; CARABALLO, T. Well-posedness and dynamics of impulsive fractional stochastic evolution equations with unbounded delay. *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.*, v. 75, p. 121–139, 2019.

69 YAMAZAKI, K. On the global well-posedness of n-dimensional generalized MHD system in anisotropic spaces. *Advances in Differential Equations*, v. 19, n. 3-4, p. 201–224, 2014.

70 YUAN, J. Existence and regularity criteria for the generalized MHD equations. *Nonlinear Analysis Real World Appl.*, v. 11, n. 3, p. 1640–1649, 2010.

71 ZHUAN, Y. Global well-posedness and decay results to 3D generalized viscous magnetohydrodynamic equations. *Annali di Matematica Pura et Applicata*, v. 195, n. 4, p. 1111–1121, 2016.

72 ZHOU, Y. Regularity criteria for the generalized viscous MHD equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Annal. Non. Linéaire*, v. 24, n. 3, p. 491–505, 2014.

73 ZHOU, Z.; GALA, S. Regularity criteria for the solutions to the 3D MHD equations in the multiplier space. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 61, p. 193–199, 2010.