COMPACIDAD Y COMPACTIFICACIÓN EN TEORÍA DE MODELOS

J. C. Cifuentes

Julho RP 29/93

Relatório de Pesquisa

Instituto de Matemática
Estatística e Ciência da Computação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Campinas - São Paulo - Brasil

ABSTRACT – This paper has two distinct purposes: first, to give a characterization of compactness of model-theoretic logics by means of ultrafilter convergence of families of structures, where the ultrafilter limits generalize the ultraproducts of the family; and second, to define a (topological) compactification of structure spaces which leads to a new (logically) compact semantics for the given logics. We analize several topological properties of this compactification.

IMECC – UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081-970 Campinas SP
Brasil

Julho – 1993

J. C. Cifuentes é aluno de Doutorado sob orientação do Prof. A. M. Sette.

COMPACIDAD Y COMPACTIFICACIÓN EN TEORÍA DE MODELOS

J. C. Cifuentes
IMECC - UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081-970, Campinas, SP
Brasil

Abstract

This paper has two distinct purposes: first, to give a characterization of compactness of model-theoretic logics by means of ultrafilter convergence of families of structures, where the ultrafilter limits generalize the ultraproducts of the family; and second, to define a (topological) compactification of structure spaces which leads to a new (logically) compact semantics for the given logics. We analize several topological properties of this compactification.

INTRODUCCIÓN

La finalidad de este artículo es doble: primero, dar una caracterización de la compacidad de una lógica abstracta (model - theoretic logic) en términos de la convergencia de familias de estructuras via ultrafiltros definidos en esas familias, donde los límites correspondientes de cada familia generalizan debilmente los ultraproductos de la familia; y segundo, construir una compactificación (topológica) de cada espacio de estructuras, la cual permitirá definir una nueva semántica para la lógica original que sea (logicamente) compacta.

Los espacios de estructuras con la topología elemental definida por la lógica subyacente son espacios cero-dimensionales, ie. admiten una base de clopens (abiertos-cerrados), y la compactificación construida es tal que preserva la cero-dimensionalidad de estos espacios. En este caso, la compacidad topológica y la compacidad lógica coinciden.

El método seguido es puramente topológico y permite aplicarlo a cualquier espacio cero-dimensional, inclusive cuando la colección de puntos que subyace al espacio es una clase propia, ie. un espacio "grande", que es el caso de los espacios de estructuras que nos interesa; en este caso, los abiertos de la topología son en general clases propias. Sin embargo, restringiremos nuestro estudio al caso en que la topología es "pequeña", ie. cuando la colección de abiertos puede ser parametrizada por un conjunto, o lo que es lo mismo, tratándose de espacios de estructuras, cuando la lógica es "pequeña", ie. la colección de enunciados o fórmulas cerradas correspondiente a cada tipo de similaridad es un conjunto, ya que en este caso la teoría de conjuntos que permite nuestras construcciones puede ser debidamente fundamentada. En particular, la compacidad de un espacio grande con una topología pequeña involucra solo cubrimientos pequeños de abiertos.

CARACTERIZACIÓN DE LA COMPACIDAD

Sea $L \geq L_{\omega\omega}$ una lógica abstracta regular (cf. [E] pag. 31), y para cada tipo de similaridad τ sean St^τ la colección de estructuras de tipo τ y L^τ la colección de enunciados de L de tipo τ.

Supondremos que L es una lógica pequeña (small logic), ie. para cada tipo τ, L^τ es un conjunto.

La topología elemental sobre St^τ es cero-dimensional y está dada por la siguiente base de clopens: $\{\mathrm{Mod}(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$, la cual es una colección pequeña de clases en St^τ (ie. una colección de clases parametrizada por un conjunto) cerrada para intersecciones finitas y complementos.

Esta topología admite una estructura uniforme que la genera (cf. [K] cap. 6) dada por la siguiente base de uniformidad: $\{\mathcal{U}_\Phi/\Phi$ es un subconjunto finito de $L^\tau\}$, donde para cada $\Phi, \mathcal{U}_\Phi = \{(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in St^\tau \times St^\tau/\mathcal{A} \equiv_\Phi \mathcal{B}\}$, siendo $\equiv_\Phi$ la relación de equivalencia elemental con respecto a la colección Φ de enunciados (cf. [Ca]).

Es fácil ver que la base de uniformidad dada tiene la siguiente propiedad para cualquier tipo τ(aquí $\mathcal{U}_\varphi$ abrevia $\mathcal{U}_{\{\varphi\}}$): para cada $\varphi, \mathcal{U}_\varphi[\mathcal{A}] = \{\mathcal{B} \in St^\tau/(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{U}_\varphi\} =$
$$\begin{cases} \mathrm{Mod}(\varphi), \text{ si } \mathcal{A} \models \varphi \\ \mathrm{Mod}(\neg\varphi), \text{ si } \mathcal{A} \not\models \varphi, \end{cases}$$

(los $\mathcal{U}_\varphi[\mathcal{A}]$ son el correspondiente a las "bolas" de un espacio seudométrico). Esta propiedad garantiza que el espacio uniforme resultante es totalmente acotado (totally bounded) o precompacto (ie. dado φ, el conjunto de las bolas $\mathcal{U}_\varphi[\mathcal{A}]$ que cubren St^τ es finito), y que esta base de uniformidad genera la topología elemental del espacio.

En la teoria general de espacios uniformes se tiene la siguiente caracterización, válida también para espacios grandes con bases pequeñas de uniformidad (cf. [K] pag. 198):

$$\text{COMPACIDAD} = \text{COMPLETITUD DE CAUCHY} + \text{ACOTACION TOTAL},$$

donde la completitud de Cauchy es definida en términos de la convergencia de toda red de Cauchy (las redes son definidas sobre conjuntos). Por lo tanto, para los espacios de estructuras St^τ son equivalentes *Compacidad* y *Completitud de Cauchy*.

A continuación daremos una caracterización de la compacidad topológica de cada espacio St^τ, ie., dada la cero-dimensionalidad del espacio, de la compacidad lógica de cada L^τ, en términos de una versión abstracta del Teorema de Ultraproductos de Łos. Ésta será equivalente a la completitud de Cauchy de esos espacios, mostrando así que el teorema de Łos es un teorema de completitud topológica.

DEFINICIÓN 1.

1.1 Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ una familia de estructuras en St^τ y U un ultrafiltro sobre I. Definimos $\lim_U \mathcal{A}_i$ como la colección de las estructuras $\mathcal{A} \in St^\tau$ tal que para todo $\varphi \in L^\tau$ existe $X \in U$ tal que para todo $i \in X, (\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi$; o equivalentemente, si para todo $\varphi, \{i \in I/(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi\} \in U$.

1.2 Sea $(D, \leq)$ un "conjunto" dirigido. Una *red* (net) en St^τ es cualquier familia de estructuras $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$.

1.3 Una red $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ es de *Cauchy* si para todo $\varphi \in L^\tau$ existe $k \in D$ tal que para todo $i, j \geq k, (\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) \in \mathcal{U}_\varphi$.

1.4 Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in D}$ una red en St^τ. Definimos $\lim_i \mathcal{A}_i$ como la colección de las estructuras $\mathcal{A} \in St^\tau$ tal que para todo $\varphi \in L^\tau$ existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k, (\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi$.

1.5 Un ultrafiltro U sobre un conjunto dirigido D es llamado *libre* (free ultrafilter) si contiene todos los subconjuntos $Y_k = \{i \in D/i \geq k\}$ con $k \in D$. (La noción de ultrafiltro libre sobre un conjunto dirigido generaliza la de ultrafiltro no-principal en ω; observese que la colección $\{Y_k\}_{k\in D}$ tiene la propiedad de intersección finita).

OBSERVACIÓN 1. Debido a la cero-dimensionalidad de los espacios St^τ, la colección $\lim_U \mathcal{A}_i$ puede ser definida de la siguiente manera (cf. [F-M-S] pag. 223): $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$ si y solo si para todo $\varphi \in L^\tau$,

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow \{i \in I/\mathcal{A}_i \in \mathrm{Mod}(\varphi)\} \in U.$$

Así, toda estructura $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$ satisface la propiedad fundamental, dada por el teorema de Łos, que el ultraproducto $\Pi_U \mathcal{A}_i$ satisface en el caso $L = L_{\omega\omega}$.

Se sigue de la observación anterior que $\lim_U \mathcal{A}_i = \bigcap\{\mathrm{Mod}(\varphi)/\{i \in I/\mathcal{A}_i \in \mathrm{Mod}(\varphi)\} \in U\}$.

El siguiente lema es esencial para la demostración de nuestra caracterización de la compacidad y es debido fundamentalmente a D. Mundici y A. M. Sette (cf. [M-S-C] pag. 7). La importancia que él tiene para la interpretación de la convergencia en los espacios de estructuras sugiere darle un nombre, y aquí lo llamaremos "Lema de Convergencia".

LEMA DE CONVERGENCIA. Si $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ es una red de Cauchy en St^τ y U es un ultrafiltro libre sobre D, entonces, $\lim_i \mathcal{A}_i = \lim_U \mathcal{A}_i$. En particular, $\lim_U \mathcal{A}_i$ no depende del ultrafiltro libre U.

DEMOSTRACIÓN.

a) Sean $\mathcal{A} \in \lim_i \mathcal{A}_i$ y $\varphi \in L^\tau$, entonces existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k, (\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi$, ie., $Y_k \subseteq \{i \in I/(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi\}$, luego, como U es libre, $\{i \in I/(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi\} \in U$, por lo tanto, $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$.

b) Sean $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$ y $\varphi \in L^\tau$, entonces existe $X_\varphi \in U$ tal que para todo $i \in X_\varphi, (\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi$. Por otro lado, como la red $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in D}$ es de Cauchy, existe $k_\varphi \in D$ tal que para todo $i, j \geq k_\varphi, (\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) \in \mathcal{U}_\varphi$.

Consideremos $Z = X_\varphi \cap Y_{k_\varphi}$, entonces $Z \in U$ por ser U libre, en particular, $Z \neq \phi$. Sea $k \in Z$ cualquiera.

AFIRMACIÓN. Para todo $i \geq k, (\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi$.

En efecto, si $i \geq k$, entonces, como $k \in X_\varphi$ tenemos que $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_k) \in \mathcal{U}_\varphi$. Además, como $i, k \geq k_\varphi$ tenemos que $(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi$, luego, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i) \in \mathcal{U}_\varphi \circ \mathcal{U}_\varphi \subseteq \mathcal{U}_\varphi$ (pues cada $\mathcal{U}_\varphi$ está definido en términos de una relación de equivalencia).

Ésto prueba que $\mathcal{A} \in \lim_i \mathcal{A}_i$ ■

PROPOSICIÓN 1. Para cada tipo τ son equivalentes:

i) Para toda familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ en St^τ y todo ultrafiltro U sobre $I, \lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$.
ii) Para toda red de Cauchy $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in D}$ en St^τ y todo ultrafiltro libre U sobre $D, \lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$.
iii) El espacio St^τ es completo, ie. para toda red de Cauchy $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in D}, \lim_i \mathcal{A}_i \neq \phi$.
iv) El espacio St^τ es compacto.

DEMOSTRACIÓN.

(i $\rightarrow$ ii): Trivial.
(ii $\rightarrow$ iii): Es consecuencia inmediata del lema de convergencia.
(iii $\rightarrow$ iv): Es inmediato por ser St^τ un espacio uniforme totalmente acotado.
(iv $\rightarrow$ i): Sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una familia en St^τ y U un ultrafiltro sobre I. Por la observación (1), $\lim_U \mathcal{A}_i$ se expresa como la intersección de la siguiente familia de cerrados con la propiedad de intersección finita: $\{\mathrm{Mod}(\varphi)/\{i \in I/\mathcal{A}_i \in \mathrm{Mod}(\varphi)\} \in U\}$. Por lo tanto, como St^τ es compacto, $\lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$. ■

COROLARIO. Sea $L \geq L_{\omega\omega}$ una lógica abstracta regular pequeña, entonces son equivalentes:

i) L es compacta.
ii) Para todo tipo τ, toda familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ en St^τ y todo ultrafiltro U sobre $I, \lim_U \mathcal{A}_i \neq \phi$. ∎

La afirmación (ii) del corolario anterior es una versión abstracta y una generalización para lógicas compactas del teorema de ultraproductos de Łos. Ella siempre es válida en $L_{\omega\omega}$ pues en este caso $\Pi_U \mathcal{A}_i \in \lim_U \mathcal{A}_i$. Para otras lógicas compactas diferentes de $L_{\omega\omega}$ se puede plantear aquí el interesante problema de la "construcción", para cada familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ y cada ultrafiltro U sobre I, de una estructura $\mathcal{A} \in \lim_U \mathcal{A}_i$.

COMPACTIFICACIÓN DE St^τ

Para cada τ definimos $CSt^\tau = \{(K,U)/K \subseteq St^\tau$ es un "conjunto" y U es un ultrafiltro sobre $K\}$, y para cada $\varphi \in L^\tau$ definimos $\mathrm{Mod}^*(\varphi) = \{(K,U) \in CSt^\tau/\{\mathcal{A} \in K/\mathcal{A} \models \varphi\} \in U\} = \{(K,U) \in CSt^\tau/K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U\}$.

$\mathrm{Mod}^*(\varphi)$ es la colección de "Modelos Generalizados" de φ. De este punto de vista podemos definir la "verdad" (truth) de φ en (K,U) como

$$(K,U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow (K,U) \in \mathrm{Mod}^*(\varphi) \Leftrightarrow \{\mathcal{A} \in K/\mathcal{A} \models \varphi\} \in U \Leftrightarrow K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U,$$

por lo tanto, (K,U) se comporta como un ultraproducto de K módulo U. De hecho, si $L = L_{\omega\omega}$, entonces para todo $\varphi, (K,U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow \Pi_U K \models \varphi$, ie. $(K,U) \equiv \Pi_U K$ ($\equiv$ denota la relación de equivalencia elemental de L).

La colección $\{\mathrm{Mod}^*(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$ tiene las siguientes propiedades:

i) $\mathrm{Mod}^*(\varphi) \cap \mathrm{Mod}^*(\psi) = \mathrm{Mod}^*(\varphi \wedge \psi)$
ii) $\mathrm{Mod}^*(\varphi)^c = \mathrm{Mod}^*(\neg\varphi)$
iii) $(St^\tau)^* = CSt^\tau$.

Por lo tanto, es una base de clopens para una topología pequeña cero-dimensional en CSt^τ, que es cerrada para intersecciones finitas y complementos.

Consideremos la aplicación $h : St^\tau \to CSt^\tau$ dada por $h(\mathcal{A}) = (\{\mathcal{A}\}, \{\{\mathcal{A}\}\})$.

Puede probarse facilmente lo siguiente:

a) h es inyectiva.

b) para todo $\mathcal{A} \in St^\tau$ y todo $\varphi \in L^\tau : h(\mathcal{A}) \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$, por lo tanto, la semántica de CSt^τ extiende la semántica de St^τ (es importante observar que el lenguaje L^τ no ha cambiado al extender la semántica).

c) $\mathrm{Mod}^*(\varphi) \cap h[St^\tau] = h[\mathrm{Mod}(\varphi)]$, lo que implica que h es un homeomorfismo de St^τ sobre $h[St^\tau]$, ie. St^τ puede ser considerado como un subespacio de CSt^τ.

En lo que sigue identificaremos $h[St^\tau]$ con St^τ y $h(\mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(K, U) \in St^{\tau}$ y consideremos la siguiente familia de cerrados de $\overline{K} : \{\overline{K} \cap \text{Mod}(\varphi)/(K, U) \Vdash \varphi\}$.

AFIRMACIÓN. La familia dada tiene la propiedad de intersección finita.

En efecto, sean $\varphi_1, ..., \varphi_n$ tales que $(K, U) \Vdash \varphi_i, i = 1, ..., n$, entonces $K \cap \text{Mod}(\varphi_1) \in U, ..., K \cap \text{Mod}(\varphi_n) \in U$, luego, $(\overline{K} \cap \text{Mod}(\varphi_1)) \cap ... \cap (\overline{K} \cap \text{Mod}(\varphi_n)) \in U$, en particular es $\neq \phi$.

En consecuencia, como St^{τ} es compacto, también $\overline{K}$ es compacto, por lo tanto, existe $\mathcal{A} \in \bigcap\{\overline{K} \cap \text{Mod}(\varphi)/(K, U) \Vdash \varphi\} = \overline{K} \cap \bigcap\{\text{Mod}(\varphi)/(K, U) \Vdash \varphi\}$, ie. existe $\mathcal{A} \in \overline{K}$ tal que para todo $\varphi \in L^{\tau}, (K, U) \Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$, luego, considerando las negaciones, tenemos $(K, U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$ ■

Hemos conseguido entonces compactificar la lógica L extendiendo la semántica. Más aún, hemos obtenido una compactificación topológica del espacio St^{τ}. Sin embargo, si St^{τ} es compacto, CSt^{τ} no se reduce a St^{τ} pues este último no es Hausdorff (ver proposición 8, definición 2 y observación 4 más adelante).

UNA APLICACIÓN

En el parágrafo anterior se ha demostrado que toda lógica (regular y pequeña) admite una semántica compacta que extiende la semántica usual.

La compacidad (lógica) de la nueva semántica, al igual que la compacidad de la lógica elemental, es importante por sus consecuencias, no solo porque permite garantizar la existencia de ciertos "modelos" satisfaciendo determinadas propiedades, sino por su poder en el análisis de la expresabilidad de las teorías matemáticas.

A continuación veremos un pequeño ejemplo de este análisis, sugerido por A.M. Sette.

Sea κ un cardinal infinito y consideremos la lógica infinitaria $L = L_{\kappa\kappa}(Q_{\kappa})$ donde Q_{κ} es el cuantificador cardinal cuya interpretación en una estructura $\mathcal{A} = < A, ... >$ es la siguiente: $\mathcal{A} \models (Q_{\kappa}x)\varphi(x) \Leftrightarrow |\{a \in A/\mathcal{A} \models \varphi[a]\}| \geq \kappa$ (Q_{κ} es denotado a veces por Q_{α} siendo α el ordinal tal que $\kappa = \aleph_{\alpha}$). L permite conjunciones, disyunciones y cuantificaciones universales y existenciales de longitud $< \kappa$ (cf. [B-S] cap. 13 y 14).

En L puede ser expresado el hecho que un conjunto A tenga $|A| < \kappa$; en efecto, $|A| < \kappa \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg(Q_{\kappa}x)(x = x)$. Por otro lado, para cualquier $\lambda < \kappa$, puede ser expresado también el hecho que $|A| \geq \lambda$ de la siguiente manera: sea $\exists^{\geq\lambda}$ el enunciado $(\exists x_0)...(\exists x_{\eta})... \bigwedge_{\alpha<\beta<\lambda} (x_{\alpha} \neq x_{\beta})$ con $\eta < \lambda$, entonces, se verifica que $|A| \geq \lambda \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \exists^{\geq\lambda}$.

Puede observarse facilmente que si A es un conjunto (ie. $A \in St^{\phi}$, donde ϕ es el tipo de similaridad vacío, o sea, el único símbolo de relación permitido en las estructuras de

St^ϕ es la igualdad $=$), entonces, $|A| \geq \lambda$ para todo $\lambda < \kappa$ implica $|A| \geq \kappa$, lo que está virtualmente en contradicción con $|A| < \kappa$. Sin embargo, mostraremos que el conjunto de enunciados $\sum = \{\exists^{\geq\lambda}/\lambda < \kappa\} \cup \{\neg(Q_\kappa x)(x = x)\}$ es no-contradictorio del punto de vista semántico, ie. existe algún modelo generalizado de $\sum$. De hecho, la existencia queda garantizada por la compacidad de CSt^ϕ pues todo subconjunto finito de $\sum$ tiene modelo en St^ϕ. En lo que sigue construiremos un modelo concreto de $\sum$.

Consideremos el espacio St^ϕ y para cada $\lambda < \kappa$ escojemos $A_\lambda \in St^\phi$ tal que $|A_\lambda| = \lambda$. Sea $K = \{A_\lambda/\lambda < \kappa\}$ (se observa que $|K| = \kappa$). Obviamente, para cualquier ultrafiltro U sobre K tenemos que $(K, U) \Vdash \neg(Q_\kappa x)(x = x)$ pues $\{A \in K/A \models \neg(Q_\kappa x)(x = x)\} = \{A \in K/|A| < \kappa\} = K \in U$.

Construiremos ahora un ultrafiltro U sobre K tal que para todo $\lambda < \kappa, (K, U) \Vdash \exists^{\geq\lambda}$.

Para cada $\lambda < \kappa$, sea $M_\lambda = \{A \in K/|A| \geq \lambda\}$, entonces, la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$ tiene la propiedad de intersección finita, pues si $\lambda_1, ..., \lambda_n < \kappa$, tenemos que $A \in M_{\lambda_1} \cap ... \cap M_{\lambda_n} \Leftrightarrow |A| \geq$ máx $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, y como máx $(\lambda_1, ..., \lambda_n) < \kappa$, existe $A \in M_{\lambda_1} \cap ... \cap M_{\lambda_n}$.

Es más, si κ es regular, ie. para toda familia de cardinales $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\lambda}$ con $\lambda < \kappa$ y cada $\alpha_\eta < \kappa$ se tiene que $\sup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta < \kappa$, entonces, la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$ tiene la propiedad de κ-intersección, ie. $\bigcap_{\eta<\lambda} M_{\alpha_\eta} \neq \phi$ para toda familia de cardinales $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\lambda}$ como la descrita antes. En este caso, el filtro generado por la familia es κ-completo.

Sea U un ultrafiltro que contiene la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$ (de hecho U es no-principal), entonces para todo $\lambda < \kappa, (K, U) \Vdash \exists^{\geq\lambda}$ pues $\{A \in K/A \models \exists^{\geq\lambda}\} = \{A \in K/|A| \geq \lambda\} = M_\lambda \in U$.

Luego, (K, U) es el modelo generalizado que hace compatibles los conceptos de "tener cardinalidad $\geq \lambda$ para todo $\lambda < \kappa$" y "tener cardinalidad $< \kappa$". En el caso particular de ser $\kappa = \aleph_0$, son compatibles los conceptos de "ser arbitrariamente grande" y "ser finito".

DISCUSIÓN SOBRE LA COMPACIDAD DE CSt^τ

Ya hemos visto que la colección $\{\text{Mod}^*(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$ es una base de clopens para el espacio CSt^τ, por lo tanto, podemos adaptar la definición (1.1), en su versión cero-dimensional, al espacio CSt^τ, y definir para una familia $\{(K_i, U_i)\}_{i\in I}$ y un ultrafiltro U sobre I : $(M, W) \in \lim_U(K_i, U_i)$ si y solo si para todo $\varphi \in L^\tau$,

$$(M, W) \in \text{Mod}^*(\varphi) \Leftrightarrow \{i \in I/(K_i, U_i) \in \text{Mod}^*(\varphi)\} \in U,$$

ie.

$$\{\mathcal{A} \in M/\mathcal{A} \models \varphi\} \in W \Leftrightarrow \{i \in I/\{\mathcal{A} \in K_i/\mathcal{A} \models \varphi\} \in U_i\} \in U,$$

o aún, escrita en términos de las familias $M = \{\mathcal{A}_j\}_{j\in J}, K_i = \{\mathcal{A}_{ij}\}_{j\in J_i}$, con ultrafiltros W en J y U_i en J_i respectivamente, tenemos

$$\{j \in J/\mathcal{A}_j \models \varphi\} \in W \overset{(\bullet)}{\Leftrightarrow} \{i \in I/\{j \in J_i/\mathcal{A}_{ij} \models \varphi\} \in U_i\} \in U.$$

Ahora, la proposición (1), adaptada al caso del espacio CSt^{τ}, junto con la proposición (3), tienen como consecuencia para cualquier lógica L que, para cada familia $\{(K_i, U_i)\}_{i\in I}$ en CSt^{τ} y cada ultrafiltro U sobre I, $\lim_U(K_i, U_i) \neq \phi$, ie. existe $(M, W) \in CSt^{\tau}$ satisfaciendo la equivalencia $(*)$. Esto puede ser considerado como el correspondiente Teorema de Łos para los espacios CSt^{τ}. El problema de la construcción del par (M, W) para cualquier lógica L queda aquí sugerido.

PROPOSICIÓN 5. Si L es compacta, entonces, para todo τ, toda familia $\{(K_i, U_i)\}_{i\in I}$ en CSt^{τ}, con $K_i = \{\mathcal{A}_{ij}\}_{j\in J_i}$ y U_i ultrafiltro sobre J_i, existe $\mathcal{A} \in St^{\tau}$ tal que para todo $\varphi \in L^{\tau}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \{i \in I / \{j \in J_i / \mathcal{A}_{ij} \models \varphi\} \in U_i\} \in U.$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de la discusión anterior y de la proposición (4). ∎

En $L_{\omega\omega}$ esta estructura $\mathcal{A}$ puede ser realizada explícitamente como el ultraproducto $\Pi_U(\Pi_{U_i}\mathcal{A}_{ij})$.

OBSERVACIÓN 2. Si $(K, U) \in CSt^{\tau}$, entonces considerando K como una familia en CSt^{τ} cuyos elementos están parametrizados por ellos mismos, es fácil probar que $\lim_U K = cl\{(K, U)\}$ (cl denota la clausura en CSt^{τ}). En particular, $(K, U) \in \lim_U K$, lo que refuerza la interpretación de (K, U) como un ultraproducto generalizado de K módulo U.

PROPIEDAD DE EXTENSIÓN

Sean $< X, \mathcal{B} >$ y $< Y, \mathcal{C} >$ dos espacios cero-dimensionales con $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de clopens de X e Y respectivamente, cerradas para intersecciones finitas y complementos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, decimos que f es s-continua (strongly continuous) si para todo $W \in \mathcal{C}$, $f^{-1}[W] \in \mathcal{B}$. Obviamente toda función s-continua es continua. También, decimos que f es s-abierta si para todo $V \in \mathcal{B}$, $f[V] \in \mathcal{C}$.

Son ejemplos de funciones s-continuas los siguientes:

1. h: $St^{\tau} \rightarrow CSt^{\tau}$ es s-continua ya que para todo $\varphi \in L^{\tau}$ tenemos $h^{-1}[\mathrm{Mod}^*(\varphi)] = \mathrm{Mod}^*(\varphi) \cap St^{\tau} = \mathrm{Mod}(\varphi)$.

2. Denotando con $St^{\tau}(L)$ el espacio St^{τ} con la topología elemental dada por L tenemos que, si $L_1 \leq L_2$ (ie. para cada $\varphi \in L_1^{\tau}$ existe $\psi \in L_2^{\tau}$ tal que $\mathrm{Mod}_{L_2}(\psi) = \mathrm{Mod}_{L_1}(\varphi)$) entonces, la identidad $I : St^{\tau}(L_2) \rightarrow St^{\tau}(L_1)$ es s-continua. En particular, si $L_1 \leq L_2$ y $L_2 \leq L_1$ entonces la identidad I mencionada es un homeomorfismo que preserva las bases. Un tal homeomorfismo, ie. una función biyectiva s-continua y s-abierta, será

llamado "s-homeomorfismo".

PROPOSICIÓN 6. Sean $< X, \mathcal{B} >$ un espacio cero-dimensional *compacto* con $\mathcal{B}$ una base de clopens cerrada para intersecciones finitas y complementos, y $f : St^\tau \to X$ una función s-continua (St^τ es considerado con la base dada anteriormente),entonces existe $F : CSt^\tau \to X$ s-continua tal que $F\lceil St^\tau = f$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(K, U) \in CSt^\tau$ y consideremos la colección $M = \{V \in \mathcal{B} / K \cap f^{-1}[V] \in U\}$.

AFIRMACIÓN 1. M es una colección de cerrados de X con la propiedad de intersección finita.

En efecto, obviamente M consta de cerrados pues $\mathcal{B}$ es una base de clopens. Ahora, si $V_1, ..., V_n \in M$, entonces, $K \cap f^{-1}[V_1], ..., K \cap f^{-1}[V_n] \in U$, luego, $K \cap f^{-1}[V_1 \cap ... \cap V_n] \doteq (K \cap f^{-1}[V_1]) \cap ... \cap (K \cap f^{-1}[V_n]) \in U$, en particular, $f^{-1}[V_1 \cap ... \cap V_n] \neq \phi$, ie. $V_1 \cap ... \cap V_n \neq \phi$.

En consecuencia, como X es compacto, para cada $(K, U) \in CSt^\tau$ tenemos que $\bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[V] \in U\} \neq \phi$.

Definimos $F(K, U) \in \bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[V] \in U\}$ en forma arbitraria con la única siguiente restricción: si $(K, U) = (\{\mathcal{A}\}, \{\{\mathcal{A}\}\})$ con $\mathcal{A} \in St^\tau$ se observa que $\bigcap\{V \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[V] \in U\} = \bigcap\{V \in \mathcal{B}/f(\mathcal{A}) \in V\} = \overline{\{f(\mathcal{A})\}}$, luego, exigiendo que $F(\{\mathcal{A}\}, \{\{\mathcal{A}\}\}) = f(\mathcal{A})$ tenemos que $F\lceil St^\tau = f$.

AFIRMACIÓN 2. Para todo $V \in \mathcal{B}, F^{-1}[V] = (f^{-1}[V])^*$.

Observemos primero que como f es s-continua, para cada $V \in \mathcal{B}$ existe $\varphi \in L^\tau$ tal que $f^{-1}[V] = \text{Mod}(\varphi)$, luego, $(f^{-1}[V])^*$ significa $\text{Mod}^*(\varphi)$.

Sea $(K, U) \in F^{-1}[V]$, entonces, $F(K, U) \in V$, por otro lado, $F(K, U) \in \bigcap\{W \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[W] \in U\}$. Supongamos que $(K, U) \notin (f^{-1}[V])^* = \text{Mod}^*(\varphi)$, entonces, $(K, U) \in \text{Mod}^*(\neg\varphi)$, ie. $K \cap \text{Mod}(\neg\varphi) \in U$, pero $\text{Mod}(\neg\varphi) = f^{-1}[V^c]$ y $V^c \in \mathcal{B}$, luego, $K \cap f^{-1}[V^c] = K \cap \text{Mod}(\neg\varphi) \in U$, ie. para $W = V^c$ tenemos que $(K, U) \in W$, una contradicción, por lo tanto, $(K, U) \in (f^{-1}[V])^*$.

Sea $(K, U) \in (f^{-1}[V])^* = \text{Mod}^*(\varphi)$, entonces, $K \cap \text{Mod}(\varphi) \in U$, ie. $K \cap f^{-1}[V] \in U$, luego, como $F(K, U) \in \bigcap\{W \in \mathcal{B}/K \cap f^{-1}[W] \in U\}$ tenemos que $F(K, U) \in V$, ie. $(K, U) \in F^{-1}[V]$.

En consecuencia, F es s-continua ∎

COROLARIO. Sean $L_1 \leq L_2$ con L_1 compacta, entonces, para todo tipo $\tau, St^\tau(L_1)$ es un *retracto* s-continuo de $CSt^\tau(L_2)$, ie. existe $F : CSt^\tau(L_2) \to St^\tau(L_1)$ s-continuo tal que $F\lceil St^\tau(L_2) = I$ (la identidad). F es llamado también un retracto.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la identidad $I : St^\tau(L_2) \to St^\tau(L_1)$ que, como ya vimos, es s-continua. Entonces, como $St^\tau(L_1)$ es compacto cero-dimensional, por la propiedad de extensión (proposición 6) existe $F : CSt^\tau(L_2) \to St^\tau(L_1)$ s-continua tal que $F\lceil St^\tau(L_2) = I$, ie. $St^\tau(L_1)$ es trivialmente un retracto s-continuo de $CSt^\tau(L_2)$ ∎

OBSERVACIÓN 3. La s-continuidad de la F construida en el corolario anterior se puede expresar, siguiendo la afirmación (2) de la proposición (6), de la siguiente manera: para todo $\varphi \in L_1^\tau$ existe $\psi \in L_2^\tau$ tal que $F^{-1}[\mathrm{Mod}_{L_1}(\varphi)] = \mathrm{Mod}^*_{L_2}(\psi)$.

A continuación analizaremos la relación estructural íntima que existe entre los espacios CSt^τ y St^τ en el caso de ser L una lógica compacta.

PROPOSICIÓN 7. Sea L una lógica compacta y para cualquier τ consideremos el retracto $F :< CSt^\tau, \mathcal{B} > \to < St^\tau, \mathcal{C} >$, dado por el corolario anterior, donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases elementales de clopens respectivas. Entonces:

a) La aplicación $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ definida por $G(M) = F[M]$ es una biyección.

b) Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$, si $\beta\{M_i\}$ denota una combinación booleana arbitraria de los M_i (incluyendo uniones e intersecciones infinitas) entonces, $F[\beta\{M_i\}] = \beta\{F[M_i]\}$ (en particular, G es un isomorfismo de álgebras de Boole que preserva algunas uniones e intersecciones infinitas).

c) $F[cl\{(K,U)\}] = \overline{\{F(K,U)\}}$ (cl denota la clausura en CSt^τ y la barra en St^τ).

d) F es una aplicación propia s-abierta, ie. es s-abierta, cerrada y si $K \subseteq St^\tau$ es compacto, entonces $F^{-1}[K]$ es compacto en CSt^τ.

e) CSt^τ y St^τ tienen la topología inducida y co-inducida por F respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\mathcal{B} = \{\mathrm{Mod}^*(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathrm{Mod}(\varphi)/\varphi \in L^\tau\}$.

a) G está definida de la siguiente manera: si $M \in \mathcal{B}$, entonces $M = \mathrm{Mod}^*(\varphi)$ con $\varphi \in L^\tau$, luego $G(M) = F[\mathrm{Mod}^*(\varphi)]$, pero, por la afirmación (2) de la proposición (6), $\mathrm{Mod}^*(\varphi) = F^{-1}[\mathrm{Mod}(\varphi)]$, entonces, como F es sobre, $F[\mathrm{Mod}^*(\varphi)] = \mathrm{Mod}(\varphi)$, ie. $G(\mathrm{Mod}^*(\varphi)) = \mathrm{Mod}(\varphi)$.

Sean $\varphi, \psi \in L^\tau$ tales que $G(\mathrm{Mod}^*(\varphi)) = G(\mathrm{Mod}^*(\psi))$, entonces, $\mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\psi)$, luego, $\mathrm{Mod}^*(\varphi) = \mathrm{Mod}^*(\psi)$, ie. G es inyectiva. Por lo tanto, G es una biyección ya que es obviamente sobre.

b) Basta probar que F conmuta con los complementos y las intersecciones arbitrarias. El caso de los complementos es trivial pues las mismas bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son cerradas con respecto a esa operación. Por la misma razón F conmuta con cualquier intersección finita.

Finalmente, a partir de las relaciones encontradas en la proposición anterior, puede probarse facilmente que para todo $\varphi \in L^\tau$:

$$\tilde{F}^{-1}[\,\mathrm{Mod}(\varphi)] = \pi[\,\mathrm{Mod}^*(\varphi)]$$

y

$$\tilde{F}[\pi[\,\mathrm{Mod}^*(\varphi)]] = \mathrm{Mod}(\varphi)$$

donde $\pi : CSt^\tau \rightarrow CSt^\tau/F$ es la proyección canónica, lo que demuestra que $\tilde{F}$ es continua e abierta, es más, $\tilde{F}$ es un s-homeomorfismo ∎

Desde el punto de vista lógico podemos obtener aún una mejor descripción de la relación entre CSt^τ y St^τ en el caso compacto. Primero observemos que la propiedad: $F^{-1}[\,\mathrm{Mod}(\varphi)] = \mathrm{Mod}^*(\varphi)$ para todo φ, dada en la afirmación (2) de la proposición (6), expresa lo siguiente: para todo $\varphi \in L^\tau, (K,U) \in \mathrm{Mod}^*(\varphi) \Leftrightarrow F(K,U) \in \mathrm{Mod}(\varphi)$; y dado que F es sobre tenemos que: para todo $\varphi \in L^\tau$

$$(K,U) \in \mathrm{Mod}^*(\varphi) \Leftrightarrow F(K,U) \in F[\,\mathrm{Mod}^*(\varphi)].$$

Consideremos estructuras topológicas $< X, \mathcal{B} >$ y $< Y, \mathcal{C} >$ siendo $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de abiertos, y una aplicación $f : X \rightarrow Y$ sobreyectiva, s-continua y s-abierta tal que para todo $a \in X$ y para todo $A \in \mathcal{B}$:

$$a \in A \overset{(\Delta)}{\Leftrightarrow} f(a) \in f[A].$$

Se observa facilmente que la condición (Δ) exigida, es equivalente a: para todo $A \in \mathcal{B}, A = f^{-1}[f[A]]$, ie. cada $A \in \mathcal{B}$ es *saturado con respecto a f*. Una función f satisfaciendo las condiciones dadas en el párrafo anterior será llamada "q-homeomorfismo" (ie. quasi-homeomorfismo, ya que f sería inyectiva si y solo si para todo $B \subseteq X, B = f^{-1}[f[B]]$) (cf. [C] parag. 1.4.4).

El retracto $F : CSt^\tau \rightarrow St^\tau$ es un q-homeomorfismo. Es más, se puede demostrar facilmente, adaptando la demostración de la proposición (7), que todo q-homeomorfismo cumple las propiedades enunciadas en dicha proposición.

Para todo par de cardinales $\kappa \geq \lambda \geq \omega$, sea $L^-_{\kappa\lambda}$ el lenguaje formal que tiene como símbolos primitivos: variables $x_0, x_1, ..., x_\alpha, ..., \alpha < \kappa$, para elementos de X (respectivamente Y), $V_0, V_1, ..., V_\alpha, ..., \alpha < \kappa$, para elementos de $\mathcal{B}$ (respectivamente $\mathcal{C}$), el símbolo de pertenencia "$\in$" que relaciona elementos de X con elementos de $\mathcal{B}$ (ie. $x_i \in V_j$), y el símbolo de igualdad "$=$" entre elementos de $\mathcal{B}$ (ie. $V_i = V_j$). Este lenguaje permite conjunciones y disyunciones infinitas de longitud $< \kappa$, y cuantificación universal y existencial infinita de longitud $< \lambda$, pero no permite la igualdad entre elementos de X.

En este lenguaje podemos expresar, por ejemplo, el hecho de ser $\mathcal{B}$ base de una topología, así como el hecho de ser X un espacio con base enumerable, o de ser un espacio normal o regular. Sin embargo, la propiedad de ser Hausdorff no es expresable porque involucra la igualdad entre elementos de X.

En la siguiente proposición $\vec{x}$ y $\vec{V}$ denotan secuencias finitas o infinitas de variables.

PROPOSICIÓN 8. Sea $f :< X, \mathcal{B} > \to < Y, \mathcal{C} >$ un q-homeomorfismo. Si $\varphi(\vec{x}, \vec{V})$ es una fórmula de $L^-_{\kappa\lambda}$, entonces para toda secuencia $\vec{a}$ de elementos de X y $\vec{A}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tenemos:

$$< X, \mathcal{B} > \models \varphi[\vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow < Y, \mathcal{C} > \models \varphi[f(\vec{a}), f[\vec{A}]];$$

en particular, $< X, \mathcal{B} > \equiv_{L^-_{\kappa\lambda}} < Y, \mathcal{C} >$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es por inducción sobre la complejidad de la fórmula φ.

Caso 1. Si φ es atómica de la forma $x_i \in V_j$:
$< X, \mathcal{B} > \models (x_i \in V_j)[a, A] \Leftrightarrow a \in A \Leftrightarrow$ (por la condición (Δ))$f(a) \in f[A] \Leftrightarrow$ $< Y, \mathcal{C} > \models (x_i \in V_j)[f(a), f[A]]$.

Caso 2. Si φ es atómica de la forma $V_i = V_j$:
$< X, \mathcal{B} > \models (V_i = V_j)[A, B] \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow$ (por la proposición (7a)) $f[A] = f[B] \Leftrightarrow < Y, \mathcal{C} > \models (V_i = V_j)[f[A], f[B]]$.

Caso 3. Si φ es $\neg\psi$ o $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ con $|I| < \kappa$: es trivial.

Caso 4. Si $\varphi(\vec{x}, \vec{V})$ es $(\exists \vec{z})\psi(\vec{z}, \vec{x}, \vec{V})$:
$< X, \mathcal{B} > \models (\exists \vec{z})\psi[\vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow$ existe $\vec{b} \in X$ tal que $< X, \mathcal{B} > \models \psi[\vec{b}, \vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow$ (por hipótesis inductiva) existe $\vec{b} \in X$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models \psi[f(\vec{b}), f(\vec{a}), f[\vec{A}]] \Leftrightarrow$ (por ser f sobre) existe $\vec{c}\,(= f(\vec{b})) \in Y$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models \psi[\vec{c}, f(\vec{a}), f[\vec{A}]] \Leftrightarrow$ $< Y, \mathcal{C} > \models (\exists \vec{z})\psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}]]$.

Caso 5. Si $\varphi(\vec{x}, \vec{V})$ es $(\exists \vec{W})\psi(\vec{x}, \vec{V}, \vec{W})$:
$< X, \mathcal{B} > \models (\exists \vec{W})\psi[\vec{a}, \vec{A}] \Leftrightarrow$ existe $\vec{B} \in \mathcal{B}$ tal que $< X, \mathcal{B} > \models \psi[\vec{a}, \vec{A}, \vec{B}] \Leftrightarrow$ (por hipótesis inductiva) existe $\vec{B} \in \mathcal{B}$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models \psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}], f[\vec{B}]] \Leftrightarrow$ (por la proposición (7a)) existe $\vec{C}(= f[\vec{B}]) \in \mathcal{C}$ tal que $< Y, \mathcal{C} > \models$ $\psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}], \vec{C}] \Leftrightarrow < Y, \mathcal{C} > \models (\exists \vec{W})\psi[f(\vec{a}), f[\vec{A}]]$ ∎

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que, si $f : X \to Y$ es un q-homeomorfismo, entonces, X es compacto (normal, regular) si y solo si Y es compacto (normal, regular).

EL COCIENTE MÓDULO EQUIVALENCIA ELEMENTAL

Un ejemplo genérico de q-homeomorfismos se da en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 9. Sea X un espacio topológico. Definimos sobre X la siguiente relación de equivalencia: $x \equiv y \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, donde la barra denota la clausura en X. Entonces, si $X/\equiv$ es el espacio cociente respectivo (llamado "espacio de Kolmogoroff de X"), la proyección canónica $\pi : X \to X/\equiv$ es un q-homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Obviamente, considerando los espacios con sus topologías totales como bases, π es sobre y s-continua. Si probamos que todo abierto A de X es saturado con respecto a π, ie. $\pi^{-1}[\pi[A]] = A$, será inmediato que π es s-abierta y además satisface la condición (Δ).

Basta probar que $\pi^{-1}[\pi[A]] \subseteq A$. Sea $x \in \pi^{-1}[\pi[A]]$, entonces, $\pi(x) \in \pi[A]$, luego existe $z \in A$ tal que $\pi(x) = \pi(z)$, ie. $\overline{\{x\}} = \overline{\{z\}}$. Si $x \notin A$, entonces, $x \in A^c$ (que es cerrado), luego, $\overline{\{z\}} = \overline{\{x\}} \subseteq \overline{A^c} = A^c$, ie. $z \in A^c$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, $x \in A$ ∎

En teoría de modelos tenemos que, si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in St^\tau(L)$ entonces, con respecto a la topología elemental, $\overline{\{\mathcal{A}\}} = \overline{\{\mathcal{B}\}} \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv_L \mathcal{B}$, por lo tanto, la proyección $\pi : St^\tau(L) \to St^\tau(L)/\equiv_L$ es un q-homeomorfismo; es más, es un q-homeomorfismo con respecto a las bases elementales. En particular, $St^\tau(L)$ es compacto si y solo si $St^\tau(L)/\equiv_L$ es compacto.

Análoga descripción puede hacerse con respecto al espacio $CSt^\tau(L)$. Aquí, $(K, U) \equiv_L (M, W)$ significa que para todo $\varphi \in L^\tau, (K,U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow (M,W) \Vdash \varphi$. Luego, la proyección $\pi : CSt^\tau(L) \to CSt^\tau(L)/\equiv_L$ es un q-homeomorfismo (con respecto a las bases elementales). En este caso, ambos espacios son compactos.

Por ejemplo, en general tenemos que, si $\mathcal{A} \in K \subseteq St^\tau(L)$ y $U_\mathcal{A}$ es el ultrafiltro principal sobre K generado por $\mathcal{A}$, ie. $U_\mathcal{A} = \{M \subseteq K / \mathcal{A} \in M\}$, entonces $\mathcal{A} \equiv_L (K, U_\mathcal{A})$ (recordar que $\mathcal{A}$ está siendo identificado con el par $(\{\mathcal{A}\}, \{\{\mathcal{A}\}\})$). En efecto, si $\varphi \in L^\tau$, entonces, $(K, U_\mathcal{A}) \Vdash \varphi \Leftrightarrow \{\mathcal{B} \in K/\mathcal{B} \models \varphi\} \in U_\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \{\mathcal{B} \in K/\mathcal{B} \models \varphi\} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$. Por lo tanto, dado que todo ultrafiltro sobre un conjunto finito es principal, en $CSt^\tau(L) \backslash St^\tau(L)$ solo interesan, en esencia, los pares (K, U) con K infinito y U no-principal sobre K.

Esta última observación motiva la siguiente modificación en nuestra construcción de una compactificación de los espacios de estructuras St^τ.

DEFINICIÓN 2. Sea $\mathcal{F}(St^\tau) = \{(K,U)/K \subseteq St^\tau$ es un "conjunto" infinito y U un ultrafiltro no-principal sobre $K\}$.

Definimos, $C'St^\tau = St^\tau \cup \mathcal{F}(St^\tau)$ y para cada $\varphi \in L^\tau$, $\mathrm{Mod}'(\varphi) = \mathrm{Mod}(\varphi) \cup \{(K,U) \in \mathcal{F}(St^\tau)/K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U\}$.

El nuevo espacio $C'St^\tau$ es una compactificación reducida de St^τ y, aunque con pro-

Veamos el caso de una intersección arbitraria: sea $\{\operatorname{Mod}^*(\varphi_i)\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\bigcap_{i\in I}\operatorname{Mod}^*(\varphi_i) = \bigcap_{i\in I}F^{-1}[\operatorname{Mod}(\varphi_i)] = F^{-1}[\bigcap_{i\in I}\operatorname{Mod}(\varphi_i)]$, luego, $F[\bigcap_{i\in I}\operatorname{Mod}^*(\varphi_i)] = \bigcap_{i\in I}\operatorname{Mod}(\varphi_i)$ por ser F sobre, ie. $F[\bigcap_{i\in I}\operatorname{Mod}^*(\varphi_i)] = \bigcap_{i\in I}F[\operatorname{Mod}^*(\varphi_i)]$.

c) Es consecuencia inmediata de (b) pues la clausura cl es una intersección de cerrados básicos.

d) Es inmediato que F es s-abierta pues en (a) fue verificado que para el caso de los abiertos básicos, $F[\operatorname{Mod}^*(\varphi)] = \operatorname{Mod}(\varphi)$.

El hecho de ser F cerrada es consecuencia de (b) ya que todo cerrado es intersección de cerrados básicos, ie. de abiertos básicos pues los espacios considerados son cero-dimensionales.

Sea $K \subseteq St^\tau$ compacto y supongamos que $F^{-1}[K] \subseteq \bigcup_{i\in I}\operatorname{Mod}^*(\varphi_i)$, entonces, $K = F[F^{-1}[K]] \subseteq F[\bigcup_{i\in I}\operatorname{Mod}^*(\varphi_i)] = \bigcup_{i\in I}F[\operatorname{Mod}^*(\varphi_i)] = \bigcup_{i\in I}\operatorname{Mod}(\varphi_i)$, luego, como K es compacto, existen $i_1, ..., i_n \in I$ tales que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}\operatorname{Mod}(\varphi_{i_k})$, por lo tanto, $F^{-1}[K] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}F^{-1}[\operatorname{Mod}(\varphi_{i_k})] = \bigcup_{k=1}^{n}\operatorname{Mod}^*(\varphi_{i_k})$, ie. $F^{-1}[K]$ es compacto.

e) Basta probar que CSt^τ y St^τ tienen como base la inducida y co-inducida por F respectivamente.

En efecto, como para todo $\varphi \in L^\tau$ tenemos que $F^{-1}[\operatorname{Mod}(\varphi)] = \operatorname{Mod}^*(\varphi)$, entonces: $\mathcal{B} = \{\operatorname{Mod}^*(\varphi)/\varphi \in L^\tau\} = \{F^{-1}[\operatorname{Mod}(\varphi)]/\varphi \in L^\tau$ siendo que $\operatorname{Mod}(\varphi) \in \mathcal{C}\} = \{F^{-1}[M]/M \in \mathcal{C}\} =$ BASE INDUCIDA POR F, y $\mathcal{C} = \{\operatorname{Mod}(\varphi)/\varphi \in L^\tau\} = \{\operatorname{Mod}(\varphi)/F^{-1}[\operatorname{Mod}(\varphi)] = \operatorname{Mod}^*(\varphi) \in \mathcal{B}\} = \{M/F^{-1}[M] \in \mathcal{B}\} =$ BASE CO-INDUCIDA POR F ∎

La parte (e) de la proposición anterior dice que St^τ es un cociente de CSt^τ (siempre en el caso compacto), y el siguiente corolario da el cociente explicitamente.

COROLARIO. Definiendo en CSt^τ la relación de equivalencia determinada por F, ie. $(K, U) \sim_F (M, W) \Leftrightarrow F(K, U) = F(M, W)$, tenemos que el espacio cociente CSt^τ/F es s-homeomorfo a St^τ.

DEMOSTRACIÓN. Denotando con $[K, U]$ la clase de equivalencia de (K, U) en CSt^τ, podemos definir la aplicación $\tilde{F} : CSt^\tau/F \to St^\tau$ por $\tilde{F}([K, U]) = F(K, U)$ y obviamente es una biyección.

piedades análogas a la compactificación CSt^τ, tiene la siguiente importante ventaja.

OBSERVACIÓN 4. La propiedad que define los pares (K, U) en $\mathrm{Mod}'(\varphi)$, ie. "$K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U$", es equivalente a "existe $A \in U$ con $A \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$", por lo tanto, para cada $\varphi \in L^\tau$, $\mathrm{Mod}'(\varphi) = \mathrm{Mod}(\varphi) \cup \{(K, U) \in \mathcal{F}(St^\tau) /$ existe $A \in U$ con $A \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)\}$. Desde este punto de vista, la compactificación $C'St^\tau$ puede ser entendida como una compactificación tipo Wallman para St^τ, que además la generaliza, pues una compactificación de Wallman exigiría fijar $K = St^\tau$ en todos los pares (K, U), lo cual no es permitido en la teoría de conjuntos que fundamenta nuestras construcciones. Por otro lado, dejar libre K, siendo aún un conjunto, es más conveniente para las necesidades de la teoría de modelos, como ya vimos.

Volviendo a los cocientes módulo equivalencia elemental, y para finalizar, debemos observar que si L no es una lógica compacta, entonces, en general, $CSt^\tau/\equiv$ no es homeomorfo a $St^\tau/\equiv$. Sin embargo, si L es compacta, entonces, probaremos en la proposición (10) siguiente que, para todo tipo τ, $CSt^\tau/\equiv$ es homeomorfo a $St^\tau/\equiv$. Es más, el homeomorfismo construido será un s-homeomorfismo.

LEMA. Si St^τ es compacto, entonces, con respecto al retracto $F : CSt^\tau \to St^\tau$ tenemos lo siguiente: $(K, U) \equiv (M, W) \Leftrightarrow F(K, U) \equiv F(M, W)$.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos $(K, U) \equiv (M, W)$, entonces, para todo $\varphi \in L^\tau, (K, U) \Vdash \varphi \Leftrightarrow (M, W) \Vdash \varphi$, ie. $K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U \Leftrightarrow M \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in W$.

Probaremos que $F(K, U) \equiv F(M, W)$. Sea $\varphi \in L^\tau$ tal que $F(K, U) \models \varphi$, ie. $F(K, U) \in \mathrm{Mod}(\varphi)$, entonces, $K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U$, pues si no, tendríamos que $K \cap \mathrm{Mod}(\neg\varphi) \in U$, luego $F(K, U) \in \mathrm{Mod}(\neg\varphi)$ ya que, por construcción, $F(K, U) \in \bigcap\{\mathrm{Mod}(\psi) / K \cap \mathrm{Mod}(\psi) \in U\}$, una contradicción. Tenemos entonces que $M \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in W$, por lo tanto, como $F(M, W) \in \bigcap\{\mathrm{Mod}(\psi) / M \cap \mathrm{Mod}(\psi) \in W\}$, $F(M, W) \in \mathrm{Mod}(\varphi)$, ie. $F(M, W) \models \varphi$.

Analogamente se prueba que $F(M, W) \models \varphi$ implica $F(K, U) \models \varphi$.

Supongamos que $F(K, U) \equiv F(M, W)$, entonces, para todo $\varphi \in L^\tau, F(K, U) \in \mathrm{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow F(M, W) \in \mathrm{Mod}(\varphi)$.

Probaremos que $(K, U) \equiv (M, W)$. Sea $\varphi \in L^\tau$ tal que $(K, U) \Vdash \varphi$, ie. $K \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in U$, entonces, $F(K, U) \in \mathrm{Mod}(\varphi)$ pues, por construcción, $F(K, U) \in \bigcap\{\mathrm{Mod}(\psi) / K \cap \mathrm{Mod}(\psi) \in U\}$, luego, $F(M, W) \in \mathrm{Mod}(\varphi)$, de ahí $M \cap \mathrm{Mod}(\varphi) \in W$ pues si no tendríamos que $M \cap \mathrm{Mod}(\neg\varphi) \in W$, y como $F(M, W) \in \bigcap\{\mathrm{Mod}(\psi) / M \cap \mathrm{Mod}(\psi) \in W\}$, tendríamos que $F(M, W) \in \mathrm{Mod}(\neg\varphi)$, una contradicción. Por lo tanto, $(M, W) \Vdash \varphi$.

Analogamente se prueba que $(M, W) \Vdash \varphi$ implica $(K, U) \Vdash \varphi$ ∎

PROPOSICIÓN 10. Para cualquier lógica L y cualquier tipo τ tenemos: para ser St^τ compacto es necesario y suficiente que $CSt^\tau/\equiv$ sea homeomorfo a $St^\tau/\equiv$.

DEMOSTRACIÓN.

SUFICIENCIA. Si $CSt^\tau/\equiv$ es homeomorfo a $St^\tau/\equiv$, entonces $St^\tau/\equiv$ es compacto, luego, como la proyección $\pi : St^\tau \longrightarrow St^\tau/\equiv$ es un q-homeomorfismo, también es compacto St^τ.

NECESIDAD. Supongamos St^τ compacto, y consideremos el retracto $F : CSt^\tau \longrightarrow St^\tau$ y la proyección $\pi : St^\tau \longrightarrow St^\tau/\equiv$.

F induce la aplicación $F' : CSt^\tau/\equiv \longrightarrow St^\tau/\equiv$ dada por $F'([K,U]) = \pi(F(K,U))$, donde $[K,U]$ denota la clase de equivalencia de (K,U) en CSt^τ).

Es fácil ver que F' está bien definida pues, por el lema anterior, $(K,U) \equiv (M,W) \Rightarrow F(K,U) \equiv F(M,W)$. Por otro lado, la otra implicación dada por el lema, ie. $F(K,U) \equiv F(M,W) \Rightarrow (K,U) \equiv (M,W)$, garantiza que F' es inyectiva. Por lo tanto, F' es una biyección ya que es obviamente sobreyectiva.

AFIRMACIÓN. F' es continua y abierta.

En realidad probaremos que F' es s-continua y s-abierta. Para esto tenemos que explicitar las bases de $CSt^\tau/\equiv$ y $St^\tau/\equiv$ respectivamente.

Consideremos las proyecciones canónicas $\pi_1 : St^\tau \longrightarrow St^\tau/\equiv$ y $\pi_2 : CSt^\tau \longrightarrow CSt^\tau/\equiv$; como ellas son q-homeomorfismos, es fácil de verificar que las colecciones $\{\pi_1[\mathrm{Mod}(\varphi)]/\varphi \in L^\tau\}$ y $\{\pi_2[\mathrm{Mod}^*(\varphi)]/\varphi \in L^\tau\}$ son bases (de clopens) de $St^\tau/\equiv$ y $CSt^\tau/\equiv$ respectivamente.

A partir de ahí es de rutina demostrar que para todo $\varphi \in L^\tau$,

$$(F')^{-1}[\pi_1[\mathrm{Mod}(\varphi)]] = \pi_2[\mathrm{Mod}^*(\varphi)]$$

y

$$(F')[\pi_2[\mathrm{Mod}^*(\varphi)]] = \pi_1[\mathrm{Mod}(\varphi)]$$

(siendo ambas equivalentes por ser F' una biyección). Ésto termina la demostración ∎

AGRADECIMIENTO. Agradezco a A. M. Sette, mi orientador de doctorado, y a X. Caicedo, por el entusiasmo e invalorable estímulo ofrecidos durante el desarrollo de estos tópicos. La idea del estudio del completamiento, y subsecuente compactificación, de una lógica abstracta surgió en el seminario dado por Caicedo en UNICAMP durante su estadía como Profesor Visitante en 1989.

REFERENCIAS

[B-S] Bell, J. L. y Slomson, A. B., **"Models and Ultraproducts: An Introduction"**. North-Holland Pub. Comp. Amsterdam, 1969.

[Ca] Caicedo, X., **"Compactness and Normality in Abstract Logics"**. Ann. of Pure and App. Logic 59 (1993) 33 - 43.

[C] Cifuentes, J. C., **"O Método dos Isomorfismos Parciais. Um Estudo da Expressabilidade Matemática"**. Coleção CLE, UNICAMP, São Paulo, 1992.

[E] Ebbinghaus, H. D., **"Extended Logics: The General Framework"**. In: Model - Theoretic Logics (Barwise - Feferman Eds.). Springer - Verlag, New York (1985) 25 - 76.

[F-M-S] Frayne, T., Morel, A. C. y Scott, D. S., **"Reduced Direct Products"**. Fund. Math. 51 (1962) 195 - 228.

[K] Kelley, J. L., **"General Topology"**. D. Van Nostrand Comp. Princeton, 1955.

[M-S-C] Mundici, D., Sette, A. M. y Cifuentes, J. C., **"Cauchy Completeness in Elementary Logic"**. The Journal of Symbolic Logic, a aparecer.