

R 2788

**COMPLEMENTO E COMPACTIFICAÇÃO DE
ESPAÇOS ZERO-DIMENSIONAIS**

J. C. Cifuentes

Novembro

RP 53/92

RT-IMECC
IM/4082

Relatório de Pesquisa

**Instituto de Matemática
Estatística e Ciência da Computação**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Campinas - São Paulo - Brasil**

ABSTRACT – In this paper we give a characterization of compact topological spaces, in special, of compact zero-dimensional spaces (Theorems 1 and 2), in terms of ultrafilter convergence (Definition 1). Motivated by this characterization, we introduce a general method of compactification, which, in the zero-dimensional case, preserves zero-dimensionality. Since those spaces are uniformizable, the method also yields the respective Cauchy completion. In the general case this compactification can be interpreted as “completion” with respect to the ultrafilter convergence. We also prove that the continuous functions with values in compact zero-dimensional spaces possess an extension property w. r. t. the mentioned compactification.

IMECC – UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081 Campinas SP
Brasil

O conteúdo do presente Relatório de Pesquisa é de única responsabilidade do autor.

Novembro – 1992

The author is a PhD student having Prof. A. M. Sette as advisor.

COMPLETAMENTO E COMPACTIFICAÇÃO DE ESPAÇOS ZERO-DIMENSIONAIS

J. C. Cifuentes

Dedicada à $\Delta\omega\nu\eta$, deusa de Olinda, filha do Céu e da Terra, Urano e Géia, e mãe de Afrodite, sob cuja inspiração foi realizada esta pesquisa.

Abstract. In this paper we give a characterization of compact topological spaces, in special, of compact zero-dimensional spaces (Theorems 1 and 2), in terms of ultrafilter convergence (Definition 1). Motivated by this characterization, we introduce a general method of compactification, which, in the zero-dimensional case, preserves zero-dimensionality. Since those spaces are uniformizable, the method also yields the respective Cauchy completion. In the general case this compactification can be interpreted as "completion" with respect to the ultrafilter convergence. We also prove that the continuous functions with values in compact zero-dimensional spaces possess an extension property w. r. t. the mentioned compactification.

Um espaço zero-dimensional (z-d) X é um espaço topológico que admite uma base de clopens (ie. abertos-fechados). É claro que a coleção de todos os clopens de um espaço z-d é uma base do espaço que é fechada para interseções finitas e complementares. No que segue suporemos que $\mathcal{B}$ é uma base de clopens de X fechada para interseções finitas e complementares (neste caso obviamente $\mathcal{B}$ contém X e o vazio $\emptyset$).

A topologia de um espaço z-d admite uma estrutura uniforme que a gera dada pela seguinte sub-base de uniformidade: $\{\mathcal{U}_V / V \in \mathcal{B}\}$, onde $\mathcal{U}_V = \{(x, y) \in X \times X / x \in V \Leftrightarrow y \in V\}$. Em particular, para cada $V \in \mathcal{B}$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U}_W \circ \mathcal{U}_W \subseteq \mathcal{U}_V$. Esta sub-base tem a seguinte propriedade, a que, além de garantir que a topologia do espaço é gerada por essa uniformidade, mostra que o espaço uniforme resultante é totalmente limitado: para todo $x \in X$ e todo $V \in \mathcal{B}$,

$$\mathcal{U}_V[x] = \{y \in X / (x, y) \in \mathcal{U}_V\} = \begin{cases} V & , \text{ se } x \in V \\ V^c & , \text{ se } x \notin V. \end{cases}$$

Para este tipo de espaços uniformes, então, ser completo, no sentido de que toda rede de Cauchy converge, é equivalente a ser compacto.

Esta nota tem duas partes: a primeira dá uma caracterização dos espaços z-d compactos em termos da convergência em ultrafiltros, e a segunda introduz um método de compactificação geral que no caso dos espaços z-d preserva a zero-dimensionalidade e fornece o completamento respectivo. Neste caso podemos demonstrar um teorema de extensão para certas funções contínuas (ver Teorema 8).

São exemplos de destaque de espaços z-d os seguintes: os racionais $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida pela topologia da reta, o espaço de ordens de um corpo real com a topologia de Harrison, e os espaços vetoriais topológicos não-arquimedianos, entre outros.

Definições. Seja X um espaço z-d:

1. Seja $(x_i)_{i \in I}$ uma família em X e U um ultrafiltro sobre I ; define-se $\lim_U x_i$ como o conjunto dos $x \in X$ tais que para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $A \in U$ tal que para todo $i \in A$, $(x, x_i) \in \mathcal{U}_V$, ou equivalentemente, se para todo $V \in \mathcal{B}$, $\{i \in I / (x, x_i) \in \mathcal{U}_V\} \in U$. (Esta definição é equivalente, para espaços z-d, à usual de convergência em ultrafiltros (ou U -convergência) num espaço topológico qualquer: $x \in \lim_U x_i$ se e só se para todo $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$, $\{i \in I / x_i \in V\} \in U$).
2. Seja $(D, \leq)$ um conjunto dirigido; uma rede em X é qualquer família $(x_i)_{i \in D}$ de elementos de X .
3. Uma rede $(x_i)_{i \in D}$ é dita de Cauchy se para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $k \in D$ tal que para todo $i, j \geq k$, $(x_i, x_j) \in \mathcal{U}_V$.
4. Seja $(x_i)_{i \in D}$ uma rede em X ; define-se $\lim_i x_i$ como o conjunto dos $x \in X$ tais que para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k$, $(x, x_i) \in \mathcal{U}_V$.
5. Um ultrafiltro U sobre um conjunto dirigido D é chamado de livre se contém todos os subconjuntos $A_k = \{i \in D / i \geq k\}$, $k \in D$. (A noção de ultrafiltro livre sobre um conjunto dirigido generaliza a de ultrafiltro não-principal sobre os naturais $\mathbb{N}$; observa-se que $\{A_k\}_{k \in D}$ tem a Propriedade de Interseção Finita (PIF)).

Lema. Seja $(x_i)_{i \in D}$ uma rede de Cauchy em X e U um ultrafiltro livre sobre D , então, $\lim_U x_i = \lim_i x_i$ (e, em consequência, $\lim_U x_i$ independe do ultrafiltro U).

Demonstração.

a) Seja $x \in \lim_i x_i$ e seja $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$; temos que existe $k \in D$ tal que para todo $i \geq k$, $(x, x_i) \in \mathcal{U}_V$, ie. $x_i \in \mathcal{U}[x] = V$, logo $A_k = \{i \in D / i \geq k\} \subseteq \{i \in D / x_i \in V\}$, portanto, como U é livre temos que $\{i \in D / x_i \in V\} \in U$, ie. $x \in \lim_U x_i$.

b) Seja $x \in \lim_U x_i$, então, para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $A_V \in U$ tal que para $i \in A_V$, $(x, x_i) \in \mathcal{U}_V$, mas como $(x_i)_{i \in D}$ é de Cauchy, para todo $V \in \mathcal{B}$ existe $k_V \in D$ tal que para $i, j \geq k_V$, $(x_i, x_j) \in \mathcal{U}_V$.

Seja $V \in \mathcal{B}$ e consideremos $W \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U}_W \circ \mathcal{U}_W \subseteq \mathcal{U}_V$, então existem A_W e k_W como acima, logo, como U é livre, $Z = A_W \cap A_{k_W} \in U$ (em particular, $Z \neq \emptyset$).

Seja $k \in Z$ qualquer, então se $i \geq k$, temos que: como $k \in A_W$, $(x, x_k) \in \mathcal{U}_W$, mas como $i, k \geq k_W$, $(x_k, x_i) \in \mathcal{U}_W$, ie. $(x, x_i) \in \mathcal{U}_W \circ \mathcal{U}_W \subseteq \mathcal{U}_V$, logo, $x \in \lim_i x_i$ ■

Teorema 1. São equivalentes (para espaços z-d):

i) Para toda família $(x_i)_{i \in I}$ e todo ultrafiltro U sobre I , $\lim_U x_i \neq \emptyset$, e se $x \in \lim_U x_i$ temos que para todo $V \in \mathcal{B}$:

$$x \in V \Leftrightarrow \{i \in I / x_i \in V\} \in U.$$

ii) Para toda rede de Cauchy $(x_i)_{i \in D}$ e todo ultrafiltro livre U sobre D , $\lim_i x_i \neq \emptyset$, e se $x \in \lim_i x_i$ temos que para todo $V \in \mathcal{B}$:

$$x \in V \Leftrightarrow \{i \in D / x_i \in V\} \in U.$$

iii) O espaço X é completo.

iv) O espaço X é compacto.

Demonstração.

(i $\Rightarrow$ ii): É consequência imediata do Lema.

(ii $\Rightarrow$ iii): Por (ii) toda rede de Cauchy $(x_i)_{i \in D}$ converge a todo $x \in \lim_i x_i$.

(iii $\Rightarrow$ iv): É imediato por ser X um espaço uniforme totalmente limitado.

(iv $\Rightarrow$ i): Suponhamos que para todo $x \in X$ existe $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x$ e $\{i \in I / x_i \in V_x\} \notin U$. Obviamente, $\{V_x\}_{x \in X}$ é um cobrimento aberto de X , logo, como X é compacto, existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que $\{V_{x_k}\}$ é ainda um cobrimento de X .

Afirmção. $\{i \in I / x_i \in V_{x_1}\} \cup \dots \cup \{i \in I / x_i \in V_{x_n}\} = I$.

Com efeito, dado $i \in I$, $x_i \in X = \bigcup_{k=1}^n V_{x_k}$, então existe $k = 1, \dots, n$ tal que $x_i \in V_{x_k}$,

ie. $i \in \{i \in I / x_i \in V_{x_k}\}$.

Portanto, como $I \in U$ e U é maximal, existe $k = 1, \dots, n$ tal que $\{i \in I / x_i \in V_{x_k}\} \in U$, uma contradição. Logo, $\lim_U x_i \neq \emptyset$.

Seja $x \in \lim_U x_i$ e $V \in \mathcal{B}$. Se $x \in V$, então, por definição $\{i \in I / x_i \in V\} \in U$. Se $x \notin V$, então $x \in V^c \in \mathcal{B}$, logo, por definição, $\{i \in I / x_i \in V^c\} \in U$, ie.

$$\{i \in I / x_i \in V\} \notin U \blacksquare$$

A seguir damos um teorema de caracterização da compacidade de um espaço topológico qualquer em termos da U -convergência. Ele será a motivação para o método de compactificação seguinte.

Teorema 2. Seja X um espaço topológico qualquer, então são equivalentes:

- i) O espaço X é compacto.
- ii) Para toda família $(x_i)_{i \in I}$ e todo ultrafiltro U sobre I , $\lim_U x_i \neq \emptyset$.
- iii) Para toda rede $(x_i)_{i \in D}$ e todo ultrafiltro U livre sobre D , $\lim_U x_i \neq \emptyset$.

Demonstração.

(i $\Rightarrow$ ii): Está contida na prova (iv $\Rightarrow$ i) do Teorema 1.

(ii $\Rightarrow$ iii): Óbvio.

(iii $\Rightarrow$ i): Seja $\{F_j\}_{j \in J}$ uma família de fechados de X com a PIF. Seja $K = \mathcal{P}_\omega(J)$ a coleção de subconjuntos finitos de J , e para cada $\Delta \in K$ seja $x_\Delta \in \bigcap_{j \in \Delta} F_j$. Consideremos

a família $(x_\Delta)_{\Delta \in K}$; esta família é uma rede com a ordem natural dada pela inclusão.

Para cada $\Delta \in K$, seja $A_\Delta = \{\Delta' \in K / \Delta \subseteq \Delta'\}$ (ver Definições, parte 5), então $\{A_\Delta\}_{\Delta \in K}$ tem a PIF. Seja U um ultrafiltro sobre K tal que $\{A_\Delta\}_{\Delta \in K} \subseteq U$; então U é livre e, por hipótese, existe $x \in \lim_U x_\Delta$.

Afirmção. $x \in \bigcap_{j \in J} F_j$.

Com efeito, seja $j \in J$ e suponhamos que $x \notin F_j$, então $x \in F_j^c$ que é aberto, logo, existe $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$ e $V \cap F_j = \emptyset$. Mas como $x \in \lim_U x_\Delta$, para aquele V , $\{\Delta \in K / x_\Delta \in V\} \in U$; além disso, $A_{\{j\}} \in U$, em particular, $\{\Delta \in K / x_\Delta \in V\} \cap A_{\{j\}} \neq \emptyset$, i.e. existe $\Delta \in K$ com $j \in \Delta$ tal que $x_\Delta \in V$. Por outro lado, $x_\Delta \in \bigcap_{k \in \Delta} F_k$, em particular, $x_\Delta \in F_j$, i.e. $V \cap F_j \neq \emptyset$, uma contradição $\blacksquare$

O seguinte é um método de compactificação de todo espaço topológico sem nenhuma condição de separação. No caso zero-dimensional, ele preserva a zero-dimensionalidade do espaço.

Seja X um espaço topológico qualquer e $\mathcal{B}$ uma base de X fechada por interseções finitas e contendo X e $\emptyset$ (pode-se considerar a própria topologia gerada por $\mathcal{B}$).

Seja X^* a coleção de todos os pares (K, U) onde $K \subseteq X$ e U é um ultrafiltro sobre K . Definimos sobre X^* a seguinte base: $\mathcal{B}^* = \{V^* / V \in \mathcal{B}\}$ onde $V^* = \{(K, U) \in X^* / K \cap V \in U\}$. Esta base é fechada para interseções finitas e, no caso zero-dimensional,

por complementares, pois, $V^* \cap W^* = (V \cap W)^*$ e $(V^*)^c = (V^c)^*$. Observa-se que a topologia de X^* depende fortemente da base $\mathcal{B}$ considerada em X .

Consideremos a seguinte aplicação injetora $\varphi : X \rightarrow X^*$ dada por $\varphi(x) = (\{x\}, \{\{x\}\})$. Verifica-se facilmente que: (a) $\varphi(x) \in V^* \Leftrightarrow x \in V$, (b) φ é um mergulho de X em X^* pois $V^* \cap \varphi[X] = \varphi[V]$, e (c) $\varphi[X]$ é denso em X^* já que se $(K, U) \in V^*$ existe $x \in K$ tal que $\varphi(x) \in V^*$.

Teorema 3. X^* é compacto.

Demonstração. Seja $\{V_i^{*c}\}_{i \in I}$ uma coleção de fechados básicos com a Propriedade de Interseção Finita (PIF). Temos que provar que $\bigcap_{i \in I} V_i^{*c} \neq \emptyset$.

Afirmção 1. $\{V_i^c\}_{i \in I}$ tem a PIF.

Com efeito, se $i_1, \dots, i_n \in I$, existe $(K, U) \in V_{i_1}^{*c} \cap \dots \cap V_{i_n}^{*c}$, ie. $K \cap (V_{i_1}^c \cap \dots \cap V_{i_n}^c) \in U$, logo, existe $x \in K$ tal que $x \in V_{i_1}^c \cap \dots \cap V_{i_n}^c$.

Seja $M = \bigcup_{i \in I} V_i^c$, então existe um ultrafiltro W sobre M que contém $\{V_i^c\}_{i \in I}$.

Afirmção 2. $(M, W) \in \bigcap_{i \in I} V_i^{*c}$.

Basta observar que para cada $i \in I$, $M \cap V_i^c = V_i^c \in W$ ■

Corolário. Se X é compacto e $\{V_i^{*c}\}_{i \in I}$ é uma família de fechados básicos em X^* , então existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) \in \bigcap_{i \in I} V_i^{*c}$.

Demonstração. $\{V_i^c\}_{i \in I}$ tem a PIF em X , então, como X é compacto, existe $x \in \bigcap_{i \in I} V_i^c$, logo, $\varphi(x) \in \bigcap_{i \in I} V_i^{*c}$. ■

Teorema 4. Seja $(x_i)_{i \in I}$ uma família em X e U um ultrafiltro sobre I (a família pode ser entendida como uma função $x : I \rightarrow X$ tal que para todo $i \in I$, $x(i) = x_i$).

Seja K_x o conjunto imagem da família, ie. $K_x = x[I]$, e $U_x = \{A \subseteq K_x / x^{-1}[A] \in U\}$ (facilmente pode-se provar que U_x é um ultrafiltro sobre K_x).

Então, identificando $x_i \in X$ com $\varphi(x_i) \in X^*$, temos que, em X^* : $(K_x, U_x) \in \lim_U x_i$.

Demonstração. Observando que são equivalentes $x_i \in V$ com $\varphi(x_i) \in V^*$, devemos provar que para todo V^* com $(K_x, U_x) \in V^*$, $\{i \in I / x_i \in V\} \in U$.

Com efeito, se $(K_x, U_x) \in V^*$, então $K_x \cap V \in U_x$, logo, por definição, $x^{-1}[K_x \cap V] \in U$, mas $x^{-1}[K_x \cap V] = \{i \in I / x_i \in V\}$, portanto, $\{i \in I / x_i \in V\} \in U$ ■

Teorema 5. Dado $(K, U) \in X^*$, então $(K, U) \in \lim_U K$ (considerando K como uma família em X cujos elementos estão parametrizados por eles próprios).

Demonstração. Seja V^* com $(K, U) \in V^*$, então, $K \cap V \in U$, mas, $K \cap V = \{z \in K / z \in V\}$, logo, $\{z \in K / z \in V\} \in U$. ■

Observação. X^* é uma compactificação de X em qualquer caso, zero-dimensional ou não. No caso zero-dimensional é também o completamento do espaço uniforme subjacente. No caso arbitrário, X^* pode ser considerado como o completamento de X a respeito da U -convergência, onde toda família de elementos de X U -converge a algum limite em X^* (Teorema 4), e todo ponto de X^* é U -limite de alguma família de elementos de X (Teorema 5). Deve-se observar que se X é Hausdorff, X^* não necessariamente é Hausdorff, e que se X é compacto, em geral X^* não se reduz a X .

A seguir definiremos um funtor $*$ da categoria dos espaços topológicos $\langle X, \mathcal{B} \rangle$ com uma base distinguida na categoria dos espaços compactos também com uma base distinguida. Um morfismo nesta categoria é uma função contínua $f : \langle X, \mathcal{B} \rangle \rightarrow \langle Y, \mathcal{C} \rangle$ que preserva as bases respectivas, i.e. se $W \in \mathcal{C}$, então $f^{-1}[W] \in \mathcal{B}$. Diremos simplesmente que f é s -contínua (strongly continuous).

Define-se $f^* : \langle X^*, \mathcal{B}^* \rangle \rightarrow \langle Y^*, \mathcal{C}^* \rangle$ de modo que o seguinte diagrama comute (sendo φ e ψ as imersões canônicas):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X^* & \xrightarrow{f^*} & Y^* \end{array}$$

se $(K, U) \in X^*$, $f^*(K, U) = (f[K], U_f)$ onde $U_f = \{A \subseteq f[K] / f^{-1}[A] \cap K \in U\}$.

f^* tem as seguintes propriedades: (a) U_f é um ultrafiltro sobre $f[K]$, (b) $f^* \circ \varphi = \psi \circ f$, i.e. $f^*[X] = f$, (c) $(id_X)^* = id_{X^*}$, (d) $U_{g \circ f} = (U_f)_g$, donde $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$.

Teorema 6. f^* é s -contínua.

Demonstração. Seja $W^* = \{(K', U') \in Y^* / K' \cap W \in U'\} \in \mathcal{C}^*$, então $(f^*)^{-1}[W^*] = \{(K, U) \in X^* / f(K, U) \in W^*\} = \{(K, U) \in X^* / (f[K], U_f) \in W^*\} = \{(K, U) \in X^* / f[K] \cap W \in U_f\} = \{(K, U) \in X^* / f^{-1}[f[K] \cap W] \cap K \in U\} = \{(K, U) \in X^* / K \cap f^{-1}[W] \in U\} = (f^{-1}[W])^* \in \mathcal{B}^*$. ■

Terminaremos com os resultados referentes à propriedade de extensão da compactificação construída.

Lema. Se X é um espaço z-d e $(K, U) \in X^*$, então em X :

$$\lim_U K = \bigcap \{V \in \mathcal{B} / K \cap V \in U\}.$$

Demonstração.

- i) se $x \in \lim_U K$, então para todo $V \in \mathcal{B}$ com $x \in V$, $K \cap V \in U$. Suponhamos que existe $W \in \mathcal{B}$ com $K \cap W \in U$ tal que $x \notin W$, neste caso, $x \in W^c \in \mathcal{B}$, logo, $K \cap W^c \in U$, i.e. $K \cap W \notin U$, uma contradição, portanto $x \in \bigcap \{V \in \mathcal{B} / K \cap V \in U\}$.
 ii) suponhamos $x \in \bigcap \{V \in \mathcal{B} / K \cap V \in U\}$ e $x \notin \lim_U K$, então existe $W \in \mathcal{B}$ com $x \in W$ tal que $K \cap W \notin U$, i.e. $K \cap W^c \in U$, logo, como $W^c \in \mathcal{B}$ temos que $x \in W^c$, uma contradição, portanto, $x \in \lim_U K$ ■

Observar que este Lema, no caso X compacto, fornece uma outra demonstração da parte (iv $\Rightarrow$ i) do Teorema 1 já que a família $\{V \in \mathcal{B} / K \cap V \in U\}$ é uma família de fechados com a PIF.

Teorema 7. Se X é um espaço z-d compacto, então existe uma aplicação $g : X^* \rightarrow X$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) g é s -contínua e $g[X] = id_X$ (identificando X com $\varphi[X]$), em particular, X é um retrato de X^* .
 ii) g é aberta.
 iii) para todo $V \in \mathcal{B} : g^{-1}[g[V^*]] = V^*$.
 iv) g é uma aplicação própria, i.e. g é fechada e se $K \subseteq X$ é compacto, então $g^{-1}[K]$ é compacto em X^* .

Demonstração. Seja $(K, U) \in X^*$, então, pelo Teorema 5, $(K, U) \in \lim_U K$, além disso, pelo Lema, existe $x \in X$ tal que $x \in \lim_U K$. Definimos $g(K, U) = x$ (observar que a escolha de x é, em princípio, arbitrária em $\lim_U K$). No caso de $(K, U) = (\{z\}, \{\{z\}\})$ com $z \in X$ temos que $\bigcap \{V \in \mathcal{B} / \{z\} \cap V \in \{\{z\}\}\} = \bigcap \{V \in \mathcal{B} / z \in V\}$, logo, definimos $g(K, U) = z$ satisfazendo a exigência de ter $g[X] = id_X$.

- i) para provar a s -continuidade de g provaremos que para todo $V \in \mathcal{B} : g^{-1}[V] = V^*$.

Se $(K, U) \in g^{-1}[V]$, então $x = g(K, U) \in V$, mas como $x \in \lim_U K$ temos que, para aquele V , $K \cap V \in U$, i.e. $(K, U) \in V^*$.

Se $(K, U) \in V^*$, então, por definição, $x = g(K, U) \in \lim_U K = \bigcap \{W \in \mathcal{B} / K \cap W \in U\}$, em particular, como $K \cap V \in U$ temos que $x \in V$, portanto, $(K, U) \in g^{-1}[V]$.

- ii) de (i) resulta que se $V \in \mathcal{B}$, $g[V^*] = g[g^{-1}[V]] = V$ por ser g (obviamente) sobrejetora. Portanto, g é aberta.

iii) é consequência imediata de (i) e (ii) que para todo $V \in \mathcal{B}$: $g^{-1}[g[V^*]] = g^{-1}[V] = V^*$.

iv) o fato de g ser fechada será provado em duas partes.

a) para todo $V \in \mathcal{B}$, $g[V^{*c}]^c \in \mathcal{B}$: com efeito, provaremos que $g[V^{*c}] = V^c$; da demonstração da parte (i) resulta que $V^* = g^{-1}[V]$, donde $V^{*c} = g^{-1}[V]^c = g^{-1}[V^c]$, logo, $g[V^{*c}] = g[g^{-1}[V^c]] = V^c$ por ser g sobrejetora.

b) $g[\bigcap_{i \in I} V_i^{*c}] = \bigcap_{i \in I} g[V_i^{*c}]$: com efeito, $\bigcap_{i \in I} V_i^{*c} = \bigcap_{i \in I} g^{-1}[V_i^c] = g^{-1}[\bigcap_{i \in I} V_i^c]$, logo, $g[\bigcap_{i \in I} V_i^{*c}] = \bigcap_{i \in I} V_i^c = \bigcap_{i \in I} g[V_i^{*c}]$.

Seja $K \subseteq X$ compacto e suponhamos que $g^{-1}[K] \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i^*$, então, $K = g[g^{-1}[K]] \subseteq g[\bigcup_{i \in I} V_i^*] = \bigcup_{i \in I} g[V_i^*] = \bigcup_{i \in I} V_i$, logo, como é K compacto, existem $i_1, \dots, i_n \in I$ tais que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$, portanto, $g^{-1}[K] \subseteq \bigcup_{k=1}^n g^{-1}[V_{i_k}] = \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}^*$, ie. $g^{-1}[K]$ é compacto ■

Teorema 8. Se $f : X \rightarrow Y$ é s -contínua com Y um espaço z -d compacto, então existe $\tilde{f} : X^* \rightarrow Y$ s -contínua tal que $\tilde{f}|X = f$.

Demonstração. Basta considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & & \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi & & \\ X^* & \xrightarrow{f^*} & Y^* & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Definindo $\tilde{f} = g \circ f^*$ temos que $\tilde{f}$ é s -contínua pelos Teoremas 6 e 7, e que se $x \in X$, $\tilde{f}(x) = g(f^*(x)) = g(f(x)) = f(x)$, ie. $\tilde{f}|X = f$ ■

Nota. Xavier Caicedo (Universidade de Los Andes, Bogotá, Colombia) observou após o término deste trabalho que o Teorema 7 pode ser reformulado para espaços compactos regulares (observe que todo espaço z -d é regular). Nesse caso pode-se provar apenas que a aplicação g aí construída é contínua. Para isso, basta construir a base da topologia de X^* a partir da topologia total τ de X (não apenas de uma base) e observar que o lema prévio adquire a seguinte forma: $\lim_U K = \bigcap \{\overline{V} / V \in \tau \text{ e } K \cap V \in U\}$ (a barra denota o fecho em X). Uma versão adaptada do Teorema de extensão segue para este caso.

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1992

- 01/92 Uniform Approximation the: Non-locally Convex Case — *João B. Prolla.*
- 02/92 Compactificação de $L_{\omega\omega}^{\tau}(Q)$ com τ Finito — *A. M. Sette and J. C. Cifuentes.*
- 03/92 Um Modelo para Aquisição da Especificação — *Cecilia Inés Sosa Arias and Ariadne Carvalho.*
- 04/92 Convergence Estimates for the Wavelet Galerkin Method — *Sônia M. Gomes and Elsa Cortina.*
- 05/92 Optimal Chemotherapy: A Case Study with Drug Resistance, Saturation Effect and Toxicity — *M. I. S. Costa, J. L. Boldrini and R. C. Bassanezi.*
- 06/92 On the Paper “Cauchy Completeness of Elementary Logic” of D. Mundici and A. M. Sette — *J. C. Cifuentes.*
- 07/92 What is the EM Algorithm for Maximum Likelihood Estimation in PET and How to Accelerate it — *Alvaro R. De Pierro.*
- 08/92 Bifurcation from infinity and multiple solutions for an elliptic system — *Raffaele Chiappinelli and Djairo G. de Figueiredo.*
- 09/92 Approximation Processes for Vector-Valued Continuous Functions — *João B. Prolla.*
- 10/92 Aplicação do Método de Fraissé à Compactificação de Lógicas com Quantificadores Co-filtro — *A. M. Sette and J. C. Cifuentes.*
- 11/92 Absolutely Summing Holomorphic Mappings — *Mário C. Matos.*
- 12/92 The Feynman-Dyson Proof of Maxwell Equations and Magnetic Monopoles — *Adolfo A. Jr. and Waldyr A. R. Jr.*
- 13/92 A Generalized Dirac’s Quantization Condition for Phenomenological Non-abelian Magnetic Monopoles — *Adolfo M. Jr. and Waldyr A. R. Jr.*
- 14/92 Multiplicity Results for the 1-Dimensional Generalized p -Laplacian — *Pedro Ubilla.*
- 15/92 Nowhere Vanishing Torsion Closed Curves Always Hide Twice — *Sueli R. Costa. and Maria Del Carmen R. Fuster.*
- 16/92 Uniform Approximation of Continuous Convex-Cone-Valued Functions — *João B. Prolla.*
- 17/92 Monotonically Dominated Operators on Convex Cones — *A. O. Chiacchio, J. B. Prolla, M. L. B. Queiroz and M. S. M. Roversi.*
- 18/92 Testing the Concept of a Photon as an Extended Object in a Variation of Franson’s Experiment — *V. Buonomano, A. J. R. Madureira and L. C. B. Ryff.*
- 19/92 A New Trust Region Algorithm for Boun Constrained Minimization — *Ana Friedlander, José Mario Martínez and Sandra A. Santos.*

- 20/92 A Priori Estimates for Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems Via Hardy-Sobolev Inequalities — *Ph. Clément, D.G. de Figueiredo and E. Mitidieri.*
- 21/92 On the Resolution of Linearly Constrained Convex Minimization Problems — *Ana Friedlander, José Mario Martínez and Sandra A. Santos.*
- 22/92 Convergência no Espectro Real de um Anel — *J. C. Cifuentes.*
- 23/92 Parallel Methods for Large Least Norm Problems — *Alvaro R. De Pierro. and Jose M. Lopes.*
- 24/92 A Generalization of Dirac Non-Linear Electrodynamics, and Spinning Charged Particles — *Waldyr A. Rodrigues Jr., Jayme Vaz Jr. and Erasmo Recami.*
- 25/92 Bifurcation of Certain Singularities of Sliding Vector Fields — *Marco Antonio Teixeira.*
- 26/92 Density of Infimum-Stable Convex Cone — *João B. Prolla.*
- 27/92 An Extended Decomposition Through Formalization in Product Spaces — *Alvaro R. De Pierro.*
- 28/92 Accelerating Iterative Algorithms for Symmetric Linear Complementarity Problems — *Alvaro R. De Pierro and José Marcos López.*
- 29/92 Free Maxwell Equations, Dirac Equation, and Non-Dispersive de Broglie Wave-packets — *Waldyr A. Rodrigues Jr., Jayme Vaz Jr. and Erasmo Recami.*
- 30/92 New Results on the Equivalence of Regularization and Truncated Iteration for Ill-posed Problems — *Reginaldo J. Santos.*
- 31/92 Topological Defects: A Distribution Theory Approach — *Patricio S. Letelier and Anzhong Wang.*
- 32/92 Some Applications of the Generalized Khintchine's Inequality — *Mário C. Matos.*
- 33/92 A Technique for Finding The Center of A Polytope — *Antonio Carlos Moretti.*
- 34/92 On The Convergence of the Column-Updating Method — *José Mario Martínez.*
- 35/92 Post-Linear Formalism For Gravitating Strings: Crossed Straight Strings Collision — *D. V. Gal'tsov, Yu. V. Grats and P. S. Letelier.*
- 36/92 A Simple Model of Life Expectancy With Subjective Parameters — *R. C. Bassanezi and L. C. Barros.*
- 37/92 On the Growth of Caiman Crocodilus Yacare: A Strategy for Optimal Farming — *Alejandro B. Engel and R. C. Bassanezi.*
- 38/92 The Dirac Operator and the Structure of Riemann-Cartan-Weyl Spaces — *Quintino A. G. de Souza and Waldyr A. Rodrigues, Jr.*
- 39/92 On the Nature of the Gravitational Field — *Waldyr A. Rodrigues, Jr. and Quintino A. G. de Souza.*
- 40/92 Spinning Strings and Cosmic Dislocations — *D. V. Gal'tsov and P. S. Letelier.*
- 41/92 Natural Ultrabornological, Non-Complete, Normed Function Spaces — *Antonio Gilioli (edited by Klaus Floret and Chaim S. Höning).*
- 42/92 Parallel and Semi-Parallel Immersions Into Space Forms — *Francesco Mercuri.*

- 43/92 Periodic Motions of Sucker Rod Pumping Systems — *Aloisio Freiria Neves and José Luiz Boldrini.*
- 44/92 Algorithms for Solving Nonlinear Systems of Equations — *José Mario Martínez.*
- 45/92 Spin and Electron Structure — *Matej Pavšič, Erasmo Recami, Waldyr A. Rodrigues Jr. and G. Daniele Maccarrone, Fabio Raciti, Giovanni Salesi.*
- 46/92 The Initial Value Problem For the Boussinesq Equations in a Time-Dependt Domain — *Carlos Conca Rozende and Marko Rojas Medar.*
- 47/92 A New Expansion for Jacobi Function — *E. Capelas de Oliveira.*
- 48/92 On the Equivalence of Convergences of Fuzzy Sets — *Marko Rojas Medar and Heriberto Román Flores.*
- 49/92 Monotonicity and Symmetry of Solutions of Elliptic Systems in General Domains — *Djairo G. de Figueiredo.*
- 50/92 Tendências em Programação Não Linear de Grande Porte — *José Mario Martínez.*
- 51/92 Teoría y Práctica en Optimización Numérica — *José Mario Martínez.*
- 52/92 The Clifford Bundle and the Nature of the Gravitational Field — *Waldyr A. Rodrigues Jr. and Quintino A.G. de Souza.*