UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

GABRIEL ERNANDES SILVA SANTA FÉ

Teoria Transcendente dos Números: Classificação de Mahler

Campinas

2024

Gabriel Ernandes Silva Santa Fé

Teoria Transcendente dos Números: Classificação de Mahler

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov

Coorientadora: Ana Paula de Araújo Chaves

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Gabriel Ernandes Silva Santa Fé e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Sa59t

Santa Fé, Gabriel Ernandes Silva, 1998-
Teoria transcendente dos números : classificação de Mahler / Gabriel Ernandes Silva Santa Fé. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Coorientador: Ana Paula de Araújo Chaves.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Aproximação diofantina. 2. Teoria da aproximação. 3. Classificação de Mahler. 4. Números transcendentes. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Chaves, Ana Paula de Araújo. III. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Transcendental number theory : Mahler's classification
Palavras-chave em inglês:
Diophantine approximation
Approximation theory
Mahler classifications
Transcendental numbers
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Ana Paula de Araújo Chaves [Coorientador]
Roberto Carlos Alvarenga da Silva Júnior
Tiago Jardim da Fonseca
Data de defesa: 29-05-2024
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0000-2855-7343
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/1642529943458244

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de maio de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ANA PAULA DE ARAÚJO CHAVES

Prof(a). Dr(a). ROBERTO CARLOS ALVARENGA DA SILVA JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). TIAGO JARDIM DA FONSECA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Plamen, à minha coorientadora, Ana Paula Chaves, por sempre estar presente para dirimir minhas dúvidas e à banca por prestar seu tempo para ler esta pequena jornada transcendente.

Agradeço também aos meus pais, Ernandes e Rita, por orarem sempre por mim. À minha irmã, Gabriela, por me mostrar que uma pessoa é o suficiente para fazer você se sentir aceito e amado por quem você é.

Aos meus amigos Danilo, Mariana, Ana Maria, Anamaria, Carol e Isabela por mostrarem que o amor, muitas vezes, é um invariante temporal.

Não posso esquecer dos meus colegas e amigos sofredores da UFS, Jeverson e Marília, que sempre estiveram comigo discutindo sobre uma divindade e a possibilidade desta criar uma pedra que nem ela pode levantar.

Guardo um espaço para agradecer aos amigos que fiz aqui em Campinas, ao clube da leitura, além do pessoal do New Goma: Ernane, Terço e Rássius.

No geral, quero agradecer à minha família, e peço licença para adotar a definição de família de Hector Xtravaganza em uma tradução livre: “Sangue não cria família, cria parentes. Família são aqueles com quem compartilhamos bons e maus momentos, e ainda assim os amamos no final. São esses que devemos escolher”.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

“A prova é o ídolo diante do qual o matemático se tortura”

(G.H.Hardy)

Resumo

A gênese da Teoria Transcendente dos Números se deu em 1844, quando J.Liouville mostrou que números algébricos não são "bem aproximados" por números racionais. O trabalho tem como objetivo principal apresentar esta área. Os números transcendentes carregam uma certa curiosidade acerca da distribuição destes na reta e no plano complexo devido aos seus "comportamentos" contraintuitivos em aspectos aritméticos e algébricos. Para um estudo mais específico, o matemático K.Mahler (1903-1988), em 1932, decidiu classificar os números transcendentes em três conjuntos disjuntos: $S-, T-$ e U-números. Para tal classificação, utilizou-se das aproximações diofantinas (em específico a aproximação de números transcendentes por números algébricos). Espera-se ao final do projeto, apresentar alguns resultados desta teoria em torno da classificação de Mahler, que continua em um relativo recente desenvolvimento.
Palavras-chave: Aproximações; Mahler; Classificação; Transcendentes.

Abstract

The genesis of Transcendental Number Theory occurred in 1844, when J.Liouville showed that algebraic numbers are not “well approximated” by rational numbers. The main objective of the work is to present this area. Transcendental numbers carry a certain curiosity about their distribution on the straight line and in the complex plane due to their counterintuitive “behaviors” in arithmetic and algebraic aspects. For a more specific study, the mathematician K.Mahler (1903-1988), in 1932, decided to classify transcendental numbers into three disjoint sets: $S-, T-$ and U-numbers. For this classification, Diophantine approximations were used (in specific, the approximation of transcendental numbers by algebraic numbers). At the end of the project, we intend to present some results of this theory around Mahler’s classification, which continues to be in relatively recent development.

Keywords: Approximations; Mahler; Classification; Transcendental.

Lista de símbolos

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$	Conjunto dos números naturais;
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos;
$\mathbb{Q}_+, \mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+$	Conjunto dos números racionais, inteiros e rais positivos;
$\#\mathcal{A}$	Cardinalidade do conjunto $\mathcal{A}$;
$[x]$	Maior número inteiro menor ou igual ao número real x;
$\lceil x \rceil$	Menor número inteiro maior ou igual ao número real x;
$\{x\}$	Parte decimal do número real x;
(a,b)	Máximo Divisor Comum entre os números inteiros a e b;
$gr(P)$	grau do polinômio P;
$\mathcal{H}(P)$	Altura do polinômio P;
$\log(x)$	Logaritmo do número x na base e;
$\log_h(x)$	Logaritmo do número x na base h.

Sumário

Introdução

Normalmente, estamos com uma visão vinculada à cinco conjuntos de números: Os clássicos naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$), reais ($\mathbb{R}$) e complexos ($\mathbb{C}$). Neste trabalho estaremos, ainda, estudando estes números, mas com a visão voltada para dois conjuntos em específico: O dos números algébricos e o dos transcendentes, com foco neste último.

Faremos o estudo de números transcendentes através de aproximações diofantinas. Mas que conceito de aproximação seria esse? Bem, a gênese da Teoria das Aproximações Diofantinas se deu com o estudo do "quão bem aproximado" um número real ξ pode ser por um número racional, ou, em outras palavras, o quão pequeno podemos tornar o valor $|\xi - p/q|$ onde $p/q \in \mathbb{Q}$? Um dos principais resultados envolvendo tais questões, veremos no Capítulo 2 deste trabalho, através do Teorema de Dirichlet, onde garantimos que, para qualquer número irracional ξ, existem infinitos números racionais p/q onde $|\xi - p/q| < 1/q^2$. No entanto, iremos enunciar este resultado de maneira mais sofisticada, com o intuito de construirmos um teorema de caracterização dos números irracionais.

Ainda no capítulo 2, estudaremos os números de Liouville, definidos como números que admitem uma sequência de infinitos racionais $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $q_n > 1$, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Tais números serão de fundamental importância para muitos outros resultados que veremos ao longo do texto. A concepção de conjunto de números de Liouville advém da contrapositiva de outro grande teorema que veremos, o *Teorema de Liouville*, que nos garante uma desigualdade para números algébricos de grau maior ou igual a dois. Ao final da seção de números de Liouville, encontraremos uma "pérola" em formato de teorema.
Com isso referimo-nos ao resultado publicado em 1962 pelo matemático Paul Erdös, que nos garante a representação de todo número real como a soma de dois números de Liouville (apesar do conjunto formado por estes apresentarem medida de Lebesgue nula).

No capítulo 3, generalizaremos os resultados do capítulo 2 no sentido de aproximarmos números transcendentes por algébricos ao invés de irracionais por racionais. Com as ferramentas utilizadas para demonstrar o resultado generalizado do teorema de Dirichlet, conseguiremos mostrar um teorema de caracterização para números transcendentes! Mais ainda, seremos capazes de classificar os números transcendentes de uma maneira especial, através da construção de funções, $\omega(\xi)$ e $\upsilon(\xi)$, que nos permitirão estudar a classificação de Mahler, datada de 1932. Além desta, apresentaremos também a classificação de Koksma, que, ao final do capítulo, mostraremos que é equivalente à de Mahler.

Mahler dividiu os números transcendentes em 3 conjuntos: os $S-T-, U-$números, que serão classificados da seguinte maneira:

1. Se $0 < \omega(\xi) < \infty$ e $\upsilon(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de S-número;
2. Se $\omega(\xi) = \infty$ e $\upsilon(\xi) < \infty$, então ξ é chamado de U-número;
3. Se $\omega(\xi) = \infty$ e $\upsilon(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de T-número.

Ao longo do capítulo 4 estudaremos propriedades extremamente interessantes de cada uma destas classes, apresentando problemas em aberto, e mostrando a distribuição de cada classe de números no plano complexo. Por exemplo, veremos que o conjunto dos U-números e T-números apresentam medida de lebesgue nula em $\mathbb{C}$, consequentemente o conjuntos dos $S-$números apresenta medida cheia. Mostraremos também que existem $T-$números, porém nenhum número deste tipo fora exibido explícitamente até os dias atuais. Ao final do trabalho, pretendemos mostrar uma belíssima relação direta entre dois números algebricamente dependentes e a classificação de Mahler destes.

1 Preliminares

1.1 Uma breve introdução sobre números algébricos e transcendentes.

Remonta-se há cerca de 300 a.c o começo da fascinação dos matemáticos pelos números. Tal fascinação não advém somente da necessidade do uso dos números em nosso cotidiano, mas também dos seus mistérios e padrões. No presente tópico pretendemos dar uma ideia do quão supreendentes os números podem ser e iremos analisá-los pelo aspecto de dois conjuntos: O conjunto dos números Algébricos, que denotaremos por $\overline{\mathbb{Q}}$, e o conjuntos dos números transcendentes. Vale lembrar que durante o projeto estaremos focados no estudo destes números no âmbito dos números complexos (salvo menção contrária).

Inicialmente iremos apresentar algumas definições com o objetivo de demonstrar um resultado que a princípio pode parecer "inocente", porém nos dá uma grande informação sobre a densidade do conjunto dos números transcendentes no plano complexo. Para isto, comecemos com a seguinte

Definição 1.1. *Um números $\alpha \in \mathbb{C}$ é dito algébrico se este for raíz de algum polinômio não-nulo com coeficientes inteiros, caso contrário é dito transcendente. Denotaremos o conjunto de números algébricos por $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Agora veremos um pouco sobre a densidade de $\overline{\mathbb{Q}}$, e mostraremos que este conjunto apresenta medida de Lebesgue nula em $\mathbb{C}$, o que nos leva a concluir que, de maneira mais intuitiva, "quase todo número é transcendente".

Teorema 1.1. *O conjunto dos números algébricos tem medida de Lebesgue nula.*

Para a demonstração deste teorema, utilizaremos, sem provar, um resultado já bastante conhecido da Análise, dado pelo seguinte

Lema 1.1. *Todo conjunto enumerável em $\mathbb{C}$ tem medida de Lebesgue nula.*

Demonstração do teorema. Diretamente do lema anterior perceba que se provarmos que $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável, o resultado segue. Para isso, consideremos o conjunto R_q definido como o conjunto das raízes de um polinômio $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, onde o grau de $q(x)$ é n, e façamos a seguinte identificação:

$$\begin{aligned} \psi : Z^n[x] &\to \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n \\ q(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 &\mapsto (a_n, \ldots, a_0), \end{aligned}$$

onde $Z^n[x]$ representa o conjunto de polinômios de grau n com coeficientes inteiros. É fácil verificar que ψ é bijetora e, a partir disto, concluir que $\mathbb{Z}[x]$ é enumerável pois será uma união enumerável de polinômios. Além disso, veja que

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x]} R_p.$$

R_p é um conjunto vazio ou finito para cada p e, além disso, a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável. □

Este resultado, além de mostrar que números transcendentes existem, mostra que de certo modo a maior parte da reta real é constituída por eles. Mas ora, se estatisticamente a reta é composta em sua maioria por números transcendentes, devemos encontrá-los com grande facilidade, assim como acontece com os números algébricos, certo? Muito pelo contrário. Apesar de ser contraintuitivo, a procura por números transcendentes é um trabalho árduo e de certa complexidade. Ao longo deste trabalho, iremos estudar o comportamento de alguns tipos específicos destes números.

Em palavras mais informais, ao contrário de números algébricos, que são "bem comportados" em relação a soma e multiplicação, os transcendentes apresentam comportamentos atípicos. Ao longo do texto estudaremos a Classificação de Mahler, que tem como objetivo dividir os números transcendentes em classes que apresentam algumas propriedades interessantes.

O objetivo deste capítulo será fornecer uma base para as notações e definições que utilizaremos durante todo o texto. Inicialmente iremos abordar um pouco do conceito de Frações Contínuas, que serão utilizadas em alguns momentos durante este trabalho.

1.2 Frações Contínuas

O estudo de frações remete-se aos egípcios, mas com o advento do Algoritmo de Euclides, o estudo de frações poderia criar uma nova camada, um maior grau de profundidade na pesquisa de outras áreas. Assim como todo bom matemático se questiona, por que não mexer em algo e torná-lo mais sofisticado? Foi exatamente isso o que fez Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), cientista italiano, quando manipulando uma fração inicial e modificando-a de uma maneira específica obteve

$$\sqrt{18} \approx 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cdots}}.$$

Mas foi apenas através do matemático John Wallis (1616-1703), que esse tipo de fração se tornou um objeto de estudo, dando início assim à teoria das frações contínuas. Ao longo dos anos vários matemáticos debruçaram-se sobre o estudo de tais frações, sendo Srinivasa Ramanujan (1887-1920), matemático indiano, uma das principais figuras desta área que veremos brevemente neste texto.

O foco desta seção será explicar o que são frações contínuas e enunciar alguns dos seus resultados principais que servirão como ferramentas fundamentais ao longo do nosso trabalho. Comecemos com a seguinte definição que fora baseada em (BUGEAUD, 2004).

Definição 1.2. *Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ números inteiros com $a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots$ positivos. Uma fração contínua finita é uma expressão da forma*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Em geral, chamamos qualquer expressão da forma

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots}}} = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

de fração contínua (se o limite existir). Os números $a_1, a_2, \ldots$ são chamados denominadores parciais dessa fração. A fração contínua é dita simples se todos os a_i's, com exceção de a_0, forem inteiros não-negativos.

Nesta seção, estaremos interessados particularmente em números irracionais. Dito isto, consideremos ξ um irracional e defina o inteiro a_0 e o número $\xi_1 > 1$ da seguinte maneira:

$$a_0 = [\xi] \quad \text{e} \quad \xi_1 = \frac{1}{\{\xi\}},$$

onde $[\xi]$ representa a parte inteira de ξ. Assim, temos que $\xi = a_0 + \dfrac{1}{\xi_1}$. Desta forma temos as seguintes sequências:

$$a_n = [\xi_n] \quad \text{e} \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n},$$

onde observamos que $\xi_n = a_n + 1/\xi_{n+1}$. Deste modo, podemos associar ξ com a sequência de inteiros $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pode-se mostrar que $\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ e que todo número real pode ser representado por frações contínuas, porém, é de uma relevante laboriosidade a demonstração deste fato que fora intuido. Para uma demonstração completa, ver (BUGEAUD, 2004).

Com essas observações, a partir de agora faremos referência à representação por fração contínua de um número qualquer de maneira natural. Definiremos a seguir o conceito de convergente, que será de fundamental importância nesta seção e em alguns momentos do texto.

Definição 1.3. *Seja ξ um número irracional escrito em fração contínua na forma*

$$\xi = [a_0; a_1, \dots, a_n, \dots].$$

Chamaremos o racional

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$$

onde $(p_k, q_k) = 1$, de k-ésimo convergente de ξ.

A partir de agora, quando apresentarmos algum teorema envolvendo frações contínuas, p_k/q_k sempre indicará um convergente do número mencionado no enunciado, salvo menção contrária.

A seguir, mostraremos alguns resultados que serão fundamentais ao longo do texto. Comecemos com o seguinte teorema clássico que nos permite “enxergar” algumas propriedades acerca dos convergentes de uma fração contínua:

Teorema 1.2. *Seja ξ um irracional como na definição (1.3) e considerando*

$$p_{-1} = 1,\ \ q_{-1} = 0,\ \ p_0 = a_0 \ \text{e}\ q_0 = 1$$

temos que, para todo inteiro positivo n,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{e} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Demonstração. Iremos proceder por indução. Como $p_1/q_1 = a_0 + 1/a_1 = (a_0a_1 + 1)/a_1$, então, pelas considerações do enunciado, temos que o teorema é válido para $n = 1$. Assuma o resultado válido para um inteiro positivo n e denote por $p'_0/q'_0, \dots, p'_n/q'_n$ os convergentes do número racional $[a_1; a_2, \dots, a_{n+1}]$. Para qualquer inteiro $0 \leqslant j \leqslant n+1$ temos

$$\frac{p_j}{q_j} = [a_0; a_1, \dots, a_j] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_j]} = a_0 + \frac{q'_{j-1}}{p'_{j-1}},$$

Então

$$p_j = a_0 p'_{j-1} + q'_{j-1} \ \text{ e } q_j = p'_{j-1}. \tag{1.1}$$

Segue destas igualdades com $j = n+1$ e aplicando a hipótese de indução ao racional $[a_1; a_2, \dots, a_{n+1}]$ que

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_o(a_{n+1}p'_{n-1} + p'_{n-2}) + a_{n+1}q'_{n-1} + q'_{n-2} \\ &= a_{n+1}(a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}) + a_0(p'_{n-2} + q'_{n-2}) \end{aligned}$$

e

$$q_{n+1} = a_{n+1}p'_{n-1} + p'_{n-2}.$$

Assim, por (1.1), temos que

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \quad \text{e} \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

□

Corolário 1.1. *Para todo inteiro n não-negativo, temos*

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

Demonstração. O resultado segue por indução aplicando diretamente a proposição 1.2. □

Proposição 1.1. *Dadas as convenções do Teorema 1.2, considere n um inteiro positivo e $\xi = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ um número irracional. Temos então*

$$\xi = [a_0; a_1, \dots, a_n, \xi_{n+1}] = \frac{p_n\xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\xi_{n+1} + p_{n-1}},$$

onde $\xi_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$.

Demonstração. Consideremos

$$\xi = [a_0; a_1, \dots, a_n, \xi_{n+1}] = [b_0; b_1, \dots, b_n, b_{n+1}].$$

Assim, $a_i = b_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ e $b_{n+1} = \xi_{n+1}$. Sejam $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)$ e $\left(\frac{p'_j}{q'_j}\right)$ os convergentes de $[a_0; a_1, \dots, a_n, \xi_{n+1}]$ e $[b_0; b_1, \dots, b_n, b_{n+1}]$ respectivamente. Assim,

$$[b_0; b_1, \dots, b_n, b_{n+1}] = \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}}.$$

Mas, pela proposição (1.2)

$$\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} = \frac{b_{n+1}p'_n + p'_{n-1}}{b_{n+1}q'_n + q'_{n-1}},$$

donde $\frac{p'_n}{q'_n} = \frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $b_{n+1} = \xi_n$. Então

$$\xi = [a_0; a_1, \dots, a_n, \xi_{n+1}] = \frac{p_n\xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\xi_{n+1} + p_{n-1}}.$$

□

Corolário 1.2. *Para todo inteiro n não-negativo, vale*

$$q_n\xi - p_n = \frac{(-1)^n}{q_n\xi_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Demonstração. Pela proposição anterior, sabemos que

$$\xi = \frac{p_n\xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\xi_{n+1} + p_{n-1}},$$

então,

$$q_n\xi - p_n = \frac{p_nq_n\xi_{n+1} + p_{n-1}q_n - q_np_n\xi_{n+1} - p_nq_{n-1}}{q_n\xi_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n\xi_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Donde, pelo Corolário 1.1, temos

$$q_n\xi - p_n = \frac{(-1)^n}{q_n\xi_{n+1} + q_{n-1}}.$$

□

A partir dos resultados demonstrados, podemos encontrar uma estimativa para a localização de ξ na reta em relação aos seus convergentes a partir do seguinte

Teorema 1.3. *Para todo número irracional ξ e qualquer inteiro $n \geqslant 0$, temos*

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

Demonstração. Sabemos, pelo corolário (1.2) que

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n(q_n\xi_{n+1} + q_{n+1})}.$$

Perceba que $a_{n+1} < \xi_{n+1} < a_{n+1} + 1$. Assim,

$$\frac{1}{q_n(q_n(a_{n+1}+1) + q_{n-1})} < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n(q_na_{n+1} + q_{n-1})}.$$

Mas, pela proposição (1.2), isto é equivalente a

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

□

Como dito anteriormente, as frações contínuas serão de fundamental importância para demonstrarmos e enunciarmos dois belíssimos resultados que serão apresentados ao longo deste texto, sendo um deles o Teorema de Hurwitz-Markov e outro um resultado recente, vinculado à G.Petruska, de 1992, acerca de números de Liouville, que iremos definir no capítulo a seguir.

2 Aproximação de Irracionais por Racionais

Neste capítulo abordaremos o "quão distante" um número irracional está de um racional. Por distância queremos nos referir ao quão pequeno podemos tornar o valor $|\xi - p/q|$ onde ξ é irracional e $p/q \in \mathbb{Q}$.

Inicialmente estudaremos o *teorema de Liouville* e, a partir deste, voltaremos o foco para um conjunto de grande importância na teoria transcendente, o conjunto dos *números de Liouville.*

Ao final do capítulo, enunciaremos o *teorema de Dirichlet* e mostraremos que, "juntando" as ferramentas que adquirimos ao longo do capítulo, podemos caracterizar os números irracionais de uma maneira bastante elegante.

2.1 O Teorema de Liouville

Teorema 2.1 (Teorema de Liouville)**.** *Seja α um número algébrico irracional com polinômio minimal $P(x)$ de grau $n > 1$. Então, para todo número racional p/q com $q > 0$, existe uma constante $C = C(\alpha)$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C(\alpha)}{q^n}.$$

Demonstração. Inicialmente perceba que se $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1$ os números estão relativamente longe um do outro, e deste modo não teremos muito problema para encontrar um $C(\alpha)$ adequado. De fato, considerando $C(\alpha) = 1$ temos

$$\frac{C(\alpha)}{q^n} = \frac{1}{q^n} \leqslant 1 \leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

O caso interessante ocorre quando consideramos α e $\frac{p}{q}$ relativamente próximos, ou em outras palavras, quando $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$. Para analisarmos este caso perceba que $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ (pois $P(x)$ também será irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ devido ao Lema de Gauss). Deste modo teremos $P\left(\frac{p}{q}\right)$ da forma $\frac{K}{q^n}$ onde $K \in \mathbb{Z}^*$. Daí segue que $\left|q^n P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant 1.$

Como $P(\alpha) = 0$,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right|.$$

Além disso, como $P(x)$ é um polinômio (e portanto uma função contínua), segue do teorema do valor intermediário que existe um elemento $\theta \in \mathbb{R}$ entre α e $\frac{p}{q}$ tal que

$$\left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |P'(\theta)|,$$

Assim,

$$|q^n P'(\theta)| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1.$$

Deste modo, essa relação começa a ter uma familiaridade com a relação que queremos encontrar, pois

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{P'(\theta)^{-1}}{q^n}.$$

Nos falta agora mostrar que de fato a constante depende de α. Para isso perceba que $\theta \in [1-\alpha, 1+\alpha]$, e novamente pela continuidade de $P(x)$, o máximo da função polinomial será atingido nesse intervalo, digamos que esse valor seja M. Podemos então definir $C(\alpha)$ como sendo min $\{M^{-1}, 1\}$. □

A partir deste teorema uma questão natural surge: E se o grau do polinômio minimal de α for 1? Isto é, e se α for racional? Responderemos esta pergunta através do seguinte

Teorema 2.2 (Teorema de Liouville para racionais)**.** *Dado um número racional α, existe uma constante $C = C(\alpha)$ onde, para todo racional p/q com $p/q \neq \alpha$, temos*

$$|q\alpha - p| \geqslant C$$

Demonstração. Vamos escrever $\alpha = \frac{r}{s}$ onde $s > 0$. Perceba que

$$|q\alpha - p| = \frac{|rq - ps|}{s}.$$

Mas como $\alpha \neq \frac{p}{q}$, $|rq - ps| \geqslant 1$ e $rq - ps \in \mathbb{Z}^*$, concluímos

$$|q\alpha - p| \geqslant \frac{1}{s} := C(\alpha)$$

□

O que este teorema nos mostra é que não podemos aproximar muito bem racionais a partir de outros racionais. Mais a frente veremos números que podem ser muito bem aproximados a partir de sequências de números racionais.

A partir do seu teorema, Liouville mostrou não só que os números algébricos não podem ser muito bem aproximados por racionais, mas também nos forneceu uma ferramenta para verificar se um número é transcendente. Ora, observando bem a contrapositiva do teorema, chegamos nos seguintes teoremas:

Teorema 2.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponha que para cada número real positivo c e cada inteiro positivo d, existe racional p/q tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{c}{q^d},$$

então α é transcendente.

Teorema 2.4 (Ferramenta para transcendência)**.** *seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e suponha que exista uma sequência de infinitos racionais (P_n/q_n) satisfazendo a desigualdade*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q^n},$$

então α é transcendente.

2.2 Números de Liouville

Uma vez mostrada e existência de números transcendentes, a construção e a exibição destes se tornou, naturalmente, uma questão de grande interesse na comunidade matemática, até que, em 1844, Liouville encontrou o primeiro número transcendente que se tem registro. Para tal, ele utilizou-se do seu teorema mostrando assim que o número

$$\mathcal{L} = \sum_{n \geqslant 1} 10^{-n!} = 0,110001000000000000000001...$$

é transcendente.

Agora provarmos que este número é de fato transcendente, através da contrapositiva do Teorema de Liouville.

Corolário 2.1. $\mathcal{L} = \sum_{n \geqslant 1} 10^{-n!}$ *é um número transcendente.*

Demonstração. Vamos assumir que $\mathcal{L}$ é um algébrico de grau $d > 1$ (pois como os gaps entre os zeros na expansão de $\mathcal{L}$ crescem fatorialmente, $\mathcal{L}$ não pode ser racional). Agora apliquemos o Teorema de Liouville para $\mathcal{L}$. Assim, para todo p/q racional com $q > 0$ existe constante $C(\mathcal{L})$ tal que

$$\left|\mathcal{L} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C(\mathcal{L})}{q^d}. \tag{2.1}$$

Agora defina $q_n := 10^{(n-1)!}$ e $p_n := q_n(10^{-1!} + \cdots + 10^{-(n-1)!})$. Assim teremos

$$\left|\mathcal{L} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{m \geqslant n} 10^{-m!} = 10^{-n!} \sum_{m \geqslant n} 10^{-m!+n!} = 10^{-n!} \left(1 + \sum_{m > n} 10^{-m!+n!}\right) \leqslant 2 \cdot 10^{-n!} = \frac{2}{q_n^n}$$

Portanto, para tais $\dfrac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$, obtemos a desigualdade

$$\left|\mathcal{L} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{2}{q_n^n}$$

para todo $n \geqslant 2$. Mas, por (2.2) temos

$$\frac{C(\mathcal{L})}{q^d} \leqslant \left|\mathcal{L} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{2}{q_n^n}.$$

Portanto,

$$\frac{C(\mathcal{L})}{q_n^d} \leqslant \frac{2}{q_n^n} \Rightarrow q_n^{n-d} \leqslant \frac{2}{C(\mathcal{L})}$$

Ou seja, a sequência $a_n = q_n^{n-d} = 10^{(n-1)!(n-d)}$, com d constante, é limitada, o que é um absurdo. Concluímos daí que $\mathcal{L}$ também não pode ser um algébrico de grau maior ou igual a 2, logo $\mathcal{L}$ é transcendente.

□

A partir do seu teorema, Liouville mostrou não só que os números algébricos não podem ser muito bem aproximados por racionais, mas também nos forneceu uma ferramenta para verificar se um número é transcendente. Ora, observemos bem a contrapositiva do teorema e vamos remanejar as palavras de tal forma que chegamos na seguinte definição dada para a caracterização dos números de Liouville.

Definição 2.1. *Um número $\xi \in \mathbb{R}$ é dito* número de Liouville *se existe uma sequência de infinitos racionais p_n/q_n, com $q_n > 1$, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}. \tag{2.2}$$

Denotaremos o conjunto de números de Liouville por $\mathbb{L}$.

Veremos adiante que todo número de Liouville é transcendente.

Proposição 2.1. *A sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida acima, é ilimitada.*

Demonstração. Suponha por absurdo. Como q_n é um número inteiro, teremos finitas possibilidades para q_n, e pela definição

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < 1 \Rightarrow |q_n\xi - p_n| < q_n.$$

Como $|p_n| - |q_n\xi| \leqslant |q_n\xi - p_n|$, segue que

$$|p_n| \leqslant q_n(1 + |\xi|) < M$$

pois $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e o ξ está fixo. Logo a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada, então teremos finitas possibilidades para $\dfrac{p_n}{q_n}$, o que contradiz a definição.

□

Proposição 2.2. *Todo número da forma*

$$\xi = \sum_{n \geqslant 1} a_n k^{-n!},$$

com $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ *e* $a_n \in \{1, \cdots, k-1\}$*, é um número de Liouville.*

Demonstração. Devemos mostrar que existe uma sequência de racionais que satisfaça (2.2). Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ os seguintes inteiros, $q_n := k^{n!} > 1$ e $p_n := q_n(a_1 k^{-1!} + \cdots a_n k^{-n!})$, para obter

$$\begin{aligned}
\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \sum_{m \geqslant n+1} a_m k^{-m!} \\
&\leqslant (k-1) \sum_{m \geqslant n+1} k^{-m!} \\
&< (k-1) \sum_{m \geqslant (n+1)!} k^{-m} \\
&< (k-1) \frac{k^{-(n+1)!+1}}{k-1} \\
&< \frac{1}{k^{(n+1)!-1}} \\
&< \frac{1}{k^{n.n!}} \\
&< \frac{1}{q_n^n}
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que ξ é de Liouville. □

Proposição 2.3. *Todos os números de Liouville são transcendentes.*

Demonstração. Se $\xi \in \mathbb{L}$, ξ é irracional. Suponhamos que ξ é um número algébrico de grau $k \geqslant 2$. Assim, pelo Teorema de Liouville, existe uma constante $C(\xi)$ tal que

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \geqslant \frac{C(\xi)}{q_n^k}.$$

Por outro lado, como ξ é um número de Liouville, teremos que para um k fixado

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n} \Rightarrow \frac{1}{q_n^n} \geqslant \frac{c(\xi)}{q_n^k} \Rightarrow q_n^{n-k} \leqslant \frac{1}{C(\xi)} \tag{2.3}$$

Agora, pela Proposição 2.1, a sequência $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não está limitada, isto implica que a sequência $(q_n^{n-k})_{n \in \mathbb{N}}$ também não está limitada, portanto, não pode ser majorada por uma constante. O que contradiz (2.3). Concluímos que ξ não pode ser algébrico de grau $k \geqslant 2$, logo ξ é transcendente. □

2.2.1 Alguns resultados

Uma pergunta natural após um primeiro contato com os números de Liouville é se todos os números transcendentes são de Liouville. Nesta seção mostraremos que a resposta desta pergunta é negativa, e, mais ainda, que quase todos os números transcendentes entre 0 e 1 não são de Liouville dada a enumerabilidade de $\mathbb{L}$, como podemos ver no seguinte

Teorema 2.5. *O conjunto dos números de Liouville em* $(0,1)$ *tem medida (de Lebesgue) nula.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, basta mostrarmos que a medida (de Lebesgue) do conjunto dos números de Liouville em $[0,1]$, que denotaremos por $\mu(\mathbb{L})$, é menor que ϵ. Afirmamos que para tal ϵ dado, existe um inteiro positivo n tal que $\sum_{b=2}^{\infty} 4/(b^{n-1}) < \epsilon$. Com efeito, considere a sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ onde $a_k = \sum_{b=2}^{\infty} 4/(b^{k-1}) > 0$. Então

$$0 < a_k = \sum_{b=2}^{\infty} \frac{4}{b^{k-1}} \leqslant 4\sum_{b=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-3}b^2} = \frac{4}{2^{k-3}}\sum_{b=2}^{\infty}\frac{1}{b^2} = \frac{4}{2^{k-3}}\cdot\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Assim, pelo teorema do Confronto, $a_k \to 0$ e temos o desejado. Agora, se ξ é um número de Liouville, então existem inteiros a e b, com $b > 1$, tais que

$$|\xi - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^n}. \tag{2.4}$$

Como o lado direito da desigualdade é menor ou igual a $1/2$ e $\xi \in (0,1)$, então $-1/2 < a/b < 3/2$, segue que $a \in (-b/2, 3b/2)$. Daí, temos que a é um inteiro em um intervalo aberto de comprimento $2b$, logo, existem no máximo $2b$ valores para a que satisfazem (2.4). Denotaremos a quantidade de possíveis valores para a por C_b. Portanto, se $\xi \in (0,1)$ é um número de Liouville que satisfaz (2.4), então

$$\xi \in \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b^n}, \frac{a}{b} + \frac{1}{b^n}\right),$$

isto é, ξ deve pertencer a um dos C_b intervalos de comprimento $2/b^n$ para algum inteiro positivo $b > 1$. Assim, considerando todos os possíveis valores de b e pelo observado anteriormente, temos que

$$\mu(\mathbb{L}) \leqslant \sum_{b=2}^{\infty} C_b\frac{2}{b^n} \leqslant \sum_{b=2}^{\infty} 2b\frac{2}{b^n} = \sum_{b=2}^{\infty}\frac{4}{b^{n-1}} < \epsilon,$$

onde a ultima desigualdade segue da afirmação. Portanto, conseguimos provar o resultado. □

Corolário 2.2. *Existem números transcendentes que não são de Liouville.*

Demonstração. Podemos particionar o intervalo $[0,1]$ em três conjuntos disjuntos: $\overline{\mathbb{Q}}$ = Números algébricos; $\mathbb{L}$ = Números de Liouville; $\mathbb{T}$ = Números Trascendentes que não são de Liouville. Sabemos que a medida de Lebesgue (aqui representada por μ) dos números algébricos é nula, $\mu(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$, e pelo resultado anterior $\mu(\mathbb{L}) = 0$. Portanto $\mu(\mathbb{T}) = 1$, e com isso $\mathbb{T} \neq \varnothing$. Mais ainda, concluímos que *quase* todos os números transcendentes em $[0,1]$ não são de Liouville. □

Baseados nos resultados anteriores, a seguinte proposição pode parecer contraintuitiva.

Proposição 2.4. *Os números de Liouville são não enumeráveis.*

Demonstração. Dado $b \in \mathbb{N}$, defina

$$\mathcal{L}_b = \{\sum_{k\geqslant 1} a_k b^{-k!};\ a_k \in \{1, \ldots, b-1\}\}.$$

Pela Proposição 2.2, $\mathcal{L}_b \subseteq \mathbb{L}$.
Suponha $\mathcal{L}_b$ enumerável, e seja,

$$\mathcal{L}_b = \{\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots\}, \quad \xi_j = \sum_{k\geqslant 1} a_{jk} b^{-k!}.$$

Onde $(a_{jk})_{j\in\mathbb{N}}$ são subsequências de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Definimos agora o número de Liouville

$$\xi' = \sum_{k\geqslant 1} \alpha_k b^{-k!} \text{ tal que } 0 \neq \alpha_k \neq a_{kk}.$$

Pelo argumento da *Diagonal de Cantor*, concluimos que $\xi' \notin \mathcal{L}_b$. Absurdo. Logo, concluimos que $\mathbb{L}$ não é enumerável □

2.2.2 Uma relação nem um pouco intuitiva

Neste tópico abordaremos um resultado "contraintuitivo" advindo de Paul Erdös (1913-1996), onde nos afirma que todo número real pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville (mesmo $\mathbb{L}$ tendo medida de Lebesgue nula!). Para tal resultado, precisaremos de um Lema que envolve a relação entre funções racionais e números de Liouville bem como uma reformulação da Definição (2.1). Primeiramente vamos dar uma definição equivalente à esta:

Definição 2.2. *Um número $\xi \in \mathbb{R}$ é um número de Liouville se existem uma sequência ilimitada $(\omega_k)_{k\geqslant 1}$ de números reais positivos, uma sequência de infinitos racionais $(p_k/q_k)_{k\geqslant 1}$, com $q_k \geqslant 1$, e uma constante positiva M tais que para $k = 1, 2, \ldots$*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < M q_k^{-\omega_k}.$$

Mostraremos agora que a imagem de um número de Liouville por uma função racional não constante com coeficientes racionais também será um número de Liouville.

Teorema 2.6 (E.Maillet, 1906). *Se f é uma função racional não constante com coeficientes racionais, então $f(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$.*

Demonstração. A demonstração deste teorema utilizá-se de alguns "truques" vistos na demonstração do Teorema de Liouville, como por exemplo, o Teorema do valor médio. Sabemos, pela Definição 2.1 que existe uma sequência de infinitos racionais $(a_k/b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $b_k > 1$, tais que $|\xi - a_k/b_k| < b_k^{-k}$. Como $a_k/b_k \to \xi$, então $|a_k|/b_k \to |\xi|$. Daí existe $k_1 \in \mathbb{N}$ onde

$$\frac{|a_k|}{b_k} < c = \lfloor|\xi|\rfloor + 1 \Rightarrow |a_k| < cb_k \tag{2.5}$$

é válido para todo $k \geqslant k_1$. Se escrevermos $f(x) = P(x)/Q(x)$, como $P(x)$ e $Q(x)$ possuem um número finito de raízes, a_k/b_k não é raiz de $P(x)$ ou $Q(x)$ para k suficientemente grande, digamos $k \geqslant k_2$. Seja $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Então, a_k/b_k satisfaz (2.5) e não é raiz de $P(x)$ ou $Q(x)$ para $k \geqslant k_0$. Gostaríamos de encontrar uma sequência de aproximantes de ξ de modo que as condições estabelecidas acima sejam válidas para todo k inteiro positivo. Para isso, consideramos a sequência de racionais $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ onde $p_k = a_{k+k_0}$ e $q_k = b_{k+k_0}$. Note que $q_k \geqslant 1$ e que para todo k natural

$$\left|\xi - \frac{a_{k+k_0}}{b_{k+k_0}}\right| < \frac{1}{b_{k+k_0}^{k+k_0}} \Rightarrow \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{k+k_0}} < \frac{1}{q_k^k}. \tag{2.6}$$

Portanto, $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é a sequência desejada. Como sempre podemos considerar $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, escreveremos

$$f(x) = \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n}{d_0 + d_1 x + \ldots d_m x^m} \tag{2.7}$$

e a imagem dos aproximantes p_k/q_k por f é

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p_k}{q_k}\right) &= \frac{c_0 + c_1\left(\frac{p_k}{q_k}\right) + \ldots + c_n\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^n}{d_0 + d_1\left(\frac{p_k}{q_k}\right) + \ldots + d_m\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^m} \\ &= \frac{c_0 q_k^{n+m} + c_1 q_k^{n+m-1} p_k + \cdots + c_n q_k^m p_k^n}{d_0 q_k^{n+m} + d_1 q_k^{n+m-1} p_k + \cdots + d_m q_k^n p_k^m} := \frac{P_k}{Q_k} \neq 0. \end{aligned}$$

A partir de agora, o índice k será tomado maior do que um inteiro $k' \geqslant 1$, que será escolhido convenientemente. Como f e f' são funções contínuas em um determinado intervalo, pelo teorema do Valor Médio, temos,

$$\left|f(\xi) - f\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right| \leqslant M \cdot \left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{M}{q_k^k} \tag{2.8}$$

onde M é uma constante positiva que depende apenas de f'. Também, por (2.5), temos, para k suficientemente grande, as desigualdades

$$\begin{aligned} 1 \leqslant Q_k &\leqslant q_k^{m+n}|d_0| + q_k^{m+n-1}|p_k||d_1| + \cdots + q_k^n|p_k|^m|d_m| \\ &\leqslant q_k^{m+n}|d_0| + cq_k^{m+n}|d_1| + \cdots + c^m q_k^{m+n}|d_m| \\ &= q_k^{m+n}(|d_0| + c|d_1| + \cdots + c^m|d_m|) \leqslant q_k^{\sqrt{k}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $1 \leqslant Q_k \leqslant q_k^{\sqrt{k}}$ e voltando a (2.8) obtemos

$$\left| f(\xi) - \frac{P_k}{Q_k} \right| \leqslant \frac{M}{Q_k^{\sqrt{k}}}. \tag{2.10}$$

Onde as desigualdades (2.10) e (2.9) são válidas para índices a partir de k' que satisfazem as seguintes condições:

1. f não possui pólos entre ξ e p_k/q_k;
2. $|d_0| + c|d_1| + \cdots + c^m|d_m| \leqslant q_k^{\sqrt{k}-m-n}$
3. $Q_k \geqslant 1$.

Portanto, pela Definição (2.2), $f(\xi)$ é um número de Liouville.

□

Com essa ferramenta em mãos, podemos por fim demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.7 (P.Erdös, 1962)**.** *Todo número real pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville.*

Demonstração. Seja t um número real. Dividiremos a demonstração em dois casos: $t \in \mathbb{Q}$ e $t \notin \mathbb{Q}$.

Se $t \in \mathbb{Q}$, então dado um número de Liouville ξ qualquer, temos $t = \xi + (t - \xi)$, onde $t - \xi$ é um número de Liouville pelo Lema 2.6. Se t é irracional, vamos escrevê-lo na forma

$$t = [t] + \{t\}.$$

Sem perda de generalidade vamos considerar apenas a parte fracionária de t uma vez que $[t]$ é inteiro. A ideia de Erdös foi dividir de maneira "esperta" essa parte decimal. Seja $\{t\} = \sum_{n\geqslant 1} a_n \cdot 2^{-n}$ a expansão de $\{t\}$ na base 2 e defina

$$\xi_1 := \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n 2^{-n} \quad \text{e} \quad \xi_2 := \sum_{n\geqslant 1} \beta_n 2^{-n}$$

Onde, para $n! \leqslant k < (n+1)!$,

$$\alpha_k = a_k \quad \text{e} \quad \beta_k = 0 \quad \text{se} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\beta_k = a_k \quad \text{e} \quad \alpha_k = 0 \quad \text{se} \quad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Perceba que assim teremos a representação de $\{t\}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\xi_1 & = & 0, & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & a_7 & \ldots & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \ldots \\
\xi_2 & = & 0, & 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & \ldots \\
\hline
\{t\} & = & 0, & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \ldots & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \ldots
\end{array}$$

Agora, resta mostrar que ξ_1 e ξ_2 são de Liouville. Faremos a demonstração para ξ_1, pois a de ξ_2 é análoga e portanto iremos omiti-la. Além disso, a demonstração que ξ_1 é de Liouville utiliza ferramentas e ´´truques” já vistos na demonstração dada no Corolário 2.1 ,como vê-se a seguir:
Dado $n \geqslant 1$, defina

$$q_n := 2^{(2n)!-1} \quad \text{e} \quad p_n := q_n \cdot (\alpha_1 2^{-1} + \ldots \alpha_{(2n)!-1} 2^{-(2n)!+1}).$$

Assim,

$$\left|\xi_1 - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\sum_{m \geqslant 1} \alpha_m 2^{-m} - \sum_{m=1}^{(2n)!-1} \alpha_m 2^{-m}\right| = \sum_{m \geqslant (2n)!} \alpha_m 2^{-m}.$$

Mas $\alpha_m = 0$ para $(2n)! \leqslant m < (2n+1)!$, e assim

$$\left|\xi_1 - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{m \geqslant (2n+1)!} \alpha_m 2^{-m} \leqslant \sum_{m \geqslant (2n+1)!} 2^{-m} = 2^{-(2n+1)!} \cdot 2 < 2^{-n[(2n)!-1]} = \frac{1}{q_n^n}.$$

Portanto, ξ_1 é um número de Liouville, o que completa a nossa prova. □

Além da soma, todo número real também poder ser expresso como produto de dois números de Liouville. Tal resultado pode ser encontrado em (ERDOS, 1962).

Para finalizarmos esta seção, vamos apresentar um resultado mais recente envolvendo números de Liouville. Para isso, precisaremos redefinir os números de Liouville através de frações contínuas. A definição a seguir é equivalente às outras que foram aqui apresentadas. Uma prova desse fato pode ser encontrada em (LEVEQUE, 1965).

Definição 2.3. *Dado um irracional ξ, seja $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência dos convergentes da expansão em fração contínua de ξ. Dizemos de ξ é um número de Liouville se para cada inteiro não-negativo n, existem infinitos $k's$ tais que $q_{k+1} > q_k^n$.*

Se quisermos que $q_{k+1} > q_k^n$ para todo k maior que um determinado inteiro não-negativo N, obtemos uma propriedade mais forte e assim, um novo conjunto de números que chamaremos de *Números de Liouville Fortes*[1]. Formalizemos esta ideia a partir da seguinte definição:

[1] Tradução livre do termo original “Strong Liouville Numbers”

Definição 2.4. *Um irracional ξ é dito um* número de Liouville forte *se para cada n inteiro não-negativo, existe $N = N(n)$, também inteiro não-negativo, tal que, para todo $k > n$, temos que $q_{k+1} > q_k^n$.*

Uma pergunta natural, tendo em vista o teorema (2.7), feita pelo próprio Erdös, é se todo número real também pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville fortes. A resposta para esta questão foi encontrada por G.Petruska em 1992 e , além de mostrar que isso não é possível, mostrou que a soma e o produto de um número de Liouville forte com um número de Liouville sempre será um número de Liouville ou um número racional. Mas, antes de enunciarmos e demonstrarmos o resultado, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.5. *Duas sequências de números positivos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são ditas* M-comparáveis *(Onde M é um inteiro positivo), se para cada n, existem inteiros $k > n$, $j > n$ tais que*

$$a_k \leqslant b_j < a_k^M \quad ou \quad b_j \leqslant a_k < b_j^M.$$

Teorema 2.8 (G.Petruska, 1992)**.** *Sejam ξ um número de Liouville forte e τ um número de Liouville. Então $\xi + \tau$ é racional ou um número de Liouville. O mesmo resultado vale para o produto $\xi\tau$.*

Demonstração. Seja ξ um número de Liouville forte e $p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n, \ldots$ seus convergentes. Além disso, considere τ um número de Liouville. Então, pela definição (2.1) temos que existe sequência $(r_n/s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\tau - \frac{r_k}{s_k}\right| \leqslant \frac{1}{s_k^n}$$

para todo k maior que um determinado N. Vamos dividir a demonstração em dois casos:
Caso 1: (q_k) e (s_k) são M-comparáveis para algum $M > 0$.
Dado n, tome $m = (M+1)n + 1$ e escolha um inteiro N tal que para $k > N$ temos:

1. $q_{k+1} > q_k^m$;
2. $\left|\tau - \dfrac{r_k}{s_k}\right| < \dfrac{1}{s_k^m}$.

A existência de tal N satisfazendo essas duas condições é justificada por ξ ser um número de Liouville forte e τ um número de Liouville.
Como $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}, (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ são M-comparáveis, escolhemos $k > N$ e $j > N$ tal que $q_j \leqslant s_k < q_j^M$ ou $s_k \leqslant q_j < s_k^M$. Sem perda de generalidade iremos supor que $q_j \leqslant s_k < q_j^M$. Assim, como consequência desigualdade triangular, o teorema (1.3), e das propriedades (1) e (2) temos:

$$\left|\xi + \tau - \frac{p_j s_k + q_j r_k}{q_j s_k}\right| = \left|\xi - \frac{p_j}{q_j} + \tau - \frac{r_k}{s_k}\right| < \frac{1}{q_j q_{j+1}} + \frac{1}{s_k^m} < \frac{1}{q_j^m} + \frac{1}{s_k^m} < \frac{2}{q_j^m} < \frac{1}{q_j^{m-1}}.$$

Como $m = (M+1)n + 1$, concluímos que

$$\left|\xi + \tau - \frac{p_j s_k + q_j r_k}{q_j s_k}\right| < \frac{1}{q_j^{m-1}} = \frac{1}{q_j^{(M+1)n}} = \frac{1}{q_j^{Mn} q_j^n} < \frac{1}{(q_j s_k)^n}.$$

Vale ressaltar que as contas quando $s_k \leqslant q_j < s_k^M$ são análogas e, por isso, consideramos $q_j \leqslant s_k < q_j^M$ sem perda de generalidade.

Caso 2: (q_k) e (s_k) não são M-comparáveis para qualquer M.

Dado n inteiro positivo, como as sequências não são M-comparáveis, temos que, para $M = 2n+1$, existe N tal que, para cada $k > N$ e $j > n$ vale:

3. $q_j^M \leqslant s_k$ sempre que $q_j < s_k$;
4. $s_k^M \leqslant q_j$ sempre que $s_k < q_j$;
5. $q_{j+1} > q_j^M$;
6. $\left|\tau - \frac{r_k}{s_k}\right| < \frac{1}{s_k^m}$.

A veracidade dessas afirmações reside na negação da definição (2.5), no fato de ξ ser Liouville forte e τ ser Liouville.

Sejam $j, k > N$ escolhidos de tal maneira que $q_j < s_k < q_{j+1}$. Aplicando (4.) temos $s_k^M < q_{j+1}$ e, além disso,

$$\frac{1}{q_j q_{j+1}} \leqslant \frac{1}{Q_k^M}.$$

Aplicando (5.) e (6.) perceba que voltamos as contas do caso 1 e chegamos em

$$\left|\xi + \tau - \frac{p_j s_k + q_j r_k}{q_j s_k}\right| < \frac{1}{(q_j s_k)^n}.$$

Considerando $P = p_j s_k + q_j r_k$ e $Q = q_j s_k$ temos

$$\left|(\xi + \tau) - \frac{P}{Q}\right| < \frac{1}{Q^n}.$$

Assim, concluímos que $\xi + \tau$ é de Liouville ou é um número racional.

No caso da multiplicação, basta percebermos que

$$\left|\xi\tau - \frac{p_j r_k}{q_j s_k}\right| \leqslant C\left(\left|\xi - \frac{p_j}{q_j} + \tau - \frac{r_k}{s_k}\right|\right)$$

para alguma constante C e assim, as contas seguem de maneira análoga ao que fizemos no caso da soma. O que nos resta fazer é mostrar que a desigualdade é de fato verdade.

Para isso considere a função $f(x) = \log(x)$. Assim, $f'(x) = 1/x$. Como estamos lidando com inteiros maiores que zero, a função é contínua no intervalo fechado $[p_j/q_j, r_k/s_k]$ e podemos aplicar o teorema do valor médio para concluirmos a existência de $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\xi\tau - \frac{p_j r_k}{q_j s_k}\right| = c_1 \left|\log(\xi\tau) - \log\left(\frac{p_j/q_j}{r_k/s_k}\right)\right| = c_1 \left|\log(\xi) - \log\left(\frac{p_j}{q_j}\right) + \log(\tau) - \log\left(\frac{r_k}{s_k}\right)\right|.$$

Novamente, pelo teorema do valor médio, existem constantes $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\left|\log(\xi) - \log\left(\frac{p_j}{q_j}\right)\right| = c_2 \left|\xi - \frac{p_j}{q_j}\right| \quad \text{e} \quad \left|\log(\tau) - \log\left(\frac{r_k}{s_k}\right)\right| = c_3 \left|\tau - \frac{r_k}{s_k}\right|.$$

Tomando $C = \max\{c_1c_2, c_1c_3\}$ temos

$$\left|\xi\tau - \frac{p_j r_k}{q_j s_k}\right| \leqslant C\left(\left|\xi - \frac{p_j}{q_j} + \tau - \frac{r_k}{s_k}\right|\right),$$

como queriamos mostrar. □

Outros tipos de números de Liouville foram descobertos, e, consequentemente, outros resultados também. Para saber mais sobre números de Liouville, recomendamos o texto (ALNIACIK, 1983).

Atualmente, ainda se há um forte campo de pesquisa em relação ao conjunto dos números de Liouville e suas propriedades, consequentemente, vários problemas em aberto. Uma conjectura, que se provaria um belo teorema, relaciona a fatoração em primos de um número com os números de Liouville, como podemos ver a seguir:

Conjectura 2.1. *seja $\xi \in \mathbb{R}$ um número transcendente tal qual existe um número positivo M e infinitos convergentes p_n/q_n tal que o maior fator primo de p_nq_n é menor que M. Então ξ é um número de Liouville.*

2.3 O Teorema de Dirichlet

Nesta seção abordaremos um resultado que nos permite analisar o quão "bem aproximados" são alguns números irracionais por racionais.

Teorema 2.9 (Teorema de Dirichlet)**.** *Dado um número $\tau \in \mathbb{R}$ irracional, existe uma constante $C = C(\tau)$, tal que para qualquer inteiro positivo H, existem inteiros p e q com $0 < \max\{|p|, |q|\} \leqslant H$ satisfazendo*

$$|\tau q - p| < \frac{C}{H}.$$

Além disso, se $H < C$, então $q \neq 0$.

Demonstração. Para analisarmos H, denotemos por $\mathcal{F}_H$ o seguinte conjunto de polinômios lineares não-nulos:

$$\mathcal{F}_H = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x];\ P(x) = a_1x + a_0;\ 0 \leqslant a_0, a_1 \leqslant H\}.$$

Perceba que temos $H + 1$ possibilidades para a escolha de a_0 e o mesmo ocorre para as escolhas de a_1, logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem concluímos que $\mathcal{F}_H$ possui $(H + 1)^2$ elementos.

Agora, para todo $P(x) \in \mathcal{F}_H$ temos, por desigualdade triangular,

$$|P(\tau)| = |a_1\tau + a_0| \leqslant a_1|\tau| + a_0 \leqslant (1 + |\tau|)H.$$

Defina $B = (1 + |\tau|)H$. Deste modo concluímos que $P(\tau) \in [-B, B]$, ou seja, o conjunto de valores para $P(\tau)$ encontra-se no intervalo $[-B, B]$, que chamaremos de S.

Vamos agora dividir o intervalo S em H^2 subintervalos, cada um de tamanho $(2B)/H^2$, mas, antes de partirmos para a técnica que utilizaremos a seguir, precisamos garantir que dados dois elementos quaisquer $P_i(x), P_j(x) \in \mathcal{F}_H$ teremos $P_i(\tau) \neq P_j(\tau)$, isso nos garante $(H + 1)^2$ valores distintos para $P(\tau)$. De fato, suponha o contrário, ou seja,

$$a_1'\tau + a_0' = P_i(\tau) = P_j(\tau) = a_1''\tau + a_0''.$$

Deste modo, teremos que

$$\tau = \frac{a_1' - a_1''}{a_0'' - a_0'} \in \mathbb{Q},$$

um absurdo pois τ é irracional.

Demonstrado isso e sabendo que $H^2 < (H+1)^2$, podemos então utilizar o famoso Princípio da Casa dos Pombos para garantir que existem dois polinômios $P_1, P_2 \in \mathcal{F}_H$ tais que $P_1(\tau)$ e $P_2(\tau)$ encontram-se em um mesmo subintervalo de S. Deste modo temos que

$$|P_1(\tau) - P_2(\tau)| \leqslant \frac{2B}{H^2} = \frac{2(1 + |\tau|)H}{H^2} = \frac{2(1 + |\tau|)}{H}.$$

Se $P_1(\tau) = b_1\tau + b_2$ e $P_2(\tau) = c_1\tau + c_2$, então

$$|(b_1 - c_1)\tau - (c_2 - b_2)| \leqslant \frac{2(1 + |\tau|)}{H}.$$

Consideremos $q = b_1 - c_1$, $p = c_2 - b_2$ e $C = C(\tau) = 2(1 + |\tau|)$. Como os coeficientes de $P_1(x)$ e $P_2(x)$ estão no intervalo $[0, H]$ então $\max\{|p|, |q|\} \leqslant H$. Se $0 = \max\{|p|, |q|\}$, então $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$, o que implica $P_1(x) = P_2(x)$. Absurdo. Logo, $0 < \max\{|p|, |q|\} \leqslant H$ e

$$|\tau q - p| \leqslant \frac{C}{H}.$$

Se $C < H$ suponha que $q = 0$. Assim, $|p| \leqslant \dfrac{C}{H} < 1$ e então $p = 0$, o que implicaria novamente $P_1(x) = P_2(x)$, um absurdo. □

Normalmente encontramos o Teorema de Dirichlet enunciado da forma "Seja τ um número irracional, então existem infinitos números racionais $\dfrac{p}{q}$ (com p e q inteiros, $q \neq 0$) tais que $\left|\tau - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.

É válido salientar que os dois enunciados são equivalentes, porém, a principal informação que este último nos fornece é em relação à medida de irracionalidade, que não é o foco deste texto, mas, tal conceito pode ser visto em (IRELAND; ROSEN, 2013). O enunciado mostrado aqui nos revela algumas nuances em relação ao "quão pequeno'" pode ser um polinômio em $\mathcal{F}_H$ quando aplicado a um irracional τ, como veremos a seguir.

Dado um número irracional τ, desejamos encontrar polinômios lineares $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ satisfazendo $P(\tau) \neq 0$ que tenham coeficientes limitados por uma constante e que minimizem $|P(\tau)|$. Vamos então definir para cada inteiro H positivo o seguinte conjunto:

$$\Omega(\tau, H) = \min\{|P(\tau)|;\ P(x) = a_1x + a_0;\ P(\tau) \neq 0 \text{ e } \mathcal{H}(P) \leqslant H\}, \tag{2.11}$$

onde $\mathcal{H}(P) = \max\{|a_0|, |a_1|\}$. $\mathcal{H}(P)$ é chamado de "altura"do polinômio $P(x)$. Quando o grau de um polinômio em $\mathbb{Z}[x]$ é maior que 1, definimos a altura do polinômio como o máximo dos módulos de seus coeficientes. Além disso, definimos também a altura de um algébrico α como sendo a altura do seu polinômio minimal. Pelo Teorema 2.9, existem inteiros p, q tais que $0 < \max\{|p|, |q|\} \leqslant H$ e

$$|\tau q - p| \leqslant C(\tau)H^{-1}.$$

Se considerarmos o polinômio com coeficientes inteiro não-nulos, $P(x) = qx - p$, então $\mathcal{H}(P) = \max\{|p|, |q|\} \leqslant H$. Pela minimalidade de $\Omega(\tau, H)$ concluímos que

$$\Omega(\tau, H) \leqslant C(\tau)H^{-1}.$$

A partir de $\Omega(\tau, H)$, vamos definir outra função auxiliar [2].
Defina $\omega(\tau, H) \in \mathbb{R}$ como

$$\Omega(\tau, H) = H^{-\omega(\tau, H)}. \tag{2.12}$$

Ora, como queremos saber o quão pequeno $\Omega(\tau, H)$ pode se tornar, equivalentemente queremos saber o quão grande $\omega(\tau, H)$ pode ser. Para isso é natural Analisar o que ocorre para valores arbitrariamente grandes de H, porém sequer sabemos se o limite existe. Contudo, podemos analisar os pontos de acumulação e saber qual o maior deles. Para isto, definiremos mais uma função auxiliar [3] dada por

$$\omega(\tau) = \limsup_{H \to \infty} \omega(\tau, H). \tag{2.13}$$

[2] acredite, irá fazer sentido
[3] nesta seção será a última vez que definiremos uma função, não desista ainda

Assim, para todo $H > C(\tau)$ teremos

$$H^{-\omega(\tau,H)} = \Omega(\tau, H) \leqslant C(\tau)H^{-1} < 1 \Rightarrow \omega(\tau, H) \geqslant 0 \tag{2.14}$$

Aplicando log na base H em ambos os lados da desigualdade obtemos

$$\log_H H^{-\omega(\tau,H)} \leqslant \log_H(C(\tau)H^{-1}) \Rightarrow 1 \leqslant \frac{\log C(\tau)}{\log H} + \omega(\tau, H).$$

Agora aplicando $\limsup_{H\to\infty}$ em ambos os lados da desigualdade temos que $\omega(\tau) \geqslant 1$. Então, se τ é irracional, $\omega(\tau) \neq 0$. Por outro lado, se $\tau \in \mathbb{Q}$ temos pelo Teorema 2.2 que

$$0 < C(\tau) \leqslant H^{-\omega(\tau,H)};$$

e assim,

$$-\frac{\log C(\tau)}{\log H} \geqslant \omega(\tau, H) \Rightarrow \omega(\tau) \leqslant 0.$$

Mas, como já vimos que para H suficientemente grande, $\omega(\tau, H) \geqslant 0$, concluimos que $\omega(\tau) = 0$.

Perceba que com essas informações conseguimos caracterizar os números irracionais a partir de uma condição da função $\omega(\tau)$! [4].

Agora formalizemos tudo isso a partir do seguinte teorema que acabamos de demonstrar:

Teorema 2.10 (Caracterização dos números irracionais)**.** *Dado um número $\tau \in \mathbb{R}$ e um inteiro positivo H, consideremos $\Omega(\tau, H)$ definida como anteriormente em (2.11), assim como $\omega(\tau, H)$ em (2.12) e $\omega(\tau)$ em (2.13). Então τ é irracional se, e somente se, $\omega(\tau) \neq 0$.*

Ao longo desta seção pudemos ver algumas condições que não só serviram para o estudo das Aproximações Diofantinas em si, mas também para a abertura de outros estudos e outras visões sobre o que fora estudado. Por exemplo, o Teorema de Liouville foi fundamental para a definição do conjunto dos Números de Liouville (que ainda encontraremos novamente ao longo do texto). Aqui vimos também o grande Teorema de Dirichlet, que fora fundamental não só para o estudo da aproximação de irracionais por racionais, mas também por nos fornecer uma nova caracterização destes últimos como vimos no Teorema (2.10).

Para finalizar esta seção, apresentaremos um refinamento do Teorema de Dirichlet dado por Hurwitz, e, além disso, mostraremos que este refinamento é o melhor possível em um certo sentido.

[4] Avisamos que ela se mostraria importante e que não era para desistir...

Teorema 2.11 (Hurwitz-Markov)**.** *Dado τ um número irracional, existem infinitos inteiros coprimos p, q e $q > 0$ tais que*
$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$
Além disso, a constante $\sqrt{5}$ é a melhor possível no sentido de existirem infinitas soluções.

Demonstração. Consideremos $\dfrac{p_k}{q_k}$ um convergente arbitrário de τ em sua expansão por fração contínua. Além disso, vamos definir $b = \dfrac{q_{n-1}}{q_n}$. Sabemos, pelo teorema (1.2) que
$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1},$$
onde a_n representa o n-ésimo quociente parcial de τ. Dividindo ambos os lados da relação por q_n obtemos
$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = a_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \Rightarrow \frac{1}{b_{n+1}} = a_{n+1} + b_n. \tag{2.15}$$
Deste modo,
$$a_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} - b_n. \tag{2.16}$$
Pela diferença entre convergente de Frações Contínuas Simples, resultado direto do corolário (1.1), temos
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+2}}{q_{n+1}q_n} = \frac{(-1)^{n+2}}{(a_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^{n+2}}{(a_{n+1} + b_n)q_n^2}.$$
donde
$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + b_n)}. \tag{2.17}$$
Vamos agora mostrar que dados 2 convergentes consecutivos de τ, ao menos um deles satisfaz o que queremos. Para isso, vamos supor o contrário. Então
$$\left|\tau - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} \quad \text{e} \quad \left|\tau - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}q_{n+1}^2}. \tag{2.18}$$
Desta forma concluímos que
$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2}{\sqrt{5}q_n^2 q_{n+1}^2}.$$
Mas, por (2.17) temos
$$\frac{1}{q_n^2(a_{n+1} + b_n)} > \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2}{\sqrt{5}q_n^2 q_{n+1}^2} \Rightarrow a_{n+1} + b_n < \frac{\sqrt{5}q_n^2 q_{n+1}^2}{q_{n+1}^2 + q_n^2}.$$
Por (2.15) e fazendo algumas manipulações aritmética concluímos que
$$b_{n+1}^2 - \sqrt{5}b_{n+1} + 1 < 0.$$

Assim,

$$\Phi - 1 < b_{n+1} < \Phi \Rightarrow \Phi > \frac{1}{b_{n+1}} > \Phi - 1,$$

onde Φ representa o Número de Ouro $(\sqrt{5}+1)/2$.
Repetindo o processo feito a partir de (2.18) e substituindo n por $n-1$ obtemos

$$\Phi - 1 < b_n < \Phi.$$

Finalmente, por (2.16) temos

$$a_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} - b_n < 0.$$

Absurdo, pois os quocientes parciais de uma fração contínua são positivos.

Nos falta apenas mostrar que $\sqrt{5}$ é de fato o melhor denominador possível no sentido dado no enunciado. De fato, se

$$\epsilon > 0, \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \left|\tau - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q^2},$$

temos

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\epsilon)q}.$$

Além disso,

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right|\left|q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - p\right| < \frac{\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\epsilon},$$

ou seja,

$$|p^2 - pq - q^2| < \frac{\left|\frac{1=\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5}\right|}{\sqrt{5}+\epsilon}.$$

Se $q \to \infty$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{p}{q} \to 0$, donde o lado direito da última desigualdade é muito próximo de $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\epsilon} < 1$, um absurdo, pois $|p^2 - pq - q^2| \geqslant 1$. De fato, pois se $p^2 - pq - q^2 = 0$, teríamos que p/q seria raíz do polinômio $P(x) = x^2 - x - 1$. Mas sabemos que as raízes deste polinômio não são racionais. $\square$

3 Aproximação Algébrica Para Transcendência

Neste capítulo iremos generalizar dois dos grandes resultados enunciados anteriormente, sendo estes o teorema de Liouville e o teorema de Dirichlet. A questão principal é: generalizar em qual sentido?

Anteriormente, apresentamos aproximações do tipo $|\xi - p/q|$, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e p e q inteiros coprimos com $q > 0$. Perceba que este tipo de aproximação está associada ao polinômio de grau um, $P(x) = qx - p$, ou seja, majoramos ξ a partir de $|P(\xi)|$. E se o grau de $P(x)$ for maior que 1? Este será o ponto no qual as generalizações serão focadas.

Além disto, como o título do capítulo sugere, iremos proceder de maneira parecida ao que fizemos no capítulo anterior para podermos aproximar e caracterizar os números transcendentes a partir dos números algébricos, assim como fizemos com os números irracionais em relação aos racionais através do teorema (2.10). Além disto, as funções que definiremos ao longo da seção serão de fundamental importância na Classificação de Mahler.

Outro ponto importante a ser salientado é que de agora em diante, daremos mais foco aos números complexos, ou seja, estaremos abragindo também os números imaginários nos enunciados dos resultados deste ponto do trabalho em diante (salvo menção contrária). Portanto, iremos mudar a notação do anel de polinômios com coeficientes inteiros para $\mathbb{Z}[z]$. É de certo que utilizamos números complexos no capítulo anterior, porém como o foco era aprximação de irracionais por racionais, estávamos sempre tratando com um viés de números reais.

Além de generalizarmos os teoremas mencionados, iremos começar a construir a classificação de Mahler e mostrar como cada classe de números transcendentes é definida neste caso. Ao final do capítulo apresentaremos uma outra classificação para os números transcendentes que é equivalente a esta última.

Ao longo deste capítulo as contas e notações serão baseadas ao que fora feito em (CHAVES, 2010) e (BURGER; TUBBS, 2004) com alguns outros embasamentos algébricos que serão necessários e que foram consultados em (MACDONALD, 1998).

Comecemos com uma belíssima generalização do teorema de Liouville.

3.1 Uma Generalização para o Teorema de Liouville

Nesta seção veremos uma belíssima extensão do Teorema de caracterização dos irracionais, porém desta vez para números algébricos. Para tal, iremos antes estudar poderosas ferramentas que irão nos auxiliar ao longo deste capítulo. A primeira delas é:

Teorema 3.1 (Teorema de Liouville Generalizado)**.** *Seja α um número algébrico de grau d e N um inteiro positivo. Então, existe constante positiva $C = C(\alpha, N)$ tal que para todo polinômio $P(z) \in \mathbb{Z}(z)$ satisfazendo gr(P)$\leqslant N$ e $P(\alpha) \neq 0$, temos*

$$|P(\alpha)| \geqslant \frac{C(\alpha, N)}{\mathcal{H}(P)^{d-1}}$$

Demonstração. Seja

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

o polinômio minimal [1] de α. Pelo teorema fundamental da Álgebra, ver (FINE; ROSENBERGER, 2012), garantimos a existência de d raízes, sendo estas $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 \ldots \alpha_d$, os conjugados de α. Sabemos também, por este resultado, que podemos reescrever $f(z)$ da forma

$$f(z) = a_d(z - \alpha_1)\ldots(z - \alpha_d). \tag{3.1}$$

Agora consideremos $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ onde

$$P(z) = b_k z^k + b_{k-1}z^{k-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \ , \ \ P(\alpha) \neq 0 \ \ e \ \ k \leqslant N.$$

Denotando $\beta_1, \ldots \beta_k$ as raízes de $P(z)$, podemos escrever

$$P(z) = b_k(z - \beta_1)\ldots(z - \beta_k).$$

Perceba agora que todas as raízes de $P(z)$ são distintas das raízes de $f(z)$. Com efeito, suponha $\alpha_i = \beta_j$ para algum par (i, j). Assim, $P(\alpha_i) = 0$, mas $f(z)$ é o polinômio minimal de α_i, então $f|P$ e, assim, $P(\alpha) = 0$, uma contradição. Portanto, $\alpha_i \neq \beta_j$ para todo par (i, j). Concluimos assim que $|\alpha_i - \beta_j| > 0$. Calculemos agora

$$\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{k}|\alpha_i - \beta_j|.$$

Por um lado,

$$\prod_{i=1}^{d}\left(\prod_{j=1}^{k}|\alpha_i - \beta_j|\right) = \prod_{i=1}^{d}\frac{|P(\alpha_i)|}{|b_k|}.$$

[1] Aqui consideramos polinômio minimal de α como o polinômio irredutível em $\mathbb{Z}[z]$ de menor grau tal que α é raíz, o coeficiente líder é positivo, e os coeficientes deste polinômio são relativamente primos.

Por outro lado,

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{d}|\alpha_i-\beta_j|\right)=\prod_{j=1}^{k}\frac{|f(\beta_j)|}{a_d}.$$

Concluimos então, que

$$|P(\alpha)|=|P(\alpha_1)|=\frac{|b_k|^d\displaystyle\prod_{j=1}^{k}|f(\beta_j)|}{a_d^k\displaystyle\prod_{i=2}^{d}|P(\alpha_i)|}.$$

O objetivo agora será mostrar que $|b_k|^d\displaystyle\prod_{j=1}^{k}|f(\beta_j)|$ é um inteiro positivo. considere o seguinte polinômio simétrico $F(x_1,\ldots,x_k)=f(x_1)\cdots f(x_k)\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_k]$. Pelo Teorema Fundamental das Funções Simétricas (ver (BURGER; TUBBS, 2004)), existe um polinômio com coeficientes inteiros $G(\sigma_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,\sigma_k(x_1,\ldots,x_k))$[2], onde

$$\sigma_n(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant k}x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

tal que $F(x_1,\ldots,x_k)=f(x_1)\cdots f(x_k)=G(\sigma_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,\sigma_k(x_1,\ldots,x_k))$. Pela definição de $F(x_1,\ldots,x_k)$ temos

$$\begin{aligned}F(x_1,\ldots,x_k)&=(a_dx_1^d+\cdots+a_1x_1+a_0)\cdots(a_dx_k^d+\cdots+a_1x_k+a_0)\\&=a_d^k(x_1\cdots x_k)^d+\cdots+a_0^k\\&=a_d^k(\sigma_k(x_1,\ldots,x_k))^d+\cdots+a_0^k\\&=G(\sigma_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,\sigma_k(x_1,\ldots,x_k))\end{aligned}$$

Assim, $gr(G)\geqslant d$. Supondo que $gr(G)>d$, então deve existir um monômio de $G(\sigma_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,\sigma_k(x_1,\ldots,x_k))$, digamos

$$(\sigma_{i_1}(x_1,\ldots,x_k))^{c_1}\cdots(\sigma_{i_n}(x_1,\ldots,x_k))^{c_n},$$

tal que $c_1+\cdots+c_n>d$. Mas observando as potências das funções simétricas, temos

$$(\sigma_{i_j}(x_1,\ldots,x_k))^{c_j}=(x_1\cdots x_{i_j}+A_j(x_1,\ldots,x_k))^{c_j}=(x_1\cdots x_{i_j})^{c_j}+B_j(x_1,\ldots,x_k)$$

para todo $j\in\{1,\ldots,n\}$,onde $A_j(x_1,\ldots,x_k)$ e $B_j(x_1,\ldots,x_k)$ são polinômios com coeficientes inteiros. Logo, o possível monômio é

$$\begin{aligned}\sigma_{i_1}(x_1,\ldots,x_k)^{c_j}\cdots\sigma_{i_n}(x_1,\ldots,x_k)^{c_j}&=\prod_{j=1}^{n}\left((x_1\cdots x_{i_j})^{c_j}+B_j(x_1,\ldots,x_k)\right)\\&=x_1^{c_1+\cdots+c_n}\cdot D(x_2,\ldots,x_k)+E(x_1,\ldots,x_k)\end{aligned}$$

[2] Os $\sigma_i's$ representam as função simétricas elementares.

com $D(x_2, \ldots, x_k)$ e $E(x_1, \ldots, x_k)$ também polinômios com coeficientes inteiros. Mas isto quer dizer que temos uma potência de x_1 maior que d, o que é um absurdo, e com este argumento conseguimos a igualdade $gr(G) = d$. Tendo feito tal observação, podemos finalmente encontrar $F(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Como $P(z) = b_k z^k + \cdots + b_1 z + b_0 = b_k(z - \beta_1) \cdots (z - \beta_k)$, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1(\beta_1, \ldots, \beta_k) = && \beta_1 + \cdots + \beta_k = -\frac{b_{k-1}}{b_k} \\ \sigma_2 &= \sigma_2(\beta_1, \ldots, \beta_k) = && \beta_1\beta_2 + \cdots + \beta_{k-1}\beta_k = \frac{b_{k-2}}{b_k} \\ &\vdots \\ \sigma_k &= \sigma_k(\beta_1, \ldots, \beta_k) = && \beta_1 \cdots \beta_k = (-1)^k \frac{b_0}{b_k}. \end{aligned}$$

Aplicando tais valores em um polinômio inteiro de grau d, como $G(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, obtemos um racional cujo denominador é igual a b_k^d e podemos finalmente concluir que

$$b_k^d \cdot \prod_{i=1}^{k} f(\beta_i) = b_k^d \cdot F(\beta_1, \ldots, \beta_k) = b_k^d \cdot G(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \mathbb{Z}.$$

Assim, concluimos que

$$|P(\alpha)| = \frac{|b_k|^d \prod_{j=1}^{k} |f(\beta_j)|}{a_d^k \prod_{i=2}^{d} |P(\alpha_i)|} \geqslant \frac{1}{a_d^k \prod_{i=2}^{d} |P(\alpha_i)|}. \tag{3.2}$$

Por desigualdade triangular temos que

$$|P(\alpha_m)| \leqslant \sum_{j=0}^{k} |b_j||\alpha_m|^j \leqslant \mathcal{H}(P) \left(1 + |\alpha_m| + |\alpha_m|^2 + \cdots + |\alpha_m|^k\right).$$

Considerando $\mathcal{A} = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_d|\}$ junto com o fato de $k \leqslant N$ temos

$$|P(\alpha_m)| \leqslant \mathcal{H}(P) \left(1 + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots + \mathcal{A}^N\right).$$

Considerando essa desigualdade, em (3.2) temos que

$$|P(\alpha)| \geqslant \frac{C(\alpha, N)}{\mathcal{H}(P)^{d-1}},$$

onde $C(\alpha, N) = a_d^{-N} \left(1 + \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 + \cdots + \mathcal{A}^N\right)^{1-d}$. O que completa a prova. □

Uma válida observação é que a demonstração deste teorema é construtiva, de modo que podemos determinar um majorante para um número algébrico, como podemos ver no exemplo a seguir:

Exemplo 3.1. *Consideremos* $\alpha = \sqrt{2}$, $N = 2$ *e* $P(z) = qz - p$ *onde* $q > p$ *e* $q > 0$. *Sabemos que o polinômio minimal de* $\sqrt{2}$ *é*

$$f(z) = z^2 - 2.$$

Da maneira que C *foi construído na demonstração,* $\mathcal{A} = \max\{|-\sqrt{2}|, |\sqrt{2}|\} = \sqrt{2}$. *Além disso,* $\mathcal{H}(P) = q$. *Assim,*

$$C(\sqrt{2}, 2) = (1 + \sqrt{2} + 2)^{-1}.$$

Concluimos então que

$$|q\sqrt{2} - p| \geqslant \frac{(1 + \sqrt{2} + 2)^{-1}}{q} = \frac{1}{q(1 + \sqrt{2} + 2)}.$$

Ou, equivalentemente,

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^2(1 + \sqrt{2} + 2)}.$$

3.2 Uma Generalização do Teorema de Dirichlet

Nesta seção verementos as ferramentas restantes, que serão necessárias para a construção da classificação de Mahler e, além disso, iremos proceder para alcançar um resultado semelhante ao Teorema (2.10) para números transcendentes. Comecemos com uma extensão do teorema de Dirichlet para polinômios de grau maior que um.

Teorema 3.2 (Dirichlet)**.** *Sejam* $\xi \in \mathbb{C}$ *e* N *um inteiro positivo, de modo que* ξ *é transcendente ou algébrico de grau menor que* N. *Então, existe uma constante positiva* $C = C(\xi, N)$ *tal que para todo inteiro positivo* H, *existe um polinômio não-nulo* $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ *com* $gr(P) \leqslant N$ *e* $\mathcal{H}(P) \leqslant H$ *satisfazendo a desigualdade*

$$|P(\xi)| < \frac{C(\xi, N)}{H^{\frac{1}{2}(N-1)}}.$$

Demonstração. Para esta demonstração, procederemos de maneira parecida ao que fizemos na do Teorema (2.9). As maiores sutilezas agora estão, não somente, no fato de estarmos lidando com números complexos, mas também no fato do grau do polinômio ser variável. Comecemos com o caso $N = 1$:
Se $N = 1$ consideremos $P(z) = z$ e $C(\xi, 1) = 2|\xi| + 1$. Assim,

$$|P(\xi)| = |\xi| \leqslant 2|\xi| + 1 = \frac{C(\xi, 1)}{H^{\frac{1}{2}(1-1)}}.$$

Caso $N \geqslant 2$: Aqui, vamos novamente definir um conjunto como fora feito no teorema (2.9) da seguinte maneira:

$$\mathcal{Q}_{N,H} = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z]; P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \text{ e } 0 \leqslant a_n \leqslant H, \ \forall\ n = 0, 1, \ldots, N\}.$$

Perceba que, pelo princípio fundamental da contagem, $\#\mathcal{Q}_{N,H} = (H+1)^{(N+1)}$.
Vamos agora definir um outro conjunto, que chamaremos de $\mathcal{Q}_\xi$, onde

$$\mathcal{Q}_\xi = \{P(\xi);\ P(z) \in \mathcal{Q}_{N,H}\}.$$

Afirmamos que $\#\mathcal{Q}_\xi = \#\mathcal{Q}_{N,H}$. Com efeito, $\#\mathcal{Q}_\xi \leqslant \#\mathcal{Q}_{N,H}$. Se $\#\mathcal{Q}_\xi > \#\mathcal{Q}_{N,H}$, teremos dois polinômios $P_1^*(z), P_2^*(z)$ em $\mathcal{Q}_{N,H}$ tais que $P_1^*(\xi) = P_2^*(\xi)$, mas isto implicaria na existência de um polinômio $P^*(z) = P_1^*(z) - P_2^*(z)$ de grau menor ou igual a N, onde ξ seria raíz, o que contradiz a hipótese de ξ ser transcendente ou algébrico de grau menor que N. Deste modo, concluimos que

$$\#\mathcal{Q}_\xi = \#\mathcal{Q}_{N,H} = (H+1)^{N+1}.$$

Por desigualdade triangular temos que

$$|P(\xi)| = |\sum_{j=0}^{N} a_j\xi^j| \leqslant \sum_{j=0}^{N} a_j|\xi|^j \leqslant H(1+|\xi|+\cdots+|\xi|^N = B,$$

Para todo $P(z) \in \mathcal{Q}_{H,N}$. Como $|P(\xi)| \leqslant B$ temos, em particular, que

$$|Re(P(\xi))| \leqslant B \ \ e \ \ |Im(P(\xi))| \leqslant B.$$

Consideremos agora o quadrado $\mathcal{S}$ no plano complexo, definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{S} = \{x+iy;\ \max\{|x|,|y|\} \leqslant B\},$$

como representado na figura 1.
Para todo $P(z) \in \mathcal{Q}_{N,H}$, o valor de $P(\xi)$ está contido em $\mathcal{S}$. Dividiremos $\mathcal{S}$ em s^2 quadrados de lado $2B/s$ (Ver Figura 2). Para aplicarmos o princípio da casa dos pombos, queremos que a quantidade em $\mathcal{Q}_\xi$ exceda o número de quadrados menores, ou seja,

$$s^2 < (H+1)^{(N+1)}.$$

Tomando $s = [(H+1)^{\frac{(N+1)}{2}}] - 1$ então teremos s^2 menor que a quantidade de valores em $\mathcal{Q}_\xi$, já que

$$s^2 < \left((H+1)^{\frac{(N+1)}{2}}\right)^2 = (H+1)^{(N+1)}.$$

Mais ainda, como $N \geqslant 2$ e $H \geqslant 1$, temos que $s \geqslant [\sqrt{2^3}] - 1 = 1$. Assim, s é um inteiro positivo e a escolha feita para tal é apropriada. Vamos, enfim, utillizar o princípio da casa dos pombos para garantir a existência de dois polinômios $P_1(z), P_2(z) \in \mathcal{Q}_{N,H}$ (figura ao lado) tais que $P_1(\xi)$ e $P_2(\xi)$ estão no mesmo quadrado de lado $2B/s$. Portanto, $|P_1(\xi) - P_2(\xi)| \leqslant \sqrt{2}(2B/s)$. Se tomarmos $P(z) = P_1(z) - P_2(z)$, então, como $gr(P_1)$ e $gr(P_2)$ são menores que N, $gr(P)$ também o é. Por outro lado, se escrevermos

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \ \ e \ \ P_2(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n,$$

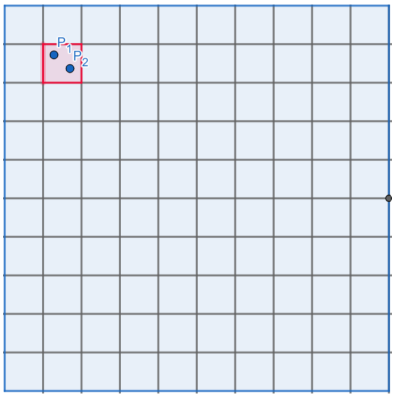

Figura 1 – (Partição de $\mathcal{S}$)

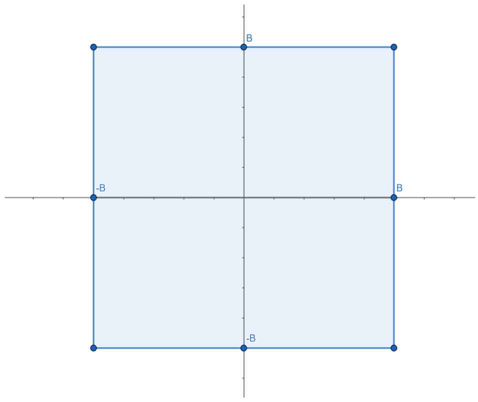

Figura 2 – (Quadrado complexo $\mathcal{S}$)

temos $P(z) = \sum_{n=0}^{N}(a_n - b_n)z^n$. Como $0 \leqslant a_n, b_n \leqslant H$, temos que $-H \leqslant a_n - b_n \leqslant H$ e assim, $|a_n - b_n| \leqslant H$ para todo $n = 0, 1, \ldots, N$. Portanto $\mathcal{H}(P) \leqslant H$. Além disso temos a desigualdade

$$|P(\xi)| \leqslant \sqrt{2}\frac{2B}{s} = 2\sqrt{2} \cdot (1 + |\xi| + \cdots + |\xi|^N)\frac{H}{[(H+1)^{\frac{(N+1)}{2}}] - 1}. \tag{3.3}$$

Perceba que estamos chegando a uma forma parecida com a que queremos, porém no denominador desta última desigualdade não temos um fator dependendo unicamente de H, para podermos criar a constante garantida no enunciado. Para livrarmo-nos deste problema, afirmamos que

$$[(H+1)^{\frac{(N+1)}{2}}] - 1 \geqslant [H^{\frac{(N+1)}{2}}]. \tag{3.4}$$

De fato, se tivermos N ímpar, digamos $N = 2K + 1$, então

$$\begin{aligned} s &= [(H+1)^{\frac{(2K+2)}{2}}] - 1 \\ &= [(H+1)^{K+1}] - 1 \\ &= (H+1)^{k+1} - 1 > H^{k+1} = [H^{k+1}] = [H^{\frac{N+1}{2}}]. \end{aligned}$$

Agora, caso $N = 2K$, então

$$\begin{aligned} s &= [(H+1)^{\frac{(2K+1)}{2}}] - 1 \\ &= [(H+1)^K(H+1)^{\frac{1}{2}}] - 1 \\ &\geqslant [(H^K + 1)H^{\frac{1}{2}}] - 1 \\ &\geqslant [H^{\frac{2K+1}{2}} + H^{\frac{1}{2}}] - 1 \\ &\geqslant [H^{\frac{2K+1}{2}} + 1] - 1 = \lfloor H^{\frac{N+1}{2}} \rfloor. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (3.3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |P(\xi)| &< 2\sqrt{2}(1 + |\xi| + \cdots + |\xi|^N)H \cdot \frac{2}{H^{\frac{N+1}{2}}} \\ &< \frac{4\sqrt{2}(1 + |\xi| + \cdots + |\xi|^N)}{H^{\frac{N-1}{2}}} = \frac{C}{H^{\frac{1}{2}(N-1)}}, \end{aligned}$$

onde $C = C(\xi, N) = 4\sqrt{2}(1 + |\xi| + \cdots + |\xi|^N)$. $\square$

Com uma ideia análoga à utilizada no capítulo anterior, vamos examinar o quão próximo de zero $|P(\xi)|$ pode se tornar ao variarmos $P(z)$ sobre todos os polinômios em $\mathbb{Z}[z]$, com grau e altura menores ou iguais a N e H, respectivamente, e, logicamente, com $|P(\xi)| \neq 0$. Para tal objetivo iremos novamente nos aventurar por diversas funções auxiliares que serão de fundamental importância para um teorema de caracterização dos números transcendentes. Comecemos definindo o conjunto

$$\mathcal{P}_{N,H} = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z];\ gr(P) \leqslant N \ e \ \mathcal{H}(P) \leqslant H\}$$

e o valor

$$\Omega(\xi, N, H) = \min\{|P(\xi)|;\ P(z) \in \mathcal{P}_{N,H} \ e \ P(\xi) \neq 0\}.$$

Para compararmos $\Omega(\xi, N, H)$ em relação ao expoente de H utilizando o teorema de Dirichlet, seria fundamental expressarmos $\Omega(\xi, N, H)$ como $H^{-\Theta N}$ para uma escolha conveniente de Θ. Vamos então definir a função $\omega(\xi, N, H)$ como o expoente que satisfaz

$$\Omega(\xi, N, H) = H^{-\omega(\xi,N,H)N}.$$

Como $H \geqslant 1$, e o expoente deste é $-\omega(\xi, N, H)N$ onde $N \geqslant 1$, então o problema de encontrar o menor valor para $\Omega(\xi, N, H)$ é equivalente a encontrar o maior valor para $\omega(\xi, N, H)$. Façamos isto, então. Perceba, primeiramente que, por definição,

$$\Omega(\xi, N, H) < |P(\xi)| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_{N,H}.$$

Além disso, se ξ for transcendente, podemos aplicar o Teorema de Dirichlet.
Ora, vamos então partir do pressuposto que ξ é transcendente, e assim teremos que, para todo N e H dados, vale

$$\Omega(\xi, N, H) < |P(\xi)| \leqslant \frac{C(\xi, N)}{H^{\frac{1}{2}(N-1)}}. \tag{3.5}$$

Usando logaritmo, temos

$$\log_H \Omega(\xi, N, H) = \log_H H^{-\omega(\xi,N,H)\cdot N} < \log_H C(\xi, N)H^{-\frac{1}{2}(N-1)}.$$

Assim,

$$-\omega(\xi, N, H) \cdot N < \log_H C + \frac{1}{2}(N-1),$$

e então

$$\frac{N-1}{2} < \frac{\log C}{\log H} - \omega(\xi, N, H) \cdot N. \tag{3.6}$$

Para prosseguir com a análise desta última desigualdade, vamos antes observar o crescimento de $\omega(\xi, N, H)$.
De maneira análoga ao que fizemos no capítulo anterior, não sabemos se $\lim\limits_{H\to\infty} \omega(\xi, N, H)$

existe, mas estamos interessados no maior ponto de acumulação de $\omega(\xi, N, H)$, que sempre existe. Definimos então

$$\omega(\xi, N) = \limsup_{h\to\infty} \omega(\xi, N, H).$$

Aplicando $\limsup\limits_{H\to\infty}$ em (3.6) temos

$$\limsup_{H\to\infty} \frac{N-1}{2} \leqslant \limsup_{H\to\infty} \left(\frac{\log C}{\log H}\right) + \omega(\xi, N) \cdot N.$$

Mas, como

$$\limsup_{H\to\infty} \left(\frac{\log C}{\log H}\right) = 0,$$

temos

$$\omega(\xi, N) \geqslant \frac{N-1}{2N}. \tag{3.7}$$

Ainda temos uma variável para ser analisada, o N. Procederemos então de maneira análoga ao que acabara de ser feito, e definiremos:

$$\omega(\xi) = \limsup_{N\to\infty} \omega(\xi, N)^{3}.$$

Agora vamos aplicar $\limsup\limits_{N\to\infty}$ em (3.7), obtendo

$$\omega(\xi) = \limsup_{N\to\infty} \omega(\xi, N) \geqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{N-1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Concluímos então que se ξ é transcendente, $\omega(\xi) \neq 0$ (em particular é maior que $1/2$).
E se ξ for algébrico de grau, digamos, d? Bem, tudo sugere que evoquemos o teorema de Liouville (3.1), e é exatamente isto que iremos fazer.
Seja $P(z) \in \mathcal{P}_{N,H}$ que satisfaz

$$|P(\xi)| = \Omega(\xi, N, H) = H^{-\omega(\xi,N,H)N}.$$

Aplicando o teorema de Liouville obtemos

$$\frac{C(\xi, N)}{H^{d-1}} \leqslant \frac{C(\xi, N)}{\mathcal{H}(P)^{d-1}} \leqslant |P(\xi)| = H^{-\omega(\xi,N,H)N},$$

o que implica em

$$\log_H C(\xi, N) \leqslant \log_H H^{-\omega(\xi,N,H)\cdot N+d-1}.$$

Então,

$$\omega(\xi, N, H) \leqslant \frac{d-1}{N} - \frac{\log C(\xi, N)}{N \log H}.$$

Aplicando as definições de $\omega(\xi, N)$ e $\omega(\xi)$ concluimos que

$$\omega(\xi, N) = \limsup_{H\to\infty} \omega(\xi, N, H) \leqslant \limsup_{H\to\infty} \frac{d-1}{N} - \limsup_{H\to\infty} \frac{\log C(\xi, N)}{N \log H}.$$

[3] Notemos a semelhança com a função do teorema 2.10

Mas,
$$\limsup_{H\to\infty} \frac{\log C(\xi, N)}{N \log H} = 0.$$
Então, concluímos que
$$\omega(\xi, N) \leqslant \frac{d-1}{N},$$
e por fim,
$$\omega(\xi) = \limsup_{N\to\infty} \frac{d-1}{N} = 0.$$
Então $\omega(\xi) \leqslant 0$. Para o caso $d = 1$ procedemos de maneira análoga utilizano o complemento o teorema de Louville (2.2). Ora, acabamos de mostrar uma condição para transcendência! De fato, como acabamos e ver, se $\omega(\xi) \neq 0$ este é transcendente, caso contrário é algébrico! Formalizemos este resultado a partir do seguinte teorema:

Teorema 3.3 (Caracterização para transcendentes)**.** *Dados $\xi \in \mathbb{C}$ e inteiros positivos H e N, considere os conjuntos*
$$\mathcal{P}_{N,H} = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z];\ gr(P) \leqslant N \text{ e } \mathcal{H}(P) \leqslant H\}$$
e
$$\Omega(\xi, N, H) = \min\{|P(\xi)|;\ P(z) \in \mathcal{P}_{N,H} \text{ e } P(\xi) \neq 0\}.$$
Além disso, defina as funções
$$\omega(\xi, N, H) = -\frac{\log_H \Omega(\xi, N, H)}{N},\ \omega(\xi, N) = \limsup_{H\to\infty} \omega(\xi, N, H) \text{ e } \omega(\xi) = \limsup_{N\to\infty} \omega(\xi, N).$$
Então, ξ é transcendente se, e somente se, $\omega(\xi) \neq 0$.

A partir deste resultado, vamos estudar mais detalhadamente a função $\omega(\xi)$, pois é a partir desta que será construída uma caracterização de números transcendentes, que nos fornecerá ferramentas para resultados mais profundos em relação a estes. Estamos nos referindo à Classificação de Mahler para números transcendentes, que veremos em seguida, e será nosso ponto ´´focal”

3.3 Classificação de Mahler

Uma vez estudada a função $\omega(\xi)$, uma pergunta natural seria: Quais os possíveis valores que essa função pode assumir? No Teorema (3.3) vimos que se $\omega(\xi) = 0$, ξ é algébrico, e transcendente caso contrário. Porém, deste modo, estaremos restrigindo o estudo a apenas dois casos.
Bem, sabemos que $\omega(\xi)$ é um limsup, portanto, teremos
$$0 \leqslant \omega(\xi) < \infty \quad \text{ou} \quad \omega(\xi) = \infty.$$

Além disto, $\omega(\xi, N)$ também é um limsup. Observemos que se $\omega(\xi, N_0) = \infty$ para algum inteiro positivo N_0 temos que:

$$\omega(\xi) = \limsup_{N\to\infty} \omega(\xi, N) \geqslant \omega(\xi, N_0) = \infty.$$

Então, $\omega(\xi) = \infty$. Deste modo, observamos que há duas maneiras de obtermos $\omega(\xi) = \infty$: uma delas é existir um N_0 tal que $\omega(\xi, N_0) = \infty$ e a outra é quando a sequência $\omega(\xi, 1), \omega(\xi, 2), \ldots$ não possui ponto de acumulação. Assim, podemos dividir os números complexos em quatro classes, quando:

- $\omega(\xi) = 0$;
- $0 < \omega(\xi) < \infty$;
- Existe N_0 tal que $\omega(\xi, N_0) = \infty$;
- $\omega(\xi) = \infty$ e para todo N, $\omega(\xi, N) \neq \infty$.
  Onde essas três últimas classes formam uma partição dos números transcendentes. Com o objeivo de analisá-los, vamos definir $\upsilon(\xi)$ como sendo o menor inteiro positivo N tal que $\omega(\xi, N) = \infty$. Caso $\omega(\xi, N) < \infty$ para todo N, então $\upsilon(\xi) = \infty$. Deste modo, temos quatro possibilidades para $\omega(\xi)$ e $\upsilon(\xi)$ que correspondem às quatro classes já mencionadas e que originaram, em 1932, a classificação de Mahler (MAHLER, 1932) para um número complexo ξ definida da seguinte maneira:

- Se $\omega(\xi) = 0$ e $\upsilon(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de *A-número*;
- Se $0 < \omega(\xi) < \infty$ e $\upsilon(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de *S-número*;
- Se $\omega(\xi) = \infty$ e $\upsilon(\xi) < \infty$, então ξ é chamado de *U-número*;
- Se $\omega(\xi) = \infty$ e $\upsilon(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de *T-número*.

A notação “A-número” foi propositalmente escolhida pois representa os números algébricos. De fato, pelo Teorema (3.3), α é algébrico se, e somente se, $\omega(\alpha) = 0$. Além disso, como $\omega(\alpha, N) < \infty$ para todo N inteiro positivo, temos que $\upsilon(\alpha) = \infty$.

A escolha da nomenclatura dos outros números há uma certeza quanto à origem. Acredita-se que o S foi em homenagem ao orientador de Mahler, C.L.Siegel(1896-1981) e as letras T e U foram escolhidas pela ordem alfabética, mas não há um registro concreto para a razão destas notações.

3.4 Classificação de Koksma

Como em diversas áreas da matemática, é comum existirem maneiras diferentes de abordar algo. Foi o que ocorreu com a classificação de números transcendentes, quando, alguns anos após Mahler classificá-los como S,T e U-números, o holandês Jurjen Koksma (KOKSMA, 1939), apresentou uma maneira equivalente de classificar tais números. A grande diferença fora a maneira de abordar a classificação. Enquanto Mahler estudava o quão próximo de zero $|P(\xi)|$ poderia se tornar dado com $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ com $gr(P)$ e $\mathcal{H}(P)$ limitados, Koksma se interessava no quão bem aproximado ξ poderia ser por números algébricos com graus e alturas também limitados. Desta forma, ele definiu

$$\Omega^*(\xi, N, H) = \min\{|\xi - \alpha|;\ \alpha \text{ algébrico real},\ gr(\alpha) \leqslant N,\ \mathcal{H}(\alpha) \leqslant H\ e\ \alpha \neq \xi\},$$

onde $\mathcal{H}(\alpha)$ denota a altura de α definida como a altura do polinômio minimal deste em $\mathbb{Z}[z]$.

A partir daqui, apontamos uma certa semelhança com a maneira como fora construída a classificação de Mahler, donde algumas funções auxiliares irão surgir para que a classificação siga. De fato, vamos definir a função $\omega^*(\xi, N, H)$ como

$$H^{-1-\omega^*(\xi,N,H)} = \Omega^*(\xi, N, H).$$

E, de maneira análoga ao que foi feito na seção anterior, definimos também

$$\omega^*(\xi, N) = \limsup_{H\to\infty} \omega^*(\xi, N, H) \quad e \quad \omega^*(\xi) = \limsup_{N\to\infty} \omega^*(\xi, N).$$

Notemos que $\omega^*(\xi, N)$ é o supremo dos números reais ω^* para os quais existem infinitos algébricos reais α de grau menor ou igual a N satisfazendo

$$0 < |\xi - \alpha| \leqslant \mathcal{H}(\alpha)^{-\omega^*-1}.$$

Com efeito, como

$$H^{-1-\omega^*(\xi,N,H)} = \Omega^*(\xi, N, H) \geqslant |\xi - \alpha| > 0,$$

onde α atende às condições da definição de $\Omega^*(\xi, N, H)$ temos

$$0 < |\xi - \alpha| \leqslant H^{-1-\omega^*(\xi,N,H)} \leqslant \mathcal{H}(\alpha)^{-1-\omega^*(\xi,N,H)}.$$

Como já comentado, a construção da classificação de Koksma é feita utilizando os mesmos argumentos vistos na seção anterior, de tal forma que $\upsilon^*(\xi)$ é definido de maneira análoga a $\upsilon(\xi)$, ou seja, como sendo o menor inteiro positivo N tal que $\omega^*(\xi) = \infty$ (caso tal inteiro não exista, já sabemos como a definição irá proceder).

1. Se $\omega^*(\xi) = 0$ e $\upsilon^*(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de A^*-número;
2. Se $0 < \omega^*(\xi) = 0$ e $\upsilon^*(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de S^*-número;
3. Se $\omega^*(\xi) = \infty$ e $\upsilon^*(\xi) < \infty$, então ξ é chamado de U^*-número;
4. Se $\omega^*(\xi) = \infty$ e $\upsilon^*(\xi) = \infty$, então ξ é chamado de T^*-número.

A seguir veremos que as duas classificações são equivalentes e iremos mostrar algumas relações entre elas.

3.5 Relação entre as classificações

[4] Nesta seção nosso intuito é comparar as classificações de Mahler e Koksma, enunciando alguns resultados, sendo o último fundamental para a elucidar em qual sentido estamos dizendo que as classificações são equivalentes.
Comecemos com um resultado onde podemos comparar $\omega(\xi, N)$ e $\omega^*(\xi, N)$.

Proposição 3.1. *Para qualquer inteiro positivo N e qualquer ξ real, vale*

$$\omega(\xi, N) \geqslant \omega^*(\xi, N).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos $\omega^*(\xi, N)>0$. Considere ω^* um real tal que

$$0 < \omega^* < \omega^*(\xi, N).$$

Pela definição de $\omega^*(\xi, N)$ existem infinitos algébricos não-nulos α com $gr(\alpha) < N$, onde

$$|\xi - \alpha| \leqslant \mathcal{H}(\alpha)^{-1-\omega*}.$$

Denotando por $P(z)$ o polinômio minimal de α em $\mathbb{Z}[z]$, temos, pelo teorema de Rolle (ver (IRELAND; ROSEN, 2013)) que. para alguma constante positiva $C(\xi, N)$, vale

$$|P(\xi)| \leqslant |\xi - \alpha| \max_{t \in [\xi-1, \xi+1]} |P'(t)| \leqslant C(\xi, N)\mathcal{H}(P)\mathcal{H}(\alpha)^{-1-\omega^*}.$$

Como $\mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(\alpha)$, essa relação nos mostra que $\omega(\xi, N) \geqslant \omega^*$. Fazendo ω^* tender a $\omega^*(\xi, N)$, temos o resultado desejado. □

Apesar de usarmos um dos maiores "canhões" da Teoria moderna dos números (o teorema de Rolle), conseguimos mostrar com base nos cálculos feitos em (BUGEAUD, 2004), uma majoração de $\omega(\xi, N)$ para com $\omega^*(\xi, N)$. Porém, foi somente em 1961, que obteve-se uma majoração no sentido contrário, cuja demonstração pode ser encontrada em (WIRSIN, 1961):

Teorema 3.4. *Sejam N um inteiro positivo e ξ um número real que não é um algébrico de grau menor ou igual à N. Então, temos*

$$\omega^*(\xi, N) \geqslant \omega(\xi, N) - n + 1 \tag{3.8}$$

$$\omega^*(\xi, N) \geqslant \frac{\omega(\xi, N) + 1}{2} \tag{3.9}$$

$$\omega^*(\xi, N) \geqslant \frac{\omega(\xi, N)}{\omega(\xi, N) - n + 1} \tag{3.10}$$

$$\omega^*(\xi, N) \geqslant \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 8}}{4} \tag{3.11}$$

[4] Algumas demonstrações de resultados serão omitidos nesta seção, porém mostraremos onde encontrá-las

Corolário 3.1. *Sejam N um inteiro positivo e ξ um número real que não é algébrico de grau menor ou igual a N. Se $\omega(\xi, N) = N$, então $\omega^*(\xi, N) = \omega(\xi, N) = N$.*

Demonstração. Sabemos que $N \geqslant 1$, em particular, $2N \geqslant 1 + N$, e então

$$N \geqslant \frac{1+N}{2}.$$

Juntando esse fato com o Teorema 3.4 e a Proposição 3.1, temos o resultado desejado. □

Além disso, pode-se mostrar que a medida de lebesgue do conjunto onde $\omega^*(\xi, N) = \omega(\xi, N) = N$, é “cheia” na reta. Tal resultado pode ser visto como uma consequência imediata de um resultado encontrado em (SPRINDIZUK, 1967). A seguir enunciamos mais um resultado que nos indicara a direção em que queremos definir a equivalência entre as classificações de Mahler e Koksma.
Os resultados dos dois teoremas a seguir podem ser encontrados em (BUGEAUD, 2004):

Teorema 3.5. *O conjunto dos A^*-números é precisamente o conjunto dos números algébricos. Portanto os A-números e os A^*-números coincidem.*

Uma pergunta natural é se as outras três classes da classificação de Koksma também dividem os números transcendentes em três conjuntos disjuntos. A resposta é positiva e pode ser encontrada em (BUGEAUD, 2004).
A seguir, vemos que de fato as duas classificações são equivalentes no sentido definido a partir do seguinte teorema:

Teorema 3.6. *As classificações de Mahler e Koksma são equivalentes no sentido de que qualquer S, T, U-número também será um S^*, T^*, U^*-número, respectivamente.*

Apesar de muitas relações serem conhecidas entre as duas classificações, ainda existem problemas em aberto em torno desta temática, como podemos ver a partir da seguinte conjectura:

Conjectura 3.1. *Sejam $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\omega_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências não-decrescentes no intervalo $[1, +\infty]$, tais que*

$$n \leqslant \omega_n^* \leqslant \omega_n \leqslant \omega_n^* + n - 1, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

Então existe um número real ξ transcendente, tal que

$$\omega^*(\xi, n) = \omega_n^* \quad e \quad \omega(\xi, n) = \omega_n, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

4 A Classificação de Mahler e Suas Consequências

Até o momento, discutimos resultados vinculados à aproximações diofantinas que foram de fundamental importância para a construção do nosso principal objeto de estudo: A Classificação de Mahler.

Como visto na seção anterior, Mahler dividiu os números complexos em quatro classes: Os A-números, S-números, U-números e T-números, sendo a classe dos A-números os números algébricos. Logo, o foco do nosso trabalho neste último capítulo da pequena jornada em torno dos números transcendentes será estudar resultados muito interessantes em torno das três classes restantes, e, se possível instigar o estudo para problemas em aberto nesta área. Comecemos estudando um pouco os U-números.

4.1 U-Números

Como vimos, os U-números são números transcendentes que satisfazem duas condições em torno das funções $\omega(\xi)$ e $\upsilon(\xi)$, sendo estas:

$$\omega(\xi) = \infty \quad \text{e} \quad \upsilon(\xi) < \infty. \tag{4.1}$$

Perceba que aqui podemos analisar o menor $\upsilon(\xi)$. É com esta ideia que iremos definir subclasses dentro dos U-números.

Definição 4.1. *Seja ξ um U-número no qual $\upsilon(\xi) = m$. Então dizemos que ξ é um U_m-número.*

A partir desta definição, podemos encontrar classes de números já conhecidos e representá-los através de U_m-números. Como um belo exemplo, mostraremos que os números de Liouville, definidos em 2.1 podem ser representados desta maneira.

Proposição 4.1. *Os números de Liouville são exatamente os U_1-números.*

Demonstração. Inicialmente, vamos considerar ξ um número de Liouville. Então, pela definição 2.1, existe uma sequência de infinitos racionais $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $q_n \geqslant 1$, onde

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Vamos definir $P_n(z) = q_n z - p_n$, então

$$|P_n(\xi)| = |\xi q_n - p_n| < \frac{1}{q_n^{n-1}} \leqslant 1. \tag{4.2}$$

Agora perceba que

$$|p_n| = |-\xi q_n + p_n + \xi q_n| \leqslant |\xi q_n - p_n| + |\xi q_n| \leqslant (1 + |\xi|)q_n. \tag{4.3}$$

Denotemos $\mathcal{H}(P_n)$ por H_n. Vamos mostrar agora que a seguinte desigualdade é válida para todo $n \geqslant 1$:

$$|P_n(\xi)| < \frac{(1 + |\xi|)^{n-1}}{H_n^{n-1}}.$$

Com efeito, só temos duas possibilidades para H_n, são elas $|p_n|$ ou $|q_n|$.
Se $H_n = |q_n|$, a desigualdade (4.2) nos garante que

$$|P_n(\xi)| < \frac{1}{H_n^{n-1}} < \frac{(1 + |\xi|)^{n-1}}{H_n^{n-1}}.$$

Se $H_n = |p_n|$, a desigualdade 4.3 nos dá

$$|q_n| \geqslant \frac{H_n}{(1 + |\xi|)} \Rightarrow |p_n(\xi)| \leqslant \frac{1}{q_n^{n-1}} \leqslant \frac{(1 + |\xi|)^{n-1}}{H_n^{n-1}}.$$

Por definição de $\omega(\xi, N, H)$, temos que

$$H_n^{-\omega(\xi,1,H_n)} = \min\{|P(\xi)|;\ P(z) \in \mathcal{P}_{1,H_n},\ P(\xi) \neq 0\}.$$

Pela minimalidade de $H_n^{-\omega(\xi,1,H_n)}$ e como $P_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ temos que

$$H_n^{-\omega(\xi,1,H_n)} \geqslant |P_n(\xi)| < (1 + |\xi|)^{n-1} H_n^{-(n-1)}.$$

Aplicando logaritmo de ambos os lados:

$$\log_{H_n} H_n^{-\omega(\xi,1,H_n)} < \log_{H_n}(1 + |\xi|)^{n-1} + \log_{H_n} H_n^{-(n-1)}.$$

Desta forma, obtemos

$$\omega(\xi, 1, H_n) > (n - 1)\left(1 - \frac{\log(1 + |\xi|)}{\log_{H_n}}\right).$$

Agora perceba que $H_n \to \infty$ pois a sequência $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é infinita. Assim, para observarmos o maior ponto de acumulação de $\omega(\xi, 1, H_n)$ calculemos $\omega(\xi, 1) = \limsup_{n\to\infty} \omega(\xi, 1, H_n) = \infty$.
Entao $\omega(\xi) = \infty$ e $\upsilon(\xi) = 1$, logo, ξ é um U_1-número.
Reciprocamente, vamos supor que ξ é um U_1-número. Perceba que para cada H inteiro positivo, existem a_H e b_H inteiros, com $\max\{|a_H|, |b_H|\} \leqslant H$ e $a_H \geqslant 1$, tais que

$$H_n^{-\omega(\xi,1,H)} = \min\{|a\xi + b|; max\{|a|, |b|\} \leqslant H\} = |a_H\xi + b_H|.$$

Como $\limsup_{H\to\infty} \omega(\xi, 1, H) = \infty$, então, dado um n inteiro positivo, existe um H_n tal que $\omega(\xi, 1, H_n) \geqslant n$. Assim,

$$|a_{H_n}\xi + b_{H_n}| = H_n^{-\omega(\xi,1,H_n)} \leqslant H_n^{-n}.$$

Denotando a_{H_n} e $-b_{H_n}$ por q_n e p_n, respectivamente, e como $q_n \leqslant H_n$, concluímos que

$$|q_n\xi - p_n| \leqslant \frac{1}{q_n^n},$$

e então

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n^{n+1}} < \frac{1}{q_n^n}.$$

Concluimos então, que ξ é número de Liouville. □

Uma pergunta natural seria se existem U_m-números para todo m inteiro positivo. Tal pergunta foi respondida por LeVeque em (LEVEQUE, 1953), onde ele construiu explicitamente U_m-números como raízes m-ésimas de um número de Liouville, mais especificamente

$$\sqrt[m]{\frac{3+\mathcal{L}}{4}}.$$

Em 2014, mostrou-se que um certo conjunto de números de Liouville, quando aplicado a uma determinada função racional, gera U_m-números de maneira mais natural como na forma $\alpha \cdot \mathcal{L}$ e $\alpha + \mathcal{L}$ são U_m-números, onde α é algébrico de grau m. Tal resultado pode ser encontrado em (CHAVES; MARQUES, 2014). Em 2020, mais um resultado envolvendo U_m números foi generalizado para qualquer função racional (salvo algumas condições), e pode ser encontrado em (CHAVES; MARQUES; TROJOVSKY, 2020).

Outro fato interessante sobre os U_m-números, é que, Andrew Polilington, em (POLLINGTON, 1993), mostrou que todo número real pode ser escrito como soma de dois U_m-números, generalizando o teorema de Erdös.

Outra questão que surge é: Será que existe um teorema de caracterização como os vistos para irracionais e transcendentes para os U-números? A resposta é positiva e é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Seja $\xi \in \mathbb{C}$ com $\omega(\xi) = \infty$. Então ξ é um U-número se, e somente se, existe um número inteiro positivo $\tilde{N}$ tal que dada qualquer função ilimitada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, existe uma sequência de infinitos polinômios $P_k(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H_K}$, com $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ crescentes, tais que para cada índice k é válido*

$$|P_k(\xi)| < \frac{1}{H_k^{f(k)\tilde{N}}}.$$

Demonstração. Como $\omega(\xi) = \infty$, e denotando $v(\xi) = \tilde{N}$, então

$$\omega(\xi, \tilde{N}) = \limsup_{H\to\infty}(\xi, \tilde{N}, H) = \infty.$$

Deste modo, existe uma sequência crescente de inteiros $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para a qual

$$\lim_{k\to\infty} \omega(\xi, \tilde{N}, h_k) = \infty.$$

Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ existe n_k^* tal que

$$\omega(\xi, \tilde{N}, h_n) > f(k), \quad \text{para todo } n \geqslant n_k^*$$

Considere agora uma subsequência de (h_k) com os seguintes índices:

$$n_1 = n_1^*; \quad n_k = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k^*\} + 1.$$

Deste modo garantimos que

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < n_{i+1} < \ldots \quad \text{e} \quad n_K > n_k^*.$$

Assim, temos

$$\omega(\xi, \tilde{N}, h_{n_k}) > f(k).$$

Se definirmos $H_k = h_{n_k}$, a sequência também será crescente e teremos, para cada H_k um polinômio $P_k(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H_k}$ tal que

$$|P_k(\xi)| = \Omega(\xi, \tilde{N}, H_k) = H_k^{-\omega(\xi,\tilde{N},H_k)\tilde{N}} < H_k^{f(k)\tilde{N}}. \tag{4.4}$$

Vamos supor agora que, no conjunto de polinômios $P_k(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H_K}$, exista apenas uma quantidade finita de elementos distintos. Logo, deve existir um polinômio $P(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H_{K_i}}$, para infinitos índices distintos $k_i \in \mathbb{N}$, onde

$$|P_k(\xi)| < H_{k_i}^{-f(k_i)\tilde{N}} < \mathcal{H}(P)^{-f(k_i)\tilde{N}}.$$

Fazendo i tender ao infinito, teremos $|P(\xi)| = 0$, pois $f(k_i)$ é ilimitada, donde ξ é algébrico. Absurdo. Portanto, existem infinitos polinômios distintos satisfazendo a relação (4.4).
Reciprocamente, seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ uma função ilimitada qualquer. Então temos

$$|P_k(\xi)| < H_k^{-f(k)\tilde{N}}$$

para infinitos polinômios $P_k(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H_K}$, com H_k crescente. Onde teremos que

$$H_k^{-\omega(\xi,\tilde{N},H_k)\tilde{N}} = \Omega(\xi, \tilde{N}, H_k) \leqslant |P_k(\xi)| < H_k^{-f(k)\tilde{N}}.$$

Concluímos assim, que

$$\omega(\xi, \tilde{N}, h_k) > f(k),$$

o que implica

$$\limsup_{H\to\infty} \omega(\xi, \tilde{N}, H) \geqslant \lim_{k\to\infty} \omega(\xi, \tilde{N}, H_k) > \lim_{k\to\infty} f(k) = \infty.$$

Logo, $\upsilon(\xi) \leqslant \tilde{N} < \infty$. Portanto, ξ é U-número.

$\square$

Antes de prosseguirmos com o texto, utilizaremos a notação $\omega^*(\xi, n)$ já definida na seção da classificação de Koksma, e daremos a seguinte definição:

Definição 4.2. *Um número ξ é dito um U_m^*-número se $\omega_m^*(\xi) := \omega^*(\xi, m) = \infty$ e $v^*(\xi) = m$. Em outras palavras, é o* $\limsup$ *dos números reais ω^* para os quais existem infinitos algébricos α de grau n satisfazendo*

$$0 < |\xi - \alpha| < \mathcal{H}(\alpha)^{-\omega^* - 1}$$

Veremos a seguir a demonstração do primeiro resultado que fora enunciado anteriormente:

Teorema 4.2 (Chaves; Marques,2014)**.** *Sejam α um algébrico de grau m. Suponha que o polinômio minimal $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ de α tenha coeficiente líder da forma $2^a \cdot 5^b > 1$, e $p \nmid P(0)$ para $p = 2$ e $p = 5$. Seja $\mathcal{L}$ a constante de Liouville. Então $\alpha\mathcal{L}$ é um U_m-número, com*

$$\omega_n^*(\alpha\mathcal{L}) \leqslant 2m^2 n + m - 1$$

para $n = 1, \ldots, m - 1$.

Antes de demonstrarmos o resultado, utilizaremos dois lemas cuja demonstração de um será omitida, pois foge do escopo do trabalho e é de relevante dificuldade. porém, a mesma pode ser encontrada em (BUGEAUD, 2004).
Comecemos com o seguinte:

Lema 4.1. *Dados $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grau m e $a/b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Se $Q_1(x) = a^m P\left(\frac{b}{a}x\right)$ e $Q_2(x) = b^m P\left(x - \frac{a}{b}\right)$, então*

- $\mathcal{H}(Q_1) \leqslant \max\{|a|, |b|\}^m \mathcal{H}(P)$;
- $\mathcal{H}(Q_2) \leqslant 2^{m+1} \max\{|a|, |b|\}^m \mathcal{H}(P)$.

Demonstração. Inicialmente, vamos escrever $Q_1(x)$ na forma

$$Q_1(x) = a^m \sum_{j=0}^{m} r_j \left(\frac{b}{a}x\right)^j = \sum_{j=0}^{m} r_j b^j a^{m-j} x^j.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $|a| > |b|$. Então,

$$\max\{|a|, |b|\}^m \mathcal{H}(P) \geqslant |a|^m |r_j| \geqslant |a|^{m-j} |b|^j |r_j|$$

para todo $0 \geqslant j \geqslant m$. Concluimos, então, que

$$\mathcal{H}(Q_1) \leqslant \max\{|a|, |b|\}^m \mathcal{H}(P).$$

Para a segunda afirmação, escrevemos $Q_2(x)$ na forma

$$Q_2(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i,$$

onde

$$c_i = b^m \sum_{j=1}^{m} \binom{j}{j-1} (-1)^{j-i} \left(\frac{a}{b}\right)^{j-i}$$

. O que implica que

$$|c_i| \leqslant \mathcal{H}(P) \sum_{k=0}^{m-i} \binom{k+i}{k} |a|^k |b|^{m-k} \leqslant \max\{|a|,|b|\}^m \mathcal{H}(P) \sum_{k=0}^{m-i} \binom{k+i}{k}.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{m-i} \binom{k+i}{k} = \binom{m+1}{m-i} \leqslant 2^{m+1},$$

Concluimos finalmente, que, $|c_1| \leqslant 2^{m+1} \max\{|a|,|b|\}^m \mathcal{H}(P)$. O que termina a nossa prova

□

O próximo lema nos mostra que números algébricos não podem estar tão próximos quanto quisermos. A demonstração deste teorema pode ser encontrado como Corolário A.2 de (BUGEAUD, 2004).

Lema 4.2. *Sejam α e β dois números algébricos não-nulos de graus n e m, respectivamente. Então vale a relação*

$$|\alpha-\beta| \geqslant (n+1)^{-m/2}(m+1)^{-n/2} \max\{2^{-n}(n+1)^{-(m-1)/2}, 2^{-m}(m+1)^{-(n-1)/2}\}\mathcal{H}(\alpha)^{-m}\mathcal{H}(\beta)^{-n}.$$

Com estes dois lemas em mãos podemos demonstrar o Teorema (4.2):

Demonstração do teorema (4.2): A estratégia inicial é similar à utilizada nas demonstrações da seção dos números de Liouville. Para $k \geqslant 1$ defina

$$p_k := 10^{k!} \sum_{j=1}^{k} 10^{-j!}, q_k := 10^{k!} \text{ e } \alpha_k = \frac{p_k}{q_k}.$$

Observe que $\mathcal{H}(\alpha_{k-1}) < \mathcal{H}(\alpha_k) = 10^{k!} = \mathcal{H}(\alpha_{k-1})^k$ e

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L} - \alpha_k| &= |\sum_{j\geqslant k+1} 10^{-j!}| \\
&= \sum_{j\geqslant 0} 10^{-j!-(k+1)!} \\
&= 10^{-(k+1!)} \sum_{j\geqslant 0} 10^{-j!} \\
&\leqslant (10^{k!})^{-k-1} \sum_{j\geqslant 0} 10^{-j} \\
&\leqslant \frac{10}{9} \mathcal{H}(\alpha_k)^{-k-1}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Assim, definindo $\gamma_k := \alpha\alpha_k$, obtemos, da definição (4.2),

$$|\alpha\mathcal{L} - \gamma_k| \leqslant c\mathcal{H}(\alpha_k)^{-k-1} \tag{4.6}$$

onde $c = 10|\alpha|/9$. Segue-se pelo lema (4.1) que $\mathcal{H}(\alpha_k)^m \geqslant \mathcal{H}(\alpha)^{-1}\mathcal{H}(\gamma_k)$ e assim

$$|\alpha\mathcal{L} - \gamma_k| \leqslant c\mathcal{H}(\alpha)^{\frac{k+1}{m}}\mathcal{H}(\gamma_k)^{-\frac{(k+1)}{m}} \tag{4.7}$$

donde concluímos que $\alpha\mathcal{L}$ é um U-número de tipo pelo menos m (já que γ_k tem grau m). Afirmamos que $\mathcal{H}(\alpha_k) \leqslant \mathcal{H}(\gamma_k)$ para todo $k \geqslant 1$. De fato, consideremos

$$P(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j \in \mathbb{Z}[x]$$

o polinômio minimal de α. Em particular, $P(\alpha) = 0$, e então, $Q(\gamma_k) = 0$, onde

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j p_k^{m-j} q_k^j z^j \in \mathbb{Z}[x].$$

Note que $gr(Q) = m$ e γ_k é um algébrico de grau m. Então, para provar que Q é o polinômio minimal de γ_k, precisamos mostrar que Q é primitivo. Em outras palavras, que

$$(a_0 p_k^m, a_1 p_k^{m-1} qk, \ldots, a_m q_k^m) = 1.$$

Isto segue diretamente do fato que $(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 1$ (pela definição que demos para polinômio minimal em $\mathbb{Z}[z]$) e das condições da hipótese sobre a_0 e a_m, sendo elas $p \nmid a_0$ e $a_m = 2^a \cdot 5^b$.

Temos, em particular, que

$$\mathcal{H}(\gamma_k) \geqslant \max\{|a_0||p_k|^n, |a_n||q_k|^n\} \geqslant \max\{|p_k|, |q_k|\} = \mathcal{H}(\alpha_k),$$

como desejado.

Agora usamos esse fato, junto com o lema (4.1) e obtemos

$$\mathcal{H}(\gamma_{k+1}) \leqslant \mathcal{H}(\alpha)\mathcal{H}(\alpha_{k+1})^m = \mathcal{H}(\alpha)\mathcal{H}(\alpha_k)^{(k+1)m} \leqslant \mathcal{H}(\alpha)\mathcal{H}(\gamma_k)^{(k+1)m}.$$

Agora seja γ um algébrico de grau $n < m$ e $\mathcal{H}(\gamma) \geqslant \mathcal{H}(\gamma_1)$. Então, existe um k suficientemente grande tal que

$$\mathcal{H}(\gamma_k) < \mathcal{H}(\gamma)^{2m^2} < \mathcal{H}(\gamma_{k+1}) \leqslant \mathcal{H}(\alpha)\mathcal{H}(\gamma_k)^{(k+1)m}. \tag{4.8}$$

Pelo Lema (4.2), teremos

$$|\gamma_k - \gamma| \geqslant f(m,n)\mathcal{H}(\gamma)^{-m}\mathcal{H}(\gamma_k)^{-n}, \tag{4.9}$$

onde $f(m,n)$ é uma constante positiva que não depende de k e γ. Portanto, por (4.8)

$$|\gamma_k - \gamma| \geqslant f(m,n)\mathcal{H}(\alpha)^{1/2m}\mathcal{H}(\gamma_k)^{-(k+1)/-n}. \tag{4.10}$$

Tomamos $H(\gamma)$ suficientemente grande de modo que o índice k satisfaça

$$\mathcal{H}(\gamma_k)^{(k+1)/2-n} \geqslant 2cf(m,n)^{-1}\mathcal{H}(\alpha)^{k+1/2m}. \tag{4.11}$$

Logo, por (4.7), (4.10) e (4.11) temos $|\gamma_k - \gamma| \geqslant 2|\alpha\mathcal{L} - \gamma_k|$. Portanto, exceto por um número finito de algébricos γ de grau n estritamente menor que m, vale

$$\begin{aligned} |\alpha\mathcal{L} - \gamma| &\geqslant |\gamma_k - \gamma| - |\alpha\mathcal{L} - \gamma_k| \\ &\geqslant \frac{1}{2}|\gamma_k - \gamma| \\ &\geqslant \frac{f(m,n)}{2}\mathcal{H}(\gamma)^{-m}\mathcal{H}(\gamma_k)^{-n} > \frac{f(m,n)}{2}\mathcal{H}(\gamma)^{-2m^2nm} \end{aligned}$$

onde usamos o lado esquerdo da desigualdade (4.8). Segue-se que $\omega_m^*(\alpha(L)) \leqslant 2m^2n+m-1$ o que conclui a nossa demonstração. □

Um exemplo da aplicação deste teorema é o número

$$\sqrt[2024]{\frac{2023}{2000}} \cdot \mathcal{L}.$$

De fato, o polinômio minimal de $\sqrt[2024]{2023/2000}$ é $P(x) = 2000x^{2024} - 2023$, onde $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ e nem 2, nem 5 dividem 2023. Logo, $\sqrt[2024]{2023/2000} \cdot \mathcal{L}$ é um $U_{2024}-$número.

Analisamos, até o momento, construções de U_m-números, mas várias outras maneiras de exibir estes foram criadas, e, para mais exemplos, o leitor pode se referir à (ORYAN., 1980) e (ORYAN, 1983).

No teorema 2.5 mostramos que $\mathbb{L}$ apresenta medida (de Lebesgue) nula no intervalo $(0,1)$. Mas o que dizer da medida dos números de Liouville em toda reta? E, agora que sabemos que o conjunto destes números é exatamente a classe dos U_1-números, podemos analisar a medida de Lebesgue destes no plano complexo através de um "forte" resultado, que nos afirma que a medida de Lebesgue do conjunto dos $U-$números em $\mathbb{C}$ é nula.

Teorema 4.3. *O conjunto dos U-números apresentam medida de Lebesgue nula em $\mathbb{C}$.*

Para prosseguirmos, precisaremos de lemas que serão de fundamental importância para a demonstração deste.
Omitiremos as demonstrações dos lemas, porém estas podem ser encontradas em (BURGER; TUBBS, 2004).

Lema 4.3. *Dado um polinômio $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, seja $\sigma(P) = \max\{gr(P), \log \mathcal{H}(P)\}$. Suponha que $\xi \in \mathbb{C}$ é tal que existe um número real $\rho > 0$ satisfazendo*

$$|P(\xi)| < e^{-\rho \cdot gr(P)\sigma(P)}.$$

Então, existe um fator irredutível $Q(z) \in \mathbb{Z}[z]$, de $P(z)$, que satisfaz

$$|Q(\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{3}\rho \cdot gr(Q)\sigma(Q)}.$$

Lema 4.4. *Sejam $Q(z)$ um polinômio irredutível em $\mathbb{Z}[z]$ e $\xi \in \mathbb{C}$. Se α é a raíz de $Q(z)$ mais próxima de ξ e $2 \leqslant gr(Q) \leqslant \mathcal{H}(Q)$, então*

$$|\xi - \alpha| \leqslant \mathcal{H}(Q)^{6gr(Q)}|Q(\xi)|.$$

Durante a demonstração, talvez apareçam alguns termos que não foram apresentados no texto, mas quando (e se) for necessário, faremos uma nota de rodapé explicando. Se esta não aparecer, é porque partimos do pressuposto que o leitor já está familiarizado com determinados conceitos. Com estas observações, mostremos que a medida de Lebesgue dos U-números é nula em $\mathbb{C}$.

Demonstração do Teorema 4.3. Consideremos $\xi \in \mathbb{C}$ um U-número, e $f(k)$ uma função crescente, positiva e ilimitada. Sabemos, pelo Teorema 4.1, da existência de um inteiro positivo $\tilde{N}$ e uma sequência de infinitos polinômios $P_k(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H_k}$, com $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ crescente, tal que para todo índice k, temos

$$|P_k(\xi)| \leqslant \frac{1}{H_k^{f(k)\tilde{N}}}.$$

Escrevendo

$$H_k^{-f(k)\tilde{N}} = e^{\log(H_k)^{-f(k)\tilde{N}}},$$

obtemos

$$|P_k(\xi)| < H_k^{-f(k)\tilde{N}} \leqslant e^{-f(k)gr(P_k)\log(H_k)}. \tag{4.12}$$

Como a sequência $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, $(\log H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ também o é, e portanto existe um $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\log(H_k) \geqslant \tilde{N} \geqslant gr(P_k) \quad \text{para todo } k \geqslant k_0. \tag{4.13}$$

Vamos tentar, agora, encaixar as condições necessárias para podermos aplicar o lema 4.3. Para isso, vamos definir $\sigma(P_k) = \max\{gr(P_k), \log(H_k)\}$ para todo $k \geqslant k_0$.
Dados esses termos junto com a relação (4.12), vamos reescrever a expressão (4.12) de seguinte maneira:

$$|P_k(\xi)| \leqslant e^{-f(k)gr(P_k)\sigma(P_k)}. \tag{4.14}$$

Enfim recaímos nas hipóteses do lema (4.3). Reordenando os índices de modo que a relação anterior seja válida para todo K e, pelo lema (4.3), observamos que deve existir um fator irredutível $Q_k(z) \in \mathbb{Z}[z]$ de $P_k(z)$, onde

$$|Q_k(\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{3}f(k)gr(Q_k)\sigma(Q_k)}. \tag{4.15}$$

Nosso objetivo agora será encontrar uma sequência de infinitos polinômios irredutíveis $Q_k(z)$ para os quais a desigualdade (4.15) seja válida e que $\sigma(Q_k)$ possa ser substituído por $\log \mathcal{H}(Q_k)$. Para isso, mostraremos que existe uma subsequência $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ com

$$\mathcal{H}(Q_{k_1}) < \mathcal{H}(Q_{k_2}) < \mathcal{H}(Q_{k_3}) < \dots.$$

Com efeito, suponha que existe inteiro positivo H tal qeu $\mathcal{H}(Q_k) \leqslant H$ para todo k suficientemente grande. Lembrando que $gr(Q_k) \leqslant gr(P_k) \leqslant \tilde{N}$, então $Q_k(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H}$. Como o conjunto $\mathcal{P}_{\tilde{N},H}$ é finito, e a desigualdade (4.15) é válida para uma quantidade infinita de índices, garantimos pelo princípio da casa dos pombos, que existe polinômio $Q(z) \in \mathcal{P}_{\tilde{N},H}$ e uma subsequência $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ crescente, tal que

$$Q(z) = Q_{k_1}(z) = \cdots = Q_{k_n}(z) = \dots$$

Daí,

$$|Q(\xi)| = |Q_{k_i}(\xi)| < e^{-f(k_i)gr(Q)\sigma(Q)}. \tag{4.16}$$

Como f é crescente e ilimitada, fazendo $i \to \infty$, teremos $f(k_i) \to \infty$ e então $|Q(\xi)| = 0$, o que contradiz o fato de termos tomado ξ transcendente.
Reordenaremos os índices $k_i's$ de tal forma que

$$e^{\tilde{N}} < \mathcal{H}(Q_{k_1}) < \mathcal{H}(Q_{k_2}) < \mathcal{H}(Q_{k_3}) < \dots \tag{4.17}$$

Como $e^{gr(Q_{k_i})} \leqslant e^{\tilde{N}} < \mathcal{H}(Q_{k_i})$ temos que $gr(Q_{k_i}) < \log \mathcal{H}(Q_{k_i})$ para todo índice k_i. Assim,

$$\sigma(Q_{k_i}) \overset{\text{def}}{=} \max\{gr(Q_{k_i}), \log \mathcal{H}(Q_{k_i})\} = \log \mathcal{H}(Q_{k_i}).$$

Conseguimos então o que queriamos, e podemos escrever a relação (4.15) da forma

$$|Q_{k_i}(\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{3}f(k_i)gr(Q_{k_i})\log(Q_{k_i})} < \left(e^{\log \mathcal{H}(Q_{k_i})}\right)^{-\frac{1}{3}f(k_i)gr(Q_{k_i})}.$$

Concluímos, deste modo, que

$$|Q_{k_i}(\xi)| < \mathcal{H}(Q_{k_i})^{-\frac{1}{3}f(k_i)gr(Q_{k_i})}. \tag{4.18}$$

Pelo Lema 4.4, temos que, para cada k_i, existe uma raíz α_{k_i} de $Q_{k_i}(z)$, satisfazendo $\alpha_{k_i} \in \mathcal{A}_{\tilde{N},\mathcal{H}(Q_{k_i})}$, onde

$$\mathcal{A}_{\tilde{N},\mathcal{H}(Q_{k_i})} = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}};\quad gr(\alpha) \leqslant \tilde{N} \;\text{ e }\; \mathcal{H}(\alpha) \leqslant \mathcal{H}(Q_{K_i})\}.$$

Assim,

$$|\xi - \alpha_{k_i}| \leqslant \mathcal{H}(Q_{k_i})\mathcal{H}(Q_{k_i})^{-\frac{1}{3}f(k_i)gr(Q_{k_i})}.$$

Como f é crescente e ilimitada, para i suficientemente grande, temos que $f(k_i) > 27$. Substituindo em (4.18), obtemos

$$|\xi - \alpha_{k_i}| < \mathcal{H}(Q_{k_i})^{-3gr(Q_{k_i})}.$$

Como, Q_{k_i} é minimal de α_{k_i}, reescrevemos

$$|\xi - \alpha_{k_i}| < \mathcal{H}(\alpha_{k_i})^{-3gr(\alpha_{k_i})}. \tag{4.19}$$

Caso necessário, reindexamos a sequência de algébricos (α_{k_i}) para que a relação acima seja válida para todo k_i. Tendo estas observações feitas, vamos definir o disco no plano complexo

$$\mathcal{D}(\xi, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - \xi| < r\}.$$

Então, o que a desigualdade (4.19) e as observações feitas anteriormente nos dizem é que, para cada U-número $\xi \in \mathbb{C}$, existe um inteiro positivo $\tilde{N} = \tilde{N}(\xi)$ e infinitos algébricos distintos $\alpha_{k_i} \in \mathcal{A}_{\tilde{N}, H_{k_i}}$ tais que para todo k_i

$$\xi \in \mathcal{D}\left(\alpha_{k_i}, H_{k_i}^{-3gr(\alpha_{k_i})}\right),$$

onde $H_{k_i} = \mathcal{H}(\alpha_{k_i})$.

Como $gr(\alpha_{k_i}) \leqslant \tilde{N}$ para infinitos algébricos α_k, temos, pelo princípio da casa dos pombos, que existe uma subsequência destes algébricos onde todos os seus elementos possuem o mesmo grau. Deste modo, redefinimos $\tilde{N}$ como o grau dos algébricos desta subsequência e reindexamos tal sequência (se necessário), para termos $gr(\alpha_{k_i}) = \tilde{N}$. Logo,

$$\xi \in \mathcal{D}\left(\alpha_{k_i}, H_{k_i}^{-3\tilde{N}}\right) \tag{4.20}$$

é válido para todo i.

Definimos agora, para N e H inteiros positivos, o conjunto

$$\mathcal{U}(N, H) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_{N,H}} \mathcal{D}(\alpha, H^{-3N}).$$

Assim, dado ξ um U-número, para todo $N \geqslant \tilde{N}(\xi)$ e H suficientemente grande, $\xi \in \mathcal{U}(N, H)$, por (4.20). Observamos que dado um inteiro positivo h^*, para cada U-número ξ, existe índice $n = n(\xi)$ tal que $h^* \leqslant H_{k_n}$, pois a sequência de inteiros (H_{k_i}) é crescente e ilimitada. Além disso, $\xi \in \mathcal{D}\left(\alpha_{k_m}, H_{k_n}^{-3\tilde{N}}\right)$. Portanto, podemos afirmar que todo U-número satisfaz

$$\xi \in \bigcup_{H=h^*}^{\infty} \bigcup_{N=2}^{\infty} \mathcal{U}(N, H).$$

Agora, queremos encontrar um limitante superior para a área das uniões acima, para uma escolha conveniente de h^*. Primeiro, vamos estimar a área do conjunto $\mathcal{U}(N, H)$ e depois relacionar com a área da tripla união. Tentamos fazer uma pequena representação através da figura 3, sem muito rigor, apenas como um aspecto um pouco mais visual da prova.

Vamos estimar a área do conjunto $\mathcal{U}(N, H)$ ignorando todas as interseções, apenas somando as áreas dos discos:

$$\acute{A}rea\ (\mathcal{U}(\mathcal{N}, \mathcal{H})) \leqslant \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{N,H}} \acute{A}rea\ (\mathcal{D}(\alpha, H^{-3N})) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{N,H}} \pi H^{-6N}. \tag{4.21}$$

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de polinômios em $\mathcal{P}_{N,H}$ é $(2H+1)^{N+1}$. Cada um desses polinômios tem no máximo N raízes. Logo, o total de algébricos em $\mathcal{A}_{N,H}$ é limitado por

$$N(2H+1)^{N+1} \leqslant N(3H)^{N+1} \leqslant 3^{N+1} N H^{2N}.$$

Utilizando esta desigualdade em (4.21), obtemos

$$\acute{A}rea\ (\mathcal{U}(\mathcal{N},\mathcal{H})) \leqslant \frac{3^{N+1}NH^{2N}\pi}{H^{6N}} \leqslant \left(\frac{3^{N+1}N\pi}{H^{2N}}\right) \cdot \frac{1}{H^2}. \tag{4.22}$$

Para $N \geqslant 2$ e $H \geqslant 9$, vale a desigualdade

$$\frac{3^{N+1}}{h^{2N}} \cdot \pi N \leqslant \frac{3^{N+1}}{3^{4N}} \cdot \pi N \leqslant \frac{4}{3^{2N-1}} \cdot \frac{N}{3^N}.$$

Como, para $N \geqslant 2$, $\dfrac{4}{3^{2N-1}} \leqslant 1$ e $N^3 \leqslant 3^N$, então

$$\frac{3^{N+1}}{H^{2N}} \cdot \pi N \leqslant \frac{1}{N^2}. \tag{4.23}$$

Substituindo (4.23) em (4.22), obtemos

$$\acute{A}rea\ (\mathcal{U}(\mathcal{N},\mathcal{H})) \leqslant \frac{1}{N^2} \cdot \frac{1}{H^2}.$$

Utilizando a identidade $\displaystyle\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} = \frac{\pi^2}{6}$, obtemos a majoração

$$\acute{A}rea \bigcup_{N=2}^{\infty} (\mathcal{U}(\mathcal{N},\mathcal{H})) \leqslant \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \cdot \frac{1}{H^2} = \frac{\pi^2}{6H^2}.$$

Dado um ϵ, escolhemos h^* suficientemente grande, de modo que seja válido

$$\sum_{H=h^*}^{\infty} \frac{1}{H^2} < \frac{6}{\pi^2} \cdot \epsilon.$$

Esta escolha é sempre possível pois $\displaystyle\sum_{H=h^*}^{\infty} \frac{1}{H^2} \to \infty$ quando $h^* \to \infty$.
Deste modo, concluímos, finalmente, que

$$\acute{A}rea \left(\bigcup_{H=h^*}^{\infty} \bigcup_{N=2}^{\infty} \mathcal{U}(N,H) \right) \leqslant \frac{\pi^2}{6} \sum_{H=h^*}^{\infty} \frac{1}{H^2} < \epsilon.$$

Donde concluímos que os U-números têm medida de Lebesgue nula em $\mathbb{C}$. □

Em 1953, Mahler mostrou que $\log(\alpha)$ não é um U-número, onde $\alpha \neq 1$, é um algébrico não-nulo. Um resultado clássico da teoria transcendente dos números, conhecido como teorema de Lindemann, nos afirma que $\log(\alpha)$ é transcendente. Muitos outros resultados acerca dos U-números foram também conjecturados, e veremos alguns deles no tópico final deste trabalho. A seguir, estudaremos um pouco sobre outra classe de números transcendentes via Mahler: os S-números.

4.2 S-números

Na seção anterior, pudemos observar alguns comportamentos e propriedades dos U-números em $\mathbb{C}$. Um desses resultados nos mostra que a medida de Lebesgue do conjunto dos U-números é nula. Uma consequência imediata deste resultado é que a união dos conjuntos dos $S-$ e $T-$números apresentam medida "cheia". De fato veremos, que na verdade, o conjunto dos S-números constituem "a maior parte dos números", enquanto os T-números têm medida nula.

Sabido que π é um número transcendente, podemos indagar que este é um S-número, porém não há um resultado que nos mostre isto, sendo de fato até hoje uma conjectura.

Em relação à constante e, temos o resultado de Hermite (1822-1901), que pode ser visto como teorema 3.4 em (BURGER; TUBBS, 2004), que nos garante que para todo polinômio não-nulo $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, e qualquer algébrico não-nulo α, temos

$$0 < |P(e^{\alpha})|.$$

Então, pela definição (1.1), e é transcendente. Mas será que, ao contrário do π, podemos determinar em qual classe ele se encontra?

Primeiramente, vamos de fato mostrar que o conjunto dos S-números tem medida de Lebesgue "cheia". Para tal, usaremos como base resultados encontrados em (CHAVES, 2010) e (BURGER; TUBBS, 2004). Para a demonstração desse fato, precisamos antes de um lema cuja demonstração é análoga ao teorema (4.1).

Lema 4.5. *Seja $\xi \in \mathbb{C}$. Então $\omega(\xi) = \infty$ se, e somente se, dada uma função ilimitada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, existe uma sequência de infinitos polinômios $P_k(z) \in \mathcal{P}_{N_k,H_K}$, com $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ crescente e N_k ilimitado, tal que para cada índice k é válido*

$$|P_k(\xi)| < \frac{1}{H_k^{f(k)N_k}}.$$

Mais ainda, se $v(\xi) = \infty$, então $P_k(\xi)$ pode ser escolhido de maneira que $N_k < \log \mathcal{H}(P_k)$.

Teorema 4.4. *Quase todos os números são S-números.*

Demonstração. A demonstração deste fato usa a mesma técnica que utilizamos para provar o Teorema 4.3, mas desta vez iremos mostrar que o conjunto dos T-números tem medida de Lebesgue nula, então, como consequência, a medida de Lebesgue da classe dos S-números é cheia!

Seja ξ um T-número. Pelo Lema 4.5, dada uma função positiva e ilimitada $f(k)$, existe uma sequência de infinitos polinômios $P_k(z) \in \mathcal{P}_{N_k,H-k}$, tal que para cada índice k a seguinte relação é válida:

$$|P_k(\xi)| < H_k^{-f(k)N_k}. \tag{4.24}$$

Além disso, como a sequência das alturas é crescente, também temos

$$\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_3 < \dots$$

Podemos então reescrever a desigualdade (4.24) na forma

$$|P_k(\xi)| < H_k^{-f(k)N_k} \leqslant \mathcal{H}(P_k)^{-f(k)N_k}.$$

Escrevendo $\mathcal{H}(P_k)^{-f(k)N_k}$ como $\left(e^{\log \mathcal{H}(P_k)}\right)^{-f(k)gr(P_k)}$, obtemos

$$|P_k(\xi)| \leqslant e^{-f(k)gr(P_k)\sigma(P_k)},$$

já que $N_k \geqslant gr(P_k)$ e $\sigma(P_k) \geqslant \log \mathcal{H}(P_k)$ (vale salientar que σ aqui tem a mesma definição da que fora dada no teorema (4.3).

Reordenando os índices de modo que a relação anterior seja válida para todo K e, pelo lema (4.3), observamos que deve existir um fator irredutível $Q_k(z) \in \mathbb{Z}[z]$ de $P_k(z)$, onde

$$|Q_k(\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{3}f(k)gr(Q_k)\sigma(Q_k)}. \tag{4.25}$$

Mostremos agora que após encontrar uma subsequência apropriada de (Q_k) e reindexá-la, se necessário, é possível termos

$$gr(Q_1) < gr(Q_2) < \dots < gr(Q_k) < \dots$$

Com efeito, suponha que a sequência $(gr(Q_k))$ é limitada por algum M inteiro positivo. Temos então dois casos: $\mathcal{H}(Q_k)$ limitada ou ilimitada. Caso $\mathcal{H}(Q_k)$ seja limitada, teremos a mesma situação que ocorrera na demonstração do Teorema (4.3) e assim, $\xi \in \bar{\mathbb{Q}}$. Logo, $\mathcal{H}(Q_k)$ deve ser ilimitada. Considere a subsequência $\mathcal{H}(Q_{k_i})$ tal que $gr(Q_{k_i}) = \tilde{M}$, para algum M inteiro positivo. Assim,

$$|Q_{k_i}(\xi)| \leqslant e^{-\frac{1}{3}f(k_i)\sigma(Q_{k_i})\tilde{M}} < \left(e^{\log \mathcal{H}(Q_{k_i})}\right)^{-\frac{1}{3}f(k_i)\tilde{M}}.$$

Concluímos, deste modo, que

$$|Q_{k_i}(\xi)| < \mathcal{H}(Q_{k_i})^{-\frac{1}{3}f(k_i)\tilde{M}} = H_{k_i}^{-\frac{1}{3}f(k_i)\tilde{M}}. \tag{4.26}$$

Onde denotamos $H_{k_i} = \mathcal{H}(Q_{k_i})$. Mas sabemos, por definição, que

$$|Q_{k_i}(\xi)| \geqslant \Omega(\xi, \tilde{M}, H_{k_i}) = H_{k_i}^{-\omega(\xi,\tilde{M},H_{k_i})\tilde{M}}.$$

Utilizando-a em (4.26), obtemos

$$H_{k_i}^{-\omega(\xi,\tilde{M},H_{k_i})\tilde{M}} \leqslant H_{k_i}^{-\frac{1}{3}f(k_i)\tilde{M}},$$

donde concluímos que

$$\omega(\xi, \tilde{M}, H_{k_i}) \geqslant \frac{1}{3}f(k_i).$$

Operando com as funções já conhecidas $\omega(\xi, \tilde{M})$, $\omega(\xi)$ e $\upsilon(\xi)$, teremos

$$\omega(\xi, \tilde{M}) = \limsup_{H\to\infty} \omega(\xi, \tilde{M}, H) \geqslant \limsup_{i\to\infty} \omega(\xi, \tilde{(M)}, H_{k_i}) \geqslant \frac{1}{3} \lim_{i\to\infty} f(k_i) = \infty.$$

Teremos assim, que existe um inteiro $\tilde{M}$ que satisfaz $\omega(\xi, \tilde{M}) = \infty$, o que contradiz o fato de ξ ser um T-número, provando a existência da sequência desejada.
Observamos também que é possível selecionar outra subsequência conveniente para termos

$$\mathcal{H}(Q_1) < \mathcal{H}(Q_2) < \cdots < \mathcal{H}(Q_k) < \ldots$$

Denotando $gr(Q_k) = N_k^*$ e $\mathcal{H}(Q_k) = H_k^*$, podemos escolher polinômios irredutíveis $Q_k(z)$ que satisfazem, para cada índice k, a desigualdade

$$|Q_k(\xi)| \leqslant \left(e^{\sigma(Q_k)}\right)^{-\frac{1}{3}f(k)N_k^*} \leqslant \left(e^{\log H_k^*}\right)^{-\frac{1}{3}f(k)N_k^*}.$$

e então,

$$|Q_k(\xi)| \leqslant H_k^{*-\frac{1}{3}f(k)N_k^*},$$

onde as sequências (N_k^*) e (H_k^*) são crescentes.
Nosso objetivo agora é aplicar o Lema 4.4 e concluir que para todo índice k existe um algébrico $\alpha_k \in \mathcal{A}_{N_k^*, H_k^*}$ satisfazendo

$$|\xi - \alpha_k| \leqslant H_k^{*6N_k^*} |Q_k(\xi)|,$$

ou seja,

$$|\xi - \alpha_k| \leqslant H_k^{*6N_k^*} H_k^{*-\frac{1}{3}f(k)N_k^*}.$$

Como $f(k)$ é crescente e ilimitada, para $f(k) > 27$ teremos

$$|\xi - \alpha_k| \leqslant H_k^{*-3N_k^*}.$$

Portanto, para cada ξ, T-número, existem infinitos $H's$ e $N's$ tais que para cada par (H, N), existe um algébrico $\alpha \in \mathcal{A}_{N,H}$ satisfazendo

$$\xi \in \mathcal{D}(\alpha, H^{-3N}).$$

Como tínhamos visto no Teorema 4.3, para inteiros positivos H e N denotamos

$$\mathcal{U}(N, H) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_{N,H}} \mathcal{D}(\alpha, H^{-3N}),$$

e observamos, pelos mesmos argumentos, que, para cada T-número ξ,

$$\xi \in \bigcup_{H=h^*}^{\infty} \bigcup_{N=2}^{\infty} \mathcal{U}(N, H),$$

para todo h^* suficientemente grande. Então, pela demonstração anterior, escolhemos h^* apropriado de maneira que, dado $\epsilon > 0$, temos

$$\acute{A}rea\left(\bigcup_{H=h^*}^{\infty}\bigcup_{N=2}^{\infty}\mathcal{U}(N,H)\right) < \epsilon.$$

Assim, mostramos que os T-números apresentam medida de Lebesgue nula, e, como consequência, que "quase todos os números são S-números". □

Apesar deste resultado mostrar que é muito provável o π ser um S-número, nada foi concretizado até hoje. Mahler, em seu trabalho, (MAHLER, 1932), mostrou que para todo número algébrico α diferente de zero, e^{α} é um S-número, respondendo assim, a pergunta feita no início da seção.

Nas proximas Seções, iremos falar um pouco sobre os T-números e explorar um resultado que envolve diretamente dependência algébrica e a classificação de Mahler.

4.3 T-Números

Como vimos através dos resultados anteriores, Mahler observou que o conjunto dos U-números é não vazio (uma vez que os números de Liouville são exatamente os U_1-números). Além disso, foi possível mostrar que o conjunto dos U-números e T-números apresentam medidas de Lebesgue nula. No entanto, Mahler não demonstrou que os T-números existem.

O primeiro resultado envolvendo a existência de T-números é datado de 1968, dado em um paper do matemático Wolfgang M. Schmidt (1933), onde ele demonstra a existência de T-números através de sequência de algébricos que não são explícitos.

Até hoje, não existem exemplos conhecidos de T-números, apesar de sabermos da existência destes.

Escreveremos aqui a demonstração, nada elementar, da existência de tais números. O desenvolvimento foi baseado em (SCHMIDT, 1968) e (CHAVES, 2010).

Antes da demonstração, precisaremos do seguinte Lema, cuja demonstração será omitida e pode ser encontrada em (BAKER, 1975).

Lema 4.6. *Para todo algébrico α de grau maior que n e $\epsilon > 0$, existe apenas uma quantidade finita de algébricos β, onde B é a altura de β, de grau no máximo n tais que*

$$|\alpha - \beta| < B^{-n-1-\epsilon}. \tag{4.27}$$

Teorema 4.5. *T-números existem.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ...$ algébricos não nulos e $\upsilon_1, \upsilon_2, ...$ números reais maiores que 1. Mostraremos que existe uma sequência $\gamma_1, \gamma_2, ...$ de números não nulos onde $\gamma_j/\alpha_j \in \mathbb{Q}$ e tal que, se h_j denota a altura de γ_j e $H_j = h_j^{\upsilon_j}$, então $H_{j_1} > 2H_j$ e além disso, γ_{j+1} está contido no intervalo $I_j := \{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{4}H_j^{-1} < x - \gamma_j < \frac{1}{2}H_j^{-1}\}$. Também mostraremos que esta sequência pode ser escolhida de modo que para alguns números reais $\lambda_1, \lambda_2, ...$ em $(0,1)$, teremos para todo o algébrico β com grau $n \leqslant j$ e diferente de $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_j$ a desigualdade

$$|\gamma_j - \beta| > B^{-1} \tag{4.28}$$

onde $B = \lambda_n^{-1} b^{(3n)^4}$ e b denota a altura de β. Assim, a sequência $\gamma_1, \gamma_2, ...$ tende para um limite ξ que satisfaz (4.28) para todo o algébrico β diferente de $\gamma_1, \gamma_2, ...$ e também

$$\frac{1}{4}H_j^{-1} \leqslant \xi - \gamma_j \leqslant H_j^{-1} \text{ para todo j.}$$

Agora escolhemos $\alpha_1, \alpha_2, ...$, denotando n_j como o grau de α_j, de modo que a equação $n_j = n$ tenha infinitas soluções, ou seja que infinitos α_j's possuam grau n, para cada n inteiro positivo. Então ξ é um T^*-número, donde também é um T-número pelo Teorema 3.6. Devemos construir $\gamma_1, \gamma_2, ...$ satisfazendo quatro condições a serem vistas. Seja J_j o conjunto dos $x \in I_j$ tais que $|x - \beta| > 2B^{-1}$ para todo algébrico β de grau $n \leqslant j$ que são diferentes de $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ e satisfazem $B > H_j$. Então precisamos garantir que

(i) $\gamma_j \in J_{j-1}$;

(ii) $|J_j| > \frac{1}{2}|I_j|$, onde $|I|$ é o comprimento do intervalo I;

(iii) $|\gamma_j - \beta| > 2B^{-1}$ para todo $\beta \neq \gamma_j$ de grau j;

(iv) $\dfrac{\gamma_j}{\alpha_j} = \dfrac{p_j}{q_j}$, com a fração p_j/q_j irredutível e $q_j > 0$, então $|\gamma_j - \beta| > q_j^{-1}$ para todo β de grau $n \geqslant j$ e $b^{3n} \leqslant q_j$.

Usaremos que $x \gg y \Longleftrightarrow x \geqslant cy$ e $x \ll y \Longleftrightarrow x \leqslant dy$ para constantes c e d.

Para definir γ_1, primeiro observamos que para todo primo q_1 suficientemente grande, existem $c_1 \gg q_1$ números γ da forma $(p_1/q_1)\alpha_1$ no intervalo $(1,2)$ onde a constante implícita depende apenas de α_1, distando $d_1 \gg q_1^{-1}$ entre si. Além disso, existem $k_1 \ll q_1^{\frac{2}{3}}$ racionais β com $b^3 \leqslant q_1$, pois existem $\ll 2q_1^{\frac{1}{3}}$ possibilidades para o numerador e para o denominador de β. Assim, existem $\ll q_1^{\frac{2}{3}}$ números γ satisfazendo $|\gamma - \beta| \leqslant q_1^{-1}$ para pelo menos uma escolha de β. Portanto, podemos escolher γ_1 tal que (iv) seja válido, e pelo lema... podemos ter γ_1 de modo que as condições sobre $|\gamma_1 - \beta|$ sejam satisfeitas. Mostraremos mais adiante que (ii) é válido para o caso $j = 1$ se $q_1 \gg 1$.

Supondo que os $\gamma_1, ..., \gamma_{j-1}$ já foram definidos satisfazendo as condições acima; procedemos para construir γ_j. As constantes implícitas por $\gg$ ou $\ll$ dependerão apenas de números já especificados, incluindo possivelmente $\lambda_1, ..., \lambda_{j-1}$. Primeiro, seja J'_{j-1} definido como J_{j-1} mas com a condição de que as alturas dos β's em questão satisfazem $b^{3n} \leqslant q_j$. O número de β's para os quais a última desigualdade é válida é $\ll q_j^{\frac{2}{3}}$ e assim J'_j consiste de $\ll q_j^{\frac{2}{3}}$ intervalos. Ademais, $J'_{j-1} \subset J_{j-1}$ e por (ii) temos $|J'_{j-1}| \geqslant \frac{1}{2}|I_{j-1}| \gg 1$. Se segue que, para todo primo q_j suficientemente grande, existem $\gg q_j$ números γ em J'_{j-1} da forma $(p_j/q_j)\alpha_j$, onde p_j é um inteiro $\ll q_j$ com $(p_j, q_j) = 1$. Além disso, tais γ estão na verdade em J_{j-1}, pois se a altura de β satisfaz $b^{3n} > q_j$ então $B > q_j^{(3n)^3}$ e assim, observando que $(q_j/p_j)\beta$ tem altura $\ll q_j^n b$, obtemos pelo Lema 4.6

$$|\gamma - \beta| \gg q_j^{-1}(q_j^n b)^{-3n} > 2B^{-1} \tag{4.29}$$

Agora, como acima, existem $\ll q_j^{\frac{2}{3}}$ números β satisfazendo as hipóteses do item (iv), logo podemos escolher $\gamma = \gamma_j$ em J_{j-1} de modo que as condições de (iv) são válidas. Então temos $|\gamma_j - \beta| > B^{-1}$ para todo β diferente de $\gamma_1, ..., \gamma_j$ com grau $n < j$ e $B > H_{j-1}$; e na verdade isso também vale para $B \leqslant H_{j-1}$, e assim, tomando k como o menos índice $\geqslant n$ para o qual é válido $B \leqslant H_k$ e utilizando (i) ou (iii) onde $j = k$ de acordo com $k > n$ ou $k = n$, obtemos

$$|\gamma_j - \beta| \geqslant |\gamma_k - \beta| - |\gamma_j - \gamma_k| > 2B^{-1} - H_k^{-1} \geqslant B^{-1}. \tag{4.30}$$

Agora usamos o Lema 4.6 para escolher γ_j tal que $|\gamma_j - \beta| > 2B^{-1}$ para todo algébrico $\beta \neq \gamma_j$ de grau $n = j$. Resta apenas mostrar, como no caso $j = 1$, que (ii) será satisfeita para q_1 suficientemente grande. Temos agora que $|x - \beta| > 2B^{-1}$ para todo $x \in I_j$ e todo $\beta \neq \gamma_j$ com grau $n \leqslant j$ e $H_j < B \leqslant H_j^3$. Caso $b^{3n} \leqslant q_j$ então, já que $H_j \gg q_j^{\upsilon_j}$ e $\upsilon_j > 1$, segue de (iv) que

$$|x - \beta| \geqslant |\gamma_j - \beta| - |\gamma_j - x| \geqslant q_j^{-1} - H_j^{-1} \geqslant 2H_j^{-1} > 2B^{-1}, \tag{4.31}$$

e se $b^{3n} > q_j$ então, usando novamente o Lema 4.6, obtemos

$$|x - \beta| \geqslant q_j^{4n^2} b^{-3n} - H_j^{-1} \geqslant B^{-\frac{1}{4}} - B^{-\frac{1}{3}} > 2B^{-1}. \tag{4.32}$$

Por isso, qualquer x no complementar de J_j em I_j satisfaz $|x - \beta| \leqslant 2B^{-1}$ para algum β de grau $n \leqslant j$ e com $B > H_j^3$. Mas a quantidade de β's com grau n e altura b é $\ll b^n$, e assim o seu complementar tem medida $\ll \sum B^{-1}b^n$, onde o somatório é tomado sobre todo n, b com $n \leqslant j$ e $B > H_j^3$. Isto implica em $\ll H_j^{-2} < \frac{1}{8}H_j^{-1}$, e o resultado se segue. □

4.4 O Resultado Principal

Para finalizarmos esta jornada introdutória sobre aproximações diofantinas e classificação de Mahler, mostraremos um resultado que exibe uma relação direta entre dependência algébrica de dois números e a classificação destes.

Dois números ξ e ζ são ditos *algebricamente dependentes* se existe um polinômio, não nulo, de duas variáveis $P(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ tal que $P(\xi,\zeta) = 0$.

Teorema 4.6. *Se dois números são algebricamente dependentes, então eles pertencem à mesma classe.*

Antes de demonstração do teorema, precisamos do seguinte lema, cuja demonstração iremos omitir e pode ser encontrada em (BURGER; TUBBS, 2004).

Lema 4.7. *Sejam $P(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $c \in \mathbb{Z}$. Então:*

- *Se* $P(x) = \prod_{j=1}^{k} P_j(x)$, *então* $\mathcal{H}(P) \leqslant \prod_{j=1}^{k} \mathcal{H}(P_k)$;
- *Se* $P(x) = \sum_{j=1}^{k} P_j(x)$, *então* $\mathcal{H}(P) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \mathcal{H}(P_k)$;
- *Se* $P(x) = cP_1(x)$, *então* $\mathcal{H}(P) \leqslant |c|\mathcal{H}(P_1)$.

A ideia da demonstração do teorema (4.6) é a seguinte: Supondo que ξ e ζ são algebricamente dependentes, existe um polinômio não-nulo $Q(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ satisfazendo $Q(x,y) = 0$. Queremos então mostrar que ξ e ζ possuem as mesmas propriedades de aproximações diofantinas.

Demonstração. Suponha que ξ e ζ são algebricamente dependentes e seja

$$Q(x,y) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=0}^{M} c_{lm} x^l y^m \in \mathbb{Z}[x,y]$$

um polinômio irredutível e não-nulo, onde $Q(\xi,\zeta) = 0$. Primeiramente, vamos tratar do caso mais simples, ou seja, onde ξ ou ζ é algébrico. Suponha, sem perda de generalidade que ξ é um número algébrico e denotando de $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ os seus conjugados, temos

$$\prod_{i=1}^{k} Q(\xi_i,\zeta) = Q(\xi,\zeta) \prod_{i=2}^{k} Q(\xi_1,\zeta) = 0. \tag{4.33}$$

Observe que

$$P(x_1,\ldots,x_k) = \prod_{i=1}^{k} Q(x_i,\zeta)$$

é um polinômio simétrico e, pelo teorema fundamental dos polinômios simétricos, temos $P(\xi_1,\ldots,\xi_k)$ sendo uma combinação linear racional dos coeficientes de $P(x_1,\ldots,x_k)$, ou seja, é uma bominação linear racional de potências de ζ, que é nula por (4.33). Portanto, ξ também é um algébrico.

Agora partiremos para o caso onde ξ e ζ são transcendentes. Se denotarmos por

$$F(x) = Q(x,\zeta) \in \mathbb{Z}[x],$$

então ξ é uma raíz de $F(x)$. Observe que $F(x) \notin \mathbb{Z}[x]$, já que ξ é transcendente e este polinômio é não-nulo. Sejam $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_L$ as raízes de $F(x)$. Mostremos que ξ_l é transcendente para todo $l \in \{1, \ldots, L\}$. Com efeito, suponhaque ξ_j é algébrico para algum j e seja $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ seu polinômio minimal. Mostraremos que $f(x)$ é um fator de $Q(x, y)$, o que contradiz o fato de $Q(x, y)$ ser irredutível sobre $\mathbb{Z}[x]$.
Sejam $\xi_j = \xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k}$ os conjugados do suposto algébrico ξ_j. Escrevendo

$$Q(x, y) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{m=0}^{M} \left(c_{lm} x^l\right) y^m = \sum_{m=0}^{M} B_m(x) y^m, \tag{4.34}$$

notamos que $B_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e

$$Q(\xi_j, \zeta) = Q(\xi_{j_1}, \zeta) = \sum_{m=0}^{M} B_m(\xi_{j_1}) \zeta^m = 0.$$

Como o polinômio $\prod_{i=1}^{k} Q(x_k, y)$ é simétrico nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$, podemos usar novamente o teorema fundamental das funções simétricas para obtermos

$$\prod_{i=1}^{k} Q(\xi_k, y) \in \mathbb{Q}[y].$$

Assim, se multiplicarmos tal produtório por um $d \in \mathbb{Z}$ conveniente, definimos

$$G(y) = d \prod_{i=1}^{k} Q(\xi_k, y) \in \mathbb{Z}[y].$$

Como $Q(\xi_{j_1}, \zeta) = 0$, temos $G(\zeta) = 0$, mas $\zeta \notin \overline{\mathbb{Q}}$, logo o polinômio $G(y)$ deve ser identicamente nulo. Daí, devemos ter $Q(\xi_{ji}, y) = 0$ para algum i, onde $B_m(\xi_{ji}) = 0$ para $m = 0, 1, \ldots, M$. Isto implica em $f(x)$ ser fator de $B_m(x)$ para todo índice m, pois $f(x)$ é o polinômio minimal de ξ_{ji}. Assim, existem $B^*_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tais que $B_m(x) = f(x) B^*_m(x)$. Assim, podemos reescrever (4.34) da seguinte maneira:

$$Q(x, y) = \sum_{m=0}^{M} B_m(x) y^m = f(x) \left(\sum_{m=0}^{M} B^*_m(x) y^m \right).$$

Finalizando assim, a demonstração de que $\xi_l \notin \overline{\mathbb{Q}}$ para $l = 1, \ldots, L$.
Agora Sejam N e H inteiros positivos e $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathcal{P}_{N,H}$ um polinômio satisfazendo

$$\Omega(\xi, N, H) = |P(\xi)| = H^{-\omega(\xi, N, H) N}. \tag{4.35}$$

Definindo

$$\mathcal{A} = \prod_{l=1}^{L} P(\xi_l),$$

temos, por (4.35) e usando a desigualdade triangular, que

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}| = \prod_{l=1}^{L} |P(\xi_l)| &= |P(\xi)| \prod_{l=2}^{L} \left(\left| \sum_{n=0}^{N} a_n \xi_l^n \right| \right) \\
&\leqslant |P(\xi)| \prod_{l=2}^{L} \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| |\xi_l|^n \right) \\
&\leqslant H^{-\omega(\xi,N,H)N} \prod_{l=2}^{L} H \left(\sum_{n=0}^{N} |\xi_l|^n \right) \\
&= H^{-\omega(\xi,N,H)N+L-1} \prod_{l=2}^{L} \left(\sum_{n=0}^{N} |\xi_l|^n \right) \\
&= cH^{-\omega(\xi,N,H)N+L-1} \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

onde $c = c(\xi, \zeta, Q, N) = \prod_{l=2}^{L} \left(\sum_{n=0}^{N} |\xi_l|^n \right)$. Por outro lado, se definirmos o polinômio simétrico

$$A(x_1, \ldots, x_L) = \prod_{l=1}^{L} P(x_l) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_L]$$

onde $\mathcal{A} = A(\xi_1, \ldots, \xi_L)$, observamos, usando mais uma vez o teorema fundamental das funções simétricas, que existe um polinômio $A^*(\sigma_1, ..., \sigma_L) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_L]$,com $A(x_1, ..., x_L) = A^*(\sigma_1, ..., \sigma_L)$ onde, como já vimos na demonstração do teorema (3.1) , as variáveis σ_n são as funções simétricas fundamentais:

$$\sigma_n = \sigma_n(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant k} x_{i_1} \cdots x_{i_n}.$$

Se escrevermos $F(x) = \sum_{l=0}^{L} D_l(\zeta) x^l$, onde $D_l(y) = \sum_{m=0}^{M} c_{lm} y^m$, então temos as igualdades

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_1(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \quad \xi_1 + \cdots + \xi_L = -\frac{D_{L-1}(\zeta)}{D_L(\zeta)} \\
\sigma_2 &= \sigma_2(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \quad \xi_1\xi_2 + \cdots + \xi_{L-1}\xi_L = \frac{D_{L-2}(\zeta)}{D_L(\zeta)} \\
&\vdots \\
\sigma_L &= \sigma_L(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \quad \xi_1 \cdots \xi_k = (-1)^L \frac{D_0(\zeta)}{D_L(\zeta)}.
\end{aligned}
$$

Com o mesmo argumento do teorema (3.1) , temos $gr(A^*) = gr(P) \leqslant N$. Assim, $\mathcal{A}$ é um polinômio inteiro de L variáveis aplicado em $D_l(\zeta)/D_L(\zeta)$ para $l = 0, 1, ..., L-1$. Ou seja, pela definição do polinômio A^*:

$$\mathcal{A} = A^* \left(-\frac{D_{L-1}(\zeta)}{D_L(\zeta)}, ..., (-1)^L \frac{D_0(\zeta)}{D_L(\zeta)} \right).$$

Agora considere o polinômio $R(y) \in \mathbb{Z}[y]$ dado por

$$R(y) = D_L(y)^N A^* \left(-\frac{D_{L-1}(\zeta)}{D_L(\zeta)}, ..., (-1)^L \frac{D_0(\zeta)}{D_L(\zeta)} \right).$$

É fácil ver que $R(\zeta) = D_L(\zeta)^N\mathcal{A}$ e que $gr(R) \leqslant NM$. Se denotarmos $C = \max\{|c_{lm}|; l = 0, 1, ..., L$ e $m = 0, 1, ...M\}$, então $\mathcal{H}(D_l) \leqslant C$ para todo $l = 0, 1, ..., L$. Note que $\mathcal{H}(A) \leqslant 2^{L(N+1)}H^L$. De fato, sejam b_n os coeficientes de A observamos que

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left| \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_L=n \\ 0\leqslant i_j\leqslant N}} a_{i_1}\cdots a_{i_L} \right| \\ &\leqslant \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_L=n \\ 0\leqslant i_j\leqslant N}} |a_{i_1}|\cdots|a_{i_L}| \\ &\leqslant H^L \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_L=n \\ 0\leqslant i_j\leqslant N}} \\ &= \binom{L(N+1)-(n+1)}{L-1} H^L \\ &\leqslant 2^{L(N+1)}H^L \end{aligned}$$

Deste modo, $\mathcal{H}(A) \leqslant 2^{L(N+1)}H^L$. Como os coeficientes de A^*, que denotaremos por b_n^*, são combinações lineares inteiras dos coeficientes de A, então $\mathcal{H}(A^*) \leqslant K'2^{L(N+1)}H^L$, onde K' é uma constante que não depende de a_n, para $n \in \{0, 1, ..., N\}$. Feitas tais observações, podemos analisar $\mathcal{H}(R)$. Seja $R_n(y)$ um monômio de $R(y)$

$$R_n(y) = b_n^*(D_0(y))^{n_1}\cdots(D_{L-1}(y))^{n_L}(D_L(y))^{N-\sum_{i=1}^L n_i}.$$

Pelo lema (4.33)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(R_n) &\leqslant |b_n^*|(\mathcal{H}(D_0))^{n_1M}\cdots(\mathcal{H}(D_{L-1}))^{n_LM}(\mathcal{H}(D_L))^{M\left(N-\sum_{i=1}^L n_i\right)} \\ &\leqslant K'2^{L(N+1)}C^{M\left(\sum_i^L n_i\right)}C^{M\left(N-\sum_i^L n_i\right)} \\ &= K'2^{L(N+1)}C^{MN}H^L. \end{aligned}$$

Como a quantidade de termos $R_n(y)$ em $R(y)$ não é maior que 2^{L+N} (o que podemos ver usando técnicas simples de contagem), finalmente concluimos pelo *lema 3* que

$$\mathcal{H}(R) \leqslant K'2^{L(N+1)}C^{MN}H^L \Rightarrow \mathcal{H}(R) \leqslant \mathcal{K}_1H^L \tag{4.37}$$

onde $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1(\xi, \zeta, Q, N)$ não depende de H. Por fim, note que $R(\zeta) \neq 0$ pois caso contrário $\mathcal{A} = 0$, o que não pode ocorrer já que mostramos que os ξ_l são todos transcendentes. Assim, temos que o polinômio $R(y)$ pertence ao conjunto $\mathcal{P}_{MN,\mathcal{K}_1H^L}$ e por definição são válidas:

$$\Omega(\zeta, MN, \mathcal{K}_1H^L) \leqslant |R(\zeta)| \leqslant c|D_L(\zeta)|^N H^{-\omega(\xi,N,H)N+L-1} \tag{4.38}$$

$$\Omega(\zeta, MN, \mathcal{K}_1H^L) = (\mathcal{K}_1H^L)^{-\omega(\zeta,MN,\mathcal{K}_1H^L)MN}. \tag{4.39}$$

Daí, substituindo (4.39) em (4.38),

$$(\mathcal{K}_1H^L)^{-\omega(\zeta,MN,\mathcal{K}_1H^L)MN} \leqslant c|D_L(\zeta)|^N H^{-\omega(\xi,N,H)N+L-1}$$

aplicando o $\log_H$ em ambos os lados da desigualdade

$$\log_H(\mathcal{K}_1 H^L)^{-\omega(\zeta,MN,\mathcal{K}_1H^L)MN} \leqslant \log_H\left(c|D_L(\zeta)|^N H^{-\omega(\xi,N,H)N+L-1}\right)$$

e efetuando os cálculos necessários

$$\begin{aligned}
\left(-\omega(\zeta,MN,\mathcal{K}_1H^L)MN\right)(\log_H \mathcal{K}_1 + L) &\leqslant \log_H(c|D_L(\zeta)|^N) \\
&\quad -\omega(\xi,N,H)N + L - 1 \\
\Rightarrow \omega(\xi,N,H)N - L + 1 &\leqslant \frac{\log(c|D_L(\zeta)|^N)}{\log H} \\
&\quad +\omega(\zeta,MN,\mathcal{K}_1H^L)MNL \\
&\quad +\omega(\zeta,MN,\mathcal{K}_1H^L)MN\frac{\log \mathcal{K}_1}{\log H}. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

podemos tomar o $\limsup\limits_{H\to\infty}$ em (4.40) e deduzir a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\omega(\xi,N)N - L + 1 &\leqslant \omega(\zeta,MN)MNL \\
\Rightarrow \omega(\xi,N) - \frac{L-1}{N} &\leqslant \omega(\zeta,MN)LM. \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

Para finalmente podermos obter uma relação entre $\omega(\xi)$ e $\omega(\zeta)$, tomamos o $\limsup\limits_{N\to\infty}$ em (4.41) e concluímos que

$$\omega(\xi) \leqslant \omega(\zeta)LM.$$

Podemos ultilizar a mesma construção para também obter as desigualdades

$$\omega(\zeta) \leqslant \omega(\xi)LM$$

e

$$\omega(\zeta,N) - \frac{M-1}{N} \leqslant \omega(\xi,LN)LM.$$

Donde concluímos que $\omega(\xi)$ é finito se e somente se $\omega(\zeta)$ é finito e da mesma forma $\nu(\xi)$ é finito se e somente se $\nu(\zeta)$ é finito. Portanto, ξ e ζ pertencem à mesma classe. □

Perceba agora que a contrapositiva deste teorema nos fornece um resultado bastante útil:

Corolário 4.1. *Sejam ξ e ζ números transcendentes que pertencem a classes diferentes e $F(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ um polinômio não-nulo. Então, $F(\xi,\zeta)$ é transcendente.*

Demonstração. Suponha que $F(\xi,\zeta)$ é algébrico, então existe polinômio $Q(z) \in \mathbb{Z}[z]$ tal que $Q(F(\xi,\zeta)) = 0$. Definindo o polinômio

$$G = Q(F(x,y)) \in \mathbb{Z}[x,y],$$

temos que

$$G(\xi,\zeta) = 0.$$

Contradição, pois ξ e ζ são transcendentes. Logo, $F(\xi,\zeta)$ é transcendente. □

Uma aplicação deste corolário, junto com o fato de e^α ser um $S-$número para α algébrico não-nulo e a proposição 4.1, pode ser vista através do seguinte corolário:

Corolário 4.2. *Seja* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *a função*

$$f(z) = e^z + \mathcal{L}.$$

Então, se α *é algébrico,* $f(\alpha)$ *é transcendente.*

Finalizamos o trabalho por aqui, mas o estudo não, pois como vimos ao longo do texto, muitos problemas permanecem em aberto no simples âmbito do que abordamos aqui, mas os resultados da classificação de Mahler geram um universo de problemas ainda sem solução (onde inumeráveis deles podem ser encontrados nas referências). Um simples exemplo surge quando mostramos que um número de Liouville forte somado com um número de Liouville, é de de Liouville ou é racional, porém, ainda não conseguimos explicitar a forma destes. Inclusive, muitos dos problemas da teoria transcendente não se baseiam em mostrar a existência de algo, mas sim explicitar esse "algo".

Por fim, esperamos que o leitor tenha apreciado, nem que seja um pouco, da beleza que é a Teoria Transcendente dos Números.

Referências

ALNIACIK, K. On mahler's u-numbers. *American Journal of Mathematics*, Johns Hopkins University Press, v. 105, n. 6, p. 1347–1356, 1983. Citado na página 31.

BAKER, A. *Transcendental Number Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1975. (Cambridge Mathematical Library). Citado na página 66.

BUGEAUD, Y. *Approximation by Algebraic Numbers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Tracts in Mathematics). Citado 5 vezes nas páginas 15, 49, 50, 55 e 56.

BURGER, E.; TUBBS, R. *Making Transcendence Transparent: An intuitive approach to classical transcendental number theory*. [S.l.]: Springer New York, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 37, 39, 58, 63 e 69.

CHAVES, A. *Sobre a Classificação de Mahler dos Números Transcendentes*. [S.l.]: Universidade Federal do Ceará, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 37, 63 e 66.

CHAVES, A.; MARQUES, D. An explicit family of u m -numbers. *Elemente der Mathematik*, v. 69, 01 2014. Citado na página 53.

CHAVES, A. P.; MARQUES, D.; TROJOVSKY, P. On the arithmetic behavior of liouville numbers under rational maps. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, v. 52, 01 2020. Citado na página 53.

ERDOS, P. L. Representations of real numbers as sums and products of liouville numbers. *Michigan Mathematical Journal*, v. 9, p. 59–60, 1962. Citado na página 28.

FINE, B.; ROSENBERGER, G. *The Fundamental Theorem of Algebra*. [S.l.]: Springer New York, 2012. (Undergraduate Texts in Mathematics). Citado na página 38.

IRELAND, K.; ROSEN, M. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. [S.l.]: Springer New York, 2013. (Graduate Texts in Mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 33 e 49.

KOKSMA, J. *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen*. [S.l.: s.n.], 1939. Citado na página 48.

LEVEQUE, W. *Topics in Number Theory*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1965. (Addison-Wesley series in mathematics). Citado na página 28.

LEVEQUE, W. J. On mahler's u-numbers. Oxford University Press, 1953. Citado na página 53.

MACDONALD, I. *Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials*. [S.l.]: American Mathematical Society, 1998. (University lecture series). Citado na página 37.

MAHLER, K. *Zur Approximation der Exponentialfunktionen und Logarithmus*. [S.l.: s.n.], 1932. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 66.

ORYAN. Über gewise potenzreihen, die für albebraische argumente aus der menge der liouvilleschen zahlen u-zahlen. v. 47, 1980. Citado na página 58.

ORYAN. On power series and mahler's u-numbers. v. 65, 1983. Citado na página 58.

POLLINGTON, A. *Number Theory with an Emphasis on the Markoff Spectrum*. [S.l.: s.n.], 1993. Citado na página 53.

SCHMIDT, W. T-numbers do exist. *Symposia Math. IV, Inst. Naz. di Alta Math*, 1968. Citado na página 66.

SPRINDIZUK, V. *Mahler's Problem in Metric Number Theory*. [S.l.: s.n.], 1967. Citado na página 50.

WIRSIN, E. *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*. [S.l.: s.n.], 1961. Citado na página 49.