

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

JEFFERSON MONÇÃO DA SILVA

**Conicidade do espaço-tempo via detector de
Unruh-DeWitt: como a função resposta depende
das condições de contorno?**

Campinas

2024

Jefferson Monção da Silva

**Conicidade do espaço-tempo via detector de
Unruh-DeWitt: como a função resposta depende das
condições de contorno?**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: João Paulo Pitelli Manoel

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Jefferson Monção da Silva e orientada pelo Prof. Dr. João Paulo Pitelli Manoel.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38c Silva, Jefferson Monção da, 2000-
Conicidade do espaço-tempo via detector de Unruh-DeWitt : como a função resposta depende das condições de contorno? / Jefferson Monção da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: João Paulo Pitelli Manoel.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Física matemática. 2. Detector de Unruh-DeWitt. 3. Extensões auto-adjuntas. I. Manoel, João Paulo Pitelli, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Conicity of spacetime via Unruh-DeWitt detector : How does the response function depend on the boundary conditions?

Palavras-chave em inglês:

Mathematical physics

Unruh-DeWitt detector

Self-adjoint extensions

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Samuel Rocha de Oliveira

Maurício Richartz

Ronaldo Savioli Sumé Vieira

Data de defesa: 27-02-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0009-7044-6239>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/8832181642910289>

**Dissertação de Mestrado defendida em 27 de fevereiro de 2024 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). MAURÍCIO RICHARTZ

Prof(a). Dr(a). RONALDO SAVIOLI SUMÉ VIEIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Este trabalho é carinhosamente dedicado à minha mãe,
a mulher que é a minha inspiração.
Seu impacto na minha vida transcende
qualquer medida acadêmica.*

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. (processo número 88887.674194/2022-00). Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Expresso minha gratidão à equipe do programa pela estrutura e suporte fornecidos ao longo desta jornada acadêmica.

É com profundo agradecimento que destaco a influência marcante de alguns professores em minha trajetória acadêmica. Agradeço ao Professor Samuel Rocha, meu dedicado professor de Métodos da Matemática Aplicada 1 e 2 na graduação e ao Professor Alberto Saa, que não só orientou o estágio pedagógico (PED) em Métodos da Matemática Aplicada 1 e 2 durante meu mestrado, mas também supervisionou um projeto acadêmico importante durante minha graduação. Sua orientação foi essencial em ambas as fases da minha jornada acadêmica, sendo uma influência valiosa em meu percurso.

Maria Tereza Bicudo, minha professora de física no ensino médio, merece um carinhoso agradecimento. Seu entusiasmo pelo ensino de física e matemática desempenhou um papel crucial em meu despertar para essas áreas, inspirando-me a ingressar na universidade e seguir o caminho da física-matemática.

Além disso, gostaria de expressar a significativa importância do Professor João Paulo Pitelli, meu orientador que tem sido uma presença constante desde a iniciação científica. Ele não apenas me ensinou os intricados caminhos do meio acadêmico, mas também compartilhou seus vastos conhecimentos sobre física, cosmologia e matemática. Mesmo com a minha escrita no começo parecendo um labirinto, o Prof. Pitelli foi meu guia paciente e corajoso nesse emaranhado de palavras e conhecimentos. Sou grato pela paciência e por sua dedicação, por ser um mentor tão inspirador em minha trajetória acadêmica.

A todos esses professores, que com carinho, dedicação e competência influenciaram positivamente minha jornada acadêmica, expresso minha sincera gratidão.

Adicionalmente, expresso minha gratidão aos amigos que, de diversas maneiras, contribuíram para tornar esses dois anos de mestrado uma experiência enriquecedora.

“You can’t blame gravity for falling in love.”
(Albert Einstein)

Resumo

Esta dissertação de mestrado, conduzida no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), tem como objetivo a investigação da detecção quântica da conicidade no espaço-tempo, conforme iniciado por [Cong et al. \(2021\)](#). Além disso, abrange a análise da dependência da função resposta em relação às condições de contorno impostas na hipersuperfície que separa a região cônica da região plana, onde o detector está localizado. Para alcançar esse propósito, o estudo concentra-se na análise da função resposta de um detector de Unruh-DeWitt acoplado a um campo escalar não massivo. O detector é estrategicamente posicionado em uma região plana, delimitada por uma casca cilíndrica de raio fixo, sendo que a conicidade do espaço manifesta-se exclusivamente na área externa a essa casca.

Com o intuito de evidenciar que a sensibilidade do detector decorre de fenômenos quânticos, optou-se por mantê-lo ativo por um intervalo de tempo inferior ao necessário para que a luz percorra o trajeto completo, desde a saída do detector até a região com conicidade e retorne. Adicionalmente, foram estabelecidas diferentes condições de contorno auto-adjuntas para o campo escalar na casca cilíndrica, visando estudar a dinâmica determinada por essas condições e investigar seu impacto na sensibilidade do detector.

Embora a conicidade esteja classicamente localizada fora da região de interação direta do detector, este demonstrou ser surpreendentemente sensível à conicidade e às variações nas condições de contorno. Este trabalho apresenta, portanto, uma caracterização minuciosa dessa sensibilidade, contribuindo para o avanço do entendimento sobre os fenômenos quânticos associados à detecção de conicidade no espaço-tempo.

Palavras-chave: Física Matemática. Detector de Unruh-DeWitt. Extensões auto-adjuntas.

Abstract

This master's thesis, conducted at the Institute of Mathematics, Statistics, and Scientific Computing (IMECC) of the State University of Campinas (UNICAMP), aims to investigate the quantum detection of conicity in space-time, as initiated by [Cong et al. \(2021\)](#). Additionally, it encompasses the analysis of the dependence of the response function concerning the boundary conditions imposed on the hypersurface that separates the conical region from the flat region where the detector is located. To achieve this purpose, the study focuses on the analysis of the response function of an Unruh-DeWitt detector coupled to a non-massive scalar field. The detector is strategically positioned in a flat region, delimited by a cylindrical shell of fixed radius, with the conicity of space manifesting exclusively in the area external to this shell.

In order to highlight that the detector's sensitivity arises from quantum phenomena, it was chosen to keep it active for a time interval shorter than necessary for light to complete the entire path, from the detector's exit to the region with conicity and back. Additionally, different self-adjoint boundary conditions were established for the scalar field on the cylindrical shell, aiming to study the dynamics determined by these conditions and investigate their impact on the detector's sensitivity.

Although conicity is classically located outside the direct interaction region of the detector, it has proven to be surprisingly sensitive to conicity and variations in boundary conditions. This work, therefore, presents a meticulous characterization of this sensitivity, contributing to the advancement of understanding the quantum phenomena associated with conicity detection in space-time.

Keywords: Mathematical physics. Unruh-DeWitt detector. Self-adjoint extensions.

Lista de ilustrações

Figura 1	– A figura apresenta um panorama das quantidades dinâmicas na mecânica clássica, mecânica quântica, teoria de campos clássica e TQC.	17
Figura 2	– <i>Imagem para ilustração da estrutura do espaço-tempo de interesse. Note que, apesar do espaço retratado na figura ser bidimensional, o espaço-tempo estudado é quadridimensional</i>	18
Figura 3	– A imagem ilustra a decomposição do espaço-tempo em superfícies do tipo espaço com vetor normal t^α	30
Figura 4	– O diagrama ilustra do domínio de dependência K_0 e os valores do campo escalar $\hat{\Psi}$	32
Figura 5	– A figura ilustra a orientação do vetor normal $\mathbf{n}$ da hipersuperfície de junção.	35
Figura 6	– A figura ilustra a construção de uma geometria cônica. A fatia do disco circular com abertura δ é retirada e os dois cortes radiais ligados pela seta dupla são identificados.	37
Figura 7	– Na figura vemos a superfície bidimensional imersa em $\mathbb{R}^3$ de equação $z = \gamma\rho$ em coordenadas cilíndricas.	38
Figura 8	– A figura ilustra o espaço-tempo estudado, aqui o espaço que antes era cônico foi dividido em duas regiões. A região mais interna é um espaço cilíndrico plano quadri-dimensional e de raio finito, a região externa é um espaço cônico que a princípio não é limitado. Estas duas regiões são concêntricas.	39
Figura 9	– A figura ilustra a distribuição do pontos de bordo para o PSL radial estudado, note que apesar de $\rho_- = R_1$ e $\rho_+ = cR_1$ identificarem o mesmo ponto no espaço físico, são pontos de intervalos distintos para o PSL.	47
Figura 10	– A figura apresenta a forma da função $\hat{\chi}(y)$ em função de y	59
Figura 11	– scale=0.6	60
Figura 12	– Gráfico de $\psi_{0q}(\rho_+ = cR_2) = c_1(0, q, c, R_1)J_{c0}(qcR_2) + c_2(0, q, c, R_1)Y_{c0}(qcR_2)$ em função de q . Foi usado $c = 2$, $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ e $\rho_d = 0$	61
Figura 13	– A figura mostra o formato geral de $\mathcal{F}_c$ em função de Ω , note que este é o formato geral pois a variação no valor da função resposta devido a diferentes conicidades possui uma ordem de grandeza muito menor que a escala do gráfico.	62

Figura 14 – O gráfico acima plota a diferença entre a função resposta do detector com $c = 2, 3$ e 4 , respectivamente em ordem crescente na figura, e a função resposta com $c = 1$ em função de Ω . Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Delta\tau = 1$. Perceba que a magnitude da diferença das funções respostas cresce com a conicidade.	62
Figura 15 – A figura apresenta o gráfico da função resposta $\mathcal{F}_c$ em função da conicidade c . Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$, $\Omega = 0$ e $\Delta\tau = 1$. Notamos novamente que o valor numérico da função resposta cresce com a conicidade.	63
Figura 16 – O gráfico mostra a curva $\mathcal{F}_{c=1}$ em função de R_2 para $\Omega = 2$, $\rho_d = 0$ e $\Delta\tau = R_1 = 1$	63
Figura 17 – A figura apresenta o gráfico de $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ para $c = 2, 3, 4$ e $\Omega = 2, \rho_d = 0$ e $\Delta\tau = R_1 = 1$	64
Figura 18 – O gráfico mostra a dependência da função resposta pelo raio R_1 para os valores de conicidade $c = 1, 2, 3$ e 4 , onde a função resposta com conicidade c é a curva tracejada. Aqui foi usado $\rho_d = 0$, $R_2 = 5$, $\Omega = 2$ e $\Delta\tau = 1$	64
Figura 19 – O gráfico acima apresenta a sensibilidade da resposta do detector com $c = 2, 3$ e 4 e condição diagonal com $\beta = 1/2$. Note que a diferença $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ cresce com a conicidade c . Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Delta\tau = 1$	65
Figura 20 – A figura apresenta o gráfico da função resposta $\mathcal{F}_c$ em função da conicidade c para a condição diagonal com $\beta = 1/2$. Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$, $\Omega = 0$ e $\Delta\tau = 1$. Notamos novamente que o valor numérico da função resposta cresce com a conicidade.	66
Figura 21 – A figura apresenta a curva de $\mathcal{F}_c$ em função de c para diferentes valores de β . Aqui foi considerado $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Omega = 0$	66
Figura 22 – A figura apresenta o gráfico de $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ para $\beta = 1/2$ em função de R_2 para $R_1 = \Delta\tau = 1$, $\rho_d = 0$ e $\Omega = 2$	67
Figura 23 – O gráfico mostra a função resposta em função de R_1 para a condição de contorno diagonal com $\beta = 1/2$ e conicidade $c = 1, 2, 3$ e 4 . A função resposta com conicidade $c = 1$ é representada pela curva tracejada. Aqui foi usado $\rho_d = 0$, $R_2 = 5$, $\Omega = 2$ e $\Delta\tau = 1$	67
Figura 24 – A figura mostra o gráfico de $\mathcal{F}_c$ em função de β no intervalo $0 \leq \beta \leq 2$. Aqui foi tomado $c = 2$, $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Omega = -2$. A linha tracejada representa a $\mathcal{F}_{c=2}$ com $\beta = 1$	69

- Figura 25 – O gráfico apresenta as curvas $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ para $c = 0.1, 0.2, 0.5$ e 0.8 em função de Ω . Aqui foi considerado $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$. Perceba que o valor numérico da diferença das funções respostas cresce com a conicidade. 69
- Figura 26 – A figura apresenta o gráfico da função resposta $\mathcal{F}_c$ em função da conicidade c para o intervalo $0 \leq c \leq 1$. Aqui foi considerado $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$, $\Omega = 0$ 70

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
TQC	Teoria Quântica de Campos
TQC-CS	Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos
UDW	Detector de Unhur-DeWitt
PSL	Problema de Sturm-Liouville
BC	Condição de contorno
R	Regular
LP	Ponto limite
LC	Cículo limite
KG	Klein-Gordon

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais, $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
S_n	Conjunto de permutações de $\{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$
$L(J, \mathbb{C})$	Denota a variedade linear de funções complexas, y , que são Lebesgue-mensuráveis e que $\int_J y(t) dt < \infty$.
$L_{loc}(J, \mathbb{C})$	É usado para denotar a variedade linear de funções y tais que $y \in L([\alpha, \beta], \mathbb{C}) \forall [\alpha, \beta] \subset J$.
$AC_{loc}(J)$	Denota a coleção de funções complexas y que são absolutamente contínuas em todos subconjuntos compactos $[\alpha, \beta] \subset J$.
D_{max}	$D_{max}(M, \omega, J) = \left\{ y : J \rightarrow \mathbb{C} : y, py' \in AC_{loc}(J), y, \omega^{-1}My \in L^2(J, \omega) \right\}$.
$\mathcal{L}_V$	Derivada de Lie; $\mathcal{L}_V f = V^\mu \partial_\mu f$ se f é escalar, e $\mathcal{L}_V \mathbf{F}^\nu = V^\mu \nabla_\mu F^\nu - F^\mu \nabla_\mu V^\nu$.
g	O determinante do tensor métrico, $g = \det(g^\mu{}_\nu)$.
$R_{\mu\nu}$	O tensor de Ricci.
$\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas reais.
$D(\Sigma)$	Domínio de dependência, região contida num espaço tempo $\mathcal{M}$, tal que $\Sigma \subset \mathcal{M}$ e qualquer variação do campo fora de Σ , não afeta a solução do campo dentro de $D(\Sigma)$.
$D^+(\Sigma)$	Domínio de dependência futuro, região contida em $D(\Sigma)$ porém, cujos pontos estão localizados no futuro de Σ .
$D^-(\Sigma)$	Domínio de dependência passado, região contida em $D(\Sigma)$ porém, cujos pontos estão localizados no passado de Σ .
$\mathbb{R}_+^n$	Conjunto dos vetores x pertencentes a $\mathbb{R}^n$ que satisfazem $x \geq 0$
$\mathbb{R}_{++}^n$	Conjunto dos vetores x pertencentes a $\mathbb{R}^n$ que satisfazem $x > 0$
$\ \cdot\ $	Norma-p vetorial

Sumário

Introdução	16
1 Teoria Quântica de Campos	19
1.1 Campos em Minkowski	19
1.2 Campos em espaços curvos	23
1.3 Detector de Unruh-DeWitt	26
1.3.1 Função de Wightman	29
2 A estrutura do espaço-tempo	30
2.1 Dinâmica em espaços não globalmente hiperbólicos e estáticos	30
2.2 Condições de junção	35
2.3 Singularidade cônica e regularizações	36
3 Obtenção do campo escalar	40
3.1 Modos do campo escalar	40
3.2 Tópicos em Problemas de Sturm-Liouville em Multi-intervalos	42
3.2.1 Caracterização das extensões auto-adjuntas	43
3.2.2 Aprofundamento do PSL radial	46
3.3 Análise das Condições de Contorno Auto-Adjuntas	49
3.3.1 Estados ligados	50
3.3.2 Condição de suavidade	51
3.3.3 Condição diagonal	53
3.3.4 Energia conservada	54
4 Análise da sensibilidade do detector	56
4.1 A função resposta	56
4.2 Aspectos Numéricos da análise da função resposta	57
4.3 Gráficos da função resposta	61
4.3.1 Detecção da conicidade com a condição de suavidade	62
4.3.1.1 Dependência em Ω e c	62
4.3.1.2 Dependência em R_2 e R_1	63
4.3.2 Detecção de diferentes condições de contorno	65
4.3.2.1 Dependência em Ω e c	65
4.3.2.2 Dependência em R_2 e R_1	66
4.3.2.3 Dependência em β	68
4.3.3 Enxerto angular	69
5 Considerações finais	71
Referências	72

Introdução

A unificação das forças da natureza manteve-se como um dos principais objetivos para muitos cientistas desde 1870, quando Maxwell demonstrou que a eletricidade e o magnetismo eram manifestações da mesma natureza eletromagnética. Atualmente são conhecidas 4 forças fundamentais de interação: a força nuclear-forte, a força nuclear-fraca, a força eletromagnética e a força gravitacional. Durante as últimas décadas houve um grande progresso para uma teoria unificada das forças da natureza. As forças nuclear-fraca e eletromagnética receberam uma descrição unificada devido a Weinberg (1967) e Salam (1968). A unificação da força nuclear-forte e com a força eletro fraca é chamada de *Teoria da Grande Unificação*. A única força que ainda não se juntou às outras forças em uma teoria de unificação é a força gravitacional. Além disso, a teoria de gravitação apresenta uma resistência a tentativas de quantização. A *teoria quântica de campos em espaços curvos* funciona como uma aproximação da, ainda inacessível, teoria de gravitação-quântica (QG). Apesar desta ser uma teoria semi-clássica de gravitação, ela pode nos fornecer previsões e intuições sobre os resultados de uma teoria de QG, [Birrell and Davies \(1982\)](#).

A *teoria de campos* descreve as interações fundamentais da matéria. Em uma teoria clássica de campos, a razão primária para a introdução do conceito de campo é a construção de leis da natureza que são *locais*. Leis que envolvem ação a distância, tal como a lei de gravitação de Newton ou a lei Coulomb resultam em fenômenos que não são razoáveis, tal como o elétron sentir a variação na força imediatamente após o movimento de um próton distante. As teorias de campos propostas por Einstein e Maxwell inserem os campos como agentes que conectam pontos distintos do espaço-tempo.

Na *Teoria Quântica de Campos* (TQC) no espaço de Minkowski, os campos que descrevem a matéria são tratados como operadores em um espaço matemático chamado espaço de Fock. Já na *Teoria Quântica de Campos em espaços curvos* (TQC-CS), que é uma extensão da TQC para espaços com curvatura, a situação é um pouco diferente. Nessa teoria, o campo gravitacional é tratado como um "cenário de fundo" clássico, enquanto os campos que descrevem a matéria são quantizados da maneira usual.

Neste trabalho, focamos em um campo específico, chamado de campo escalar $\hat{\Psi}$, que descreve partículas sem spin, com uma massa específica m . O Lagrangiano, que descreve como esse campo se comporta, é bem conhecido:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \hat{\Psi} \partial_\beta \hat{\Psi} + m^2 \hat{\Psi}^2 \right). \quad (1)$$

O aspecto principal que é explorado nessa dissertação é a da *não-localidade* de fenômenos quânticos na TQC-CS. De fato, nesta dissertação é discutido como alterações

na geometria de uma região distante pode afetar o observador no cenário da TQC-CS.

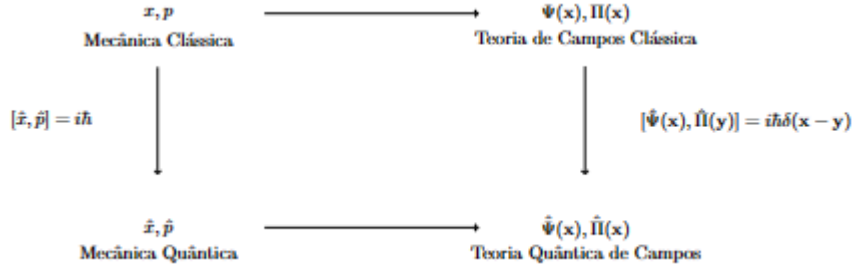


Figura 1 – A figura apresenta um panorama das quantidades dinâmicas na mecânica clássica, mecânica quântica, teoria de campos clássica e TQC.

Além disso, na TQC-CS existe uma ambiguidade no conceito de partículas. De fato, a definição do estado de vácuo, isto é, o estado que representa a ausência de partículas, depende do mecanismo de detecção de partículas usado e de sua trajetória no espaço-tempo. Portanto, uma definição global de partículas não é muito útil sem a descrição do detector usado para a detecção. Isto porque detectores que descrevem trajetórias diferentes no espaço-tempo podem registrar quantidades diferentes de partículas.

Portanto, é necessário apresentar os detalhes e trajetória do detector para definir o estado de vácuo. Este trabalho utiliza o modelo do detector proposto por Unruh e DeWitt que consiste em uma partícula pontual idealizada com níveis de energia internos e acoplada a o campo escalar $\hat{\Psi}$ via uma interação monopolar. Então é feito um estudo da sensibilidade do detector de Unruh-DeWitt (UDW) como um complemento do debate conduzido por Wan Cong e Robert B. Mann em [Cong et al. \(2021\)](#). O detector é acoplado ao campo escalar real e não massivo por simplicidade, e o estudo analisa a sensibilidade do detector à conicidade do espaço-tempo quando seu efeito local está ausente, isto é, quando classicamente não seria possível o detector “sentir” a conicidade.

O espaço-tempo cônico descreve o espaço-tempo ao redor de uma corda cósmica. Estes são defeitos topológicos unidimensionais na estrutura do espaço-tempo e é teorizado que formaram-se durante o início do universo. Uma característica-chave das cordas cósmicas é que elas geram um campo gravitacional sem criar curvatura local no espaço-tempo. Isso contrasta com a maioria das outras fontes de gravidade, que estão associadas a regiões de curvatura. A detecção física de cordas cósmicas teria implicações profundas para a nossa compreensão do início do universo e da natureza da gravidade. Além disso, a compreensão da resposta do detector de UDW a fenômenos que classicamente não poderiam ser observados é crucial para o entendimento da TQC-CS.

A conicidade se refere ao parâmetro c , que define o deficit angular causado por uma geometria cônica. Na métrica cônica em coordenadas cilíndricas o parâmetro c

aparece dividindo o diferencial da coordenada angular da forma

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + \frac{r^2}{c^2}d\phi^2.$$

Esta métrica está associada a um deficit angular $\delta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{c}\right)$. Nesta equação e no restante deste trabalho, consideramos unidades nas quais a constante de Planck, o valor da velocidade da luz no vácuo e a constante de gravitação de Newton são numericamente iguais a 1.

Este trabalho se propõe a estudar o detector quando dentro de uma região plana limitada por uma casca cilíndrica, com um deficit angular na região exterior à casca (ver Fig.2). É importante destacar que esta configuração difere do espaço-tempo idealizado das cordas cósmicas, onde o deficit angular está presente em todas as regiões.

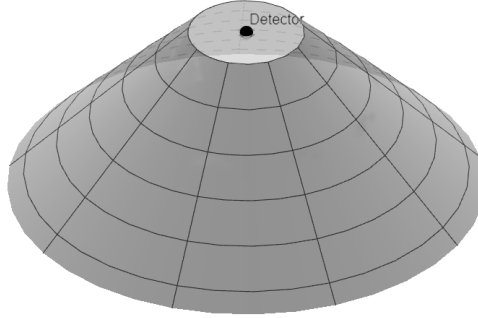


Figura 2 – Imagem para ilustração da estrutura do espaço-tempo de interesse. Note que, apesar do espaço retratado na figura ser bidimensional, o espaço-tempo estudado é quadridimensional

À vista disso, o espaço-tempo estudado neste trabalho é dividido em duas regiões que, em coordenadas cilíndricas, são munidas com as seguintes métricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho_-^2 + \rho_-^2 d\phi^2, \quad 0 \leq \rho_- \leq R_1$$

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho_+^2 + \frac{\rho_+^2}{c^2} d\phi^2, \quad cR_1 \leq \rho_+ \leq cR_2.$$

Para impedir um fluxo de energia do campo entrando ou saindo do espaço de interesse, é imposta a condição de Dirichlet na hipersuperfície com $\rho_+ = cR_2$. Isto é, na superfície onde a região cônica é truncada será imposta a condição $\hat{\Psi} = 0$. Isso é equivalente a uma segunda casca cilíndrica infinitamente longa e perfeitamente reflexiva, concêntrica à primeira. Ainda resta definir uma condição de contorno sobre a primeira casca cilíndrica em $\rho_- = R_1$ e $\rho_+ = cR_1$. O estudo do comportamento da função resposta do detector de UDW para espaços-tempo com diferentes conicidades e para diferentes condições de contorno impostas na hipersuperfície de junção ($\rho_- = R_1$) é o principal foco desta dissertação.

1 Teoria Quântica de Campos

Neste trabalho estudaremos algumas das consequências da TQC-CS em um espaço-tempo contendo uma sub-região cônica. De modo geral, a TQC-CS é uma generalização da teoria em espaços planos. Para introduzirmos a notação e os conceitos utilizados no decorrer desse projeto, será importante revisitarmos alguns fundamentos da TQC. Desta forma, na secção (1.1) seremos apresentados brevemente à TQC ordinária, nos concentrando (por simplicidade) na teoria quântica para o campo escalar. Em seguida, na secção (1.2), analisaremos o campo escalar em um espaço-tempo qualquer, pontuando as principais diferenças entre a TQC e a TQC-CS. Na secção (1.3), iremos nos aprofundar no significado e conceito de partículas em TQC-CS através do estudo dos chamados detectores de Unruh-DeWitt. Serão enunciados os principais resultados e interpretações sobre esses detectores, cujo estudo da sensibilidade à conicidade do espaço-tempo e às condições de contorno impostas na superfície de vinco que separa as duas regiões (uma plana e uma cônica) é o principal tópico desse trabalho. Destacamos que esta revisão e toda a notação deste trabalho serão extraídas da referência [Birrell and Davies \(1982\)](#) e [Parker and Toms \(2009\)](#).

1.1 Campos em Minkowski

Seja $\mathbb{R}^{1,3}$ o espaço-tempo de Minkowski quadridimensional com a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Um campo escalar $\hat{\Psi}(t, \vec{x})$ é uma quantidade definida em todos os pontos de $\mathbb{R}^{1,3}$ que não se transforma por uma transformação de Poincaré caracterizada por uma transformação de Lorentz Λ^α_β e uma translação a^μ . Adotando a notação $x^\mu = (t, \vec{x})$, temos $\hat{\Psi}'(x^{\mu'}) = \hat{\Psi}(x^\mu)$ quando $x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} x^{\nu'} + a^{\mu'}$.

A densidade Lagrangiana mais simples para o campo $\hat{\Psi}$ é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \hat{\Psi} \partial_\beta \hat{\Psi} + m^2 \hat{\Psi}^2 \right), \quad (1.1)$$

onde m representa a *massa* associada ao campo escalar e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é o tensor métrico de Minkowski. Integrando a densidade lagrangiana (1.1), obtemos a ação do campo escalar

$$S = \int \mathcal{L} d^4x,$$

que é uma quantidade invariante pelo grupo de Poincaré.

Não é difícil mostrar que a variação da ação com respeito ao campo $\hat{\Psi}$ resulta na equação hiperbólica conhecida como equação de Klein-Gordon

$$(\square - m^2) \hat{\Psi} = 0, \quad (1.2)$$

com $\square \equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$ sendo o operador d'Alembertiano. Essa equação descreve a evolução temporal do campo escalar que estamos interessados em estudar. Note que ela possui um conjunto especial de soluções (invariantes por transformações de Lorentz)

$$u_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (1.3)$$

onde $\omega_{\vec{k}} = (k^2 + m^2)^{1/2}$, $k = |\vec{k}| = (\sum_{i=1}^3 k_i^2)^{1/2}$ e as componentes k_i do vetor $\vec{k}$ podem assumir qualquer valor real

$$-\infty < k_i < \infty, \quad i = 1, 2, 3$$

Essas soluções são ditas de frequência positiva com respeito a t , uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}}(t, \vec{x}) = -i\omega_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(t, \vec{x}), \quad \text{com } \omega_{\vec{k}} > 0.$$

Vamos introduzir um produto escalar da forma

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &= -i \int_t \{ \phi_1 \partial_t \phi_2^* - [\partial_t \phi_1] \phi_2^* \} d^3x \\ &= -i \int_t \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_t \phi_2^* d^3x, \end{aligned}$$

onde a integral é feita em uma superfície de tempo constante, t . É possível mostrar que este produto interno é conservado para ϕ_1 e ϕ_2 soluções da equação de Klein-Gordon. Os modos $u_{\vec{k}}(t, \vec{x})$ e $u_{\vec{k}}^*(t, \vec{x})$ dados pela Eq. (1.3) formam um conjunto completo de soluções satisfazendo

$$\begin{aligned} (u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ (u_{\vec{k}}^*, u_{\vec{k}'}^*) &= -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ (u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}^*) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, expandimos um campo escalar genérico, $\hat{\Psi}(x)$, como combinação linear dos modos $u_{\vec{k}}(x)$ e $u_{\vec{k}}^*(x)$ como

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(x) + a_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*(x) \right], \quad (1.4)$$

onde os coeficientes $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^\dagger$ são chamados de operadores de destruição e criação respectivamente e dependem das condições iniciais para o campo $\hat{\Psi}$ da forma

$$a_{\vec{k}} = -i \int_{t_0} d^3x \hat{\Psi}(t_0, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{k}}^*(t_0, \vec{x}), \quad (1.5)$$

com $\hat{\Psi}(t_0, \vec{x}) \equiv \hat{\Psi}|_{\Sigma_{t_0}, \vec{x}}$ e $\dot{\hat{\Psi}}(t_0) \equiv t^\alpha \partial_\alpha \hat{\Psi}|_{\Sigma_{t_0}} = \partial_t \hat{\Psi}|_{\Sigma_{t_0}}$, onde $t^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha$ e Σ_{t_0} é a hipersuperfície em $\mathcal{M}$ de tempo constante t_0 .

Vale ressaltar que, apesar de denotarmos a expansão de $\hat{\Psi}$ em (1.4) como uma soma, $\sum_{\vec{k}}$ pode ser substituído pela forma integral do campo no caso contínuo de forma que

$$\hat{\Psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_{\vec{k}} t} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega_{\vec{k}} t} \right). \quad (1.6)$$

Os operadores $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^\dagger$ agem sobre o espaço de Fock. Este espaço é definido sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, para uma definição mais detalhada vide à [Schwartz \(2014\)](#). O espaço de Fock é descrito como

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}, \quad (1.7)$$

onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, e o espaço $\mathcal{H}^{\otimes n}$ é chamado de *produto tensorial simétrico*, ele é formado por todos elementos da forma

$$\hat{e}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{\alpha_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \hat{e}_{\sigma(\alpha_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{\sigma(\alpha_n)}. \quad (1.8)$$

Na definição acima do espaço $\mathcal{F}$, consideremos que $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$. Desta forma podemos detalhar a ação dos operadores de destruição e de criação sobre o espaço de Fock, onde

$$\begin{cases} a_{\vec{k}}^\dagger|_{\mathcal{H}^{\otimes n}} : & \mathcal{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes(n+1)}, \\ a_{\vec{k}}|_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} : & \mathcal{H}^{\otimes(n+1)} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}. \end{cases} \quad (1.9)$$

A partir desse momento iremos usar a representação de *ket's* para os elementos de $\mathcal{F}$. A construção do espaço de Fock se mostrará bastante intuitiva, para um aprofundamento consulte [Nunes et al. \(2003\)](#).

Para a quantização canônica em TQC, tratamos o campo $\hat{\Psi}$ como um operador atuando sobre o espaço de Fock. Podemos construir o este espaço a partir do estado de vácuo $|0\rangle$, que representa a *ausência de partículas* e cuja definição é dada por

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \vec{k}. \quad (1.10)$$

Além disso, impomos as relações de comutação usuais

$$\begin{cases} [\hat{\Psi}(t, \vec{x}), \hat{\Psi}(t, \vec{y})] = 0 \\ [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0 \\ [\hat{\Psi}(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{cases} \quad (1.11)$$

onde $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \hat{\Psi})} = \partial_t \hat{\Psi}$ é o operador momento canônico conjugado à $\hat{\Psi}$. Em termos dos operadores destruição e criação as relações de comutação tomam a seguinte forma

$$\begin{cases} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0 \\ [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{cases} \quad (1.12)$$

Na representação de Heisenberg, a evolução temporal ocorre através dos operadores que agem sobre os estados do espaço de Hilbert. Os ket's pertencentes a esse espaço serão denotados por $|\cdot\rangle$ e uma base conveniente para o espaço de Fock pode ser construída a partir do estado de vácuo dado pela equação (1.10). Partindo deste estado de vácuo é possível construir o estado de uma partícula associada à $\vec{k}$ ao aplicar o operador de criação $a_{\vec{k}}^\dagger$ no estado de vácuo $|0\rangle$

$$a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle = |1_{\vec{k}}\rangle.$$

e o estado de muitas partículas distintas é obtido fazendo esse processo sucessivamente, da forma

$$|1_{\vec{k}_1}, 1_{\vec{k}_2}, \dots, 1_{\vec{k}_n}\rangle = a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \dots a_{\vec{k}_n}^\dagger |0\rangle.$$

Usando a analogia existente com um sistema de infinitos osciladores harmônicos, obtemos a seguinte expressão para a ação dos operadores de criação e destruição nos estados de muitas partículas idênticas

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}^\dagger |n_{\vec{k}}\rangle &= (n+1)^{1/2} |(n+1)_{\vec{k}}\rangle \\ a_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle &= n^{1/2} |(n-1)_{\vec{k}}\rangle \end{aligned}$$

e consequentemente obtemos um estado geral de várias partículas

$$|{}^1 n_{\vec{k}_1}, {}^2 n_{\vec{k}_2}, \dots, {}^l n_{\vec{k}_l}\rangle = ({}^1 n! {}^2 n! \dots {}^l n!)^{1/2} (a_{\vec{k}_1}^\dagger)^{{}^1 n} (a_{\vec{k}_2}^\dagger)^{{}^2 n} \dots (a_{\vec{k}_l}^\dagger)^{{}^l n} |0\rangle.$$

Esses são os vetores da base do espaço de Fock, e essa base é normalizada de modo que

$$\langle {}^1 n_{\vec{k}_1}, {}^2 n_{\vec{k}_2}, \dots, {}^p n_{\vec{k}_p} | {}^1 m_{\vec{k}'_1}, {}^2 m_{\vec{k}'_2}, \dots, {}^l m_{\vec{k}'_l} \rangle = \delta_{pl} \sum_s \delta_{1n^s(1)m} \dots \delta_{pn^s(l)m} \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}'_{s(1)}} \dots \delta_{\vec{k}_p \vec{k}'_{s(l)}}$$

Novamente em analogia com um sistema de infinitos osciladores harmônicos desacoplados, definimos o estado o operador número total de partículas da forma

Definição 1 O operador hermitiano $N_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$, é chamado de operador número associado ao modo $\vec{k}$. Também definimos o operador número total como

$$N = \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}}.$$

Note que podemos agora calcular o valor esperado do operador número no estado vácuo

$$\langle 0|N_{\vec{k}}|0\rangle = \langle 0|a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}|0\rangle = 0$$

e em um estado mais geral do espaço de Fock,

$$\langle {}^1n_{\vec{k}_1}, {}^2n_{\vec{k}_2}, \dots, {}^ln_{\vec{k}_l} | N_{\vec{k}_i} | {}^1n_{\vec{k}_1}, {}^2n_{\vec{k}_2}, \dots, {}^ln_{\vec{k}_l} \rangle = {}^in.$$

Portanto, o valor esperado do operador número $N_{\vec{k}_i}$ é o número inteiro in , que representa o número de quanta com o modo $\vec{k}_i$.

Em especial,

$$\langle {}^1n_{\vec{k}_1}, {}^2n_{\vec{k}_2}, \dots, {}^ln_{\vec{k}_l} | N | {}^1n_{\vec{k}_1}, {}^2n_{\vec{k}_2}, \dots, {}^ln_{\vec{k}_l} \rangle = \sum_i {}^in.$$

Isso sugere a motivação do nome "operador número" atribuído a $N_{\vec{k}_i}$ e N , pois esses são operadores que contam o número de modos. O operador de criação $a_{\vec{k}_i}^\dagger$ adiciona +1 modo no estado $\vec{k}_i$ e o operador destruição $a_{\vec{k}_i}$ remove 1 do número de modos no estado $\vec{k}_i$.

Finalmente, podemos mostrar que o vácuo $|0\rangle$ é um invariante de Poincaré, isto é, observadores inerciais concordarão com a noção de vácuo. Este resultado é demonstrado em [Pitelli \(2023\)](#).

1.2 Campos em espaços curvos

Suponha agora um espaço-tempo $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ como uma variedade suave, quadridimensional, pseudo-Riemanniana, munida da métrica $g_{\alpha\beta}$. Nesse espaço a equação de Klein-Gordon para a evolução do campo é obtida a partir da seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[-g(x)]^{1/2} \left(g^{\mu\nu}(x) \partial_\mu \hat{\Psi}(x) \partial_\nu \hat{\Psi}(x) + [m^2 + \xi R(x)] \hat{\Psi}(x) \right), \quad (1.13)$$

e a variação desta densidade de lagrangiana com respeito ao campo $\hat{\Psi}$ resulta na equação de Klein-gordon [\(1.14\)](#)

$$(\square - m^2 - \xi R(x)) \hat{\Psi} = 0, \quad (1.14)$$

onde $R(x)$ é o escalar de Ricci, ξ é uma constante de acoplamento adimensional e $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$. A equação [\(1.14\)](#) é uma equação hiperbólica, i.e., dadas condições iniciais $\phi_0 = \phi|_\Sigma$ e $\dot{\phi}_0 = n^\mu \partial_\mu \phi|_\Sigma$ restritas a uma hipersuperfície Σ com vetor normal n^μ , então o campo $\hat{\Psi}$ é unicamente determinado no domínio de dependência de Σ , denotado por $D(\Sigma)$.

A hipersuperfície Σ é dita acronal se nenhum par de eventos em Σ podem ser ligados por uma curva do tipo-tempo. Além disso, se Σ é acronal e $D(\Sigma) = \mathcal{M}$ então Σ é dita de Cauchy. O espaço-tempo $\mathcal{M}$ é dito globalmente hiperbólico se possui uma

superfície de Cauchy. No restante dessa secção iremos supor o espaço-tempo globalmente hiperbólico.

O produto escalar entre dois campos é generalizado para a seguinte forma onde $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ e $d\Sigma$ é elemento de volume em Σ .

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2(x) [-g_\Sigma(x)]^{1/2} d\Sigma^\mu \quad (1.15)$$

De modo análogo ao caso da TQC em Minkowski, existe um conjunto completo de soluções ortonormais $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ para a equação de Klein-Gordon, tal que

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0,$$

onde i, j representam agora uma família de índices que são necessários para nomear cada modo. Podemos, novamente, expandir o campo $\hat{\Psi}$ em termos de u_i e u_i^* como no caso de Minkowski

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)]. \quad (1.16)$$

E a quantização do campo segue de modo análogo ao caso da TQC em Minkowski, adotando as relações de comutação (1.11) e (1.12).

Diferentemente do caso da TQC em Minkowski, onde existe um conjunto de modos $u_{\vec{k}}$ dado pela Eq. (1.3) que possui um status especial, isso não ocorre na TQC-CS. No caso de Minkowski, os modos $u_{\vec{k}}$ são especiais pois definem um vácuo que é um invariante pela ação do grupo de Poincaré, e portanto, todo observador inercial concorda com esse estado de vácuo definido pelos operadores de destruição, $a_{\vec{k}}$. Recorde que o operador de destruição depende da escolha dos modos em que expandimos o campo escalar. Num espaço tempo curvo, o grupo de Poincaré não é mais um grupo de simetria. Em particular podemos não ter um campo de Killing para o qual definir modos de frequência positiva.

Portanto, nada impede de escolhermos uma segunda base ortonormal de modos $\{\bar{u}_j(x), \bar{u}_j^*(x)\}$ de forma que o campo pode ser expresso nessa nova base

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x)]. \quad (1.17)$$

A definição do estado de vácuo procede exatamente da mesma forma que no caso do espaço-tempo de Minkowski, porém agora existe ambiguidade na construção do formalismo. Existem duas definições para o estado de vácuo e, a princípio, nenhum critério para ‘escolher o melhor vácuo’ ou seja, o estado de vácuo que entendemos como o estado de ausência de partículas. De fato, podemos definir dois estados, $|0\rangle$ e $|\bar{0}\rangle$ a partir das seguintes relações

$$a_i |0\rangle = 0 \quad \forall i$$

e

$$\bar{a}_j|\bar{0}\rangle = 0 \quad \forall j.$$

Mas em geral, esses não são vácuos equivalentes, isto é,

$$a_i|\bar{0}\rangle \neq 0 \quad , \quad \bar{a}_j|0\rangle \neq 0.$$

Como os dois conjuntos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ e $\{\bar{u}_j(x), \bar{u}_j^*(x)\}$ são completos, podemos expandir uma base em termos da outra, obtendo

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*) \quad (1.18)$$

e

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji}^* \bar{u}_j^*) \quad (1.19)$$

onde

$$\alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u_j^*). \quad (1.20)$$

Igualando as duas expansões do campo escalar, (1.17) e (1.16), e utilizando das equações acima obtemos a expressão do operador de destruição associado a base de modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ em termos dos operadores de destruição e criação associados a base de modos $\{\bar{u}_j(x), \bar{u}_j^*(x)\}$,

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger) \quad (1.21)$$

e, analogamente

$$\bar{a}_j = \sum_i (\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger). \quad (1.22)$$

Desta forma

$$a_i|\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger |\bar{0}\rangle \quad (1.23)$$

e

$$\bar{a}_j|0\rangle = - \sum_i \beta_{ji}^* a_i^\dagger |0\rangle, \quad (1.24)$$

o que mostra claramente que os vácuos diferem quando $\beta_{ij} \neq 0$. Portanto, podemos calcular o valor esperado do número de partículas associadas aos modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ no vácuo definido pelos modos $\{\bar{u}_j(x), \bar{u}_j^*(x)\}$ e vice-versa, isto é,

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \langle \bar{0} | a_i^\dagger a_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2 \quad (1.25)$$

O que mostra que o estado de vácuo associado à base $\{\bar{u}_j(x), \bar{u}_j^*(x)\}$ contém $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ partículas no modo i quando analisamos do ponto de vista da base $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$.

Definição 2 Um espaço-tempo $\mathcal{M}$ é dito estacionário se possui um campo de Killing do tipo tempo t^α . Neste caso, no sistema de coordenadas $(t, \vec{x})$ onde $t^\alpha \equiv \delta_t^\alpha$, a métrica não depende da coordenada t .

Definição 3 Um espaço-tempo estacionário $\mathcal{M}$ é também dito estático se a métrica é invariante por reversão temporal, $t \rightarrow -t$. Portanto, no sistema de coordenadas $(t, \vec{x})$ mencionado anteriormente, $g_{ta} = 0$ e existe $\Sigma \subset \mathcal{M}$ hipersuperfície ortogonal à t^α tal que a curvatura extrínseca é nula, $K_{ab} = 0$.¹

Se $\mathcal{M}$ é um espaço-tempo estacionário com um campo de Killing do tipo-tempo $\mathbf{K}$, podemos obter um conjunto completo de modos de modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ de frequência positiva com respeito a $\mathbf{K}$, isto é,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}} u_i = -i\omega u_i, \quad \omega > 0 \quad (1.26)$$

onde $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}$ é a derivada de Lie ao longo do vetor $\mathbf{K}$. Dado outro conjunto completo de modos, $\{\bar{u}_j(x), \bar{u}_j^*(x)\}$, sabemos que cada $\bar{u}_j$ é escrito como uma combinação linear dos modos u_i de frequência positiva e os modos u_i^* de frequência negativa. Se $\bar{u}_j$ só possui modos de frequência positiva, então $\beta_{ji} = 0$ e isso implica que $a_i|\bar{0}\rangle = \bar{a}_j|0\rangle = 0$. Neste caso as duas representações concordam no estado de vácuo. Porém, caso $\bar{u}_j$ misture modos $\{u_i, u_i^*\}$ de frequências positiva e negativa, então existe $\beta_{ji} \neq 0$ para algum índice i e j , então os estados de vácuo não irão concordar entre si no valor esperado do operador número, Eq. (1.25).

Por fim, podemos calcular o tensor de energia e momento $T_{\mu\nu}$ clássico associado ao campo escalar $\hat{\Psi}$ em um espaço-tempo curvo, usamos a seguinte expressão obtida da variação da ação com respeito a métrica, Oliveira (2022)

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \nabla_\mu \hat{\Psi} \nabla_\nu \hat{\Psi} - \frac{1}{2} \left(\nabla^\alpha \hat{\Psi} \nabla_\alpha \hat{\Psi} + m^2 \hat{\Psi}^2 \right) g_{\mu\nu} + \\ &\quad \xi \left((R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \hat{\Psi}^2 + \nabla_\mu \nabla_\nu \hat{\Psi}^2 - g_{\mu\nu} \square \hat{\Psi} \right), \end{aligned} \quad (1.27)$$

No caso especial de acoplamento mínimo $\xi = 0$, a expressão acima toma uma forma muito mais simplificada

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{\Psi} \partial_\nu \hat{\Psi} - \frac{1}{2} \left(\partial^\alpha \hat{\Psi} \partial_\alpha \hat{\Psi} + m^2 \hat{\Psi}^2 \right) g_{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Essa expressão será importante quando analisarmos a conservação de energia e corrente de energia do campo.

1.3 Detector de Unruh-DeWitt

A ambiguidade na definição do estado de vácuo coloca em questão a dificuldade de definir um estado que represente o que presenciamos fisicamente como a ausência de partículas. A questão que surge é a de ‘como escolher o vácuo?’. Note que, mesmo no

¹ A demonstração é apresentada na subseção 3.6.4 da referência Poisson (2004).

espaço-tempo de Minkowski, não existe um único estado de vácuo. De fato, ao resolver a equação de Klein-Gordon para o campo escalar $\hat{\Psi}$ é possível encontrar diferentes conjuntos de modos $(\square - m^2)\hat{\Psi} = 0 \rightarrow \{u_i, u_i^*\}$ ou $\{\bar{u}_j, \bar{u}_j^*\}$, isto resulta em diferentes conjuntos dos operadores de destruição e criação e consequentemente diferentes definições do vácuo

$$\{u_i, u_i^*\} \text{ ou } \{\bar{u}_j, \bar{u}_j^*\} \rightarrow \{a_i\} \text{ ou } \{\bar{a}_j\} \rightarrow |0\rangle \text{ ou } |\bar{0}\rangle.$$

Porém, existe um vácuo convencional (invariante de Poincaré) que é definido a partir dos modos:

$$u_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} \rightarrow |0_M\rangle.$$

Usualmente escolhemos o vácuo invariante de Poincaré, pois todos observadores inerciais concordam com esse estado de vácuo como o estado de ausência de partículas. Porém, mesmo em Minkowski, com o vácuo invariante de Poincaré, um detector acelerado irá detectar partículas, [Birrell and Davies \(1982\)](#). Portanto, em geral, o conceito de partículas não é universal, mas depende do observador. A própria definição de partícula está mal posta até considerarmos o processo de medida da presença de partículas. A presença de partículas pode ser registrada em alguns detectores e não em outros. Portanto, a medida da existência de partículas sem a especificação do processo de detecção não é um problema bem posto.

Para lidarmos com essas questões, apresentaremos o conceito do detector de Unruh-deWitt [Conroy \(2022\)](#). Ele consiste de um sistema quântico pontual com dois níveis de energia E e E_0 , acoplado via uma interação monopolar com o campo escalar $\hat{\Psi}$. Iremos denotar $|E_0\rangle$ o estado fundamental do detector e $|E\rangle$ o estado excitado. Denotaremos também $\Omega = E - E_0$ a diferença entre os níveis de energia e $x^\mu(\tau)$ a trajetória do detector parametrizada por τ , o tempo próprio do detector.

Se o detector interagindo com o campo no estado $|E_0\rangle$ faz uma transição para o estado excitado $|E\rangle$ após interagir com campo, então dizemos que o detector detectou um quanta de energia Ω . Queremos estudar a resposta do detector para a excitação e desexcitação. Para isso utilizaremos a teoria de perturbação, [Sakurai and Napolitano \(2013\)](#), isto é, analisaremos sua resposta em ordem mais baixa (em relação à constante de acoplamento entre o detector e o campo). Para isso, considere o hamiltoniano total do sistema campo-detector-interação dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_C + \mathcal{H}_D + \mathcal{H}_I \quad (1.29)$$

com $\mathcal{H}_C$ o hamiltoniano do campo escalar, $\mathcal{H}_D = \Omega|E\rangle\langle E|$ o hamiltoniano do detector, que satisfaz $\mathcal{H}_D|E_0\rangle = 0$ e $\mathcal{H}_D|E\rangle = \Omega|E\rangle$ e $\mathcal{H}_I$ é o hamiltoniano de interação. Para teoria de perturbação iremos considerar $\mathcal{H}_I$ a parte da perturbação no sistema e $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_C + \mathcal{H}_D$ o hamiltoniano já resolvido. Note que o formalismo é construído sobre o produto tensorial

de dois espaços de Hilbert $\mathcal{H}_D \otimes \mathcal{F}$, o primeiro é o espaço bidimensional formado pela base $\{|E_0\rangle, |E\rangle\}$ do detector e o segundo é o espaço de Fock onde campo escalar $\hat{\Psi}$ age.

O hamiltoniano de interação é escolhido já levando em consideração que o detector é um sistema pontual,

$$\mathcal{H}_I(\tau) = \lambda \chi(\tau) \hat{m}(\tau) \hat{\Psi}(x(\tau)) \quad (1.30)$$

aqui, λ é uma pequena constante de acoplamento, $\chi(\tau)$ é uma função suave de suporte compacto responsável por ‘ligar’ e ‘desligar’ a interação do campo com o detector, chamada de função *switching* e $\hat{m}(\tau)$ é o operador de momento de monopolo. Na representação de Heisenberg, podemos determinar o operador $\hat{m}(\tau)$ a partir de $\hat{m}(0)$ em qualquer instante de tempo τ da forma

$$\hat{m}(\tau) = e^{i\mathcal{H}_0\tau} \hat{m}(0) e^{-i\mathcal{H}_0\tau},$$

onde $\hat{m}(0)$ depende da estrutura interna do detector. Nesse trabalho tomamos $\hat{m}(0) = |E\rangle\langle E_0| + |E_0\rangle\langle E|$ seguindo o que foi feito em [Cong et al. \(2021\)](#).

Portanto, a interação do detector com o campo escalar é descrita pelo seguinte hamiltoniano de interação,

$$\mathcal{H}_I(\tau) = \lambda \chi(\tau) \left(e^{-i\tau\Omega} |E\rangle\langle E_0| + e^{i\tau\Omega} |E_0\rangle\langle E| \right) \otimes \hat{\Psi}(x(\tau)). \quad (1.31)$$

Considere que o campo inicia a interação com o detector no estado fundamental $|E_0\rangle$, e o campo no estado de vácuo $|0\rangle$, portanto o estado inicial é $|i\rangle = |E_0\rangle \otimes |0\rangle$. Após a interação campo-detector, haverá uma probabilidade não nula de encontrar o detector no seu estado excitado, $|E\rangle$, e o campo em um estado $|\psi\rangle \neq |0\rangle$. Chamaremos esse de o estado final $|f\rangle = |E\rangle \otimes |\psi\rangle$.

Suponha que $|\lambda| \ll 1$, então a amplitude de transição do detector pode ser calculada em primeira ordem através da teoria de perturbação e por meio da série de Dyson,

$$\mathcal{A}(\Omega) = \delta_{fi} - i \int_{-\infty}^{\infty} \langle f | \mathcal{H}_I(\tau) | i \rangle d\tau + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (1.32)$$

Portanto, para estados distintos $i \neq f$ temos

$$\mathcal{A}(\Omega) = -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{i\Omega\tau} \langle \psi | \hat{\Psi}(x(\tau)) | 0 \rangle d\tau. \quad (1.33)$$

Isso implica que a probabilidade de transição, para essa ordem de teoria de perturbação, é não nula somente se $|\psi\rangle = |1_n\rangle$ para algum conjunto de índices n .

A fim de calcularmos a probabilidade transição para qualquer $|1_n\rangle$ tomamos $|\mathcal{A}(\Omega)|^2$ e somamos sobre todos possíveis estado finais, de modo que obtemos

$$\mathcal{P}(\Omega) = \lambda^2 |\langle E | \hat{m}(0) | E_0 \rangle|^2 \mathcal{F}(\Omega) \quad (1.34)$$

onde

$$\mathcal{F}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \chi(\tau) \chi(\tau') e^{-i\Omega(\tau-\tau')} \left[\sum_n \langle 0 | \hat{\Psi}(x(\tau)) | 1_n \rangle \langle 1_n | \hat{\Psi}(x(\tau')) | 0 \rangle \right]. \quad (1.35)$$

e onde podemos usar a relação de completeza

$$\langle 0 | \hat{\Psi}(x(\tau)) \hat{\Psi}(x(\tau')) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\Psi}(x(\tau)) \left(\sum_n | 1_n \rangle \langle 1_n | \right) \hat{\Psi}(x(\tau')) | 0 \rangle.$$

Dessa forma, chegamos em

$$\mathcal{F}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \chi(\tau) \chi(\tau') e^{-i\Omega(\tau-\tau')} G(x(\tau), x(\tau')). \quad (1.36)$$

A função $\mathcal{F}$ é conhecida como *função resposta*. Ela é independente de detalhes internos do detector e é determinada pela função de Green de Wightman $G(x(\tau), x(\tau')) = \langle 0 | \hat{\Psi}(x(\tau)) \hat{\Psi}(x(\tau')) | 0 \rangle$.

1.3.1 Função de Wightman

A função de Wightman é definida como uma função de dois pontos

$$G(x, x') = \langle 0 | \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x') | 0 \rangle. \quad (1.37)$$

Através da decomposição em modos do campo escalar dada pela equação (1.16), obtemos a seguinte expressão

$$G(x, x') = \sum_{i,j} \langle 0 | (a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)) (a_j u_j(x') + a_j^\dagger u_j^*(x')) | 0 \rangle \quad (1.38)$$

e usando o fato que $a_j | 0 \rangle = \langle 0 | a_i^\dagger = 0$, obtemos uma representação mais simplificada para a função de Wightman

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \sum_{i,j} u_i(x) u_j^*(x') \langle 0 | a_i a_j^\dagger | 0 \rangle \\ &= \sum_{i,j} u_i(x) u_j^*(x') \delta_{ij} \\ &= \sum_i u_i(x) u_i^*(x') \end{aligned} \quad (1.39)$$

Assim, podemos obter a função de Wightman a partir da soma de modos como mostra a equação acima.

Além disso, substituindo a Eq. (1.39) na expressão da função resposta $\mathcal{F}$ obtemos a seguinte identidade (que será útil na sequência do trabalho)

$$\mathcal{F}(\Omega) = \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \chi(\tau) \chi(\tau') e^{-i\Omega(\tau-\tau')} u_i(x) u_i^*(x'). \quad (1.40)$$

2 A estrutura do espaço-tempo

Neste capítulo, nos dedicaremos ao estudo do espaço-tempo utilizado neste trabalho para a análise da sensibilidade do detector de UDW. Inicialmente, na seção (2.1), será discutida a dinâmica em espaços-tempo não globalmente hiperbólicos a fim de estabelecermos a importância das condições de contorno auto-adjuntas e definirmos o funcional de energia conservada. Na seção (2.2) serão apresentadas as condições de junção e o formalismo de Israel (1966), que estabelecem condições para que a colagem de duas regiões do espaço-tempo seja adequada. Além disso, iremos nos aprofundar na energia de vinco que existe na superfície que une as duas regiões do espaço-tempo de interesse (as regiões plana e cônica). A seção (2.3) é focada no significado físico da conicidade. Nela será apresentado o processo de regularização, onde basicamente fazemos uma colagem de dois espaços-tempo.

2.1 Dinâmica em espaços não globalmente hiperbólicos e estáticos

Seja $(\mathcal{M}_0, g_{\alpha\beta})$ um espaço-tempo globalmente hiperbólico possuindo, portanto, uma superfície de Cauchy, $\Sigma_0 \subset \mathcal{M}_0$. Para cada condição inicial $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in C^\infty(\Sigma_0) \times C^\infty(\Sigma_0)$ obtemos unicamente um campo $\hat{\Psi} \in C^\infty(\mathcal{M}_0)$ que satisfaz a equação de Klein-Gordon (1.14) e é tal que $\hat{\Psi}|_{\Sigma_0} = \phi_0$ e $t^\alpha \nabla_\alpha \hat{\Psi}|_{\Sigma_0} = \dot{\phi}_0$, onde t^α é normal a Σ_0 . Existe também um difeomorfismo entre $\mathcal{M}_0$ e $\mathbb{R} \times \Sigma_0$ de forma que $\mathcal{M}_0$ pode ser fatiado por hipersuperfícies Σ_t , obtidas de Σ_0 através do campo vetorial t^α . Neste caso, o fluxo de t^α conecta as coordenadas y^i em Σ_t e Σ_{t+dt} como mostra a figura (3).¹

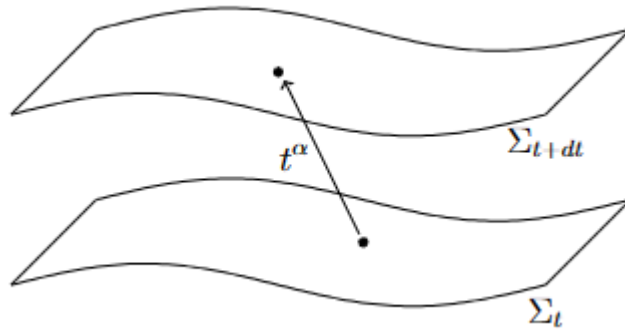


Figura 3 – A imagem ilustra a decomposição do espaço-tempo em superfícies do tipo espaço com vetor normal t^α .

¹ O estudo de espaços-tempo globalmente hiperbólicos é aprofundado em Sánchez (2022).

No entanto, para um espaço-tempo $\mathcal{M}$ não globalmente hiperbólico perdemos a descrição única do campo $\hat{\Psi}$ como mencionado acima. Na prática, quando existe uma singularidade, ou mesmo uma fronteira do tipo-tempo em $\mathcal{M}$, precisamos de *condições de contorno* para saber como o campo evolui, uma vez que não sabemos “o que pode entrar ou sair da singularidade (ou da fronteira)”. Mas quais condições de contorno dão uma descrição razoável para a evolução do campo? Essa discussão é explorada em mais detalhes na referência [Wald \(1980\)](#).

Iremos analisar um pouco da dinâmica em espaços-tempo não globalmente hiperbólicos e estáticos, $\mathcal{M}$. Em um espaço-tempo estático existem coordenadas (t, x^i) tais que a métrica toma a seguinte forma,

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + h_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

com $V(\vec{x})$ e $h_{ij}(\vec{x})$ independentes de t . Além disso, $t^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha$ é um vetor de Killing tal que $V^2 = -t_\alpha t^\alpha$. Em primeira análise estamos interessados em espaços-tempo $\mathcal{M}$ que possuem uma hipersuperfície Σ ortogonal com o campo de Killing estático t^α , tal que as órbitas de t^α intersectam Σ apenas uma vez. Considerando a forma da métrica dada pela Eq. (2.1), o elemento de volume é definido como $V^{-1}d\Sigma$ onde $d\Sigma$ é o elemento de volume da hipersuperfície Σ e, de modo análogo ao caso de $\mathcal{M}_0$ (espaço-tempo globalmente hiperbólico), definimos Σ_t como a “translação” de Σ pelo fluxo t^α .

É conhecido da literatura, [Ishibashi and Wald \(2003\)](#), que a equação (1.14) toma uma forma simplificada

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial t^2} = -A \hat{\Psi} \quad (2.2)$$

com $A = -VD^\alpha(VD_\alpha) + mV^2 + \xi RV^2$. Aqui D^α denota a derivada covariante em Σ . O operador A age sobre o espaço de Hilbert, $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$, das funções que são quadrado integráveis em Σ . É fundamental observar que apesar de A ser um operador positivo e simétrico, ele não é necessariamente auto-adjunto.

Observe que a equação (2.2) pode ser resolvida em modos aplicando o método da separação de variáveis da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\chi(t)] &= -\omega^2 \chi(t), \\ A\psi(\vec{x}) &= \omega^2 \psi(\vec{x}), \end{cases} \quad (2.3)$$

onde χ é a parte com dependência temporal do campo, e ψ é a parte com dependência espacial, isto é, $\hat{\Psi}(x) = \chi(t)\psi(\vec{x})$. Portanto, para resolver a Eq. (2.2) precisamos de *condições de contorno* para ψ . E isto retorna o questionamento, quai as condições de contorno adequadas?

A referência [Wald \(1980\)](#) demonstra que o problema de desenvolver uma dinâmica bem definida em espaços não globalmente hiperbólicos pode ser transferido para

o de encontrar extensões auto-adjuntas de A . Portanto, as condições de contorno que devemos impor na parte espacial do campo são condições que caracterizam o domínio onde o operador A é auto-adjunto, estas condições serão chamadas de *condições de contorno auto-adjuntas*.

Para a equação (2.2), não sabemos a princípio, quais as condições de contorno sobre o campo $\hat{\Psi}$ na fronteira. Portanto, o domínio do operador A é inicialmente escolhido como o conjunto $\mathcal{C}_0^\infty$, i.e., o conjunto das funções suaves e de suporte compacto em Σ (lembramos que a fronteira não faz parte do espaço-tempo, de forma que evitamos - em primeira análise - a interação campo/fronteira).

Ishibashi e Wald estabelecem, então, algumas exigências para que a dinâmica do campo seja “razoável”. Para isso, consideram dados $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$, através dos quais, obtemos um campo $\hat{\Psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ que satisfaz (1.14) em todo espaço-tempo. A dependência de $\hat{\Psi}$ nos dados iniciais $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ deve ser tal que $\phi_0 = \hat{\Psi}|_\Sigma$ e $\dot{\phi}_0 = t^\alpha \nabla_\alpha \hat{\Psi}|_\Sigma$. Além disso, as suposições para que a evolução seja considerada “adequada” são dadas por Ishibashi and Wald (2003):

Suposição 1. Causalidade: Seja $K_0 = \text{supp}(\phi_0) \cup \text{supp}(\dot{\phi}_0)$, o suporte dos dados iniciais $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ em Σ . Portanto,

$$\text{supp}(\hat{\Psi}) \subset D^+(K_0) \cup D^-(K_0)$$

onde $D^+(K_0)$ e $D^-(K_0)$ denotam o domínio de dependência futuro e passado de K_0 respectivamente.

Esta primeira suposição diz respeito a causalidade do campo $\hat{\Psi}$. A equação $\text{supp}(\hat{\Psi}) \subset D^+(K_0) \cup D^-(K_0)$ diz que o campo $\hat{\Psi}$ evolui a partir das condições iniciais de modo que, em regiões de $\mathcal{M}$ fora do domínio de dependência de K_0 , teremos $\hat{\Psi} = 0$.

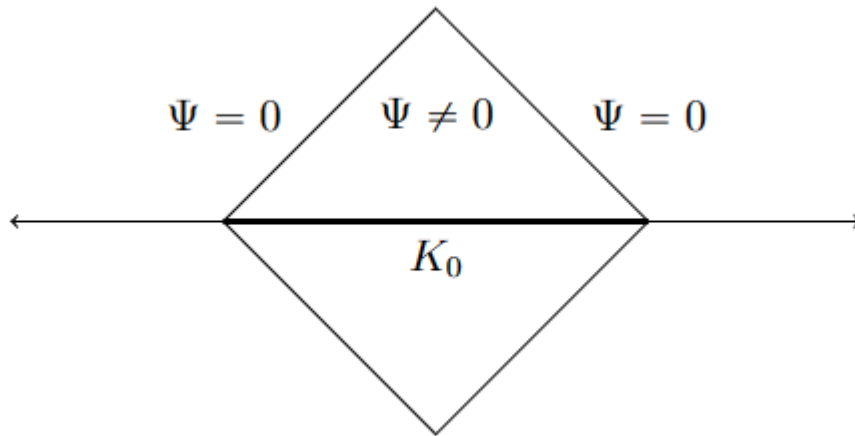


Figura 4 – O diagrama ilustra do domínio de dependência K_0 e os valores do campo escalar $\hat{\Psi}$.

Definição 4 *Translação temporal:* Definimos $T_t : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ o operador de translação temporal, tal que, para toda função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ então $T_t(f)(s, \vec{x}) = f(s - t, \vec{x})$.

Definição 5 *Reflexão temporal:* Definimos $P : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ o operador de reflexão temporal, tal que, para toda função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ então $P(f)(s, \vec{x}) = f(-s, \vec{x})$.

Seja $\hat{\Psi}$ a solução do campo escalar que corresponde aos dados iniciais $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$, definimos $\phi_t = \hat{\Psi}|_{\Sigma_t}$ e $\dot{\phi}_t = t^\alpha \nabla_\alpha \hat{\Psi}|_{\Sigma_t}$.

Suposição 2.i *Invariância por translação temporal:* Seja $\hat{\Psi}$ solução associada aos dados $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$. Considere especificadas as condições iniciais “transladadas” $(\phi_t, \dot{\phi}_t)$ em Σ . Então a solução do campo escalar com essas novas condições será $T_{-t}\hat{\Psi}$.

Suposição 2.ii *Invariância por reflexão temporal:* Se os dados iniciais forem $(\phi_0, -\dot{\phi}_0)$ em Σ - que correspondem aos dados iniciais com reflexão temporal - , então o campo, com essas novas condições, corresponderá à solução com reversão temporal, $P\hat{\Psi}$.

O objetivo principal desta discussão é o de definir um funcional de energia adequado, $E : C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ que não dependa do tempo. No caso estático (com vetor de Killing do tipo-tempo ξ^ν) e globalmente hiperbólico, a energia é definida a partir da equação

$$\begin{aligned} E &= 2 \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} n^\mu \xi^\nu d\Sigma, \\ &= \int_{\Sigma} [\dot{\phi}_0^2 + \partial^i \phi_0 \partial_i \phi_0 + m^2 \phi_0^2] V^{-1} d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(o fator 2 na equação acima é definido por pura conveniência) e toma a seguinte forma (após uma integração por partes, considerando que o campo se anula suficientemente rápido no infinito espacial)

$$E(\hat{\Psi}, \hat{\Psi}) = \int_{\Sigma} \{\dot{\phi}_0^2 + \phi_0 A \phi_0\} V^{-1} d\Sigma. \quad (2.5)$$

Observe que o funcional E é positivo definido e pode ser visto como um produto interno sobre o espaço de soluções de (2.2) com condição inicial em $C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$,

$$E(\hat{\Xi}, \hat{\Psi}) \equiv (\dot{\xi}_0, \dot{\phi}_0)_{L^2} + (\xi_0, A\phi_0)_{L^2}, \quad (2.6)$$

onde $(\dot{\xi}_0, \xi_0), (\dot{\phi}_0, \phi_0) \in C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$ e $\hat{\Xi}$ é a solução do campo com condição inicial $(\dot{\xi}_0, \xi_0)$.

Seja $\mathcal{W}$ o espaço vetorial das soluções de (2.2) com condições iniciais em $C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$. Pode-se mostrar que T_t é um operador $\mathcal{W}$ -invariante Ishibashi and Wald (2003). Seja $\mathcal{V}$ o espaço o espaço vetorial das soluções de (2.2) que podem ser expressas como combinação linear finita de soluções em $\mathcal{W}$

$$\mathcal{V} \equiv \{\hat{\Phi} | \hat{\Phi} = T_{t_1} \hat{\Phi}_1 + T_{t_2} \hat{\Phi}_2 + \dots T_{t_n} \hat{\Phi}_n, \hat{\Phi}_j \in \mathcal{W}\}. \quad (2.7)$$

Requirimos, para a dinâmica no caso não globalmente hiperbólico, a existência de um funcional bilinear, positivo definido e simétrico $E : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes suposições:

Suposição 3.i *Invariância por translação temporal de E* : O funcional de energia como definido anteriormente é invariante por translação temporal,

$$E(T_t(\hat{\Psi}_1), T_t(\hat{\Psi}_2)) = E(\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2). \quad (2.8)$$

onde $\hat{\Psi}_1$ e $\hat{\Psi}_2 \in \mathcal{V}$.

Suposição 3.ii *Invariância por reflexão temporal de E* : O funcional de energia é invariante por reflexão temporal no sentido de que

$$E(P\hat{\Psi}_1, P\hat{\Psi}_2) = E(\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2). \quad (2.9)$$

Suposição 3.iii *Compatibilidade com o caso globalmente hiperbólico*: Se $\hat{\Psi}$ e $\hat{\Xi} \in \mathcal{W}$ então E é dado pela mesma formula do caso globalmente hiperbólico

$$E(\hat{\Xi}, \hat{\Psi}) = (\dot{\xi}_0, \dot{\psi}_0)_{L^2} + (\xi_0, A\psi_0)_{L^2}. \quad (2.10)$$

Suposição 3.iv *Convergência*: Seja $\hat{\Psi}_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{V}$. Além disso, suponha que exista $\hat{\Psi}$ em $\mathcal{V}$ tal que $(\psi_n)_0 \rightarrow \psi_0$ e $(\dot{\psi}_n)_0 \rightarrow \dot{\psi}_0$ uniformemente em qualquer subconjunto compacto de Σ . Então exigimos que $\hat{\Psi}_n \rightarrow \hat{\Psi}$ na norma E , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\Psi}_n - \hat{\Psi}, \hat{\Psi}_n - \hat{\Psi}) = 0. \quad (2.11)$$

Ishibashi e Wald então mostraram que, dado um campo $\hat{\Psi}$ (satisfazendo todas as condições acima), solução da equação

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial t^2} = -A\hat{\Psi}$$

com dados iniciais $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ e com o domínio de A dado por $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$, existe uma extensão auto-adjunta positiva A_E de A tal que a dinâmica do campo dada por

$$\phi_t = \cos(A_E t)\phi_0 + A_E^{1/2} \sin(A_E t)\dot{\phi}_0, \quad (2.12)$$

concorda com a prescrição para o campo $\hat{\Psi}$. Note que a Eq. (2.12) satisfaz a equação de Klein-Gordon, com $\cos(A_E t)$ e $A_E^{1/2} \sin(A_E t)$ definidos via teorema espectral. Desta forma, vemos que a equação (2.12) fornece uma prescrição razoável para a evolução do campo escalar se os dados iniciais possuem suporte compacto. Além disso, se a extensão auto-adjunta não for única, teremos infinitas prescrições para a evolução do campo consideradas fisicamente aceitáveis.

2.2 Condições de junção

Seja S uma hipersuperfície do tipo-tempo, isto é, seu vetor normal será do tipo-espaço². Se S é imersa em $\mathcal{M}$ e que divide o espaço-tempo em duas regiões $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{V}^+$, o vetor normal da superfície será denotado por n^μ e por convenção aponta de $\mathcal{V}^-$ para $\mathcal{V}^+$. Este vetor satisfaz a seguinte relação

$$n_\mu n^\mu = +1. \quad (2.13)$$

A hipersuperfície S pode ser definida de duas formas: ou por uma função de restrição das coordenadas de $\mathcal{M}$,

$$\Phi(x) = 0, \quad (2.14)$$

ou apresentando as equações que parametrizam S

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a). \quad (2.15)$$

Assumimos que as coordenadas y^a podem ser definidas em ambos lados da hipersuperfície S . Pois desta forma podemos definir os vetores $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial y^a$ que são tangentes à S de modo que a métrica induzida em S pode ser calculada em ambos lados da hipersuperfície pela expressão

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (2.16)$$

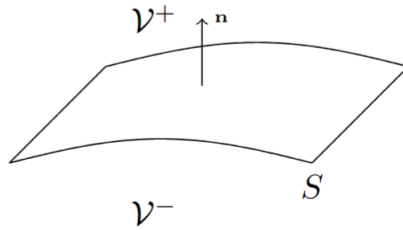


Figura 5 – A figura ilustra a orientação do vetor normal $\mathbf{n}$ da hipersuperfície de junção.

A princípio definimos a métrica $g_{\alpha\beta}^\pm$ e as coordenadas $x_\pm^\alpha$ em cada região $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$, pois a priori essas quantidades não precisam ser as mesmas.

Definição 6 *Seja T um tensor qualquer, definimos a quantidade $[T] \equiv T^+|_S - T^-|_S$, onde $T^\pm$ representa o tensor T na região $\mathcal{V}^\pm$.*

² Um estudo mais aprofundado de condições de junção nos três tipos de hipersuperfícies: tipo-tempo, tipo-espaço e tipo luz, pode ser encontrado em [Mars and Senovilla \(1993\)](#)

Seguindo as condições para a junção das regiões $\mathcal{V}^+$ e $\mathcal{V}^-$ como apresentadas em [Poisson \(2004\)](#), a primeira condição de junção impõe a continuidade da métrica através de S ,

$$[g_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\beta}^+ - g_{\alpha\beta}^- = 0, \quad (2.17)$$

e este requerimento depende do sistema de coordenadas x^α . Contudo pode facilmente ser reescrito como a seguinte condição que independe de coordenadas

$$[h_{ab}] = [g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta] = [g_{\alpha\beta}] e_a^\alpha e_b^\beta = 0 \quad (2.18)$$

onde

$$[h_{ab}] = h_{ab}^+ - h_{ab}^-$$

e $h_{ab}^\pm$ é a métrica tridimensional induzida em S por $g_{\alpha\beta}^\pm$. Este requerimento deve ser satisfeito para que a superfície S tenha uma geometria bem definida.

O fato de que a métrica $g_{\alpha\beta}$ é contínua através de S nas coordenadas x^α implica que suas derivadas tangentes também devem ser contínuas. Portanto, se $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ possui alguma descontinuidade, isso ocorre ao longo do vetor n^μ . Assim sendo, existe um tensor $k_{\alpha\beta}$ tal que

$$[\partial_\gamma g_{\alpha\beta}] = k_{\alpha\beta} n_\gamma \quad (2.19)$$

e $k_{\alpha\beta}$ é tal que a curvatura extrínseca K_{ab} de S satisfaz

$$[K_{ab}] = \frac{\varepsilon}{2} k_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (2.20)$$

A segunda condição de junção especifica um tensor de energia e momento superficial em S expresso pela seguinte equação

$$S_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}), \quad (2.21)$$

a segunda condição de junção exige que $[K_{ab}] = 0$ e é expressa de maneira independente das coordenadas $x_\alpha^\pm$. Esta condição conclui o critério de suavidade da métrica através de S . Quando esta condição é violada existem uma densidade de energia e de momento na superfície S não nulas e o espaço-tempo é singular em S .

O espaço tempo de interesse desse trabalho é munido de uma hipersuperfície singular. Em adição, para a determinação do campo $\hat{\Psi}$, são necessárias condições de contorno na superfície singular S . Estas condições, como detalhado na seção anterior, devem ser condições de contorno auto-adjuntas para a conservação do funcional de energia do campo e uma dinâmica adequada no sentido apresentado em [Ishibashi and Wald \(2003\)](#).

2.3 Singularidade cônica e regularizações

O espaço-tempo cônico é munido da seguinte métrica escrita em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} d\phi^2 + dz^2, \quad (2.22)$$

onde $\rho \in (0, \infty)$, $z \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ e $t \in \mathbb{R}$. A conicidade é o parâmetro c da métrica desse espaço e diz respeito ao quão acentuadamente cônica é a geometria do espaço, vide à [Helliwell and Konkowski \(1987\)](#) para um aprofundamento do significado físico de um espaço-tempo cônico.

Por meio da mudança de coordenadas $\phi' \rightarrow c^{-1}\phi$, a métrica cônica resultante toma a seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi'^2. \quad (2.23)$$

Porém agora a coordenada angular varia num intervalo menor, $\phi' \in [0, \frac{2\pi}{c})$. A equação acima assemelha-se à métrica do espaço-tempo de Minkowski. Todavia possui um déficit angular $\delta = 2\pi(1 - \frac{1}{c}) \geq 0$ para $c \geq 1$. Por isso é interpretado que espaços com métrica cônica possuem corte angular como mostrado na figura (6).

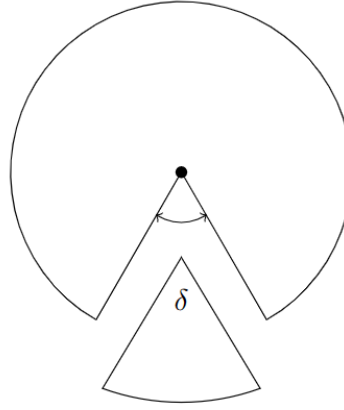


Figura 6 – A figura ilustra a construção de uma geometria cônica. A fatia do disco circular com abertura δ é retirada e os dois cortes radiais ligados pela seta dupla são identificados.

O nome “cônico” atribuído a espaços com a métrica (2.22) é devido ao fato que superfícies do tipo-tempo com t e z fixados possuem a seguinte métrica induzida

$$dl^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} d\phi^2, \quad (2.24)$$

que representa a métrica de uma folha do cone com equação $z = \gamma\rho$ imersa em $\mathbb{R}^3$ e ilustrada na figura (7), onde $\gamma = c \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)^{1/2}$. Fisicamente a métrica cônica representa o espaço tempo ao redor de uma *corda cósmica*, podemos visualizar isto como uma estrutura muito longa e fina, mas com densidade linear de massa μ muito grande.

Um cálculo direto nos mostra que $R_{\mu\nu} = 0$ e $R = 0$ para um espaço-tempo cônico. Desta forma, o aspecto singular da estrutura da corda cósmica não é evidente nas quantidades $R_{\mu\nu}$ e R calculadas a partir das definições. De fato, para observar efeitos da curvatura infinita concentrada no ápice do cone é necessário recorrer a outras ferramentas, tais como o teorema de Gauss-Bonet.

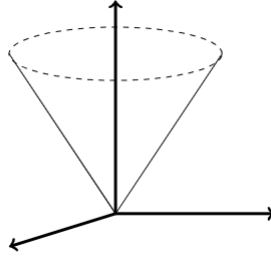


Figura 7 – Na figura vemos a superfície bidimensional imersa em $\mathbb{R}^3$ de equação $z = \gamma\rho$ em coordenadas cilíndricas.

Como mostrado na referência de Oliveira (1986), o teorema citado acima resulta no seguinte tensor de energia e momento

$$T^\mu{}_\nu = \frac{c-1}{4c} \text{diag}(1, 0, 0, -1)\delta_2(\rho), \quad (2.25)$$

onde δ_2 é a distribuição delta de Dirac bidimensional, que satisfaz a seguinte relação

$$\int_0^\infty r\delta_2(r)dr = 1. \quad (2.26)$$

Aqui podemos definir $\mu = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{c}\right)$ a densidade linear de massa associada a corda cósmica. Note que, como $1 \leq c$ então $0 \leq \mu$.

Isto representa uma densidade de energia infinita concentrada no ponto $\rho = 0$ do espaço tempo cônico. Para contornar os efeitos dessa divergência de energia podemos considerar regularizações do espaço. Devido a esta singularidade associada ao espaço-tempo ao redor corda cósmica, é útil usar modelos que regularizam o espaço-tempo cônico, tal como o modelo “Flower pot” descrito na referência Jensen and Soleng (1992).

Para este trabalho, considere o espaço-tempo estudado em Cong (2021), este consiste de um espaço segmentado em duas regiões cilíndricas e concêntricas, $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{V}^+$, cada uma delas descrita por uma das seguintes métricas respectivamente

$$\begin{cases} ds_1^2 = -dt^2 + d\rho_-^2 + \rho_-^2 d\phi^2 + dz^2, \\ ds_2^2 = -dt^2 + \frac{d\rho_+^2}{c^2} + \rho_+^2 d\phi^2 + dz^2, \end{cases} \quad (2.27)$$

com $0 < \rho_- < R_1$ e $cR_1 < \rho_+$. Dessa forma a singularidade do pico do cone é transferida para a hipersuperfície de junção S_1 entre as regiões $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{V}^+$, veja a figura (8).

A primeira condição de junção exige a continuidade da métrica $g_{\alpha\beta}^+|_{S_1} = g_{\alpha\beta}^-|_{S_1}$ e por conseguinte $\rho_-^2|_{S_1} = \frac{\rho_+^2}{c^2}|_{S_1}$. Como a casca cilíndrica S_1 é posicionada em $\rho_- = R_1$ para o sistema de coordenadas interno, a condição de junção implica que a casca cilíndrica é localizada em $\rho_+ = cR_1$ para o sistema de coordenadas externo. Deste modo, o intervalo angular é mantido constante nas duas regiões.

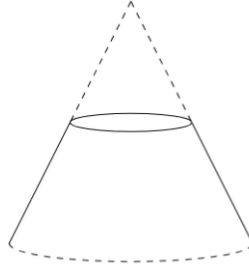


Figura 8 – A figura ilustra o espaço-tempo estudado, aqui o espaço que antes era cônico foi dividido em duas regiões. A região mais interna é um espaço cilíndrico plano quadri-dimensional e de raio finito, a região externa é um espaço cônico que a princípio não é limitado. Estas duas regiões são concêntricas.

Contudo, existe uma descontinuidade na derivada da métrica quando deixamos a região plana $\mathcal{V}^-$ e adentramos na região com conicidade $\mathcal{V}^+$. Esta descontinuidade induz um tensor de energia de momento superficial na hipersuperfície de junção S_1 dado pela *segunda condição de junção* por

$$S_{ab} = \frac{c-1}{8\pi c R_1} \text{diag}(1, 0, -1) \quad (2.28)$$

onde a métrica superficial em S é

$$dl^2 = -dt^2 + R_1^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (2.29)$$

Observe que quando integramos S_{tt} e S_{zz} na variável angular, obtemos o mesmo valor das densidades de energia e momento na direção z calculadas a partir do tensor de energia de uma cósmica idealizada (2.25). Isto motiva a interpretação de que a singularidade do espaço cônico foi transferida de $\rho = 0$ para a superfície de vinco S_1 em $\rho_- = R_1$

Este é o espaço tempo usado neste trabalho para investigar a sensibilidade do detector de UDW à conicidade do espaço. O detector será posicionado na região mais interna, $\mathcal{V}^-$, e o método de investigação irá analisar o comportamento da função resposta do detector quando variamos os parâmetros tais como a conicidade, c , na região $\mathcal{V}^+$ e as condições de contorno de $\hat{\Psi}$ em S_1 .

3 Obtenção do campo escalar

Este capítulo é dedicado a resolver a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de interesse e estudar as extensões auto-adjuntas das soluções do campo escalar. Na seção (3.1) a equação de Klein-Gordon é resolvida em modos, a menos da parte com dependência radial. Esta é encontrada ao resolver um problema de Sturm-Liouville em dois intervalos e o estudo desse problema é feito na seção (3.2). Na seção (3.3) seremos apresentados a alguns casos especiais das condições de contorno auto-adjuntas e suas propriedades. Nesta seção iremos estabelecer quais condições auto-adjuntas serão usadas para o estudo da sensibilidade do detector. Na subseção (3.3.4) é demonstrada a conservação do funcional de energia para as condições auto-adjuntas estudadas.

3.1 Modos do campo escalar

A equação de Klein-Gordon para o campo escalar não massivo toma a seguinte forma no espaço-tempo apresentado anteriormente

$$\square_{\pm} \hat{\Psi} = 0 \rightarrow \begin{cases} -\partial_t^2 \hat{\Psi} + \partial_{\rho_-}^2 \hat{\Psi} + \frac{\partial_{\phi}^2 \hat{\Psi} + \rho_- \partial_{\rho_-} \hat{\Psi}}{\rho_-^2} + \partial_z^2 \hat{\Psi} = 0, & 0 < \rho_- < R_1 \\ -\partial_t^2 \hat{\Psi} + \partial_{\rho_+}^2 \hat{\Psi} + \frac{c^2 \partial_{\phi}^2 \hat{\Psi} + \rho_+ \partial_{\rho_+} \hat{\Psi}}{\rho_+^2} + \partial_z^2 \hat{\Psi} = 0, & cR_1 < \rho_+ \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\square_{\pm}$ é o operador d'Alambertiano respectivo para cada região do espaço. A solução de campo é dada em modos por

$$\Psi_{kmq}(x) = N_{kmq} e^{-i\omega t} e^{ikz} e^{im\phi} \psi_{mq}(\rho_{\pm}), \quad (3.2)$$

com $\omega^2 = k^2 + q^2$, N_{kmq} é uma constante de normalização e $\psi_{mq}(\rho_{\pm})$ é a parte de dependência radial do campo.

Esta solução para os modos do campo é encontrada ao aplicar o método de separação de variáveis e isto resulta em um problema de Sturm-Liouville (PSL) em dois intervalos para ψ_{mq} , cuja equação diferencial é a equação de Bessel com funções peso ρ_- e $\frac{\rho_+}{c}$ e autovalores $\pm q^2$. Para evitarmos os modos ligados, admitiremos neste trabalho apenas soluções com autovalores positivos $+q^2$. Temos assim

$$\begin{cases} -(\rho_- \psi'_{mq}(\rho_-))' + m^2 \frac{1}{\rho_-} \psi_{mq}(\rho_-) = \rho_- q^2 \psi_{mq}(\rho_-), \\ -\left(\frac{\rho_+}{c} \psi'_{mq}(\rho_+)\right)' + m^2 \frac{c}{\rho_+} \psi_{mq}(\rho_+) = \frac{\rho_+}{c} q^2 \psi_{mq}(\rho_+), \end{cases} \quad (3.3)$$

cujas soluções são as funções de Bessel J as e funções de Neumann Y de modo que

$$\psi_{mq}(\rho_-) = a_1 J_m(q\rho_-) + a_2 Y_m(q\rho_-), \quad (3.4)$$

e

$$\psi_{mq}(\rho_+) = c_1 J_{mc}(q\rho_+) + c_2 Y_{mc}(q\rho_+). \quad (3.5)$$

Note que podemos fazer uso da condição de regularidade do campo $\hat{\Psi}$ para eliminar a constante a_2 . Como $\rho_- = 0$ pertence ao domínio de $\psi_{mq}(\rho_-)$ e a função Y_m diverge neste ponto, exigimos que $a_2 = 0$ e a constante a_1 é absorvida pela constante de normalização N_{kmq} . Portanto,

$$\psi_{mq}(\rho_-) = J_m(q\rho_-). \quad (3.6)$$

Além disso, para que o campo esteja bem definido no espaço, a periodicidade da coordenada angular ϕ impõe a condição $m \in \mathbb{Z}$.

Para determinarmos completamente os modos do campo escalar $\hat{\Psi}$, ainda resta definir as condições de contorno sobre a superfície de junção S_1 que irão resultar nos valores de c_1 e c_2 .

Antes disso, podemos observar a forma do campo escalar $\hat{\Psi}$ apesar de desconhecer os coeficientes c_1 e c_2 . Basta calcular a norma dos modos da parte radial do campo escalar como segue

$$||\psi_{mq}||^2 = \int_0^{R_1} [J_m(q\rho')]^2 \rho' d\rho' + \int_{cR_1}^{cR_2} [c_1 J_{cm}(q\rho') + c_2 Y_{cm}(q\rho')]^2 \frac{\rho'}{c} d\rho'. \quad (3.7)$$

A segunda integral da equação acima não converge para $R_2 \rightarrow \infty$. Como um dos objetivos desse trabalho é estudar as condições de contorno sobre a superfície S_1 (e isto irá variar as constantes c_1 e c_2), é útil truncar a região $\mathcal{V}_2$ em $\rho_+ = cR_2$ com $R_2 > R_1$ finito. Isto é feito ao aplicar a condição de contorno de Dirichlet nessa segunda casca esférica S_2 definida por $\rho_+ = cR_2$,

$$\psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0. \quad (3.8)$$

Note que tomaremos o limite $R_2 \rightarrow \infty$ posteriormente para recuperar as características do espaço infinito. A condição de contorno de Dirichlet é responsável por isolar o campo do lado externo do espaço de interesse, $\rho_+ > cR_2$. Isso é devido ao fato do fluxo radial de energia do campo, dado por $T^0_{\rho_+} = -\hat{\Psi}(x)\partial_{\rho_+}\hat{\Psi}(x)$ ser nulo na casca cilíndrica S_2 . Desta forma garantimos que não há troca de informações entre a região de interesse e o lado externo.

Finalmente, podemos calcular a constante de normalização

$$N_{kmq} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\sqrt{k^2 + q^2}}||\psi_{mq}||}. \quad (3.9)$$

Portanto o campo escalar não massivo é dado por

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{mq} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(a_{kmq} \Psi_{kmq}(x) + a_{kmq}^\dagger \Psi_{kmq}^*(x) \right), \quad (3.10)$$

onde a_{kmq} e $a_{kmq}^\dagger$ são os operadores destruição e criação respectivamente.

3.2 Tópicos em Problemas de Sturm-Liouville em Multi-intervalos

Nesta seção, abordaremos o formalismo associado aos problemas de Sturm-Liouville multi-intervalados, seguindo a referência de [Zettl \(2005\)](#).

Definição 7 *Seja $k \geq 2$ um número inteiro. O problema de Sturm-Liouville (PSL) em k -intervalos consiste de um sistema de k PSL's com condições de contorno:*

$$-(p_r y')' + q_r y = \lambda \omega_r y \quad \text{em } (a_r, b_r) \quad \text{com } 0 \leq r \leq k. \quad (3.11)$$

tais que $\lambda \in \mathbb{C}$ é o autovalor fixado e $-\infty < a_j, b_j < \infty \quad \forall \quad 0 \leq j \leq k$. Assumimos que os coeficientes e as funções peso do PSL satisfazem¹

$$p_r^{-1}, q_r, \omega_r \in L(J_r, \mathbb{R}), \quad (3.12)$$

onde $J_r = (a_r, b_r)$ e $\omega_r \geq 0$.

Neste momento iremos focar em tratar em detalhes o caso de dois intervalos, com $k = 2$, como o do problema radial de ψ_{mq} . Seja $J_1 = (a_1, b_1)$ e $J_2 = (a_2, b_2)$ os dois intervalos nos quais iremos estudar o PSL com condições de contorno auto-adjuntas, onde $-\infty < a_j < b_j < \infty$ para $j \in \{1, 2\}$. Os intervalos J_1 e J_2 de um PSL multi-intervalado podem ser idênticos, disjuntos ou sobrepostos. Seja M_j a expressão do operador diferencial em J_j de forma que $M_j y_j = -(p_j y_j')' + q_j y_j$, com função peso ω_r e $y_j \in L^2(J_k, \omega_k)$.

O objetivo é encontrar operadores auto-adjuntos que satisfaçam do PSL em cada intervalo J_r . Alguns dos operadores auto-adjuntos em $H = H_1 + H_2$ com $H_k = L^2(J_k, \omega_k)$ podem ser encontrados ao fazer a soma direta de operadores auto-adjuntos em H_1 e H_2 . Se estes fossem todos os operadores auto-adjuntos para o PSL em dois intervalos não precisaríamos de uma teoria nova para problemas multi-intervalados. Na verdade existem muitos outros operadores que envolvem interações entre os dois intervalos.

Os elementos de H serão representados por $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ com $f_1 \in H_1$ e $f_2 \in H_2$ e o produto interno em H é definido por $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (f_1, g_1)_1 + (f_2, g_2)_2$ onde $(\cdot, \cdot)_r$ é o produto interno usual em H_r

$$(f, g)_r = \int_{J_r} f_r \bar{g}_r \omega_r. \quad (3.13)$$

Enquanto a forma sesquilinear de Lagrange em H é definida por

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = [f_1, g_1]_1(b_1) - [f_1, g_1]_1(a_1) + [f_2, g_2]_2(b_2) - [f_2, g_2]_2(a_2), \quad (3.14)$$

e conecta todos os quatro pontos de bordo do PSL em dois intervalos. Recorde que a forma sesquilinear de Lagrange é dada por $[f, g] = f(p\bar{g}') - g(p\bar{f}')$ para $f, g \in D_{max}$, onde

¹ Como em [Wang et al. \(2007\)](#).

o domínio máximo e mínimo do PSL em dois intervalos pode ser definido como a soma direta dos correspondentes domínios (D)/operadores (T) no caso de 1-intervalo

$$D_{max} = D_{1\ max} + D_{2\ max}, \quad D_{min} = D_{1\ min} + D_{2\ min}, \quad (3.15)$$

$$T_{max} = T_{1\ max} + T_{2\ max}, \quad T_{min} = T_{1\ min} + T_{2\ min}. \quad (3.16)$$

E o domínio máximo associado à (3.11) é definido por $D_{r\ max} \equiv \{y : J_r \rightarrow \mathbb{C} | y, p_r y' \in AC_{loc}(J_r) \text{ e } y, \omega_r^{-1} M_r y \in H_r\}$, com $AC_{loc}(J_r)$ o conjunto de todas as funções complexas que são absolutamente contínuas em cada sub-intervalo compacto de J_r . O operador máximo é definido por $T_{r\ max} y = \omega_r^{-1} M_r y$ para $y \in D_{r\ max}$.

Já o operador minimal é unicamente definido como o adjunto de $T_{r\ max}$, i.e. $T_{r\ min} = T_{r\ max}^*$, e também satisfaz $T_{r\ min} y = \omega_r^{-1} M_r y$ para y no domínio mínimo, $D_{r\ min}$, definido como domínio do operador $T_{r\ min}$. Perceba que a equação de autovalor dos operadores tratados aqui satisfaz a forma do PSL em cada intervalo $T_{r\ min/max} y = \omega_r^{-1} M_r y = \lambda y$, e diferem apenas pelo domínio em que estão definidos. Recorde que [Ishibashi and Wald \(2003\)](#) demonstra que é necessário encontrar uma extensão auto-adjunta da parte espacial do operador diferencial a fim de obter uma dinâmica adequada para o campo escalar. Portanto, é necessário estudar as extensões auto-adjuntas do operador minimal e o domínio que as caracterizam.

3.2.1 Caracterização das extensões auto-adjuntas

Uma extensão auto-adjunta T do operador minimal T_{min} irá satisfazer a seguinte relação apresentada em [Wang et al. \(2007\)](#)

$$T_{min} \subset T = T^* \subset T_{max}, \quad (3.17)$$

o operador T pode ser considerado uma extensão de T_{min} ou, de modo equivalente, uma restrição de T_{max} . Logo de início, para caracterizar as extensões auto-adjuntas do operador T_{min} , iremos enunciar alguns lemas cujas demonstrações são apresentadas em [Zettl \(2005\)](#):

Lema 1 *Temos as seguintes relações entre os operadores máximo e minimal de H :*

$$T_{min}^* = T_{1\ min}^* + T_{2\ min}^* = T_{1\ max} + T_{2\ max} = T_{max}, \quad (3.18)$$

$$T_{max}^* = T_{1\ max}^* + T_{2\ max}^* = T_{1\ min} + T_{2\ min} = T_{min}. \quad (3.19)$$

Em particular

$$D_{max} = D(T_{max}) = D(T_{1\ max}) + D(T_{2\ max}) \quad (3.20)$$

$$D_{min} = D(T_{min}) = D(T_{1\ min}) + D(T_{2\ min}) \quad (3.21)$$

Lema 2 *O operador minimal T_{min} é fechado e simétrico.*

Em um PSL usual de um único intervalo, o índice de deficiência do operador minimal $T_{r \min}$ é definido como $d_r = \dim(N_{\pm i \ r})$ (pág 175, [Zettl \(2005\)](#)) onde

$$N_{\pm i \ r} = \{y \in H_r | T_{\max} y = \lambda y, \lambda = \pm i\}. \quad (3.22)$$

de forma que $0 \leq d_r \leq 2$. O índice de deficiência em dois intervalos é definido por $d = d_1 + d_2$ e é tal que $0 \leq d \leq 4$.

Lema 3 *Se T é uma extensão auto-adjunta do operador minimal $T_{\min}$ com índice de deficiência d , tal que $D(T_{\min}) \subset D(T) \subset D(T_{\max})$, então existem funções $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d \in D(T) \subset D(T_{\max})$ tais que*

- (1) $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d$ são linearmente independentes módulo $D_{\min}$;
- (2) $[\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k] = 0$ para $j, k = 1, 2, \dots, d$
- (3) $D(T) = \{\mathbf{f} \in D_{\max} | [\mathbf{f}, \mathbf{g}_k] = 0, k = 1, 2, \dots, d\}$

O lema (3) caracteriza o domínio da extensão auto-adjunta T de $T_{\min}$. Este domínio é determinado então pela formula sesquilinear de Lagrange que relaciona os quatro pontos de bordo do PSL, isto é, o domínio de T é determinado por condições de contorno.

Para um PSL na forma $-(py')' + qy = \lambda \omega y$, um ponto b no bordo do PSL pode ser classificado como [Souto \(2019\)](#):

- **Regular (R)**: Se $1/p$, q e ω são integráveis em uma vizinhança de b e $\lim_{t \rightarrow b} y(t) = y(b)$, $\lim_{t \rightarrow b} (py')(t) = (py')(b)$ existem e são finitos.
- **Singular (S)**: Se não é regular.
- **Círculo Limite (LC)**: Se todas soluções são quadrado integráveis em uma vizinhança de b .
- **Ponto Limite (LP)**: Se não é círculo limite.

Lema 4 *Todo ponto regular R é círculo limite LC, uma vez que todas soluções tem limites finitos nos pontos regulares.*

Teorema 1 *Caracterização das extensões auto-adjuntas: Considere o PSL em dois intervalos com as definições apresentadas acima. Além disso, sejam $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$ e $\mathbf{v} = \{v_1, v_2\}$ funções em $D_{\max}$ tais que v_j e u_j são funções reais e linearmente independentes módulo $D_{j \max}$ que satisfazem a seguinte condição de normalização em cada ponto de bordo c_l não LP*

$$[u_j, v_j]_j(c_l) = 1, \quad j = 1, 2. \quad (3.23)$$

Então, o todas extensões auto-adjuntas de $T_{\min}$ são determinadas pelas condições de contorno definidas nos pontos de bordo c_l que são não LP. Podemos estudar cada caso para o índice de deficiência do PSL, $0 \leq d \leq 4$, separadamente:

Caso 1. $d = 0$. Neste caso $T_{\min} = T_{\max}$, portanto $T_{\min}$ já é auto-adjunto e não admite extensões próprias. Esse caso ocorre se, e somente se, todos os pontos de bordo são do tipo LP, em particular não são necessárias condições de contorno e vale para todo $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}, \mathbf{g} = \{g_1, g_2\} \in D_{\max}$ o seguinte

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = 0. \quad (3.24)$$

Caso 2. $d = 1$. Esse caso ocorre se, e somente se, existem exatamente 3 pontos de bordo LP e 1 ponto de bordo R ou LC que iremos denotar por b .

Nesse caso, a condição (3) do lema (3) se reduz para:

$$c_{11}[y, \mathbf{u}](b) + c_{12}[y, \mathbf{v}](b) = 0, \quad c_{11}, c_{12} \in \mathbb{R} \text{ com } (c_{11}, c_{12}) \neq (0, 0) \quad (3.25)$$

se b é ponto R, então a condição pode ser reescrita como

$$c_{11}y(b) + c_{12}(py')(b) = 0, \quad c_{11}, c_{12} \in \mathbb{R} \text{ com } (c_{11}, c_{12}) \neq (0, 0) \quad (3.26)$$

e a condição (2) do lema (3) implica a seguinte relação de simetria

$$c_{11}\bar{c}_{12} - \bar{c}_{11}c_{12} = 0. \quad (3.27)$$

Caso 3. $d = 2$. Este caso é equivalente a existência de dois pontos de bordo LP e dois pontos R ou LC, digamos c e d . Nesse caso, a condição (3) do lema (3) se reduz a:

$$c_{11}[y, \mathbf{u}](c) + c_{12}[y, \mathbf{v}](c) + d_{11}[y, \mathbf{u}](d) + d_{12}[y, \mathbf{v}](d) = 0, \quad (3.28)$$

$$c_{21}[y, \mathbf{u}](c) + c_{22}[y, \mathbf{v}](c) + d_{21}[y, \mathbf{u}](d) + d_{22}[y, \mathbf{v}](d) = 0, \quad (3.29)$$

onde $c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{C}$

Caso 4. $d = 3$. Esse caso ocorre se, e apenas se, apenas um dos pontos de bordo é LP, denote por a , b e c os outros três pontos de bordo que serão R ou LC.

Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes em $M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$, a condição (3) do lema pode ser representada como a seguinte expressão matricial

$$AY(a) + BY(b) + CY(c) = 0, \quad (3.30)$$

onde $Y(x) = \begin{pmatrix} [y, \mathbf{u}](x) \\ [y, \mathbf{v}](x) \end{pmatrix}$. A condição (2) do lema (3) toma a seguinte forma

$$AEA^* - BEB^* + CEB^* = 0, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Note que se os pontos de bordo forem R, então $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ (py')(x) \end{pmatrix}$ e as matrizes A, B e C devem satisfazer $\text{posto}(A|B|C) = 3$ pela condição (1).

Caso 5. $d = 4$. Se, e somente se, nenhum dos pontos de bordo é LP. Sem perda de generalidade, considere que os intervalos J_1 e J_2 são dados por $J_1 = (a, b)$ e $J_2 = (c, d)$ e os pontos de bordo a, b, c e d serão R ou LC. Nesse caso, considere as matrizes $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ e $D = (d_{ij}) \in M_{4 \times 2}(\mathbb{C})$, a condição (3) do lema (3) se reduz a:

$$AY(a) + BY(b) + CY(c) + DY(d) = 0, \quad (3.32)$$

enquanto a condição (2) leva a

$$AEA^* - BEB^* + CEC^* - DED^* = 0, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

e a condição (1) do lema implica em $\text{posto}(A|B|C|D) = 4$.

Em [Everitt and Zettl \(1986\)](#), Everitt e Zettl iniciam o estudo de operadores diferenciais auto-adjuntos sobre uma soma direta de espaços de Hilbert associados a PSL's para um $k \geq 2$ qualquer. Para um sistema de k PSL's com todos pontos de bordo não LP Everitt e Zettl mostram que estes operadores auto-adjuntos são restrições do operador maximal no domínio determinado pelas condições de contorno (BC's) que possuem a seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^k A_j Y_j(a_j) + \sum_{j=1}^k B_j Y_j(b_j) = 0, \quad (3.34)$$

onde $Y_j = \begin{pmatrix} y_j \\ p_j y'_j \end{pmatrix}$ enquanto A_j e B_j são matrizes complexas $2k \times 2$ tais que satisfazem a condição do posto

$$\text{posto}(A_1|B_1|\dots|A_k|B_k) = 2k \quad (3.35)$$

e a condição auto-adjunta

$$\sum_{j=1}^k A_j E \bar{A}_j^t = \sum_{j=1}^k B_j E \bar{B}_j^t \quad (3.36)$$

onde

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta é uma teoria geral para um PSL multi-intervalado, dentro das próximas seções iremos focar no PSL em dois intervalos que descreve o comportamento da parte dos modos campo do escalar com dependência radial, $\psi_{mq}(\rho_{\pm})$.

3.2.2 Aprofundamento do PSL radial

O PSL radial que estamos trabalhando é um problema em dois intervalos com $J_1 = (0, R_1)$ e $J_2 = (cR_1, cR_2)$. Observe que os intervalos de um PSL multi-intervalado podem ser idênticos, disjuntos ou sobrepostos e para $c > 1$ os intervalos J_1 e J_2 são disjuntos.

Vamos estudar agora os operadores diferenciais que surgem do PSL em dois intervalos para a parte radial do campo, ψ_{mq} . Seja M_1 a expressão do seguinte operador diferencial em J_1 com função peso $\omega_1 = \rho_-$

$$M_1\psi_{mq}(\rho_-) = -(\rho_- \psi'_{mq}(\rho_-))' + m^2 \frac{1}{\rho_-} \psi_{mq}(\rho_-), \quad (3.37)$$

analogamente definimos o operador M_2 com função peso $\omega = \rho_+/c$

$$M_2\psi_{mq}(\rho_+) = -\left(\frac{\rho_+}{c} \psi'_{mq}(\rho_+)\right)' + m^2 \frac{c}{\rho_+} \psi_{mq}(\rho_+). \quad (3.38)$$

Para caracterizarmos as soluções auto-adjuntas desse PSL é necessária a classificação dos pontos de bordo do problema, observe que em um problema com dois intervalos existem quatro pontos de bordo, para o caso de interesse são: $a_1 = 0, b_1 = R_1, a_2 = cR_1$ e $b_2 = cR_2$ cuja distribuição no espaço tempo é representada na figura (9).

Desse modo podemos classificar os pontos do PSL radial, note que $a_1 = 0$ é *LP* pois a função de Neumann, $Y_m(q\rho_-)$ diverge em $\rho_- = 0$ e os três outros pontos de bordo são *R*.

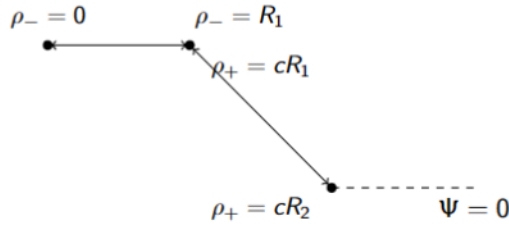
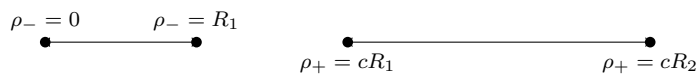


Figura 9 – A figura ilustra a distribuição dos pontos de bordo para o PSL radial estudado, note que apesar de $\rho_- = R_1$ e $\rho_+ = cR_1$ identificarem o mesmo ponto no espaço físico, são pontos de intervalos distintos para o PSL.

Desse modo podemos classificar os pontos do PSL radial, note que $a_1 = 0$ é *LP* pois a função de Neumann, $Y_m(q\rho_-)$ diverge em $\rho_- = 0$ e os três outros pontos de bordo são *R*. Além disso, apesar de espacialmente os pontos $\rho_- = R_1$ e $\rho_+ = cR_1$ indicarem a mesma posição espacial, a superfície de junção S_1 , estes são pontos de bordo de intervalos distintos e disjuntos.



Portando, sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ as matrizes 3×2 que definem as condições de contorno auto-adjuntas, como no formalismo estudado nas seções anteriores. Desse modo, essas matrizes satisfazem a condição do posto

$$\text{posto}(A|B|C) = 3, \quad (3.39)$$

e a condição auto-adjunta

$$(a_{j1}\bar{a}_{k2} - a_{j2}\bar{a}_{k1}) - (b_{j1}\bar{b}_{k2} - b_{j2}\bar{b}_{k1}) + (c_{j1}\bar{c}_{k2} - c_{j2}\bar{c}_{k1}) = 0, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (3.40)$$

onde a_{ij}, b_{ij} e $c_{ij} \in \mathbb{C}$. E logo, a condição de contorno sobre a parte radial do campo escalar é descrita explicitamente pela seguinte equação:

$$AY(\rho_- = R_1) + BY(\rho_- = cR_1) + CY(\rho_+ = cR_2) = 0, \quad (3.41)$$

onde $Y(\rho) = \begin{pmatrix} \psi_{mq}(\rho) \\ p_{\pm}\psi'_{mq}(\rho) \end{pmatrix}$, aqui foi usada a seguinte notação $p_+ = \rho_+/c$ e $p_- = \rho_-$.

Sabemos que a condição de contorno aplicada na casca esférica S_2 , $\rho_+ = cR_2$, é a condição de contorno de Dirichlet, portanto a forma matricial de C é determinada como

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

enquanto A e B possuem a última linha zerada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

De fato, com esta definição das matrizes A, B e C a terceira equação de (3.41) é escrita como

$$\psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0.$$

Logo, a condição auto-adjunta (3.40) toma a seguinte forma:

$$(a_{j1}\bar{a}_{k2} - a_{j2}\bar{a}_{k1}) - (b_{j1}\bar{b}_{k2} - b_{j2}\bar{b}_{k1}) = 0, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (3.43)$$

A condição de contorno na superfície de junção do espaço-tempo é então escrita como

$$\tilde{A}Y(\rho_- = R_1) + \tilde{B}Y(\rho_+ = cR_1) = 0, \quad (3.44)$$

onde aqui $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ representam as matrizes 2×2 formadas pelas primeiras linhas das matrizes A e B (3.42),

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

e os seus coeficientes satisfazem

$$\begin{cases} a_{11}\bar{a}_{22} - a_{12}\bar{a}_{21} &= b_{11}\bar{b}_{22} - b_{12}\bar{b}_{21} \\ a_{11}\bar{a}_{12} - a_{12}\bar{a}_{11} &= b_{11}\bar{b}_{12} - b_{12}\bar{b}_{21} \\ a_{21}\bar{a}_{22} - a_{22}\bar{a}_{21} &= b_{21}\bar{b}_{22} - b_{22}\bar{b}_{21} \end{cases} \quad (3.45)$$

É notável que as duas últimas condições acima são satisfeitas quando as matrizes $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ são reais, e a primeira condição diz que $\det(\tilde{A}) = \det(\tilde{B})$. Além disso, o caso especial com $\det(\tilde{A}) = 0 = \det(\tilde{B})$ contém o caso de condições de contorno separadas

$$a_{11}\psi_{mq}(\rho_- = R_1) + a_{12}R_1\psi'_{mq}(\rho_- = R_1) = 0, \quad (3.46)$$

$$b_{21}\psi_{mq}(\rho_+ = cR_1) + b_{22}R_1\psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1) = 0. \quad (3.47)$$

As condições estudadas aqui são equivalentes às condições de contorno separadas em dois pontos de bordo, $\rho_- = 0$ e $\rho_+ = cR_2$ e uma condição de contorno acoplada nos pontos de bordo $\rho_- = R_1$ e $\rho_+ = cR_1$ que possui a seguinte representação canônica (pág 269 Zettl (2005)):

$$Y(\rho_- = R_1) = e^{i\gamma} K Y(\rho_+ = cR_1) \quad (3.48)$$

com $-\pi < \gamma \leq \pi$ e $K \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $\det(K) = 1$.

3.3 Análise das Condições de Contorno Auto-Adjuntas

Em resumo, as extensões auto-adjuntas de T_{min} são caracterizadas pela matriz K e o argumento γ da condição de contorno² (3.48), onde

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, k_{ij} \in \mathbb{R} \quad (3.49)$$

com a exigência $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 1$.

Portanto, o caso mais geral de condição de contorno consiste de um sistema de três equações dadas pelas expressões a seguir

$$\begin{cases} \psi_{mq}(\rho_- = R_1) = e^{i\gamma}(k_{11}\psi_{mq}(\rho_+ = cR_1) + k_{12}R_1\psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1)), \\ R_1\psi'_{mq}(\rho_- = R_1) = e^{i\gamma}(k_{21}\psi_{mq}(\rho_+ = cR_1) + k_{22}R_1\psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1)), \\ \psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

note que não estamos interessados em soluções desse sistema com parte imaginária, uma vez que o campo escalar $\hat{\Psi}$ é real, portanto fazemos $\gamma \rightarrow 0$ e o sistema resultante se torna

$$\begin{cases} \psi_{mq}(\rho_- = R_1) = k_{11}\psi_{mq}(\rho_+ = cR_1) + k_{12}R_1\psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1), \\ R_1\psi'_{mq}(\rho_- = R_1) = k_{21}\psi_{mq}(\rho_+ = cR_1) + k_{22}R_1\psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1), \\ \psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0, \end{cases} \quad (3.51)$$

esse sistema possui 3 graus de liberdade, k_{11} , k_{12} e k_{22} . Pois $\det(K) = 1$.

² Recorde que queremos encontrar as extensões auto-adjuntas de T_{min} para obter uma dinâmica adequada para o campo $\hat{\Psi}$, onde podemos definir um funcional de energia que se conserva no tempo.

Além disso, se $k_{11} = 0$ ou $k_{22} = 0$, então $-k_{12}k_{21} = 1$ pela condição do determinante $\det(K) = 1$. E se K for simétrica teremos de antemão que $k_{11}, k_{22} \neq 0$ já que $k_{12} \in \mathbb{R}$ e podemos escrever sem perdas que

$$k_{22} = \frac{1 + k_{12}^2}{k_{11}}, \quad (3.52)$$

e portanto a condição de contorno (3.48) possuirá apenas 2 parâmetros independentes, k_{11} e k_{12} para um K simétrico mas 3 parâmetros k_{11}, k_{12} e k_{22} para uma matriz K geral. Por enquanto nos atentamos ao caso com K simétrico por simplicidade.

Neste caso, a parte radial $\psi_{mq}(\rho_{\pm})$ do campo $\hat{\Psi}$ satisfaz o sistema condições de contorno auto-adjunta que pode ser escrito explicitamente como:

$$\psi_{mq}(\rho_- = R_1) = k_{11}\psi_{mq}(\rho_+ = cR_1) + k_{12}R_1\psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1), \quad (3.53)$$

$$R_1\psi'_{mq}(\rho_- = R_1) = k_{12}\psi_{mq}(\rho_+ = cR_1) + k_{22}R_1\psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1). \quad (3.54)$$

Por meio da decomposição de Iwasawa, Ahlén (2016), podemos escrever a matriz K como $K = R_{\theta} \cdot A_{\beta} \cdot N_{\epsilon}$ onde

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, A_{\beta} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{pmatrix} \text{ e } N_{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

e cada uma dessas matrizes possuem um único grau de liberdade. Porém apenas a matriz A_{β} é diagonal e resulta numa análise mais simples das condições de contorno.

Falta apenas inserir as soluções de $\psi_{mq}(\rho_{\pm})$ nas equações (3.53) e (3.54) para determinar os coeficientes c_1 e c_2 e assim obter a decomposição em modos do campo $\hat{\Psi}$. Todavia, quando o campo escalar $\hat{\Psi}$ foi resolvido em modos, na equação (3.2), foi considerado $q^2 > 0$ o auto-valor do problema de Sturm-Liouville radial, (3.3). Porém isso leva a apenas uma parcela das soluções da equação de KG, na realidade o autovalor λ do problema de Sturm-Liouville radial necessita apenas de ser um número real (positivo, nulo ou negativo), uma vez que temos o operador diferencial como um operador auto-adjunto no domínio determinado pelas condições de contorno, então

$$\lambda = -q^2, \text{ } 0 \text{ ou } q^2.$$

3.3.1 Estados ligados

Este trabalho tratou apenas das soluções dadas por autovalores positivos, pois não pertence ao seu escopo lidar com modos de *estados ligados* (ocasionalmente chamearemos estes de modos ligados). Para um aprofundamento a relação dos auto-valores negativos com estados ligados vide a Zimmermann (1958).

Considere por um momento que $\lambda = 0$, então o PSL radial toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} -(\rho_- \psi'_{mq}(\rho_-))' + m^2 \frac{1}{\rho_-} \psi_{mq}(\rho_-) &= 0, \\ -\left(\frac{\rho_+}{c} \psi'_{mq}(\rho_+)\right)' + m^2 \frac{c}{\rho_+} \psi_{mq}(\rho_+) &= 0, \end{cases} \quad (3.56)$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} \psi_{mq}(\rho_-) &= a_1 \rho_-^m + a_2 \rho_-^{-m}, \\ \psi_{mq}(\rho_+) &= c_1 \rho_-^{mc} + c_2 \rho_-^{-mc}, \end{cases} \quad (3.57)$$

se $m \geq 0$ então pela condição de regularidade temos que $a_2 \rightarrow 0$ e a_1 é absorvida na constante de normalização N_{kmq} , todavia, se $m < 0$ então $a_1 \rightarrow 0$ e a_2 é absorvida na constante de normalização, portanto

$$\psi_{mq}(\rho_-) = \rho_-^{|m|}.$$

Considere agora que $\lambda = -q^2$, então o PSL radial toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} -(\rho_- \psi'_{mq}(\rho_-))' + m^2 \frac{1}{\rho_-} \psi_{mq}(\rho_-) &= -q^2 \rho_- \psi_{mq}(\rho_-), \\ -\left(\frac{\rho_+}{c} \psi'_{mq}(\rho_+)\right)' + m^2 \frac{c}{\rho_+} \psi_{mq}(\rho_+) &= -q^2 \frac{\rho_-}{c} \psi_{mq}(\rho_-), \end{cases} \quad (3.58)$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} \psi_{mq}(\rho_-) &= a_1 J_m(-iq\rho_-) + a_2 Y_m(-iq\rho_-), \\ \psi_{mq}(\rho_+) &= b_1 J_{cm}(-iq\rho_+) + b_2 Y_{cm}(-iq\rho_+), \end{cases} \quad (3.59)$$

ou, usando as relações $I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix)$ e $K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}(\pi\alpha)}(I_{-\alpha} - I_\alpha)$ podemos expressar essas soluções em termos das funções de Bessel modificadas

$$\begin{cases} \psi_{mq}(\rho_-) &= d_1 I_m(q\rho_-) + d_2 K_m(q\rho_-), \\ \psi_{mq}(\rho_+) &= c_1 I_{cm}(q\rho_+) + c_2 K_{cm}(q\rho_+), \end{cases} \quad (3.60)$$

e pela condição de regularidade temos $d_2 \rightarrow 0$ e a constante d_1 é absorvida na constante de normalização N_{kmq} pois $K_\alpha(x)$ diverge para $x \rightarrow 0$.

A fim de eliminar soluções com autovalores λ não positivo da análise é necessário escolher condições de contorno auto-adjuntas que não possuam modos associados a estes auto-valores como soluções da equação de KG. Isso é feito ajustando os parâmetros do campo e graus de liberdade da condição de contorno auto-adjunta de maneira que não exista λ negativo ou nulo no espectro do PSL.

3.3.2 Condição de suavidade

A primeira condição de contorno analisada tem o significado físico mais intuitivo, a suavidade de ψ_{mq} e da derivada radial ψ'_{mq} na casca cilíndrica S_1 . O estudo da função

resposta com esta condição de contorno já foi realizado por [Cong \(2021\)](#). A condição de suavidade é construída para a seguinte escolha de parâmetros

$$\gamma = 0, k_{11} = 1 \text{ e } k_{21} = k_{12} = 0, \quad (3.61)$$

esta condição de contorno toma a seguinte forma:

$$\psi_{mq}(\rho_- = R_1) = \psi_{mq}(\rho_+ = cR_1), \quad (3.62)$$

$$\psi'_{mq}(\rho_- = R_1) = \psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1). \quad (3.63)$$

Perceba que desta condição obtemos o sistema de 3 equações que explicita totalmente a condição de contorno de suavidade para o campo escalar

$$\begin{cases} \psi_{mq}(\rho_- = R_1) = \psi_{mq}(\rho_+ = cR_1), \\ \psi'_{mq}(\rho_- = R_1) = \psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1), \\ \psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0. \quad (\text{Condição de Dirichlet}) \end{cases} \quad (3.64)$$

Contudo, para $\lambda = 0$ esse sistema equivale a

$$\begin{cases} (R_1)^{|m|} = c_1(cR_1)^{mc} + c_2(cR_1)^{-mc}, \\ |m|(R_1)^{|m|-1} = cm \, c_1(cR_1)^{mc-1} - cm \, c_2(cR_1)^{-mc-1}, \\ c_1(cR_2)^{mc} + c_2(cR_2)^{-mc} = 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

que não possui solução para nenhum par de c_1 e c_2 .

De modo análogo, para $\lambda = -q^2$ o sistema de equações das condições de contorno se torna

$$\begin{cases} I_{cm}(qR_1) = c_1 I_{cm}(qcR_1) + c_2 K_{cm}(qcR_1), \\ I_{m+1}(qR_1) + I_{m-1}(qR_1) = \\ c_1(I_{cm+1}(qcR_1) + I_{cm-1}(qcR_1)) + c_2(K_{cm+1}(qcR_1) + K_{cm-1}(qcR_1)), \\ c_1 I_{cm}(qcR_2) + c_2 K_{cm}(qcR_2) = 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Este sistema possui solução para $c_1(m, q, c, R_1), c_2(m, q, c, R_1)$ dada pelas primeiras duas equações, a terceira equação determina o espectro q do PSL. Para evitarmos os modos ligados é necessário escolher os parâmetros m, q, c, R_1 e R_2 de modo ao espectro do PSL radial não possuir autovalores negativos, e isso é testável computacionalmente.

Uma discussão mais profunda sobre a existência de estados ligados com autovalores negativos será deixada para próxima subseção que abordará uma classe de condição de contorno que possui como caso especial a condição de suavidade.

Finalmente podemos resolver o sistema para $\lambda = +q^2$,

$$\begin{cases} J_{cm}(qR_1) = c_1 J_{cm}(qcR_1) + c_2 Y_{cm}(qcR_1), \\ J_{m+1}(qR_1) + J_{m-1}(qR_1) = \\ c_1(J_{cm+1}(qcR_1) + J_{cm-1}(qcR_1)) + c_2(Y_{cm+1}(qcR_1) + Y_{cm-1}(qcR_1)), \\ c_1 J_{cm}(qcR_2) + c_2 Y_{cm}(qcR_2) = 0. \end{cases} \quad (3.67)$$

este sistema resulta em

$$\begin{cases} c_1(c, m, q, R_1) = \frac{1}{2}c\pi q R_1 (J_m(qR_1)Y_{cm-1}(cqR_1) - J_{m-1}(qR_1)Y_{cm}(cqR_1)), \\ c_2(c, m, q, R_1) = \frac{1}{2}c\pi q R_1 (J_{m-1}(qR_1)J_{cm}(cqR_1) - J_m(qR_1)J_{cm-1}(cqR_1)). \end{cases} \quad (3.68)$$

Perceba que os coeficientes encontrados acima satisfazem que $c_1 \rightarrow 1$ e $c_2 \rightarrow 0$ para $c \rightarrow 1$, portanto, na ausência de deficit angular na região $\mathcal{V}^+$ obtemos como solução da parte radial do campo escalar

$$\psi_{mq}(\rho) = J_m(q\rho),$$

e esta solução é válida para $\mathcal{M} = \mathcal{V}^- \cup \mathcal{V}^+$. Isso está ligado ao fato de que para $c = 1$ não existe descontinuidade da métrica em S_1 e não é necessário o formalismo do PSL em dois intervalos, uma vez que o campo pode ser resolvido como um PSL usual no intervalo $J = (0, R_2)$.

3.3.3 Condição diagonal

Considere agora um caso um pouco mais geral de condição de contorno auto-adjunta

$$\gamma = 0 \quad \text{e} \quad k_{21} = k_{21} = 0, \quad (3.69)$$

e

$$k_{11} = \frac{1}{k_{22}}. \quad (3.70)$$

Com esta definição de parâmetros a matriz K toma uma forma diagonal

$$K = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

onde $\beta = k_{11} \in \mathbb{R}$.

Portanto o sistema de equações que explicita as condições de contorno para a parte radial do campo escalar é

$$\begin{cases} \psi_{mq}(\rho_- = R_1) = \beta \psi_{mq}(\rho_+ = cR_1), \\ \psi'_{mq}(\rho_- = R_1) = \frac{1}{\beta} \psi'_{mq}(\rho_+ = cR_1), \\ \psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0. \quad (\text{Condição de Dirichlet}) \end{cases} \quad (3.72)$$

Note que a condição de contorno de suavidade é um caso particular da condição com K diagonal para $\beta = 1$, contudo, para $\beta \neq 1$ o campo e sua derivada serão descontínuos. Apesar de fisicamente intuirmos a continuidade do campo, esse critério não é necessário para definir uma dinâmica adequada, como a proposta em [Ishibashi and Wald \(2003\)](#), esta é a principal contribuição deste trabalho em relação a análise iniciada em [Cong \(2021\)](#).

Além disso, perceba que se multiplicarmos lado-a-lado as duas primeiras linhas da equação (3.72) obteremos uma relação de conservação em S da função $F_{mq}(\rho_{\pm}) = \psi_{mq}(\rho_{\pm})\psi'_{mq}(\rho_{\pm}) = \frac{1}{2}\partial_{\rho_{\pm}}(\psi_{mq}(\rho_{\pm})^2)$, de fato

$$\psi_{mq}(\rho_-)\psi'_{mq}(\rho_-)|_{\rho_-=R_1} = \psi_{mq}(\rho_+)\psi'_{mq}(\rho_+)|_{\rho_+=cR_1}, \quad (3.73)$$

então, modo-a-modo o fluxo radial do campo $\hat{\Psi}$, definido pela função F_{mq} se preserva quando atravessa a hipersuperfície S_1 de junção das regiões $\mathcal{V}^-$ e $\mathcal{V}^+$ do espaço-tempo estudado para uma condição de contorno na forma diagonal.

Para $\lambda = 0$ o sistema de equações (3.72) se torna

$$\begin{cases} R_1^{|m|} = \beta(c_1(cR_1)^{mc} + c_2(cR_1)^{-mc}), \\ |m|R_1^{|m|-1} = \frac{1}{\beta}mc(c_1(cR_1)^{mc-1} - c_2(cR_1)^{-mc-1}), \\ c_1(cR_2)^{mc} + c_2(cR_2)^{-mc} = 0. \end{cases} \quad (3.74)$$

e não possui solução para c_1 e c_2 , logo não existe modo associado com $\lambda = 0$ para a condição de contorno diagonal.

Para $\lambda = -q^2$ obtemos um sistema mais complicado, porém, para $m = 0$ o sistema não possui solução com $\lambda = -q^2 < 0$. Para o caso com $\lambda = +q^2$, o sistema de equações para c_1 e c_2 (3.72) possui o seguinte par solução:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2\beta}c\pi[(qR_1J_{m-1}(qR_1) + (-1 + \beta^2)mJ_m(m, qR_1))Y_{cm}(cqR_1) \\ \quad - \beta^2qR_1J_m(qR_1)Y_{cm-1}(cqR_1)] \\ c_2 = \frac{1}{2\beta}c\pi[(-qR_1J_{m-1}(qR_1) - (-1 + \beta^2)mJ_m(m, qR_1))J_{cm}(cqR_1) \\ \quad - \beta^2qR_1J_m(qR_1)J_{cm-1}(cqR_1)] \end{cases} \quad (3.75)$$

onde q deve ser tal que o campo satisfaz a condição de Dirichlet $\psi_{mq}(qcR_2) = 0$. Portanto o espectro do PSL radial é dado como as soluções da terceira equação de (3.72). Observe que $c_i \rightarrow -c_i$ quando $\beta \rightarrow -\beta$ para $i = 1, 2$, essa propriedade será importante para investigar a dependência da função resposta do detector por β .

3.3.4 Energia conservada

Neste ponto, iremos verificar se as condições de contorno analisadas descrevem uma dinâmica adequada como a proposta por [Ishibashi and Wald \(2003\)](#), para isto, vamos verificar a suposição **3.i** que diz respeito a definição de um funcional de energia que independe do tempo, $\frac{d}{dt}E = 0$. Considere novamente a decomposição em modos do campo $\hat{\Psi}$ apresentada na equação (3.10)

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{mq} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(a_{kmq} \Psi_{kmq}(x) + a_{kmq}^{\dagger} \Psi_{kmq}^*(x) \right),$$

note que podemos escrever o campo acima como

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{mq} \psi_{mq}(\rho) f_{mq}(z, \phi, t),$$

onde $f_{mq}(z, \phi, t) = \int dk N_{kmq} \{a_{kmq} e^{i(kz+m\phi-\omega t)} + a_{kmq}^\dagger e^{-i(kz+m\phi-\omega t)}\}$. Portanto, podemos escrever o sistema de equações de contorno (3.51) com $\hat{\Psi}$ e $\dot{\hat{\Psi}}$ no lugar de ψ_{mq} .

Da equação de Klein-Gordon, $\square_\pm \hat{\Psi} = 0$ obtemos que $\partial_t^2 \hat{\Psi} = \vec{\nabla}_\pm^2 \hat{\Psi}$, portanto, definimos $A_\pm = -\vec{\nabla}_\pm^2$ e o funcional de energia do campo escalar é dado por (aqui não foi colocado o fator 2 usado anteriormente)

$$E_\pm = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} (\dot{\hat{\Psi}}^2 - \hat{\Psi} \vec{\nabla}_\pm^2 \hat{\Psi}) d\Sigma \quad (3.76)$$

e no espaço-tempo estudado pode ser calculado como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi \left(\int_0^{R_1} \rho_- d\rho_- (\dot{\hat{\Psi}}_-^2 - \hat{\Psi}_- \vec{\nabla}^2 \hat{\Psi}_-) + \int_{cR_1}^{cR_2} \frac{\rho_+}{c} d\rho_+ (\dot{\hat{\Psi}}_+^2 - \hat{\Psi}_+ \vec{\nabla}^2 \hat{\Psi}_+) \right). \quad (3.77)$$

Aqui o Laplaciano $\vec{\nabla}_\pm^2$ definido em $\mathcal{V}^\pm$ pode ser calculado nas duas regiões do espaço-tempo,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_-^2(\cdot) &= \frac{1}{\rho_-} \partial_{\rho_-} (\rho_- \partial_{\rho_-}(\cdot)) + \frac{1}{\rho_-^2} \partial_\phi^2(\cdot) + \partial_z^2(\cdot), \\ \vec{\nabla}_+^2(\cdot) &= \frac{1}{\rho_+} \partial_{\rho_+} (\rho_+ \partial_{\rho_+}(\cdot)) + \frac{c^2}{\rho_+^2} \partial_\phi^2(\cdot) + \partial_z^2(\cdot), \end{aligned}$$

e nas duas regiões podemos usar a propriedade do Laplaciano

$$\vec{\nabla}_\pm \cdot \vec{\nabla}_\pm (f^2) = \vec{\nabla}_\pm^2 (f^2) = 2(f \vec{\nabla}_\pm^2 f + (\vec{\nabla}_\pm f)^2), \quad (3.78)$$

com essa propriedade e aplicando o teorema do divergente obtemos que

$$E = E_c - \frac{1}{2} \int R_1 (\hat{\Psi}_- \vec{\nabla} \hat{\Psi}_- \cdot \hat{e}_{\rho_-} |_{\rho_-=R_1} - \hat{\Psi}_+ \vec{\nabla} \hat{\Psi}_+ \cdot \hat{e}_{\rho_+} |_{\rho_+=cR_1}) d\phi dz \quad (3.79)$$

onde $E_c = \frac{1}{2} \int_t (\dot{\hat{\Psi}}_-^2 + (\vec{\nabla} \hat{\Psi}_-)^2) + \frac{1}{2} \int_t (\dot{\hat{\Psi}}_+^2 + (\vec{\nabla} \hat{\Psi}_+)^2)$. Portanto, perceba que

$$E = E_c - \frac{R_1}{2} \int (\hat{\Psi}_- \partial_{\rho_-} \hat{\Psi}_- |_{\rho_-=R_1} - \hat{\Psi}_+ \partial_{\rho_+} \hat{\Psi}_+ |_{\rho_+=cR_1}) d\phi dz \quad (3.80)$$

de modo simples podemos calcular $\dot{E}_c$ e usar a relação $\vec{\nabla}_\pm \cdot (\hat{\Psi}_\pm \vec{\nabla}_\pm \hat{\Psi}_\pm) = \hat{\Psi}_\pm \vec{\nabla}_\pm^2 \hat{\Psi}_\pm + \vec{\nabla}_\pm \hat{\Psi}_\pm \vec{\nabla}_\pm \hat{\Psi}_\pm$ com $\hat{\Psi}_\pm = \vec{\nabla}_\pm^2 \hat{\Psi}_\pm$ para determinar que

$$\dot{E}_c = \int R_1 (\dot{\hat{\Psi}}_- \partial_{\rho_-} \hat{\Psi}_- |_{\rho_-=R_1} - \dot{\hat{\Psi}}_+ \partial_{\rho_+} \hat{\Psi}_+ |_{\rho_+=cR_1}) d\phi dz$$

e

$$\dot{E} = \frac{R_1}{2} \int d\phi dz \left(\left[\dot{\hat{\Psi}}_- \partial_{\rho_-} \hat{\Psi}_- |_{\rho_-=R_1} - \dot{\hat{\Psi}}_- \partial_{\rho_-} \hat{\Psi}_- |_{\rho_-=R_1} \right] - \left[\dot{\hat{\Psi}}_+ \partial_{\rho_+} \hat{\Psi}_+ |_{\rho_+=cR_1} - \dot{\hat{\Psi}}_+ \partial_{\rho_+} \hat{\Psi}_+ |_{\rho_+=cR_1} \right] \right)$$

e isto resulta, após aplicar as condições de contorno, que

$$\dot{E} = \frac{R_1}{2} \int d\phi dz (1 + k_{12} k_{21} - k_{11} k_{22}) \left(\hat{\Psi}_+ \partial_{\rho_+} \dot{\hat{\Psi}}_+ - (\partial_{\rho_+} \hat{\Psi}_+) \dot{\hat{\Psi}}_+ \right) |_{\rho_+=cR_1} \quad (3.81)$$

e esta equação implica que $\dot{E} = 0$ se $\det(K) = 1$, que é nosso critério para uma condição auto-adjunta.

4 Análise da sensibilidade do detector

Na primeira seção deste capítulo iremos derivar a expressão da função resposta para o campo escalar estudado, e nas seções seguintes será estudada a sensibilidade do detector de UDW posicionado na região $\mathcal{V}^-$. Diferentes casos e desdobramentos serão devidamente apresentados e estudados. A finalidade aqui é apresentar os resultados numéricos que colaboram para a análise proposta.

4.1 A função resposta

Em geral, o detector pode descrever qualquer trajetória $x(\tau)$ no espaço-tempo. Iremos considerar que as trajetórias em que detector se mantém dentro da região $\mathcal{V}^-$. Com o propósito de medir a sensibilidade do detector de UDW à conicidade da região cilíndrica externa será suficiente limitar-nos à trajetórias estacionárias do detector onde o detector permanece em repouso com coordenadas espaciais fixadas,

$$x(\tau) = (\tau, \rho_d, \phi_d, z_d),$$

onde τ é o tempo próprio do detector, $0 \leq \rho_d < R_1$ e, devido à simetria axial do espaço de interesse, podemos fixar sem perdas $\phi_d = z_d = 0$. De fato, não é esperado que ocorra qualquer mudança nas taxas de excitação ou deexcitação do detector após uma translação em $z_d \rightarrow z_d + dz$ ou rotação ao redor do eixo de simetria $\phi_d \rightarrow \phi_d + d\phi$, isto fica explícito pela forma da função de dois pontos:

$$G(x(\tau), x(\tau')) = \sum_{mq} \frac{e^{im\Delta\phi} \psi_{mq}(\rho_d) \psi_{mq}^*(\rho'_d)}{8\pi^2 |\psi_{mq}|^2} \int dk \frac{e^{-i(\sqrt{k^2+q^2}\Delta\tau - k\Delta z)}}{\sqrt{k^2+q^2}}.$$

A expressão acima foi obtida a partir da expressão da soma de modos para calcular $G(x(\tau), x(\tau'))$:

$$G(x(\tau), x(\tau')) = \sum_{m,q} \int_{-\infty}^{\infty} dk \Psi_{kmq}(x(\tau)) \Psi_{kmq}^*(x(\tau')). \quad (4.1)$$

Considere agora que o campo e o detector interagem mutuamente durante um intervalo de tempo finito $\Delta\tau$. A função *switching* é responsável por ligar e desligar a interação e neste trabalho a função foi escolhida assim como na referência [Cong et al. \(2021\)](#), para que os resultados colhidos possam ser comparados com os da referência

$$\chi(\tau) = \begin{cases} \cos^4(\eta\tau), & \frac{-\pi}{2\eta} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2\eta} \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $\eta = \pi/\Delta\tau$.

Substituindo a expressão dos modos Ψ_{kmq} na identidade acima obtemos uma forma final para a função de dois pontos que depende apenas de quantidades conhecidas

$$G(x(\tau), x(\tau')) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{mq} \frac{|J_{|m|}(q\rho_d)|^2}{\|\psi_{mq}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-i\omega(\tau-\tau')}}{\sqrt{k^2 + q^2}}. \quad (4.3)$$

Ao inserir esta expressão em (1.36) obtemos a forma para a função resposta do espaço estudado

$$\mathcal{F}(\Omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \chi(\tau) \chi(\tau') e^{-i\Omega(\tau-\tau')} \sum_{mq} \frac{|J_{|m|}(q\rho_d)|^2}{\|\psi_{mq}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{-i\omega(\tau-\tau')}}{\sqrt{k^2 + q^2}}, \quad (4.4)$$

seja $\hat{\chi}(y)$ a transformada de Fourier de $\chi(\tau)$, portanto $\hat{\chi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\tau} \chi(\tau) d\tau$ e portanto

$$\mathcal{F}(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{mq} \frac{|J_{|m|}(q\rho_d)|^2}{\|\psi_{mq}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\hat{\chi}(\Omega + \sqrt{k^2 + q^2})|^2}{\sqrt{k^2 + q^2}}, \quad (4.5)$$

com $\omega^2 = k^2 + q^2$. A princípio o detector é mantido no centro da região cilíndrica interna $\mathcal{V}^-$, com $\rho_d = 0$ e portanto $J_{|m|}(0) = \delta_{0,m}$. E portanto a função resposta do detector centrado é simplificada

$$\mathcal{F}(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_q \frac{1}{\|\psi_{0q}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\hat{\chi}(\Omega + \sqrt{k^2 + q^2})|^2}{\sqrt{k^2 + q^2}}. \quad (4.6)$$

Agora que conhecemos a função resposta do detector de UDW no espaço tempo de interesse poderemos analisar a sensibilidade do detector à conicidade e as condições de contorno.

Perceba que na expressão acima para a função resposta, a ocorrência do parâmetro da conicidade se dá apenas em $\|\psi_{mq}\|$. Este termo depende da conicidade pois o campo é normalizado em todo o espaço e a dependência da norma de ψ_{mq} por c ocorre através dos coeficientes c_1 e c_2 .

Portanto, estudar a sensibilidade do detector à conicidade da região $\mathcal{V}^+$ é o mesmo que estudar o comportamento de c_1 e c_2 quando a conicidade c varia. Quando aplicamos diferentes condições de contorno auto-adjuntas na hipersuperfície S_1 , estamos mudando a expressão de c_1 e c_2 e consequentemente o valor da função resposta e sua sensibilidade a diferentes conicidades em $\mathcal{V}^+$.

4.2 Aspectos Numéricos da análise da função resposta

Partindo de uma análise do comportamento esperado da função resposta $\mathcal{F}$, é importante observar que o detector está posicionado em $\mathcal{V}^-$. Portanto, os modos do campo

escalar quando analisados na trajetória do detector em repouso, $x(\tau) = (\tau, \rho_d, \phi_d, z_d)$ são aqueles associados a região interna $\mathcal{V}^-$ do espaço-tempo, isto é:

$$\Psi_{kmq}(x(\tau)) = N_{kmq} e^{-i\omega\tau} e^{ikz_d} e^{im\phi_d} J_m(q\rho_d),$$

e quando, por argumentos de simetria, fixamos as coordenadas $z_d = \phi_d = 0$, os modos do campo tomam a seguinte forma

$$\Psi_{kmq}(x(\tau)) = N_{kmq} e^{-i\omega\tau} J_m(q\rho_d). \quad (4.7)$$

A simplificação dos modos é ainda maior quando detector é mantido em repouso em $\rho_d = 0$, pois dessa forma $J_m(q\rho_d = 0) = \delta_{m,0}$.

$$\Psi_{kmq} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{2\sqrt{k^2 + q^2}}|\psi_{mq}|} e^{-i\omega\tau_d}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m \neq 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Ao conhecer a função resposta do detector, podemos analisar sua sensibilidade para cada parâmetro da função resposta: $R_1, R_2, \rho_d, c, \Omega, \Delta\tau$. Como mantemos o detector no centro da região interna $\mathcal{V}^-$, analisaremos a forma da função resposta simplificada

$$\mathcal{F}(R_1, R_2, \rho_d, c, \Omega, \Delta\tau) = \frac{1}{4\pi} \sum_q \frac{1}{|\psi_{0q}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\hat{\chi}(\Omega + \sqrt{k^2 + q^2})|^2}{\sqrt{k^2 + q^2}}. \quad (4.9)$$

Perceba que após aplicar a condição de contorno em S_1 e determinar os coeficientes c_1 e c_2 , a função resposta é determinada por uma soma dos seguintes termos

$$\mathcal{F}_q = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\psi_{0q}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\hat{\chi}(\Omega + \sqrt{k^2 + q^2})|^2}{\sqrt{k^2 + q^2}}. \quad (4.10)$$

Onde, usando a forma da função $\chi(\tau)$ apresentada em (4.2), podemos calcular a sua transformada de Fourier $\hat{\chi}(y)$

$$\hat{\chi}(y) = \frac{24\sqrt{\frac{2}{\pi}}\eta^4 \text{sen}(\frac{\pi y}{2\eta})}{y^5 - 20y^3\eta^2 + 64y\eta^4}, \quad \text{se } \eta > 0, \quad (4.11)$$

contudo, durante a investigação realizada neste trabalho o tempo de interação entre o detector e o campo escalar foi mantido como $\Delta\tau = 1$. Portanto, na expressão de $\hat{\chi}$ podemos substituir $\eta = \pi/\Delta\tau = \pi$ e obtemos uma função que depende apenas da variável y

$$\hat{\chi}(y) = \frac{24\sqrt{2}\pi^{7/2} \text{sen}(\frac{y}{2})}{y^5 - 20y^3\pi^2 + 64y\pi^4}. \quad (4.12)$$

A primeira vista, podemos pensar que $\hat{\chi}(y)$ possui pontos singulares nas raízes de $y^5 - 20y^3\pi^2 + 64y\pi^4 = 0$, que são estas $\{y_1 = 0, y_2 = +4\pi, y_3 = -4\pi, y_4 = -2\pi, y_5 = 2\pi\}$.

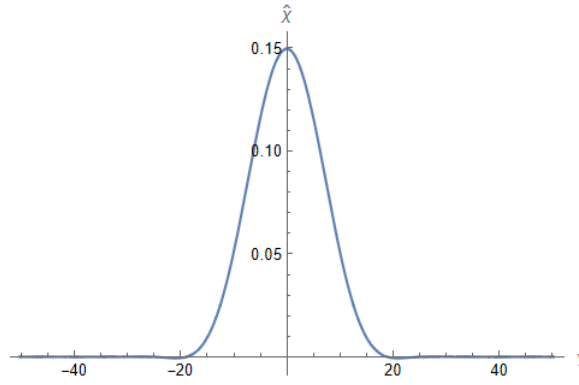


Figura 10 – A figura apresenta a forma da função $\hat{\chi}(y)$ em função de y .

Mas todas estas são também raízes de $\sin(y/2)$ de maneira que $\hat{\chi}(y)$ não possui pontos singulares.

Agora podemos nos atentar a parte integral de $\mathcal{F}_q$,

$$I_q(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\hat{\chi}(\Omega + \omega)|}{\omega},$$

onde $\omega = \sqrt{k^2 + q^2}$ para $\omega \geq 0$. Esta é uma integral par em relação à k , e portanto podemos escrever sem perdas que

$$I_q(\Omega) = 2 \int_0^{\infty} dk \frac{1152\pi^7 \sin^2\left(\frac{1}{2}(\omega + \Omega)\right)}{\omega \left((\omega + \Omega)^5 - 20\pi^2(\omega + \Omega)^3 + 64\pi^4(\omega + \Omega)\right)^2}. \quad (4.13)$$

Apesar de complicada, essa integral pode ser calculada a partir de métodos numéricos e isso é feito com facilidade através do software Mathematica. Podemos entender o comportamento de $\mathcal{F}_q$ através da figura (11). Perceba que $\mathcal{F}_q$ tende à 0 rapidamente para $q \gg 1$. Apesar de que para diferentes condições de contorno a escala dos gráficos apresentados em (11) possa mudar, o comportamento descrito se mantém.

$\mathcal{F}(E)$	q_{max}
0.0014343	1
0.00923942	5
0.00106168	10
0.000593584	15
0.00003203	18
$1.26509 * 10^{-6}$	19
$1.59392 * 10^{-7}$	20

(4.14)

Aliado aos gráficos da figura (11), na tabela (4.14) foi considerada uma escolha arbitrária dos parâmetros da função resposta, $c = 2$, $\rho_d = 0$, $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ e $\Omega =$

–2. Percebemos através disso que a função resposta $\mathcal{F}$ decai rapidamente para q 's suficientemente grandes. Logo, podemos truncar a soma de autovalores que define $\mathcal{F}$ em um determinado q_{max} onde o erro passa a ser menor que a precisão escolhida. Por exemplo, se estabelecermos que o erro em cada ponto calculado no gráfico da função resposta seja menor que duas casas decimais da ordem de grandeza da própria função, $erro \leq 10^{-7}$, então podemos escolher um q_{max} tal que a contribuição a partir deste termo para $\mathcal{F}$ seja da ordem de 10^{-7} e a soma, $\sum_q$, é truncada em q_{max} .

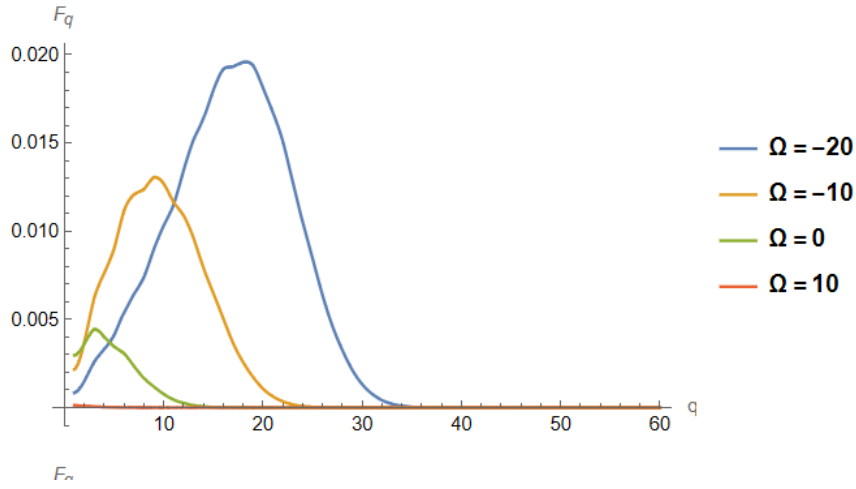


Figura 11 – A figura apresenta a dependência em q do funcional $\mathcal{F}_q$, aqui foram feitos quatro curvas de $\mathcal{F}_q$ em função de q para $\Omega = -10, 0, 10, 20$ com a seguinte escolha de parâmetros: $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $c = 2$ e condição de contorno de suavidade.

Uma vez que o objetivo é investigar como a função resposta se relaciona com cada parâmetro $R_1, R_2, \rho_d, c, \Omega, \Delta\tau$, o estudo envolveu a elaboração de vários gráficos, seguindo um conjunto específico de passos.

Inicialmente, foram selecionados os coeficientes k_{ij} da matriz K que determina a condição de contorno em S_1 , aqui já assumimos $\gamma = 0$, para encontrar as constantes $c_1(m, q, c, R_1)$ e $c_2(m, q, c, R_1)$ que determinam unicamente os modos do campo, Ψ_{kmq} . Em seguida, procedeu-se ao cálculo do espectro do problema de Sturm-Liouville radial, representado pela equação $\psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0$. Este cálculo envolveu uma aproximação numérica para a determinação da raízes da equação

$$c_1(m, q, c, R_1)J_{cm}(cqR_2) + c_2(m, q, c, R_1)Y_{cm}(cqR_2) = 0.$$

Por fim, a função resposta foi calculada para diferentes escolhas dos parâmetros $R_1, R_2, \rho_d, c, \Omega$ e $\Delta\tau$. Isto resultou em distribuições discretas dos valores de $\mathcal{F}$ e o gráfico final é o resultado da função de interpolação de $\mathcal{F}$, onde a distância dos pontos é muito pequena quando comparada a escala de $\mathcal{F}$. Este cálculo permitiu a análise da variação da

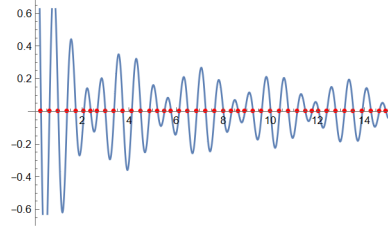


Figura 12 – Gráfico de $\psi_{0q}(\rho_+ = cR_2) = c_1(0, q, c, R_1)J_{c0}(qcR_2) + c_2(0, q, c, R_1)Y_{c0}(qcR_2)$ em função de q . Foi usado $c = 2$, $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ e $\rho_d = 0$.

função resposta conforme cada parâmetro é modificado, fornecendo insights valiosos sobre o comportamento do sistema em estudo.

É importante notar que escolher os coeficientes k_{ij} de forma a satisfazer as relações das condições de contorno auto-adjuntas e não admitir soluções com estados ligados não é um processo numericamente difícil. O uso do software Mathematica pode auxiliar na álgebra operacional necessária. Porém, o cálculo do espectro de autovalores do problema de Sturm-Liouville é uma tarefa complexa dada a enorme quantidade de autovalores que precisam ser calculados com precisão adequada.

No gráfico (12) foi utilizado $k_{12} = k_{21} = 0$, $k_{11} = 1/k_{22}$ e $k_{22} = -2$ para expressar a quantidade raízes da equação $\psi_{mq}(\rho_+ = cR_2) = 0$ para uma escolha arbitrária de parâmetros. Os pontos em vermelho em (12) são as raízes, ou autovalores q . Perceba que é devido a oscilação de $\psi_{mq}(\rho_+ = cR_2)$ em função de q , que encontrar as raízes é demorado e que podem haver ‘saltos’ na contagem de raízes se usarmos os métodos numéricos levianamente.

4.3 Gráficos da função resposta

A função resposta do detector, quando a conicidade da região externa $\mathcal{V}^+$ é $c = 1$, será representada como $\mathcal{F}_{c=1}$ enquanto a função resposta para um c qualquer será representada por $\mathcal{F}_c$. Notavelmente, no cenário com $c = 1$, não há presença de descontinuidade na superfície de junção S_1 e portanto não é necessário impor condições de contorno em S_1 .

A Figura (13) apresenta o formato e a dependência da função resposta do detector em relação a Ω , com a escolha específica de $c = 1$. No entanto, a curva de $\mathcal{F}_c$ para outras conicidades seria sobreposta à figura devido à escala do gráfico. Para melhor observar as variações na função resposta quando os parâmetros são modificados, é necessário plotar o gráfico da diferença $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$. É importante destacar que, para as análises a seguir, o intervalo de tempo $\Delta\tau$ durante o qual a interação entre Detector-Campo ocorre é insuficiente para que a luz percorra a distância do detector até a região com

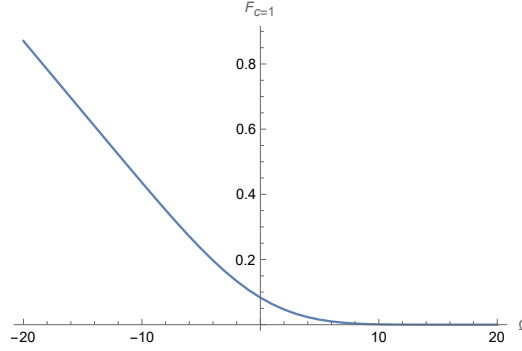


Figura 13 – A figura mostra o formato geral de $\mathcal{F}_c$ em função de Ω , note que este é o formato geral pois a variação no valor da função resposta devido a diferentes conicidades possui uma ordem de grandeza muito menor que a escala do gráfico.

conicidade $c \neq 1$ e retorne. Assim, de uma perspectiva clássica, o detector não tem acesso à presença da conicidade em $\mathcal{V}^+$. No entanto, verificaremos que, apesar dessa limitação, o detector ainda demonstra sensibilidade à conicidade e às condições de contorno.

4.3.1 Detecção da conicidade com a condição de suavidade

4.3.1.1 Dependência em Ω e c

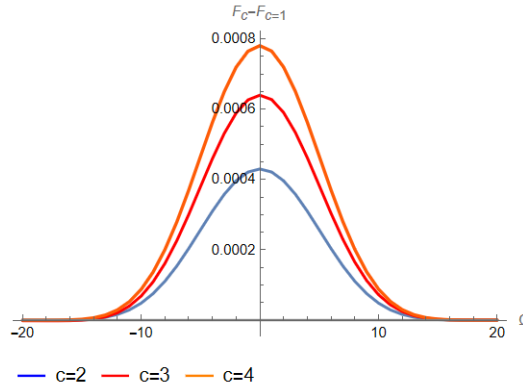


Figura 14 – O gráfico acima plota a diferença entre a função resposta do detector com $c = 2, 3$ e 4 , respectivamente em ordem crescente na figura, e a função resposta com $c = 1$ em função de Ω . Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Delta\tau = 1$. Perceba que a magnitude da diferença das funções respostas cresce com a conicidade.

O caso com condição de contorno de suavidade foi estudado em [Cong et al. \(2021\)](#), nesta seção iremos apresentar alguns dos resultados que já haviam sido obtidos na referência citada para em seguida comparar com o caso de condição de contorno diagonal. Os gráficos da figura (14) mostram as curvas $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ em função de Ω para $c = \{2, 3, 4\}$. A partir deles podemos notar que a diferença entre as funções resposta do detector é

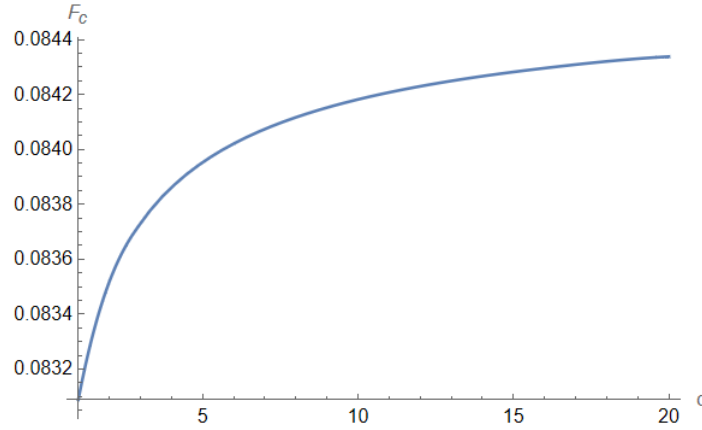


Figura 15 – A figura apresenta o gráfico da função resposta $\mathcal{F}_c$ em função da conicidade c . Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$, $\Omega = 0$ e $\Delta\tau = 1$. Notamos novamente que o valor numérico da função resposta cresce com a conicidade.

não nula para diferentes conicidades. Portanto o detector de UDW é de fato sensível à conicidade do espaço, mesmo quando seu efeito local é ausente.

O gráfico citado também mostra que a diferença $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ é maior ao redor de $\Omega = 0$ e tende a zero para $|\Omega| \gg 1$. Portanto o detector perde a sensibilidade à conicidade na região externa para saltos de energia, de excitação ou desexcitação, muito grandes.

A dependência da função resposta em c pode ser vista mais claramente na figura (15), que revela o comportamento da dependência de $\mathcal{F}_c$ por c .

4.3.1.2 Dependência em R_2 e R_1

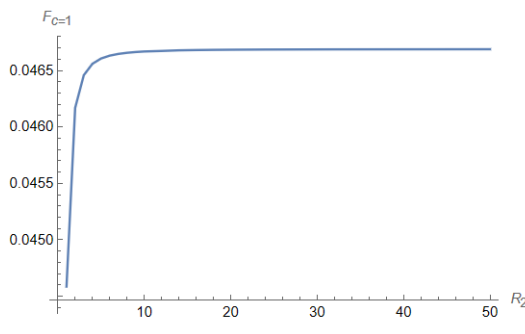


Figura 16 – O gráfico mostra a curva $\mathcal{F}_{c=1}$ em função de R_2 para $\Omega = 2$, $\rho_d = 0$ e $\Delta\tau = R_1 = 1$.

O espaço-tempo estudado foi truncado em $\rho_+ = cR_2$ ao impor a condição de Dirichlet. Isso torna o espectro do PSL em um conjunto discreto $\{q_i\}_{i=1,2,\dots}$. O comportamento da função resposta do detector para diferentes valores de R_2 pode ser analisado na figura (16). Perceba que a forma da curva desenhada por $\mathcal{F}_{c=1}$ em função de R_2 é

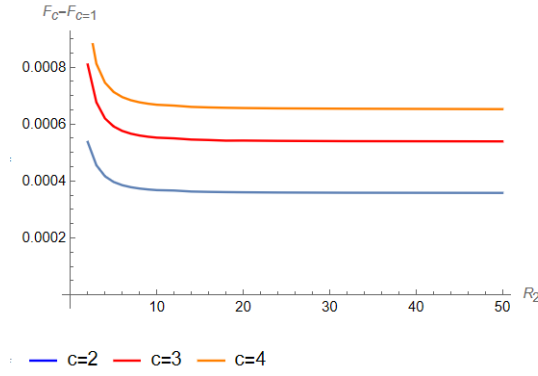


Figura 17 – A figura apresenta o gráfico de $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ para $c = 2, 3, 4$ e $\Omega = 2, \rho_d = 0$ e $\Delta\tau = R_1 = 1$.

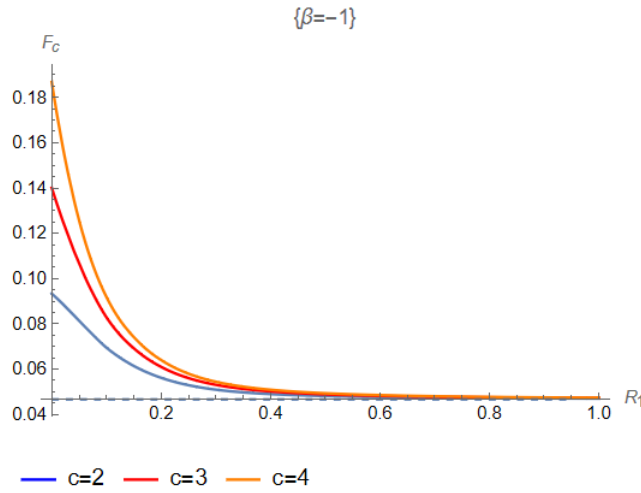


Figura 18 – O gráfico mostra a dependência da função resposta pelo raio R_1 para os valores de conicidade $c = 1, 2, 3$ e 4 , onde a função resposta com conicidade c é a curva tracejada. Aqui foi usado $\rho_d = 0$, $R_2 = 5$, $\Omega = 2$ e $\Delta\tau = 1$.

assintoticamente constante para $R_2 \gg 1$. Isso ajuda a entender como a função resposta do detector se comporta no limite $R_2 \rightarrow \infty$.

Podemos também investigar a sensibilidade do detector à conicidade do espaço-tempo a partir da figura (17), nele vemos a diferença entre as funções resposta do detector para diferentes conicidades, $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$. O gráfico revela a existência do limite finito para diferença entre as funções resposta e a sensibilidade do detector para o espaço não truncado. Além disso, percebamos que mesmo para $R_2 \rightarrow \infty$ o valor da função resposta cresce com a conicidade.

Os coeficientes c_1 e c_2 calculados para a condição de contorno de suavidade dependem dos seguintes parâmetros:

$$c, m, q, R_1.$$

note que $\lim_{R_1 \rightarrow 0} c_1(c, m=0, q, R_1) = 1$ e $\lim_{R_1 \rightarrow 0} c_2(c, m=0, q, R_1) = 0$. Isto equivale a solução da parte radial do campo na forma $\psi_{mq}(\rho_+) = J_{mc}(q\rho_+)$, o que se assemelha a solução para o espaço ao redor de uma corda cósmica. Aqui vamos tratar o limite $R_1 \rightarrow 0$, que não havia sido estudado na referência de [Cong et al. \(2021\)](#).

Na análise descrita pelo gráfico (18) o detector passa a interagir classicamente com a região com conicidade para $0 < R_1 < 1/2$, então podemos entender que o aumento discrepante da diferença da função resposta com conicidades diferentes é devido ao surgimento de fenômenos clássicos que transmitem a informação da conicidade na região externa.

4.3.2 Detecção de diferentes condições de contorno

4.3.2.1 Dependência em Ω e c

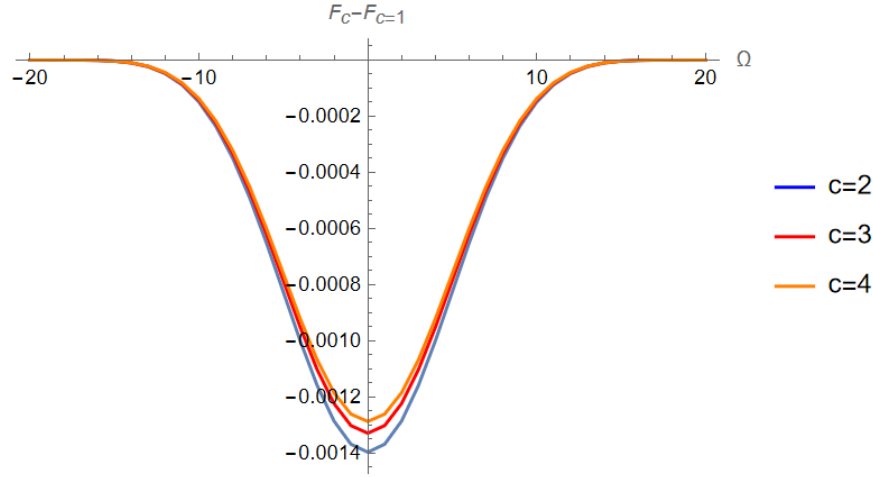


Figura 19 – O gráfico acima apresenta a sensibilidade da resposta do detector com $c = 2, 3$ e 4 e condição diagonal com $\beta = 1/2$. Note que a diferença $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ cresce com a conicidade c . Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Delta\tau = 1$.

As análises que serão apresentadas aqui são resultados novos e focados no estudo da condição de contorno auto-adjunta definida pela matriz diagonal $K = A_\beta$. Para $\beta = 1/2$ podemos realizar as mesmas análises da seção anterior e observamos que a dependência de $\mathcal{F}_c$ novamente será tal que, a escala da diferença entre $\mathcal{F} - \mathcal{F}_{c=1}$ é muito menor que a escala de $\mathcal{F}_{c=1}$, portanto para perceber a variação da função resposta para diferentes conicidades é necessário plotar a diferença entre essas funções respostas. Note que $\mathcal{F}_{c=1}$ é a função resposta com $c = 1$ e sem condição de contorno em S_1 , o que equivale a condição de suavidade e $c = 1$.

Novamente o detector mostra ser mais sensível a conicidade do espaço-tempo para Ω próximo de 0 e o detector de UDW perde esta sensibilidade para $|\Omega| \gg 1$. Porém, diferente do caso com condição de contorno de suavidade, a função resposta $\mathcal{F}_c$ para

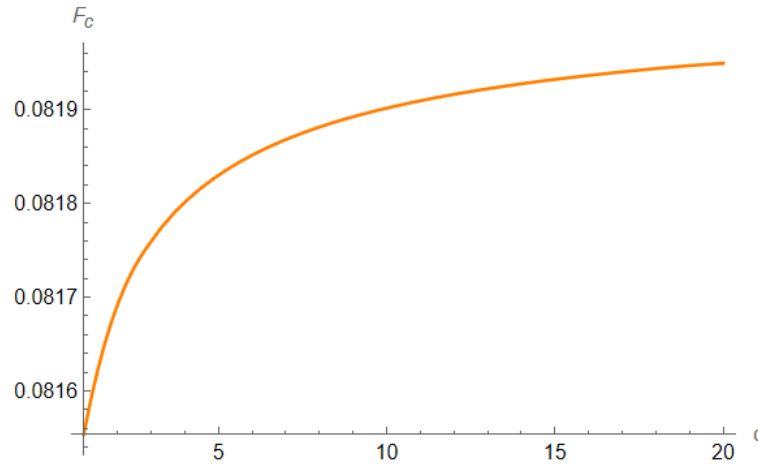


Figura 20 – A figura apresenta o gráfico da função resposta $\mathcal{F}_c$ em função da conicidade c para a condição diagonal com $\beta = 1/2$. Aqui foi considerado $R_1 = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$, $\Omega = 0$ e $\Delta\tau = 1$. Notamos novamente que o valor numérico da função resposta cresce com a conicidade.

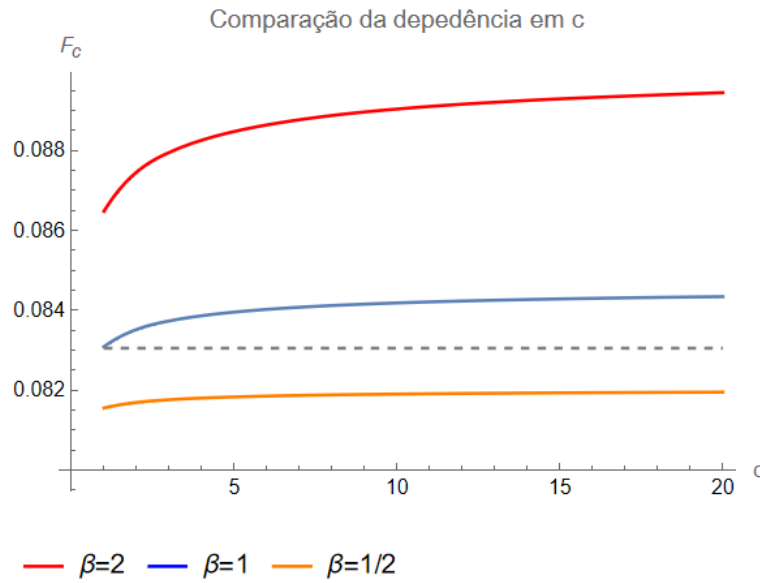


Figura 21 – A figura apresenta a curva de $\mathcal{F}_c$ em função de c para diferentes valores de β . Aqui foi considerado $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Omega = 0$.

diferentes valores de c é numericamente menor que a resposta para $c = 1$ e sem condição de contorno. Apesar dessa diferença, o comportamento e forma do gráfico de $\mathcal{F}_c$ em função de c se mantém, como mostrado no gráfico (20). Podemos perceber que para outros valores de β essa análise se mantém, como é apresentado na figura (21).

4.3.2.2 Dependência em R_2 e R_1

A representação gráfica (22) ilustra a diferença entre $\mathcal{F}_c$ e $\mathcal{F}_{c=1}$ para a condição de contorno auto-adjunta diagonal com $\beta = 1/2$, em relação a R_2 . Observa-se que o

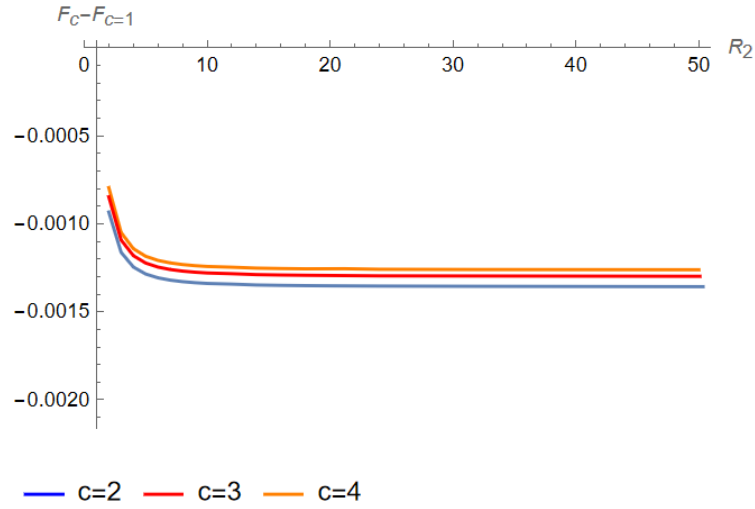


Figura 22 – A figura apresenta o gráfico de $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ para $\beta = 1/2$ em função de R_2 para $R_1 = \Delta\tau = 1$, $\rho_d = 0$ e $\Omega = 2$

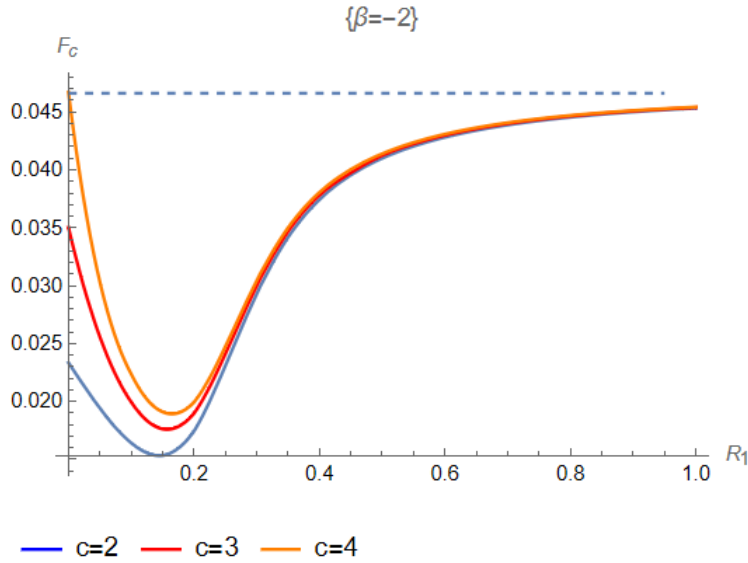


Figura 23 – O gráfico mostra a função resposta em função de R_1 para a condição de contorno diagonal com $\beta = 1/2$ e conicidade $c = 1, 2, 3$ e 4 . A função resposta com conicidade $c = 1$ é representada pela curva tracejada. Aqui foi usado $\rho_d = 0$, $R_2 = 5$, $\Omega = 2$ e $\Delta\tau = 1$.

detector de UDW mantém a sensibilidade à conicidade da região externa $\mathcal{V}^+$, especialmente para valores significativamente altos de R_2 . Além disso, nota-se que as curvas de $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ convergem assintoticamente para constantes com valores distintos para cada valor de conicidade c , e essas constantes limite aumentam proporcionalmente à conicidade. Importante ressaltar que esses limites diferem daqueles obtidos no caso com condição de contorno de suavidade.

Além dos parâmetros mencionados anteriormente para determinar c_1 e c_2 no caso da condição de suavidade, para a condição de contorno diagonal estudada, os coeficientes c_1 e c_2 passam a depender de β . Portanto, a função resposta do detector também é afetada por esse parâmetro.

Iremos agora analisar alguns limites importantes para c_1 e c_2 do caso diagonal:

- $m \rightarrow 0$, neste caso obtemos

$$c_1 = \frac{1}{2\beta} c\pi q R_1 (\beta^2 J_1(qR_1) Y_0(qcR_1) - J_0(qR_1) Y_1(qcR_1)), \quad (4.15)$$

$$c_2 = \frac{1}{2\beta} c\pi q R_1 (J_0(qR_1) J_1(qcR_1) - \beta^2 J_1(qR_1) J_0(qcR_1)). \quad (4.16)$$

- $R_1 \rightarrow 0$ com $m = 0$, neste caso obtemos

$$c_1 = 1/\beta, \quad (4.17)$$

$$c_2 = 0. \quad (4.18)$$

Portanto, a solução do campo para $R_1 \rightarrow 0$ é $\frac{1}{\beta} J_{mc}(q\rho_+)$.

A figura (23) ilustra a função resposta do detector acoplado ao campo escalar com condição de contorno diagonal. Nela, observa-se o comportamento da função resposta conforme $R_1 \rightarrow 0$. É evidente que o feixe de curvas $\mathcal{F}_c$ se expande ao se aproximar de $R_1 = 0$. Mantendo $\Delta\tau$ constante em cada ponto, percebe-se um aumento significativo na diferença entre as funções resposta para diferentes conicidades, fenômeno atribuído ao surgimento de fenômenos clássicos.

4.3.2.3 Dependência em β

Observe que dependência da função resposta do detector $\mathcal{F}$ pelos coeficientes c_1 e c_2 ocorre em $||\psi_{mq}||$ apenas. Como $c_i \rightarrow -c_i$ por uma reflexão de $\beta \rightarrow -\beta$ para $i = 1, 2$ então a função resposta é invariante por uma reflexão de β .

De fato,

$$\mathcal{F}(\beta) = \mathcal{F}(-\beta),$$

portanto, para entender o comportamento da função resposta para diferentes condições de contorno auto-adjuntas do tipo diagonal, basta plotar o gráfico para $\beta > 0$, de fato, o gráfico (24) mostra que para $0 < \beta < 1$ a função resposta do detector acoplado com o campo com condição de contorno diagonal é menor que a função resposta do caso com o campo com condição de suavidade, porém isso é invertido para $\beta > 1$, onde a resposta com condição diagonal é maior do que o caso com condição de suavidade.

Perceba que mesmo que $c = 2$ seja fixado no gráfico (24), devido a escala do gráfico a forma de $\mathcal{F}_c$ se sobrepõem a curva presente para um $c \neq 1$ qualquer.

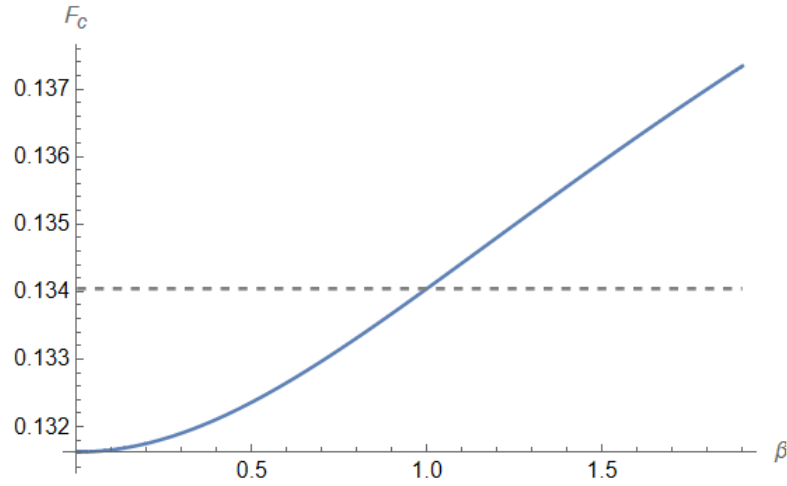


Figura 24 – A figura mostra o gráfico de $\mathcal{F}_c$ em função de β no intervalo $0 \leq \beta \leq 2$. Aqui foi tomado $c = 2$, $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$ e $\Omega = -2$. A linha tracejada representa a $\mathcal{F}_{c=2}$ com $\beta = 1$.

4.3.3 Enxerto angular

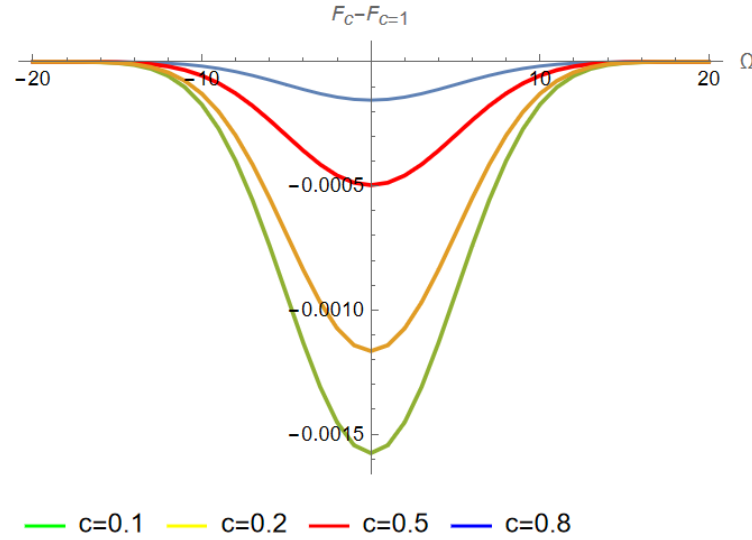


Figura 25 – O gráfico apresenta as curvas $\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_{c=1}$ para $c = 0.1, 0.2, 0.5$ e 0.8 em função de Ω . Aqui foi considerado $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$. Perceba que o valor numérico da diferença das funções respostas cresce com a conicidade.

Durante todo o estudo realizado até aqui foi considerado que $1 \leq c$ e portanto o deficit angular associado a métrica cônica é $\delta = 2\pi(1 - 1/c) \geq 0$. Como foi explicado no texto, a métrica cônica é associada ao espaço-tempo modelo ao redor de uma corda cósmica com densidade linear de massa dada por

$$\mu = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{c} \right).$$

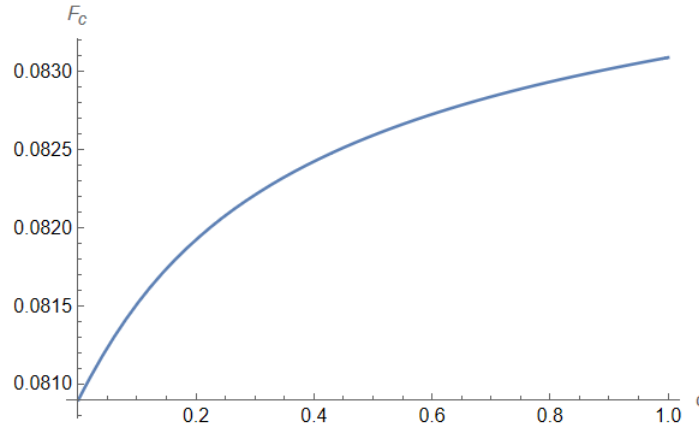


Figura 26 – A figura apresenta o gráfico da função resposta $\mathcal{F}_c$ em função da conicidade c para o intervalo $0 \leq c \leq 1$. Aqui foi considerado $R_1 = \Delta\tau = 1$, $R_2 = 5$, $\rho_d = 0$, $\Omega = 0$.

Considere por um momento que tenhamos $0 < c \leq 1$, portanto o “deficit” angular será negativo, $\delta_{\text{ovo}} = 2\pi(1 - 1/c) \leq 0$ e isto significa que o intervalo angular é acrescido por $|\delta_{\text{ovo}}| = 2\pi(1/c - 1)$.

Isto resulta uma configuração interessante para o estudo da detecção quântica da conicidade, uma vez que antes tínhamos o detector numa região $\mathcal{V}^-$ envolto por uma região com um intervalo angular reduzido $\mathcal{V}^+$ pelo deficit δ . Na nova configuração temos um detector na região com menor intervalo angular $\mathcal{V}^-$, medindo a conicidade da região $\mathcal{V}^-$ que possui um intervalo angular maior. Agora, o “deficit” está junto ao detector.

A princípio, note na figura (25) que a função resposta para $c < 1$ possui magnitude menor que a função resposta do caso $c = 1$. No gráfico foi considerada a condição de contorno de suavidade. De modo complementar a essa análise, a dependência da função resposta por $0 < c < 1$ é explicitada pela figura (26).

5 Considerações finais

Em síntese, este estudo revelou que o detector de Unruh-DeWitt mantém a sensibilidade à conicidade e às condições de contorno impostas no campo escalar, mesmo na ausência do efeito local da conicidade e quando a superfície onde as condições de contorno são aplicadas está além do *light cross* do detector. A análise da influência das condições de contorno evidenciou que o detector permanece sensível à conicidade para diferentes conjuntos de condições auto-adjuntas, embora a escala e os valores da função resposta possam variar.

Como foi explicado no texto, as condições de contorno sobre a superfície singular dizem respeito sobre a interação singularidade-campo, mesmo sob a imposição de condições de contorno auto-adjuntas para definir uma dinâmica adequada, é notável a capacidade do detector em perceber tal interação, influenciando diretamente sua função resposta. Adicionalmente, a variação na conicidade modifica o estado do vácuo global $|0\rangle$, indicando que o detector registra a variação da conicidade devido a variação no estado de vácuo. De maneira análoga, variações nas condições de contorno alteram os modos do campo escalar e assim mudam o estado de vácuo.

Ao permitir a interação clássica no limite $R_1 \rightarrow 0$ com $\Delta\tau = 1$, observamos um aumento expressivo na sensibilidade do detector à conicidade. Essa constatação ressalta a importância da configuração do espaço-tempo estudado, pois a sutileza da detecção quântica da conicidade não seria evidenciada ou percebida de modo contrário. Compreender não apenas o impacto das condições de contorno, mas também a influência da interação singularidade-campo na resposta do detector de Unruh-DeWitt contribuem significativamente para a compreensão da dinâmica do detector e enriquecem a análise da Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos.

Alguns desdobramentos e futuros estudos merecem destaque. Este trabalho concentrou-se, por questões de simplicidade, em condições de contorno auto-adjuntas representadas por $K = A_\beta$ diagonal. No entanto, há numerosos outros tipos de condições de contorno auto-adjuntas, sem modos ligados, que descrevem uma dinâmica adequada. Explorar essas diferentes condições de contorno seria uma extensão valiosa para compreender melhor a influência delas no comportamento do detector de Unruh-DeWitt.

Além disso, uma análise do fluxo de energia do campo escalar no espaço de interesse para diferentes condições de contorno seria um desdobramento intrigante. Isso permitiria investigar a interação singularidade-campo em termos quantitativos da energia do campo.

Referências

- Ahlén, O. (2016). Global Iwasawa-decomposition of $SL(n, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. *arXiv preprint arXiv:1609.06621*.
- Birrell, N. and Davies, P. (1982). *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press.
- Cong, W. (2021). *Quantum Probing of Curved Spacetime*. PhD thesis, University of Waterloo.
- Cong, W., Bičák, J., Kubizňák, D., and Mann, R. B. (2021). Quantum detection of conicity. *Physics Letters B*, 820:136482.
- Conroy, A. (2022). Unruh-dewitt detectors in cosmological spacetimes. *Physical Review D*, 105(12).
- de Oliveira, S. R. (1986). Soluções das equações de einstein com simetria axial e singularidades cônicas e essenciais. *Tese de Mestrado. Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, departamento de Física*.
- Everitt, W. and Zettl, A. (1986). Sturm-liouville differential operators in direct sum spaces. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 16(3):497 – 516.
- Helliwell, T. M. and Konkowski, D. A. (1987). Cosmic strings: Gravitation without local curvature. *American Journal of Physics*, 55(5):401–407.
- Ishibashi, A. and Wald, R. M. (2003). Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes: II. general analysis of prescriptions for dynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 20(16):3815–3826.
- Israel, W. (1966). Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento B Serie*, 44(1):1–14.
- Jensen, B. and Soleng, H. H. (1992). General-relativistic model of a spinning cosmic string. *Phys. Rev. D*, 45:3528–3533.
- Mars, M. and Senovilla, J. M. (1993). Geometry of general hypersurfaces in spacetime: junction conditions. *Classical and Quantum Gravity*, 10(9):1865.
- Nunes, A., Rodrigues, F., and Silva, J. L. (2003). Operadores de criação e aniquilação no espaço de fock.

- Oliveira, E. A. B. (2022). *Vacuum energy in modern cosmology: an analysis of quantum field theory in curved spaces and its application to cosmological spacetimes*. PhD thesis, Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Parker, L. and Toms, D. (2009). *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- Pitelli, J. P. (2023). Notas de aula: Teoria quântica de campos em espaços curvos.
- Poisson, E. (2004). *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press.
- Sakurai, J. J. and Napolitano, J. (2013). *Mecânica Quântica Moderna*. Bookman, 2 edition.
- Sánchez, M. (2022). Globally hyperbolic spacetimes: slicings, boundaries and counterexamples. *General Relativity and Gravitation*, 54(10):124.
- Schwartz, M. D. (2014). *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge university press.
- Souto, F. F. (2019). *Problema de Sturm-Liouville em Multi-Intervalos e o Espalhamento Quântico em Superfícies Não Regulares*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, IMECC.
- Wald, R. M. (1980). Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times. *Mathematical Physics*, 21:2802–2805.
- Wang, A., Sun, J., and Zettl, A. (2007). Two-interval sturm-liouville operators in modified hilbert spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328(1):390–399.
- Zettl, A. (2005). *Sturm-Liouville theory*. American Mathematical Society.
- Zimmermann, W. (1958). On the bound state problem in quantum field theory. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 10(4):597–614.