



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

Faculdade de Engenharia Mecânica

**VITOR HUGO LOPES COSTA LIMA**

**Otimização Topológica Evolucionária de  
Mecanismos Flexíveis Atuados por Fluido**

Campinas

2024

VITOR HUGO LOPES COSTA LIMA

# Otimização Topológica Evolucionária de Mecanismos Flexíveis Atuados por Fluido

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO DEFENDIDA PELO ALUNO VITOR HUGO LOPES COSTA LIMA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RENATO PAVANELLO.

Campinas

2024

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

L628o Lima, Vitor Hugo Lopes Costa, 1998-  
Otimização topológica evolucionária de mecanismos flexíveis atuados por fluido / Vitor Hugo Lopes Costa Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Renato Pavanello.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Otimização estrutural. 2. Otimização topológica. 3. Pressão hidrostática.  
I. Pavanello, Renato, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** Evolutionary topology optimization of fluid-actuated compliant mechanism

**Palavras-chave em inglês:**

Structural optimization

Topology optimization

Hydrostatic pressure

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

**Titulação:** Mestre em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Renato Pavanello [Orientador]

William Martins Vicente

Hugo Luiz Oliveira

**Data de defesa:** 08-03-2024

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-5447-9841>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4951857675676381>

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO**

# **Otimização Topológica Evolucionária de Mecanismos Flexíveis Atuados por Fluido**

Autor: Vitor Hugo Lopes Costa Lima

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

**Prof. Dr. Renato Pavanello**  
DMC/FEM/UNICAMP

**Prof. Dr. William Martins Vicente**  
FEAGRI/UNICAMP

**Prof. Dr. Hugo Luiz Oliveira**  
DES/FECFAU/UNICAMP

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 08 de Março de 2024

## **DEDICATÓRIA**

Dedico esse trabalho à minha família: minha mãe, Danielly, e minha avó, Rosangela, que são minha principal base; meus irmãos, Jéssica, Bárbara, João Pedro e Isabelly; minha tia e madrinha, Débora. Dedico também esse trabalho à minha sobrinha Alice, que acaba de vir ao mundo.

Dedico aos meus amigos do Ceará que apesar de poucos se provaram companheiros pra vida: Sandro, Dayane e Rahysa.

Dedico também aos meus amigos/família da Moradia Estudantil que apesar dos seus problemas pessoais, conseguiram iluminar essa fase da minha vida: David, Andria, Mateus, Patrick e Carlos. Incluindo meus parceiros de festas Tom e Zeliane.

Dedico esse trabalho aos estudantes que ocuparam o Ciclo Básico da Unicamp nos anos 80 e foram responsáveis pela criação da Moradia Estudantil. A moras é um ambiente de lutas que me permitiu fazer e concluir o mestrado em uma cidade de alto custo de vida como Campinas com uma bolsa insuficiente. Como uma parte fundamental do que representa a Moradia Estudantil, também dedico esse trabalho à Viviane, doutoranda e mãe, que me recebeu em sua casa quando cheguei em Campinas.

Dedico esse trabalho também aos meus amigos e colegas do LTM pela companhia nessa vida de pesquisador e o café do dia-a-dia, principalmente Claudia, Daniel e Heitor, que também se mostram grandes companheiros fora do ambiente de pesquisa. Ao professor, orientador e companheiro, Renato Pavanello, por conseguir reunir um time de pessoas tão legais e por me dar oportunidades que eu não encontraria em outro lugar.

Também dedico à todos os camaradas do Coletivo Dínamo de Engenharia Popular que me mostraram que a engenharia também é um lugar de luta por mudanças na sociedade.

## **AGRADECIMENTOS**

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Agradeço à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), projeto 2013/08293-7. Aos colegas do grupo de pesquisa: Claudia Madrid que auxiliou na implementação dos primeiros mecanismos flexíveis; Daniel Cunha e Heitor Lopes que sugeriram e contribuíram para o desenvolvimento do VFM; Breno Vincenzo que forneceu o código *floodfill* para identificar os elementos de fluido. Ao professor Renato Pavanello que foi um excelente orientador e permitiu um desenvolvimento satisfatório do trabalho.

*Eu pensei  
Que quando eu morrer  
Vou acordar para o tempo  
E para o tempo parar  
Um século um mês  
Três vidas e mais  
Um passo pra trás?  
Por que será?  
Vou pensar  
(O Vento, Los Hermanos)*

## RESUMO

Mecanismos flexíveis (*Compliant Mechanism* - CMs) são mecanismos que transmitem movimento através de pura deformação, não havendo juntas entre seus membros. Por conta disso, são mecanismos muito eficientes e possuem diversas aplicações onde é necessária precisão. O uso de otimização topológica é uma das maneiras de se encontrar configurações ótimas para esses mecanismos. Isto posto, nos últimos anos houve um crescimento de trabalhos focados em otimização topológica de CMs. Contudo, ainda há poucos trabalhos abordando a otimização de CMs atuados por pressão (*Pressure-actuated Compliant Mechanisms* - Pa-CMs), um campo que possui aplicações principalmente no desenvolvimento de *soft robots*. Por isso, esse trabalho visa implementar a otimização topológica de Pa-CMs usando o método *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO), um método discreto de otimização topológica, onde a fronteira fluido-estrutura é bem definida. Foi feita a implementação do método BESO para otimizar Pa-CMs, levando em conta a carga que nesse problema é dependente da topologia. O método conseguiu otimizar seis problemas de Pa-CMs, onde cada um obteve comportamentos diferentes. Visto essa diferença entre os mecanismos, também foram feitos testes variando os parâmetros do BESO, testes com inclusão de regiões fora do domínio de projeto e testes com diferentes geometrias iniciais como alternativa à topologia cheia. Com isso, pôde-se determinar que o método BESO em Pa-CMs é muito dependente das variáveis de entrada e para muitos mecanismos apresenta um comportamento instável. Com o objetivo de mitigar instabilidades relacionada à variação da carga, um método baseado em fluxos virtuais, o *Virtual Flux Method* (VFM), para problemas de barreiras foi proposto. O método é capaz de impedir regiões de fluido de se conectar com regiões de vazio. O VFM mostrou um bom potencial de aplicação para esse tipo de problema.

**Palavras-chave:** BESO, *Compliant Mechanisms*, Carga dependente, Atuado por pressão, Fluxos Virtuais.

## ABSTRACT

Compliant mechanisms (CMs) are mechanisms that transmit movement through pure strain, with no joints among their components. As a result, they are highly efficient mechanisms and have various applications, where precision is required. The use of topology optimization is one of the ways to find optimum configurations for these mechanisms. Thus, in the last years, there has been a growth in works with CM topology optimization. However, there are still few works addressing the optimization of pressure-actuated CMs (Pa-CMs), a field with many applications, especially in the development of soft robots. Therefore, this work aims to implement the topology optimization of Pa-CMs using the Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method, a discreet topology optimization method, which in this problem is topology dependent. The method successfully optimized six Pa-CM problems, each exhibiting different behaviors. Because of this difference between the mechanisms, tests varying the BESO parameters were conducted, including non-design domain regions, and testing with different starting geometries as an alternative to full topology. Hence, it was possible to determine that the BESO method for Pa-CMs is highly dependent on the input variables and presents an unstable behavior for many mechanisms. Aiming to mitigate instabilities related to load changes, a method based on virtual fluxes, the Virtual Flux Method (VFM), for barrier problems was proposed. The method is capable of preventing the fluid regions from connecting with void areas. The VFM showed a good potential for application in these types of problems.

**Keywords:** BESO, Compliant Mechanisms, Dependent load, Pressure-actuated, Virtual Fluxes.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1 – Padrão de “tabuleiro de xadrez” em uma estrutura otimizada (HUANG; XIE, 2010). . . . .	39
Figura 3.2 – Ilustração do raio do filtro de sensibilidade (HUANG; XIE, 2010). . . . .	40
Figura 4.1 – Condições de contorno para estrutura genérica de um CM. . . . .	45
Figura 4.2 – Condições de contorno para estrutura para cálculo do $SE$ . . . . .	46
Figura 4.3 – Fluxograma do método BESO para CMs usando função objetivo $GA/SE$ . . . . .	49
Figura 4.4 – Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo inversor. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria. . . . .	50
Figura 4.5 – Topologia final do mecanismo inversor com função objetivo $GA/SE$ em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em $10^4$ vezes). . . . .	51
Figura 4.6 – Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor usando função objetivo $GA/SE$ . . . . .	51
Figura 4.7 – Evolução das funções $GA$ e $SE$ durante otimização topológica do inversor. . . . .	52
Figura 4.8 – Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo pinça. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria. . . . .	53
Figura 4.9 – Topologia final do mecanismo pinça com função objetivo $GA/SE$ em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em $2 \times 10^6$ vezes). . . . .	54
Figura 4.10–Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça usando função objetivo $GA/SE$ . . . . .	55
Figura 4.11–Evolução das funções $GA$ e $SE$ durante otimização topológica do mecanismo pinça. . . . .	55
Figura 4.12–Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo pinça invertido. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria. . . . .	56
Figura 4.13–Topologia final do mecanismo pinça invertido com função objetivo $GA/SE$ em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em 60 vezes). . . . .	57

Figura 4.14–Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça invertido usando função objetivo $GA/SE$ . . . . .	57
Figura 4.15–Evolução das funções $GA$ e $SE$ durante otimização topológica do mecanismo pinça invertido. . . . .	58
Figura 4.16–Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo <i>crunching</i> . (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria. . . . .	58
Figura 4.17–Topologia final do mecanismo <i>crunching</i> com função objetivo $GA/SE$ em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em $10^4$ vezes). . . . .	59
Figura 4.18–Evolução da otimização topológica do mecanismo <i>crunching</i> usando função objetivo $GA/SE$ . . . . .	60
Figura 4.19–Evolução das funções $GA$ e $SE$ durante otimização topológica do mecanismo <i>crunching</i> . . . . .	60
Figura 4.20–Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo inversor com 2 saídas. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria. . . . .	61
Figura 4.21–Topologia final do mecanismo inversor com 2 saídas com função objetivo $GA/SE$ em 25% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em $3 \times 10^6$ vezes). . . . .	61
Figura 4.22–Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor com 2 saídas usando função objetivo $GA/SE$ . . . . .	62
Figura 4.23–Evolução das funções $GA$ e $SE$ durante otimização topológica do mecanismo inversor com 2 saídas. . . . .	63
Figura 4.24–Fluxograma do método BESO para CMs usando função objetivo $MSE/SE$ . . . . .	67
Figura 4.25–Topologia final do mecanismo inversor com função objetivo $MSE/SE$ em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em $10^7$ vezes). . . . .	68
Figura 4.26–Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor usando função objetivo $MSE/SE$ . . . . .	69
Figura 4.27–Evolução das funções $SE$ e $MSE$ durante otimização topológica do mecanismo inversor. . . . .	69

Figura 4.28–Topologia final do mecanismo pinça com função objetivo $MSE/SE$ em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em $2 \times 10^6$ vezes). . . . .	70
Figura 4.29–Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça usando função objetivo $MSE/SE$ . . . . .	71
Figura 4.30–Evolução das funções $SE$ e $MSE$ durante otimização topológica do mecanismo pinça. . . . .	71
Figura 4.31–Topologia final do mecanismo pinça invertido com função objetivo $MSE/SE$ em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em 30 vezes). . . . .	72
Figura 4.32–Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça invertido usando função objetivo $MSE/SE$ . . . . .	73
Figura 4.33–Evolução das funções $SE$ e $MSE$ durante otimização topológica do mecanismo pinça invertido. . . . .	73
Figura 4.34–Topologia final do mecanismo <i>crunching</i> com função objetivo $MSE/SE$ em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em $10^7$ vezes). . . . .	74
Figura 4.35–Evolução da otimização topológica do mecanismo <i>crunching</i> usando função objetivo $MSE/SE$ . . . . .	74
Figura 4.36–Evolução das funções $SE$ e $MSE$ durante otimização topológica do mecanismo <i>crunching</i> . . . . .	75
Figura 5.1 – Pa-CM arbitrário: domínios e condições de contorno. (a) Pressão hidrostática por fluido incompressível. (b) Pressão equivalente aplicada diretamente no sólido. . . . .	76
Figura 5.2 – Identificação de elementos de fluido na topologia. (a) No início, a carga é aplicada em $S_{fs}$ , em magenta, ou seja, $S_{fs} = S_p$ . (b) A medida que elementos vazios em contato com $S_p$ se formam, $\Omega_f$ e $S_{fs}$ são atualizados. (c) Região de vazio que entrou em contato com $S_p$ , se tornou região de fluido. . . . .	77
Figura 5.3 – Variação linear da carga, $\Delta f$ para remoção de um elemento. (a) Iteração antes da remoção de um elemento sólido. (b) Iteração depois da remoção de um elemento sólido. (c) Aproximação de $\Delta f$ baseada na conversão de um elemento sólido para um elemento fluido. . . . .	78

Figura 5.4 – Fluxograma do método BESO para Pa-CMs. . . . .	80
Figura 5.5 – Condições de contorno do mecanismo pinça atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização. . . . .	81
Figura 5.6 – Resultados da otimização do mecanismo pinça atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (ampliado em 5 vezes). . . . .	82
Figura 5.7 – Topologia do mecanismo pinça de <a href="#">Kumar e Langelaar (2022)</a> . . . . .	83
Figura 5.8 – Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça atuado por pressão. . . . .	84
Figura 5.9 – Evolução das funções $SE$ e $MSE$ durante otimização topológica do mecanismo pinça atuado por pressão. . . . .	84
Figura 5.10–Condições de contorno do mecanismo inversor atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização. . . . .	85
Figura 5.11–Resultados da otimização do mecanismo inversor atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (ampliado em 10 vezes). . . . .	86
Figura 5.12–Topologia do mecanismo inversor de <a href="#">Kumar e Langelaar (2022)</a> . . . . .	86
Figura 5.13–Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor atuado por pressão. . . . .	87
Figura 5.14–Evolução das funções $SE$ e $MSE$ durante otimização topológica do mecanismo inversor atuado por pressão. . . . .	87
Figura 5.15–Condições de contorno do mecanismo <i>contractor</i> atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização. . . . .	88
Figura 5.16–Resultados da otimização do mecanismo <i>contractor</i> atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (ampliado em 20 vezes). . . . .	89
Figura 5.17–Topologia do mecanismo <i>contractor</i> de <a href="#">Kumar e Langelaar (2022)</a> . . . . .	89
Figura 5.18–Evolução da otimização topológica do mecanismo <i>contractor</i> atuado por pressão. . . . .	90
Figura 5.19–Evolução das funções $SE$ e $MSE$ durante otimização topológica do mecanismo <i>contractor</i> atuado por pressão. . . . .	91

Figura 5.20–Condições de contorno do mecanismo esticador atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização. . . . .	92
Figura 5.21–Resultados da otimização do mecanismo esticador atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de $1 \times 10^{-5}$ Pa em azul (ampliado em 100 vezes). . . . .	93
Figura 5.22–Topologia do mecanismo esticador de <a href="#">Panganiban et al. (2010)</a> . . . . .	93
Figura 5.23–Evolução da otimização topológica do mecanismo esticador atuado por pressão. . . . .	94
Figura 5.24–Evolução das funções <i>SE</i> e <i>MSE</i> durante otimização topológica do mecanismo esticador atuado por pressão. . . . .	94
Figura 5.25–Condições de contorno do mecanismo dobrador atuado por pressão. . . . .	95
Figura 5.26–Resultados da otimização do mecanismo dobrador atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1 bar em azul (reduzido em 10 vezes). . . . .	96
Figura 5.27–Topologia do mecanismo dobrador de <a href="#">De Souza e Silva (2020)</a> . . . . .	96
Figura 5.28–Evolução da otimização topológica do mecanismo dobrador atuado por pressão. . . . .	97
Figura 5.29–Evolução das funções <i>SE</i> e <i>MSE</i> durante otimização topológica do mecanismo dobrador atuado por pressão. . . . .	97
Figura 5.30–Condições de contorno do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização. . . . .	98
Figura 5.31–Resultados da otimização do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1 bar em azul (ampliado em 10 vezes). . . . .	98
Figura 5.32–Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão. . . . .	100
Figura 5.33–Evolução das funções <i>SE</i> e <i>MSE</i> durante otimização topológica do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão. . . . .	100

Figura 5.34–Otimização topológica do mecanismo esticador atuado por pressão variando o valor de $\beta$ . (a) $\beta = 0,5$ ( $u_{\text{out}} = 4,017\text{mm}$ ). (b) $\beta = 0,6$ ( $u_{\text{out}} = 0,627\text{mm}$ ). (c) $\beta = 0,7$ ( $u_{\text{out}} = 10,58\text{mm}$ ). (d) $\beta = 0,8$ ( $u_{\text{out}} = 2,327\text{mm}$ ). (e) $\beta = 0,9$ ( $u_{\text{out}} = 1,455\text{mm}$ ). . . . .	103
Figura 5.35–Otimização topológica do mecanismo <i>contractor</i> atuado por pressão variando o valor de $\beta$ . (a) $\beta = 0,5$ ( $u_{\text{out}} = -0,551\text{mm}$ ). (b) $\beta = 0,6$ ( $u_{\text{out}} = 0,223\text{mm}$ ). (c) $\beta = 0,7$ ( $u_{\text{out}} = -0,527\text{mm}$ ). (d) $\beta = 0,8$ ( $u_{\text{out}} = 0,191\text{mm}$ ). (e) $\beta = 0,9$ ( $u_{\text{out}} = 0,876\text{mm}$ ). . . . .	105
Figura 5.36–Regiões fora do domínio de projeto na otimização de Pa-CMs. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor (c) Mecanismo <i>contractor</i> . (d) Mecanismo dobrador (usando malha $180 \times 80$ ). (e) Mecanismo dobrador (usando malha $200 \times 100$ ). (f) Mecanismo inversor de duas saídas. . . . .	107
Figura 5.37–Topologias do mecanismo dobrador de <a href="#">De Souza e Silva (2020)</a> . (a) Resultado usando regiões fora do domínio de projeto como ilustrado na Figura 5.36d. (b) Resultado usando regiões fora do domínio de projeto como ilustrado na Figura 5.36e. . . . .	109
Figura 5.38–Padrão de xadrez para topologia inicial. Detalhe na região $S_{fs}$ . . . . .	111
Figura 5.39–Topologias iniciais testadas na otimização de Pa-CMs. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor. (c) Mecanismo <i>contractor</i> (sugestão 1). (d) Mecanismo <i>contractor</i> (sugestão 2). (e) Mecanismo esticador. (f) Mecanismo dobrador (usando malha $180 \times 80$ ). (g) Mecanismo inversor de duas saídas. . . . .	114
Figura 6.1 – Sistema térmico secundário usado no VTM ( <a href="#">LIU et al., 2015</a> ). (a) Região de vazio enclausurado cria altas temperaturas na estrutura. (b) Quando o vazio está conectado com a borda, o calor gerado é dissipado. . . . .	121
Figura 6.2 – VFM para critério de conectividade ( <a href="#">LOPES et al., 2022</a> ). . . . .	122
Figura 6.3 – Fluxo de calor no sistema térmico, onde temperaturas são definidas em regiões de elementos de fluido e regiões de elementos de vazio. Se considera que a mínima distância permitida $L_{\text{min}}$ está relacionada a um valor de fluxo de calor máximo $q_{\text{max}}$ . . . . .	124
Figura 6.4 – Fluxo de calor uniforme em uma parede infinita de espessura $L_{\text{min}}$ . Aproximação da Figura 6.3 para calcular $q_{\text{max}}$ . . . . .	124
Figura 6.5 – Fluxograma do método BESO para Pa-CMs incluindo o processo do VFM. . . . .	126

Figura 6.6 – Topologias finais usando o VFM. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor. (c) Mecanismo <i>contractor</i> . (d) Mecanismo esticador. (e) Mecanismo dobrador. (f) Mecanismo inversor de duas saídas. . . . .	127
Figura 6.7 – Evolução da topologia do mecanismo inversor usando VFM. (a) Iteração 45. (b) Iteração 55. (c) Iteração 75. . . . .	128
Figura 6.8 – Fluxo de calor na interface de carregamento que se forma no mecanismo inversor usando VFM. . . . .	128
Figura 6.9 – Evolução da otimização topológica do mecanismo <i>contractor</i> sem VFM (a) e com VFM (b), e do mecanismo dobrador sem VFM (c) e com VFM (d). . . . .	130
Figura 6.10–Topologias finais usando o VFM suavizado. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor. (c) Mecanismo <i>contractor</i> . (d) Mecanismo esticador. (e) Mecanismo dobrador. (f) Mecanismo inversor de duas saídas. . . . .	131
Figura 6.11–Evolução da otimização topológica usando o VFM suavizado dos mecanismos (a) <i>contractor</i> , (b) dobrador e (c) inversor de duas saídas. . . . .	133
Figura 8.1 – Representação de elemento finito quadrado bilinear e seus nós (LOPES <i>et al.</i> , 2022). . . . .	143

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Principais funções objetivo para otimização topológica de CMs. . . . .	33
Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do inversor. . . . .	50
Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do mecanismo pinça. . . . .	53
Tabela 4.3 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) da pinça invertida. . . . .	56
Tabela 4.4 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do mecanismo <i>crun-</i> <i>ching</i> . . . . .	59
Tabela 4.5 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do mecanismo inver- sor com 2 saídas. . . . .	61
Tabela 4.6 – Comparação de topologias usando função objetivo $GA/SE$ . . . . .	64
Tabela 5.1 – Comparação das topologias finais para mecanismo pinça atuado por pressão com diferentes valores de $ER$ e $AR$ . . . . .	102
Tabela 5.2 – Comparação do deslocamento na saída das topologias finais para mecanismo pinça atuado por pressão com diferentes valores de $ER$ e $AR$ . . . . .	102
Tabela 5.3 – Comparação dos resultados da otimização para mecanismos com regiões fora do domínio de projeto. . . . .	108
Tabela 5.4 – Comparação dos resultados da otimização iniciando de uma topologia com padrão de xadrez. . . . .	112
Tabela 5.5 – Comparação dos resultados da otimização para mecanismos com outras to- pologias iniciais. . . . .	115
Tabela 6.1 – Comparação do deslocamento na saída para mecanismos otimizados com e sem VFM em mm. . . . .	127
Tabela 6.2 – Deslocamento na saída para mecanismos otimizados com VFM suavizado em mm. . . . .	131

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
CM	Compliant Mechanisms
CFM	Compliant Constant Force Mechanisms
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
QUAD4	Elemento finito bilinear quadrilátero
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEMS	<i>Microelectromechanical Systems</i>
MIST	<i>Moving Iso-Surface Threshold</i>
Pa-CM	<i>Pressure-actuated Compliant Mechanisms</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
RBTO	<i>Reliability-Based Topology Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization method</i>
TO	<i>Topology Optimization</i>
VFM	<i>Virtual Flux Method</i>
VTM	<i>Virtual Temperature Method</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha_e$	Sensibilidade do elemento $e$
$f$	Função objetivo genérica
$x_e$	Pseudo-densidade do elemento $e$
$\alpha^n$	Sensibilidade nodal
$\alpha^f$	Sensibilidade filtrada
$r_{\min}$	Raio mínimo do filtro da sensibilidade
$\Omega$	Região do círculo de raio $r_{\min}$
$\omega_e$	Peso do elemento $e$ no cálculo da sensibilidade de um nó ou do nó no cálculo da sensibilidade elemental filtrada
$\omega_j$	Peso do nó $j$ no cálculo da sensibilidade elemental filtrada
$\beta$	Peso da distribuição de sensibilidade da iteração anterior na média histórica
$M$	Número de elementos conectados a um nó
$L$	Número de nós dentro da região do filtro a partir do centro de um elemento
$x_{\min}$	Pseudo-densidade do elemento vazio, geralmente é 0.001
$E$	Módulo de Elasticidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$p$	Expoente de penalidade da pseudo-densidade
$E_0$	Módulo de Elasticidade do elemento sólido
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global com mola virtual na saída
$\mathbf{K}^*$	Matriz de rigidez global sem mola virtual na saída
$\mathbf{K}_i^0$	Matriz de rigidez do elemento $i$ sólido

$V^k$	Volume da estrutura otimizada na iteração $k$
$V^*$	Volume final
$\alpha_{\text{del}}^{\text{th}}$	Sensibilidade limite de elementos que podem ser removidos
$\alpha_{\text{add}}^{\text{th}}$	Sensibilidade limite de elementos que podem ser adicionados
$\alpha_{\text{th}}$	Sensibilidade limite de elementos para volume da próxima iteração
$ER$	Razão de Evolução
$AR$	Razão de Adição
$\tau$	Tolerância de convergência aceitável
$MSE$	<i>Mutual Strain Energy</i>
$SE$	<i>Strain Energy</i> ou <i>Compliance</i>
$GA$	<i>Geometric Advantage</i>
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange
$MA$	<i>Mechanical Advantage</i>
$ME$	<i>Mechanical Efficiency</i>
$F_{\text{in}}$	Força aplicada na entrada do mecanismo
$F_{\text{out}}$	Força na saída do mecanismo causada por uma resistência mecânica
$u_{ij}$	Deslocamento no ponto $i$ causado pela força aplicada no ponto $j$
$\mathbf{u}_1$	Vetor de deslocamentos causado por força na entrada
$u_{\text{out}}$	Deslocamento de saída do mecanismo flexível
$u_{\text{in}}$	Deslocamento de entrada do mecanismo flexível
$\mathbf{l}_{\text{out}}$	Vetor de força virtual unitária na saída do mecanismo flexível
$\mathbf{l}_{\text{in}}$	Vetor de força virtual unitária na entrada do mecanismo flexível
$k_{\text{out}}$	Mola artificial da saída do mecanismo

$f_2$	Vetor de força aplicada em somente no grau de liberdade de saída para calculo de $SE$
$u_2$	Vetor de deslocamentos causado pela força na saída para cálculo de $SE$
$\delta_{out}$	Vetor de deslocamentos para força virtual na saída
$\delta_{in}$	Vetor de deslocamentos para força virtual na entrada
$u_{out}$	Vetor de deslocamentos para força unitária na saída, equivalente a $\Lambda_{out}$
$\Omega_s$	Domínio de elementos sólidos
$\Omega_f$	Domínio de elementos fluido
$\Omega_v$	Domínio de elementos vazios
$S_u$	Fronteira onde deslocamento nulo
$S_{fs}$	Fronteira fluido-sólido
$S_p$	Fronteira de aplicação da pressão fluídica
$n$	Direção normal à fronteira fluido-sólido
$P_{in}$	Pressão fluídica
$\overline{\Delta f}$	Variação linear da carga para um elemento sólido que vira fluido (forças unitárias)
$\Delta f$	Variação linear da carga para um elemento sólido que vira fluido
$A_e$	Área superficial de elemento
$L_e$	Comprimento das aresta dos elementos da malha
$\Gamma_a$	Contorno da entrada (VFM de conexão)
$\Gamma_b$	Contorno da saída (VFM de conexão)
$q_{min}$	Fluxo de calor mínimo (de ativação)
$A_{max}$	Área máxima (VFM de conexão)

$q_{\max}$	Fluxo de calor máximo
$A_{\min}$	Área mínima (VFM de conexão)
$L_{\min}$	Comprimento mínimo da parede (VFM fluido-vazio)
$L_{\max}$	Comprimento máximo da parede (VFM fluido-vazio)
$k_c$	Constante de condução térmica
$q_e$	Média do fluxo de calor por unidade de área de elemento $e$
$s$	Ponto espacial no domínio de design
$T_n$	Temperatura no nó $n$
$T_{\text{hot}}$	Temperatura quente, aplicada no domínio do fluido
$T_{\text{cool}}$	Temperatura fria, aplicada no domínio do vazio
$\Delta T$	Diferença de temperatura
$\mathbf{q}_e$	Fluxo de calor por unidade de área
$A_t$	Constante para cálculo da média por elemento do fluxo de calor
$B_t$	Constante para cálculo da média por elemento do fluxo de calor
$C_t$	Constante para cálculo da média por elemento do fluxo de calor
$D_t$	Constante para cálculo da média por elemento do fluxo de calor
$c_e$	Constante de ativação da sensibilidade pelo fluxo de calor no elemento $e$
$\alpha_e^c$	Análise de sensibilidade atualizada pelo VFM no elemento $e$
$N$	Função de forma
$\mathbf{B}_t$	Matriz de derivadas das funções de forma
$\mathbf{T}$	Vetor de temperaturas

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>26</b>
1.1	Otimização Topológica	27
1.2	Justificativa	29
1.3	Objetivos	30
1.4	Descrição do Trabalho	31
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>32</b>
2.1	Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis	32
2.2	Otimização Topológica com Carga Dependente	35
2.3	Uso de BESO em Mecanismos Flexíveis	36
<b>3</b>	<b>Método BESO</b>	<b>37</b>
3.1	<i>Soft-kill</i> e Interpolação de Material	37
3.2	Filtro de Sensibilidade	38
3.3	Média Histórica	40
3.4	Critério de Adição e Remoção	41
3.5	Critério de Parada	42
3.6	Passos do BESO	42
<b>4</b>	<b>Otimização de Mecanismos Flexíveis com BESO</b>	<b>44</b>
4.1	Função Objetivo: $GA/SE$	44
4.2	Resultados com função $GA/SE$	48
4.2.1	Mecanismo Inversor	49
4.2.2	Mecanismo Pinça	52
4.2.3	Mecanismo Pinça Invertido	55
4.2.4	Mecanismo <i>Crunching</i>	58
4.2.5	Mecanismo Inversor com Duas Saídas	60
4.2.6	Discussões	63
4.3	Função Objetivo: $MSE/SE$	65
4.4	Resultados com função $MSE/SE$	66
4.4.1	Mecanismo Inversor	67
4.4.2	Mecanismo Pinça	69

4.4.3	Mecanismo Pinça Invertido . . . . .	71
4.4.4	Mecanismo <i>Crunching</i> . . . . .	73
4.4.5	Discussões . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Mecanismos Flexíveis Atuados por Pressão . . . . .</b>	<b>76</b>
5.1	Análise de Sensibilidade com Carga Dependente . . . . .	77
5.1.1	Variação da Carga . . . . .	77
5.1.2	Termo $\frac{\partial MSE}{\partial x_e}$ com carga dependente . . . . .	78
5.1.3	Termo $\frac{\partial SE}{\partial x_e}$ com carga dependente . . . . .	79
5.1.4	Problema de otimização dos Pa-CMs . . . . .	79
5.2	Resultados Numéricos de Exemplos . . . . .	80
5.2.1	Mecanismo Pinça Atuado por Pressão . . . . .	81
5.2.2	Mecanismo Inversor Atuado por Pressão . . . . .	84
5.2.3	Mecanismo <i>Contractor</i> Atuado por Pressão . . . . .	87
5.2.4	Mecanismo Esticador Atuado por Pressão . . . . .	91
5.2.5	Mecanismo Dobrador Atuado por Pressão . . . . .	94
5.2.6	Mecanismo Inversor com 2 Saídas Atuado por Pressão . . . . .	98
5.3	Influência dos parâmetros BESO AR e ER . . . . .	100
5.4	Influência da Média Histórica . . . . .	103
5.5	Influência de Região Fora do Domínio de Projeto . . . . .	106
5.6	Influência da Topologia Inicial . . . . .	110
5.6.1	Topologia Inicial: Malha Xadrez . . . . .	110
5.6.2	Topologia Inicial: Topologias Arbitrárias . . . . .	113
5.7	Discussões . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Método de Fluxos Virtuais para Pa-CMs . . . . .</b>	<b>120</b>
6.1	Temperaturas e Fluxos Virtuais . . . . .	120
6.2	Fluxos Virtuais no Problema Fluido-Estrutura . . . . .	122
6.3	Resultados Numéricos com o VFM . . . . .	126
6.3.1	VFM Suavizado . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>135</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>137</b>

<b>8 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA FLUXO DE CALOR DO ELEMENTO QUADRADO BILINEAR . . . . .</b>	<b>143</b>
--	------------

# 1 INTRODUÇÃO

Devido aos avanços tecnológicos nos últimos anos, os dispositivos de atuação mecânica conseguem substituir o homem em diversas atividades de maneiras cada vez mais eficientes e precisas. Contudo, máquinas compostas de componentes mecânicos necessitam de manutenção constante ou suas juntas e membros acabam se desgastando. Diversos fatores intrínsecos e ambientais, como o desgaste, podem comprometer o resultado final da atividade desenvolvida por essas máquinas. O desenvolvimento e estudo de mecanismos que não estejam sujeitos a esses problemas, como mecanismos flexíveis, são necessários para a contínua evolução desta área. Para isso, a otimização estrutural vem sendo utilizada para conceber estruturas cada vez mais diversas e eficientes.

*Compliant Mechanisms* (CM), ou Mecanismos Flexíveis, são mecanismos que transmitem deslocamento quando alguma excitação de entrada (de origem mecânica, térmica, elétrica, eletromagnética, entre outros) é aplicada. Esses mecanismos imitam movimentos e características de mecanismos encontrados na própria natureza, como asas de abelhas, ramos de árvores, peixes e seres unicelulares (HOWELL, 2001). Diferente de outros mecanismos, os CMs não possuem nenhuma junção de dobradiça ou partes deslizantes, seu movimento é governado majoritariamente devido a deformação localizada de juntas flexíveis. Além disso, CMs possuem como vantagens baixo custo de fabricação, boa precisão, folgas e desgaste reduzidos que trazem redução de peças de montagem, maior confiabilidade, menos peso e menor necessidade de manutenção (HOWELL *et al.*, 2013). O crescente desenvolvimento dos CMs e de tecnologias gerais, como novos materiais e melhora de ferramentas computacionais para análise, tem proporcionado um aumento de aplicações de CMs nas mais diversas áreas. Dentre algumas aplicações pode-se citar o uso em circuitos elétricos como sistemas microeletromecânicos (*Micro-Electro-Mechanical Systems* - MEMS) e uso em *soft robots* (ZHU *et al.*, 2020). Além de transmitir deslocamento, os CMs também podem atuar como dobradiças de flexão de precisão, amplificadores de força e deslocamento, e microestrutura de metamateriais mecânicos (ZHU *et al.*, 2020).

*Soft robots* são máquinas que realizam movimentos pequenos e precisos, com aplicações em diversas áreas e podem ser constituídos de mecanismos flexíveis (YAP *et al.*, 2016; CHEN *et al.*, 2018). A área de *Soft robotics* é bastante ampla, com exemplos de aplicações

em manipulação e substituição de tecido e órgãos em humanos, manipulação de produtos frágeis, válvulas inteligentes, sistemas micro fluídicos, botões eletromagnéticos e equipamentos cirúrgicos. Eles podem ser atuados por temperatura, pH, luz, eletromagnetismo, cabos, *shape memory alloys*, eletricidade ou por fluidos (hidráulicos e pneumáticos) (YAP *et al.*, 2016; ZOLFAGHARIAN *et al.*, 2016; CHEN *et al.*, 2018; CAASENBROOD *et al.*, 2020; EL-ATAB *et al.*, 2020; PINSKIER *et al.*, 2022). A atuação por fluidos introduz uma particularidade de CMs, os *Pressure-actuated* CMs (Pa-CM), onde ao invés de ser considerada uma força atuadora pontual, é considerado a pressão de um fluido atuando sobre uma superfície do CM (KUMAR *et al.*, 2020; KUMAR; LANGELAAR, 2021; KUMAR; LANGELAAR, 2022). El-Atab *et al.* (2020) cita que *soft robots* atuados por fluidos têm recebido muita atenção ultimamente, visto que conseguem gerar uma grande força mesmo com peso reduzido. Esse tipo de atuação também visa imitar mecanismos encontrados na natureza, como minhocas, polvos e plantas.

## 1.1 Otimização Topológica

O uso de métodos de otimização topológica para o projeto de CMs tem sido amplamente abordado na literatura, em diversos tipos de problemas, aplicações e tipos de mecanismos (ZHU *et al.*, 2020). Otimização topológica (*Topology Optimization* - TO) é um tipo de otimização estrutural que remove e adiciona material dentro de um espaço de projeto de forma a minimizar ou maximizar uma função objetivo, respeitando algumas restrições estruturais impostas no sistema. Esse método de otimização estrutural pode ser implementado usando o MEF (Método dos Elementos Finitos) e foi proposto primeiramente por Bendsøe e Kikuchi (1988) introduzindo o método de homogeneização para problema de otimização de forma. A otimização topológica de CMs pode ser feita por uma abordagem contínua ou uma abordagem *ground structure*. Enquanto o primeiro usa um domínio de projeto contínuo, o método TO com *ground structure* usa uma rede de elementos sólidos como barras e vigas para representar o espaço de soluções possíveis do problema. O uso de TO com CMs é particularmente conveniente na etapa do projeto conceitual do mecanismo, onde mecanismos completamente novos podem ser criados (HOWELL *et al.*, 2013).

A Otimização Topológica pode ser realizada utilizando de diferentes métodos, sendo estes os mais abordados na literatura: SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization method*), Level Set, Homogeneização, ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*). O método BESO, que será usado neste trabalho, é um

método que retira material ineficiente do espaço de projeto, e também acrescenta material em locais vantajosos para a otimização. O método funciona discretizando um espaço contínuo de projeto em elementos de uma malha de forma que elementos individuais possam ser removidos (ou apenas penalizados) e adicionados. O caso cujo os elementos são completamente removidos (BESO *hard-kill*) pode ser ineficiente em certos problemas, por isso também existe a possibilidade de apenas penalizar o elemento indesejável diminuindo seu módulo de elasticidade e tornando um elemento sólido em um “elemento suave” (*soft element*), como ocorre no BESO *soft-kill* (HUANG; XIE, 2010; MADRID, 2016).

O método BESO já foi utilizado em diversos trabalhos de otimização topológica com diferentes tipos de problemas. Picelli *et al.* (2015) realizaram a otimização topológica de estruturas sujeitas a pressões fluídicas. O trabalho utilizou uma abordagem multifísica, criando um sistema fluido-estrutura. O problema de otimização consistiu na minimização da energia de deformação da estrutura sólida. De Almeida e Pavanello (2019) otimizaram a topologia de um dispositivo piezoelétrico e analisaram a influência de diferentes substratos metálicos na eficiência de geração de energia. Cunha (2019) otimizou a estrutura de um mecanismo bioinspirado celular atuado por fluido. Além de considerar um comportamento não linear, o problema também utilizou de uma abordagem multiescala, considerando a distribuição das células na escala macro e a forma de cada célula na escala micro. Chen *et al.* (2019) otimizaram um dobrador flexível (*soft robotic*) atuado por pressão usando material hiperelástico e considerando grandes deformações. Garcez *et al.* (2021) otimizou a topologia de estruturas sujeitas a cargas dependentes utilizando como função objetivo a tensão da estrutura. Lopes *et al.* (2022) propuseram a separação de frequências naturais de uma viga utilizando um método de fluxo de calor virtual como critério de conexão na estrutura, impedindo assim que a estrutura se partisse ou criasse conexões muito finas.

Zhu *et al.* (2020) trazem uma revisão bibliográfica de trabalhos que otimizaram CMs com otimização topológica. Apesar de os Pa-CMs serem brevemente citados no trabalho de Zhu *et al.* (2020), recentemente alguns autores como Cunha (2019), De Souza e Silva (2020), Kumar *et al.* (2020), Kumar e Langelaar (2021), Lu e Tong (2021a), Kumar e Langelaar (2022) e Moscatelli *et al.* (2023) se voltaram para esse tema que não vinha sendo abordado há alguns anos.

## 1.2 Justificativa

No início da década de 2020, nota-se um aumento do número de trabalhos publicados na área de projeto de mecanismos atuados por fluido (DE SOUZA; SILVA, 2020; KUMAR *et al.*, 2020; LU; TONG, 2021a; KUMAR; LANGELAAR, 2021; KUMAR; LANGELAAR, 2022; MOSCATELLI *et al.*, 2023). Seguindo essa tendência, este trabalho visa desenvolver a otimização topológica de Pa-CMs utilizando o método BESO. Apesar de ainda não ter sido utilizado no problema de Pa-CMs, o método BESO pode ser muito conveniente para a otimização de Pa-CMs pois possui grande potencial para encontrar estruturas de CMs (MADRID, 2016). Além disso, o método BESO define muito bem a fronteira entre o fluido e estrutura, característica essa que foi encontrada em apenas um trabalho com otimização topológica de Pa-CMs (LU; TONG, 2021a).

O método BESO abordado na literatura já se mostrou eficiente na otimização de CMs atuados por força pontual, gerando estruturas similares às topologias encontradas usando outros métodos de otimização. Ainda que o BESO seja amplamente estudado na literatura, não existe nenhuma referência o aplicando em Pa-CMs. Além disso, o BESO usado em trabalhos como Im *et al.* (2010), Cho *et al.* (2012), Li *et al.* (2013), Li *et al.* (2014), Huang *et al.* (2014) e Liu *et al.* (2015) foi modificado para que os elementos variassem em pseudo-densidades intermediárias entre vazio e cheio, criando assim um padrão de elementos cinza como nos outros métodos de TO existentes. Por isso, estudos como de Madrid (2016), que considerou a abordagem discreta, devem avançar para trazer novas perspectivas do método BESO, considerando suas vantagens e desvantagens, em diferentes problemas.

Como citado anteriormente, o desenvolvimento de mecanismos flexíveis para construção de *soft robots* tem crescido, e por isso esse trabalho também visa incorporar um método de otimização topológica na síntese de mecanismos flexíveis, para que futuramente possa ser aplicado em mecanismos mais complexos, isto é, considerando materiais e deformações não lineares, além de parâmetros de projeto que possam ser incorporados na otimização. No caso de Chen *et al.* (2019), o método BESO foi utilizado para otimização de um *soft robot* do tipo dobrador, contudo o problema utilizou uma abordagem mais complexa com análise não-linear, e o problema também foi mais específico, onde os vazios que se formam são na verdade câmaras de pressão.

### 1.3 Objetivos

Este trabalho visa implementar a otimização topológica de Pa-CMs usando o método BESO. Para isso a pressão hidrostática será modelada como uma carga distribuída e dependente da topologia da estrutura. Será utilizada uma função objetivo que considere o deslocamento da saída e a rigidez da estrutura.

Adicionalmente, por conta da vantagem de se usar o método BESO, onde a fronteira fluido-estrutura é bem definida, um método para evitar grandes mudanças na estrutura é proposto. Quando elementos de fluido se unem com uma grande região de vazios, mudanças imprevisíveis na topologia ocorrem, o que pode dificultar de se encontrar a topologia ótima do problema. O método para evitar esse problema foi baseado em [Liu \*et al.\* \(2015\)](#) e [Lopes \*et al.\* \(2022\)](#), em que cargas térmicas virtuais são utilizadas para evitar a união de grandes regiões de elementos vazios e elementos de fluido.

Para atingir os objetivos acima enunciados, as seguintes metas específicas são propostas:

- Implementar modelo de elementos finitos e otimização topológica BESO usando linguagem de programação Python.
- Otimizar mecanismos flexíveis como os abordados em [Madrid \(2016\)](#) usando a função objetivo  $GA/SE$  (Vantagem Geométrica / Energia de Deformação).
- Analisar, ajustar, implementar e verificar função objetivo  $MSE/SE$  (Energia de Deformação Mutua (função do deslocamento na saída) / Energia de Deformação Média) para CMs e comparar com mecanismos já implementados usando função objetivo  $GA/SE$ .
- Implementar otimização dos Pa-CMs usando carga distribuída.
- Comparar Pa-CMs otimizados com os resultados encontrados na literatura e verificar influência de alguns parâmetros de entrada.
- Complementar otimização com método de fluxos virtuais e verificar influências do método nas topologias encontradas.

## 1.4 Descrição do Trabalho

Esse trabalho foi dividido em sete capítulos, incluindo este Capítulo 1 onde é feita uma breve introdução do tema abordado. Os próximos capítulos são divididos nos seguintes conteúdos:

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos sobre o uso de Otimização Topológica para CMs. Considerações de carga dependente e destaques de trabalhos que usaram o BESO com CMs também são feitos. No Capítulo 3 é feita uma introdução teórica ao método BESO. No Capítulo 4 é feita uma introdução à modelagem de CMs para otimização topológica e são ilustrados os resultados do BESO com alguns desses mecanismos. No Capítulo 5 é introduzida a modelagem de CMs atuados por uma carga distribuída e como ela é tratada durante a otimização, e são ilustrados os resultados e testes realizados com alguns problemas de Pa-CMs. No Capítulo 6 é proposto o Método de Fluxos Virtuais, e são mostrados os seus resultados e como esse método se comporta dentro da otimização BESO com Pa-CMs. Finalmente, no Capítulo 7 são feitas conclusões e considerações finais do trabalho realizado.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis

[Ananthasuresh et al. \(1994\)](#) é apontado como o primeiro a realizar otimização topológica contínua de CMs usando o método de Homogeneização. [Sigmund \(1997\)](#) realizou a otimização topológica de CMs usando o método SIMP além de impor restrições no deslocamento da saída para controlar a tensão da estrutura. O trabalho também relatou a fabricação e teste dos mecanismos otimizados. [Frecker et al. \(1997\)](#) otimizou o deslocamento de saída usando um mecanismo de pinça como exemplo, e comparou os métodos contínuos e *ground structure*, usando TO com Homogeneização. [Nishiwaki et al. \(1998\)](#) e [Nishiwaki et al. \(2001\)](#) utilizaram o método de Homogeneização para estruturas otimizadas de CMs considerando funções objetivo que relacionam o deslocamento e a flexibilidade da estrutura. Para calcular um novo parâmetro de rigidez, os autores incluem um novo sistema onde o ponto de entrada é restringido e a força atuante é a força de resistência de uma mola virtual na saída. [Bruns e Tortorelli \(2001\)](#) propuseram a otimização de CMs sujeitos a grandes deslocamentos usando SIMP. Para isso, a abordagem linear usada até então foi modificada para uma abordagem que considerasse não-linearidades tanto geométricas quanto do material, que por sua vez foi modelado usando material hiperelástico. Como alternativa das funções objetivo baseadas no deslocamento e energia de deformação da estrutura, [Lau et al. \(2001\)](#) propuseram novas funções objetivo usando o método SIMP, considerando também restrições de deslocamento na entrada e na saída. [Pedersen et al. \(2001\)](#) também realizaram a otimização topológica de mecanismos flexíveis sujeitos a grande deslocamento. A função objetivo usada foi a maximização do deslocamento da saída, contudo a formulação do problema de *path-generation* também foi incluída na função objetivo, onde outros pontos intermediários entre a posição inicial e final da saída também são considerados. [Luo et al. \(2005\)](#) propuseram uma nova função multiobjetivo considerando a maximização do deslocamento e minimização da rigidez. O método de interpolação de material usado foi o RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*). [Luo et al. \(2008\)](#) realizaram uma otimização topológica e de forma através do método *Level Set*, utilizando uma modelagem paramétrica simplificada. [Wang \(2009\)](#) fez uma análise das funções objetivo *Geometric Advantage* e *Mechanical Advantage* pra encontrar estruturas ótimas de mecanismos flexíveis e analisou a influência do uso de molas virtuais na ocorrência de dobradiças flexíveis. Dobradiças flexíveis

são regiões mais finas da estrutura onde ocorrem concentração de tensões devido a flexão localizada. Liu *et al.* (2020) maximizaram o deslocamento de saída ao aplicarem uma mola artificial na saída dos mecanismos usando um método de adaptação que ajusta o valor da mola durante a otimização. A função objetivo usada considera o deslocamento da saída do mecanismo com e sem a mola.

Foi observada uma grande variedade de funções objetivo para otimização de mecanismos flexíveis. O propósito da otimização é maximizar uma função que é diretamente proporcional ao deslocamento de saída do mecanismo. Para garantir uma melhor relação entre o deslocamento da saída e a rigidez da estrutura, muitas vezes uma função de energia de deformação é adicionada à função objetivo. A Tabela 2.1 mostra algumas das principais funções objetivos usadas na literatura.

Tabela 2.1 – Principais funções objetivo para otimização topológica de CMs.

Nº	Função Objetivo
J <sub>1</sub>	max: $MSE$
J <sub>2</sub>	max: $MSE/SE$
J <sub>3</sub>	max: $GA$
J <sub>4</sub>	max: $GA/SE$
J <sub>5</sub>	max: $\lambda MSE - (1 - \lambda)SE$
J <sub>6</sub>	max: $-MA$
J <sub>7</sub>	max: $ME$

A função J<sub>1</sub> é caracterizada pela energia de deformação mútua,  $MSE$  (*Mutual Strain Energy*), que é uma medida de energia calculado usando um ponto de interesse como referência. Por ser calculada usando uma força virtual unitária na saída, o valor dessa função é exatamente o valor do deslocamento na saída. É uma função objetivo muito usada na literatura, pois é a mais simples e funciona muito bem pra otimizações que variam continuamente o valor da variável de projeto (FRECKER *et al.*, 1997; PEDERSEN *et al.*, 2001; CHO *et al.*, 2012; LI, 2014; LIU *et al.*, 2015; DE SOUZA; SILVA, 2020; LIU *et al.*, 2020; LU; TONG, 2021a). A função J<sub>2</sub> adiciona o termo  $SE$  que representa a energia de deformação causada por uma carga, e ela deve ser minimizada na função objetivo. Dessa forma, a função J<sub>2</sub> busca maximizar o deslocamento na saída enquanto tenta manter a rigidez da estrutura, criando uma boa relação entre flexibilidade na saída e rigidez estrutural. Essa função é usada nos principais trabalhos envolvendo otimização topológica de Pa-CMs (NISHIWAKI *et al.*, 1998; NISHIWAKI *et al.*, 2001; CHO *et al.*, 2012; CHEN *et al.*, 2019; KUMAR *et al.*, 2020; KUMAR; LANGELAAR, 2021; KUMAR; LANGELAAR, 2022). A função J<sub>3</sub> busca maximizar a Vantagem Geométrica

( $GA$ , *Geometric Advantage*), que representa uma razão entre o deslocamento no ponto onde a força de entrada é aplicada em relação ao deslocamento de saída ( $GA = u_{out}/u_{in}$ ) (LAU *et al.*, 2001; WANG, 2009; LI, 2014). A função  $J_4$  considera tanto o termo  $GA$  quanto o termo  $SE$ , e cada um desses termos é calculado para um sistema diferente (LI *et al.*, 2013; LI *et al.*, 2014; MADRID, 2016). A função  $J_5$  inclui um termo multiplicador de Lagrange,  $\lambda$ , que deve ser otimizado por uma busca unidimensional para encontrar a melhor relação entre  $MSE$  e  $SE$  (NISHIWAKI *et al.*, 1998; NISHIWAKI *et al.*, 2001; HUANG *et al.*, 2014). A função  $J_6$  é uma função da razão entre as forças de entrada e saída ( $MA = F_{out}/F_{in}$ ), chamada de *Mechanical Advantage*. A força de saída está relacionada a uma mola virtual que representa uma resistência ao deslocamento (SIGMUND, 1997; LAU *et al.*, 2001; WANG, 2009; LI, 2014). E finalmente, a função  $J_7$  é  $sign(GA)MA \times GA$ , onde  $sign(GA)$  é o sentido de  $GA$  (LAU *et al.*, 2001; LI, 2014).

Zhu *et al.* (2020) traz uma revisão bibliográfica bem recente de otimização topológica contínua de CMs. Como os autores mostram, a otimização contínua de CMs com TO tem crescido nos últimos anos, apesar de otimizações com *ground structure* terem um maior número de publicações na área. Zhu *et al.* (2020) discute diferentes formulações, códigos publicados, métodos para problemas de juntas flexíveis, problemas mais abordados na literatura, aplicações de CMs, entre outros temas relevantes para a área. Contudo, o trabalho não faz nenhuma referência ao uso do método BESO com CMs, além de uma passagem muito rápida relacionada a Pa-CMs, visto que essas duas abordagens são pouco apresentadas na literatura. Trabalhos mais recentes sobre otimização topológica de CMs envolvem seleção de material (ACHLEITNER; WEHRLE, 2022), atuação por múltiplas entradas e múltiplas saída (CAI *et al.*, 2023), análises com multimateriais (ZHAN *et al.*, 2021; EMMENDOERFER JR. *et al.*, 2022), mecanismos de flexão de curto-alcance (KOPPEN *et al.*, 2022), desenvolvimento de dispositivos para aplicações médicas (KUMAR *et al.*, 2021b), efeitos de autocontato e contato externo (KUMAR *et al.*, 2021a), desenvolvimento de CMs com força constante na saída dentro de uma faixa de atuação na entrada (LIANG *et al.*, 2023a), otimização em multiescala (LU; TONG, 2021b; LIANG *et al.*, 2023b), mecanismos com percurso de saída definido (REINISCH *et al.*, 2021) e trabalhos com a consideração de carga dependente da topologia, que serão abordados a seguir.

## 2.2 Otimização Topológica com Carga Dependente

[Hammer e Olhoff \(2000\)](#) foi o primeiro trabalho a otimizar estruturas considerando uma atuação com carga de pressão. Esse problema apresenta uma carga dependente da topologia da estrutura, a pressão é distribuída na superfície. Nesse trabalho, a rigidez de uma estrutura foi maximizada usando o método SIMP, que cria regiões de elementos cinza, e por isso foi preciso usar um método para definir os limites da região sólida, onde a pressão é aplicada. [Chen e Kikuchi \(2001\)](#) também utilizaram TO para otimizar uma estrutura sujeita a pressão estática, porém essa carga foi simulada através de uma carga térmica. [Chen et al. \(2001\)](#) apresentaram o método de [Chen e Kikuchi \(2001\)](#) aplicado em um CM, formulando assim um mecanismo flexível atuado por pressão. [Sigmund e Clausen \(2007\)](#) utilizaram o método deslocamento/pressão (u/p) para a análise de elementos finitos e substituíram os elementos vazios que apenas representavam o fluido por elementos de fluido incompressível hidrostático, configurando um sistema multi-físico. [Panganiban et al. \(2010\)](#) otimizaram Pa-CMs aplicando um método fluido-estrutura baseado na formulação de [Sigmund e Clausen \(2007\)](#). [Chen et al. \(2018\)](#) realizaram a otimização topológica de um agarrador flexível atuado por pressão, considerando respostas de contato como pressões de resistência e fricção. [Zhang et al. \(2019\)](#) utilizaram TO para projetar dedos artificiais atuados por pressão considerando multimateriais. [De Souza e Silva \(2020\)](#) otimizaram a estrutura de um *soft robot* usando SIMP com um modelo de acoplamento fluido-estrutura, de forma a maximizar o deslocamento da saída e evitando designs inviáveis para o funcionamento do mecanismo. [Kumar et al. \(2020\)](#) apresentou uma otimização topológica de Pa-CMs com SIMP usando cargas dependentes. O trabalho usou a lei de Darcy, de problemas de porosidade, e um termo de drenagem, que reflete a perda de pressão, para aplicar a pressão em elementos cinza durante a otimização. [Lu e Tong \(2021a\)](#) otimizaram Pa-CMs através do método *iso-surface threshold* (MIST). [Kumar e Langelaar \(2021\)](#) continuaram o trabalho com Pa-CMs em problemas com estruturas 3D e [Kumar e Langelaar \(2022\)](#) aplicaram um método de formulação robusta para evitar conexões inviáveis para a fabricação da estrutura do Pa-CM. [Moscatelli et al. \(2023\)](#) utilizaram uma técnica de propagação de fronteira contínua para determinar os elementos fluidos e vazios (usando apenas uma variável) em problemas de otimização topológica. A carga aplicada foi do tipo deslocamento puro (usando elementos fluidos hidrostáticos incompressíveis), e um dos exemplos abordados foi a otimização topológica de um mecanismo inversor atuado por pressão.

### 2.3 Uso de BESO em Mecanismos Flexíveis

Apesar de poucos, alguns trabalhos já estudaram a performance do método BESO, ou métodos baseados em BESO, na otimização de CMs. [Cho et al. \(2012\)](#) otimizaram a estrutura de CMs atuado por calor. Os autores utilizaram um método baseado no BESO, o *Reliability-Based Topology Optimization* (RBTO), e otimizaram o mecanismo usando dois materiais. [Li et al. \(2013\)](#) realizaram uma otimização topológica baseada no BESO com uma nova função objetivo ( $J_4$ ). Em [Li et al. \(2014\)](#), é dada uma abordagem mais aprofundada do trabalho anterior para a otimização de CMs sem dobradiças de flexão. O método BESO utilizado é uma variação do BESO, onde a pseudo-densidade da variável de projeto atinge valores intermediários entre  $x_{\min}$  e 1. [Li \(2014\)](#) trouxe uma abordagem maior de ambos os trabalhos citados, além de considerar outras funções objetivo com o método baseado no BESO. [Li \(2014\)](#) fez análises da influência da mola artificial e otimização de estruturas não-lineares. [Huang et al. \(2014\)](#) utilizaram o método baseado no BESO de [Li \(2014\)](#) para otimizar CMs com restrições de flexibilidade. [Liu et al. \(2015\)](#) usaram o método BESO de [Li \(2014\)](#) aplicando uma carga e considerando um deslocamento de um nó em duas direções. [Madrid \(2016\)](#) utilizou a abordagem convencional discreta do BESO se baseando em [Li et al. \(2014\)](#). Além disso, o trabalho comparou e analisou a dependência do tamanho da malha (*mesh-dependence*) e a influência de uma topologia inicial com um perfil de *checkerboard pattern* na estrutura otimizada. [Madrid \(2016\)](#) também citou a vantagem em se usar o método BESO para otimização de CMs e o seu potencial uso em problemas de CMs atuados por fluidos. [Liao et al. \(2023\)](#) utilizou o BESO modificado juntamente com um critério de *guide-weight* para decidir a distribuição de material no lugar da análise da sensibilidade, de forma a otimizar estruturas com maior eficiência computacional e maior estabilidade. [Liang et al. \(2023a\)](#) utilizou o BESO modificado para otimização de *Compliant Constant Force Mechanisms* (CFM), que são mecanismos que geram a mesma força na saída usando vários valores de deslocamento na entrada. Nesse trabalho também foram considerados efeitos de não-linearidade.

Dessa forma, este trabalho se insere no estado da arte trazendo mais resultados do BESO no desenvolvimento de CMs, que é pouco abordado na literatura, e também inclui a abordagem de Pa-CMs que tem recebido atenção limitada na literatura. Além disso, uma técnica baseada no VFM (*Virtual Flux Method*) é introduzida para dar mais robustez ao algoritmo e evitar instabilidades relacionadas à evolução da carga dependente.

### 3 MÉTODO BESO

Dentre os métodos evolucionários, destaca-se o método ESO, proposto por [Xie e Steven \(1992\)](#), que consiste em remover elementos ineficientes dentro de um domínio até que uma topologia ótima seja alcançada. O método BESO é uma versão “melhorada” do método ESO, que além de remover elementos também adiciona. Esse método foi proposto por [Yang et al. \(1999\)](#) para otimização de rigidez, buscando-se evitar a convergência precoce para mínimos locais, pois um elemento que pertence à topologia ótima pode retornar ao longo das iterações. Os elementos que devem ser retirados ou adicionados são determinados de acordo com o cálculo da sensibilidade, ou seja, trata-se de um método baseado na análise de sensibilidade. A sensibilidade é a variação da função objetivo em relação a variações nos parâmetros de projeto. Elementos com alta sensibilidade tendem a aumentar a função objetivo, enquanto elementos com baixa sensibilidade tendem a não interferir muito na função objetivo, ou reduzi-la. De acordo com a sensibilidade, caso se queira maximizar ou minimizar a função objetivo, os elementos são retirados ou adicionados. Na otimização topológica com elementos finitos, a sensibilidade é definida para cada elemento da malha como:

$$\alpha_e = \frac{\partial f(x_e)}{\partial x_e} \quad (3.1)$$

sendo  $\alpha_e$  a sensibilidade do elemento  $e$ ,  $x_e$  representa a variável de projeto denominada de pseudo-densidade do elemento  $e$  e  $f(x_e)$  é a função objetivo dependente da topologia. De acordo com o valor de  $\alpha_e$  os elementos mais ineficientes podem ser removidos seguindo um algoritmo de evolução. Caso um elemento sólido possua baixa sensibilidade, ele se torna vazio. Caso seja vazio e apresente alta sensibilidade, então ele se torna sólido.

#### 3.1 *Soft-kill* e Interpolação de Material

O primeiro passo da otimização é discretizar o sistema com uma malha. Cada elemento  $e$  pode ser sólido ou vazio, o que vai indicar a topologia da estrutura. Numericamente, o elemento pode ser totalmente removido, tornando sua matriz de rigidez elemental nula, configurando o método *hard-kill*. Contudo, o uso desse método traz alguns problemas numéricos algébricos, como a conexão por um nó que não pode ser resolvida sem uma aproximação numé-

rica, além disso é impossível iniciar a otimização com um domínio de projeto sem elementos sólidos.

Uma alternativa ao BESO *hard-kill* é apenas diminuir a rigidez do elemento a um valor muito pequeno, criando assim um elemento suave (*soft element*). A justificativa para o uso do método *soft-kill* está baseada no método de interpolação de material com penalização onde pode-se reduzir o elemento a uma pseudo-densidade muito baixa,  $x_{\min}$ , que geralmente possui um valor de 0,001 (HUANG; XIE, 2010). Esse método é amplamente usado em TO e é conhecido como o método SIMP. Para isso, o módulo de elasticidade desses elementos é calculada como:

$$E(x_e) = E_0 x_e^p \quad (3.2)$$

onde  $E_0$  é o módulo de elasticidade do material sólido e  $p$  é o expoente de penalização. Aplicando o modelo SIMP, tem-se o cálculo da matriz de rigidez global ( $\mathbf{K}$ ) como:

$$\mathbf{K} = \sum_e x_e^p \mathbf{K}_e^0 \quad (3.3)$$

sendo  $\mathbf{K}_e^0$  a matriz de rigidez elemental do elemento  $e$  sólido. Neste caso:

$$x_i = \begin{cases} x_{\min} = 0,001 & \text{vazio} \\ 1 & \text{cheio} \end{cases} \quad (3.4)$$

Neste trabalho será utilizado o método *soft-kill* no algoritmo BESO.

### 3.2 Filtro de Sensibilidade

Nesse tipo de otimização estrutural, usando variáveis discretas, é muito comum a estrutura criar padrões de “tabuleiro de xadrez” ou dependência de malha. O padrão “tabuleiro de xadrez”, como ilustrado na Figura 3.1, é caracterizado pela alta alternância entre elementos vazios e sólidos, lembrando um tabuleiro de xadrez. No padrão de tabuleiro de xadrez, surge um problema numérico na avaliação da rigidez do sistema quando são usados elementos finitos com aproximação linear. Já a dependência de malha é um problema onde diferentes tamanhos de malha geram diferentes topologias, e a otimização se torna muito dependente da qualidade da malha utilizada (HUANG; XIE, 2010).

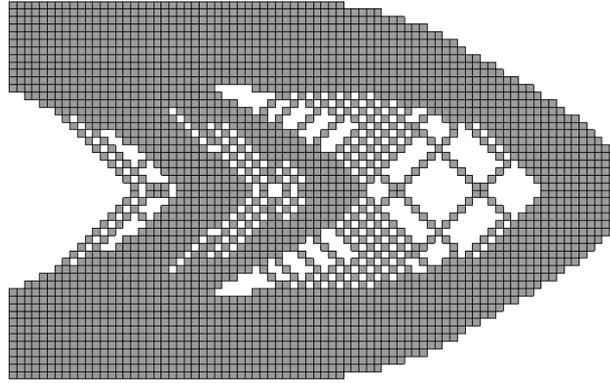


Figura 3.1 – Padrão de “tabuleiro de xadrez” em uma estrutura otimizada (HUANG; XIE, 2010).

Para evitar esse tipo de problema o esquema de filtro da sensibilidade pode ser usado (HUANG; XIE, 2010). O filtro consiste em se calcular a sensibilidade de cada nó ( $\alpha^n$ ), de acordo com a média dos elementos ao seu redor. E em seguida, recalculer a sensibilidade de cada elemento ( $\alpha^e$ ) de acordo com a sensibilidade dos nós que estiverem dentro de um raio ( $r_{\min}$ ). A sensibilidade nodal  $\alpha_j^n$  do nó  $j$  pode ser calculada como:

$$\alpha_j^n = \sum_{e=1}^M \omega_e \alpha_e \quad (3.5)$$

onde  $M$  é o número total de elementos conectados ao nó  $j$  e  $\omega_e$  é o fator de peso do elemento  $e$  que pode ser calculada como na Equação 3.6, onde  $r_{ej}$  é a distância do nó  $j$  para o centro do elemento  $e$ . Como neste trabalho é considerada uma malha regular com elementos bilineares quadrilaterais,  $\omega_e$  sempre será igual a 1, pois todos os nós estão à mesma distância para o centro dos elementos que estão conectados e conseqüentemente o valor de  $r_{ej}$  é constante.

$$\omega_e = \frac{1}{M-1} \left( 1 - \frac{r_{ej}}{\sum_{e=1}^M r_{ej}} \right) \quad (3.6)$$

Para calcular novamente a sensibilidade elemental usando a sensibilidade nodal é preciso considerar todos os nós dentro do raio  $r_{\min}$  a partir do centro do elemento  $e$ , compondo o espaço  $\Omega_e$ , como ilustrado na Figura 3.2. O parâmetro  $r_{\min}$  é definido antes da otimização e é independente da malha utilizada. A sensibilidade do elemento  $e$  é calculada fazendo-se uma média ponderada dos  $K$  nós dentro de  $\Omega_e$ . Quanto mais distante o nó for do centro do elemento  $e$ , menor é o seu peso. A Equação 3.7 mostra o cálculo da sensibilidade filtrada de um elemento  $e$ .

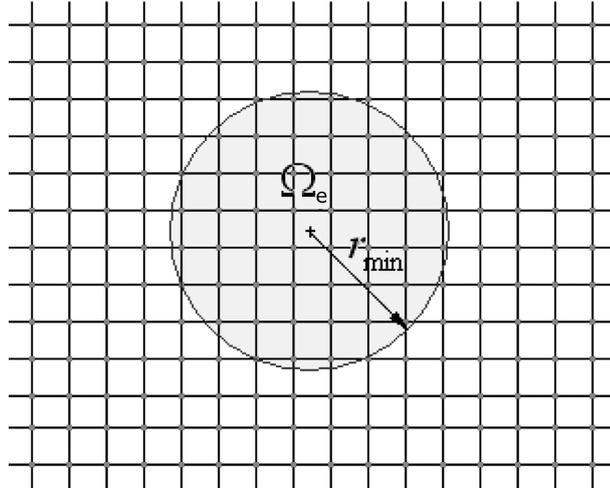


Figura 3.2 – Ilustração do raio do filtro de sensibilidade (HUANG; XIE, 2010).

$$\alpha_e^f = \frac{\sum_{j=1}^K \omega_j \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^K \omega_j} \quad (3.7)$$

A Equação 3.8 mostra o cálculo do peso  $\omega_j$  de cada nó.

$$\omega_j = r_{\min} - r_{ej} \quad (3.8)$$

Esse peso é a diferença de  $r_{\min}$  e o raio do nó  $j$ , logo quanto mais distante do centro do elemento  $e$ , menor seu peso.

### 3.3 Média Histórica

Durante a evolução da topologia, a distribuição da sensibilidade na estrutura pode mudar completamente de acordo com a variação da pseudo-densidade dos elementos, criando assim uma curva de convergência instável devido a grandes mudanças na topologia. Essas instabilidades na otimização podem então convergir em mínimos locais. Uma forma de evitar esse comportamento e seguir uma convergência mais suave da evolução da topologia é usar a média da sensibilidade com valores de iterações anteriores como mostrado na Equação 3.9 (HUANG; XIE, 2007; HUANG; XIE, 2010).

$$\alpha_e^k = \frac{\alpha_e^k + \alpha_e^{k-1}}{2} \quad (3.9)$$

onde o índice  $k$  representa a iteração atual e  $k - 1$  representa a iteração anterior. Outra forma de fazer essa média histórica é aumentar o peso do número de sensibilidade anterior usando um fator de  $\beta$ , como mostrado na Equação 3.10. A Equação 3.10 se torna equivalente à Equação

3.9, quando  $\beta = 0,5$ . Neste trabalho, quando o valor de  $\beta$  não é citado, por padrão a Equação 3.9, ou  $\beta = 0,5$  é utilizado.

$$\alpha_e^k = (1 - \beta)\alpha_e^k + \beta\alpha_e^{k-1} \quad (3.10)$$

### 3.4 Critério de Adição e Remoção

Em otimização topológica, uma condição de restrição de volume geralmente é desejada, onde o volume da topologia final deve atingir um valor igual a  $V^*$ . Para o BESO, no início da topologia o volume  $V_0$  pode ser maior, menor ou igual a  $V^*$ . Para que os elementos sejam adicionados ou removidos, um critério baseado no volume da iteração atual,  $V^k$ , e  $V^*$  deve ser definido. O cálculo do volume da próxima iteração ( $k + 1$ ) é feito de acordo com um parâmetro  $ER$ , que representa a Razão de Evolução, até que a restrição de volume seja alcançada:

$$V_{k+1} = V_k(1 \pm ER) \quad (3.11)$$

Se  $V_{k+1} < V^*$ , então  $ER$  é positivo, mas se  $V_{k+1} > V^*$ , então  $ER$  é negativo. Considerando um problema de otimização onde se deseja maximizar a função objetivo, os elementos com menores sensibilidades serão removidos, ou os elementos com maiores sensibilidades serão adicionados, para que a estrutura atinja o volume da próxima iteração.

Quando  $V_{k+1} = V^*$ , o volume é mantido constante.

Então elementos são removidos se

$$\alpha_e \leq \alpha_{del}^{th} \quad (3.12)$$

Elementos são adicionados se

$$\alpha_e \geq \alpha_{add}^{th} \quad (3.13)$$

Esses parâmetros podem ser calculados de acordo com um  $\alpha^{th}$ , que é a sensibilidade do N-ésimo elemento, contando em ordem decrescente de sensibilidade, onde N é o número de elementos sólidos na iteração atual. Todos os elementos vazios que têm sensibilidade maior que  $\alpha^{th}$  podem ser adicionados, respeitando-se o parâmetro de razão de adição  $AR$  limitado ao valor de  $AR_{max}$ . Se  $AR$  for maior que  $AR_{max}$ , então recebe o valor de  $AR_{max}$ .  $AR_{max}$  é um parâmetro definido para impedir adição de muitos elementos, o que criaria uma grande mudança

na topologia. Tendo então definido o número de elementos vazios que podem ser adicionados, o parâmetro  $\alpha_{\text{add}}^{\text{th}}$  é definido como a menor sensibilidade desses elementos, como um critério de adição. A mesma quantidade de elementos que foram adicionados pelo parâmetro  $AR$  devem ser retirados para que o volume da próxima iteração seja o mesmo definido anteriormente. Então de acordo com o número de elementos que devem ser retirados, é definido o parâmetro  $\alpha_{\text{del}}^{\text{th}}$ , onde todos os elementos sólidos que possuem sensibilidade menor ou igual a  $\alpha_{\text{del}}^{\text{th}}$  podem ser removidos (HUANG; XIE, 2010).

No texto o termo  $AR_{\text{max}}$  será referenciado apenas como  $AR$  para simplificação.

### 3.5 Critério de Parada

Depois que o volume  $V^*$  é atingido, um critério de parada pode ser definido para que a otimização finalize. Para isso é usada a Equação 3.14.

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N f_{k-i+1} - \sum_{i=1}^N f_{k-N-i+1} \right|}{\sum_{i=1}^N f_{k-i+1}} \leq \tau \quad (3.14)$$

Esse critério define que a diferença do somatório da função objetivo das últimas  $N$  iterações e o somatório das  $N$  iterações anteriores, em relação ao somatório das últimas  $N$  iterações, deve ser menor que um parâmetro de tolerância  $\tau$ . Isso indica que otimização converge quando a função objetivo das iterações se tornam muito próximas, não apresentando variações muito grandes dentro de um intervalo de iterações.

### 3.6 Passos do BESO

A estrutura básica da otimização BESO pode ser resumida seguindo os seguintes passos:

1. Definir o domínio de projeto, o método de aproximação baseado em discretização do domínio, que neste trabalho será o método dos elementos finitos, topologia inicial, cargas, condições de contorno e parâmetros do material e da otimização ( $V^*$ ,  $ER$ ,  $AR$  e  $r_{\text{min}}$ ).
2. Avaliar resposta do sistema usando elementos finitos (deslocamento, temperatura, frequência natural, etc.) e realizar a análise de sensibilidade.
3. Filtrar a sensibilidade dos elementos e calcular média histórica.

4. Determinar o volume da próxima iteração pela Equação 3.11, e remover e adicionar elementos utilizando critérios definidos pelas Equações 3.12 e 3.13.
5. Repetir os itens 2 a 4 até que o critério de convergência da Equação 3.14 seja atingido.

## 4 OTIMIZAÇÃO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS COM BESO

Na primeira parte desse trabalho usa-se um carregamento fixo modelado por uma força pontual para projetar mecanismos flexíveis simples. Primeiramente foi usado o método apresentado em Madrid (2016). Em seguida foi utilizada uma outra função objetivo mais convencional que pudesse ser aplicada num problema de carga distribuída e repetido novamente as otimizações com os CMs.

### 4.1 Função Objetivo: $GA/SE$

Em Madrid (2016) a função objetivo utilizada foi  $GA/SE$ . Essa função maximiza a flexibilidade dos mecanismos ( $GA$ ) e minimiza a rigidez ( $SE$ ). A Vantagem Geométrica (*Geometric Advantage*,  $GA$ ), que é dada pela Equação 4.1, representa o fator de transmissão de movimento da entrada para a saída, onde  $u_{out}$  e  $u_{in}$  são os deslocamentos de saída e entrada, respectivamente. Esses deslocamentos podem ser calculados usando cargas virtuais unitárias que funcionam como vetores localizadores, como mostrado na Equações 4.2 e 4.3.  $l_{in}$  e  $l_{out}$  são vetores de força virtual unitária aplicada na entrada e na saída, respectivamente, e  $\mathbf{u}_1$  é o vetor de deslocamentos causado por uma força na entrada. Os vetores de carga apresentam valor unitário apenas no grau de liberdade onde é aplicada a carga e valor nulo nos outros. O sistema de onde é calculado o  $GA$  é ilustrado na Figura 4.1.

$$GA = \frac{u_{out}}{u_{in}} \quad (4.1)$$

$$u_{out} = l_{out}^T \mathbf{u}_1 \quad (4.2)$$

$$u_{in} = l_{in}^T \mathbf{u}_1 \quad (4.3)$$

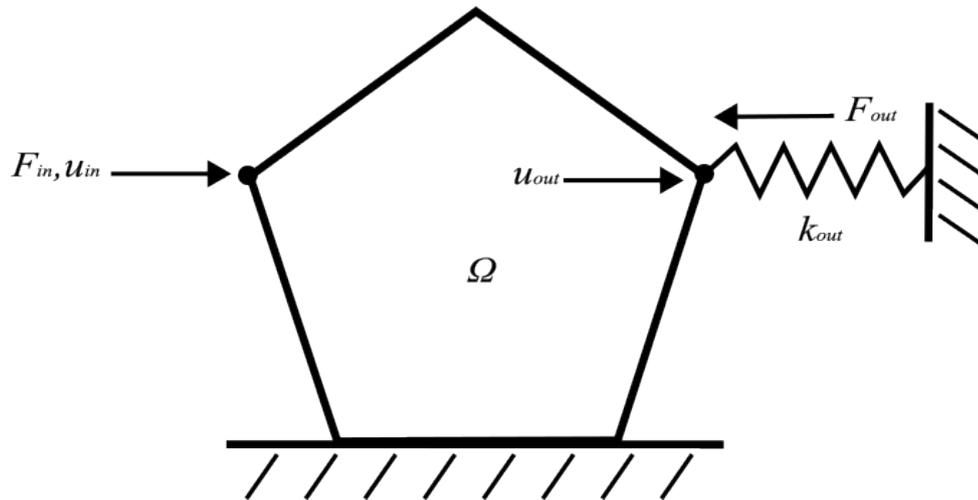


Figura 4.1 – Condições de contorno para estrutura genérica de um CM.

A Figura 4.1 mostra que a força de entrada ( $F_{in}$ ) é aplicada em apenas um grau de liberdade, causando um deslocamento  $u_{in}$ , e o ponto de saída é deslocado num valor  $u_{out}$ . A Figura 4.1 também ilustra uma mola artificial com constante elástica igual a  $k_{out}$ , que gera uma força de reação ( $F_{out}$ ) e representa a rigidez do corpo que está sendo movido pelo mecanismo atuador. Essa constante elástica é adicionada na matriz de rigidez global do sistema,  $\mathbf{K}$ , por meio da Equação 4.4, onde  $i_{out}$  é o grau de liberdade da saída. Esse sistema pode ser modelado usando aproximações numéricas, como por exemplo o Método dos Elementos Finitos (MEF).

$$K(i_{out}, i_{out}) = K(i_{out}, i_{out}) + k_{out} \quad (4.4)$$

A rigidez está relacionada com a energia de deformação (*Strain Energy, SE*) que é dada pela Equação 4.5, onde  $\mathbf{u}_2$  é o vetor de deslocamentos devido a uma força aplicada na saída. A inclusão do termo  $SE$  na função objetivo, evita que o mecanismo se desconecte, uma vez que a rigidez é levada em conta. O vetor  $\mathbf{u}_2$  é calculado pela equação de equilíbrio  $\mathbf{K}^* \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2$ , onde  $\mathbf{f}_2$  é um vetor força com uma força unitária no ponto de aplicação de carga e nulo nos outros pontos. O sistema onde se calcula esse termo é mostrado na Figura 4.2. A força é aplicada somente na saída, e o grau de liberdade da entrada é restrito. Importante destacar que a Equação 4.4 não é usada no cálculo da matriz rigidez da Equação 4.5, logo  $\mathbf{K}^* \neq \mathbf{K}$ .

$$SE = \frac{1}{2} \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_2 \quad (4.5)$$

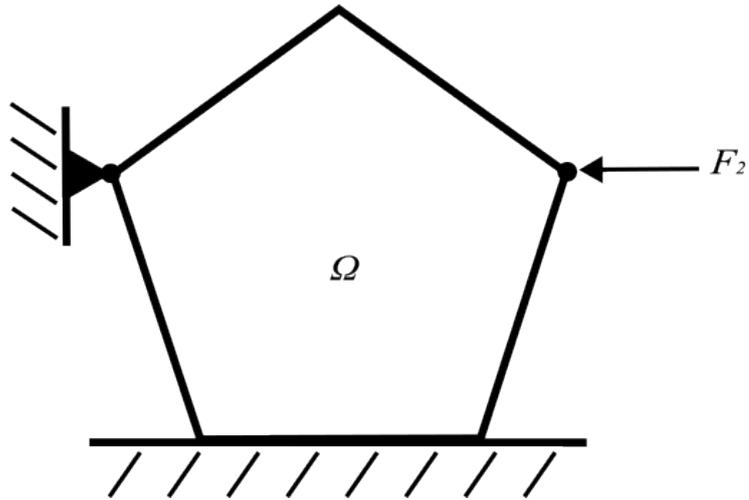


Figura 4.2 – Condições de contorno para estrutura para cálculo do  $SE$ .

O método BESO usado neste trabalho utiliza uma aproximação do material do tipo *soft-kill*, ao invés de remover completamente o elemento ineficiente da topologia, apenas o penaliza diminuindo seu módulo de elasticidade. O elemento sólido é representado por  $x_e = 1$  e o elemento vazio é representado por  $x_e = x_{\min}$ , onde  $x_{\min}$ , neste trabalho, é sempre considerado igual a 0,001, com um parâmetro de penalização  $p = 3$ . Além disso, é considerada uma restrição de volume, onde o volume objetivo da otimização é  $V^*$ . Utilizando as duas variáveis  $GA$  e  $SE$  na função objetivo, o problema de otimização se torna:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize: } f(x_e) = GA/SE \\
 &\text{Sujeito a: } V^* - \sum_{e=1}^N V_e x_e = 0 \\
 &\mathbf{K} \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1 \\
 &\mathbf{K}^* \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2 \\
 &x_e = x_{\min} \text{ ou } 1
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Na análise de sensibilidade,  $\alpha_e$  é calculado derivando a função objetivo do problema de otimização (Equação 4.6) em relação a cada elemento  $x_e$  como mostrado na Equação 4.7.

$$\alpha_e = \frac{\partial f(x_e)}{\partial x_e} = \left( SE \frac{\partial GA}{\partial x_e} - GA \frac{\partial SE}{\partial x_e} \right) / SE^2 \tag{4.7}$$

onde  $\frac{\partial GA}{\partial x_e}$  é:

$$\frac{\partial GA}{\partial x_e} = \left( u_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial x_e} - u_{\text{out}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial x_e} \right) / u_{\text{in}}^2 \tag{4.8}$$

Os termos  $\frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial x_e}$  e  $\frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial x_e}$  podem ser calculados derivando as Equações 4.2 e 4.3. Visto que tanto  $l_{\text{in}}$  quanto  $l_{\text{out}}$  são independentes da topologia, apenas  $\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_e}$  deve ser encontrado.

$$\frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial x_e} = \mathbf{l}_{\text{out}}^T \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_e} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial x_e} = \mathbf{l}_{\text{in}}^T \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_e} \quad (4.10)$$

O vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}_1$  pode ser encontrado derivando a equação de equilíbrio para o sistema da Figura 4.1  $\mathbf{K}\mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1$ . Visto que  $\mathbf{f}_1$  é independente da topologia, então sua derivada é igual a zero. Dessa forma a relação seguinte é encontrada:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u}_1 + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_e} = 0 \quad (4.11)$$

Manipulando a Equação 4.11, o valor de  $\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_e}$  é dado como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_e} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u}_1 \quad (4.12)$$

Substituindo a Equação 4.12 nas Equações 4.9 e 4.10:

$$\frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial x_e} = -\mathbf{l}_{\text{out}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u}_1 = -\boldsymbol{\delta}_{\text{out}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u}_1 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial x_e} = -\mathbf{l}_{\text{in}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u}_1 = -\boldsymbol{\delta}_{\text{in}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u}_1 \quad (4.14)$$

onde  $\boldsymbol{\delta}_{\text{out}}$  e  $\boldsymbol{\delta}_{\text{in}}$  são os vetores de deslocamentos para uma força unitária aplicada na saída e na entrada, respectivamente. Vale ressaltar que se a força de entrada,  $F_{\text{in}}$ , for uma força unitária, então  $\boldsymbol{\delta}_{\text{in}} = \mathbf{u}_1$ .

Considerando um elemento de índice  $e$ , sua matriz de rigidez elementar é dada como  $\mathbf{K}_e = x_e^p \mathbf{K}_e^0$ , dessa forma o termo  $\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial x_e}$  se torna:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial x_e} = p x_e^{(p-1)} \mathbf{K}_e^0 \quad (4.15)$$

As Equações 4.13 e 4.14 se tornam as Equações 4.16 e 4.17, respectivamente, para cada pseudo-densidade.

$$\frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial x_e} = \begin{cases} -p \boldsymbol{\delta}_{\text{out},e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_{1,e} & \text{quando: } x_e = 1 \\ -p x_{\text{min}}^{(p-1)} \boldsymbol{\delta}_{\text{out},e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_{1,e} & \text{quando: } x_e = x_{\text{min}} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial x_e} = \begin{cases} -p\delta_{\text{in},e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_{1,e} & \text{quando: } x_e = 1 \\ -px_{\text{min}}^{(p-1)} \delta_{\text{in},e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_{1,e} & \text{quando: } x_e = x_{\text{min}} \end{cases} \quad (4.17)$$

Para calcular  $\frac{\partial SE}{\partial x_e}$ , primeiro considera-se a relação do sistema estático em equilíbrio  $\mathbf{K}^* \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2$ . Dessa forma, tem-se uma relação equivalente a 4.5,  $SE = \frac{1}{2} \mathbf{f}_2^T \mathbf{u}_2$ . Derivando-a tem-se:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_2^T}{\partial x_e} \mathbf{u}_2 + \mathbf{f}_2^T \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_e} \right) \quad (4.18)$$

O vetor força  $\mathbf{f}_2$  é independente da topologia e, portanto,  $\frac{\partial \mathbf{f}_2^T}{\partial x} = 0$ . Dessa forma, a equação é reduzida a:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{f}_2^T \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_e} \right) \quad (4.19)$$

O termo  $\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_e}$  pode ser calculado de forma similar à Equação 4.12:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = -\frac{1}{2} \left( \mathbf{f}_2^T \mathbf{K}^{*-1} \frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial x_e} \mathbf{u}_2 \right) \quad (4.20)$$

E visto que  $\mathbf{f}_2^T \mathbf{K}^{*-1} = \mathbf{u}_2$ :

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_2^T \frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial x_e} \mathbf{u}_2 \quad (4.21)$$

Considerando a interpolação de material, finalmente se chega a  $\frac{\partial SE}{\partial x_e}$  para cada pseudo-densidade. Assim como anteriormente,  $\frac{\partial \mathbf{K}_e^*}{\partial x_e} = px_e^{(p-1)} \mathbf{K}_e^0$ .

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \begin{cases} -\frac{1}{2} p \mathbf{u}_{2,e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_{2,e} & \text{quando: } x_e = 1 \\ -\frac{1}{2} p x_{\text{min}}^{(p-1)} \mathbf{u}_{2,e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_{2,e} & \text{quando: } x_e = x_{\text{min}} \end{cases} \quad (4.22)$$

Dessa forma a análise de sensibilidade pode ser calculada para cada elemento. O cálculo da sensibilidade foi validado comparando com o método de variação finita, que seria o cálculo exaustivo da variação da função objetivo para alteração de cada variável de projeto.

## 4.2 Resultados com função GA/SE

Nesta seção são apresentados os resultados do método de otimização BESO com cinco diferentes problemas de mecanismos flexíveis com uma carga constante e fixa, considerando o esquema ilustrado na Figura 4.3.

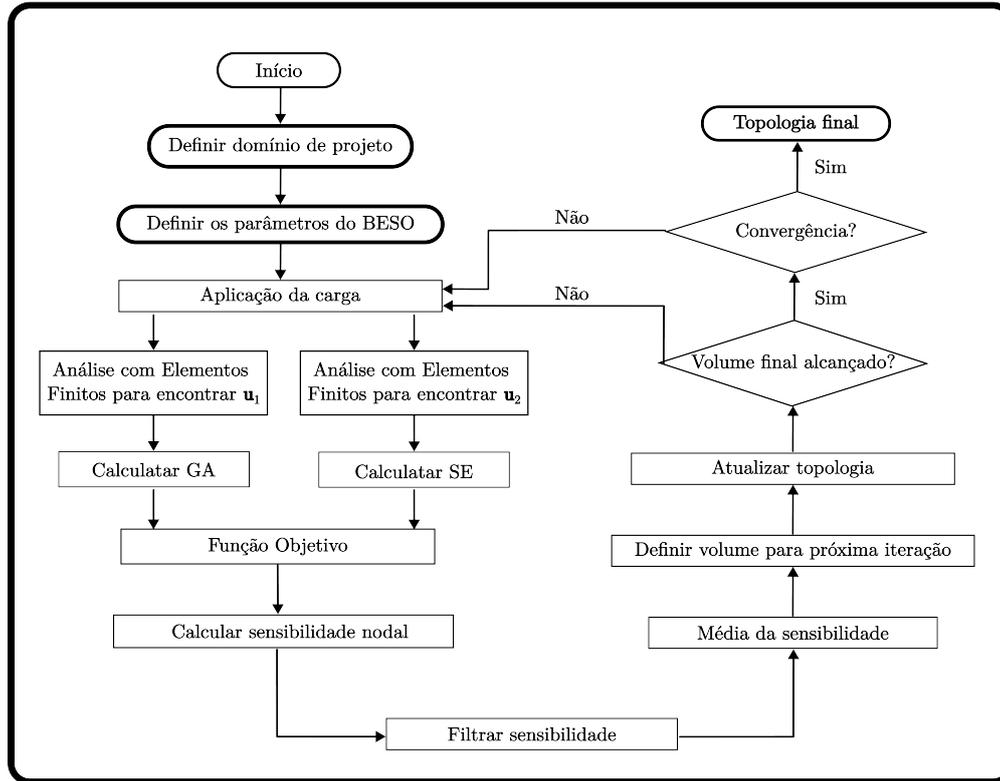


Figura 4.3 – Fluxograma do método BESO para CMs usando função objetivo  $GA/SE$ .

Todos os mecanismos foram implementados considerando simetria. Ou seja, a estrutura foi dividida horizontalmente ao meio, foi considerando apenas metade de cima, e a estrutura foi restringida no sentido  $y$  nos nós dessa divisão. Os elementos utilizados no modelo MEF foram elementos quadriláteros bilineares (QUAD4), considerando estado plano de tensão. Para a convergência, foi utilizado  $N = 5$  e  $\tau = 0,001$ . Tanto a força de entrada,  $F_{in}^i$ , quanto as forças virtuais nos vetores  $l_{out}$  e  $l_{in}$  foram adotadas como valores unitários.

Os programas foram implementados em Python, onde se usou cálculos com MEF e otimização BESO implementados pelo autor deste trabalho. Os resultados da próxima seção e próximos capítulos também foram calculados usando a linguagem Python. Os parâmetros, assim como propriedades dos materiais, dimensões e condições de contorno utilizados nas otimizações foram retirados de [Madrid \(2016\)](#) para se permitir uma comparação.

#### 4.2.1 Mecanismo Inversor

O primeiro mecanismo estudado foi o CM inversor, o mecanismo mais abordado na literatura. Esse mecanismo funciona com um deslocamento na saída em sentido inverso da força que é aplicada na entrada. As condições de contorno no mecanismo inversor estão ilustradas na

Figura 4.4, incluindo a condição de simetria.

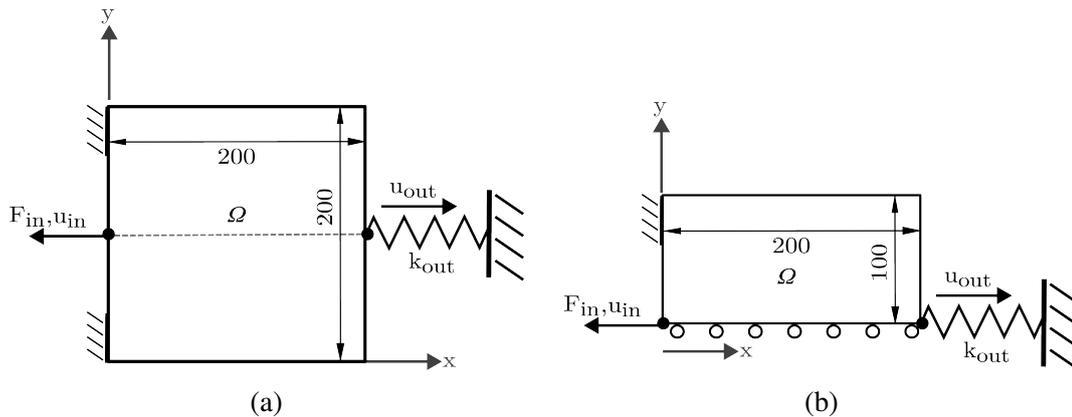


Figura 4.4 – Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo inversor. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria.

O modelo considerou a simetria do domínio de projeto, com uma malha de  $100 \times 50$ , com dimensões de  $200 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ . A estrutura é fixada nas duas direções em 5 nós da malha no canto superior e a condição de simetria ilustrada na Figura 4.4b. A força aplicada na entrada foi no sentido negativo do eixo  $x$ , com um deslocamento esperado no sentido positivo em  $x$  na saída. O material possui um Módulo de Young de  $200 \text{ GPa}$  e um coeficiente de Poisson de  $0,3$ . Outras propriedades são listadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do inversor.

$k_{out}$	0 N/m
Volume inicial	100%
Volume final ( $V^*$ )	20%
Raio mínimo do filtro ( $r_{min}$ )	3mm
Razão de evolução ( $ER$ )	2%
Razão de adição ( $AR$ )	1%

A topologia final do mecanismo otimizado usando a função objetivo  $GA/SE$  é mostrada na Figura 4.5a. A Figura 4.5b mostra o mecanismo com a força aplicada, ilustrando como o movimento de inversão do deslocamento é transmitido da entrada para a saída. A topologia encontrada é similar às topologias encontradas na literatura (SIGMUND, 1997; LUO *et al.*, 2005; LUO *et al.*, 2008; LI, 2014; MADRID, 2016; LIU *et al.*, 2020).

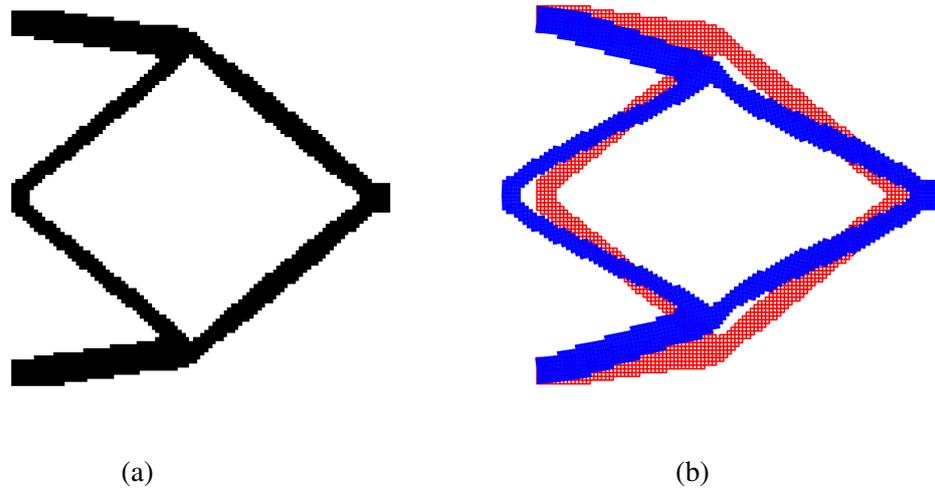


Figura 4.5 – Topologia final do mecanismo inversor com função objetivo  $GA/SE$  em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em  $10^4$  vezes).

A evolução da topologia é mostrada na Figura 4.6, onde é ilustrada a evolução da função objetivo e do volume da estrutura até atingir a convergência. O mecanismo atinge o critério de parada em 97 iterações. É possível ver que a evolução é bem suave, com algumas perturbações quando algum material da topologia que confere maior rigidez é retirado. Importante notar que em certo momento a curva da função objetivo passa a diminuir apesar do objetivo da otimização ser maximizá-la. Isso ocorre pois à medida que material é retirado, é inevitável que a rigidez da estrutura diminua, o que reduz também a função objetivo.

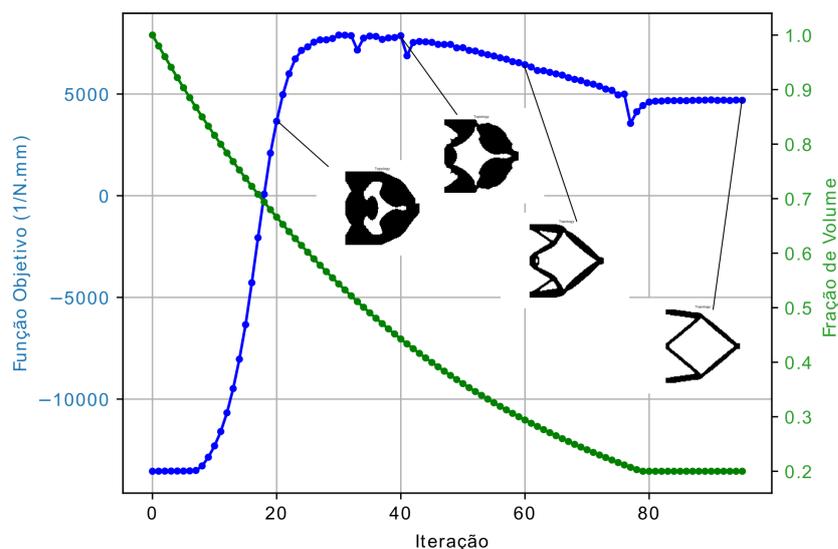


Figura 4.6 – Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor usando função objetivo  $GA/SE$ .

Já a Figura 4.7 mostra como as funções  $GA$  e  $SE$  se comportam durante a otimização. Visto que nenhuma dessas funções é maximizada individualmente, as curvas de suas evoluções são mais irregulares. É possível notar grandes perturbações nas iterações 33, 41 e 77, onde ocorrem variações na curva da função objetivo da Figura 4.6. A função  $GA$  cresce, pois, a mesma é maximizada por ser diretamente proporcional à função objetivo. A função  $SE$ , que é inversamente proporcional à função objetivo, também cresce porque é inevitável o aumento da flexibilidade da estrutura enquanto material é retirado continuamente.

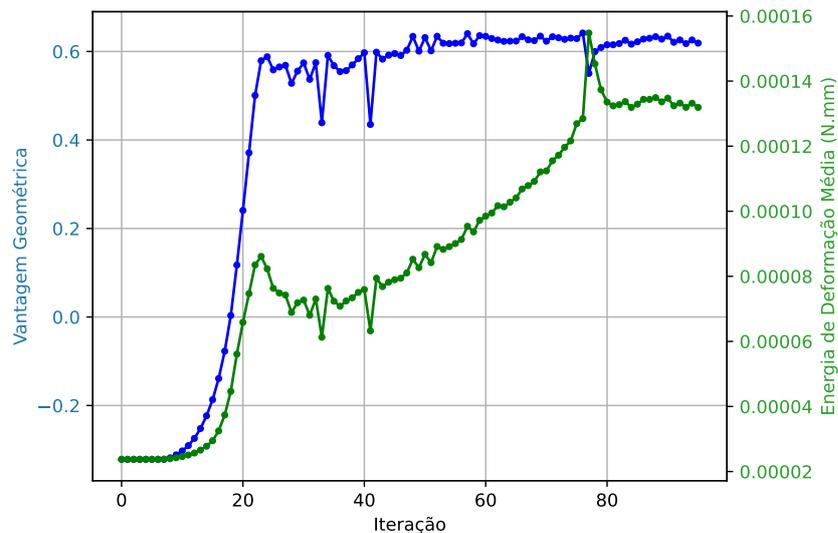


Figura 4.7 – Evolução das funções  $GA$  e  $SE$  durante otimização topológica do inversor.

#### 4.2.2 Mecanismo Pinça

O mecanismo pinça é um dos mecanismos em que a atuação é realizada movendo o ponto da entrada (sentido  $x$ ), criando um deslocamento em outra direção (sentido  $y$ ) em duas saídas, e gerando um movimento de agarramento. O domínio de projeto e condições de contorno estão ilustradas na Figura 4.8. O domínio de projeto é composto por metade da estrutura, usando uma malha  $100 \times 100$ , com dimensões de  $200\text{mm} \times 200\text{mm}$ . O modelo de elementos finitos possui um espaço vazio, fora do domínio de projeto, do tamanho de  $50\text{mm} \times 50\text{mm}$ , que representa o espaço para agarramento. Esse espaço foi representado na otimização como elementos vazios ( $x_e = x_{\min}$ ) imutáveis durante a otimização. As propriedades mecânicas do material são as mesmas do mecanismo inversor, e os parâmetros da otimização BESO são mostradas na Tabela 4.2.

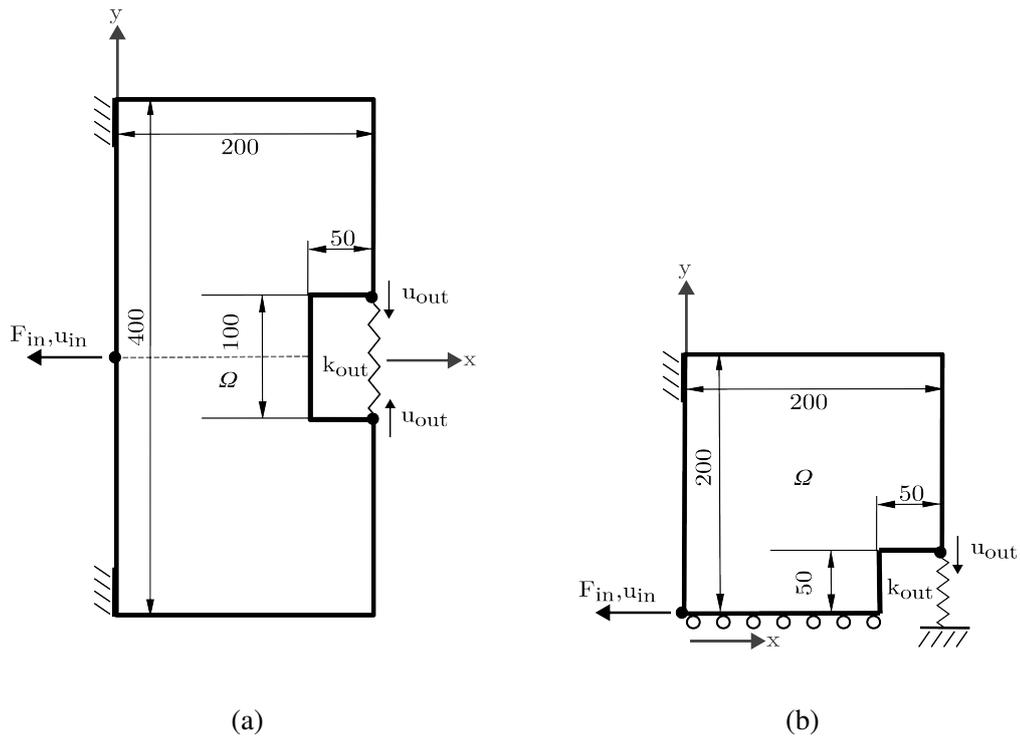


Figura 4.8 – Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo pinça. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria.

Tabela 4.2 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do mecanismo pinça.

Mola artificial ( $k_{out}$ )	200 N/m
Volume inicial	100%
Volume final ( $V^*$ )	20%
Raio mínimo do filtro ( $r_{min}$ )	3mm
Razão de evolução ( $ER$ )	2%
Razão de Adição máxima ( $AR$ )	1%

A Figura 4.9a ilustra a topologia otimizada do mecanismo pinça e a Figura 4.9b mostra seu deslocamento com a força na entrada. A topologia é similar com o que é encontrado em outros trabalhos (LI, 2014; MADRID, 2016).

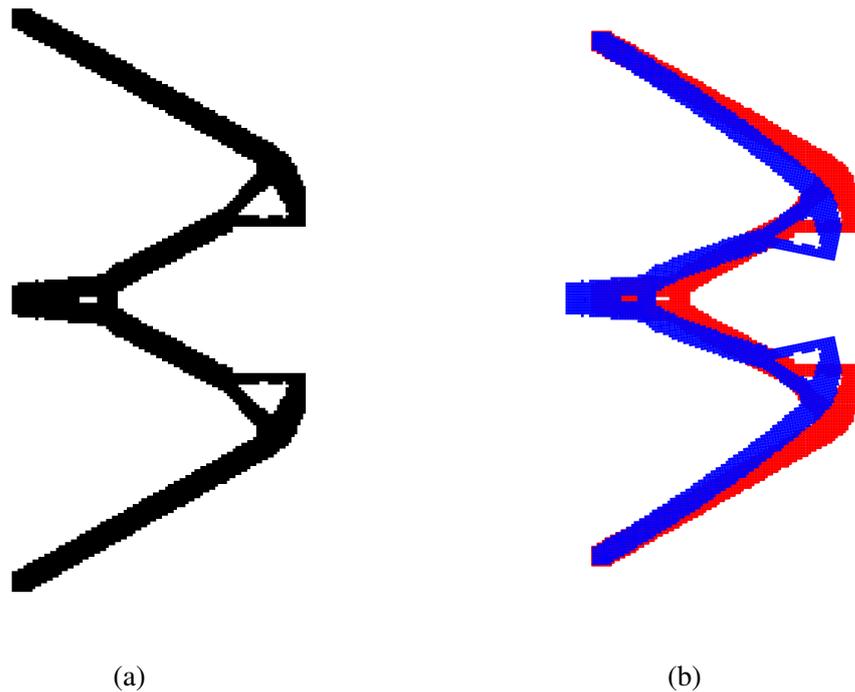


Figura 4.9 – Topologia final do mecanismo pinça com função objetivo  $GA/SE$  em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em  $2 \times 10^6$  vezes).

A Figura 4.10 mostra a evolução da função objetivo durante a otimização. A otimização finaliza na 99ª iteração. Na iteração 76 o mecanismo perde uma de suas vigas de sustentação do lado esquerdo, causando uma grande perturbação na curva da função objetivo, que sobe novamente à medida que os materiais soltos são transformados em vazio. A Figura 4.11 mostra como essa mudança na topologia afeta pouco o  $GA$ , enquanto o  $SE$  tem um pico de crescimento, por conta dos materiais soltos no domínio de projeto.

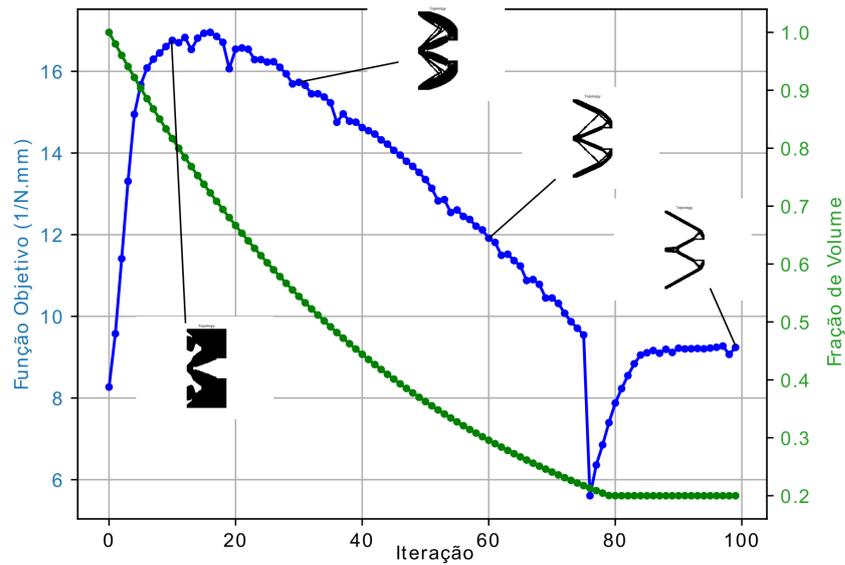


Figura 4.10 – Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça usando função objetivo  $GA/SE$ .

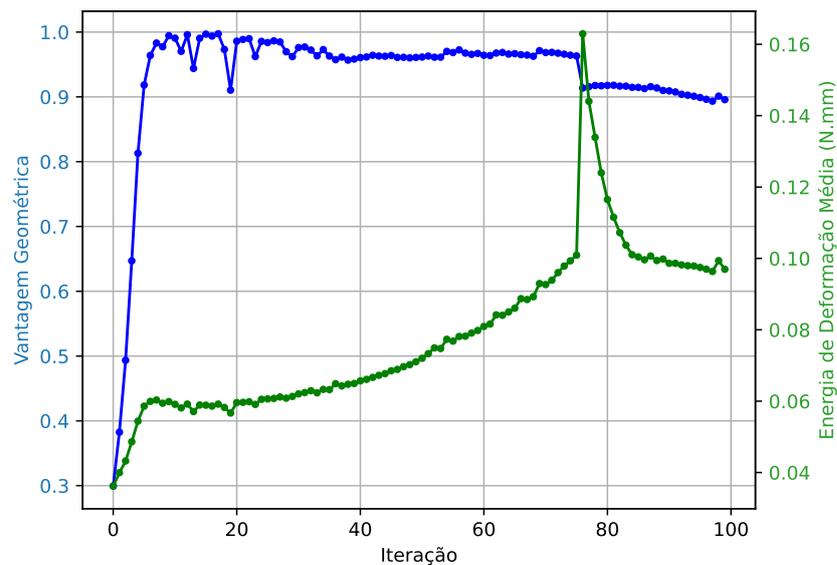


Figura 4.11 – Evolução das funções  $GA$  e  $SE$  durante otimização topológica do mecanismo pinça.

#### 4.2.3 Mecanismo Pinça Invertido

O mecanismo pinça invertido funciona da mesma forma que o mecanismo pinça, com o mesmo deslocamento de saída esperado, exceto que a força de atuação é na direção contrária. O domínio de projeto possui uma malha de  $120 \times 60$  elementos, com dimensões de  $120\mu\text{m} \times 60\mu\text{m}$ , e um espaço vazio de dimensões  $50\mu\text{m} \times 12\mu\text{m}$ . A constante de elasticidade

do material é 1GPa e a constante de Poisson, 0,3. As condições de contorno estão ilustradas na Figura 4.12, e as propriedades utilizadas na otimização estão na Tabela 4.3.

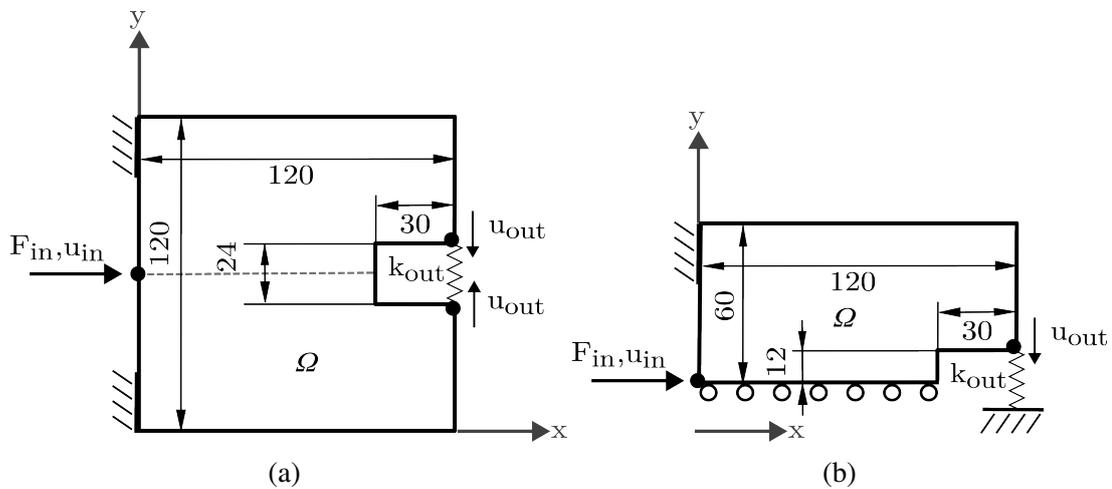


Figura 4.12 – Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo pinça invertido. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria.

Tabela 4.3 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) da pinça invertida.

Mola artificial ( $k_{out}$ )	$1 \times 10^3$ N/m
Volume inicial	100%
Volume final ( $V^*$ )	30%
Raio mínimo do filtro ( $r_{min}$ )	$3\mu\text{m}$
Razão de evolução ( $ER$ )	1%
Razão de Adição máxima ( $AR$ )	2%

A Figura 4.13a apresenta a topologia otimizada do mecanismo. Esse caso difere levemente da topologia da encontrada em [Madrid \(2016\)](#). A divergência está na viga extra de suporte no lado esquerdo da topologia da Figura 4.13a, que não existe na topologia final em [Madrid \(2016\)](#). Apesar disso, a topologia coincide com as topologias encontradas em outros trabalhos ([SIGMUND, 1997](#); [LUO \*et al.\*, 2005](#); [HUANG \*et al.\*, 2014](#); [LI, 2014](#)). A Figura 4.13b apresenta o deslocamento do mecanismo.

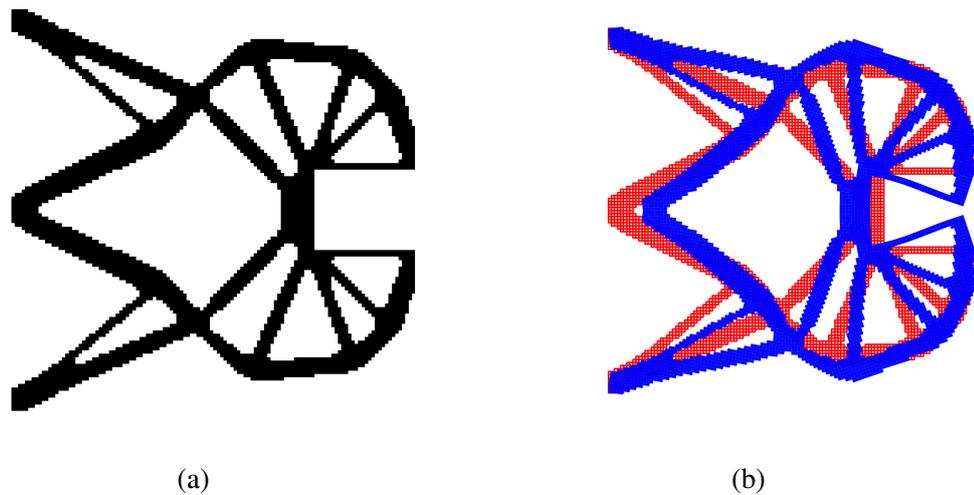


Figura 4.13 – Topologia final do mecanismo pinça invertido com função objetivo  $GA/SE$  em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em 60 vezes).

A curva de evolução da função objetivo é irregular até chegar na 41ª iteração, como ilustrado na Figura 4.14. Isso pode ser explicado por conta da ocorrência de elementos soltos da estrutura durante o início da otimização, devido à instabilidade. A otimização atinge a condição de parada em 143 iterações.

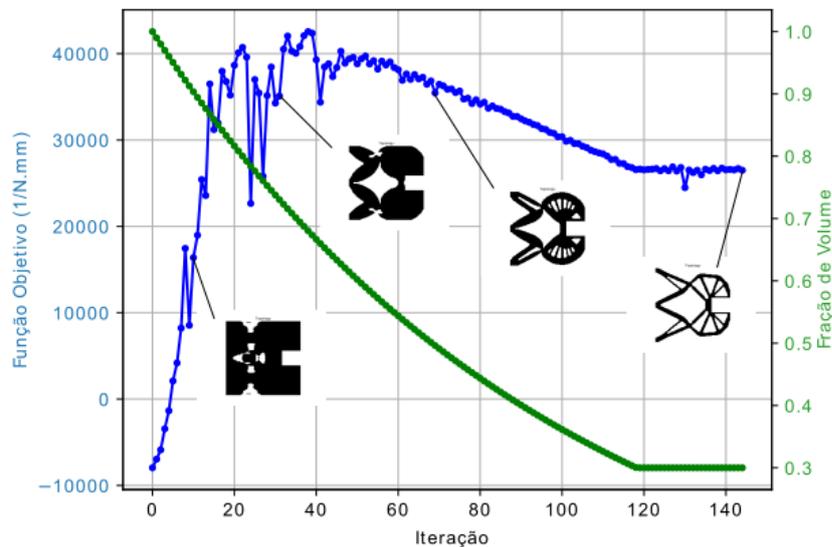


Figura 4.14 – Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça invertido usando função objetivo  $GA/SE$ .

A Figura 4.15 mostra a evolução das funções de Vantagem Geométrica e de Energia de Deformação. Ambas as curvas também apresentam uma evolução instável até chegar a 80 iterações.

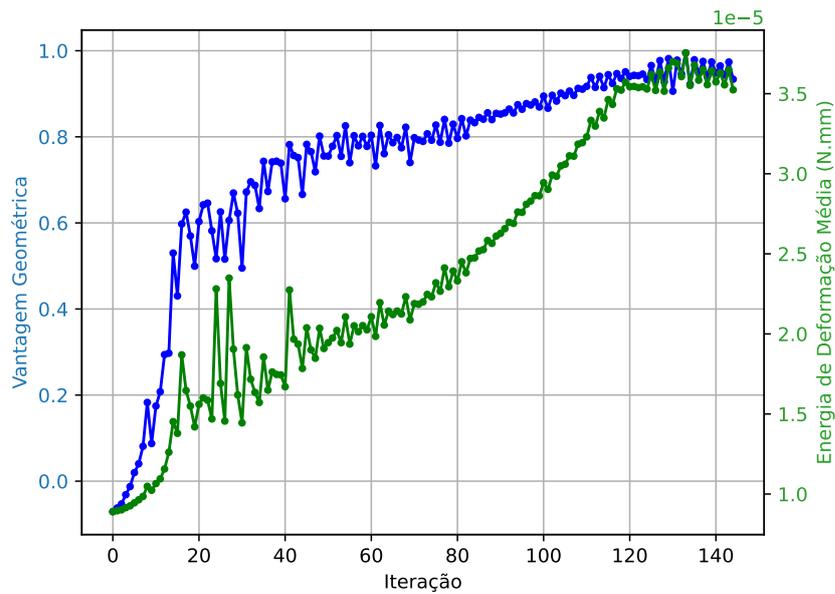


Figura 4.15 – Evolução das funções  $GA$  e  $SE$  durante otimização topológica do mecanismo pinça invertido.

#### 4.2.4 Mecanismo *Crunching*

O mecanismo *crunching* é um mecanismo que recebe duas forças de entrada opostas (no sentido  $y$ ) em dois cantos opostos no lado direito e gera um deslocamento de saída em outra direção (no sentido  $x$ ) no lado esquerdo. A Figura 4.16 ilustra o domínio de projeto da estrutura a ser otimizada e suas condições de contorno, composta por uma malha  $200 \times 100$  para o modelo considerando simetria, e dimensões de  $200\text{mm} \times 100\text{mm}$ . O material utilizado tem Módulo de Young de  $200\text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson de  $0,3$ . As propriedades da otimização BESO utilizada estão ilustradas na Tabela 4.4.

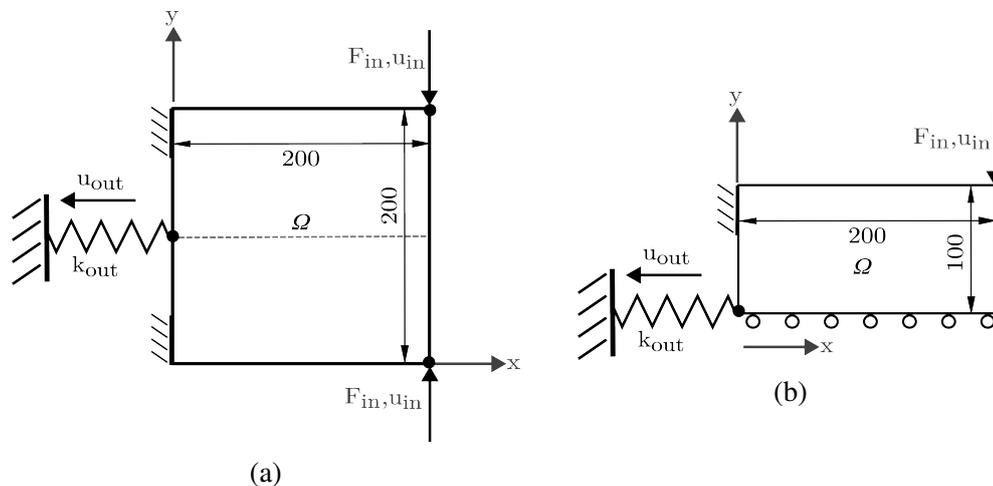


Figura 4.16 – Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo *crunching*. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria.

Tabela 4.4 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do mecanismo *crunching*.

Mola artificial ( $k_{out}$ )	$1 \times 10^{10}$ N/m
Volume inicial	100%
Volume final ( $V^*$ )	30%
Raio mínimo do filtro ( $r_{min}$ )	12mm
Razão de evolução ( $ER$ )	2%
Razão de Adição máxima ( $AR$ )	2%

A topologia final alcançada está ilustrada nas Figuras 4.17a e 4.17b, alcançada em 70 iterações, como ilustrado na Figura 4.18. A topologia verificada está de acordo com os resultados de outros trabalhos (SIGMUND, 1997; MADRID, 2016; LIU *et al.*, 2020). A evolução da função objetivo se torna suave depois de atingir a 12ª iteração. O mesmo ocorre na evolução das funções  $GA$  e  $SE$ , como ilustrado na Figura 4.19.

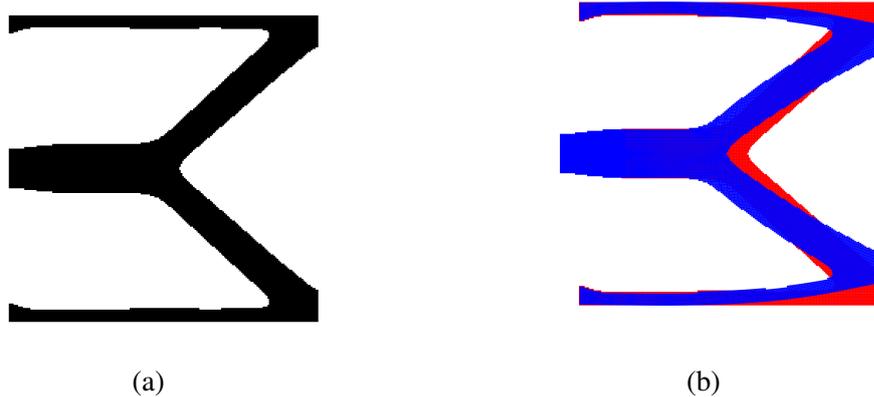


Figura 4.17 – Topologia final do mecanismo *crunching* com função objetivo  $GA/SE$  em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em  $10^4$  vezes).

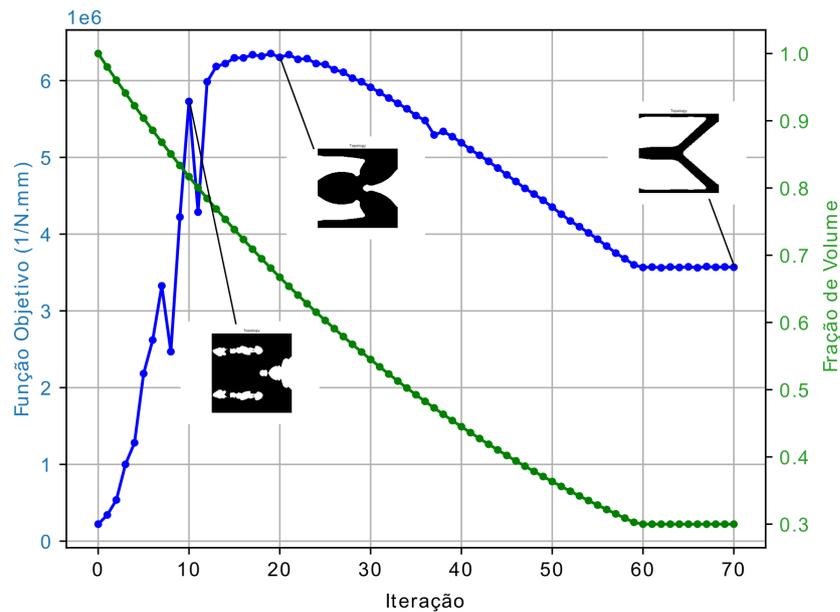


Figura 4.18 – Evolução da otimização topológica do mecanismo *crunching* usando função objetivo  $GA/SE$ .

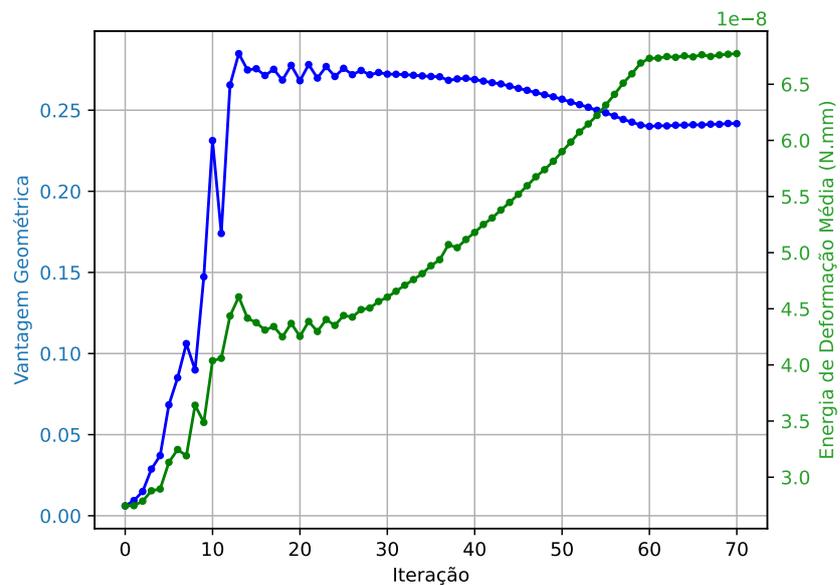


Figura 4.19 – Evolução das funções  $GA$  e  $SE$  durante otimização topológica do mecanismo *crunching*.

#### 4.2.5 Mecanismo Inversor com Duas Saídas

O mecanismo inversor com duas saídas funciona como o mecanismo inversor, porém duas saídas em dois cantos opostos são consideradas ao invés de apenas uma saída no centro, como ilustrado na Figura 4.20. O domínio de projeto usado foi uma malha de  $100 \times 30$  elementos e dimensões de  $100\text{mm} \times 30\text{mm}$  para o modelo simétrico. O material utilizado tem

Módulo de Young de 100GPa e coeficiente de Poisson de 0,3. As propriedades da otimização BESO estão na Tabela 4.5.

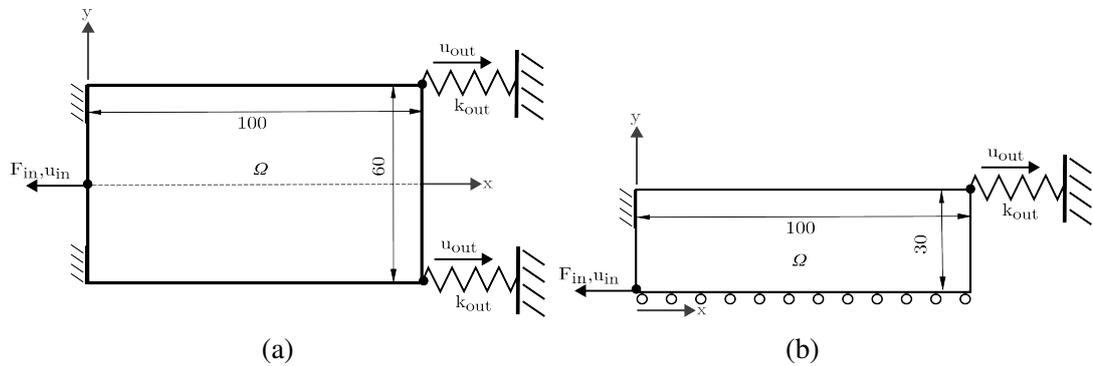


Figura 4.20 – Condições de contorno no domínio de projeto do mecanismo inversor com 2 saídas. (a) Domínio de projeto completo. (b) Domínio de projeto com simetria.

Tabela 4.5 – Parâmetros utilizados na otimização BESO ( $GA/SE$ ) do mecanismo inversor com 2 saídas.

Mola artificial ( $k_{out}$ )	$1 \times 10^9$ N/m
Volume inicial	100%
Volume final ( $V^*$ )	25%
Raio mínimo do filtro ( $r_{min}$ )	3mm
Razão de evolução ( $ER$ )	2%
Razão de Adição máxima ( $AR$ )	2%

A Figura 4.21a mostra topologia final alcançada. Apesar de bem próxima, essa topologia também difere um pouco da topologia encontrada em [Madrid \(2016\)](#), pois há barras de suporte perto da extremidade fixada que não são retiradas durante a otimização. Por outro lado, é mais próxima das topologias relatadas em [Li \(2014\)](#). A Figura 4.21b apresenta o deslocamento dessa topologia sendo atuada.

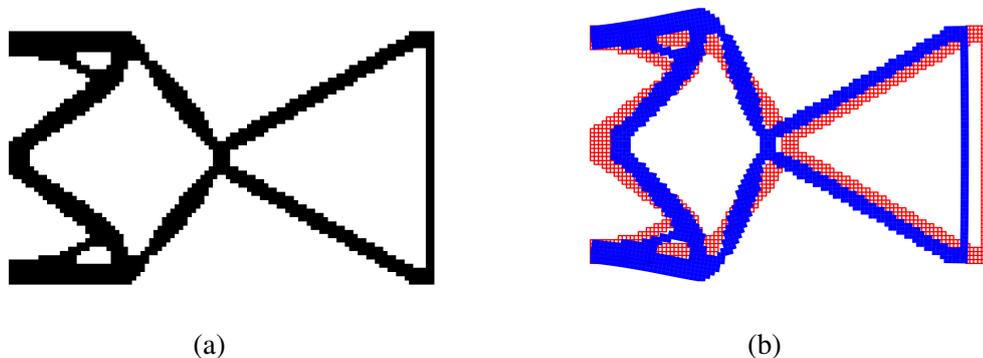


Figura 4.21 – Topologia final do mecanismo inversor com 2 saídas com função objetivo  $GA/SE$  em 25% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em  $3 \times 10^6$  vezes).

A Figura 4.22 mostra a evolução da topologia e a redução do volume da estrutura durante a otimização. O critério de parada é encontrado em 79 iterações. A função objetivo apresenta uma evolução um pouco instável, principalmente entre as iterações 42 e 50, onde ocorre uma desconexão nas barras do mecanismo, também ilustrado na Figura 4.22. Esse comportamento não é observado em Madrid (2016). Vale ressaltar que esse comportamento pode ser evitado aumentando o valor de  $k_{out}$ . A variação das funções  $GA$  e  $SE$  durante essas iterações também pode ser vista na Figura 4.23.

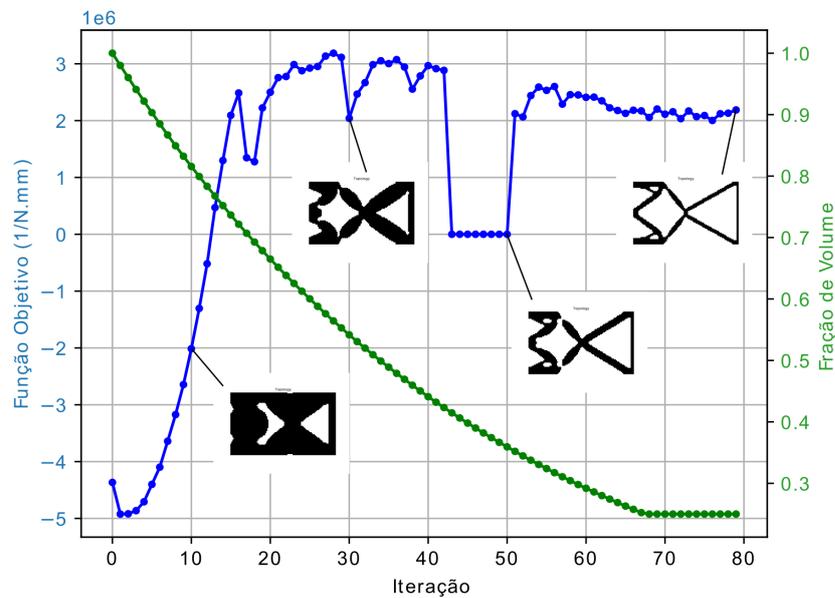


Figura 4.22 – Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor com 2 saídas usando função objetivo  $GA/SE$ .

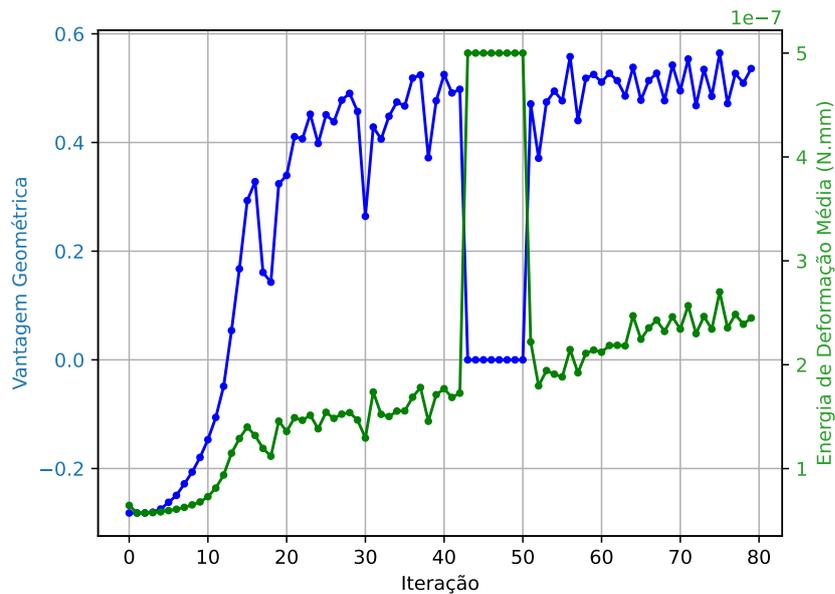


Figura 4.23 – Evolução das funções  $GA$  e  $SE$  durante otimização topológica do mecanismo inversor com 2 saídas.

#### 4.2.6 Discussões

Interessante notar que todos os mecanismos otimizados mantiveram um certo padrão na curva de evolução da função objetivo. Todas as curvas crescem até certo ponto, onde atingem um pico e então caem (alguns bruscamente, outros suavemente) até que a topologia encontre seu critério de convergência. Isso pode ser explicado pelos gráficos de evolução das variáveis  $GA$  e  $SE$ . Nas primeiras iterações, a variável  $GA$  cresce até que a forma do mecanismo flexível apareça, e então quando isso acontece a variável  $GA$  varia de forma mais suave. Contudo, a variável  $SE$  está sempre crescendo, fazendo com que a função objetivo tenda a diminuir depois que a variável  $GA$  diminua sua taxa de crescimento.

Apesar de os mecanismos otimizados terem encontrado topologias muito similares aos mecanismos de [Madrid \(2016\)](#), houve algumas diferenças mais evidentes no caso dos mecanismos pinça invertida e inversor de duas saídas. Essas diferenças podem ser por conta de detalhes do programa ou variações na forma como o BESO foi implementado, visto que não se fez uma reprodução rigorosa, linha a linha, do programa de otimização. A Tabela 4.6 ilustra a comparação dos mecanismos otimizados nessa sessão e os mecanismos de [Madrid \(2016\)](#). No geral, pode-se afirmar que as topologias são similares.

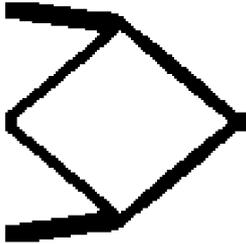
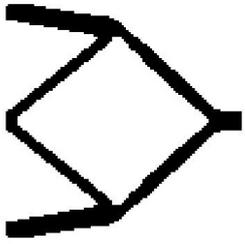
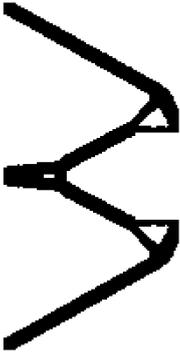
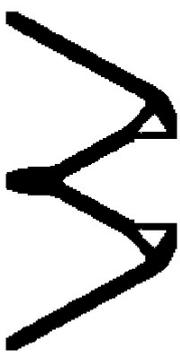
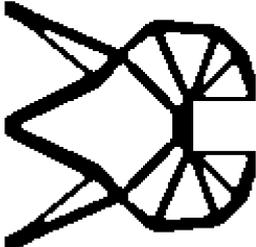
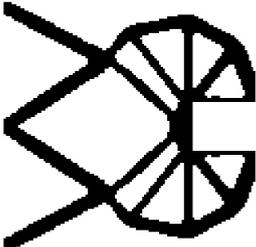
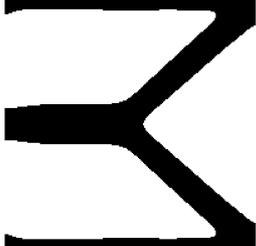
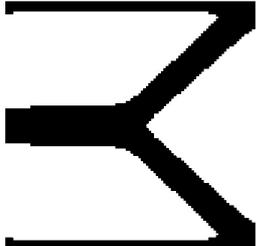
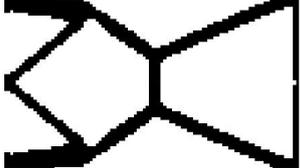
	Autor	Madrid (2016)
Inversor		
Pinça		
Pinça Invertida		
<i>Crunching</i>		
Inversor de 2 saídas		

Tabela 4.6 – Comparação de topologias usando função objetivo  $GA/SE$ .

Pode-se dizer que essa otimização inicial obteve êxito em reproduzir otimização de CMs usando BESO, visto que todos os mecanismos obtiveram topologias similares às apresentadas na literatura utilizando outros métodos de otimização topológica (SIGMUND, 1997; LUO

*et al.*, 2005; LUO *et al.*, 2008; WANG, 2009; LI, 2014; LIU *et al.*, 2020).

### 4.3 Função Objetivo: $MSE/SE$

Ao se considerar um problema com carga distribuída, o uso da função  $GA$  se torna problemática. O cálculo da função de deslocamento da entrada, como na Equação 4.3, não é mais apenas um ponto, vários graus de liberdade são excitados na entrada. Por isso, houve um esforço em se buscar e implementar uma função objetivo que pudesse ser aplicada no problema de carga por pressão.

A função adotada foi a  $J_2$  da Tabela 2.1, visto que ela é utilizada nos trabalhos mais recentes envolvendo o tipo de problema de otimização que será abordada (KUMAR *et al.*, 2020; KUMAR; LANGELAAR, 2021; KUMAR; LANGELAAR, 2022). Essa é uma função objetivo mais simples que a anterior, visto que apenas se deixa de incluir o termo  $u_{in}$ . Então, antes de se implementar o problema com carga distribuída, foi feita novamente a otimização de CMs atuados por uma carga pontual para testar o funcionamento da função  $J_2$ , visto que até então a mesma não foi utilizada usando o método BESO discreto.

A sensibilidade da função  $MSE/SE$  pode então ser calculada como:

$$\alpha_e = \left( SE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} - MSE \frac{\partial SE}{\partial x_e} \right) \frac{1}{SE^2} \quad (4.23)$$

Contudo, a função se mostrou muito problemática com o BESO por conta da instabilidade da otimização. Elementos importantes para o problema, como elementos conectados aos pontos de entrada, saída e nós fixados eram constantemente transformados em vazios pela otimização, gerando topologias disformes.

A otimização com a nova função objetivo passou a funcionar depois que o cálculo de  $SE$  passou a ser feito considerando a energia de deformação da mola artificial  $k_{out}$ . Como feito em Huang *et al.* (2014), a energia de deformação foi então calculada como:

$$SE = \frac{1}{2} f_{in} u_{in} - k_{out} u_{out}^2 \quad (4.24)$$

Visto que  $\frac{1}{2} f_{in} u_{in}$  é a energia de deformação,  $SE^*$  é a energia de deformação calculada anteriormente ( $SE$ ) e será citado dessa forma para simplificação. Dessa forma,  $SE$  agora é calculado como:

$$SE = SE^* - k_{out} u_{out}^2 \quad (4.25)$$

E o termo  $\frac{\partial SE}{\partial x_e}$  se torna:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \frac{\partial SE^*}{\partial x_e} - 2k_{\text{out}}u_{\text{out}} \frac{\partial u_{\text{out}}}{\partial x_e} \quad (4.26)$$

Além disso, apenas o sistema da Figura 4.1 é considerado, tanto para calcular o termo  $MSE$  quanto o termo  $SE$ . Por conta disso o vetor de deslocamentos devido à uma carga  $\mathbf{f}$  será escrito apenas como  $\mathbf{u}$ . O termo  $MSE$  é calculado com a seguinte equação:

$$MSE = \mathbf{u}_{\text{out}}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4.27)$$

onde  $\mathbf{u}_{\text{out}}$  é um vetor de deslocamentos causado por uma força unitária na saída. Um vetor força com valor unitário apenas no grau de liberdade da saída foi definido anteriormente ( $\mathbf{l}_{\text{out}}$ ). Dessa forma,  $\mathbf{u}_{\text{out}} = \boldsymbol{\delta}_{\text{out}}$ , então  $\mathbf{K} \mathbf{u}_{\text{out}} = \mathbf{l}_{\text{out}}$  e  $MSE = u_{\text{out}}$ , definido na Equação 4.9. Os termos da Equação 4.23 se tornam:

$$\frac{\partial MSE}{\partial x_e} = \begin{cases} -p \boldsymbol{\delta}_{\text{out},e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e & \text{quando: } x_e = 1 \\ -p x_{\text{min}}^{(p-1)} \boldsymbol{\delta}_{\text{out},e}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e & \text{quando: } x_e = x_{\text{min}} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \begin{cases} -\frac{1}{2} p \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} & \text{quando: } x_e = 1 \\ -\frac{1}{2} p x_{\text{min}}^{(p-1)} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} & \text{quando: } x_e = x_{\text{min}} \end{cases} \quad (4.29)$$

O termo  $SE$  usado nessa parte, considera a adição da mola virtual,  $k_{\text{out}}$  na matriz de rigidez global,  $\mathbf{K}$ , como na Equação 4.4.

#### 4.4 Resultados com função MSE/SE

Nesta seção são ilustrados os resultados de quatro dos cinco mecanismos analisados anteriormente, mas usando a nova função objetivo. O processo de otimização topológica agora é representado pelo fluxograma na Figura 4.24.

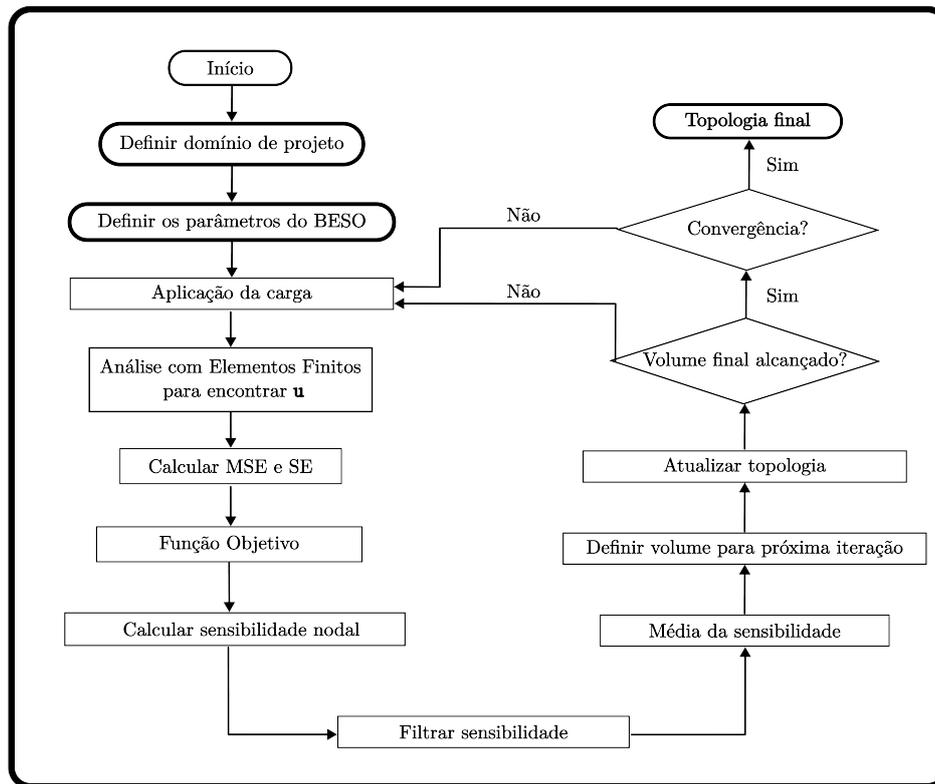


Figura 4.24 – Fluxograma do método BESO para CMs usando função objetivo  $MSE/SE$ .

#### 4.4.1 Mecanismo Inversor

O mecanismo inversor foi otimizado utilizando as mesmas condições de contorno da Figura 4.4. Algumas propriedades foram mantidas enquanto outras foram modificadas para tornar a otimização possível. Ao contrário da otimização anterior, para essa otimização foi necessário adicionar uma mola virtual, cujo valor que mostrou efeito na otimização foi  $k_{out} = 10^{12} \text{N/m}$ . A razão de adição  $AR$  também foi aumentada para 2% e o raio mínimo  $r_{min}$  do filtro foi aumentado para 6mm.

A topologia alcançada está ilustrada na Figura 4.25a e a estrutura deslocada é mostrada na Figura 4.25b. A topologia é muito similar à encontrada anteriormente.

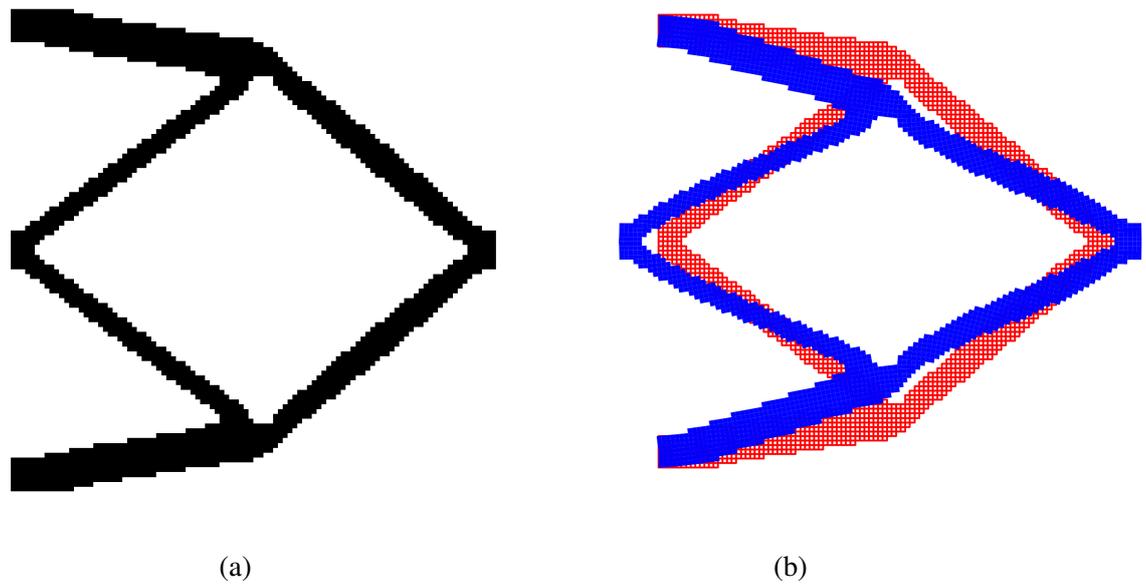


Figura 4.25 – Topologia final do mecanismo inversor com função objetivo  $MSE/SE$  em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em  $10^7$  vezes).

A Figura 4.26 ilustra a evolução da topologia durante a otimização. No início das otimizações, entre as iterações 1 e 15, é retirado material da saída da estrutura e por isso a curva da função objetivo é mantida em 0 até que material seja adicionado novamente. A topologia cria padrões disformes até que a saída tenha elementos sólidos novamente, então depois disso a topologia começa a convergir no padrão clássico de um mecanismo flexível inversor. O critério de parada é encontrado em 97 iterações. A Figura 4.27 ilustra a evolução das funções  $MSE$  e  $SE$  durante a otimização. Seus valores são bem baixos por conta da alta constante elástica da mola virtual usada na saída, apesar da carga, material e dimensões serem mantidas as mesmas. É possível ver que o deslocamento da saída cresce, mesmo nas iterações em que a função objetivo diminui.

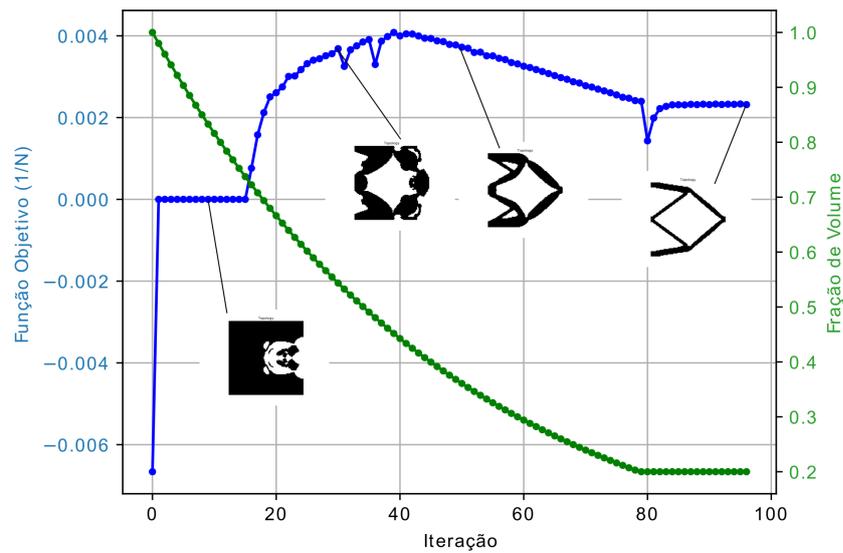


Figura 4.26 – Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor usando função objetivo  $MSE/SE$ .

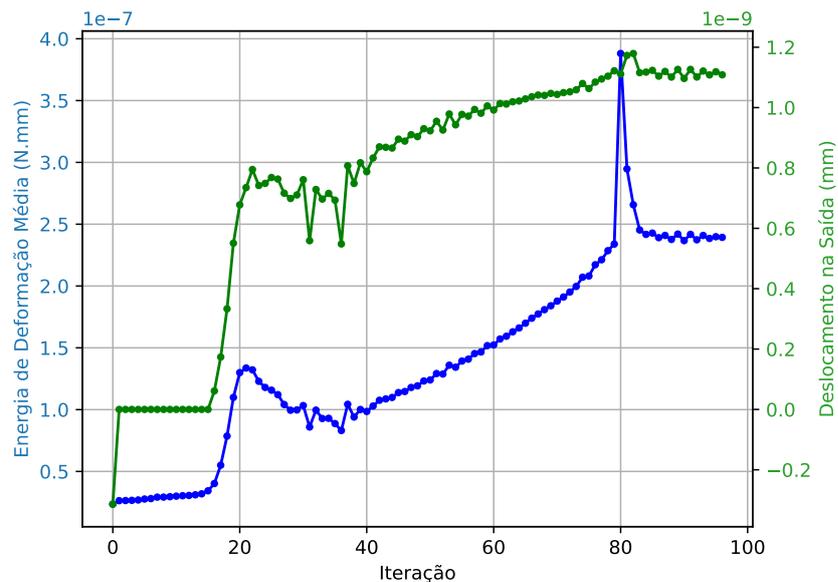


Figura 4.27 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo inversor.

#### 4.4.2 Mecanismo Pinça

Para a otimização do mecanismo pinça, os parâmetros de material, dimensões e carga foram mantidos. Os parâmetros alterados foram a mola artificial,  $k_{out} = 10^{12} \text{N/m}$  e o raio mínimo do filtro,  $r_{min} = 6 \text{mm}$ , de forma a fazer com que topologias factíveis fossem encontradas. As Figura 4.28a e 4.28b ilustram a topologia final alcançada e a estrutura deslocada.

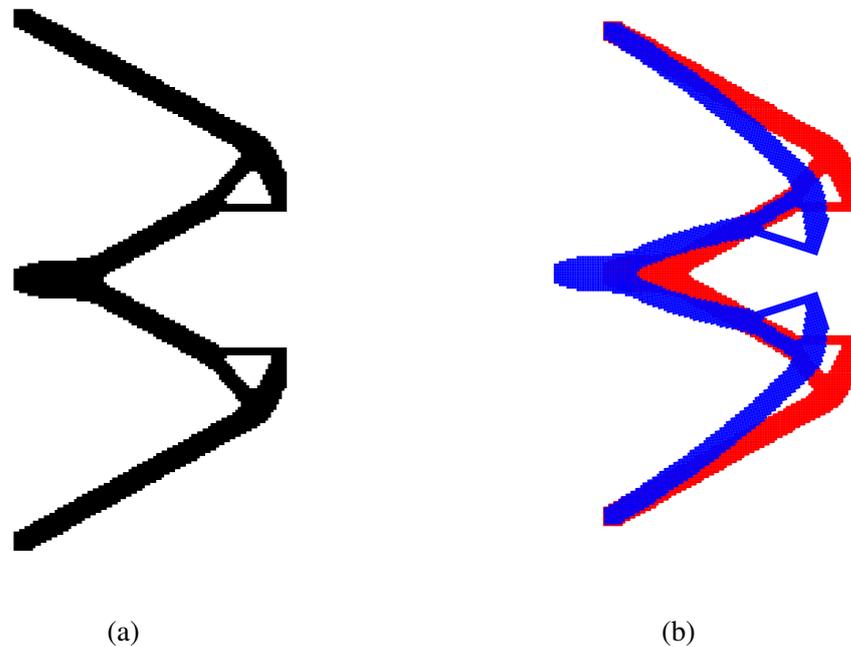


Figura 4.28 – Topologia final do mecanismo pinça com função objetivo  $MSE/SE$  em 20% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em  $2 \times 10^6$  vezes).

Diferente do mecanismo inversor, não houve retirada de material da saída do mecanismo. Além disso, a evolução da topologia, assim como a curva da função objetivo, variam de forma bem similar à otimização com a outra função objetivo, como mostrado na Figura 4.29. A otimização leva 108 iterações para atingir o critério de parada. A Figura 4.30 mostra o comportamento das funções  $SE$  e  $MSE$ . A evolução do deslocamento da saída é regular na maior parte da otimização, as maiores flutuações do seu valor acontecem nas primeiras iterações. As primeiras variações da topologia têm mais influência no deslocamento da saída. A grande variação do valor da energia de deformação perto da iteração 80 ocorre por conta de vigas de suporte que são retiradas da estrutura. É possível ver que o deslocamento da saída está sempre crescendo, com algumas quedas causadas por conta de mudanças abruptas na topologia.

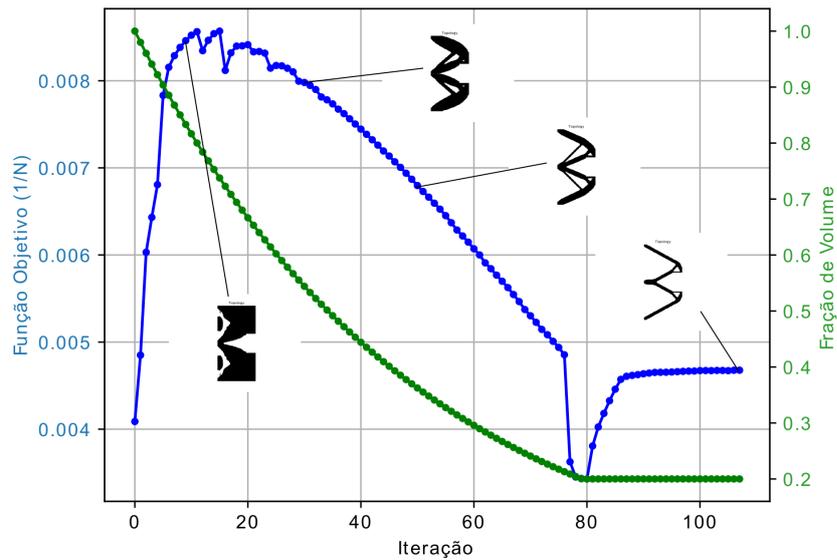


Figura 4.29 – Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça usando função objetivo  $MSE/SE$ .

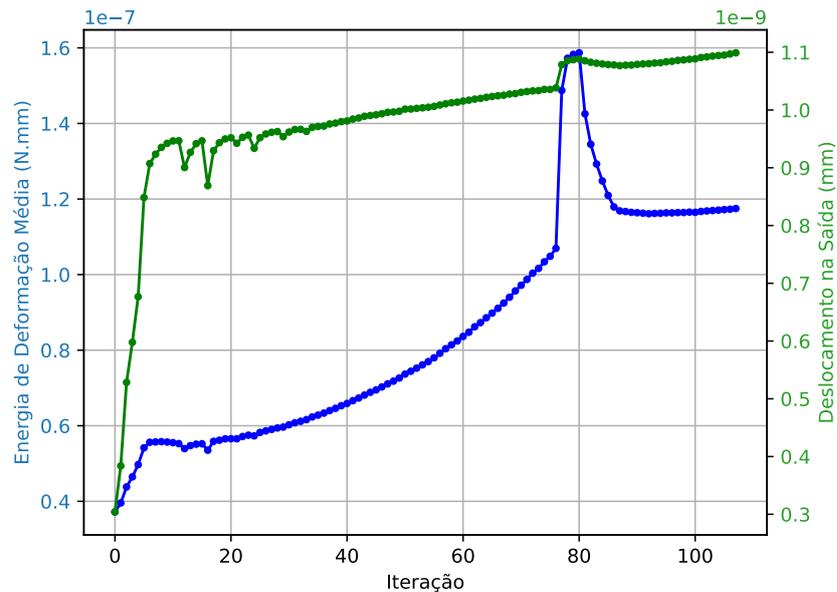


Figura 4.30 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo pinça.

#### 4.4.3 Mecanismo Pinça Invertido

O mecanismo pinça invertido foi otimizado usando os mesmos parâmetros da otimização anterior, com exceção de alguns como a constante elástica da mola virtual,  $k_{out} = 10^9 \text{N/m}$ , a razão de evolução,  $ER = 3\%$ , e a razão de adição,  $AR = 2\%$ . A topologia resultante, como mostrada na Figura 4.31a, é um pouco diferente da obtida com a função objetivo anterior, para essa topologia as vigas de suporte extra no lado esquerdo foram retiradas. Mas

essas modificações também estão relacionadas a escolha dos parâmetros do BESO que foram modificados. A Figura 4.31b mostra o campo de deslocamento do mecanismo causado pela força na entrada.

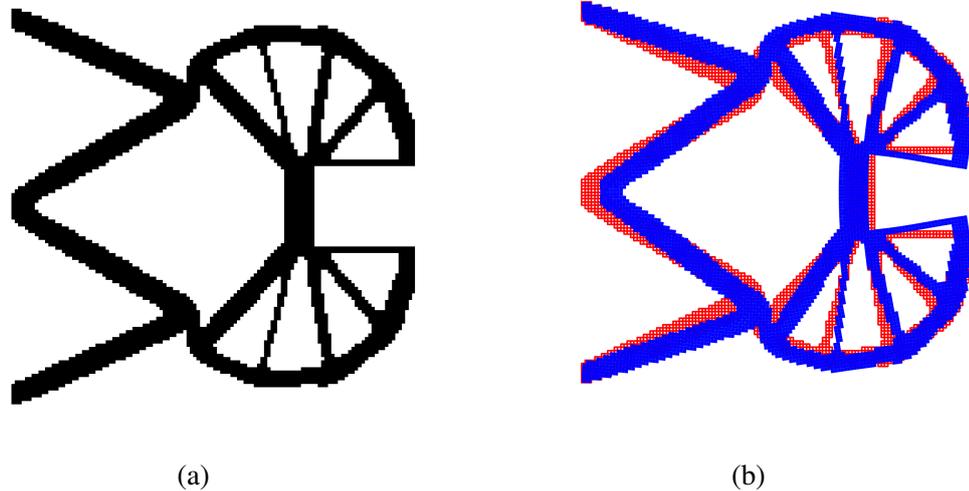


Figura 4.31 – Topologia final do mecanismo pinça invertido com função objetivo  $MSE/SE$  em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em 30 vezes).

A evolução da otimização é mostrada na Figura 4.32. Entre as iterações 1 e 5, o valor da função objetivo é zero, pois novamente no início da otimização é retirado elementos conectados com a saída, mas nesse caso rapidamente é colocado material novamente nessa região. Foi observado que esse aumento na velocidade para se repor elementos está mais relacionado ao aumento do parâmetro  $ER$  do que do  $AR$ . Depois que a topologia recupera material na região de interesse, a curva evolui de forma similar à curva da função objetivo da Figura 4.14, porém sem tantas flutuações no início. A Figura 4.33 mostra a evolução das funções  $MSE$  e  $SE$ . Depois da iteração 10, a variação do deslocamento é pequena. Pode-se ver que o deslocamento da saída no final na otimização é um valor muito próximo do deslocamento das iterações anteriores.

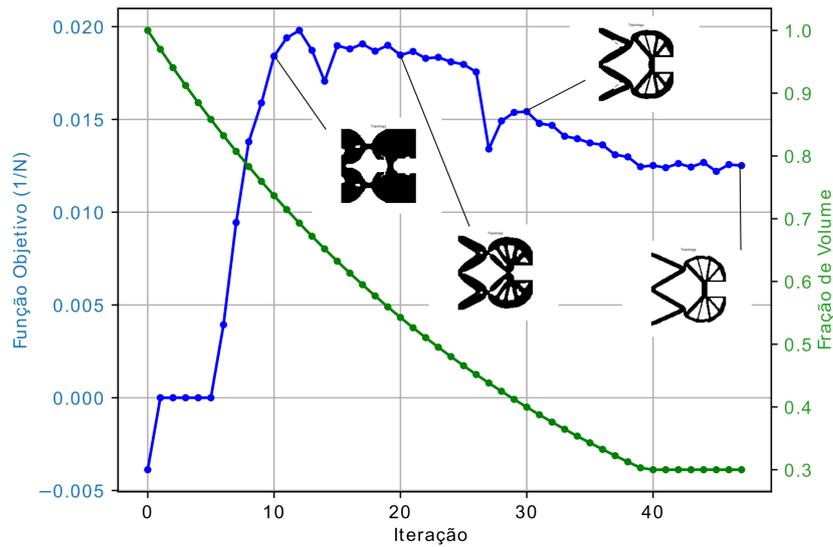


Figura 4.32 – Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça invertido usando função objetivo  $MSE/SE$ .

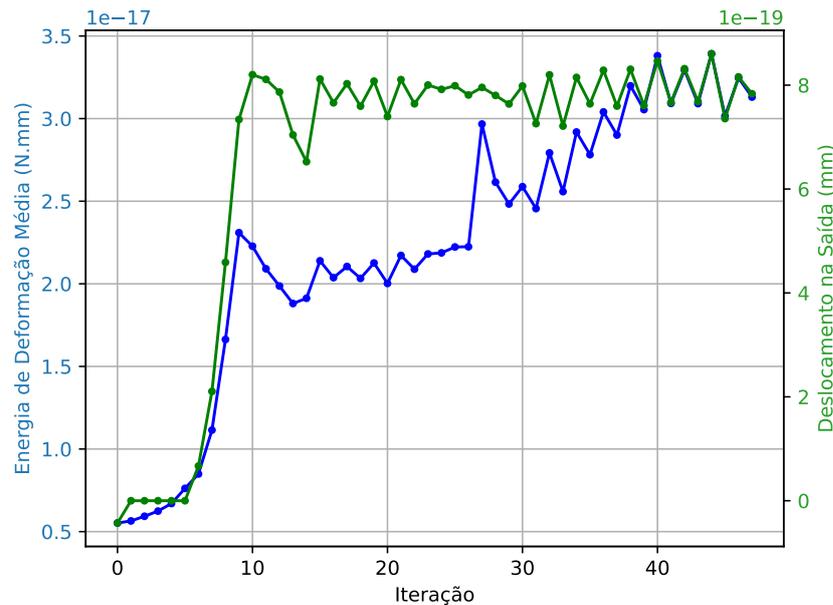


Figura 4.33 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo pinça invertido.

#### 4.4.4 Mecanismo *Crunching*

O mecanismo *crunching* foi otimizado usando os mesmos parâmetros da otimização anterior, com exceção apenas da constante elástica da mola virtual na saída, que foi usada com um valor de  $10^{12}$ N/m. O resultado da otimização está ilustrado nas Figuras 4.34a e 4.34b. A topologia também é bem parecida com a encontrada anteriormente.



Figura 4.34 – Topologia final do mecanismo *crunching* com função objetivo  $MSE/SE$  em 30% do volume inicial. (a) Topologia em preto e branco. (b) Mecanismo estático (vermelho) e deslocado (azul) (ampliado em  $10^7$  vezes).

A Figura 4.35 mostra as curvas de evolução da otimização. A otimização leva 59 iterações e converge depois de 68 iterações. A curva de evolução da função objetivo é bem parecida com a da otimização anterior, contudo um pouco mais regular, sem grandes quedas perto da iteração 10. A Figura 4.36 mostra a variação das funções  $MSE$  e  $SE$ . É observada uma queda do deslocamento depois da iteração 14, onde a função objetivo encontra seu máximo. Isso mostra que para esse mecanismo, a retirada de material também reduz o deslocamento da saída. Quanto mais flexível a estrutura nas vigas da direita onde é aplicada força, menos deslocamento ela é capaz de transmitir para a barra que gera o deslocamento de saída.

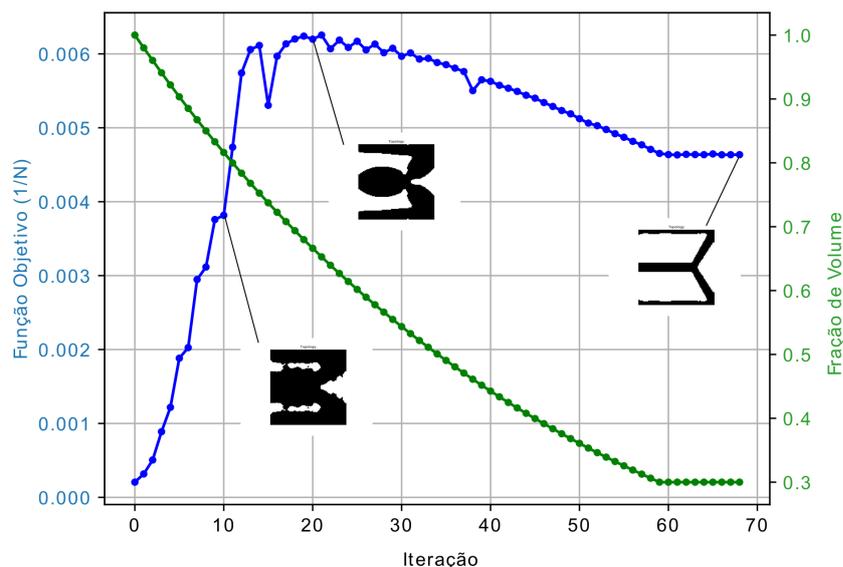


Figura 4.35 – Evolução da otimização topológica do mecanismo *crunching* usando função objetivo  $MSE/SE$ .

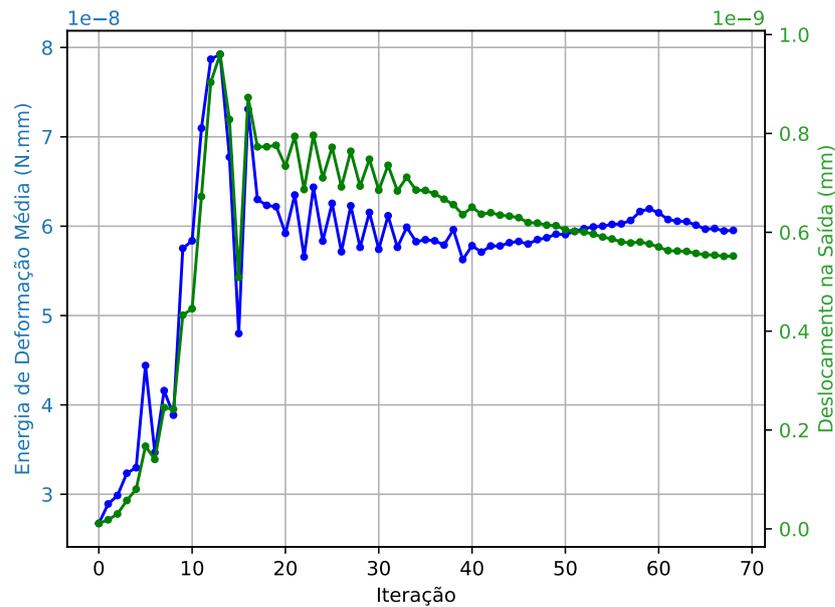


Figura 4.36 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo *crunching*.

#### 4.4.5 Discussões

Pode-se ver que a função objetivo em conjunto com o BESO funciona bem para otimização de CMs atuados por uma força pontual. Algumas ressalvas sobre a utilização dessa função objetivo seria a remoção de material nos pontos de saída do mecanismo bem no início da otimização. Isso ocorre em mecanismos inversores, isto é, nos mecanismos inversor e pinça invertida. Esses mecanismos são caracterizados por aplicarem um deslocamento na saída em uma direção contrária à direção do deslocamento na saída quando o volume está cheio. Ou seja, a otimização inverte a direção do deslocamento na saída a medida que o mecanismo toma forma. Dessa forma, o método vai em direção ao mínimo local mais próximo e mais eficiente para aumentar o deslocamento na direção desejada: zerar o deslocamento. Mesmo assim, depois de algumas iterações, o BESO consegue repor material nessas regiões novamente e então a topologia segue um curso parecido com quando otimizado com a função objetivo  $GA/SE$ . Segundo [Huang e Xie \(2010\)](#), quando ocorrem desconexões desse tipo durante a otimização, o método deve ser ajustado para que isso não ocorra.

O mecanismo inversor de 2 saída (Figura 4.20) até então não pôde ser otimizado usando a função objetivo  $MSE/SE$ . A variação de parâmetros como  $r_{min}$ ,  $k_{out}$ ,  $ER$  e  $AR$  não parecem estabilizar a otimização, que tende a criar uma topologia muito dispersa e inconstante.

## 5 MECANISMOS FLEXÍVEIS ATUADOS POR PRESSÃO

Neste capítulo, considera-se os mecanismos fluido atuados conforme ilustrado na Figura 5.1a, composto pelo domínio dos elementos sólidos  $\Omega_s$  (em cinza) e o domínio da região de elementos de fluido  $\Omega_f$  (em azul). A fronteira  $S_u$  é a condição de contorno onde o deslocamento imposto na estrutura é  $\mathbf{u}_0$ ,  $S_p$  é a fronteira de aplicação da pressão e  $S_{fs}$  é a fronteira entre fluido e sólido (em magenta). Um vetor normal a  $S_{fs}$  é representado por  $\mathbf{n}$ . Na fronteira  $S_p$  é aplicada uma pressão  $P_{in}$  que gera o deslocamento  $\mathbf{u}_{out}$  na saída do mecanismo.

A Figura 5.1a ilustra um problema fluido-estrutura, onde os elementos fluidos são modelados como elementos de fluido hidrostáticos incompressíveis que são carregados em  $S_p$  e transmitem a força para o sólido em  $S_{fs}$ . Como o fluido é hidrostático, e o campo de pressão é constante em  $\Omega_f$ , a pressão equivalente é aplicada diretamente em  $S_{fs}$  na sua direção normal  $\mathbf{n}$ , como ilustrado na Figura 5.1b. Com base nestas hipóteses tem-se um sistema equivalente sem se modelar matematicamente os elementos de fluido.

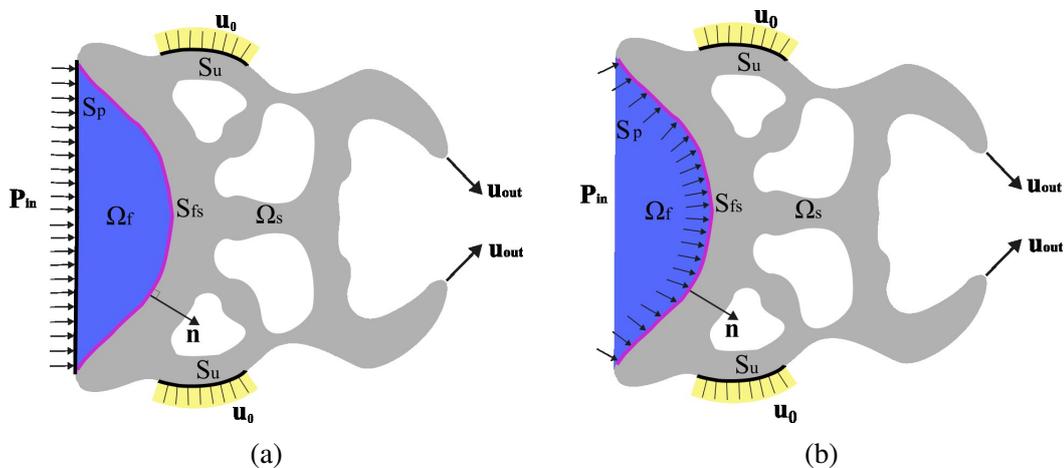


Figura 5.1 – Pa-CM arbitrário: domínios e condições de contorno. (a) Pressão hidrostática por fluido incompressível. (b) Pressão equivalente aplicada diretamente no sólido.

No algoritmo utilizado, os elementos de fluido são identificados como os elementos vazios em contato com  $S_p$ . Dessa forma, quando o domínio de projeto está cheio, e não há elementos vazios,  $S_p = S_{fs}$ , como ilustrado na Figura 5.2a. A carga é aplicada em  $S_{fs}$  e à medida que a topologia evolui,  $S_{fs}$  também evolui, o que caracteriza o problema de otimização com carga dependente da topologia. Diferentes configurações de  $\Omega_f$  irão gerar diferentes vetores força  $\mathbf{f}$ , como ilustrado nas Figuras 5.2b e 5.2c. Por conta disso, a sensibilidade é calculada de uma forma diferente da otimização de CMs com carga fixa. As Figuras 5.2b e 5.2c ilustram

como a atualização dos elementos de fluido ocorre. Toda iteração, os elementos vazios em contato com a interface  $S_p$  são identificados como fluido, então a partir deles é feita uma busca de outros elementos vazios vizinhos. Todos os elementos vazios vizinhos entre si e conectados com a interface  $S_p$ , se tornam elementos de fluido. Desta forma, mesmo que uma região de vazios já tenha sido formada em uma iteração anterior, ela se torna região de fluido quando entra em contato com outros elementos de fluido.

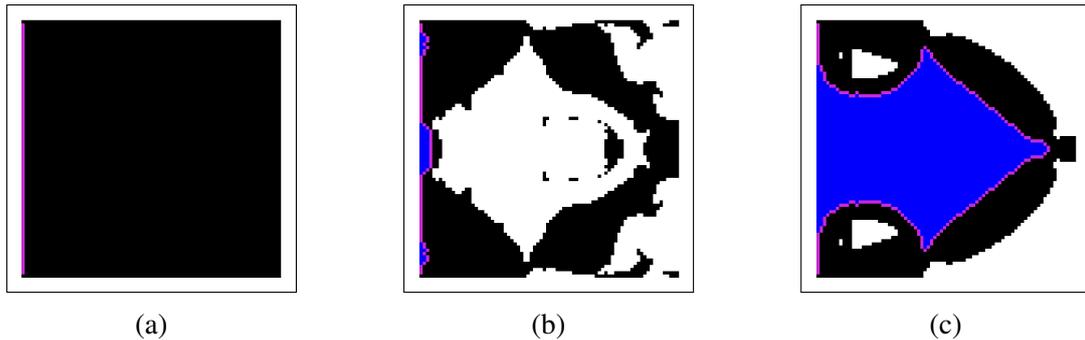


Figura 5.2 – Identificação de elementos de fluido na topologia. (a) No início, a carga é aplicada em  $S_{fs}$ , em magenta, ou seja,  $S_{fs} = S_p$ . (b) A medida que elementos vazios em contato com  $S_p$  se formam,  $\Omega_f$  e  $S_{fs}$  são atualizados. (c) Região de vazio que entrou em contato com  $S_p$ , se tornou região de fluido.

## 5.1 Análise de Sensibilidade com Carga Dependente

### 5.1.1 Variação da Carga

Visto que a carga também é dependente da topologia, sabe-se que na fronteira sólido-fluido  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e} \neq 0$ , e conseqüentemente o valor de  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e}$  entra no cálculo de  $\alpha_e$ . Para isso, foi utilizada a aproximação linear de [Yang et al. \(2005\)](#): quando apenas um elemento sólido que está em contato com fluido, na interface  $S_{fs}$ , é removido então  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e} \approx \Delta \mathbf{f}$ . As Figuras 5.3a a 5.3c ilustram como é feita essa aproximação. Considere uma estrutura de elementos finitos durante uma iteração  $k$ , onde um elemento de fluido (em azul) aplica uma carga nos elementos sólidos (em cinza); essa carga é representada pelas flechas em magenta. Na seguinte iteração,  $k + 1$ , um dos elementos sólidos é removido e se torna fluido. A configuração da carga aplicada muda, como mostrado na Figura 5.3b. Subtraindo o vetor de cargas da iteração  $k$  da iteração  $k + 1$  é possível encontrar a variação da carga, ilustrada na Figura 5.3c, onde o mesmo pode ser representado matematicamente pelo vetor  $\overline{\Delta \mathbf{f}} = \{-1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1\}$ .

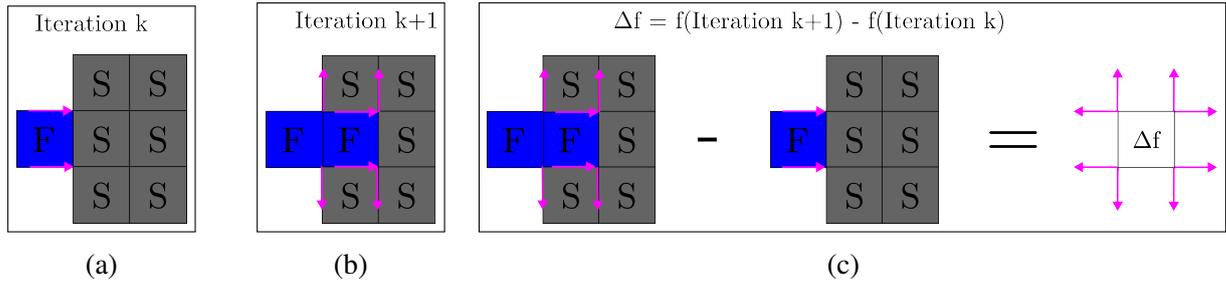


Figura 5.3 – Variação linear da carga,  $\Delta \mathbf{f}$  para remoção de um elemento. (a) Iteração antes da remoção de um elemento sólido. (b) Iteração depois da remoção de um elemento sólido. (c) Aproximação de  $\Delta \mathbf{f}$  baseada na conversão de um elemento sólido para um elemento fluido.

Considerando uma pressão  $P_{in}$  está sendo aplicada, então  $\Delta \mathbf{f} = \frac{1}{2} P_{in} A_e \overline{\Delta \mathbf{f}}$ , onde  $A_e$  é a área lateral de um elemento sólido.

Para os elementos vazios e sólidos que não estão em contato com fluido, os termos  $MSE$  e  $SE$  podem ser encontrados como mostrado nas Equações 4.28 e 4.29, respectivamente. A seguir é mostrado como os termos  $MSE$  e  $SE$  são calculados quando os elementos sólidos estão em contato com  $S_{fs}$ .

### 5.1.2 Termo $\frac{\partial MSE}{\partial x_e}$ com carga dependente

O termo  $\frac{\partial MSE}{\partial x_e}$  ainda é calculado pela Equação 4.9, contudo o termo  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e}$  deve ser calculado considerando  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e}$  não nulo.

Primeiramente, derivando a equação de equilíbrio do sistema  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ , encontra-se:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e} \quad (5.1)$$

Isolando o termo  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e}$  chega-se a:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e} = \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u} \right) \quad (5.2)$$

Substituindo a Equação 5.2 na Equação 4.9, o termo  $\frac{\partial MSE}{\partial x_e}$  se torna:

$$\frac{\partial MSE}{\partial x_e} = \mathbf{l}_{out}^T \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u} \right) = \delta_{out}^T \left( \Delta \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u} \right) \quad (5.3)$$

E considerando o método *soft-kill*:

$$\frac{\partial MSE}{\partial x_e} = \begin{cases} p \boldsymbol{\delta}_{\text{out},e}^T (\boldsymbol{\Delta f} - \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e) & \text{quando: } x_e = 1 \\ px_{\min}^{(p-1)} \boldsymbol{\delta}_{\text{out},e}^T (\boldsymbol{\Delta f} - \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e) & \text{quando: } x_e = x_{\min} \end{cases} \quad (5.4)$$

### 5.1.3 Termo $\frac{\partial SE}{\partial x_e}$ com carga dependente

O termo  $\frac{\partial SE}{\partial x_e}$  também deve ser recalculado considerando a carga dependente. Retornando à Equação 4.18 e considerando o termo de energia da mola virtual, tem-se:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial x_e} \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e} \right) - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} \quad (5.5)$$

Visto que agora  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_e} = \boldsymbol{\Delta f}$ , então:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\Delta f}^T \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e} \right) - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} \quad (5.6)$$

Usando o termo  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e}$  calculado na Equação 5.2:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \frac{1}{2} \left[ \boldsymbol{\Delta f}^T \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \left( \boldsymbol{\Delta f} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{u} \right) \right] - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} \quad (5.7)$$

Visto que  $\mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{u}$ , se chega a:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \boldsymbol{\Delta f}^T \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}^0 \mathbf{u} - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} \quad (5.8)$$

E considerando o método *soft-kill*:

$$\frac{\partial SE}{\partial x_e} = \begin{cases} p (\boldsymbol{\Delta f}^T \mathbf{u}_e - \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e) - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} & \text{quando: } x_e = 1 \\ px_{\min}^{(p-1)} (\boldsymbol{\Delta f}^T \mathbf{u}_e - \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}_e) - 2k_{\text{out}} MSE \frac{\partial MSE}{\partial x_e} & \text{quando: } x_e = x_{\min} \end{cases} \quad (5.9)$$

Assim, é possível realizar a análise de sensibilidade usando a Equação 4.23 calculando os termos  $\frac{\partial MSE}{\partial x_e}$  e  $\frac{\partial SE}{\partial x_e}$ . Os elementos de fluido são considerados como elementos vazios na análise de sensibilidade.

### 5.1.4 Problema de otimização dos Pa-CMs

O problema de otimização a ser resolvido pode ser representado por:

$$\text{Maximize: } f(\mathbf{x}) = \frac{MSE(\mathbf{x})}{SE(\mathbf{x})}$$

$$\text{Sujeito a: } \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$V^* - \sum_{e=1}^N V_e x_e = 0$$

$$x_e = x_{\min} \text{ ou } 1$$

(5.10)

A Figura 5.4 ilustra como a adição do fluido modifica o fluxograma da Figura 4.24, incluindo a identificação de elementos de fluido e a interface fluido-sólido que é representada pelos elementos sólidos em contato com elementos de fluido.

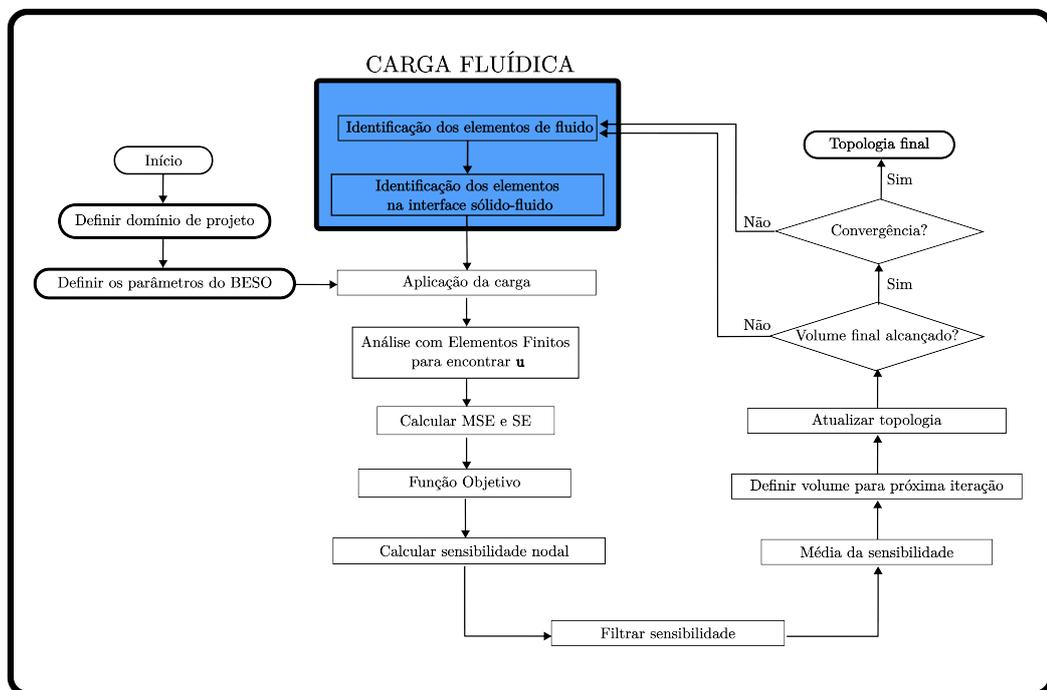


Figura 5.4 – Fluxograma do método BESO para Pa-CMs.

## 5.2 Resultados Numéricos de Exemplos

Com o intuito de validar e avaliar o método implementado, foram otimizados alguns mecanismos relatados em trabalhos recentes da literatura. Houve uma tentativa de repetir o máximo de parâmetros possíveis, como dimensões, materiais e malha. Com isso é possível se fazer uma comparação, ainda que aproximada, pois a maioria dos Pa-CMs reportados na literatura usam métodos com variáveis de projeto contínuas, chegando a soluções com elementos com propriedades intermediárias, que influenciam na performance final do mecanismo

otimizado. Os mecanismos pinça, inversor e *contractor* foram comparados com os resultados publicados por Kumar *et al.* (2020) e Kumar e Langelaar (2022); o mecanismo esticador foi comparado com Panganiban *et al.* (2010); o mecanismo dobrador foi comparado com De Souza e Silva (2020); e o mecanismo inversor de 2 saídas não foi encontrado na literatura consultada. O modelo de elementos finitos utilizado para realizar os cálculos numéricos usou elementos do tipo quadrilátero bilinear com estado plano de tensão. Com exceção do mecanismo dobrador, todos foram modelados considerando simetria, de forma a reduzir o tempo computacional.

### 5.2.1 Mecanismo Pinça Atuado por Pressão

O mecanismo pinça atuado por pressão se assemelha ao mecanismo pinça invertido atuado por carga fixa, como ilustrado na Figura 4.12. A direção do deslocamento na saída desejado é oposta ao deslocamento inicial da topologia cheia, quando a carga  $P_{in}$  é aplicada. A Figura 5.5a ilustra as condições de contorno do mecanismo, e a Figura 5.5b ilustra as condições de contorno considerando simetria.

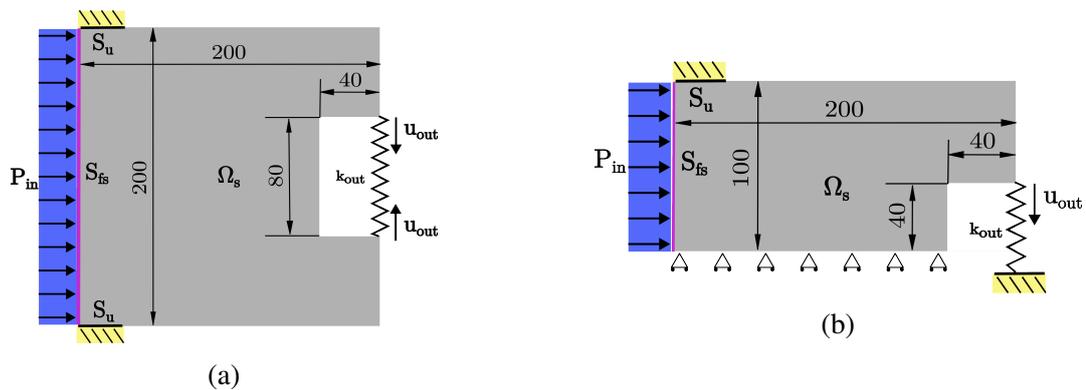


Figura 5.5 – Condições de contorno do mecanismo pinça atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização.

A otimização foi realizada considerando um material com Módulo de Young de  $3 \times 10^9 \text{Pa}$  e coeficiente de Poisson de 0,4. O domínio de projeto da Figura 5.5b utilizado possui dimensões de  $0,2\text{m} \times 0,1\text{m}$  e uma malha de  $200 \times 100$  elementos, com uma espessura de 1mm. O contorno  $S_u$  é definido como 1/100 do comprimento no sentido x (1mm). A pressão de atuação utilizada foi de 1 bar ( $1 \times 10^5 \text{Pa}$ ) e a mola virtual adicionada na saída foi considerada como  $k_{out} = 1 \times 10^{11} \text{N/m}$ . Depois de alguns testes computacionais construindo e simulando estruturas próximas das topologias encontradas em Kumar e Langelaar (2022), se chegou à conclusão que os resultados de deslocamentos relatados em Kumar e Langelaar (2022) consideram os mecanismos com uma mola virtual de  $1 \times 10^4 \text{N/m}$  na saída. Por isso, para se fazer compara-

ções com os resultados relatados em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), os resultados de deslocamento mostrados nesse trabalho para os mecanismos inversor, pinça e *contractor* foram calculados com uma mola  $k_{out} = 10^4 \text{N/m}$  na saída, substituindo a mola virtual utilizada na otimização. Isto é, os mecanismos foram otimizados com os valores de  $k_{out}$  descritos no texto, mas na hora de verificar o deslocamento na saída da topologia final para comparar com os resultados de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), o valor de  $k_{out}$  foi substituído por  $10^4 \text{ N/m}$ . Isso não se aplica para o deslocamento final dos outros mecanismos relatados neste trabalho, o deslocamento relatado para os outros mecanismo é relativo à estrutura sem nenhuma mola virtual na saída.

Os parâmetros da otimização BESO do exemplo mostrado aqui foram configurados como  $ER = 2\%$ ,  $AR = 2\%$  e  $r_{min} = 2,5L_e$ , onde  $L_e$  é o tamanho dos lados de cada elemento, que para uma malha  $200 \times 100$  possui um valor de 1mm. Um volume final de 20% foi utilizado.

A Figura 5.6a ilustra a topologia final, onde a região em azul representa o domínio  $\Omega_f$  e os elementos em magenta representam os elementos sólidos em contato com fluido, os elementos carregados. A Figura 5.6b mostra o deslocamento do mecanismo quando a pressão é aplicada.

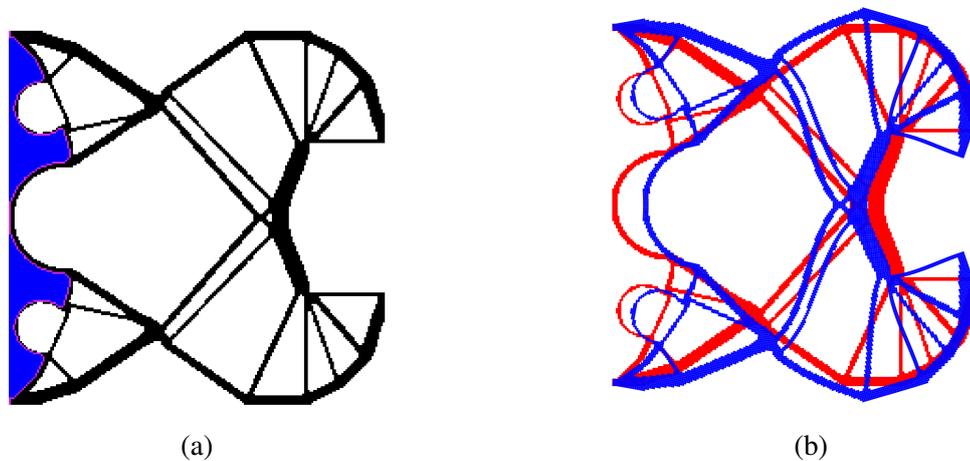


Figura 5.6 – Resultados da otimização do mecanismo pinça atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (ampliado em 5 vezes).

A topologia encontrada é similar às topologias encontradas para carga fixa, ilustrada nas Figuras 4.13a e 4.31a, a diferença está na complexidade do padrão de conexão das barras. Algo que chama bastante atenção nessa topologia são os semicírculos que se formam na região carregada e criam uma maior área de contato no sentido horizontal, e conseqüentemente geram uma carga maior. Outra explicação para o surgimento do círculo central, seria a concentração da carga em um ponto, imitando um mecanismo atuado por uma carga pontual. As barras

intermediárias que surgem dentro do mecanismo têm uma função de sustentação, aumentando a rigidez da estrutura. Essa topologia é bem diferente das topologias encontradas em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), que foi o trabalho escolhido para comparação direta dos resultados. Um dos resultados de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#) é ilustrado na Figura 5.7. Os mecanismos pinça relatados em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#) têm uma superfície carregada côncava no sentido da carga, enquanto a topologia descrita aqui cria concavidades tanto para dentro quanto para fora. Além disso, o deslocamento na saída encontrado para esse caso (considerando a mola virtual de  $10^4\text{N/m}$ ) foi de 0,51mm, enquanto o maior deslocamento para esse mecanismo relatado em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), para uma fração de volume de 20%, foi de 0,20mm (Figura 5.7).

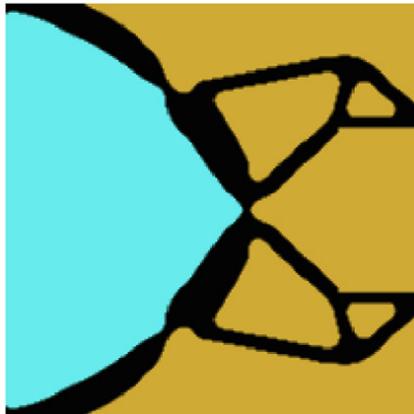


Figura 5.7 – Topologia do mecanismo pinça de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#).

A Figura 5.8 mostra a evolução da função objetivo e da fração de material durante a otimização, que finaliza em 87 iterações. A Figura 5.9 mostra como as funções *MSE* e *SE* evoluem no decorrer da otimização. O comportamento das funções *MSE* e *SE* e da função objetivo é bem similar para os casos de problemas com carga fixa. Comparando esses gráficos com os resultados do mecanismo pinça invertida, nas Figura 4.11 e 4.33, é observado aqui que a evolução das funções é mais suave. As iterações onde há quedas bruscas na função objetivo é devido à remoção de elementos que proporcionam maior rigidez, e por isso causa aumento na energia de deformação. Apesar da otimização começar tirando material da saída, como no caso da carga fixa, rapidamente material é repostado nessa região.

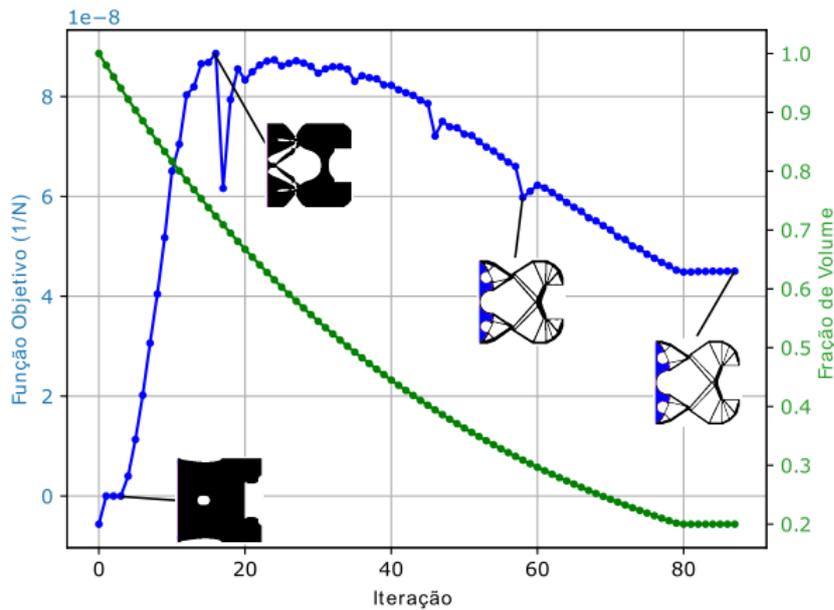


Figura 5.8 – Evolução da otimização topológica do mecanismo pinça atuado por pressão.

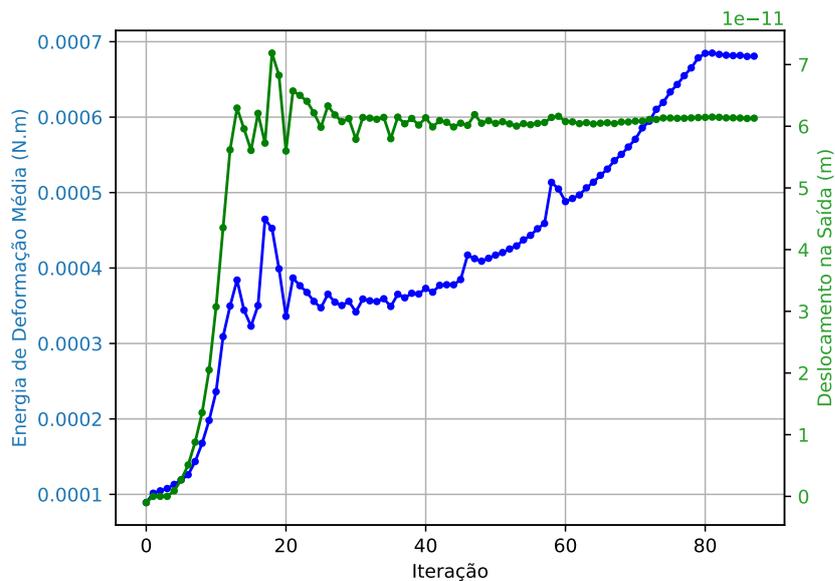


Figura 5.9 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo pinça atuado por pressão.

### 5.2.2 Mecanismo Inversor Atuado por Pressão

O mecanismo inversor atuado por pressão funciona como o mecanismo inversor otimizado anteriormente, seu objetivo é inverter a direção do deslocamento na saída em uma direção contrária à da pressão de atuação na entrada, como ilustrado na Figura 5.10a. A otimização foi realizada em metade da estrutura considerando condições de contorno de simetria, como mostrado na Figura 5.10b.

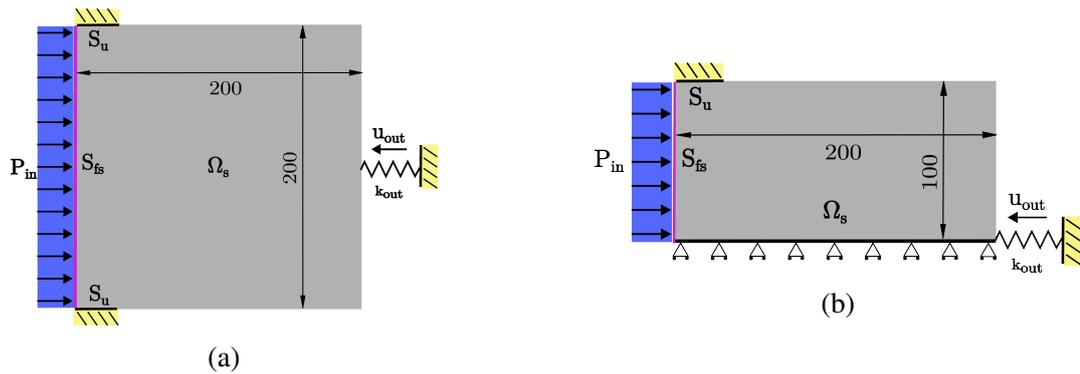


Figura 5.10 – Condições de contorno do mecanismo inversor atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização.

Para o mecanismo inversor se utilizou parâmetros de  $ER = 2\%$ ,  $AR = 2\%$  e  $r_{\min} = 2,5L_e$ . O volume final é de 20%. A rigidez da mola virtual é de  $10^{11}\text{N/m}$ . O material, malha, dimensões do domínio de projeto e comprimento de  $S_u$  são os mesmos do mecanismo pinça atuado por pressão.

A Figura 5.11a ilustra a topologia final. A topologia encontrada é diferente da topologia para uma força fixa e das topologias relatadas por [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), onde a maioria apresenta uma região de fluido bem maior, como ilustrado na Figura 5.12. O mecanismo cria uma pequena reentrância na região de atuação com regiões arredondadas que permitem uma maior transmissão de força. A otimização termina antes que as estruturas pontiagudas na região de atuação sejam removidas. A Figura 5.11b mostra o deslocamento do mecanismo quando a pressão é aplicada. O deslocamento final na saída é de 0,47mm com a mola de  $10^4\text{N/m}$ , enquanto o maior deslocamento para uma fração de volume de 20% relatado em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#) foi de 0,29mm (Figura 5.12).

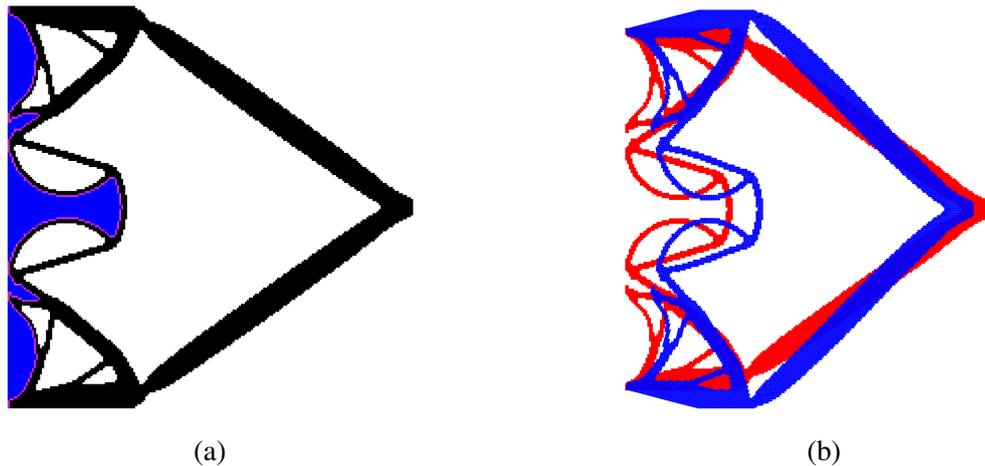


Figura 5.11 – Resultados da otimização do mecanismo inversor atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (ampliado em 10 vezes).

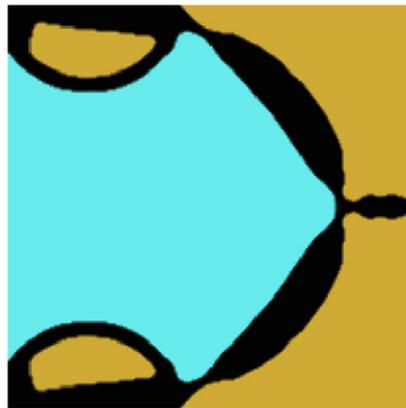


Figura 5.12 – Topologia do mecanismo inversor de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#).

A Figura 5.13 ilustra a evolução da função objetivo e fração de volume, onde a otimização leva 100 iterações para finalizar. Como no caso do mecanismo pinça, nas primeiras iterações é retirado material da região da saída, contudo cerca de 30 iterações são necessárias para que o material seja repostado na saída novamente. Depois que isso acontece a função objetivo evolui suavemente até a iteração 75, onde a função objetivo tem uma queda brusca devido a quebra de uma barra interna. A Figura 5.14 mostra como as funções  $MSE$  e  $SE$  variam na otimização. A curva da função  $SE$  foi cortada por conta de grandes saltos que a variável faz devido à formação de juntas flexíveis durante a otimização. O valor máximo alcançado por esses picos foi de 91,58N.m. Observando as duas funções, vê-se que elas sofrem mudanças bruscas quando a otimização põe material no ponto da saída, e quando ocorre a quebra de uma barra interna importante. A função  $MSE$  evolui suavemente, com saltos nessas iterações citadas.

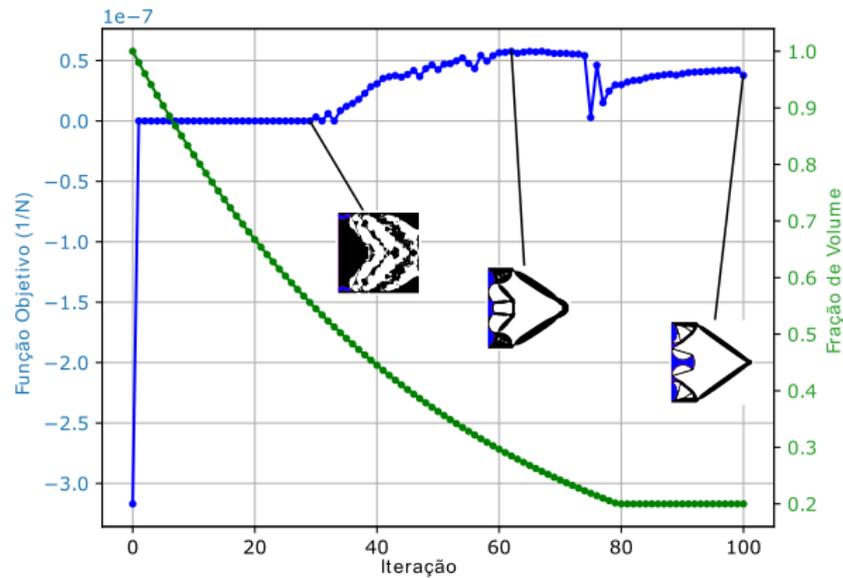


Figura 5.13 – Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor atuado por pressão.

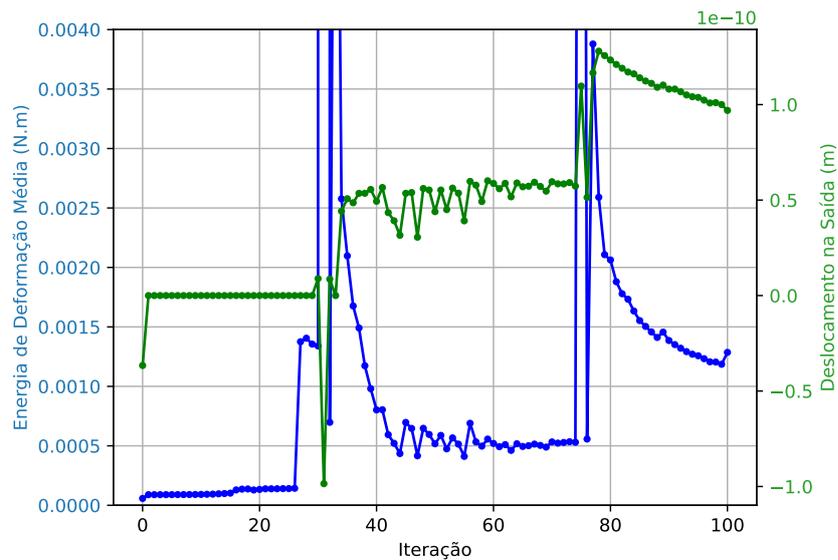


Figura 5.14 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo inversor atuado por pressão.

### 5.2.3 Mecanismo *Contractor* Atuado por Pressão

O mecanismo *contractor* foi abordado apenas em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#). A Figura 5.15a mostra as condições de contorno do mecanismo. O *contractor* funciona sendo atuado por pressão fluídica nas superfícies esquerda e direita para fazer um movimento vertical de contração (como do mecanismo pinça) em dois pontos da estrutura em direção ao seu centro. Visto que a estrutura é simétrica no sentido horizontal e vertical, as condições de contorno da

Figura 5.15b foram utilizadas para reduzir o custo computacional, utilizando somente 1/4 da estrutura total.

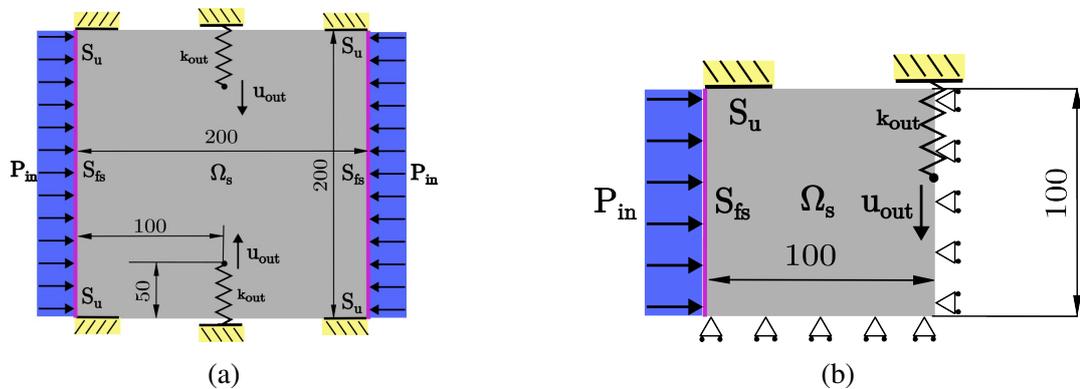


Figura 5.15 – Condições de contorno do mecanismo *contractor* atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização.

Os resultados mostrados aqui utilizam um valor de  $ER = 2\%$  e  $AR = 2\%$ . Esse mecanismo se mostrou muito instável, por isso o parâmetro  $\beta$ , da média histórica, foi utilizado com valor de 0,6 para permitir uma variação da topologia um pouco mais conservadora<sup>1</sup>. Parâmetros do material e  $r_{\min}$  foram considerados os mesmos do exemplo do mecanismo pinça. Foi utilizado um comprimento de  $S_u$  igual a 1/20 do comprimento em x ( $S_u = 5\text{mm}$ )<sup>2</sup> e o valor de rigidez da mola virtual foi de  $1 \times 10^{11}\text{N/m}$ . Visto que foi usado 1/4 da estrutura total, as dimensões são  $0,1\text{m} \times 0,1\text{m}$  e malha de  $100 \times 100$  elementos. O volume final foi configurado para 20%. A topologia final é ilustrada na Figura 5.16a e o deslocamento do mecanismo causada pela pressão  $P_{\text{in}}$  está ilustrada na Figura 5.16b.

<sup>1</sup> A média histórica é explicada na Seção 3.3

<sup>2</sup> Em Kumar e Langelaar (2022) foi usado um  $S_u = 10\text{mm}$ . Usando esse valor, a otimização divergia mesmo usando valores menores de  $AR$  e  $ER$ .

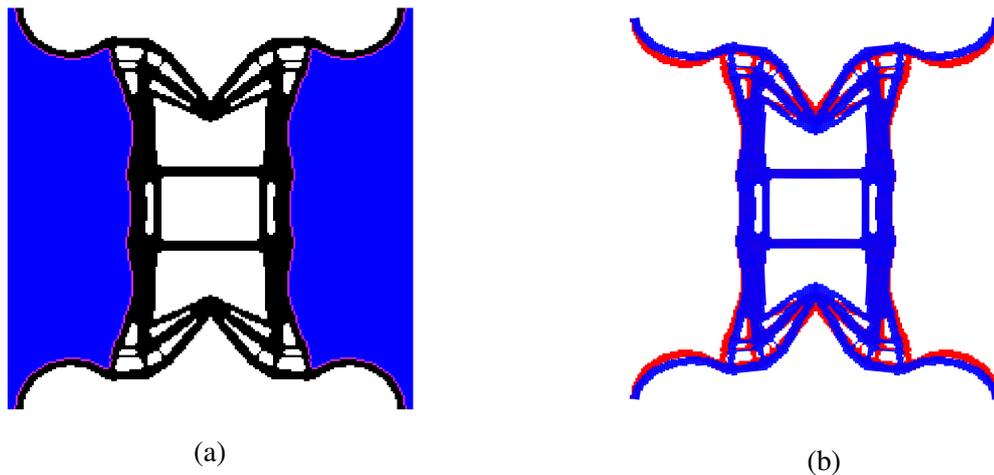


Figura 5.16 – Resultados da otimização do mecanismo *contractor* atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (ampliado em 20 vezes).

A otimização desse mecanismo se mostrou bastante instável, nas primeiras iterações (e também para os casos em que maiores valores de  $AR$  e  $ER$  foram usados). A otimização tendia a retirar material da região de suporte (contorno  $S_u$  da Figura 5.15a). A topologia criou várias barras finas, incluindo barras horizontais no centro da topologia, dessa forma consegue criar uma carga maior no sentido vertical e uma maior rigidez no sentido horizontal, o sentido da pressão. A topologia deslocada pode ser visualizada na Figura 5.16b, em azul. O deslocamento final na saída foi de 0,15mm, enquanto em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#) para uma fração de volume de 20% o maior deslocamento relatado foi 0,09mm. A topologia relatada em [Kumar e Langelaar \(2022\)](#) para esse mecanismo pode ser visualizada na Figura 5.17. Como se pode ver a forma exterior das topologias são bem similares, mas a topologia encontrada aqui possui muitas barras internas.

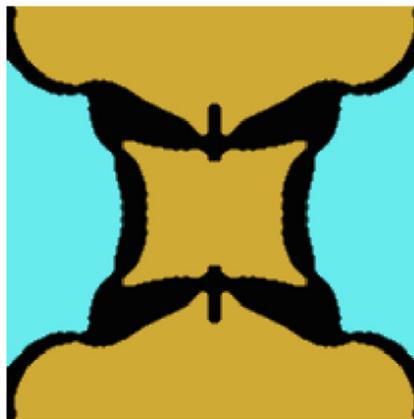


Figura 5.17 – Topologia do mecanismo *contractor* de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#).

A Figura 5.18 mostra como a função objetivo se comporta durante a otimização. Até a iteração 44 a otimização é bastante instável, pois quando o suporte em  $S_u$  é desconectado, a função objetivo vai para zero. Quando a otimização começa se estabilizar é o momento em que o mecanismo começa a tomar uma forma e chega a uma topologia final factível, atingindo até 84 iterações. A Figura 5.19 mostra a evolução da função  $MSE$  e  $SE$ . Nessa figura, a curva da função  $SE$  também foi cortada por conta dos picos desproporcionais devido à desconexão do suporte, para facilitar a visualização da evolução. O valor máximo encontrado nesses picos foi de 1239 N.m. É possível ver que ambas as variáveis crescem continuamente, com exceções dos grandes saltos na curva de energia de deformação.

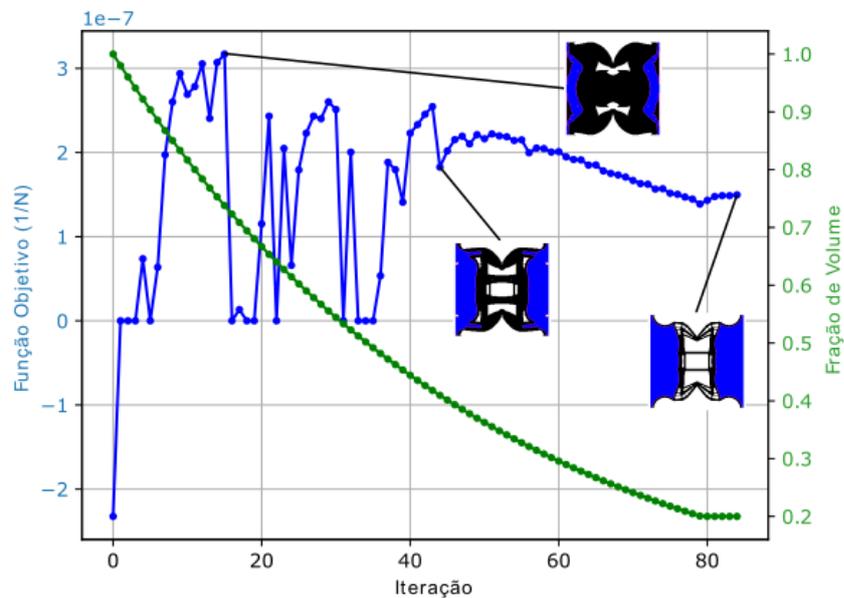


Figura 5.18 – Evolução da otimização topológica do mecanismo *contractor* atuado por pressão.

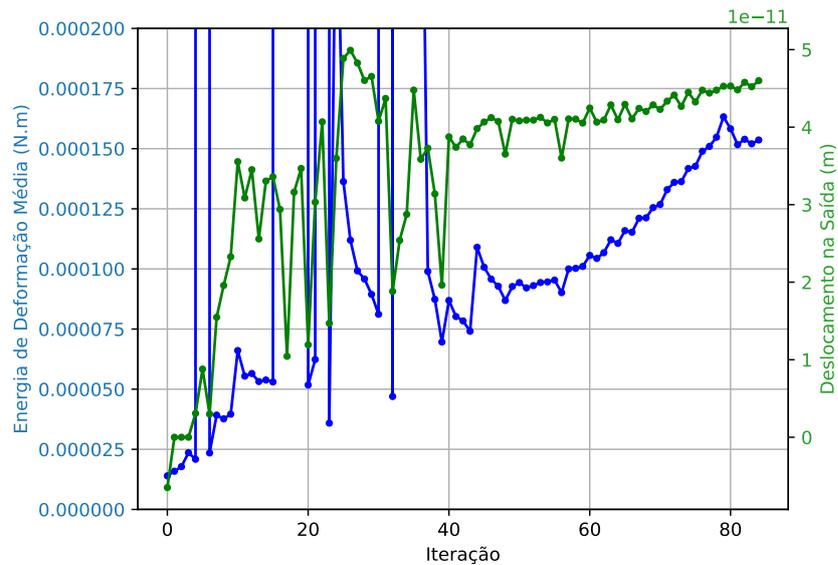


Figura 5.19 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo *contractor* atuado por pressão.

#### 5.2.4 Mecanismo Esticador Atuado por Pressão

O mecanismo esticador se assemelha à uma atuação inversa do mecanismo *crunching*, representado na Figura 4.16<sup>3</sup>. Dessa forma, o objetivo do mecanismo é gerar um movimento de expansão vertical na extremidade direita, quando uma força é aplicada na entrada esquerda. A Figura 5.20a ilustra as condições de contorno do mecanismo esticador atuado por pressão. A pressão  $P_{in}$  aplicada por um fluido deve produzir o deslocamento  $u_{out}$ . A Figura 5.20b ilustra as condições de contorno com simetria imposta que foi utilizada na otimização topológica realizada.

<sup>3</sup> Visto que o material utilizado é elástico linear, se uma força for aplicada no ponto da saída e em uma direção inversa à  $u_{out}$  da Figura 4.16, causaria um deslocamento nos pontos de entrada em direção inversa a  $F_{in}$ .

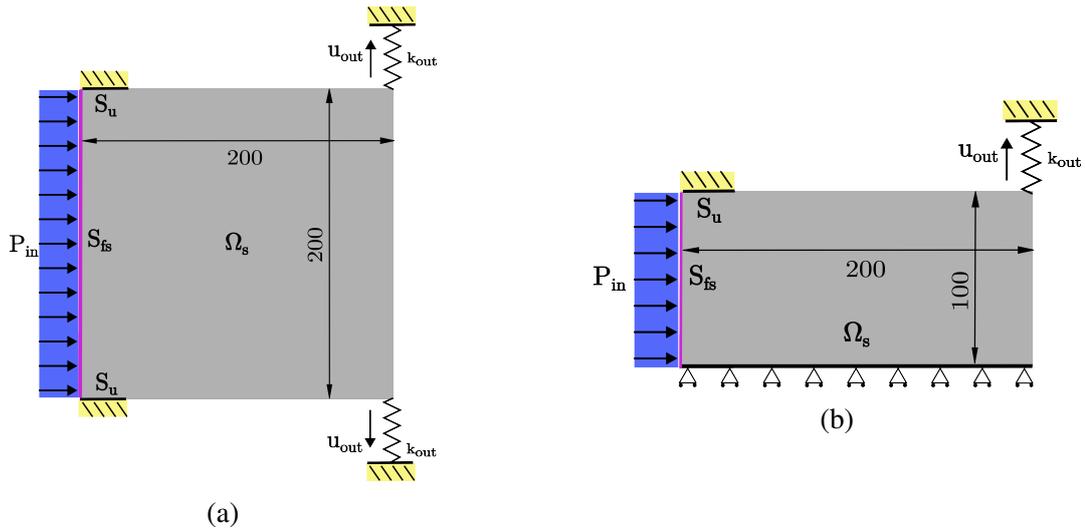


Figura 5.20 – Condições de contorno do mecanismo esticador atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização.

As propriedades do material foram consideradas as mesmas de [Panganiban \*et al.\* \(2010\)](#):  $E = 1\text{Pa}$ ,  $\nu = 0,3$ . Em [Panganiban \*et al.\* \(2010\)](#) a pressão utilizada foi de um valor unitário, porém aqui a pressão foi reduzida para não causar deslocamentos exagerados nos resultados de deslocamento na saída. Dessa forma, foi utilizada uma pressão de  $P_{in} = 1 \times 10^{-5}\text{Pa}$ . As dimensões são  $1\text{m} \times 0,5\text{m}$  da Figura 5.20b, com uma espessura de  $1\text{mm}$ , e usando uma malha de  $200 \times 100$  elementos. O comprimento  $S_u$  foi dado como  $50\text{mm}$ . A mola virtual na saída foi adicionada com uma rigidez de  $k_{out} = 100\text{N/m}$ . Os parâmetros da otimização,  $r_{min}$ ,  $AR$  e  $ER$  foram dados como  $2L_e$ ,  $1\%$  e  $1\%$ , respectivamente. Esses valores mais baixos que os usados nos mecanismos anteriores foram escolhidos por conta da instabilidade do mecanismo. O volume de restrição usado foi de  $30\%$  do volume inicial.

Visto que [Panganiban \*et al.\* \(2010\)](#) não traz valores de deslocamento na saída, não é possível se fazer comparações mais quantitativas da performance das topologias encontradas, como feito com [Kumar e Langelaar \(2022\)](#) anteriormente. Por isso foram usados valores de  $P_{in}$  e  $k_{out}$  diferentes do artigo. Contudo, ainda é possível comparar a topologia final encontrada com as topologias apresentadas em [Panganiban \*et al.\* \(2010\)](#). A Figura 5.21a ilustra a topologia final encontrada para esse mecanismo. O mecanismo final é mais complexo que o mecanismo *crunching* otimizado anteriormente, e suas conexões por barras, apesar de mais simples que o mecanismo pinça, não são triviais. Além disso, o mecanismo também se difere dos dois mecanismos relatados em [Panganiban \*et al.\* \(2010\)](#), ilustrados na Figura 5.22, que não apresentam barras horizontais no centro. A Figura 5.21b ilustra o deslocamento do mecanismo. O deslocamento atingido por essa topologia foi de  $0,41\text{mm}$ .

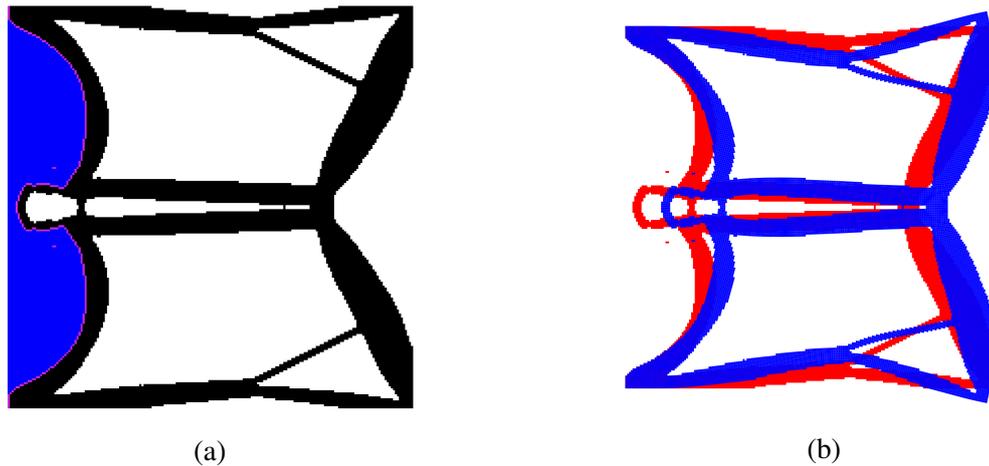


Figura 5.21 – Resultados da otimização do mecanismo esticador atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de  $1 \times 10^{-5}$  Pa em azul (ampliado em 100 vezes).

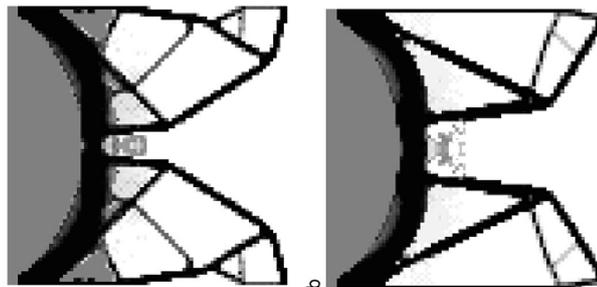


Figura 5.22 – Topologia do mecanismo esticador de Panganiban *et al.* (2010).

A Figura 5.23 ilustra a evolução do mecanismo durante a otimização topológica. A topologia mostrada na iteração 38 é similar à topologia que se forma quando o mecanismo *crunching* começa a tomar forma, ilustrado na iteração 10 da Figura 4.35. A otimização é finalizada na iteração 125, realizando apenas algumas iterações depois de atingir o volume de restrição  $V^*$ . A evolução se mostrou bastante suave, o que não aconteceu usando valores maiores de  $ER$  e  $AR$ , onde a evolução se torna bem instável. Isso mostra que esse mecanismo é muito sensível aos parâmetros utilizados na otimização, ao contrário do mecanismo *contractor* que é instável independente dos parâmetros que forem usados. De acordo com os testes realizados, acredita-se que essa instabilidade está relacionada à união da região de fluido com grandes regiões de vazio. Quando isso acontece, ocorre uma grande variação no carregamento da estrutura e a análise de sensibilidade varia completamente de uma iteração para outra. A Figura 5.24, mostra um aumento gradual das funções  $MSE$  e  $SE$  depois que a otimização passa da iteração 20, ambas as funções evoluem de forma relativamente estável e sem grandes saltos, o que não ocorreu com os Pa-CMs relatados anteriormente. Contudo, isso pode ser dito apenas para uma taxa de mudança

topológica baixa, para valores de  $AR$  e  $ER$  mais altos, as funções citadas tendem a evoluir de forma mais inconstante.

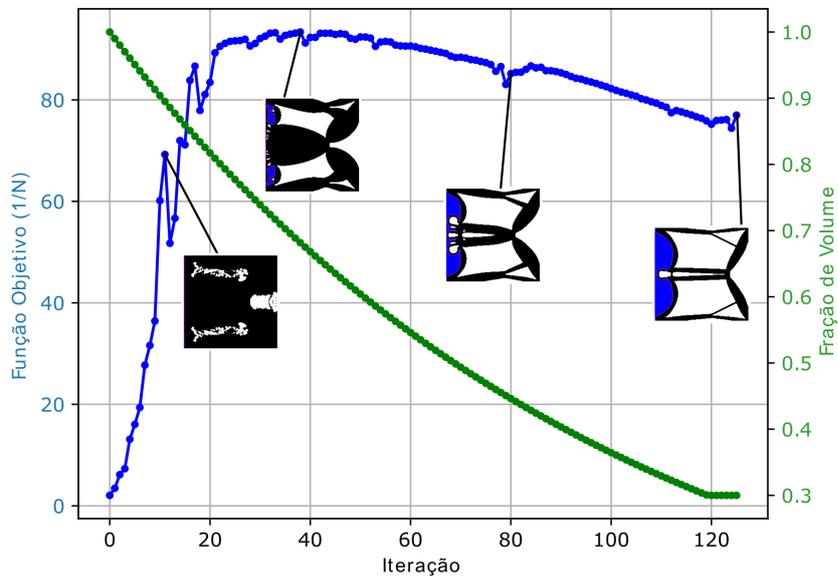


Figura 5.23 – Evolução da otimização topológica do mecanismo esticador atuado por pressão.

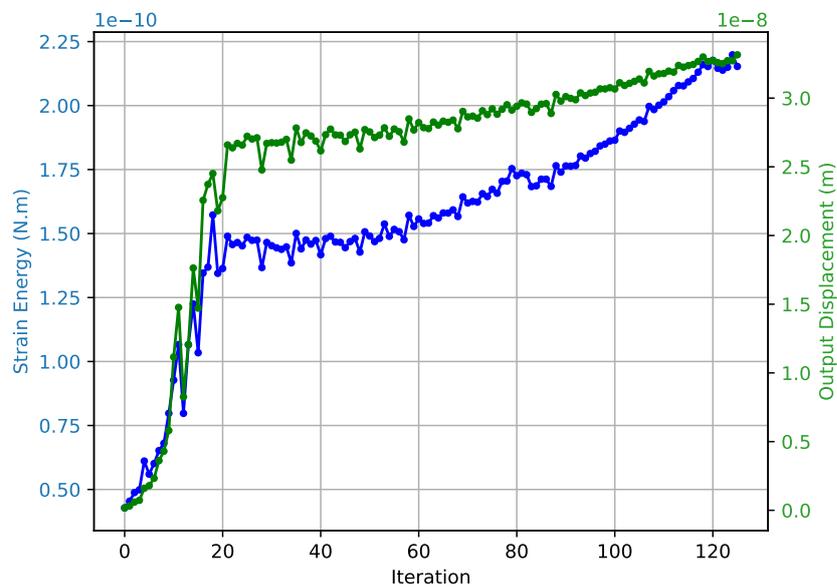


Figura 5.24 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo esticador atuado por pressão.

### 5.2.5 Mecanismo Dobrador Atuado por Pressão

O mecanismo dobrador atuado por pressão é um mecanismo que busca deslocar sua ponta inferior oposta ao lado de aplicação da carga. A Figura 5.25 ilustra as condições de contorno desse mecanismo. Devido à assimetria da estrutura, não é possível aplicar condições

de simetria como nos outros mecanismos. O exemplo abordado aqui foi retirado de [De Souza e Silva \(2020\)](#) e reproduzido com o BESO.

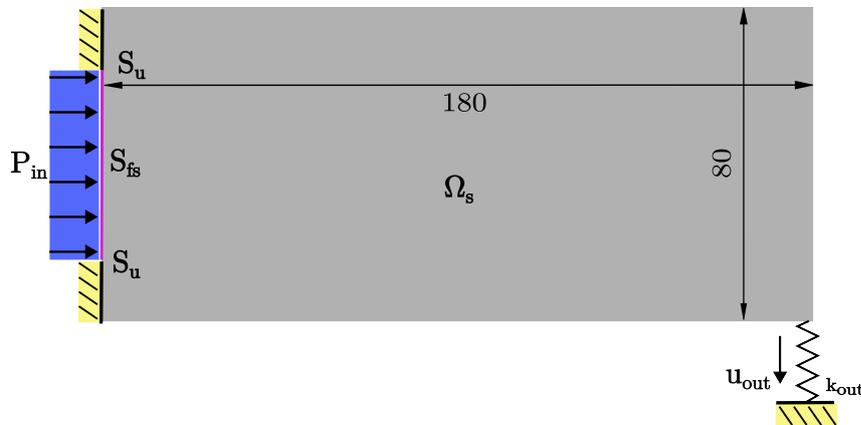


Figura 5.25 – Condições de contorno do mecanismo dobrador atuado por pressão.

Para realizar a otimização se considerou o mesmo material de [De Souza e Silva \(2020\)](#):  $E = 10\text{MPa}$ ,  $\nu = 0,45$ , dimensões de  $0,18\text{m} \times 0,08\text{m}$ , espessura de  $10\text{mm}$ , uma malha de  $180 \times 80$  elementos,  $P_{in} = 1\text{bar}$ ,  $k_{out} = 10^6\text{N/m}$ ,  $r_{min} = 3\text{mm}$ , e comprimento de  $S_u = 10\text{mm}$ .  $ER$  e  $AR$  receberam um valor de  $1\%$  por conta da instabilidade do mecanismo, e ainda assim se usou um valor de  $\beta = 0,8$  na média histórica da distribuição do número de sensibilidade para ajudar a estabilizar a otimização. Foi utilizado uma restrição de volume de  $50\%$ , que não é relatada em [De Souza e Silva \(2020\)](#), mas sim em [De Souza \(2020\)](#). Visto que [De Souza e Silva \(2020\)](#) não indica o valor da pressão e mola virtual aplicada nas suas estruturas, torna-se difícil a comparação dos seus resultados de performance de suas topologias finais com as topologias encontradas neste trabalho. Por isso, as comparações discutidas aqui, são comparações qualitativas.

A Figura 5.26a ilustra a topologia final atingida. A topologia é mais complexa que a topologias encontradas em [De Souza e Silva \(2020\)](#), no exemplo ilustrado há mais conexões de barras como mostrado na Figura 5.27. Isso se deve ao valor de  $r_{min}$  que possui um valor menor que os relatados no artigo, para facilitar criação de barras mais finas, que pudessem estabilizar a otimização. Em alguns testes, foi observada a quebra do mecanismo com a região de suporte  $S_u$ , causando também um “vazamento” de fluido, visto que o domínio do fluido entra em contato com a borda do domínio de projeto. Esse problema também foi relatado em [De Souza e Silva \(2020\)](#). Por conta desse comportamento, essa otimização também se torna muito instável. Isso acontece porque a tendência da otimização é retirar o suporte superior. A minimização de  $SE$  não parece ser o suficiente para impedir esse comportamento. A Figura

5.26b ilustra o mecanismo deslocado, mostrando que o método obteve sucesso em otimizar esse mecanismo sem o auxílio de um método secundário para impedir o “vazamento” do fluido, e gerando uma topologia não trivial. O deslocamento encontrado foi de 87mm.

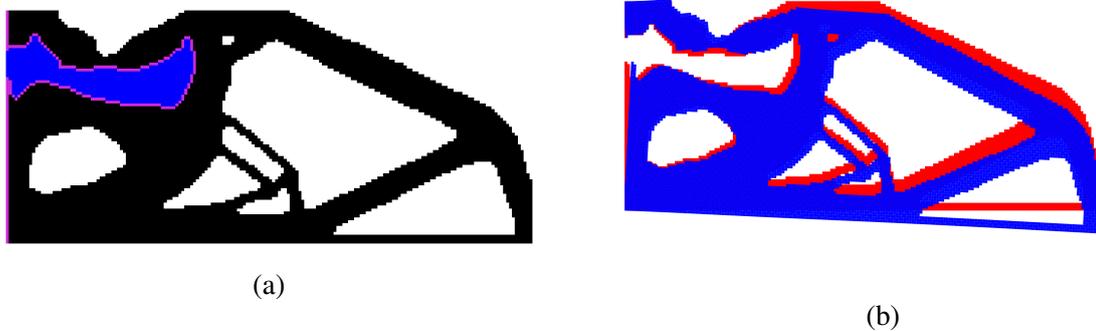


Figura 5.26 – Resultados da otimização do mecanismo dobrador atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (reduzido em 10 vezes).



Figura 5.27 – Topologia do mecanismo dobrador de [De Souza e Silva \(2020\)](#).

A Figura 5.28 mostra a evolução da função objetivo e fração de volume da otimização realizada. É possível ver que nas primeiras iterações, a função objetivo vai para zero, não por conta da retirada de material da região saída, como em outros mecanismos, mas sim por conta da retirada de material do suporte superior. Mas logo, material é repostado nessa região, e o mecanismo começa a tomar forma e finaliza a otimização em 94 iterações. A evolução da curva é tão instável quanto as curvas dos testes usando outros valores de  $\beta$ , contudo esse foi o exemplo que apresentou uma topologia factível ao final. A Figura 5.29 mostra a instabilidade da otimização através da grande flutuação do valor de  $SE$  que é mais sensível à retirada de material do suporte. O valor de  $SE$  apresentou valores muito altos por conta dessa instabilidade, e por isso o gráfico possui um limite superior bem abaixo desses grandes picos, que têm um valor máximo de 2267955 N.m. Contudo, ainda assim é difícil de se visualizar o que acontece com os dois parâmetros por conta da alta instabilidade na evolução dos parâmetros  $SE$  e  $MSE$ . O

que se pode notar, é que o valor do deslocamento da saída e a energia de deformação diminuem nas últimas iterações, mostrando que no final a otimização tende a valorizar o aumento da rigidez. Esse é outro exemplo de otimização que é prejudicada pela variação discreta de vazio para fluido e vice-versa.

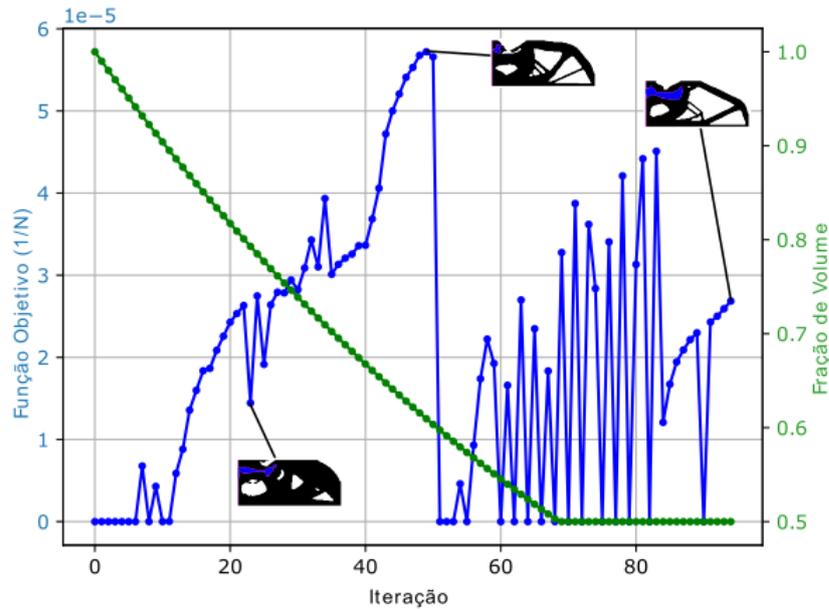


Figura 5.28 – Evolução da otimização topológica do mecanismo dobrador atuado por pressão.

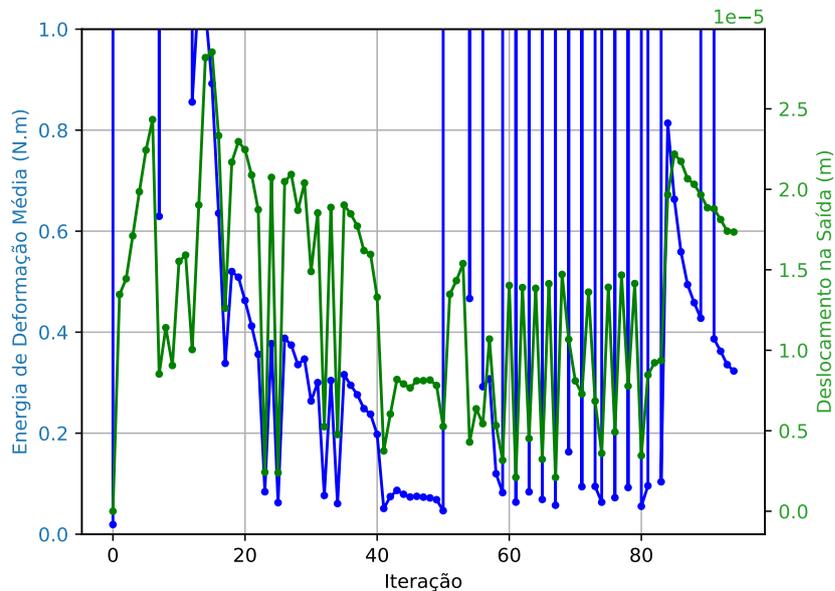


Figura 5.29 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo dobrador atuado por pressão.

### 5.2.6 Mecanismo Inversor com 2 Saídas Atuado por Pressão

Assim como o mecanismo inversor de duas saídas da Figura 4.20, o mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão busca inverter o movimento de suas duas extremidades no sentido contrário da aplicação da carga. A Figura 5.30a ilustra as condições de contorno para o domínio de projeto completo e a Figura 5.30b ilustra as condições de contorno com simetria imposta.

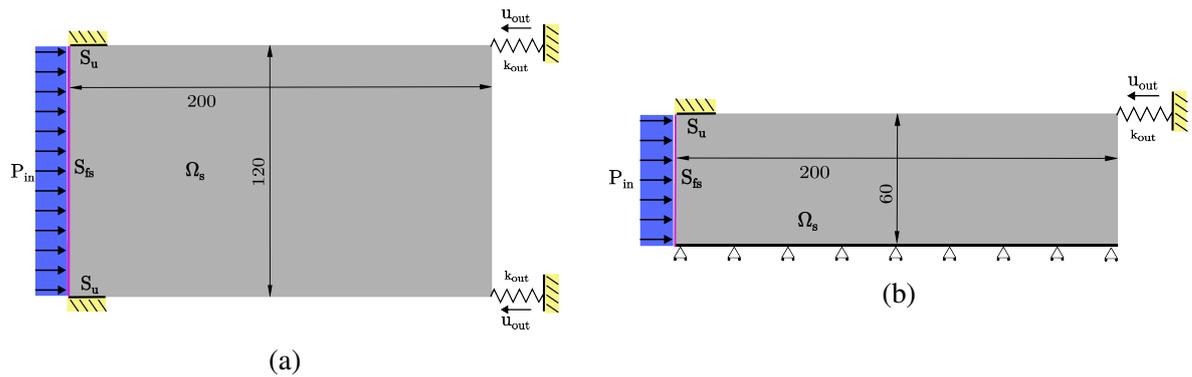


Figura 5.30 – Condições de contorno do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão. (a) Representação total. (b) Condições de contorno com simetria usadas na otimização.

Visto que não foram encontrados trabalhos otimizando esse mecanismo, nessa seção não se é feita nenhuma comparação com resultados encontrados na literatura. As propriedades do material,  $r_{\min}$ ,  $P_{\text{in}}$  são as mesmas descritas para o mecanismo inversor, usando uma malha  $200 \times 60$  elementos e com dimensões  $0,2\text{m} \times 0,06\text{m} \times 1\text{mm}$  para modelo com simetria, comprimento do contorno  $S_u = 10\text{mm}$ ,  $k_{\text{out}} = 10^{11}\text{N/m}$ ,  $ER = 3\%$ ,  $AR = 3\%$  e  $V^* = 30\%$ . A Figura 5.31a ilustra a topologia final e a Figura 5.31b ilustra o deslocamento do mecanismo atuado pelo fluido.

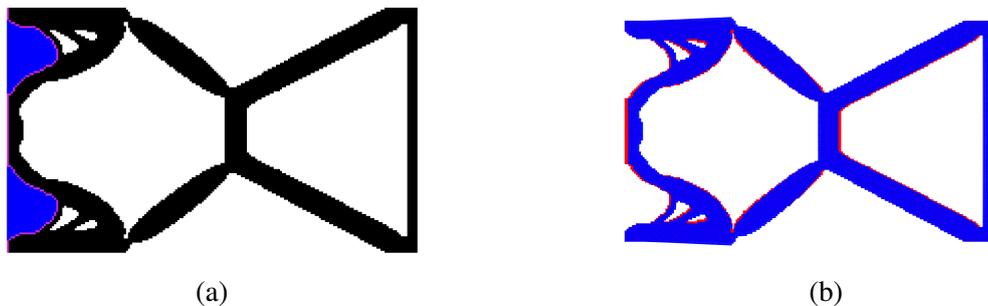


Figura 5.31 – Resultados da otimização do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão. (a) Topologia final. (b) Mecanismo não deslocado em vermelho, e deslocado com pressão de 1bar em azul (ampliado em 10 vezes).

A topologia é bem similar à topologia encontrada para o mecanismo inversor de duas saídas com carga fixa otimizado anteriormente. O deslocamento alcançado por essa topologia é de 0,14mm.

A Figura 5.32 ilustra a evolução da função objetivo e fração de volume e a Figura 5.33 ilustra a evolução das funções  $MSE$  e  $SE$  durante a otimização. Durante as primeiras iterações, grande parte do material é removido do lado da saída. O material repostado cria uma topologia desuniforme como ilustrado na Figura 5.32, a topologia ilustrada na iteração 44, que é o ponto em que o mecanismo começa a tomar forma. Aos poucos a topologia vai organizando o material até chegar na topologia final da Figura 5.31a. No total a otimização leva 99 iterações, mas mais da metade das iterações é o processo do algoritmo tentando encontrar uma topologia factível. Alguns valores de  $ER$  e  $AR$  foram testados de forma a encontrar uma combinação de parâmetros que levasse a uma topologia factível mais rapidamente e fosse mais estável. Contudo, para todas as combinações testadas, o mecanismo só começa a se formar algumas iterações depois que o volume de restrição é atingido. Por conta dessa instabilidade, a curva da função  $SE$  não varia muito durante as primeiras iterações, e quando o ponto da saída começa a receber material novamente, a curva faz grandes saltos. Devido a esses saltos, a curva da energia de deformação foi cortada, onde seu valor máximo atingido foi 2039 N.m. A Figura 5.33 também mostra que o deslocamento da saída máximo é atingido na iteração 62, mas vai diminuindo no decorrer da otimização, pois o método tende a aumentar a rigidez. Isso pode ser verificado com a redução de  $SE$  nas últimas iterações. Isso também pode ser visualizado nas duas últimas topologias ilustradas na Figura 5.32, a principal diferença entre as duas últimas topologias ilustradas é uma redução do tamanho das barras que transmitem o movimento para a saída. Com o encurtamento delas, a estrutura se torna mais rígida.

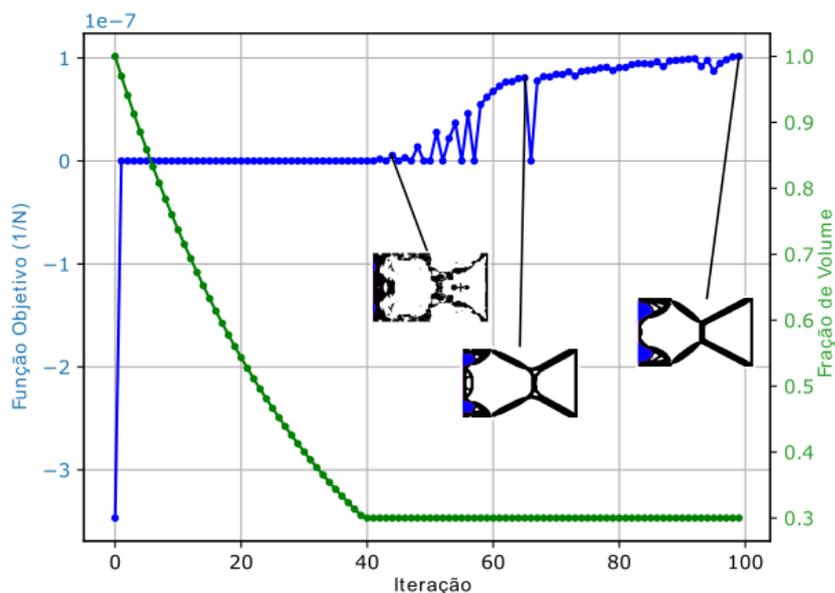


Figura 5.32 – Evolução da otimização topológica do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão.

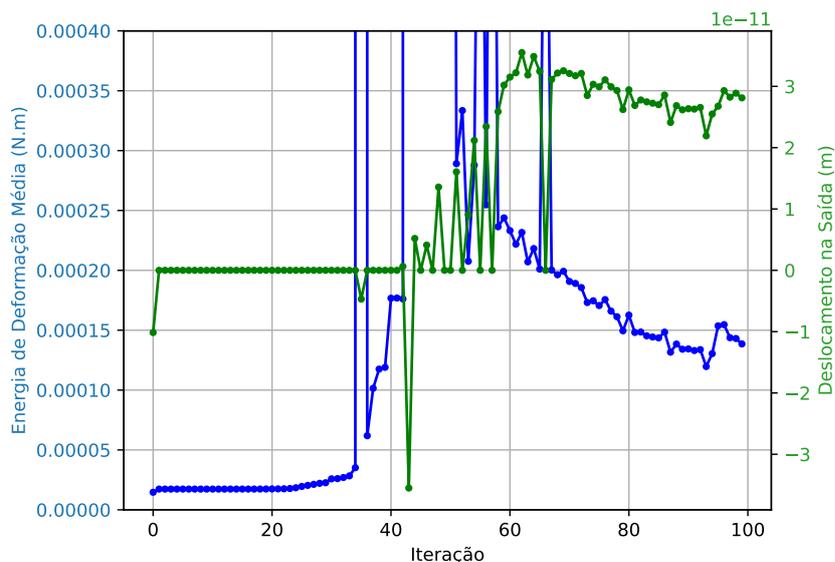


Figura 5.33 – Evolução das funções  $SE$  e  $MSE$  durante otimização topológica do mecanismo inversor com duas saídas atuado por pressão.

### 5.3 Influência dos parâmetros BESO AR e ER

Os parâmetros  $AR$ ,  $ER$  e  $\beta$  influenciam na otimização topológica, de forma que podem contribuir para que a otimização chegue a diferentes mínimos locais. Para entender como esses mecanismos se comportam de acordo com diferentes parâmetros de entrada, foram feitos testes com os parâmetros de  $AR$  e  $ER$ . O objetivo dessa seção é mostrar de que forma

esses parâmetros variam os mecanismos fluido atuados obtidos, usando o mecanismo pinça como exemplo. No caso de mecanismos mais instáveis, essa análise é difícil de ser realizada, pois dependendo das combinações de  $AR$  e  $ER$ , o mecanismo nem sempre consegue chegar a uma topologia factível. A Tabela 5.1 ilustra as diferentes topologias do mecanismo pinça para todas as combinações de  $AR$  e  $ER$ , com valores inteiros de 1% a 5%. A Tabela 5.2 mostra o deslocamento na saída para cada um dos mecanismos. É possível ver que todas as topologias são muito similares, com variações na quantidade de barras formadas, com exceção do mecanismo com  $AR = 2\%$  e  $ER = 1\%$ , que acaba convergindo em um mínimo local, evidenciado pelo seu deslocamento mais baixo mostrado na Tabela 5.2. Com exceção dessa topologia, também pode-se ver que valores menores de  $AR$  e  $ER$  tendem a formar semicírculos menores, além do semicírculo maior que se localiza no centro da região de aplicação da carga de pressão. Visto que os deslocamentos estão sendo comparados entre si, e que o valor da mola altera sua performance, eles foram calculados sem incluir a mola de rigidez  $10^4\text{N/m}$ , que foi utilizada anteriormente para se fazer comparações com os resultados de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#). É possível ver que todos os deslocamentos são próximo de 2mm, e o mecanismo que apresenta o maior valor é mecanismo que foi otimizado usando  $AR = ER = 2\%$ . Contudo, não existe uma correlação entre os valores de  $AR$  e  $ER$  e o deslocamento na saída da topologia final. As duas Tabelas 5.1 e 5.2 mostram que apesar de  $AR$  e  $ER$  mudarem a topologia, eles influenciam pouco no caminho que a otimização segue quando o problema é mais estável, com exceções quando mínimos locais são encontrados.

Tabela 5.1 – Comparação das topologias finais para mecanismo pinça atuado por pressão com diferentes valores de  $ER$  e  $AR$ .

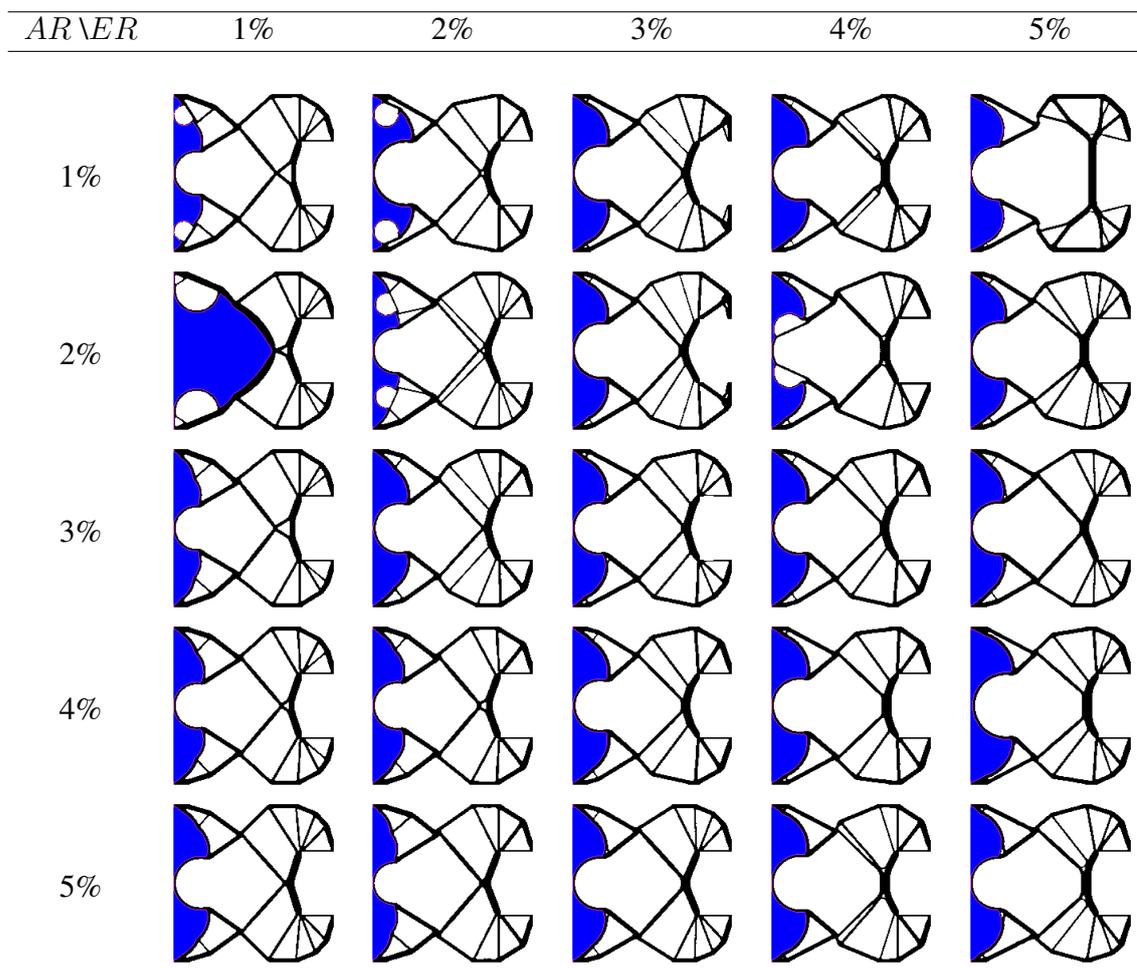


Tabela 5.2 – Comparação do deslocamento na saída das topologias finais para mecanismo pinça atuado por pressão com diferentes valores de  $ER$  e  $AR$ .

$AR \setminus ER$	1%	2%	3%	4%	5%
1%	1,897mm	2,506mm	2,343mm	1,952mm	2,446mm
2%	0,94mm	2,873mm	2,104mm	1,658mm	1,82mm
3%	1,634mm	2,371mm	2,183mm	2,169mm	1,749mm
4%	1,916mm	1,835mm	2,169mm	2,043mm	2,085mm
5%	2,184mm	1,825mm	1,749mm	1,854mm	1,864mm

Os resultados com o mecanismo pinça mostram que para casos de problemas mais estáveis, a otimização tende a seguir uma mesma “rota” de otimização. Na otimização de um mecanismo como esse, testes muito extensivos considerando várias combinações de  $ER$  e  $AR$ , não seriam muito necessários, visto que a otimização tende quase sempre a um mesmo perfil de topologia. Contudo, esse comportamento não foi observado em mecanismos mais instáveis como o mecanismo esticador, *contractor* e *inversor* de duas saídas. Em uma otimização de um

mecanismo com alguma aplicação mais direta, o método de otimização precisaria ser testado com vários parâmetros de forma a encontrar a melhor combinação, que atenda aos requisitos do projeto e ainda atinja uma topologia eficiente. Mecanismos instáveis necessitariam do ajuste desses parâmetros e de outros para encontrar uma topologia ótima para um dado projeto.

#### 5.4 Influência da Média Histórica

O parâmetro  $\beta$  pode ser utilizado para aumentar ou diminuir o efeito da distribuição de sensibilidade histórica. Diminuindo o valor de  $\beta$ , variações no número de sensibilidade influenciam mais na evolução da topologia. Já aumentando o valor de  $\beta$  novas distribuições de sensibilidade têm uma influência menor. Por conta disso, valores de  $\beta$  acima de 0,5 podem ajudar a diminuir problemas de instabilidade. O efeito da variação do parâmetro  $\beta$  pode ser verificado nos resultados de testes realizados com o mecanismo esticador e o mecanismo *contractor*, dois exemplos de problemas que se mostraram instáveis usando o BESO. Foram realizadas otimizações desses mecanismos usando diferentes valores de  $\beta$ . O primeiro exemplo a ser ilustrado é o caso do mecanismo esticador. As Figuras 5.34a a 5.34e ilustram os resultados das topologias otimizadas com o método BESO, usando os parâmetros  $ER = AR = 2\%$ .

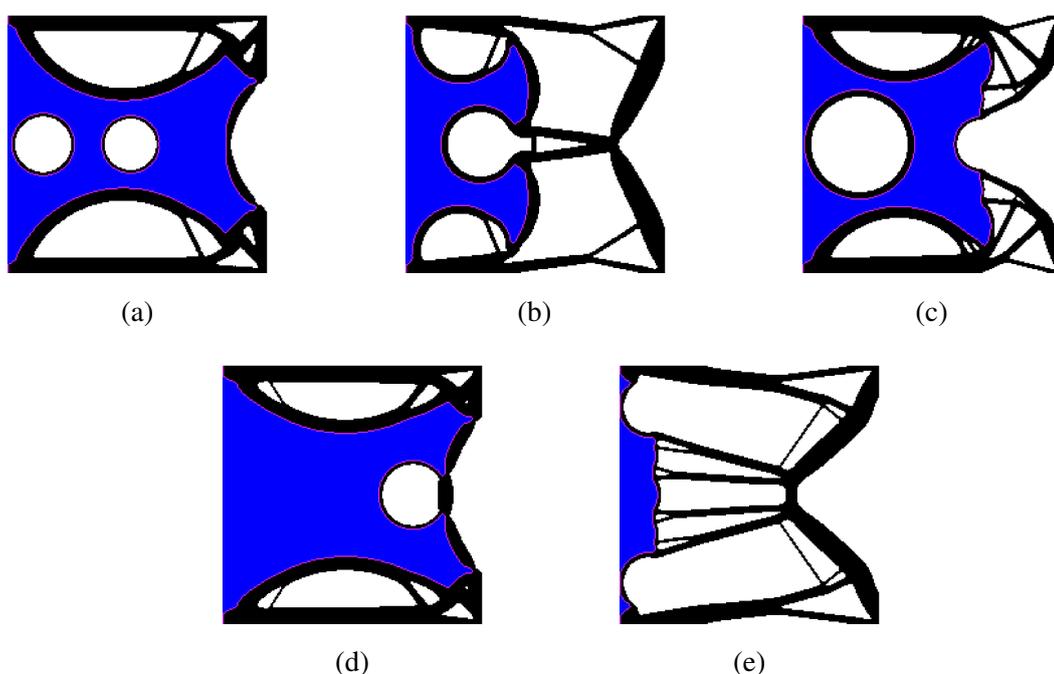


Figura 5.34 – Otimização topológica do mecanismo esticador atuado por pressão variando o valor de  $\beta$ . (a)  $\beta = 0,5$  ( $u_{out} = 4,017\text{mm}$ ). (b)  $\beta = 0,6$  ( $u_{out} = 0,627\text{mm}$ ). (c)  $\beta = 0,7$  ( $u_{out} = 10,58\text{mm}$ ). (d)  $\beta = 0,8$  ( $u_{out} = 2,327\text{mm}$ ). (e)  $\beta = 0,9$  ( $u_{out} = 1,455\text{mm}$ ).

A Figura 5.34a ilustra o resultado da otimização com o valor original de  $\beta$ , e como citado anteriormente a otimização se torna muito instável. Essa topologia é o resultado encontrado pela otimização depois que todo o material do centro horizontal é retirado, fazendo com que o fluido cruze toda a região de projeto. A otimização consegue encontrar uma topologia factível novamente, apenas fechando o mecanismo com uma barra curva no lado direito do domínio. As topologias mostradas nas Figura 5.34c e 5.34d apresentam o mesmo comportamento. Já as topologias 5.34b e 5.34e são similares à topologia encontrada anteriormente ilustrada na Figura 5.21a, onde a principal diferença é uma maior reentrância de fluido e formação de mais barras. De fato, as topologias 5.34a, 5.34c e 5.34d atingem um deslocamento na saída maior que as topologias 5.21a, 5.34b e 5.34e, contudo elas têm um deslocamento controlado por uma barra muito fina que conecta as estruturas superior e inferior, o que não seria desejável em um mecanismo real. Além disso, também pode se observar a formação de topologias soltas na região de fluido, são como círculos de material sólido com vazio no centro carregadas igualmente em todos os sentidos e não influenciam na performance da estrutura.

Com exceção da otimização usando  $\beta = 0,9$ , todas as otimizações ainda apresentaram uma evolução instável. Esses exemplos mostram que além de  $\beta$  não conseguir estabilizar a otimização, ele não necessariamente atrapalha a convergência da otimização para topologias ótimas. Com isso pode-se dizer que o valor de  $\beta$  pode mudar drasticamente a topologia quando ela tem uma evolução instável.

Os resultados da variação de  $\beta$  para o mecanismo *contractor* pode ser verificado nas Figuras 5.35a a 5.35e. Esses exemplos usam os mesmos parâmetros e propriedades da otimização ilustrada na Figura 5.16a, que é apresentada novamente na Figura 5.35b.

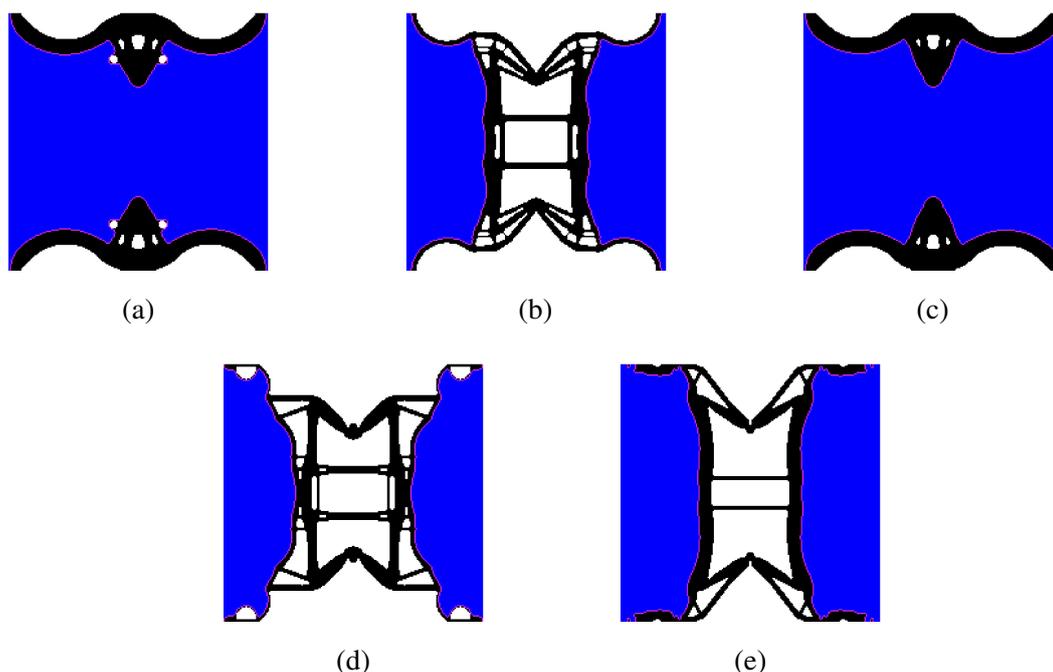


Figura 5.35 – Otimização topológica do mecanismo *contractor* atuado por pressão variando o valor de  $\beta$ . (a)  $\beta = 0,5$  ( $u_{out} = -0,551\text{mm}$ ). (b)  $\beta = 0,6$  ( $u_{out} = 0,223\text{mm}$ ). (c)  $\beta = 0,7$  ( $u_{out} = -0,527\text{mm}$ ). (d)  $\beta = 0,8$  ( $u_{out} = 0,191\text{mm}$ ). (e)  $\beta = 0,9$  ( $u_{out} = 0,876\text{mm}$ ).

É possível notar que a influência do parâmetro  $\beta$  é bem similar aos resultados citados para o mecanismo esticador. As Figuras 5.35b, 5.35d e 5.35e ilustram topologias similares. Também é verificado que apesar de um valor de  $\beta = 0,6$  ajude a encontrar uma topologia factível,  $\beta = 0,7$  já não funciona. Nas otimizações não foram verificadas estabilizações na evolução da topologia e o mesmo problema de retirada de material do suporte continuou ocorrendo. Apesar da otimização usando  $\beta = 0,9$  da Figura 5.35e, ter encontrado o maior valor de deslocamento das topologias factíveis, ainda foi a otimização mais instável, com uma alta alternância entre os valores da função objetivo.

Os dois mecanismos que apresentaram instabilidade, não necessariamente se tornaram mais estáveis aumentando o valor de  $\beta$ . O uso do  $\beta$  para encontrar topologias mais factíveis se mostrou arbitrário, e ainda necessitaria de testes caso um novo problema de otimização fosse aplicado. Quanto à instabilidade, o mesmo não surtiu muito efeito no mecanismo *contractor*. Isso pode estar ligado ao fato do problema de instabilidade estar mais relacionado à dificuldade da função objetivo escolhida em reconhecer a região de suporte como importante para otimização do mecanismo.

Ainda que o método BESO para Pa-CMs tenha sucesso em realizar a otimização

dos mecanismos propostos, ele ainda se mostrou muito dependente dos seus parâmetros, especialmente no caso de mecanismos mais instáveis. Em uma otimização de um mecanismo com alguma aplicação mais direta, o método ainda precisaria ser testado com vários parâmetros de forma a encontrar a melhor combinação, que atenda aos requisitos do projeto e ainda alcance uma topologia eficiente.

Outros parâmetros que podem influenciar na otimização é o uso de regiões fora do domínio de projeto (*non-design domain*) e a topologia usada no início da otimização, que serão discutidos a seguir.

### 5.5 Influência de Região Fora do Domínio de Projeto

Regiões fora do domínio de projeto, são elementos da malha que são definidos como imutáveis, nunca são retirados da topologia. O uso desse artifício está relacionado ao projeto de estruturas, onde existe uma restrição que necessite que haja material em uma dada região, para posterior fabricação. No caso dos Pa-CMs, esse método pode ser utilizado para evitar que material seja retirado de uma região de interesse.

A inclusão de regiões fora do domínio de projeto pode favorecer a otimização a atingir topologia ótimas, visto que evita a retirada de regiões de interesse. Essas regiões de interesse podem ser as regiões de fixação ou regiões da saída de movimento. Esses efeitos são particularmente convenientes para as otimizações apresentadas aqui. Mecanismos que invertem o movimento da saída com a topologia cheia, como o mecanismo pinça, inversor, *contractor* e inversor de duas saídas, tendem a ter material retirado da saída no início da otimização. No caso do *contractor*, material também é retirado da região de suporte  $S_u$ , causando sua evolução instável. Por isso, foram realizadas simulações considerando regiões fora do domínio de projeto como mostrados nas Figuras 5.36a a 5.36f, representadas por espaços em verde. As figuras mostram metade dos domínios considerando simetria, com exceção do mecanismo dobrador. As dimensões das regiões fora do domínio de projeto dos mecanismos pinça, inversor, região 1 do *contractor*, região 2 do *contractor*, esticador e inversor de duas saídas são respectivamente:  $0,04\text{m} \times 0,0025\text{m}$ ;  $0,02\text{m} \times 0,01\text{m}$ ;  $0,0025\text{m} \times 0,025\text{m}$ ;  $0,01\text{m} \times 0,01\text{m}$  e  $0,01\text{m} \times 0,06\text{m}$ . O região fora do domínio de projeto das Figuras 5.36d e 5.36e possuem uma largura de 10mm, como feito em [De Souza e Silva \(2020\)](#). O mecanismo esticador não foi incluído aqui, pois sua instabilidade não está relacionada a um ponto específico do domínio de projeto, e não existe o problema de retirada de material na sua região do ponto da saída.

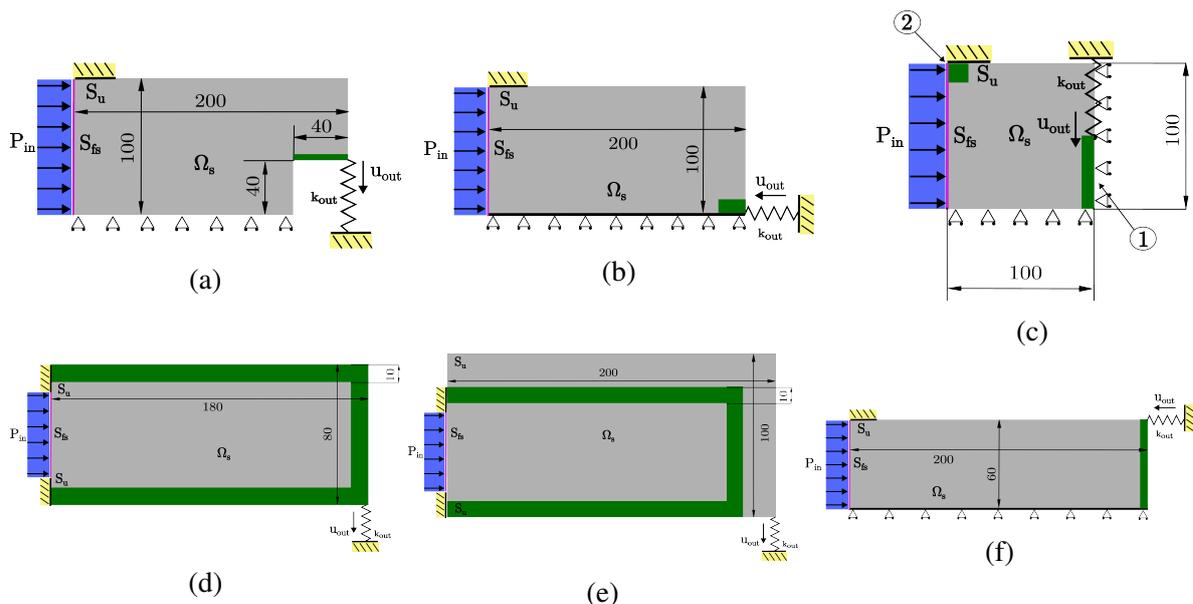
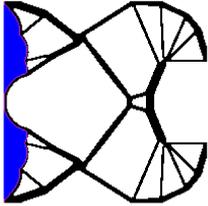
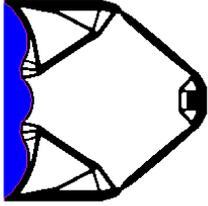
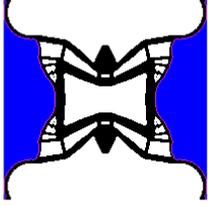
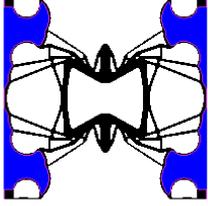
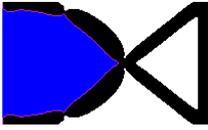


Figura 5.36 – Regiões fora do domínio de projeto na otimização de Pa-CMs. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor (c) Mecanismo *contractor*. (d) Mecanismo dobrador (usando malha  $180 \times 80$ ). (e) Mecanismo dobrador (usando malha  $200 \times 100$ ). (f) Mecanismo inversor de duas saídas.

A Tabela 5.3 ilustra as topologias finais das otimizações considerando as regiões fora do domínio de projeto das figuras ilustrada anteriormente. Todas as otimizações foram realizadas utilizando os mesmos parâmetros das otimizações da seção 5.2, exceto as duas otimizações do mecanismo dobrador. O mecanismo dobrador da Figura 5.36d foi otimizado usando  $\beta = 0,5$  e  $r_{\min} = 10\text{mm}$ . O mecanismo dobrador da Figura 5.36e, foi otimizado com uma malha  $200 \times 100$ , um volume alvo de 36% (para alcançar a mesma quantidade de material que quando usando uma malha  $180 \times 80$  elementos), dimensões de  $0,2\text{m} \times 0,1\text{m}$ ,  $\beta = 0,5$  e  $r_{\min} = 6\text{mm}$ , como feito em [De Souza e Silva \(2020\)](#). Na Tabela 5.3 também são apresentados os deslocamentos na saída (das topologias dessa seção e das otimizações anteriores) e o número de iterações para parada da otimização. O deslocamento dos mecanismos pinça, inversor e *contractor* foram calculados usando  $k_{\text{out}} = 10^4\text{N/m}$ , de forma a permitir uma comparação com os resultados anteriores. O “mecanismo *contractor* 1” se refere ao resultado da otimização usando somente a região fora do domínio de projeto “1” da Figura 5.36c, enquanto o “mecanismo *contractor* 1 e 2”, usa ambas as regiões fora do domínio de projeto indicadas como “1” e “2” da Figura 5.36c.

Tabela 5.3 – Comparação dos resultados da otimização para mecanismos com regiões fora do domínio de projeto.

Pa-CM	Topologia Final	$u_{out}$	$u_{out}$ Seção 5.2	Iterações
Pinça		0,415mm	0,505mm	86
Inversor		0,351mm	0,475mm	85
<i>Contractor 1</i>		0,144mm	0,150mm	86
<i>Contractor 1 e 2</i>		0,201mm	0,150mm	84
Dobrador (Figura 5.36d)		22,61mm	87,04mm	72
Dobrador (Figura 5.36e)		59,00mm	87,04mm	108
Inversor 2 saídas		0,155mm	0,140mm	240

O mecanismo pinça chegou a uma topologia similar às obtidas nos testes anteriores, exceto que o deslocamento e o número de iterações foram ligeiramente menores. Para esse caso, a região fora do domínio de projeto é o suficiente para impedir que a estrutura se desconecte da saída durante as primeiras iterações, mas não altera muito a topologia final.

O mecanismo inversor encontrou uma topologia bem diferente, mais parecida com as topologias encontradas em [Kumar et al. \(2020\)](#) e algumas das topologias relatadas em [Kumar](#)

e Langelaar (2022). A principal diferença para a topologia encontrada anteriormente é a região de carregamento, que aqui é mais regular. Contudo, o deslocamento do mecanismo é menor que o da otimização realizada sem região fora do domínio de projeto. Nesse exemplo, a região fora do domínio de projeto não consegue impedir que a estrutura se desconecte da saída nas primeiras iterações, contudo a otimização leva menos interações para repor material no local.

Os resultados para o mecanismo *contractor* se mostraram positivos. A presença de regiões fora do domínio de projeto não estabilizou a otimização, mas a topologia considerando somente a região 1 encontrou uma topologia similar à encontrada em Kumar e Langelaar (2022), com mais regiões de vazio dentro da estrutura e um deslocamento maior na saída. Já a otimização considerando as regiões fora do domínio de projeto 1 e 2 cria muitas barras finas, tornando a estrutura mais flexível, e consequentemente alcançando um deslocamento maior na saída.

O mecanismo dobrador da Figura 5.36d encontrou uma topologia diferente das relatadas em De Souza e Silva (2020) que também realizou otimizações considerando as mesmas regiões fora do domínio de projeto. As topologias de De Souza e Silva (2020), ilustradas nas Figuras 5.37a e 5.37b, são topologias com agrupamento de material nas paredes da região fora do domínio de projeto, contudo as topologias encontradas aqui criam algumas barras. Nessas otimizações ocorre uma instabilidade causada pela mudança de elementos fluidos e vazios, a otimização causa repetidas alterações que modificam completamente a região de carregamento. Apesar disso, a otimização consegue encontrar topologias factíveis, mas com um deslocamento menor que o exemplo sem região fora do domínio de projeto. Para esses exemplos não existe o problema de “vazamento” do fluido para fora do domínio de projeto, visto que a região fora do domínio de projeto impede isso. A instabilidade devido à conexão e desconexão repetida entre fluido e vazio será novamente abordada mais adiante, onde um método com potencial para mitigar esses efeitos será testado e discutido.



Figura 5.37 – Topologias do mecanismo dobrador de De Souza e Silva (2020). (a) Resultado usando regiões fora do domínio de projeto como ilustrado na Figura 5.36d. (b) Resultado usando regiões fora do domínio de projeto como ilustrado na Figura 5.36e.

Finalmente, no caso do mecanismo inversor de duas saídas, é encontrada uma topologia diferente, onde a região de elementos de fluido é bem maior. A atuação desse mecanismo é controlada por uma carga vertical nas barras superior e inferior que retraem a estrutura triangular que está conectada à saída. O deslocamento alcançado é levemente maior em relação ao problema otimizado anteriormente. Contudo, o uso da região fora do domínio de projeto não impede que a estrutura se desconecte da saída durante a otimização e dificulta para que a otimização encontre uma topologia factível, por conta do limite de material que pode manipular. Como resultado, o número de iterações para parada é bem maior, diferente dos outros casos da Tabela 5.3. A evolução da curva da função objetivo continua similar à da Figura 5.32.

## 5.6 Influência da Topologia Inicial

O uso de uma topologia inicial diferente de um domínio de projeto cheio pode ajudar a reduzir o custo computacional da otimização. Segundo [Huang e Xie \(2010\)](#), para o caso de minimização da energia de deformação, em alguns casos, usar uma topologia inicial com um volume igual ou próximo do volume alvo  $V^*$ , pode chegar à mesma topologia que usando uma topologia inicial cheia. Contudo, também pode levar a mínimos locais, visto que essa prática não garante que todos os elementos irão interagir na otimização ao menos uma vez. Por isso, nessa seção será testado o uso de topologias iniciais diferentes da topologia inicial cheia.

### 5.6.1 Topologia Inicial: Malha Xadrez

Uma malha inicial como um padrão de xadrez (*checkerboard pattern*) foi utilizado por [Madrid \(2016\)](#), que depois de seus testes recomendou que o uso de uma malha cheia fosse usado, pois uma malha xadrez levaria a uma grande dependência do valor de  $AR$ . Contudo, por se tratar de um problema diferente, o uso dessa topologia inicial foi testado novamente aqui. A malha xadrez se baseia em uma topologia inicial com um padrão de alternância entre elementos sólidos e vazios, elementos vazios só estão conectados a elementos sólidos e vice-versa, como mostrado na Figura 5.38. Por conta disso, o volume inicial é 50% do domínio de projeto e o número de iterações removendo material é reduzido. Como o problema de pressão fluídica possui carga dependente da topologia, a carga aplicada na topologia inicial também muda. Visto que se tem elementos vazios em contato com  $S_p$  logo no início, esses elementos

se tornam elementos de fluido, onde aplicam uma carga nos elementos sólidos vizinhos, como ilustrado na Figura 5.38.

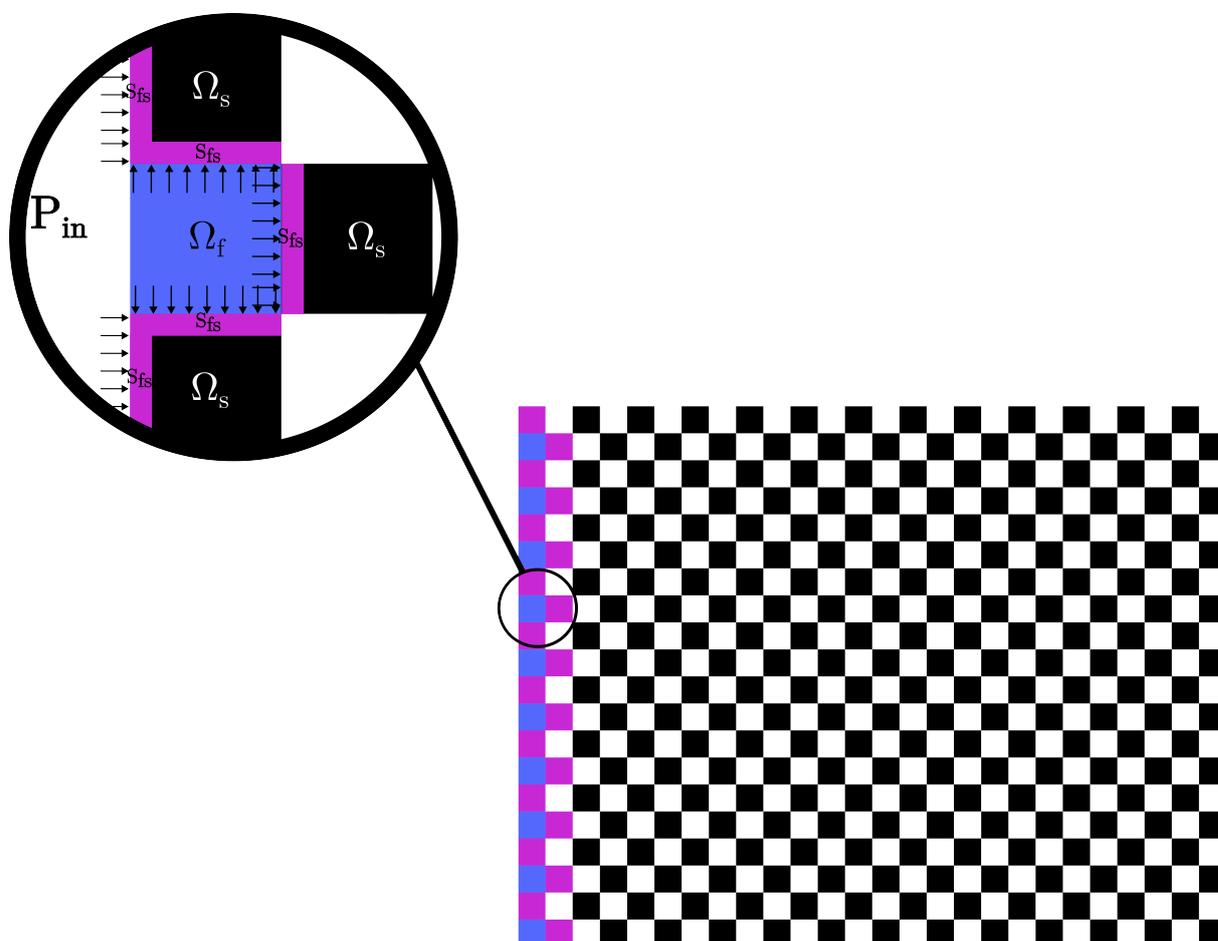
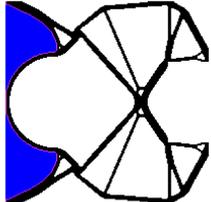
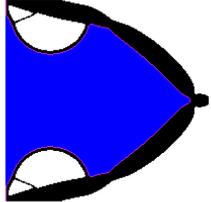
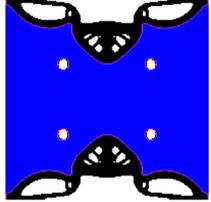
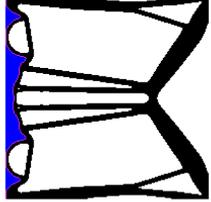


Figura 5.38 – Padrão de xadrez para topologia inicial. Detalhe na região  $S_{fs}$ .

A Tabela 5.4 ilustra as topologias encontradas, seus respectivos valores de deslocamento na saída (desta seção e das otimizações da Seção 5.2) e o número de iterações. Vale ressaltar que o número de iterações é bem menor por que existem menos iterações com remoção de material. Os resultados de deslocamento dos mecanismo pinça, inversor e *contractor* foram calculados usando a mola virtual de  $k_{out} = 10^4 \text{N/m}$ .

Tabela 5.4 – Comparação dos resultados da otimização iniciando de uma topologia com padrão de xadrez.

Pa-CM	Topologia Final	$u_{out}$	$u_{out}$ Seção 5.2	Iterações
Pinça		0,462mm	0,505mm	49
Inversor		0,405mm	0,475mm	51
<i>Contractor</i>		-0,267mm	0,150mm	66
Esticador		1,003mm	0,409mm	55
Dobrador		7,488mm	87,04mm	38
Inversor 2 saídas		0,208mm	0,140mm	37

O mecanismo pinça atingiu uma topologia similar às encontradas nos outros testes. Dessa vez o semicírculo possui um diâmetro maior que o das topologias atingidas anteriormente. No caso do mecanismo inversor, a barreira de material acaba sendo retirada permitindo a extensão da região de fluido para dentro da estrutura. A estrutura final do mecanismo inversor se assemelha ao mecanismo inversor de 2 saída ilustrado na Tabela 5.3. Tanto a topologia encontrada para o mecanismo pinça quanto para o mecanismo inversor têm um deslocamento na saída inferior aos encontrados anteriormente.

O mecanismo *contractor* por já apresentar um comportamento instável evoluiu de

forma negativa durante a otimização. A topologia encontrada minimiza a função objetivo e por isso o deslocamento na saída é na direção contrária à desejada.

O mecanismo esticador encontrou uma topologia similar à da Figura 5.21a, contudo com um deslocamento maior. Ainda assim, o deslocamento é inferior ao da topologia usando  $\beta = 0,9$  (ilustrado na Figura 5.34e). Comparando as topologias encontradas pode-se observar uma relação entre a quantidade de barras centrais que se formam e a performance final do mecanismo. Contudo, vale ressaltar que quanto mais barras, menor é a rigidez, visto que a quantidade de material ainda é a mesma.

O mecanismo dobrador chegou a uma topologia que lembra levemente a topologia da Figura 5.26a. Além de ter um deslocamento na saída inferior, a topologia final ainda apresenta o padrão xadrez na topologia mesmo depois da parada da otimização<sup>4</sup>. Isso acontece porque esses elementos não interagem com a otimização, não mostrando diferenças de número de sensibilidade apesar de possuir elementos vazios, e por isso o filtro da distribuição da sensibilidade não tem efeito nesta região. Esse tipo de comportamento não acontece quando a topologia inicial é o domínio de projeto cheio, pois todos os elementos interagem com a otimização ao menos uma vez.

O mecanismo inversor de 2 saídas encontrou uma topologia parecida com a mostrada na Figura 5.31a, apresentando um deslocamento superior. Durante a evolução da topologia, a estrutura se desconecta da saída por apenas 7 iterações. Rapidamente material é repostado na saída, e a topologia final passa a ser formada antes do volume objetivo ser atingido. Por conta disso, o número de iterações para a parada é bem menor, mesmo considerando que o volume inicial da topologia é 50% do volume total. Apesar da presença de elementos da topologia soltos pode-se verificar que para esse caso a otimização começando com uma topologia em padrão de xadrez é mais eficaz.

### 5.6.2 Topologia Inicial: Topologias Arbitrárias

Adicionalmente foram testadas outras topologias iniciais. O critério da utilização dessas topologias foi começar com formas arbitrárias com 50% do domínio de projeto. As topologias também foram desenhadas para se conectar às regiões de interesse da otimização, como o nó da saída, o contorno de fixação  $S_u$  e o contorno de aplicação da pressão  $S_p$ . As

<sup>4</sup> Valores mais baixos para a tolerância de convergência,  $\tau$ , foram testados, mas tiveram pouco efeito nesse resultado.

topologias estão ilustradas nas Figuras 5.39a a 5.39g considerando as mesmas condições de contorno usadas nas primeiras otimizações relatadas (Figuras 5.5a, 5.10a, 5.15a, 5.20a, 5.25 e 5.30a). As otimizações descritas nessa parte também foram realizadas usando condições de simetria, apesar das figuras mostrarem as topologias completas dos mecanismos, com exceção do mecanismo dobrador que não é modelado com simetria. Todas as propriedades e parâmetros BESO foram repetidos da Seção 5.2.

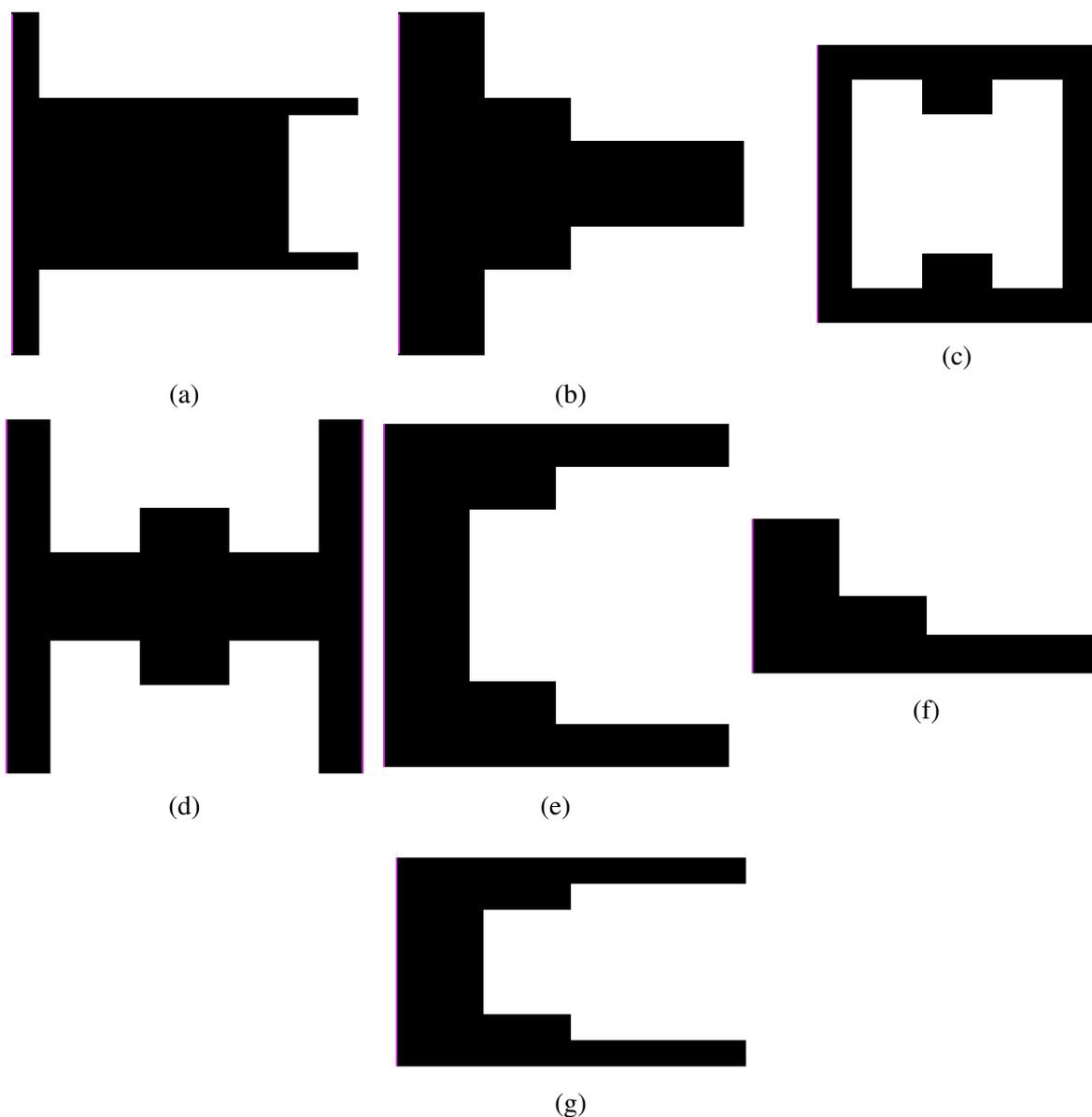
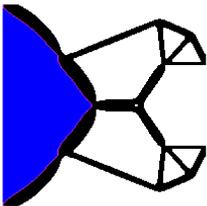
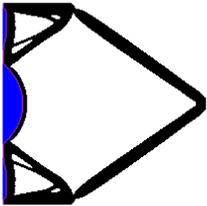
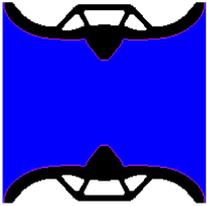
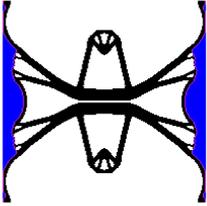
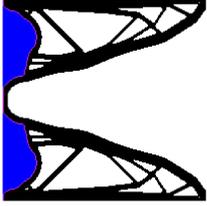
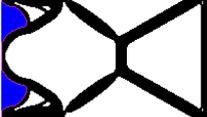


Figura 5.39 – Topologias iniciais testadas na otimização de Pa-CMs. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor. (c) Mecanismo *contractor* (sugestão 1). (d) Mecanismo *contractor* (sugestão 2). (e) Mecanismo esticador. (f) Mecanismo dobrador (usando malha  $180 \times 80$ ). (g) Mecanismo inversor de duas saídas.

A Tabela 5.5 ilustra as topologias encontradas para as topologias sugeridas como

topologias iniciais, seus respectivos deslocamentos na saída, os deslocamentos das topologias da Seção 5.2 e o número de iterações das otimizações. Novamente, o deslocamento dos mecanismos pinça, inversor e *contractor* relatados foram calculados usando uma mola virtual de  $k_{out} = 10^4 \text{N/m}$  na saída.

Tabela 5.5 – Comparação dos resultados da otimização para mecanismos com outras topologias iniciais.

Pa-CM	Topologia Final	$u_{out}$	$u_{out}$ Seção 5.2	Iterações
Pinça		0,213mm	0,505mm	77
Inversor		0,462mm	0,475mm	48
<i>Contractor</i> (sugestão 1)		-0,114mm	0,150mm	57
<i>Contractor</i> (sugestão 2)		0,251mm	0,150mm	93
Esticador		8,365mm	0,409mm	52
Dobrador		22,40mm	87,04mm	354
Inversor 2 saídas		0,181mm	0,140mm	72

Foi observada uma mudança da topologia do mecanismo pinça devido à topologia inicial usada, a topologia encontrada lembra bastante as topologias encontradas por [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), por conta da grande região de fluido. Ainda assim, esse mecanismo também apresenta um deslocamento levemente maior em relação aos de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), mas bem menor em relação às topologias encontradas anteriormente.

O mecanismo inversor também para em uma topologia relativamente similar à encontrada inicialmente. O deslocamento na saída alcançado é bem próximo do anterior, mas um pouco menor.

O mecanismo *contractor* falhou na otimização novamente usando a 1ª sugestão de topologia inicial, minimizando novamente a função objetivo. Na segunda topologia sugerida para o *contractor*, ele converge para uma topologia factível com um deslocamento na saída maior. A topologia apresenta um espaço de vazios de 2mm de altura no seu centro que se contrai quando o mecanismo é atuado pela pressão. Caso o deslocamento nesse ponto fosse maior que 2mm autocontato deveria ser considerado no modelo para encontrar um deslocamento preciso na saída.

O mecanismo esticador converge em uma topologia bem diferente das encontradas anteriormente, com um deslocamento bem superior. Essa topologia se assemelha às topologias relatadas por [Panganiban et al. \(2010\)](#) (Figura 5.22). Mas novamente, o deslocamento do mecanismo é controlado por uma única barra, apesar de parecer ser mais resistente que as outras (nas Figuras 5.34a, 5.34c e 5.34d), com uma espessura maior e sem juntas de flexão. Além disso, pode se afirmar que a convergência para essa topologia mais diferenciada provavelmente se deve à topologia inicial que já começa com um formato de “C”.

A topologia final do mecanismo dobrador também atingiu um resultado ruim visto que a evolução da topologia continuou muito instável e levando muitas iterações para convergir. A topologia final encontrada possui um deslocamento na saída bem inferior ao valor encontrado anteriormente, além de algumas barras soltas que não foram removidas antes da otimização atingir o critério de parada.

Finalmente, o mecanismo inversor de duas saídas encontrou uma topologia similar às encontradas anteriormente, atingindo um valor de deslocamento na saída superior à primeira otimização. Ao contrário do que acontece usando a topologia inicial em padrão de xadrez, para esse exemplo a topologia só começa a se formar algumas iterações depois que o volume final é atingido. Esse resultado mostra que apesar da dificuldade da otimização em encontrar uma

topologia factível, ela tende a convergir em topologias bem similares, assim como o mecanismo pinça.

## 5.7 Discussões

Dentre as otimizações realizadas, os mecanismos pinça e inversor foram os exemplos mais estáveis, não apresentando muitos problemas de divergências ou grandes flutuações na evolução da função objetivo. Comparando com os resultados de [Kumar e Langelaar \(2022\)](#), os deslocamentos na saída das topologias encontradas aqui são maiores, sem a desvantagem da criação de elementos cinza e com uma fronteira fluido-estrutura bem definida. O mecanismo pinça em especial se mostrou muito eficiente para chegar no mesmo resultado, independente dos parâmetros de entrada. O único caso que levou a convergência numa topologia diferente, foi o uso de uma topologia inicial arbitrária, que influenciou a otimização a ir para um mínimo local. Já o mecanismo inversor se mostrou ser influenciado pelo uso de uma topologia inicial em padrão de xadrez. Nesse caso, barras importantes para a transmissão da carga são removidas antes de se tornarem rígidas o suficiente para se tornarem relevantes para a otimização. Portanto, pode se dizer que topologias iniciais influenciam a otimização a seguir para ótimos locais.

O mecanismo *contractor* foi o problema de otimização mais instável, pois em todos os exemplos realizados, o algoritmo tendia a retirar e repor material do suporte ciclicamente, criando uma variação muito grande na evolução da topologia em cada iteração. Esse problema indica talvez um problema no uso da função objetivo  $MSE/SE$ , visto que a otimização parece não conseguir maximizar o deslocamento na saída ao mesmo tempo que minimiza a energia de deformação. O método não consegue identificar o suporte como importante para o aumento da rigidez. Mesmo com esse tipo de instabilidade presente, foi verificado que valor de  $\beta$  e o uso de regiões fora do domínio de projeto podem ajudar a se chegar a topologias factíveis. O uso de topologias iniciais se mostrou ineficiente na otimização, encontrando topologias ainda piores.

O mecanismo esticador também se comporta de uma forma instável, porém por motivos diferentes do mecanismo *contractor*. Nesse exemplo, a conexão repentina do fluido com uma grande região de vazio acaba degenerando a otimização, levando a outras topologias muito flexíveis, com o deslocamento controlado somente por uma barra. O problema dessas topologias é muito parecido com o problema de formação de juntas flexíveis, onde a alta deformação em um único ponto acaba gerando altas concentrações de tensão. Por isso, nesse exemplo, o

valor de  $AR$  e  $ER$  acabam influenciando muito, pois eles determinam a variação topológica. Quando seus valores são maiores que 1%, logo no início da iteração uma região fina de elementos sólidos que impedem o fluido de entrar em contato com uma região de vazio, é removido, pois a sensibilidade não consegue prever a variação da carga. Para esse mecanismo, o aumento do valor de  $\beta$  pareceu funcionar bem. O uso de uma topologia inicial arbitrária também pareceu influenciar a convergir para uma topologia com deslocamento maior na saída, mas também controlada por uma única barra. Seria interessante se obter uma forma mais precisa de evitar esse comportamento instável sem variar  $\beta$ , visto que o mesmo não garante que mínimos locais sejam encontradas.

O mecanismo dobrador também se mostrou instável, ora por falta de conexão com o suporte superior, ora por conta do encontro do fluido com grande região de vazio. Contudo, foi possível encontrar topologias factíveis sem a ajuda de um método secundário, como feito em [De Souza e Silva \(2020\)](#). Os resultados também mostraram topologias diferentes das relatadas em [De Souza e Silva \(2020\)](#), porém não é possível se fazer uma comparação melhor entre elas por falta de informações das condições de contorno do modelo utilizado no trabalho citado. O primeiro mecanismo otimizado, também atingiu uma performance de deslocamento na saída maior que os otimizados posteriormente, mesmo com a instabilidade presente durante a evolução. Apesar dos resultados satisfatórios com esse mecanismo, seria interessante também se aplicar um método que mitigasse esse comportamento instável.

Finalmente, o mecanismo inversor de duas saídas conseguiu chegar a estruturas factíveis e até diferentes, dependendo dos parâmetros da entrada. A problemática desse mecanismo é que a otimização não consegue identificar um caminho para uma topologia factível logo no início da otimização. Isso acontece com o mecanismo inversor também, mas o mecanismo inversor de duas saídas leva mais iterações para formar uma topologia factível, mesmo usando valores de  $AR$  e  $ER$  maiores. Contudo, foi o único mecanismo que apresentou alguma melhora relevante para a otimização, quando usando uma topologia inicial com um padrão de xadrez. Além disso, os outros parâmetros como a topologia inicial arbitrária e região fora do domínio de projeto ajudaram a encontrar topologias com um deslocamento maior que a da Seção 5.2, apesar de não contribuírem muito para a melhora da evolução da otimização.

Alguns resultados mostraram um problema relacionado a alta variação topológica devido à conexão da região de fluido com grandes regiões de vazio e desconexão da região de suporte. Essas questões também são um problema intrínseco ao método implementado. Dessa

forma, estratégias adicionais também podem ser utilizados para mitigar esse problema. Uma proposta de estratégia adicional será feita no próximo capítulo.

## 6 MÉTODO DE FLUXOS VIRTUAIS PARA PA-CMS

Como verificado nos exemplos otimizados anteriormente, o uso do método BESO na otimização de alguns casos de Pa-CMs pode levar a instabilidades relacionadas ao avanço do fluido dentro da estrutura. Um avanço muito grande e repentino do fluido não pode ser previsto pela análise de sensibilidade, visto que a variação na carga é calculada por uma aproximação linear de quando apenas 1 elemento é removido por vez. A Figura 5.3b ilustra bem esse comportamento, quando a pequena porção de material na região esquerda central é retirada, toda a região de vazio que está no centro da topologia se torna região de fluido. Isso causa uma grande mudança no contorno  $S_{fs}$ , e conseqüentemente na carga aplicada.

Uma forma de impedir que isso aconteça é identificar regiões da topologia que estão entre região de fluido e região de vazio, e garantir que essa região não seja removida baseada na sua espessura. O método proposto aqui é uma solução para esse problema, resolvendo um sistema secundário de distribuição de calor. Esse método foi baseado em [Lopes \*et al.\* \(2022\)](#) e [Liu \*et al.\* \(2015\)](#), e é chamado de Método de Fluxos Virtuais (*Virtual Flux Method* - VFM) para o caso particular de criação de barreiras.

### 6.1 Temperaturas e Fluxos Virtuais

[Liu \*et al.\* \(2015\)](#) usou o Método das Temperaturas Virtuais (*Virtual Temperature Method* - VTM) para identificar e eliminar regiões de vazio enclausuradas dentro da estrutura durante a otimização topológica, de forma a facilitar a manufatura da estrutura otimizada. Para isso foi usado um sistema térmico secundário, que foi incluído como restrição no método de otimização. A restrição adicional do VTM foi minimizar a temperatura da estrutura, onde regiões de vazio são fontes de calor e as bordas da estrutura são regiões frias. Ao se usar essa restrição térmica em adição da função objetivo da otimização faz com que regiões de vazio tendam a se conectar com as bordas, resfriando a estrutura, como ilustrado na Figura 6.1.

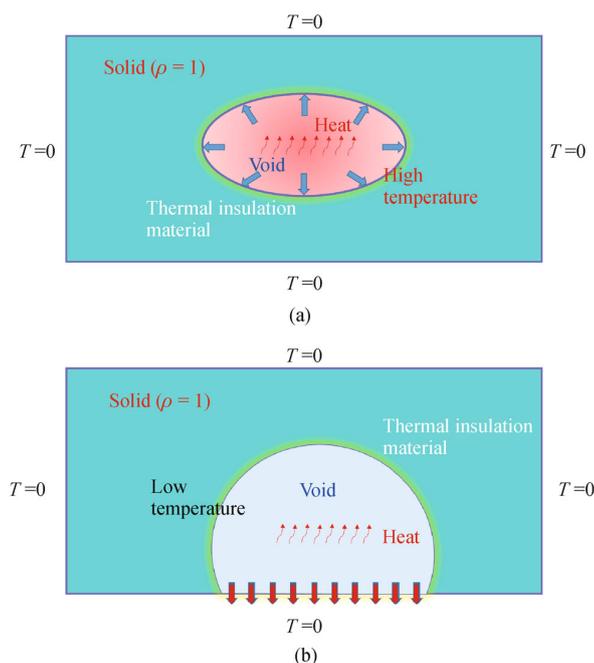


Figura 6.1 – Sistema térmico secundário usado no VTM (LIU *et al.*, 2015). (a) Região de vazio enclausurado cria altas temperaturas na estrutura. (b) Quando o vazio está conectado com a borda, o calor gerado é dissipado.

Lopes *et al.* (2022) utilizou o mesmo conceito de sistema térmico virtual para desenvolver um método parecido com o VTM, mas baseado em critério de conectividade. Em Lopes *et al.* (2022), o método funciona como um tipo de filtro na análise de sensibilidade que impede regiões com fluxo de calor muito alto sejam removidas durante a otimização topológica. O método se baseia em manter a conectividade entre dois pontos da estrutura utilizando o fluxo de calor de um ponto para outro. Visto que o fluxo de calor em uma estrutura condutora é proporcional à sua área transversal, é possível se utilizar o fluxo de calor como uma medida de comprimento para identificar regiões muito finas. O método pode ser mais bem explicado na Figura 6.2. Uma fonte de calor na entrada (contorno  $\Gamma_a$ ), gera um fluxo de calor representado por flechas na Figura 6.2, que é dissipado na saída (contorno  $\Gamma_b$ ). A estrutura tem um domínio sólido  $\Omega$ , em cinza escuro, feito de um material condutor, enquanto a região que não faz parte de  $\Omega$ , representa os elementos vazios e possuem uma alta resistência térmica. Dessa forma, o calor flui somente na região sólida. Considerando que o valor do fluxo de calor é inversamente proporcional ao comprimento da região (considerando espessura uniforme), pode-se dizer que o fluxo mínimo  $q_{\min}$  é determinado por  $q_{\min} = \frac{1}{A_{\max}}$ , e um valor de fluxo máximo  $q_{\max}$  pode ser determinado pelo comprimento mínimo  $A_{\min}$  por  $q_{\max} = \frac{1}{A_{\min}}$ . Dessa forma é possível identificar regiões próximas do comprimento de restrição  $A_{\min}$ , quando o fluxo de calor nessa região

se aproxima de  $q_{\max}$ .

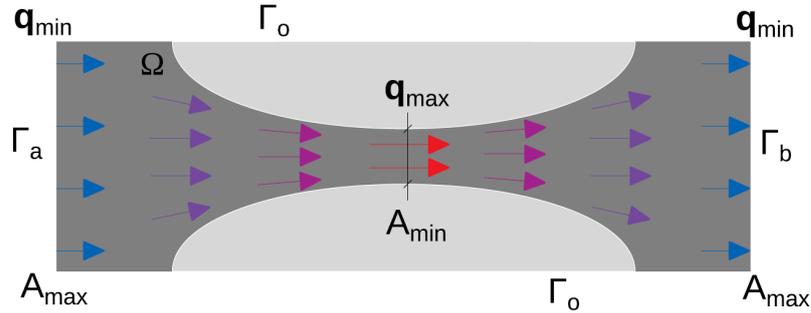


Figura 6.2 – VFM para critério de conectividade (LOPES *et al.*, 2022).

## 6.2 Fluxos Virtuais no Problema Fluido-Estrutura

O método proposto é uma modificação do VFM introduzido por Lopes *et al.* (2022) com o objetivo de impedir a conexão entre dois domínios, ao invés impedir a desconexão dentro de um domínio. A proposta também se baseia em determinar o comprimento de uma região sólida e impedir que a otimização remova caso seu comprimento seja igual a um comprimento de restrição  $L_{\min}$ .

Toda iteração, a topologia é definida por elementos sólidos  $\Omega_s$ , elementos vazios  $\Omega_v$  e elementos de fluido  $\Omega_f$ . Considerando um sistema térmico, todo o domínio é considerado como condutivo, usando uma constante de condução térmica  $k_c = 1$ . Todo o domínio  $\Omega_f$  é definido como fonte de calor e o domínio  $\Omega_v$  é definido como região dissipadora de calor. Dessa forma, o calor gerado em  $\Omega_f$  tende a fluir em direção à região de  $\Omega_v$  mais próxima, criando um fluxo de calor  $q_e(\mathbf{s})$  em um ponto espacial  $\mathbf{s}$ . Contudo, para o caso em que o domínio  $\Omega_f$  ainda não existe, a carga térmica é aplicada no contorno  $S_p$ . A fonte de calor é definida aplicando uma temperatura  $T_{\text{hot}}$  nos nós de elementos de fluido e aplicando uma temperatura  $T_{\text{cool}}$  nos elementos vazios. Dessa forma, montando o problema térmico com o método dos elementos finitos, pode se resolver o sistema:

$$\nabla(k_c(\mathbf{s})\nabla T(\mathbf{s})) = -q_v(\mathbf{s}) \quad , \quad \text{para } \mathbf{s} \in \Omega_s \quad (6.1)$$

$$\nabla T(\mathbf{s})\mathbf{n}(\mathbf{s}) = 0 \quad , \quad \text{para } \mathbf{s} \in \Gamma_0 \quad (6.2)$$

$$T(\mathbf{s}) = T_{\text{hot}} \quad , \quad \text{para } \mathbf{s} \in \Omega_f \cup S_p \quad (6.3)$$

$$T(\mathbf{s}) = T_{\text{cool}} \quad , \quad \text{para } \mathbf{s} \in \Omega_v \quad (6.4)$$

onde  $\nabla$  é o operador de gradiente,  $T(s)$  é a temperatura,  $\mathbf{n}$  é um vetor unitário normal exterior,  $q_v(s)$  é a geração de calor volumétrica dentro do sistema e  $\Gamma_0$  é o limite das extremidades do domínio de projeto. Dessa forma, usando o método de elementos finitos é possível se montar uma malha de elementos térmicos usando as condições de contorno citadas anteriormente de forma a encontrar o fluxo térmico  $q_e(s)$  nos elementos sólidos.

Diferente de [Lopes et al. \(2022\)](#), o fluxo de calor de entrada não é pré-definido. Visto que a temperatura quente é definida, toda iteração o fluxo de calor muda de acordo com a topologia, maiores regiões de fluido vão gerar mais calor. Contudo, o que é definido aqui é o gradiente de temperatura máximo  $\Delta T$ , visto  $T_{\text{hot}} = 1$  e  $T_{\text{cool}} = 0$ , então  $\Delta T = 1$ . Dadas as condições de contorno do problema, a temperatura é homogênea dentro de  $\Omega_f$  e  $\Omega_v$ , então o fluxo de calor dentro dessas regiões é 0.

O fluxo térmico por unidade de área,  $\mathbf{q}_e$ , de um sistema plano pode ser determinado por:

$$\mathbf{q}_e(x, y) = k_c \frac{dT}{d\mathbf{n}} \quad (6.5)$$

sendo  $k_c$  aqui um escalar, considerando um coeficiente de condução igual  $k_c$  para os sentidos x e y.  $\mathbf{q}_e(x, y)$  é um vetor com os valores do fluxo no sentido x e sentido y, em uma coordenada (x,y). Visto que queremos um valor absoluto e que represente o elemento quadrilátero bilinear, deve ser tirada uma norma em relação ao elemento para que se encontre uma média da magnitude do fluxo de calor no elemento  $e$ . Dessa forma, o fluxo de calor por unidade de área para um elemento,  $q_e$ , pode ser determinado como:

$$q_e = \frac{k_c}{L_e} \sqrt{\frac{2}{3} A_t^2 + A_t B_t + A_t C_t + B_t^2 + C_t^2} \quad (6.6)$$

onde  $A_t = T_1 - T_2 + T_3 - T_4$ ,  $B_t = T_2 - T_1$  e  $C_t = T_4 - T_1$ . Detalhes da dedução da Equação 6.6 assim como o cálculo das constantes podem ser verificados no Anexo 8.

Depois que o fluxo de calor em toda a estrutura sólida é determinado, um valor de fluxo de calor máximo  $q_{\text{max}}$  indica o valor de fluxo cujo não pode ser ultrapassado. A Figura 6.3 ilustra uma topologia arbitrária onde fluxo de calor é gerado entre uma região de fluido e uma região de vazio. Quanto mais próximas forem as duas regiões, maior será o valor de fluxo de calor entre eles.

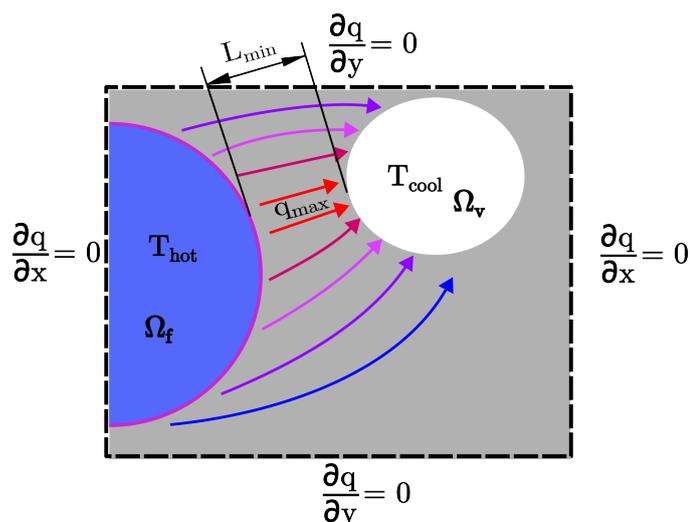


Figura 6.3 – Fluxo de calor no sistema térmico, onde temperaturas são definidas em regiões de elementos de fluido e regiões de elementos de vazio. Se considera que a mínima distância permitida  $L_{\min}$  está relacionada a um valor de fluxo de calor máximo  $q_{\max}$ .

Para se calcular  $q_{\max}$  se usa uma aproximação teórica de que a distância entre a região quente e a região fria pode ser calculada usando o modelo de condução de uma parede infinita como ilustrado na Figura 6.4.

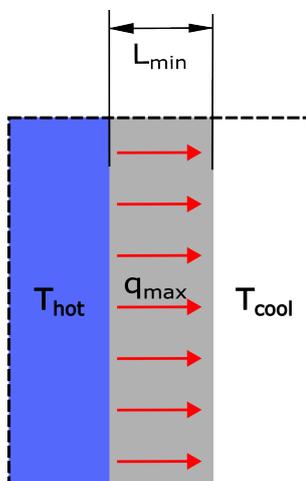


Figura 6.4 – Fluxo de calor uniforme em uma parede infinita de espessura  $L_{\min}$ . Aproximação da Figura 6.3 para calcular  $q_{\max}$ .

E o fluxo de calor  $q_{\max}$  pode ser calculado como:

$$q_{\max} \approx \frac{k_c \Delta T}{L_{\min}} \quad (6.7)$$

sendo  $L_{\min}$  a distância mínima permitida entre uma região de fluido e uma região de vazio já formada, antes que não se permita mais que material seja retirado. Visto que tanto  $k_c$  quanto

o valor máximo de  $\Delta T$  são unitários, a Equação 6.7 se torna  $q_{\max} \approx \frac{1}{L_{\min}}$ , a mesma relação de distância e fluxo de calor usado em [Lopes et al. \(2022\)](#).

Um valor de fluxo  $q_{\min}$  também é definido de forma a indicar um valor mínimo de ativação, valores de fluxo de calor maior que esse termo também são levados em conta na otimização. Dessa forma, a única maneira do material ser retirado entre uma região de fluido e vazio é se o fluxo nessa região for menor que  $q_{\min}$ , ou que os valores de sensibilidade das outras regiões da estrutura já forem muito altas. Para o primeiro caso ocorrer, significa que a taxa de mudança topológica,  $ER$  e  $AR$ , está muito alta e deve ser ajustado. O valor de  $q_{\min}$  pode ser determinado de forma similar ao fluxo de calor máximo, usando um valor de comprimento da parede  $L_{\max}$ , também similar ao que é feito em [Lopes et al. \(2022\)](#). Esse valor de  $L_{\max}$  representa uma distância grande, mas ainda importante para ser levada em conta para evitar que haja a união entre  $\Omega_f$  e  $\Omega_v$ .

Para fazer essa ativação de elementos com fluxo entre  $q_{\min}$  e  $q_{\max}$ , pode ser feito um ajuste linear da sensibilidade para que quanto mais próximo o fluxo for de  $q_{\max}$ , maior o valor de sensibilidade desse elemento. Esse ajuste da análise sensibilidade é feita usando a Equação 6.8 como feito em [Lopes et al. \(2022\)](#).

$$\alpha_e^c = \alpha_e + c_e [\max(\boldsymbol{\alpha}) - \alpha_e] \quad (6.8)$$

onde  $c_e$  é um parâmetro de ativação calculado de acordo com o fluxo do elemento:

$$c_e = \begin{cases} 0 & , \text{ quando: } q_e \leq q_{\min} \\ \left( \frac{q_e - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}} \right) & , \text{ quando: } q_{\min} < q_e < q_{\max} \\ 1 & , \text{ quando: } q_e \geq q_{\max} \end{cases} \quad (6.9)$$

Dessa forma, a sensibilidade de elementos com fluxo acima de  $q_{\min}$  cresce linearmente até o valor máximo da sensibilidade quando o fluxo ultrapassa  $q_{\max}$ .

A Figura 6.5 ilustra como a otimização é modificada com a adição do processo do VFM na Figura 5.4.

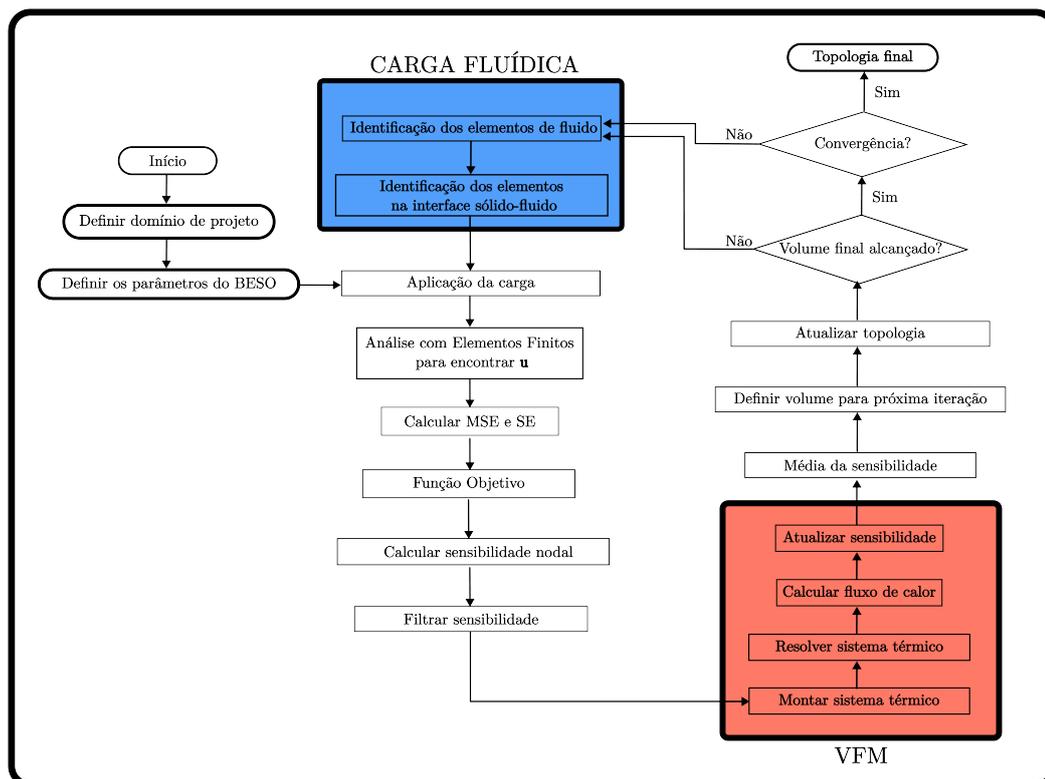


Figura 6.5 – Fluxograma do método BESO para Pa-CMs incluindo o processo do VFM.

### 6.3 Resultados Numéricos com o VFM

Nas otimizações usando o VFM apresentadas nessa seção foi utilizando um valor de  $L_{\min} = 2r_{\min}$  e  $L_{\max} = 3r_{\min}$ .

Os Pa-CMs otimizados na Seção 5.2 foram otimizados novamente usando o VFM seguindo o processo ilustrado na Figura 6.5. Todos os parâmetros de entrada utilizados na Seção 5.2 foram repetidos nessas otimizações. As Figuras 6.6a a 6.6f ilustram as topologias finais encontradas nas otimizações.

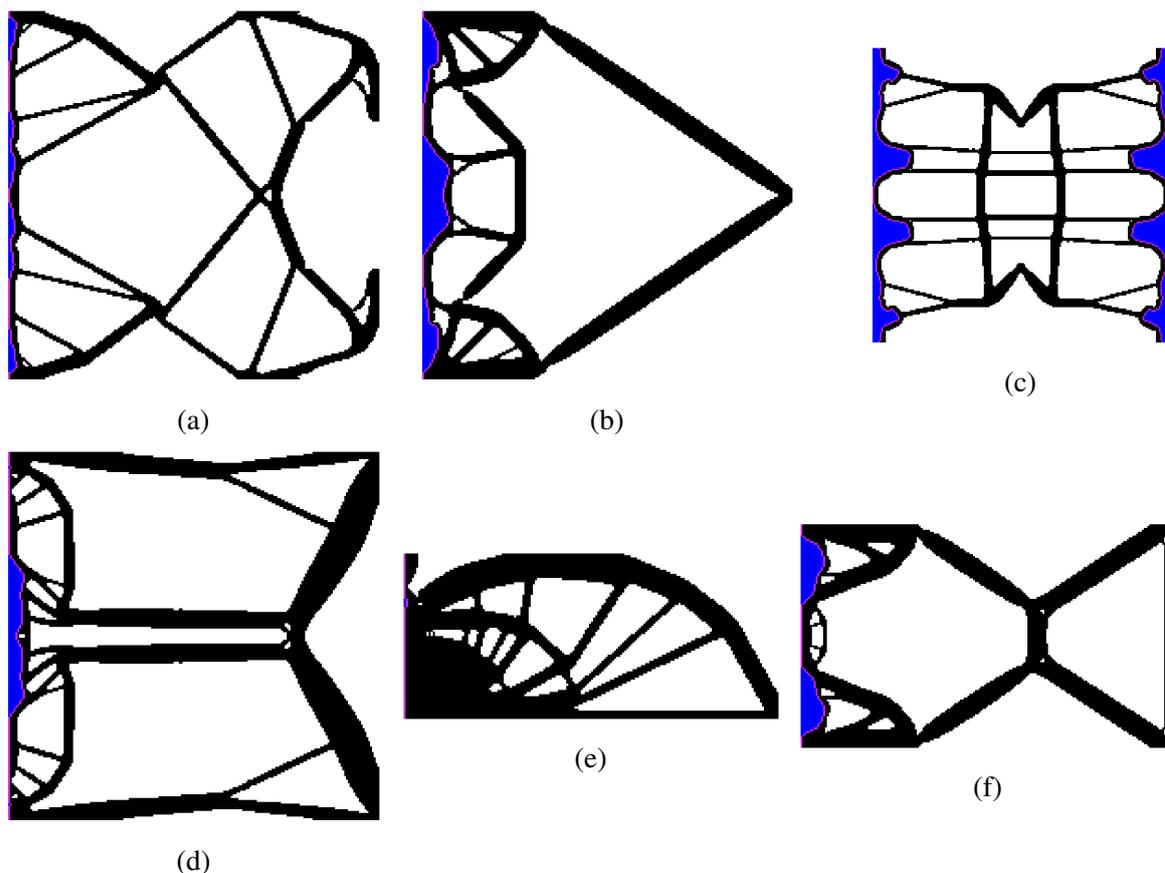


Figura 6.6 – Topologias finais usando o VFM. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor. (c) Mecanismo *contractor*. (d) Mecanismo esticador. (e) Mecanismo dobrador. (f) Mecanismo inversor de duas saídas.

A Tabela 6.1 mostra o deslocamento na saída das topologias otimizadas com o VFM e a comparação com as topologias encontradas sem o uso do método. Todos os deslocamentos foram calculados sem considerar a mola virtual na saída.

Tabela 6.1 – Comparação do deslocamento na saída para mecanismos otimizados com e sem VFM em mm.

	Pa-CM	Pa-CM + VFM
Mecanismo Pinça	2,87	2,31
Mecanismo Inversor	0,93	0,54
Mecanismo <i>Contractor</i>	0,22	0,23
Mecanismo Esticador	0,41	0,55
Mecanismo Dobrador	87,0	32,77
Mecanismo Inversor de 2 saídas	0,14	0,13

Nos testes feitos usando o VFM foi observado que o método faz o que se esperava, ele consegue manter as regiões de fluido e vazio separadas assim que elas se tornam suficientemente próximas. Porém, no decorrer da otimização essa distância é apenas mantida até que

a topologia final seja alcançada, restringido a variação da topologia nas regiões de alto fluxo de calor. As Figuras 6.7a a 6.7c ilustram esse comportamento na otimização do mecanismo inversor usando o VFM. A Figura 6.8 ilustra o fluxo de calor na interface de carregamento que se forma durante a otimização na topologia ilustrada na Figura 6.7c.

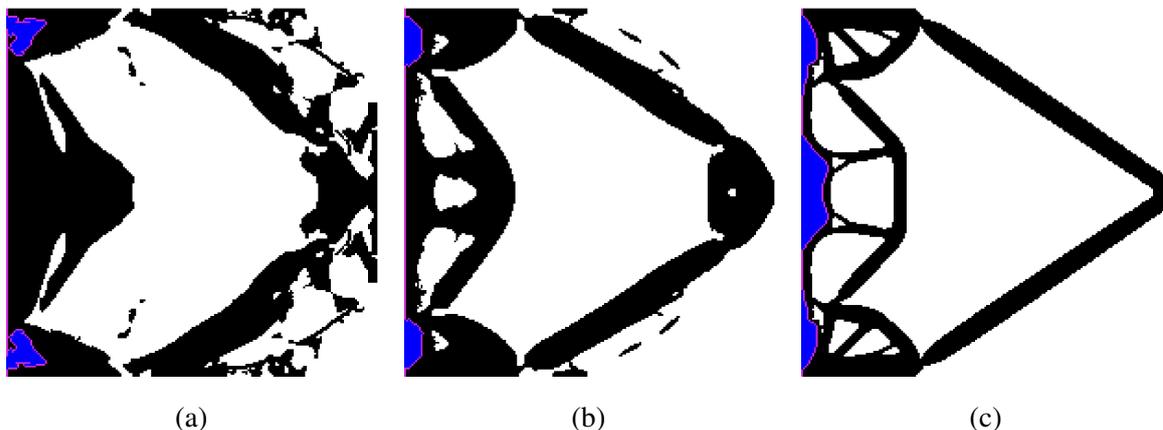


Figura 6.7 – Evolução da topologia do mecanismo inversor usando VFM. (a) Iteração 45. (b) Iteração 55. (c) Iteração 75.

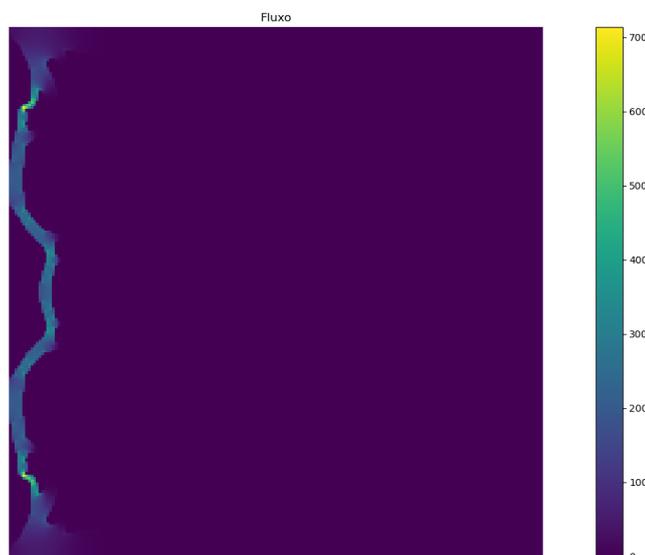


Figura 6.8 – Fluxo de calor na interface de carregamento que se forma no mecanismo inversor usando VFM.

As topologias encontradas usando o VFM como ilustrado nas Figuras 6.6a a 6.6f são relativamente diferentes das encontradas anteriormente. A principal diferença observada foi a manutenção de uma parede entre regiões de fluido e vazio que acarreta uma maior região de distribuição de material de reforço. A maioria das topologias ilustradas apresenta várias barras que são criadas para manter a rigidez da estrutura. Contudo, devido à restrição de volume as barras acabam se tornando bem finas, fazendo com que a estrutura se torne também mais flexível.

Esse efeito se reflete na eficiência dos mecanismos finais, que em sua maioria apresentam deslocamentos na saída inferiores se comparados com os mecanismos otimizados anteriormente. Isso ocorre porque a energia da entrada acaba se distribuindo entre os membros mais flexíveis. Contudo, para o caso do mecanismo esticador e do mecanismo *contractor*, foram encontradas topologias com deslocamento na saída superior quando usando o VFM.

Em relação à aproximação utilizada para se fazer uma relação entre uma espessura limite  $L_{\min}$  e um valor de fluxo máximo  $q_{\max}$ , em testes se foram verificados que existe um erro muito grande quando pequenas regiões de vazio se aproximam de grandes regiões de fluido. Contudo esse erro superestima o valor do fluxo de calor calculado, que ultrapassa o valor de  $q_{\max}$  definido, e por isso ainda é identificado pelo VFM. Dessa forma, o VFM é capaz de manter essas regiões com fluxo de calor maior que  $q_{\max}$ , apesar do erro de aproximação. A Figura 6.8 ilustra um fluxo de calor muito maior que 200, que é o valor de  $q_{\max}$  definido nesse problema.

Visto que o método VFM introduz regiões com sensibilidade elevada, a otimização é incapaz evoluir essas regiões e fornecer um avanço mais suave do fluido dentro da topologia. Por outro lado, o método evita o problema da análise de sensibilidade utilizado, que consegue prever apenas a variação da carga quando um elemento é removido. Nos casos de mecanismos que possuem uma instabilidade relacionada a desconexões com suportes, os mecanismos *contractor* e dobrador, que possuem evolução da função objetivo bastante instável, apresentam uma evolução mais suave usando o VFM, como ilustrado nas Figuras 6.9b a 6.9c. É verificado então que o VFM é capaz de minimizar esses comportamentos e criar uma evolução estável. Mas ainda se pode ver quedas bruscas em ambos os gráficos, mostrando que o método não mitiga completamente esse problema, dado que o mesmo não está relacionado à conexões de fluido e vazio.

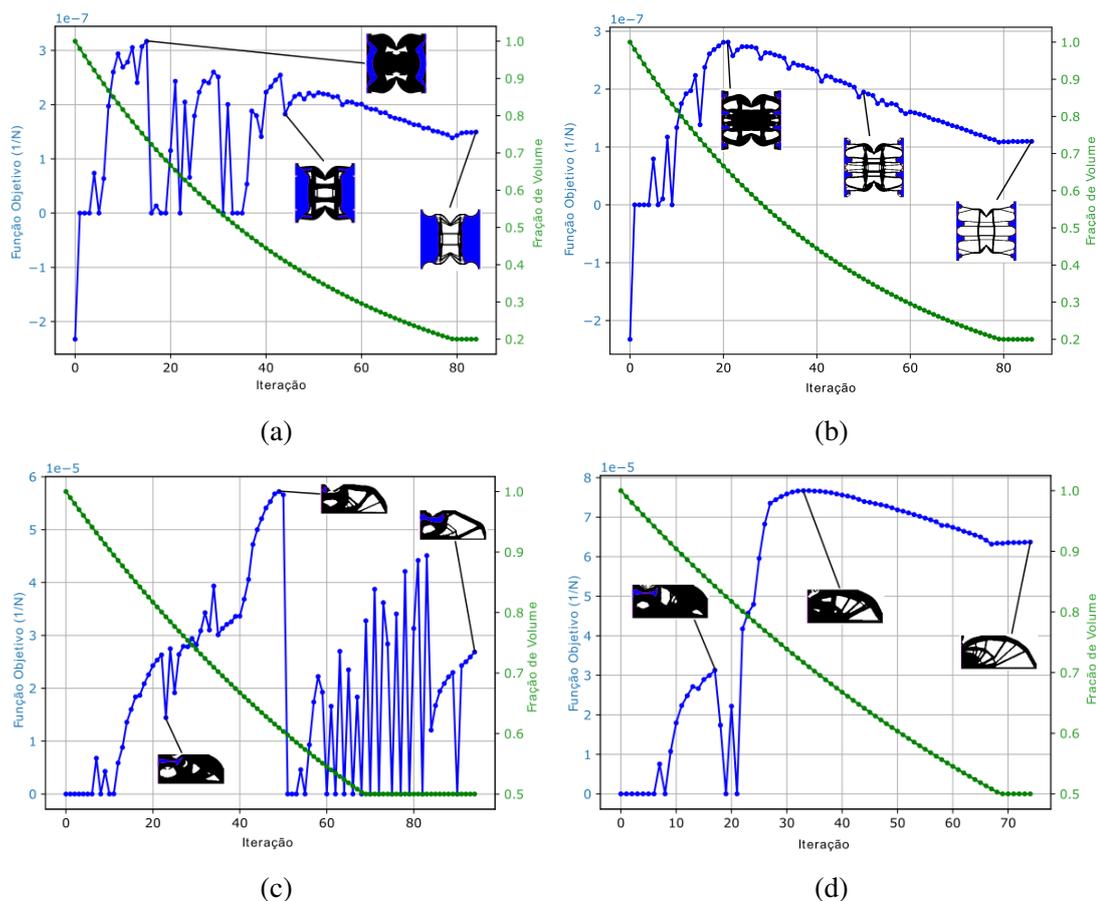


Figura 6.9 – Evolução da otimização topológica do mecanismo *contractor* sem VFM (a) e com VFM (b), e do mecanismo dobrador sem VFM (c) e com VFM (d).

### 6.3.1 VFM Suavizado

O VFM implementado se mostrou pouco eficiente na suavização da topologia, mantendo pequenas alterações da região de aplicação da carga. Assim, uma modificação no VFM que ignora espaços vazios muito pequenos foi introduzida para melhorar este comportamento. Essa modificação aplica a temperatura  $T_{cool}$  somente em espaços vazios com um volume menor que  $0,05V$ . Dessa forma, quando o VFM realiza o cálculo do sistema térmico, regiões de vazio isoladas, com volume maior que 5% do volume total, são ignoradas. Assim, a formação de regiões com a sensibilidade modificada acaba sendo atrasada e permite uma evolução mais livre da região carregada. Por outro lado, o método não necessariamente consegue evitar qualquer conexão do fluido com vazios, visto que regiões de vazio pequenas são ignoradas. No entanto, as regiões de vazios pequenas não criam variações muito grandes na carga quando se conectam com o fluido, e por isso pode-se supor que ignorar essas regiões não trazem instabilidades na evolução da topologia.

As Figuras 6.10a a 6.10f ilustram os resultados dos mecanismos usando o VFM suavizado. Todos os parâmetros de entrada utilizados na Seção 5.2 foram repetidos nessas otimizações, com exceção do mecanismo *contractor* que foi otimizado como  $\beta = 0,5$ , pois o valor de 0,6 resultou em uma estrutura final desconectada do suporte.

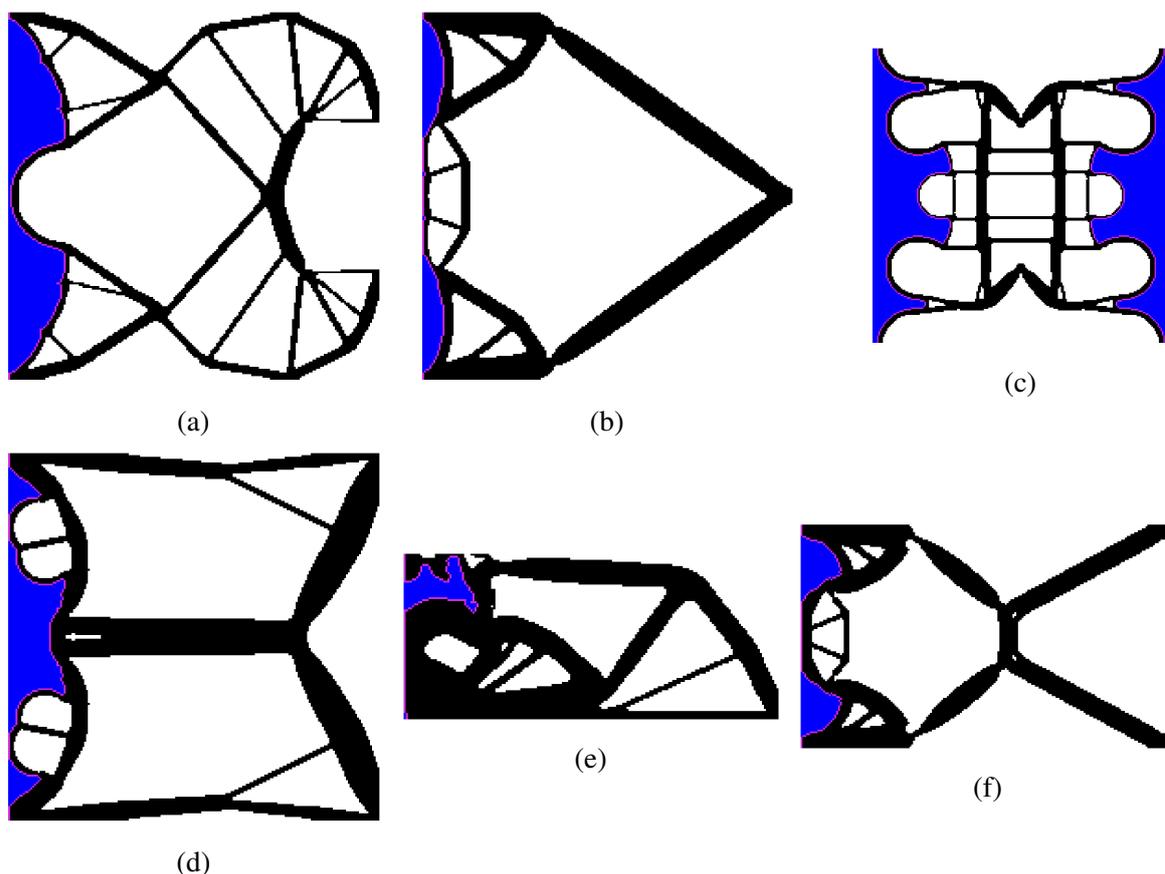


Figura 6.10 – Topologias finais usando o VFM suavizado. (a) Mecanismo Pinça. (b) Mecanismo inversor. (c) Mecanismo *contractor*. (d) Mecanismo esticador. (e) Mecanismo dobrador. (f) Mecanismo inversor de duas saídas.

A Tabela 6.2 mostra o deslocamento na saída dos mecanismos otimizados.

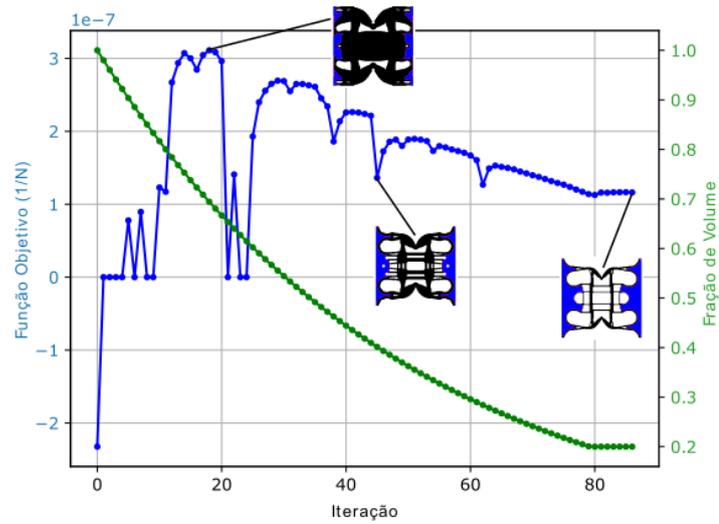
Tabela 6.2 – Deslocamento na saída para mecanismos otimizados com VFM suavizado em mm.

	Deslocamento
Mecanismo Pinça	2,24
Mecanismo Inversor	0,77
Mecanismo <i>Contractor</i>	0,21
Mecanismo Esticador	0,43
Mecanismo Dobrador	43,96
Mecanismo Inversor de 2 saídas	0,15

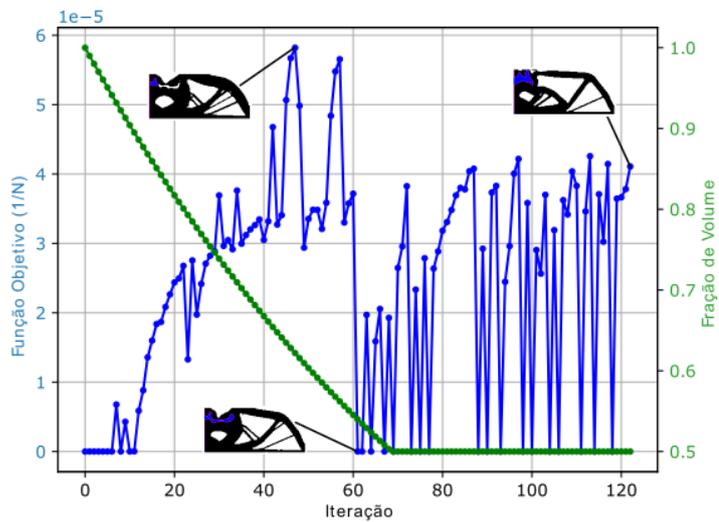
Os mecanismos encontrados apresentaram topologias mais parecidas com as topologias encontradas na Seção 5.2, não são apresentadas tantas conexões de barras finas, como nos

resultados mostrados nas Figuras 6.10f a 6.6f. Os deslocamentos na saída são menores, com exceção do mecanismo esticador, como os resultados do VFM apresentados anteriormente. O que se percebeu nas otimizações é que pequenas mudanças na evolução da topologia não influenciam tanto, como mostrado no resultado final do mecanismo pinça, Figura 6.10a, que chegou a uma topologia igual às otimizações BESO sem uso do VFM. Dessa forma se conseguiu chegar a uma topologia próxima das topologias ótimas, encontradas anteriormente, mantendo uma condição de baixa variação da carga. O mecanismo *contractor* precisou ser otimizado usando um  $\beta = 0,5$ , mostrando que esse parâmetro pode acabar prejudicando a otimização quando usando o VFM, o resultado final com  $\beta = 0,6$  apresentava uma topologia final desconectada do suporte.

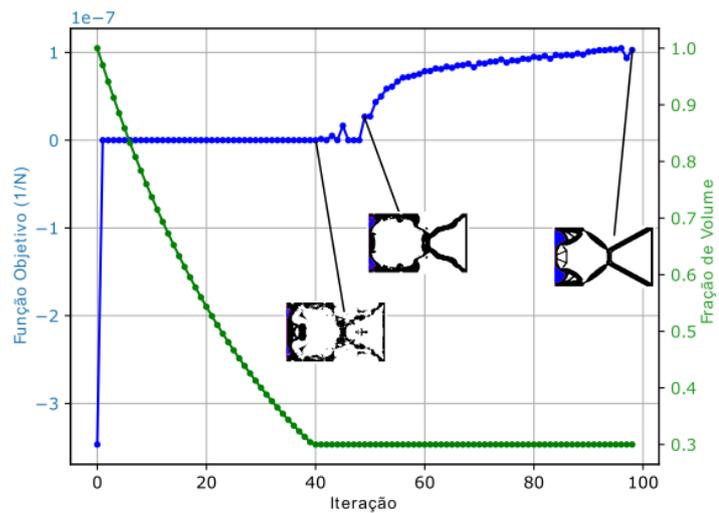
Quanto à evolução da função objetivo, o mecanismo *contractor* continuou apresentando sua evolução instável, mas apenas nas primeiras iterações, como ilustrado na Figura 6.11a. Após essa evolução inconstante, a curva se torna mais suave, visto que o VFM é capaz de impedir que material seja retirado do suporte. Já o mecanismo dobrador se torna ainda mais instável, como mostrado na Figura 6.11b. Pelo que se percebeu observando a evolução da topologia, o VFM dificulta que o mecanismo encontre uma topologia final, visto o método abordado aqui não consegue impedir desconexões do suporte e de uma região de fluido com vazio. Diminuir a porcentagem de volume de elementos vazios que o VFM consegue identificar poderia resolver esses problemas, mas então o método acabaria se tornando muito próximo da primeira versão do VFM. Isso faz com que o número de iterações necessárias para encontrar o critério de convergência também aumente. Já o mecanismo inversor de 2 saídas ilustrado na Figura 6.11c, parece se beneficiar com o uso do VFM modificado. Assim que o BESO encontra uma topologia factível, o VFM ajuda a manter e evoluir essa topologia rapidamente até a final, sem desconexões. Contudo, a topologia factível também só se forma depois de ter encontrado o volume final, como na maioria dos outros problemas otimizando esse mecanismo.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.11 – Evolução da otimização topológica usando o VFM suavizado dos mecanismos (a) *contractor*, (b) *dobrador* e (c) *inversor de duas saídas*.

Com esses resultados, pode se ver que usando um VFM mais suavizado pode ajudar a se chegar em topologias melhores que a primeira versão do VFM, mas não consegue impedir alguns problemas de instabilidade. Esses problemas de instabilidade estão bem presentes em problemas como o mecanismo *contractor* e o mecanismo dobrador.

## 7 CONCLUSÃO

Esse trabalho de mestrado teve como objetivo implementar o método BESO para otimizar mecanismos flexíveis considerando uma atuação por pressão fluídica. Para isso foi implementada a otimização de CMs usando uma função objetivo diferente da já utilizada na literatura. Em seguida os Pa-CMs foram otimizados, e foram realizadas otimizações de seis diferentes mecanismos. Foram testadas as influências de algumas variáveis para se entender o comportamento do BESO, suas vantagens e limitações, no problema de otimização de Pa-CMs. Adicionalmente, como uma opção para se lidar com o problema de variação abrupta da carga distribuída, foi proposto um método usando fluxos virtuais para impedir a conexão entre o fluido e regiões de vazio já remanescentes de iterações anteriores.

Inicialmente, o método BESO foi implementado para otimização de mecanismos flexíveis atuado por uma força pontual e fixa. Nesta etapa foram obtidas topologias similares às encontradas na literatura. Em seguida foi realizada a implementação do método BESO para se projetar topologias de mecanismos atuados por uma carga distribuída e dependente da topologia, ou seja, mecanismos fluido atuados (Pa-CM). Foram otimizados seis problemas diferentes, e cada um deles apresentou comportamentos diferentes durante a evolução da topologia. Ainda assim, em todos os casos se conseguiu chegar a topologias factíveis, que realizam um movimento de acordo com o que é determinado em suas formulações. Além disso, os resultados são influenciados pela clara definição entre o fluido e o sólido, que é uma das principais vantagens do BESO em problemas de Pa-CM. Em mecanismos em que se pôde se fazer comparações com a literatura, como os mecanismos pinça, inversor e contraidor, foram encontrados mínimos locais diferentes, e em alguns casos mais eficientes em relação à performance de deslocamento na saída. Contudo, os resultados reportados na literatura foram obtidos com outros métodos de otimização, tais como SIMP e Level Set.

Levando em conta os testes de entradas das otimizações de Pa-CM, se percebeu que o método ainda é muito dependente das condições de contorno e parâmetros da otimização. Enquanto o mecanismo pinça convergiu mais suavemente, obtendo estruturas similares, o mecanismo contraidor se mostrou menos estável por conta de oscilações ocorridas já nas primeiras iterações. Os resultados encontrados mostram que o método ainda depende de outras metodologias para encontrar topologias ótimas. Isto é, comparações entre os parâmetros de entrada

como  $AR$ ,  $ER$  e  $\beta$ , inclusão de regiões fora do domínio de projeto e, em alguns casos, o uso de uma topologia inicial. Outros parâmetros como as propriedades do material, as dimensões e o valor de  $r_{\min}$  também podem ser utilizados para encontrar topologias diferentes, mas estão mais relacionados com o projeto de mecanismos para aplicações específicas, o que não é o objetivo deste trabalho.

Um método baseado em cargas virtuais foi utilizado para impedir conexão de regiões e evitar uma mudança abrupta na carga, levando a menores instabilidades na evolução da topologia. O método obteve sucesso em evitar a conexão entre regiões de fluido e regiões de vazio formadas previamente, mas ainda necessita de ajustes para permitir uma evolução da interface de carregamento mais livre, e conseguir chegar a topologias mais eficientes. Uma modificação foi feita de forma a tornar o método menos restritivo, onde regiões de vazio muito pequenas não são consideradas no método. Ao se usar essa modificação no VFM, foram encontradas topologias melhores, mas que ainda apresentavam instabilidade na otimização. Apesar desses resultados, esse método possui um potencial de aplicação em outros tipos de problemas de otimização onde não se deseja que regiões diferentes se conectem. Um bom exemplo de aplicação seria um problema em que duas pressões fluídicas diferentes são aplicadas e não seria adequado que essas duas regiões se conectassem durante a otimização.

Para trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir dos resultados apresentados aqui pode-se citar a otimização de Pa-CMs com BESO considerando outros problemas estudados na literatura atualmente, como uso de multimateriais, consideração de grandes deslocamentos, múltiplas entradas e saídas, problemas multiescala e geração de percurso. Outra possibilidade, ainda não muito explorada é a inclusão de atuação dinâmica. Em relação ao VFM, o mesmo pode ser aplicado em outros problemas com carga dependente; e o método também pode ser melhorado para permitir uma evolução da interface de fluido-sólido que se forma entre regiões de fluido e vazio.

## REFERÊNCIAS

- ACHLEITNER, J.; WEHRLE, E. On material selection for topology optimized compliant mechanisms. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 167, p. 104474, 2022.
- ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S.; GIANCHANDANI, Y. A methodical approach to the design of compliant micromechanisms. In: SC: IEEE. **Solid-State Sensor and Actuator Workshop**. [S.l.], 1994. v. 1994, p. 189–192.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.
- BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 190, n. 26-27, p. 3443–3459, 2001.
- CAASENBROOD, B.; POGROMSKY, A.; NIJMEIJER, H. A computational design framework for pressure-driven soft robots through nonlinear topology optimization. In: 3RD IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOFT ROBOTICS (ROBOSOFT). **Proceedings**. [S.l.], 2020. p. 633–638.
- CAI, S.; ZHOU, W.; WEI, H.; ZHU, M. Topology optimization design of multi-input-multi-output compliant mechanisms with hinge-free characteristic and totally decoupled kinematics. **Applied Sciences**, MDPI, v. 13, n. 7, p. 4627, 2023.
- CHEN, B.-C.; KIKUCHI, N. Topology optimization with design-dependent loads. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 37, n. 1, p. 57–70, 2001.
- CHEN, B.-C.; SILVA, E. C. N.; KIKUCHI, N. Advances in computational design and optimization with application to MEMS. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 52, n. 1-2, p. 23–62, 2001.
- CHEN, F.; XU, W.; ZHANG, H.; WANG, Y.; CAO, J.; WANG, M. Y.; REN, H.; ZHU, J.; ZHANG, Y. F. Topology optimized design, fabrication, and characterization of a soft cable-driven gripper. **IEEE Robotics and Automation Letters**, v. 3, n. 3, p. 2463–2470, 2018.
- CHEN, Y.; XIA, Z.; ZHAO, Q. Optimal design of soft pneumatic bending actuators subjected to design-dependent pressure loads. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, IEEE, v. 24, n. 6, p. 2873–2884, 2019.
- CHO, K.-H.; PARK, J.-Y.; IM, M.-G.; HAN, S.-Y. Reliability-based topology optimization of electro-thermal-compliant mechanisms with a new material mixing method. **International Journal of Precision Engineering and Manufacturing**, Springer, v. 13, p. 693–699, 2012.
- CUNHA, D. C. **Otimização Topológica na Concepção de Fluidoatuadores Celulares**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

DE ALMEIDA, B. V.; PAVANELLO, R. Topology optimization of the thickness profile of bimorph piezoelectric energy harvesting devices. **Journal of Applied and Computational Mechanics**, v. 5, n. 1, p. 113–127, 2019.

DE SOUZA, E. M. **Design of pneumatic and hydraulic soft actuators by topology optimization method**. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2020.

DE SOUZA, E. M.; SILVA, E. C. N. Topology optimization applied to the design of actuators driven by pressure loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Nature, v. 61, n. 5, p. 1763–1786, 2020.

EL-ATAB, N.; MISHRA, R. B.; AL-MODAF, F.; JOHARJI, L.; ALSHARIF, A. A.; ALAMOUDI, H.; DIAZ, M.; QAISER, N.; HUSSAIN, M. M. Soft actuators for soft robotic applications: A review. **Advanced Intelligent Systems**, Wiley Online Library, v. 2, n. 10, p. 2000128, 2020.

EMMENDOERFER JR., H.; MAUTE, K.; FANCELLO, E. A.; SILVA, E. C. N. A level set-based optimized design of multi-material compliant mechanisms considering stress constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 391, p. 114556, 2022.

FRECKER, M. I.; ANATHASURESH, G. K.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N.; KOTA, S. Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization. **Journal of Mechanical Design**, v. 119, n. 2, p. 238–245, 1997.

GARCEZ, G. L.; PAVANELLO, R.; PICELLI, R. Stress-based structural topology optimization for design-dependent self-weight loads problems using the BESO method. **Engineering Optimization**, v. 55, n. 2, p. 197–213, 2021.

HAMMER, V. B.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, p. 85–92, 2000.

HOWELL, L. L. **Compliant mechanisms**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.

HOWELL, L. L.; MAGLEBY, S. P.; OLSEN, B. M. **Handbook of compliant mechanisms**. [S.l.]: Wiley, 2013.

HUANG, X.; LI, Y.; ZHOU, S. W.; XIE, Y. M. Topology optimization of compliant mechanisms with desired structural stiffness. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 79, p. 13–21, 2014.

HUANG, X.; XIE, Y. M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 43, n. 14, p. 1039–1049, 2007.

HUANG, X.; XIE, Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Application**. [S.l.]: Wiley, 2010.

IM, M.-G.; PARK, J.-Y.; HAN, S.-Y. A new topology optimization scheme based on BESO for electro-thermal-compliant mechanisms. In: 6TH AUSTRALASIAN CONGRESS ON APPLIED MECHANICS. **Proceedings**. [S.l.], 2010. p. 159–168.

- KOPPEN, S.; LANGELAAR, M.; VAN KEULEN, F. A simple and versatile topology optimization formulation for flexure synthesis. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 172, p. 104743, 2022.
- KUMAR, P.; FROUWS, J. S.; LANGELAAR, M. Topology optimization of fluidic pressure-loaded structures and compliant mechanisms using the Darcy method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 61, p. 1637–1655, 2020.
- KUMAR, P.; LANGELAAR, M. On topology optimization of design-dependent pressure-loaded three-dimensional structures and compliant mechanisms. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 122, n. 9, p. 2205–2220, 2021.
- KUMAR, P.; LANGELAAR, M. Topological synthesis of fluidic pressure-actuated robust compliant mechanisms. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 174, p. 104871, 2022.
- KUMAR, P.; SAUER, R. A.; SAXENA, A. On topology optimization of large deformation contact-aided shape morphing compliant mechanisms. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 156, p. 104135, 2021.
- KUMAR, P.; SCHMIDLEITHNER, C.; LARSEN, N. B.; SIGMUND, O. Topology optimization and 3D printing of large deformation compliant mechanisms for straining biological tissues. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 63, p. 1351–1366, 2021.
- LAU, G. K.; DU, H.; LIM, M. K. Use of functional specifications as objective functions in topological optimization of compliant mechanism. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 190, n. 34, p. 4421–4433, 2001.
- LI, Y. **Topology optimization of compliant mechanisms based on the BESO method**. Dissertação (Mestrado) — School of Civil, Environmental and Chemical Engineering - RMIT University, 2014.
- LI, Y.; HUANG, X.; XIE, Y. M.; ZHOU, S. W. Evolutionary topology optimization of hinge-free compliant mechanisms. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 86, p. 69–75, 2014.
- LI, Y.; HUANG, X. D.; XIE, Y. M.; ZHOU, S. W. Bi-directional evolutionary structural optimization for design of compliant mechanisms. **Key Engineering Materials**, v. 535, p. 373–376, 2013.
- LIANG, J.; ZHANG, X.; ZHU, B.; ZHANG, H.; WANG, R. Topology optimization method for designing compliant mechanism with given constant force range. **Journal of Mechanisms and Robotics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 15, n. 6, p. 061008, 2023.
- LIANG, K.; ZHU, D.; LI, F. Macro–microscale topological design for compliant mechanisms with special mechanical properties. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 408, p. 115970, 2023.
- LIAO, J.; HUANG, G.; ZUO, G.; FAN, X. Combination of the guide-weight criterion and BESO method for fast and stable topology optimization of two-dimensional continuum structures. **Acta Mechanica**, Springer, p. 1–16, 2023.

- LIU, C.-H.; HUANG, G.-F.; CHIU, C.-H. An evolutionary topology optimization method for design of compliant mechanisms with two-dimensional loading. In: 2015 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED INTELLIGENT MECHATRONICS (AIM). **Proceedings**. [S.l.], 2015. p. 1340–1345.
- LIU, M.; ZHAN, J.; ZHU, B.; ZHANG, X. Topology optimization of compliant mechanism considering actual output displacement using adaptive output spring stiffness. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 146, p. 103728, 2020.
- LIU, S.; LI, Q.; CHEN, W.; TONG, L.; CHENG, G. An identification method for enclosed voids restriction in manufacturability design for additive manufacturing structures. **Frontiers of Mechanical Engineering**, v. 10, p. 126–137, 2015.
- LOPES, H. N.; CUNHA, D. C.; PAVANELLO, R.; MAHFOUD, J. Numerical and experimental investigation on topology optimization of an elongated dynamic system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 165, p. 108356, 2022.
- LU, Y.; TONG, L. Topology optimization of compliant mechanisms and structures subjected to design-dependent pressure loadings. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Nature, v. 63, p. 1889–1906, 2021a.
- LU, Y.; TONG, L. Concurrent topology optimization of cellular structures and anisotropic materials. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 255, p. 106624, 2021b.
- LUO, Z.; CHEN, L.; YANG, J.; ZHANG, Y.; ABDEL-MALEK, K. Compliant mechanism design using multi-objective topology optimization scheme of continuum structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 30, p. 142–154, 2005.
- LUO, Z.; TONG, L.; WANG, M. Y. Design of distributed compliant micromechanisms with an implicit free boundary representation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 36, p. 607–621, 2008.
- MADRID, C. M. P. **Otimização Topológica Bidirecional Evolucionária para o Projeto de Mecanismos Flexíveis usando um Enfoque Multi-critério**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas, 2016.
- MOSCATELLI, E.; SÁ, L. F. N.; EMMENDOERFER JR., H.; SILVA, E. C. N. Pure-displacement formulation and bulk modulus propagation for topology optimization with pressure loads. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 411, p. 116058, 2023.
- NISHIWAKI, S.; FRECKER, M. I.; MIN, S.; KIKUCHI, N. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 42, n. 3, p. 535–559, 1998.
- NISHIWAKI, S.; MIN, S.; YOO, J.; KIKUCHI, N. Optimal structural design considering flexibility. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 190, n. 34, p. 4457–4504, 2001.
- PANGANIBAN, H.; JANG, G.-W.; CHUNG, T.-J. Topology optimization of pressure-actuated compliant mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 3, p. 238–246, 2010.

- PEDERSEN, C. B. W.; BUHL, T.; SIGMUND, O. Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 50, n. 12, p. 2683–2705, 2001.
- PICELLI, R.; VICENTE, W. M.; PAVANELLO, R. Bi-directional evolutionary structural optimization for design-dependent fluid pressure loading problems. **Engineering Optimization**, v. 47, n. 10, p. 1324–1342, 2015.
- PINSKIER, J.; KUMAR, P.; HOWARD, D.; LANGELAAR, M. Automated design of pneumatic soft grippers through design-dependent multi-material topology optimization. In: 2023 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOFT ROBOTICS (ROBOSOFT). **Proceedings**. [S.l.], 2022.
- REINISCH, J.; WEHRLE, E.; ACHLEITNER, J. Multiresolution topology optimization of large-deformation path-generation compliant mechanisms with stress constraints. **Applied Sciences**, MDPI, v. 11, n. 6, p. 2479, 2021.
- SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Journal of Structural Mechanics**, Taylor & Francis, v. 25, n. 4, p. 493–524, 1997.
- SIGMUND, O.; CLAUSEN, P. M. Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 13-16, p. 1874–1889, 2007.
- WANG, M. Y. Mechanical and geometric advantages in compliant mechanism optimization. **Frontiers of Mechanical Engineering in China**, Springer, v. 4, p. 229–241, 2009.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Shape and layout optimization via an evolutionary procedure. In: 1992 INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL ENGINEERING SCIENCE. **Proceedings**. [S.l.], 1992.
- YANG, X.-Y.; XIE, Y.-M.; STEVEN, G. P. Evolutionary methods for topology optimisation of continuous structures with design dependent loads. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 83, n. 12-13, p. 956–963, 2005.
- YANG, X. Y.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P.; QUERIN, O. M. Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization. **AIAA Journal**, v. 37, n. 11, p. 1483–1488, 1999.
- YAP, H. K.; NG, H. Y.; YEOW, C.-H. High-force soft printable pneumatics for soft robotic applications. **Soft Robotics**, Mary Ann Liebert, Inc. 140 Huguenot Street, 3rd Floor New Rochelle, NY 10801 USA, v. 3, n. 3, p. 144–158, 2016.
- ZHAN, J.; LI, Y.; LUO, Z.; LIU, M. Topological design of multi-material compliant mechanisms with global stress constraints. **Micromachines**, MDPI, v. 12, n. 11, p. 1379, 2021.
- ZHANG, H.; KUMAR, A. S.; CHEN, F.; FUH, J. Y. H.; WANG, M. Y. Topology optimized multimaterial soft fingers for applications on grippers, rehabilitation, and artificial hands. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, v. 24, n. 1, p. 120–131, 2019.
- ZHU, B.; ZHANG, X.; ZHANG, H.; LIANG, J.; ZANG, H.; LI, H.; WANG, R. Design of compliant mechanisms using continuum topology optimization: A review. **Mechanism and Machine Theory**, v. 143, p. 103622, 2020.

ZOLFAGHARIAN, A.; KOUZANI, A. Z.; KHOO, S. Y.; MOGHADAM, A. A. A.; GIBSON, I.; KAYNAK, A. Evolution of 3D printed soft actuators. **Sensors and Actuators A: Physical**, Elsevier, v. 250, p. 258–272, 2016.

## 8 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA FLUXO DE CALOR DO ELEMENTO QUADRADO BILINEAR

A solução analítica descrita neste anexo é de autoria de [Lopes et al. \(2022\)](#). Descrição da análise não está presente em [Lopes et al. \(2022\)](#), foram passadas pessoalmente.

O fluxo de calor por unidade da área pode ser determinado para cada nó de um elemento. Considerando um elemento quadrado bilinear, se tem a seguinte representação na Figura 8.1, onde cada nó do elemento tem uma temperatura ( $T_1, T_2, T_3, T_4$ ) calculada anteriormente ao se resolver o sistema térmico. O elemento possui as mesmas dimensões de altura e largura, como valor  $L_e$ . O elemento também possui seu sistema de coordenadas local x e y.

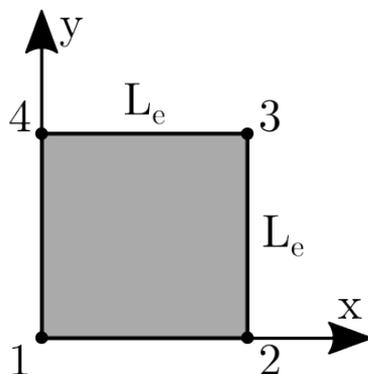


Figura 8.1 – Representação de elemento finito quadrado bilinear e seus nós ([LOPES et al., 2022](#)).

Utilizando esse sistema de coordenadas local, as funções de forma desse elemento podem ser determinadas:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{L_e^2}(L_e - x)(L_e - y) \quad (8.1)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{L_e^2}x(L_e - y) \quad (8.2)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{L_e^2}xy \quad (8.3)$$

$$N_4(x, y) = \frac{1}{L_e^2}y(L_e - x) \quad (8.4)$$

A matriz de derivadas das funções de forma  $\mathbf{B}_t$  pode ser determinada como:

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_e^2} \begin{bmatrix} -(L_e - y) & (L_e - y) & y & -y \\ -(L_e - x) & x & x & (L_e - x) \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

O fluxo de calor por unidade de área  $\mathbf{q}_e(x, y)$  para um conjunto de coordenadas dentro do elemento, pode ser calculado como:

$$\mathbf{q}_e(x, y) = -k_c \mathbf{B}_t \mathbf{T} \quad (8.6)$$

Onde

$$\mathbf{T} = [T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4] \quad (8.7)$$

Substituindo as Equações 8.7 e 8.5 na Equação 8.6 e reorganizando a Equação, se chega a:

$$\mathbf{q}_e(x, y) = -\frac{k_c}{L_e^2} \begin{Bmatrix} A_t y + L_e B_t \\ A_t x + L_e C_t \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

Onde as constantes  $A_t = T_1 - T_2 + T_3 - T_4$ ,  $B_t = T_2 - T_1$  e  $C_t = T_4 - T_1$  são usadas de forma a simplificar a equação. Porém essa equação apenas dá uma informação do fluxo em um local dentro do elemento, e, portanto, para calcular um valor de uma média generalizada equivalente do fluxo de calor por unidade de área dentro do elemento a Equação 8.9 pode ser usada.

$$q_e = \left[ \frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} \|\mathbf{q}_e\|^m dV \right]^{\frac{1}{m}} \quad (8.9)$$

Aplicando a Equação 8.8 na Equação 8.9 e suando um valor de  $m = 2$  para a norma:

$$q_e = \sqrt{\frac{1}{L_e^2} \int_0^{L_e} \int_0^{L_e} \left[ \frac{k_c^2}{L_e^4} (A_t y + L_e B_t)^2 + \frac{k_c^2}{L_e^4} (A_t x + L_e C_t)^2 \right] dx dy} \quad (8.10)$$

Integrando analiticamente se chega a:

$$q_e = \frac{k_c}{L_e} \sqrt{\frac{2}{3} A_t^2 + A_t B_t + A_t C_t + B_t^2 + C_t^2} \quad (8.11)$$