UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

RENATO JUNIOR MOREIRA E SILVA

# Deformações métricas e a Conjectura de Wilking em Espaços Simétricos

Campinas

2023

Renato Junior Moreira e Silva

# Deformações métricas e a Conjectura de Wilking em Espaços Simétricos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Ademir Pastor Ferreira

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Renato Junior Moreira e Silva e orientada pelo Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38d

Silva, Renato Junior Moreira e, 1992-
Deformações métricas e a conjectura de Wilking em espaços simétricos / Renato Junior Moreira e Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Ademir Pastor Ferreira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Folheações (Matemática). 2. Curvatura. 3. Geometria riemaniana. 4. Teoria de deformação (Matemática). I. Ferreira, Ademir Pastor, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** Metric deformations and the Wilking's Conjecture on symmetric spaces
**Palavras-chave em inglês:**
Foliations (Mathematics)
Curvature
Riemannian geometry
Deformation theory (Mathematics)
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Doutor em Matemática
**Banca examinadora:**
Lino Anderson da Silva Grama
Eder de Moraes Correa
Leonardo Francisco Cavenaghi
Samuel Augusto Wainer
Carlos Henrique Grossi Ferreira
**Data de defesa:** 05-12-2023
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-6101-1262
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/2477747252179239

**Tese de Doutorado defendida em 05 de dezembro de 2023 e aprovada**

**pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA**

**Prof(a). Dr(a). EDER DE MORAES CORREA**

**Prof(a). Dr(a). LEONARDO FRANCISCO CAVENAGHI**

**Prof(a). Dr(a). SAMUEL AUGUSTO WAINER**

**Prof(a). Dr(a). CARLOS HENRIQUE GROSSI FERREIRA**

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

*Dedico este trabalho a Maria Auxiliadora da Silva. Sem ela (mesmo que em memória), nada faria sentido.*

# Agradecimentos

Agradeço a minha avó Maria Auxiliadora da Silva. Mesmo não estando mais entre nós, tudo o que realizei até hoje foi por ela, assim como tudo mais que eu possa realizar um dia.

Aos meus pais, Débora e Renato, pelo suporte oferecido e que culminou na realização deste projeto.

Agradeço também a minha noiva, Priscila Jana, por ter cumprido a árdua tarefa de me aguentar durante o Doutorado.

Ao Clube de Regatas do Flamengo, por me ensinar o significado de amor incondicional.

Aos professores Lino Grama e Ademir Pastor pelo suporte extraordinário oferecido para a realização da defesa desta tese e ao professor Leonardo Cavenaghi pelo apoio, colaboração e amizade ao longo destes anos.

Agradeço também aos professores Llohann Sperança e Rafael Leão pela orientação e colaboração oferecidos ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos e amigas pelo apoio oferecido ao longo destes anos. Em especial a Amanda Costa, Amanda Pereira, Daniel Ide, Gabriel Quintanilha, Henrique Truran, Victor Pretti e Vladmir Sicca.

Ao SAPPE-UNICAMP pelos serviços prestados e que foram fundamentais para que este trabalho tenha sido concluído.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“A tranquilidade é trágica"*
*Antônio Abujamra*

# Resumo

Neste trabalho é demonstrada a Conjectura de Wilking para completude de folhas duais de Folheações Singulares Riemannianas em espaços simétricos de curvatura não-negativa. É também exibida uma aplicação no caso de Folheações Polares onde é mostrado que estas folheações se decompõe como o produto de folheações triviais com uma única folha.

Além disso, são construídas as expressões para curvatura das deformações de Cheeger numa variedade Riemanniana $(M, g)$ munida de uma $G$-ação isométrica. Se uma órbita principal possui grupo fundamental finito e $\mathrm{Ric}_{M^{reg}/G} \geq 1$, Searle–Wilhelm provaram que $M$ admite uma nova métrica $\tilde{g}$ com curvatura de Ricci positiva. $\tilde{g}$ é obtida após uma transformação conforme seguida de uma deformação de Cheeger. Oferecemos condições suficientes e necessárias na $G-$ação para que seja preciso utilizar apenas deformações de Cheeger.

Foram também generalizadas as construções da deformação de Cheeger para o caso em que são consideradas funções positivas básicas $h : M \to \mathbb{R}$ ao invés de simplesmente $1/t$, onde obtém-se a expressão para as curvaturas da métrica deformada.

**Palavras-chave**: folheações singulares riemannianas; curvatura positiva; folheações duais; geometria riemanniana; deformações métricas

# Abstract

In this work, Wilking's Conjecture is demonstrated regarding the completeness of dual leaves of Singular Riemannian Foliations in symmetric spaces with non-negative curvature. Additionally, an application is presented in the case of Polar Foliations, where it is shown that these foliations splits as the product of trivial foliations with a single leaf.

Furthermore, expressions for the curvature of Cheeger deformations are constructed on a Riemannian manifold $(M, g)$ equipped with an isometric $G$-action. If a principal orbit has a finite fundamental group and $\mathrm{Ric}_{M^{reg}/G} \geq 1$, Searle–Wilhelm proved that $M$ admits a new metric $\tilde{g}$ with positive Ricci curvature. $\tilde{g}$ is obtained after a conformal transformation followed by a Cheeger deformation. We provide sufficient and necessary conditions on the $G$-action to determine when only Cheeger deformations are necessary.

Generalizations have also been made for Cheeger deformation constructions in cases where positive basic functions $h : M \to \mathbb{R}$ are considered instead of just $1/t$, resulting in the expression for the curvatures of the deformed metric.

**Keywords**: singular riemannian foliations; positive curvature; dual foliations; riemannian geometry; metric deformations

# Sumário

# Introdução

A curvatura de Variedades Riemannianas pode ser entendida como uma maneira de medir o quão próximo (ou distante) uma variedade está de ser *flat* (i.e. ter a curvatura identicamente nula), ou seja, o quão próximo a variedade está de ser localmente isométrica ao espaço Euclidiano. Esta é a gênese do interesse pelo estudo do sinal da curvatura de variedades Riemannianas: buscamos entender as propriedades geométricas de espaços com curvatura não-nula e as implicações do sinal da curvatura em construções geométricas e topológicas.

Neste trabalho, o sinal da curvatura desempenha papel fundamental para os resultados expostos. Estamos particularmente interessados nos casos em que a curvatura é não-negativa ou positiva.

Um cenário que demonstra a importância da não-negatividade da curvatura é ao considerarmos Folheações Singulares Riemannianas. Motivado pela constatação de que folheações polares em esferas possuem folhas completas, juntamente aos resultados mostrados (Wilking 2007), Wilking conjecturou:

**Conjectura 1** (Conjecture 1, (Wilking 2007))**.** *Suponha que $\mathcal{F}$ seja uma folheação singular Riemanniana em uma variedade de curvatura seccional não-negativa. Então, a folheação dual possui folhas completas.*

que está demonstrada neste trabalho para **Variedade Simétricas** no Capítulo 2. Com esta conjectura mãos, pode-se demonstrar de modo simples algumas aplicações de resultados importantes no contexto de folheações polares (seção 2.5).

Um resultado marcante no estudo do sinal da curvatura escalar de uma variedade foi provado por Kazdan-Warner:

**Teorema 1.** *(Kazdan e Warner 1975, Theorem 6.4) Seja $M$ uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com $dim(M) \geq 3$. Então:*

1. *Todo elemento de $C^\infty(M)$ é uma curvatura escalar se, e somente se, $M$ possui curvatura escalar positiva.*
2. *Toda função em $C^\infty(M)$ que é negativa em algum ponto de $M$ é uma curvatura escalar em $M$.*

Em particular, toda função $f \in C^\infty(M)$ que é negativa em algum ponto de $M$ é uma curvatura escalar de $M$, mas o mesmo não é válido para funções positivas, o que mostra que a positividade da curvatura nos impõe uma restrição não-trivial.

Neste contexto, um problema interessante e desafiador é o de construir métricas com curvatura positiva: há na literatura uma abundância de exemplos de construções de métricas com curvatura não-negativa (veja (Cheeger 1973)), mas ao lidarmos com curvatura positiva temos uma escassez destas construções. Uma destas construções de métricas com curvatura positiva foi realizada por Searle-Wilhelm:

**Teorema 2** (Searle–Wilhelm, (Searle e Wilhelm 2015))**.** *Seja $G$ um grupo de Lie compacto e conexo agindo isometricamente e efetivamente numa variedade Riemanniana compacta $(M, g)$. Suponha que:*

1. *Uma órbita principal possui grupo fundamental finito.*

2. *A métrica de distância orbital em $M/G$ possui curvatura de Ricci $\geq 1$.*

*Então $M$ admite uma métrica $G$-invariante $\tilde{g}$ com curvatura de Ricci positiva.*

A métrica $\tilde{g}$ do Teorema anterior é construída utilizando uma transformação conforme em $g$ seguida de uma deformação chamada de *Deformação de Cheeger*. As deformações de Cheeger em uma variedade Riemanniana $(M, g)$ podem ser entendidas como deformações no espaço vertical de $M$ realizadas por um parâmetro $t > 0$. Surgem naturalmente duas perguntas:

1. *É possível realizar as construções de Searle-Wilhelm utilizando apenas deformações de Cheeger?*

2. *Podemos generalizar as construções das deformações de Cheeger ao considerarmos outras funções ao invés do parâmetro $t > 0$?*

No Capítulo 3 deste trabalho são dadas as respostas para estas duas perguntas. De fato, nesse capítulo estão demonstradas condições para que o Teorema de Searle-Wilhelm possa ser realizado utilizando apenas Deformações de Cheeger (seção 3.6) e tambem são realizadas as construções de deformações de Cheeger ao considerarmos funções básicas $h : M \to \mathbb{R}$ no lugar do parâmetro $t > 0$ (seções 3.4 e 3.5).

Este trabalho é encerrado após exibirmos condições para encontrarmos caminhos de curvatura escalar positiva em variedades cujo espaço vertical seja $1-$dimensional, o que se torna particularmente interessante no contexto de *circle-bundles*, oferecendo um contraponto ao Teorema de Lawson-Yau:

**Teorema 3** (Lawson-Yau)**.** *Seja $(M, g)$ uma variedade compacta Riemanniana munida de uma ação efetiva isométrica de um grupo $G$ compacto, conexo e não-abeliano. Então, a deformação de Cheeger $g_t$ no instante $t > 0$ tem curvatura escalar positiva para algum $t_0 > 0$.*

uma vez que encontramos um caminho de métricas com curvaturas escalares positivas deformadas via Cheeger para o grupo abeliano $S^1$.

# 1 Geometria e Topologia de Variedades

## 1.1 Introdução do Capítulo

Neste capítulo, estabelecemos as bases teóricas necessárias para a compreensão dos resultados que serão apresentados ao longo desta tese. Ao abordar conceitos como Grupos Topológicos, Fibrados Vetoriais, Fibrados Principais, Métricas Riemannianas, Curvatura Riemanniana, Geodésicas e Espaços Simétricos nosso objetivo é fornecer um alicerce teórico coeso para a pesquisa desenvolvida.

No contexto dos Grupos Topológicos, iremos explorar os conceitos de subgrupos topológicos, órbitas e isotropia, culminando na introdução de um componente essencial deste estudo: os Grupos de Lie.

No âmbito dos Fibrados, definimos fibrados genéricos e, a partir disso, motivaremos e definiremos os conceitos de Fibrados Vetoriais e Fibrados Principais, fornecendo alguns exemplos.

Faremos também uma exploração concisa, porém abrangente, da Geometria Riemanniana com um foco particular no objeto central desta tese: a Curvatura.

Concluimos este capítulo com uma breve exposição de Espaços Simétricos na qual demonstramos uma caracterização parcial em termos da curvatura destes espaços.

## 1.2 Grupos Topológicos

Grupos Topológicos unem o conceito algébrico de Grupo ao conceito de Espaço Topológico. Definimos:

**Definição 1** (Grupo Topológico)**.** *Um espaço topológico Hausdorff $G$ munido de uma estrutura de grupo algébrico é dito um* Grupo Topológico *quando:*

- *A operação de grupo $(g, h) \in G \times G \mapsto g.h \in G$ é uma função contínua.*
- *A função que associa cada elemento do grupo ao seu inverso (com respeito a estrutura de grupo) $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ é uma função contínua.*

A condição de Hausdorff em $G$ é necessária (e, na verdade, suficiente) para que tenhamos que o subconjunto contendo apenas a identidade do grupo seja fechado. Não é incomum que autores (e.g. (Munkres 2000)) dispensem esta condição para definirem Grupos Topológicos.

Similarmente a grupos algébricos, pode-se definir os conceitos de subgrupos topológicos e homomorfismos entre grupos topológicos. Estes objetos surgem naturalmente ao exigirmos que as estruturas algébricas respeitem as topologias dos grupos:

**Definição 2** (Subgrupo Topológico)**.** *Seja $G$ um grupo topológico. Um subespaço topológico $H$ de $G$ é dito um* subgrupo topológico *de $G$ se $H$ é subgrupo algébrico de $G$*

**Definição 3** (Homomorfismos)**.** *Sejam $G$ e $G'$ dois grupos topológicos. Uma função contínua $f : G \to G'$ é um* homomorfismo de grupos topológicos *se $f$ é um homomorfismo entre os grupos algébricos $G$ e $G'$.*

Dois exemplos triviais de subgrupos topológicos são o próprio grupo e também o subgrupo contendo apenas a identidade do grupo. É também imediato notarmos que as translações

$$R_g : h \in G \to h.g \in G, \tag{1.1}$$

$$L_g : h \in G \to g.h \in G \tag{1.2}$$

são homomorfismos para qualquer grupo topológico $G$ e qualquer elemento $g \in G$. Com efeito, estas translações são também homeomorfismos.

**Proposição 1.** *Seja $G$ um grupo topológico. Então, para quaisquer $g, h \in G$ temos que:*

*(1)* $L_{gh} = L_g \circ L_h$

*(2)* $R_{gh} = R_h \circ R_g$

*Em particular, as inversas de* $L_g$ *e* $R_g$ *são* $L_{g^{-1}}$ *e* $R_{g^{-1}}$ *respectivamente.*

Assim como ocorre em grupos algébricos, podemos considerar quocientes de grupos topológicos sob certas condições. Considere o seguinte resultado (para a demonstração, consulte (Bredon 1972)):

**Proposição 2.** *Se* $H$ *é um subgrupo topológico de um grupo topológico* $G$*, então o fecho* $\overline{H}$ *de* $H$ *é também um subgrupo topológico de* $G$*. Além disso, se* $H$ *for subgrupo normal de* $G$*, então* $\overline{H}$ *tambem é subgrupo normal.*

Se $G$ for um grupo topológico com um subgrupo fechado e normal $H$, podemos induzir a topologia quociente em $G/H$ por meio da projeção canônica:

$$\pi : g \in G \to [g] \in G/H \tag{1.3}$$

onde $[g] = g.H$, de modo que $G/H$ é um espaço Hausdorff e $\pi$ é uma função aberta e contínua (Bredon 1972, Proposição 1.4). Além disso, $G/H$ é um grupo topológico:

**Proposição 3.** *Seja* $G$ *um grupo topológico e* $H$ *um subgrupo fechado de* $G$*. Então,* $G/H$ *com a topologia quociente é um grupo topológico.*

*Demonstração.* O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ (G/H) \times (G/H) \arrow[r, "r"] & G/H \end{tikzcd}$$

onde $f(g, h) = g^{-1}h$ e $r$ é definida por $r(gH, jH) = g^{-1}jH$.

Mostremos que $r$ é contínua. Note que se $W \subset G/H$ é aberto, então:

$$r^{-1}(W) = (\pi \times \pi)(\pi \times \pi)^{-1}r^{-1}(W) = (\pi \times \pi)f^{-1}\pi^{-1}(W) \tag{1.4}$$

Como $\pi$ é função aberta e contínua e $f$ é contínua, segue que $r^{-1}(W)$ é aberto e portanto $r$ é contínua.

□

O nosso interesse nestas construções de grupos topológicos está em entender de que maneira podemos estudar propriedades geométricas e topológicas de um determinado espaço topológico a partir de interações entre grupos topológicos com estes espaços. Esse tipo de interação pode ser realizada por meio das *ações*.

**Definição 4.** *Sejam $G$ um grupo topológico e $M$ um espaço topológico. Uma ação à esquerda de $G$ em $M$ é uma função $\alpha : G \times M \to M$ contínua satisfazendo, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in M$, as seguintes condições:*

- $\alpha(e, x) = x$,
- $\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$,

*onde $e$ é a identidade de $G$. Usaremos a notação*

$$\alpha(g, x) = g(x).$$

Do conceito de ação, deriva-se dois subconjuntos com apelo geométrico:

1. A *órbita* da ação em $x \in M$ é o subconjunto $G(x) \subset M$ definido por

$$G(x) = \{g(x) \in M; g \in G\}. \tag{1.5}$$

2. O *subgrupo de isotropia* de $G$ em $x \in M$ é o subconjunto $G_x \subset G$ dado pelos elementos de $G$ que fixam o elemento $x$:

$$G_x = \{g \in G; g(x) = x\}. \tag{1.6}$$

É bastante simples verificar que $G_x$ é um subgrupo de $G$.

A ação é dita *transitiva* quando $G(x) = M$ para qualquer $x \in M$. Dizemos também que a ação é *efetiva* se $g(x) = x$ para todo $x \in M$ implica $g = e$.

**Proposição 4.** *Seja $G$ um grupo topológico compacto agindo num espaço Hausdorff $M$. Então,*

$$f : gG_x \in G/G_x \to g(x) \in G(x)$$

*é um homeomorfismo para todo $x \in M$.*

*Demonstração.* A injetividade de $f$ é demonstrada notando que

$$f(gG_x) = f(hG_x) \iff g(x) = h(x) \iff h^{-1}g \in G_x \iff gG_x = hG_x$$

A continuidade de $f$ deriva imediatamente da topologia quociente em $G/G_x$ de modo que a compacidade de $G$ garante o resultado desejado. $\square$

Nosso interesse nas interações entre grupos e outros espaços topológicos se dá no contexto de variedades suaves. Isso nos leva a considerar estruturas diferenciáveis nos grupos topológicos, nos levando ao conceito de *Grupo de Lie*

**Definição 5.** *Um* Grupo de Lie *é um grupo topológico $G$ que também possui a estrutura de variedade suave de modo que as operações de grupo listadas na Definição 1 são funções suaves.*

Todos os resultados expostos nesta seção permanecem válidos ao trocarmos "homeomorfismos" por "difeomorfismos" e "(sub)grupos topológicos" por "(sub)Grupos de Lie". Encerramos esta discussão sobre grupos topológicos dando as seguintes definições que serão utilizadas ao longo deste texto:

**Definição 6.** *Seja $G$ um grupo de Lie agindo numa variedade $M$. Dizemos que:*

1. *Uma órbita $Gp$ é dita* ***principal*** *se existir uma vizinhança $V$ de $p$ tal que para qualquer $q \in V$, existe $g_q \in G$ tal que $G_p \subset G_{g_q}$.*

2. *Uma órbita $Gp$ é dita* ***regular*** *se tiver a mesma dimensão que a dimensão de uma órbita principal.*

3. *Uma órbita é dita* ***singular*** *se for não-regular.*

## 1.3 Teoria de Fibrados

Esta seção é dedicada ao estudo de Fibrados, onde nossos principais interesses estão no estudo de fibrados que possuem algum tipo de estrutura algébrica distinguida em suas **fibras**, bem como nas seções suaves destes fibrados (veja, por exemplo, as estruturas Riemannianas em 1.4). Começamos definindo fibrados genéricos:

**Definição 7.** *Dados $E, B$ espaços topológicos e $\pi : E \to B$ um mapa contínuo sobrejetivo, dizemos que a tripla $(E, B, \pi)$ é um fibrado. O conjunto $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$ é chamado de* ***fibra sobre*** *$b$, $E$ é dito o* ***Espaço Total*** *do Fibrado e $B$ é o* ***Espaço Base*** *do Fibrado.*

Um exemplo imediato de fibrado é o *Fibrado Trivial*:

**Exemplo 1.** *Se $B$ e $T$ são espaços topológicos, então $(B \times T, B, \pi)$, onde $\pi$ é a projeção no primeiro fator, é um fibrado cuja fibra é homeomorfa a $T$.*

Os fibrados genéricos se enriquecem ao adicionarmos estruturas algébricas em suas fibras. Uma maneira de realizar isto é ao pedirmos, por exemplo, que as fibras possuam estrutura de *espaço vetorial*. Isto nos leva ao conceito de **Fibrado Vetorial**.

**Definição 8.** *Seja $K$ um espaço vetorial sobre um corpo $F$. Um fibrado $(E, B, \pi)$ é dito um* ***Fibrado Vetorial*** *de posto $n$ se:*

1. *Para todo $b \in B$, a fibra $\pi^{-1}(b)$ possui estrutura de espaço vetorial de dimensão $n$ isomorfa a $K$ (geralmente, $F$ é igual a $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).*

2. *Para todo $b \in B$, existe uma vizinhança aberta $b \in U \subset B$ e um homeomorfismo (chamado de* trivialização local*)*

$$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times K^n$$

*que satisfaz $p_1 \circ \psi = \pi$, onde $p_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U$ é a projeção no primeiro fator e dado $b \in B$, a restrição $\psi|_{\pi^{-1}(b)}$ é um isomorfismo linear.*

Adotaremos a seguinte nomenclatura: Para um fibrado vetorial $(E, B, \pi)$, se $E$ e $B$ são variedades de classe $C^k$ e $\pi$ é um mapa de classe $C^k$, diremos que o fibrado é de classe $C^k$. Se $k = 0$, diremos que o fibrado é um *fibrado vetorial topológico* e se $k = \infty$, diremos que o fibrado é um *fibrado vetorial suave*. Neste trabalho lidaremos apenas com fibrados vetoriais suaves.

**Exemplo 2.** *Se $\pi : E \to B$ é um fibrado vetorial de posto $n$ então $\pi \times \pi : E \times E \to B \times B$ é um fibrado vetorial de posto $2n$. De fato, se $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{F}^n$ é uma trivialização local desses fibrados, então, reorganizando coordenadas, $\psi \times \psi : \pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(U) \to U \times U \times \mathbb{F}^{2n}$ é uma trivialização local para $E \times E$ .*

**Definição 9.** *Seja $\pi : E \to B$ um fibrado. Um mapa $s : B \to E$ é uma **seção** de $\pi$ se, para todo $b \in B$, $\pi \circ s(b) = b$. Se o fibrado é de classe $C^k$, denotamos o conjunto das seções de classe $C^k$ desse fibrado por $\Gamma(E)$.*

**Exemplo 3.** *Seja $M$ uma variedade suave. As seções $C^\infty$ do fibrado tangente de $M$ são os campos vetoriais $X : M \to TM$.*

Uma outra maneira de enriquecer o conceito de fibrados genéricos é ao considerarmos grupos de Lie (conforme construídos na seção 1), nos levando ao conceito de **Fibrados Principais**.

**Definição 10.** *Sejam $\pi : P \to M$ um fibrado e $G$ um grupo de Lie, onde $P$ e $M$ são variedades suaves e $\pi$ é mapa suave. Dizemos que $(P, G, M)$ é um **fibrado $G$-principal** se:*

1. *$G$ age livremente pela direita em $P$. Denotaremos esta ação por $\cdot : P \times G \to P$*
2. *$\pi$ induz um homeomorfismo entre $M$ e $P/G$. Além disso, a ação de $G$ é transitiva em cada fibra $\pi^{-1}(x)$, para todo $x \in M$.*
3. *Para todo $x \in M$ existem um aberto $U$ de $M$ contendo $x$ e um mapa suave $\phi_U : \pi^{-1}(U) \to G$, tal que $\phi_U \circ R_g = R_g \circ \phi_U$ para todo $g \in G$, de modo que a aplicação a seguir é um difeomorfismo:*

$$x \in \pi^{-1}(U) \mapsto (\pi(x), \phi_U(x)) \in U \times G$$

Encerramos esta seção com alguns exemplos:

**Exemplo 4.** *Se $M$ é uma variedade e $G$ é um grupo de Lie, então $P = M \times G$ com a ação $(m, g)h = (m, gh)$ é o espaço total de um fibrado principal, o Fibrado Trivial.*

**Exemplo 5.** *Seja $M$ uma variedade e*

*$B(M) = \{(p, e_1, \ldots, e_n) \in M \times TM; p \in M$ e $(e_1, \ldots, e_n)$ forma uma base para $T_pM\}$*

*Considere a projeção $\pi : B(M) \to M$ dada por $\pi(p, e_1, \ldots, e_n) = p$. Temos que $GL(n, \mathbb{R})$ age em $B(M)$ à direita da seguinte maneira: se $A = [a_{ij}] \in GL(n, \mathbb{R})$ e $(p, e_1, \ldots, e_n) \in B(M)$ , defina*

$$(p, e_1, \ldots, e_n)A = (p, \sum a_{i1}e_1, \ldots, \sum a_{in}e_n)$$

*Agora, se $(U, x_1, \ldots, x_n)$ é uma carta local ao redor de $p \in M$, defina, para todo $(q, f_1, \ldots, f_n) \in \pi^{-1}(U)$, o mapa $\phi_U$ da seguinte maneira:*

$$\phi_U(q, f_1, \ldots, f_n) = [d_q x_j(f_i)] = [g_{ij}] \in GL(n, \mathbb{R})$$

*Então, as funções* $y_i = x_i \circ \pi$ *e* $y_{ij} = x_{ij} \circ \phi_U$ *definem uma carta local em* $\pi^{-1}(U)$*, onde* $x_{ij}$ *são as coordenadas usuais de* $GL(n, \mathbb{R})$*. Então,* $\pi : B(M) \to M$ *é um fibrado* $GL(n, \mathbb{R})$*-principal, chamado de* Fibrado de Referenciais de $M$.

## 1.4 Estruturas Riemannianas e Geodésicas

Esta seção é dedicada a definir conceitos e explorar propriedades geométricas de variedades diferenciáveis. Em particular, estamos interessados nas construções de conexões e geodésicas que protagonizam os resultados desta tese.

Se $M$ é uma variedade suave, um campo $2-$tensorial em $M$ (i.e. uma seção suave do fibrado 2-tensorial $\pi : \bigcup_{x \in M} T_x^*M \otimes T_x^*M \to M$) é dito *simétrico* se $g(X,Y) = g(Y,X)$ para quaisquer $X, Y \in T_pM$ e $p \in M$. O campo $g$ também é dito *positivo-definido* se $g(X,X) > 0$ para todo $X \in T_pM$ e $p \in M$.

**Definição 11.** *Seja $M$ uma variedade suave. Uma* métrica (ou estrutura) Riemanniana *em $M$ é um campo $2-$tensorial $g \in T^2(M)$ simétrico e positivo-definido. Dizemos que $M$ com uma métrica Riemanniana $g$ é uma* Variedade Riemanniana *e a denotamos por* $(M, g)$

Noutras palavras, uma métrica Riemanniana define um produto interno em cada um dos espaços tangentes a $M$. Estamos interessados em definir estruturas que sejam preservadas em Variedades Riemannianas equivalentes. Estas equivalências são chamadas de *isometrias*:

**Definição 12.** *Sejam $(M, g)$ e $(N, h)$ duas variedades Riemannianas. Uma* isometria *entre estas variedades é um difeomorfismo*

$$f : M \to N$$

*satisfazendo $f^*h = g$*

As **Conexões** em Variedades Riemannianas fornecem uma maneira de "derivarmos" campos vetoriais com respeito a outros campos. Começamos definindo o que são estas conexões:

**Definição 13.** *Uma* Conexão *em uma variedade $M$ é uma aplicação*

$$\nabla : TM \times TM \to TM$$

*denotada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *$\nabla_X Y$ é linear em $C^\infty(M)$ em $X$, ou seja*

   $$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

   *para quaisquer $f, g \in C^\infty(M)$*

2. *$\nabla_X Y$ é $\mathbf{R}$-linear em $Y$, ou seja*

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$$

*para quaisquer $a, b \in \mathbf{R}$.*

3. *$\nabla_X Y$ é uma derivação em $Y$, ou seja*

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

*para qualquer $f \in C^\infty(M)$.*

Dizemos que $\nabla_X Y$ é a *Derivada Covariante* de $Y$ na direção $X$. Ao leitor interessado em uma exposição mais detalhada das construções e dos resultados para conexões em variedades Riemannianas, sugerimos a leitura do Capítulo IV de (Lee 1997). Resumimos alguns destes resultados na seguinte Proposição:

**Proposição 5.** *Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana. Então:*

1. *Sempre existe uma conexão em $(M, g)$.*

2. *Seja $\nabla$ uma conexão em $M$. Se $p \in M$ e $X, Y \in TM$, então $\nabla_X Y|_p$ depende apenas dos valores de $X$ em $p \in M$ e dos valores de $Y$ numa vizinhança arbitrariamente pequena de $p$ em $M$.*

Com o conceito de conexão em mãos, temos dois objetivos principais:

1. Generalizar o conceito de *retas* em variedades Riemannianas.

2. Generalizar o conceito de *curvatura* Euclidiana (i.e., a curvatura de curvas e superfícies) em variedades Riemannianas.

Abordaremos nesta seção apenas o primeiro destes objetivos. O segundo objetivo será atingido na seção 1.5. Ao considerarmos o espaço Euclidiano, uma *reta* é um objeto com *aceleração* (ou seja, a segunda derivada) nula. Isto nos leva a tentativa de definirmos a aceleração de curvas em variedades Riemannianas.

Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana e $\gamma : [0, 1] \to M$ uma curva suave em $M$. A *velocidade* (ou simplesmente a derivada) de $\gamma$ se escreve como

$$\gamma'(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \tag{1.7}$$

para qualquer $f \in C^1(M; \mathbf{R})$. Noutras palavras, a velocidade de $\gamma$ é o *push-forward* $\gamma_*$ de $\gamma$.

**Definição 14.** *Dizemos que* $V : [0,1] \to M$ *é um* Campo Vetorial sobre $\gamma$ *se* $V$ *é uma aplicação suave e* $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ *para todo* $t \in [0,1]$.

Um exemplo imediato de campo vetorial sobre $\gamma$ é o próprio campo $\gamma'$. Denotaremos o subespaço de campos vetoriais sobre $\gamma$ de $T(\gamma)$. Pode-se provar o seguinte resultado:

**Proposição 6** ((Lee 1997), Lemma 4.9)**.** *Seja* $(M, g)$ *uma variedade Riemanniana com uma conexão* $\nabla$*. Para cada curva* $\gamma : [0,1] \to M$*, a conexão* $\nabla$ *determina um único operador*

$$D_t : T(\gamma) \to T(\gamma)$$

*satisfazendo:*

1. $D_t(V + aW) = D_t(V) + aD_t(W)$ *para quaisquer* $V, W \in T(\gamma)$ *e* $a \in \mathbf{R}$.
2. $D_t(fV) = f'V + D_t(V)f$ *para quaisquer* $V \in T(\gamma)$ *e* $f \in C^\infty([0,1])$.
3. *Se* $V \in T(\gamma)$ *tiver uma extensão* $\tilde{V} \in TM$*, então*

$$D_t V(t) = \nabla_{\gamma'(t)} \tilde{V}$$

$D_t V$ *é chamada de* Derivada Covariante de $V$ ao longo de $\gamma$.

A *aceleração* de uma curva $\gamma$ em uma variedade Riemanniana $(M, g)$ com conexão $\nabla$ é definida como sendo o campo vetorial $D_t\gamma'$ ao longo de $\gamma$. Dizemos também que o campo $V \in T(\gamma)$ é um campo *paralelo* quando $D_t V \equiv 0$.

Temos o que é preciso para definirmos os objetos análogos a retas em variedades Riemannianas:

**Definição 15.** *Seja* $(M, g)$ *uma variedade Riemanniana com conexão* $\nabla$*. Uma* geodésica *em* $M$ *é uma curva* $\gamma$ *com aceleração nula, ou seja*

$$D_t \gamma' \equiv 0.$$

Uma conexão $\nabla$ em $(M, g)$ é dita *compatível* com a métrica $g$ quando satisfaz a seguinte regra:

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Pode-se provar o seguinte resultado:

**Proposição 7** ((Lee 1997), Lemma 5.2)**.** *Seja* $(M, g)$ *uma variedade Riemanniana com uma conexão* $\nabla$*. As condições enumeradas a seguir são equivalentes:*

1. *$\nabla$ é compatível com $g$*

2. *Se $\gamma$ é uma curva em $M$ e $V, W \in T(\gamma)$, então*

$$\frac{d}{dt}g(V,W) = g(D_tV, W) + g(V, D_tW)$$

3. *Se $V, W \in T(\gamma)$ são campos paralelos, então $g(V,W)$ é constante.*

Dizemos também que a conexão $\nabla$ é *simétrica (ou livre de torção)* quando o tensor de torção

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

é nulo. Os conceitos de simetria e compatibilidade de uma conexão com a métrica Riemanniana em uma variedade nos leva a chamada *Conexão de Levi-Civita*:

**Teorema 4.** *Seja $(M,g)$ uma variedade Riemanniana. Então, existe uma única conexão $\nabla$ em $M$ que é simétrica e compatível com $g$. Chamamos esta conexão de* Conexão Riemanniana *ou* Conexão de Levi-Civita.

Uma consequência imediata do Teorema 4 e da Proposição 7 é que geodésicas numa variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita tem velocidade constante, afinal $|\gamma'| = g(\gamma', \gamma')^{1/2}$ é constante.

Doravante, sempre que dissermos que $(M,g)$ é uma variedade Riemanniana, **estamos considerando também a presença da conexão de Levi-Civita**. Em variedades munidas da conexão de Levi-Civita, pode-se provar que as geodésicas e as conexões são preservadas:

**Teorema 5** ((Lee 1997), Proposition 5.6)**.** *Seja $f : (M,g) \to (N,h)$ uma isometria entre variedades Riemannianas $(M,g,\nabla)$ e $(N,h,\tilde{\nabla})$. Então,*

1. *$f_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{f_*X} f_*Y$ para quaisquer $X, Y \in TM$.*

2. *$f_*(D_tV) = \tilde{D}_t(f_*V)$ para qualquer curva $\gamma$ em $M$ e $V \in T(\gamma)$.*

3. *Se $\gamma$ é uma geodésica em $M$, então $f \circ \gamma$ é geodésica em $N$.*

## 1.5 Curvatura

Esta seção é dedicada a definir e explorar o conceito de curvatura Riemanniana. Em particular, estamos interessados nas construções de curvaturas seccional e de Ricci, sendo estas as curvaturas que protagonizam os resultados do Capítulo 2.

**Definição 16.** *Seja $(M, g, \nabla)$ uma variedade Riemanniana. O* Endomorfismo Curvatura *$R$ de $M$ é a aplicação*

$$R : TM \times TM \times TM \to TM$$

*definida pela expressão*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

*Definimos também o* Tensor de Curvatura *de $M$*

$$R_m : TM \times TM \times TM \times TM \to \mathbf{R}$$

*pela expressão*

$$R_m(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W)$$

Pode-se mostrar facilmente (veja (Lee 1997, Capítulo 7)) que o espaço Euclidiano com as estruturas Riemannianas canônicas possui o endomorfismo de curvatura nulo. Isto nos permite interpretar o endomorfismo de curvatura em variedades Riemannianas como um objeto que mede o quanto as estruturas Riemannianas estão "distantes" de serem o espaço Euclidiano. Desse modo, motivamos a seguinte definição:

**Definição 17.** *Uma variedade Riemanniana $(M, g, \nabla)$ é dita* flat (ou plana) *se o seu endomorfismo de curvatura é identicamente nulo, ou seja, $R \equiv 0$*

Usando o Teorema 5 é simples mostrar que a curvatura é também preservada por isometrias. Enunciamos então o seguinte resultado:

**Proposição 8.** *Seja $f : (M, g, \nabla) \to (N, h, \tilde{\nabla})$ uma isometria entre variedades Riemannianas. Então:*

1. *$f^*(\tilde{R}_m) = R_m$.*
2. *$\tilde{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z = f_*(R(X,Y)Z)$, para todo $X, Y, Z \in TM$.*

*onde $R, R_m$ e $\tilde{R}, \tilde{R}_m$ são os endomorfismos e tensores de curvatura de $M$ e $N$ respectivamente.*

Um resultado um pouco mais sofisticado envolvendo o conceito de curvatura e variedades *flat* consiste em mostrar que a curvatura é **a obstrução** para que uma variedade seja localmente isométrica ao espaço Euclidiano. A demonstração deste resultado é bastante extensa e pode ser encontrada em (Lee 1997, Theorem 7.3), mas para completude dos temas introdutórios desta tese, enunciamos este Teorema a seguir:

**Teorema 6.** *Uma variedade Riemanniana $M$ é flat se, e somente se, $M$ é localmente isométrica ao espaço euclidiano com as estruturas Riemannianas canônicas.*

Uma propriedade fundamental de curvaturas são propriedades de simetria:

**Proposição 9** (Simetrias da curvatura)**.** *Seja $(M, g, \nabla)$ uma variedade Riemanniana e $R$ o tensor curvatura de $M$. Então, para quaisquer $X, Y, Z, W \in TM$, valem as seguintes propriedades:*

1. $R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(X, W, Y, Z)$
2. $R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(W, X, Z, Y)$
3. $R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(Y, Z, W, X)$
4. $R_m(W, X, Y, Z) + R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) = 0$

*Demonstração.* O resultado 1 é imediato, uma vez que

$$R(W, X)Y = -R(X, W)Y$$

Para 2, mostra-se que $R_m(W, X, Y, Y) = 0$ utilizando a compatibilidade da conexão com a métrica. De fato,

$$WX|Y|^2 = W(2g(\nabla_X Y, Y)) = 2g(\nabla_W \nabla_X Y, Y) + 2g(\nabla_X Y, \nabla_W Y). \tag{1.8}$$

$$XW|Y|^2 = X(2g(\nabla_W Y, Y)) = 2g(\nabla_X \nabla_W Y, Y) + 2g(\nabla_W Y, \nabla_X Y). \tag{1.9}$$

$$[W, X]|Y|^2 = 2g(\nabla_{[W,X]} Y, Y). \tag{1.10}$$

Subtraindo as equações (1.8) - ((1.9) + (1.10)), obtemos:

$$0 = 2(g(\nabla_W \nabla_X Y, Y) - g(\nabla_X \nabla_W Y, Y) - g(\nabla_{[W,X]} Y, Y)) = 2R_m(W, X, Y, Y)$$

O resultado 2 decorre então ao tomarmos $Y + Z$ no lugar de $Y$.

Para a demonstração do item 4, desenvolva a expressão

$$R(W, X)Y + R(X, Y)W + R(Y, W)X$$

e o item 3 segue dos itens 1, 2 e 4 de modo direto. □

Encerramos esta seção com as definições tensoriais de outras duas curvaturas. Estas definições são baseadas em traços de operadores e é útil que façamos uma breve exposição sobre os coeficientes do endomorfismo de curvatura:

Se $(U, (x^i))$ é uma carta coordenada em $M$, pode-se escrever $R$ nessa carta como:

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l,$$

onde $R^l_{ijk}\partial_l = R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$.

**Definição 18.** *Seja $(M, g, \nabla)$ uma variedade Riemanniana com curvatura $R$. A **Curvatura de Ricci** de $M$ é definida como sendo o traço de $R$ no primeiro e último índice, denotada por $Ric(M)$. A **Curvatura Escalar** $S$ de $M$ é definida como sendo o traço da curvatura de Ricci, ou seja,*

$$S = tr(Ric).$$

Em coordenadas, os componentes de $Ric$ são denotados por $R_{ij}$ e são dados por

$$R_{ij} = R^k_{kij}.$$

## 1.6 Espaços Simétricos

Nesta seção faremos uma breve exposição sobre Espaços Simétricos e alguns resultados que serão particularmente interessantes ao lidarmos com folheações duais. A teoria de espaços simétricos é tão rica quanto extensa e direcionamos o leitor interessado em outros resultados a consultar, por exemplo, (Gorodski 2021).

Lembremo-nos que todo ponto $x \in M$ admite uma vizinhança normal em $M$ (i.e. uma vizinhança $U$ que é difeomorfa via $exp_x$ a uma vizinhança $U_0$ de $0_x \in T_xM$). É claro que podemos tomar $U_0$ como sendo uma bola aberta de raio $\epsilon$ ao redor de $0_x$.

Com estas vizinhanças, definimos uma **simetria geodésica** como sendo uma aplicação $s_x : U \to U$ definida por

$$s_x(exp_x(v)) = exp_x(-v)$$

para todo $v \in B(0_x, \epsilon)$. Intuitivamente, esta aplicação reverte a orientação de geodésicas emanando de $x \in M$. Utilizamos estas simetrias para definir:

**Definição 19.** *Dizemos que $M$ é um espaço localmente simétrico se as* simetrias geodésicas *de $M$ são isometrias locais para todo $x \in M$.*

Com esta definição de simetria local em mãos, mostramos algumas condições equivalentes à da definição 19:

**Proposição 10.** *Seja $x \in M$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *A simetria geodésica $s_x$ é uma isometria local.*
2. *Existe isometria local $s$ de $M$ com $s(x) = x$ e $ds_x = -id$.*
3. *Existe uma isometria local involutiva de $M$ definida numa vizinhança de $x$ para a qual $x$ é ponto fixo isolado.*

*Demonstração.* Começamos mostrando que os itens 1 e 2 são equivalentes: assuma que $s_x$ seja uma isometria local. Temos que $s_x(x) = s_x(exp_x(0_x)) = exp_x(0_x) = x$. Além disso, sejam $v \in T_xM$ e $\gamma(t) = exp_x(tv)$ para $t$ suficientemente pequeno. Então,

$$(ds_x)_x(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (s_x(exp_x(tv))) = -v$$

e portanto tome $s = s_x$.

Por outro lado, se 2 for verdadeiro, então $s(exp_x(v)) = exp_x(ds(v)) = exp_x(-v)$ e $s$ é a simetria geodésica em $x$.

Agora, mostramos que os itens 2 e 3 são equivalentes: assuma que 2 seja verdadeiro. Como o conjunto de pontos fixos de uma isometria local $s$ em $x$ é uma subvariedade totalmente geodésica $S$ contendo $x$ cujo espaço tangente é precisamente o conjunto de pontos fixos de $ds_x$, como $ds_x = -id$, temos que $T_xS = \{0\}$ e portanto $S$ é discreto. Ainda, $s^2$ é uma isometria local com $s^2(x) = x$ e $(ds)^2_x = id$, portanto o item 3 é verdadeiro.

Assuma que o item 3 seja verdadeiro. Suponha que $s$ seja uma isometria local involutiva de $M$ tal que $x$ é ponto fixo isolado de $s$. Então $(ds)^2_x = id$ e como $ds_x$ é uma transformação linear ortogonal de $T_xM$, segue que seus autovalores são todos $\pm 1$. Como $x$ é ponto fixo isolado, os autovalores são todos $-1$ pelo mesmo argumento utilizado na demonstração imediatamente anterior, o que termina a demonstração. □

Agora, podemos definir espaços globalmente simétricos:

**Definição 20.** *$M$ é um espaço simétrico se a simetria geodésica $s_x$ está definida globalmente e é uma isometria de $M$, para todo $x \in M$.*

Embora estas definições já possuam um forte significado geométrico, podemos caracterizar espaços localmente simétricos utilizando o tensor de curvatura.

**Proposição 11.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana localmente simétrica. Então, $\nabla R \equiv 0$*

*Demonstração.* Assuma que $M$ é localmente simétrica. Seja $x \in M$ e considere a simetria geodésica $s_x$. Por definição, $s_x$ é isometria local e temos que $ds_x = -id$. Logo,

$$(ds_x)_x \nabla_u R(v, w)z = -\nabla_{(ds_x)_x u} R((ds_x)_x v, (ds_x)_x w)(ds_x)_x z$$

de onde segue que $\nabla R \equiv 0$.

□

Destacamos que a recíproca da Proposição 11 é verdadeira e sua demonstração pode ser encontrada em (Gorodski 2021, Teorema 1.3.5). Encerramos esta seção dando alguns exemplos de espaços simétricos.

**Exemplo 6.** *O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é simétrico: dado $x \in \mathbb{R}^n$, a simetria geodésica em $x$ é dada por $s_x(y) = 2x - y$.*

**Exemplo 7.** *A esfera $S^n$ munida da métrica canônica é simétrica: considere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e seja $p = e_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Então $\mathbb{R}^n$ se decompõe como $\mathbb{R}^n = span_{\mathbb{R}}(p) \oplus span_{\mathbb{R}}(p)^{\perp}$ e nessa decomposição $s_p : S^n \to S^n$ é dado por $s_p(tp + v) = tp - v$. Note também que $s_p$ possui apenas dois pontos fixos: $\pm p$*

# 2 Folheações e a Conjectura de Wilking em Espaços Simétricos

## 2.1 Introdução do Capítulo

Neste capítulo abordaremos a demonstração que encontramos para a Conjectura de Wilking no contexto de Espaços Simétricos. Esta conjectura estabelece condições na curvatura de uma variedade para a completude das folhas de uma folheação dual.

Para que esta tese seja o máximo possível autocontida, dedicamos a seção 2.2 para fazer as construções básicas sobre Folheações Singulares Riemannianas e provamos alguns resultados que serão relevantes no decorrer deste capítulo.

Na literatura, encontramos condições interessantes para que as folhas de uma folheação dual sejam completas. Algumas destas condições estão no Teorema:

**Teorema 7.** *(Wilking (Wilking 2007, Theorem 3)) Suponha que $M$ seja uma variedade completa de curvatura seccional não negativa com uma folheação singular Riemanniana $\mathcal{F}$. Então a folheação dual tem folhas intrinsicamente completas se pelo menos um dos itens a seguir for verdadeiro:*

1. *$\mathcal{F}$ é dada pela órbita da decomposição de uma ação de grupo isométrica;*
2. *$\mathcal{F}$ é uma folheação não-singular e $M$ é compacta;*
3. *$\mathcal{F}$ é dada pelas fibras de uma retração de Sharafutdinov.*

Embora o Teorema anterior fornaçea condições interessantes para a completude das folhas de uma folheação dual, Wilking conjecturou (Wilking 2007) que este resultado é válido no caso geral se estamos lidando com curvatura seccional não negativa:

**Conjectura 2** ((Wilking 2007), Conjecture 1)**.** *Suponha que $\mathcal{F}$ seja uma folheação singular Riemanniana em uma variedade completa de curvatura seccional não-negativa. Então, a folheação dual possui folhas completas.*

A nossa demonstração da conjectura de Wilking se dá assumindo que a variedade é um espaço simétrico e passa pela decomposição da variedade em uma variedade produto em que um dos fatores é uma folha dual. Dedicamos a seção 2.4 inteira para a demonstração de:

**Teorema 8.** *[Conjectura de Wilking para Espaços Simétricos] Suponha que $\mathcal{F}$ seja uma folheação singular Riemanniana em uma variedade* ***simétrica****, completa de curvatura seccional não-negativa. Então, a folheação dual possui todas as folhas completas.*

Com a conjectura de Wilking demonstrada para espaços simétricos, ao aplicar os argumentos encontrados em (Lytchak 2014, sections 2.5 and 4.2), podemos recuperar de modo simples um resultado de destacada importância sobre Folheações Polares (veja, por exemplo, (Ewert 1998, Theorem 3), (Liu e Radeschi 2020, Proposition 3.4), (Lytchak 2014, Lemma 4.1)) que demonstra que estas folheações se decompõe como o produto de folheações triviais com uma única folha. Dedicaremos a última seção deste capítulo para demonstrar esta aplicação.

## 2.2 Folheações Singulares Riemannianas

Folheações oferecem uma maneira de decompor uma variedade Riemanniana em subvariedades chamadas de *folhas*. Nesta seção iremos motivar e introduzir parte da teoria de Folheações que será necessária ao longo deste capítulo.

Sejam $M$ e $N$ variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma submersão (i.e. uma aplicação que possui diferencial $df$ sobrejetiva). Definindo

$$\mathcal{F} = \bigcup_{p \in f(M)} f^{-1}(p),$$

observamos que cada componente conexa da pré-imagem $f^{-1}(p)$ é uma subvariedade mergulhada de $M$ com espaço tangente dado por $ker(df)$, o que é uma consequência imediata do Teorema da Função Inversa (uma vez que $df$ é sobrejetiva em todo ponto de $M$).

Chamamos de *espaço vertical em $p$ associado a $\mathcal{F}$* o conjunto

$$\mathcal{V}_p = ker(df_p)$$

Se $T_pM$ estiver munido de um produto interno (o que é sempre verdadeiro no contexto de variedades Riemannianas), chamamos de *espaço horizontal em $p$ associado a $\mathcal{F}$* o complemento ortogonal $(ker(df_p))^\perp$ e o denotamos por $\mathcal{H}_p$. É imediato notar que

$$df_p|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \to T_{f(p)}N$$

é um isomorfismo linear.

Se considerarmos $M, N$ variedades Riemannianas e $f : M \to N$ uma submersão Riemanniana, vimos que:

1. $\mathcal{F}$ particiona $M$ em subvariedades.
2. Toda subvariedade pertencente a $\mathcal{F}$ possui a mesma dimensão.
3. Em todo ponto $p \in M$ temos os espaços vertical $\mathcal{V}_p$ e horizontal $\mathcal{H}_p$

Dizemos que $\mathcal{F}$ é a folheação induzida pela submersão $f : M \to N$ e que cada subvariedade dada por uma componente conexa de $f^{-1}(p)$ é uma folha de $\mathcal{F}$. Aproveitamos esta exposição sobre submersões para definir alguns tensores fundamentais.

Primeiramente, observe que $\mathcal{H} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{H}_p$ e $\mathcal{V} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{V}_p$ são subfibrados de $M$ e podemos considerar suas seções suaves $\Gamma(\mathcal{H})$ e $\Gamma(\mathcal{V})$. Considere as notações $W^v, W^{\mathcal{H}}$ para as projeções vertical e horizontal de um vetor $W$, respectivamente. Definimos:

**Definição 21.** *O tensor de O'Neill é definido como sendo a aplicação $A : \Gamma(\mathcal{H}) \times \Gamma(\mathcal{H}) \to \Gamma(\mathcal{V})$ dada por*

$$A_X Y = \nabla^v_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]^v$$

**Definição 22.** *O operador formato é definido como sendo a aplicação $S : \Gamma(\mathcal{H}) \times \Gamma(\mathcal{V}) \to \Gamma(\mathcal{V})$ dado por*

$$S_X U = -\nabla^v_U Y$$

*Quando o tensor $S \equiv 0$, dizemos que as folhas da folheação induzida pela submersão Riemanniana são totalmente geodésicas. Seu tensor dual é denotado por:*

$$\sigma(U, V) = \nabla^{\mathcal{H}}_U(V)$$

Aproveitamos estas definições para enunciar expressões para curvatura muito úteis utilizando estes tensores:

**Teorema 9.** *Sejam $(M, g)$ e $(N, h)$ variedades Riemannianas, $f : M \to N$ uma submersão Riemanniana, $\mathcal{F}$ a folheação induzida por $f$ e $F$ uma folha de $\mathcal{F}$ com métrica $g_F$ de imersão isométrica induzida por $g$. São válidas as seguintes expressões:*

1. $K_g(df_p X, df_p Y) = K_h(X, Y) + 3|A_X Y|^2$;
2. $K_{g_F}(V, U) = K_g(U, V) + \sigma(U, U)\sigma(V, V) - \sigma^2(U, V)$;
3. $K_g(X, V) = g((\nabla^v_X S)_X V, v) + |A^*_X V|^2 - |S_X V|^2$;

*onde $K$ denota a curvatura seccional.*

Para a demonstração do teorema acima, veja (Gromoll e Walshap 2009, pag. 24-28). Estas expressões serão particularmente úteis ao lidarmos com deformações métricas.

Folheações Singulares Riemannianas surgem naturalmente como uma generalização destas folheações via submersões. Motivados por esta construção, definimos:

**Definição 23** (Folheação Singular Riemanniana)**.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana. Uma Folheação Singular Riemanniana em $M$ é uma decomposição de $M$ em subvariedades Riemannianas*

$$M = \bigcup_{x \in M} L_x$$

*imersas injetivamente em $M$ chamadas de **folhas** satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Existe um conjunto de campos vetoriais em $M$, $\{X_i\}$ tais que para todo ponto $p \in M$ o espaço tangente $T_pL_p$ à folha $L_p$ é linearmente gerado por $\{X_i(p)\}$.*

2. *Se $\gamma$ é uma geodésica de $M$ ortogonal a uma folha $L_x$, então $\gamma$ é ortogonal a todas as folhas desta Folheação que a intersectam.*

Similar ao realizado no contexto de submersões, o espaço vertical de uma folheação singular Riemanniana em $p \in M$ é definido como sendo

$$\mathcal{V}_p = T_pL_p$$

e o espaço horizontal é o complemento ortogonal de $\mathcal{V}_p$ em $T_pM$, denotado por $\mathcal{H}_p$. Chamamos uma geodésica ortogonal às folhas de uma folheação em $M$ de *geodésica horizontal*.

**Observação.** *As folhas de folheações induzidas por submersões Riemannianas são todas fechadas e possuem a mesma dimensão. O mesmo não pode ser dito para toda folheação singular Riemanniana.*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular Riemanniana. As folhas de $\mathcal{F}$ podem possuir dimensões diferentes, mas pode-se provar que

$$p \in M \mapsto dim(L_p) \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

é semicontínua inferiormente. Definimos:

**Definição 24** (Dimensão da Folheação)**.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana e $\mathcal{F}$ uma folheação singular Riemanniana. Definimos a dimensão de $\mathcal{F}$ como a dimensão maximal de suas folhas, i.e., algum elemento maximal do conjunto $\mathcal{D} = \{dim(L_p); p \in M\}$. Denotamos a dimensão de $\mathcal{F}$ por $dim\mathcal{F}$.*

Como a associação descrita em (2.1) é semicontínua inferiormente, existe um aberto em $M$ no qual a dimensão das folhas é igual a $dim\mathcal{F}$.

Encerraremos esta exposição sobre folheações singulares Riemannianas abordando o conceito de *vizinhanças tubulares*.

Vizinhanças tubulares são estruturas locais que permitem reduzir o estudo local de folheações singulares Riemannianas a um espaço Euclidiano.

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação singular Riemanniana em $M$, $p \in M$ um ponto arbitrário, $P$ uma vizinhança compacta, conexa e aberta de $p$ na folha $L_p$. Escreva $Tub_r(P)$ como sendo a vizinhança tubular (veja (Hirsch, pag. 110)) de $P$ com raio $r > 0$. Existe $\epsilon > 0$ tal que a aplicação exponencial normal

$$exp^{\nu} : \{v \in \nu P; |v| \leq \epsilon\} \to Tub_{\epsilon}(P)$$

é um difeomorfismo.

Sejam $\pi : Tub_r(P) \to P$ a projeção ortogonal e defina o *slice* em $q \in P$ como sendo a pré-imagem $S_q = \pi^{-1}(q)$. Para cada $y \in Tub_\epsilon(P)$ chamamos a componente conexa $P_y$ de $L_p \cap Tub_\epsilon(P)$ contendo $y$ de *placa* de $\mathcal{F}$ em $y$ nesta vizinhança.

Encerramos esta seção enunciando o seguinte resultado sobre vizinhanças tubulares para folheações singulares Riemannianas:

**Teorema 10** (Theorem 2.2, (Alexandrino e Toeben 2013))**.** *Sejam $g$ a métrica Riemanniana original de $M$ e $q \in M$. Então, existe uma vizinhança tubular $Tub(P_q)$ e uma nova métrica Riemanniana $\tilde{g}$ satisfazendo:*

1. *Para todo $x \in Tub(P_q)$, o espaço normal a $L_x$ é tangencial ao slice $S_t$ onde $t \in P_q$.*
2. *A restrição de $\pi : Tub(P_q) \to P_q$ a $P_x$ é uma submersão Riemanniana.*
3. *$\mathcal{F}|_{P_q}$ é uma folheação singular Riemanniana.*
4. *$\mathcal{F}|_{S_t}$ é uma folheação singular Riemanniana para todo $t \in P_q$.*
5. *As geodésicas ortogonais a $P_q$ são as mesmas para $g$ e $\tilde{g}$.*

## 2.3 Folheações Polares e Duais

Nesta seção faremos uma exposição dos resultados pertinentes a este texto sobre Folheações Polares e Folheações Duais. Para outros resultados sobre estas Folheações, recomendamos a leitura de (Wilking 2007) ou ainda (Lytchak 2010).

Após demonstrarmos a conjectura de Wilking no contexto de espaços simetricos, encontramos uma interessante aplicação no contexto de *Folheações Polares*. A ideia por trás do conceito de folheação polar reside em encontrar subvariedades ortogonalmente complementares às folhas. Definimos:

**Definição 25** (Seções e Folheação Polar)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular Riemanniana em $M$. Uma seção de $\mathcal{F}$ em $x \in M$ é uma subvariedade imersa $N$ com $x \in N$ onde $N$ é totalmente geodésica e completa satisfazendo as seguintes condições:*

- $dim(N) = codim(\mathcal{F})$
- *$N$ é ortogonal a todas as folhas de $\mathcal{F}$*

*Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma folheação* ***polar*** *se $\mathcal{F}$ possui uma seção para todo ponto $x \in M$.*

Um exemplo simples de folheação polar é dado a seguir:

**Exemplo 8.** *Suponha que $M$ seja uma variedade Riemanniana completa com uma folheação singular Riemanniana $\mathcal{F}$ tal que*

$$codim(\mathcal{F}) = 1$$

*Observe que uma geodésica ortogonal às folhas de $\mathcal{F}$ é uma seção para todo ponto de $M$. Logo, $\mathcal{F}$ é polar.*

Uma caracterização de folheações polares é dada pelo seguinte resultado (veja (Alexandrino e Toeben 2013)):

**Proposição 12.** *Uma folheação singular Riemanniana $\mathcal{F}$ é polar se, e somente se a distribuição horizontal de folhas regulares de $\mathcal{F}$ é integrável (equivalentemente, se o tensor de O'Neill for nulo, i.e. $A \equiv 0$).*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular Riemanniana em $M$. Desejamos utilizar $\mathcal{F}$ para construir uma nova folheação singular Riemanniana em $M$ de modo que $\mathcal{F}$ e esta nova folheação sejam complementares ortogonalmente. Uma maneira de realizarmos isto é definindo a *Folheação Dual* a $\mathcal{F}$.

**Definição 26** (Folheação Dual). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular Riemanniana em $M$. A folha dual passando por $x \in M$ é definida como sendo o conjunto:*

$$L_x^\# = \{q \in M \mid \exists c : [0,1] \to M,\ c(0) = x,\ c(1) = q,\ \dot{c}(t) \perp T_{c(t)}L\ \forall t \in [0,1]\}.$$

*A folheação dual a $\mathcal{F}$ é a coleção de todas as folhas duais em $M$ denotada por $\mathcal{F}^\#$.*

Desejamos encontrar condições para que a folheação dual seja também uma folheação singular Riemanniana. Ao acrescentar condições de curvatura na variedade $M$, Wilking demonstrou em (Wilking 2007) , [Theorem 1, Theorem 2] o seguinte resultado:

**Teorema 11.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não-negativa e $\mathcal{F}$ uma folheação singular Riemanniana em $M$. Se as folhas de $\mathcal{F}^\#$ são completas, então $\mathcal{F}^\#$ é uma folheação singular Riemanniana. Além disso, se a curvatura de $M$ for positiva, então $\mathcal{F}^\#$ possui uma única folha.*

Embora a demonstração deste Teorema seja longa e não se enquadre no escopo deste texto por exigir uma gama de construções extras não pertinentes a nosso projeto, utilizaremos este resultado nas seções seguintes e indicamos que a demonstração do teorema 11 pode ser encontrada na seção 3 de (Wilking 2007).

Com o Teorema 11 em mãos, podemos provar:

**Proposição 13** ((Lytchak 2014), Lemma 2.3). *Seja $M$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, completa e com curvatura seccional não-negativa e $\mathcal{F}$ uma folheação Polar em $M$. Então, $M$ se decompõe isometricamente como o produto $M = M_1 \times M_2$ e $\mathcal{F}$ é dado pela projeção $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$*

*Demonstração.* Por definição, as folhas da folheação dual $\mathcal{F}^\#$ são seções de $\mathcal{F}$ e como elas são completas, então $\mathcal{F}^\#$ é uma folheação singular Riemanniana.

Como a distribuição horizontal de $\mathcal{F}^\#$ coincide com $\mathcal{F}$, então ela é integrável de modo que as folhas de $\mathcal{F}$ são seções de $\mathcal{F}^\#$ e portanto estas folhas são totalmente geodésicas.

Temos então que uma folheação com folhas totalmente geodésicas é localmente dada por uma projeção que é localmente um fator direto de $M$. Enfim, como $M$ é simplesmente conexa, obtemos uma decomposição global

$$M = M/\mathcal{F} \times M/\mathcal{F}^\#$$

□

## 2.4 Conjectura de Wilking para Espaços Simétricos

Nossa ideia para demonstrar a conjectura de Wilking (Teorema 8) consiste em decompor $M$ como uma variedade produto em que um dos fatores é uma folha dual. Para isto, utilizaremos o seguinte Teorema:

**Teorema 12.** *(Lytchak, (Lytchak 2014, Proposition 3.1)) Seja $M$ um espaço simétrico com curvatura seccional não negativa. Se $L^{\#}$ é uma folha dual, então existe uma decomposição métrica $M = Z \times N$ onde $L^{\#}$ é um subconjunto aberto de $Z \times \{n\}$ para algum $n \in N$.*

Uma aplicação direta garante a completude das folhas com dimensão minimal:

**Proposição 14.** *Seja $M$ um espaço simétrico com curvatura seccional não-negativa. Se $L^{\#}$ é uma folha dual com dimensão mínima, então $L^{\#}$ é completo. Além disso,*

$$M = L^{\#} \times N.$$

*Demonstração.* Suponha que $L^{\#}$ não seja completa. Então, o Teorema 12 nos dá uma subvariedade totalmente geodésica com a mesma dimensão de $L^{\#}$ tal que

$$L^{\#} \subsetneq Z$$

Por hipótese, o bordo topológico de $L^{\#}$ em $Z$ é não-vazio. Por outro lado

$$bd(L^{\#}) = \bigcup F^{\#} \subset Z$$

é uma união disjunta de folhas duais (veja Wilking (Wilking 2007, page 1312)).

Além disso, como $F^{\#} \subseteq Z$, então

$$\dim L^{\#} \leq \dim F^{\#} \leq \dim Z = \dim L^{\#}.$$

Portanto, aplicando o Teorema 12 novamente, cada $F^{\#}$ é um subconjunto aberto de $Z$.

Concluímos que o fecho de $L^{\#}$, $L^{\#} \cup bd(L^{\#})$, é coberto por abertos disjuntos não-triviais. Por outro lado, $L^{\#} \cup bd(L^{\#})$ é fechado e conexo em $Z$, pois $L^{\#}$ é conexo, o que gera uma contradição. □

Com a Proposição 14 em mãos, temos tudo o que é preciso para demonstrar o Teorema 8. Dedicamos a seguinte subseção a esta demonstração

### 2.4.1 Demonstração da Conjectura de Wilking em Espaços Simétricos

Começamos esta demonstração utilizando a Proposição 14 para construir vetores verticais muito particulares não-pertencentes a uma folha dual minimal.

Sejam $L^{\#} = Z$ uma folha dual fechada fixada e $M = Z \times N$ uma decomposição métrica dada pela Proposição 14 respectivamente. Considere também $(z, n) \in Z \times N$ de modo que $Z_n = Z \times \{n\} = L^{\#}$ e denote

$$N_z = \{z\} \times N.$$

Seja $U$ uma vizinhança tubular ((Hirsch, pag 110) , (Lee 1997, pag 150)) de $Z_n$ de modo que o quadrado da função distância $f : U \to \mathbb{R}$,

$$f(z', n') = d_M((z', n'), Z_n)^2 = d_N(n', n)^2,$$

seja suave.

Note que a vizinhança $U$ pode ser escolhida como $Z \times B_n(r)$, onde $B_n(r)$ é uma bola aberta convexa de raio $r$ ao redor de $n \in N$ e $r$ não depende de $n$, pois o raio de injetividade em espaços simétricos é independente do ponto.

**Lema 1.** *Para todo $(z', n') \in U - Z_n$, existe $v \in T_{(z',n')}N_{z'} \cap V_{(z',n')}$ tal que*

$$\langle v, \nabla f\rangle < 0.$$

*Demonstração.* Afirmamos que

$$\nabla f \notin \tilde{H}_{(z',n')} = pr_{TN} H_{(z',n')},$$

a projeção ortogonal de $H_{(z',n')}$ em $T_{(z',n')}N$.

Lembremo-nos que $\nabla f(z', n')$ é o vetor em $N_{z'}$ definido como a velocidade de uma geodésica minimizante conectando $(z', n')$ a $(z', n)$.

Observando que as geodésicas em $M = Z \times N$ são geodésicas produto, concluímos que nenhum vetor horizonal pode ser escrito na forma

$$X + \nabla f$$

com $X$ tangente a $Z_{n'}$, pois caso contrário existiria uma geodésica horizontal definida por $X + \nabla f$, conectando a folha dual passando por $(z', n') \notin Z_n$ à folha dual $Z_n$, o que gera uma contradição.

Logo, concluímos que $\nabla f \notin \tilde{\mathcal{H}}$ e portanto existe

$$v \in V \cap TN_{z'} = \mathcal{H}^{\perp} \cap TN_{z'} = \tilde{\mathcal{H}}^{\perp} \cap TN_{z'} \neq 0$$

satisfazendo $\langle v, \nabla f\rangle < 0$. □

A ideia central é utilizar o Lema 1 para mostrar que $N_z$ pertence a uma única folha. Seja $(z', n)$ um ponto na folha $L_{(z',n)} \subseteq Z \times N$. Defina $g_{z'} : L_{(z',n)} \cap U \to \mathbb{R}$ por

$$g_{z'}(x) = d_M(x, N_z)^2 = d_M(x, N_z \cap U)^2.$$

**Lema 2.** *Para todo* $(z', n) \in Z_n - L_{(z,n)}$,

$$d_M(L_{(z',n)} \cap U, N_z \cap U)^2 = \min g_{z'} > 0.$$

*Demonstração.* Seja $m$ um valor arbitrário para $g_{z'}$. Afirmamos que

$$g_{z'}^{-1}(m) \cap Z_n \neq \emptyset.$$

Como $g_{z'}^{-1}([m, m'])$ é fechado para todo $m' > m$ e o Teorema de Sard garante que o subconjunto de valores regulares é denso neste intervalo, concluímos que é suficiente provar esta afirmação para valores regulares.

Seja $\epsilon^2 > 0$ um valor regular e $S_z(\epsilon) \subset Z_n$ o conjunto de pontos em $Z_n$ que são $\epsilon$-distantes de $(z, n)$.

Observe que

$$g_{z'}^{-1}(\epsilon^2) = L_{(z',n)} \cap U \cap (S(\epsilon) \times N).$$

O espaço tangente desta subvariedade é dado por:

$$Tg_{z'}^{-1}(\epsilon^2) = TL_{(z',n)} \cap TS(\epsilon) + TL_{(z',n)} \cap TN.$$

Segue que cada ponto de $g_{z'}^{-1}(\epsilon^2) - Z_n$ possui um vetor $v$ como no Lema 1 e portanto nenhum ponto crítico de $f|_{g^{-1}(\epsilon^2)}$ pode estar fora de $g_{z'}^{-1}(\epsilon^2) \cap Z_n$.

Entretanto, se supormos que $g^{-1}(\epsilon^2) \neq \emptyset$, então $f|_{g^{-1}(\epsilon^2)}$ deverá ter um ponto mínimo. Como este ponto mínimo deve pertencer a $Z_n$, concluímos que $g^{-1}(\epsilon^2) \cap Z_n \neq \emptyset$ sempre que $g^{-1}(\epsilon^2) \neq \emptyset$.

Como $g_{z'}^{-1}([m, m'])$, $m' \neq m$, é fechado e o Teorema de Sard nos garante que o subconjunto de valores regulares é denso neste intervalo, concluímos que $g_{z'}^{-1}(m) \cap Z_n \neq \emptyset$.

Portanto, para $(z'', n) \in g_{z'}^{-1}(m) \cap Z_n$ temos:

$$m = g_{z'}(z'', n) = d_Z(z'', z)^2 > 0,$$

o que completa a demonstração. □

*Demonstração do Teorema 8.* Como os pontos $z, z'$ no Lema 2 são arbitrários, concluímos que $N_z \cap U \subseteq L_{(z,n)}$ para todo $z$ (equivalentemente, $N_z \cap U \cap L_{(z',n)} = \emptyset$ sempre que $(z', n) \notin L_{(z,n)}$) e concluímos dessa forma que $TN_z|_U$ é vertical.

Em particular, para todo $(z'', n'') \in U$, temos $H_{(z'',n'')} \subseteq TZ_{n''}$. Concluímos que $L^{\#}_{(z'',n'')} = Z_{n''}$ pela minimalidade da dimensão de $Z$ e pela Proposição 14. Este argumento mostra que uma folha dual $L^{\#}_{(z',n')}$ coincide com $Z_{n'}$ sempre que $n'$ está numa vizinhança tubular $U$ da folha dual $L^{\#}_{(z,n)}$ que coincide com $Z_n$.

Concluímos a demonstração ao recapitularmos que $U$ pode ser escolhida como $Z \times B_n(r)$, onde $r$ não depende de $n$; e que todo ponto $n' \in N$ pode ser conectado a $n$ por uma sequência $n_1, ..., n_k$, tal que $n_1 = n$, $n_k = n'$ e $B_{n_i}(r) \cap B_{n_{i+1}}(r) \neq \emptyset$.

Além disso, dado $z \in Z$ o espaço horizontal $\mathcal{H}_{(z,n)}$ considerado como subespaço de $TZ$ varia com $n$. De fato, considere o plano parametrizado $(\gamma_1^t(s), \gamma_2(t))$ definido por uma família de geodésicas $\gamma_1^t \subset Z$ e $\gamma_2 \subset N$ onde $(\gamma_1^t)'(s) \in \mathcal{H}$ para todo par $t, s \in \mathbb{R}$. Mas (Wilking 2007, Proposition 6.1) demonstra que este plano é totalmente geodésico e *flat*. Em particular,

$$\frac{\partial}{\partial s}(\gamma_1^t(s), \gamma_2(t)) = (\gamma_t^1)'(s)$$

é paralelo ao longo de $t \mapsto (\gamma_1^t(s), \gamma_2(t))$ e segue pela unicidade do transporte paralelo que

$$(\gamma_1^0)'(s) = (\gamma_1^t)'(s)$$

para todo $t, s$, o que conclui a demonstração. □

## 2.5 Uma Aplicação em Folheações Polares

Seja $\Sigma$ uma seção de uma folheação polar $\mathcal{F}$ em $M$. Podemos assumir (a menos de uma composição com o recobrimento universal $\tilde{\Sigma} \to \Sigma$ que $\Sigma$ é simplesmente conexa e imersa em $M$. Existe um grupo $W$ de isometrias de $\Sigma$ tal que $\Sigma/W$ é isométrico a $M/\mathcal{F}$. Este grupo $W$ é chamado de *Grupo de Weyl*.

Além disso, se $M$ for simplesmente conexa, o grupo $W$ se consiste de reflexões, ou seja, de isometrias que fixam uma subvariedade de $\Sigma$ de codimensão 1 chamadas de *paredes* (para mais detalhes, consulte (Toeben 2006)).

Uma aplicação interessante da Conjectura de Wilking para espaços simétricos e que exibe a força desta conjectura se consiste em re-demonstrar o seguinte Teorema:

**Teorema 13.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação polar em uma variedade Riemanniana $M$ e $\Sigma$ uma seção da folheação. Suponha que a ação do grupo de Weyl $W$ se decompõe como um produto de grupos $W = W_1 \times W_2$ e que a seção se decompõe como um produto métrico de seções $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ onde $W_i$ age apenas na $i-$ésima coordenada $\Sigma_i$. Então $\mathcal{F}$ se decompõe como o produto de folheações polares $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.*

O Teorema 13 desempenha um papel central nos resultados encontrados em (Lytchak 2014) e (Liu e Radeschi 2020). Demonstra-se este Teorema seguindo os argumentos da demonstração de (Lytchak 2014, Proposition 4.2). Por conveniência, os recordamos a seguir:

Seja $p : M \to Y = M/\mathcal{F}$ a projeção de $M$ no espaço de folhas e tome a projeção $q_i : Y \to Y_i = Y/W_i$. As composições $p_i = q_i \circ p : M \to Y_i$ são o espaço quociente de novas folheações polares $\mathcal{F}_i'$ em $M$ (veja (Lytchak 2014, Section 2.4)).

Como toda curva $\mathcal{F}_1'$-horizontal é mapeada por $p$ em um $Y_1$-fator (e, portanto, por $p_2$ a um ponto), toda folha dual a $\mathcal{F}_1'$ está contida na folha da folheação $\mathcal{F}_2'$.

Usando a decomposição $M = Z \times N$ dada pelo Teorema 8, tome $\mathcal{F}_1$ como sendo a restrição de $\mathcal{F}_1$ a $N$ e $\mathcal{F}_2$ como sendo a restrição a $Z$. Os argumentos anteriores mostram que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

# 3 Deformações métricas e curvatura

## 3.1 Introdução do Capítulo

Este capítulo é dedicado a explorar os resultados encontrados ao estudarmos a curvatura de variedades Riemannianas cuja métrica sofreu algum tipo de deformação. Um caso particular de nosso interesse se dá com a chamada *Deformação de Cheeger*.

Para introduzirmos estas deformações, lembramos da Introdução desta tese que Searle-Wilhem demonstraram o teorema:

**Teorema 14** (Searle–Wilhelm, (Searle e Wilhelm 2015))**.** *Seja $G$ um grupo de Lie compacto e conexo agindo isometricamente e efetivamente numa variedade Riemanniana compacta $(M, g)$. Suponha que:*

1. *Uma órbita principal possui grupo fundamental finito.*
2. *A métrica de distância orbital em $M/G$ possui curvatura de Ricci $\geq 1$.*

*Então $M$ admite uma métrica $G$-invariante $\tilde{g}$ com curvatura de Ricci positiva.*

Lembramos também que a métrica do Teorema 14 é construída utilizando primeiramente uma transformação conforme seguida de uma deformação de Cheeger. Desse modo, pode-se perguntar se é possível obter este mesmo resultado utilizando apenas Deformações de Cheeger (que consiste, basicamente, em deformar o espaço vertical de uma variedade por um fator $t^{-1} > 0$). Uma resposta é fornecida na seção 3.6, culminando no Teorema 18.

Para tanto, construímos as deformações de Cheeger e desenvolvemos suas expressões para curvaturas de Ricci e Escalar nas seções 3.2 e 3.3. Estas construções levantam de modo natural a possibilidade de considerarmos funções mais genéricas para realizar novas deformações métricas. Motivados por isto, consideramos as chamadas *Deformações de Cheeger Generalizadas*, que são realizadas ao deformarmos o espaço vertical por uma função positiva básica $h : M \to \mathbb{R}$.

A construção destas deformações e suas ricas expressões para curvatura são encontradas nas seções 3.4 e 3.5, onde recorremos às expressões para a curvatura de *produtos retorcidos verticais gerais* (ou seja, a curvatura de métricas produto conforme visto em (Gromoll e Walshap 2009, Cap. 2)).

Encerramos esta capítulo fornecendo um contraponto ao Teorema de Lawson-Yau:

**Teorema 15** (Lawson-Yau)**.** *Seja $(M, g)$ uma variedade compacta Riemanniana munida de uma ação efetiva isométrica de um grupo $G$ compacto, conexo e não-abeliano. Então, a deformação de Cheeger $g_t$ no instante $t > 0$ tem curvatura escalar positiva para algum $t_0 > 0$.*

onde discutimos caminhos de curvatura escalar positiva no contexto de fibrados com fibras de dimensão 1 ou 2, com um interesse em particular em *circle-bundles*, que possuem o grupo abeliano $S^1$ como fibra.

## 3.2 A Deformação de Cheeger

Considere $(M, g)$ uma variedade Riemanniana e $G$ um grupo de Lie compacto com métrica biinvariante $Q$ em $\mathfrak{g}$ e assuma também que $G$ age isometricamente em $(M, g)$. A aplicação $\pi : M \times G \to M$ dada por

$$\pi_p(g) = g.p \tag{3.1}$$

induz um difeomorfismo entre $G/G_p$ e a órbita $G.p$, onde $G_p$ é o subgrupo de isotropia de $G$. Ao induzir $\pi_p$ nas álgebras de Lie de $G/G_p$ e $G.p$, a métrica $Q$ nos permite obter uma decomposição ortogonal

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{m}_p \tag{3.2}$$

onde $\mathfrak{g}_p$ é a álgebra de Lie do subgrupo de isotropia $G_p$ e $\mathfrak{m}_p$ é um espaço vetorial isomorfo a $T_p(G.p)$.

**Proposição 15.** *Os espaços vetoriais $\mathfrak{m}_p$ e $T_p(G.p)$ são isomorfos.*

*Demonstração.* Dado $X \in \mathfrak{g}$ e escreva

$$X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{m}_p \tag{3.3}$$

Então, o campo de ação

$$X_p^* = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX}.p \tag{3.4}$$

é claramente um elemento de $T_p(G.p)$ e como $G_p$ é subgrupo de isotropia, então

$$(X_1 + X_2)_p^* = (X_1' + X_2)_p^* \tag{3.5}$$

para quaisquer $X_1, X_1' \in \mathfrak{g}_p$, de onde segue o resultado desejado.

□

Utilizando a decomposição da álgebra $\mathfrak{g}$, definimos:

**Definição 27.** *O espaço vertical de $(M, g)$ em $p$* ***com respeito a ação de $G$ em $M$*** *é definido como sendo $\mathcal{V}_p = T_p(G.p)$. O complemento $g$-ortogonal de $\mathcal{V}_p$ é definido como sendo o espaço horizontal, denotado por $\mathcal{H}_p$*

Baseados nesta definição, sempre podemos decompor um vetor tangente $\overline{X} \in T_pM$ como

$$\overline{X} = X + U^*$$

com $X \in \mathcal{H}_p$ e $U^* \in \mathcal{V}_p$. A partir de agora, adotamos esta notação para vetores tangentes.

Uma *Deformação de Cheeger* da métrica $g$ pode ser entendida como uma transmissão a $(M, g)$ de deformações métricas realizadas em $Q$. O processo dessas deformações é descrito a seguir:

Considerando a variedade Riemanniana produto $(M \times G, g \times \frac{1}{t}Q)$ para cada real $t > 0$, temos que a seguinte função:

$$\alpha : (r, p, g) \in G \times (M \times G) \mapsto (r.p, g.r^{-1}) \in M \times G \tag{3.6}$$

define uma ação livre e isométrica em $M \times G$.

As *Deformações de Cheeger* são definidas como sendo a família a $1-$parâmetro de métricas induzidas em $M$ a partir de $g \times \frac{1}{t}Q$ via submersão Riemanniana $\pi$, o que é possível pois $\pi : M \times G \to M$ é um fibrado principal com a ação $\alpha$ e desse modo $(M \times G)/\alpha$ é difeomorfo a $M$. Definimos:

**Definição 28.** *Se $(M, g)$ é uma variedade Riemanniana munida de uma ação de um grupo de Lie compacto $G$ com métrica biinvariante $Q$, definimos uma* ***Deformação de Cheeger*** *de $g$ no instante $t > 0$ como sendo a métrica $g_t$ induzida em $M$ pela submersão Riemanniana $\pi$.*

Na literatura (e.g. (Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018)), é também comum nomear as Deformações de Cheeger descritas na Definição 28 como *Deformações de Cheeger Clássicas*.

A construção das Deformações de Cheeger sugere que as métricas deformadas $g_t$ modificam a geometria do espaço vertical $\mathcal{V}$ de $M$. Introduzimos os seguintes tensores que serão utilizados no estudo da curvatura destas métricas deformadas:

- O *tensor de órbita* em $p$ é a aplicação linear $P : \mathfrak{m}_p \to \mathfrak{m}_p$ definida por

$$g(U^*, V^*) = Q(PU, V), \quad \forall U^*, V^* \in \mathcal{V}_p.$$

- Para cada $t > 0$, defina $P_t : \mathfrak{m}_p \to \mathfrak{m}_p$ como

$$g_t(U^*, V^*) = Q(P_tU, V), \quad \forall U^*, V^* \in \mathcal{V}_p.$$

- O *tensor métrico de $g_t$*, $C_t : T_pM \to T_pM$ é definido como

$$g_t(\overline{X}, \overline{Y}) = g(C_t\overline{X}, \overline{Y}), \quad \forall \overline{X}, \overline{Y} \in T_pM.$$

Pode-se provar facilmente que os tensores $P, P_t$ e $C_t$ são simétricos e positivo-definidos. Estes tensores satisfazem também o seguinte:

**Proposição 16** ((Müter 1987) e (Ziller))**.** *Os tensores $P, P_t$ e $C_t$ satisfazem:*

- $P_t = (P^{-1} + tI)^{-1} = P(1 + tP)^{-1}$,
- *Se* $\overline{X} = X + U^*$ *com* $X \in \mathcal{H}_p$ *e* $U^* \in \mathcal{V} + p$, *então* $C_t(\overline{X}) = X + ((I + tP)^{-1}U)^*$.

*Demonstração.* Veja a demonstração em (Ziller). □

## 3.3 Curvaturas da Deformação de Cheeger

Conforme a seção 3.2, considere $(M, g)$ uma variedade Riemanniana munida de uma ação de um grupo de Lie compacto $G$ com métrica biinvariante $Q$.

Dados $X, Y \in T_pM$, considere a reparametrização da curvatura seccional do plano $(X, Y) \subset T_pM$ dada por:

$$\kappa_t(\overline{X}, \overline{Y}) := R_{g_t}(C_t^{-1}\overline{X}, C_t^{-1}\overline{Y}, C_t^{-1}\overline{Y}, C_t^{-1}\overline{X}) \tag{3.7}$$

**Teorema 16** ((Ziller), Proposition 1.3)**.** *Sejam* $\overline{X} = X + U^*$, $\overline{Y} = Y + V^*$ *vetores em* $T_pM$*. Então,*

$$\kappa_t(\overline{X}, \overline{Y}) = R_g(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Y}, \overline{X}) + \frac{t^3}{4}\|[PU, PV]\|_Q^2 + z_t(\overline{X}, \overline{Y}), \tag{3.8}$$

*onde* $z_t$ *é não-negativo.*

*Demonstração.* Os termos

$$R_g(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Y}, \overline{X}) + \frac{t^3}{4}\|[PU, PV]\|_Q^2 \tag{3.9}$$

são claramente a expressão para a curvatura de $M \times G$ e $z_t$ é o tensor de O'Neill da submersão $\pi$. □

A partir do Teorema 16, pode-se calcular as curvaturas de Ricci e escalar das métricas $g_t$, conforme demonstrado em (Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018, Lemma 1.1). Reproduziremos este cálculo nesta seção.

Considere $\overline{X} = X + U^* \in T_pM$ e uma base ortonormal $\{e_1, ...., e_n\}$ de $T_pM$, onde $\{e_{k+1}, ..., e_n\}$ é uma base para o espaço horizontal $\mathcal{H}_p$.

Considere a *curvatura de Ricci horizontal*, definida por:

$$Ric^{\mathcal{H}}(\overline{X}) := \sum_{i=k+1}^{n} R(\overline{X}, e_i, e_i, \overline{X}). \tag{3.10}$$

Seguindo (Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018), vamos demonstrar:

**Proposição 17.** *(Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018, Lemma 1) Para cada* $\overline{X} \in T_pM$*,*

$$\lim_{t\to\infty} Ric_{g_t}(\overline{X}) = Ric_g^{\mathcal{H}}(X) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z_n(C_t\overline{X}, C_t^{1/2}e_i) + \frac{1}{4}\sum_j \|[v_j, U]\|_Q^2,$$

*onde* $\{v_1, ..., v_k\}$ *é uma base* $Q$*-ortonormal para* $\mathfrak{m}_p$*.*

*Demonstração.* Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base $Q$-ortonormal de autovetores de $P$ com autovalores $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k$, respectivamente. Dada uma base $\{e_{k+1}, .., e_n\}$ $g$-ortonormal de $\mathcal{H}_p$, considere uma nova base $g$-ortonormal $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ de $T_pM$, com

$$e_i = \lambda_i^{-1/2} v_i^* \tag{3.11}$$

para $i \leq k$.

Pela Proposição 16, observe que

$$\{C_t^{-1/2} e_i\}_{i=1}^n \tag{3.12}$$

é uma base $g_t$-ortonormal para $T_pM$. Além disso, vale que

$$C_t^{-1/2} e_i = (1 + t\lambda_i)^{1/2} e_i \tag{3.13}$$

para $i \leq k$ e que $C_t^{-1/2} e_i = e_i$ for $i > k$ .

A curvatura de Ricci de $g_t$ satisfaz:

$$\begin{aligned} Ric_{g_t}(\overline{X}) =& Ric_g^{\mathcal{H}}(C_t\overline{X}) + \sum_{i=1}^n z_t(C_t^{1/2} e_i, C_t\overline{X}) \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{1}{1 + t\lambda_i} \Big( \kappa_0(e_i, C_t\overline{X}) + \frac{\lambda_i t}{4} \|[v_i, tP(1 + tP)^{-1}U]\|_Q^2 \Big) \end{aligned} \tag{3.14}$$

De fato, para provar a equação (3.14) note que a expressão (3.8) do Teorema 16 nos dá:

$$\begin{aligned} Ric_{g_t}(C_t^{-1}\overline{X}) &= \sum_{i=1}^n R_{g_t}(C_t^{-1/2} e_i, C_t^{-1}\overline{X}, C_t^{-1}\overline{X}, C_t^{-1/2} e_i) = \sum_{i=1}^n \kappa_t(C_t^{1/2} e_i, \overline{X}) \\ &= \sum_{i=1}^n \kappa_0(C_t^{1/2} e_i, \overline{X}) + \sum_{i=1}^n z_t(C_t^{1/2} e_i, \overline{X}) + \frac{t^3}{4} \sum_{i=1}^k \|[PC_t^{1/2} \lambda_i^{-1/2} v_i, PU]\|_Q^2 \\ &= Ric_g^{\mathcal{H}}(\overline{X}) + \sum_{i=1}^n z_t(C_t^{1/2} e_i, \overline{X}) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{1 + t\lambda_i} \Big( \kappa_0(e_i, \overline{X}) + \frac{\lambda_i t}{4} \|[v_i, tPU]\|_Q^2 \Big). \end{aligned}$$

De modo que a equação (3.14) é verdadeira: basta que se substitua $\overline{X}$ por $C_t\overline{X}$. Observe também que $C_t\overline{X} \to X$ se $t \to \infty$. Segue que:

$$Ric_g^{\mathcal{H}}(C_t\overline{X}) \to Ric_g^{\mathcal{H}}(X), \tag{3.15}$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{1 + t\lambda_i} \kappa_0(e_i, C_t\overline{X}) \to 0, \tag{3.16}$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{t\lambda_i}{1 + t\lambda_i} \frac{1}{4} \|[v_i, tP(1 + tP)^{-1}U]\|_Q^2 \to \sum_{i=1}^k \frac{1}{4} \|[v_i, U]\|_Q^2. \tag{3.17}$$

$\square$

Com algumas pequenas mudanças na demonstração da Proposição 17, demonstra-se também o seguinte resultado:

**Proposição 18.** *Sejam* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *a base* $g$*-ortonormal e* $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k$ *os autovalores descritos na demonstração da Proposição 17. Então, a curvatura escalar de* $g_t$ *pode ser escrita como:*

$$S_{g_t}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} K_g(C_t^{1/2} e_i, C_t^{1/2} e_j) + z_t(C_t^{1/2} e_i, C_t^{1/2} e_j) + \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\lambda_i \lambda_j t^3}{(1 + t\lambda_i)(1 + t\lambda_j)} \frac{1}{4} \|[v_i, v_j]\|_Q^2. \quad (3.18)$$

## 3.4 A Deformação de Cheeger Generalizada

Nesta seção construímos uma extensão das Deformações de Cheeger clássicas. Considere $(M, g)$ uma variedade Riemanniana munida de uma ação isométrica de um grupo de Lie compacto $G$ com métrica biinvariante $Q$ em $\mathfrak{g}$.

Considere também a ação definida na equação [3.6] e a projeção $\pi$ definida pela expressão [3.1]. Similar ao construído na seção 3.2, pode-se identificar $(M \times G)/\alpha$ como uma variedade difeomorfa a $M$.

Desejamos realizar uma deformação métrica em $g$ por métodos similares ao realizado nas Deformações de Cheeger clássicas mas considerando uma função mais geral em relação a $f(t) = t^{-1}$ utilizada na Deformação de Cheeger clássica.

Diz-se que um campo vetorial $X \in TM$ é um *campo básico* quando $X$ é horizontal e projetável. Considere $\phi : M \to \mathbf{R}$ uma função suave cujo gradiente é um campo básico. Considere também a métrica $g \times e^{-2\phi}Q$ em $M \times G$. Podemos induzir a métrica de submersão Riemanniana $g_\phi$ em $M$. Esta métrica induzida é a deformação métrica que almejávamos construir. Sumarizamos esta construção na seguinte definição:

**Definição 29.** *Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana munida de uma ação de um grupo de Lie compacto $G$ com métrica biinvariante $Q$. Definimos uma **Deformação de Cheeger Generalizada** de $g$ com respeito a uma função suave $\phi : M \to \mathbf{R}$ como sendo a métrica $g_\phi$ induzida em $M$ pela métrica $g \times e^{-2\phi}Q$ via submersão Riemanniana $\pi : M \times G \to M$ .*

Analogamente ao realizado para Deformações de Cheeger clássicas, pode-se definir os seguintes tensores:

- Dada uma função suave $\phi : M \to \mathbf{R}$, defina $P_\phi : \mathfrak{m}_p \to \mathfrak{m}_p$ como

$$g_\phi(U^*, V^*) = Q(P_\phi U, V), \quad \forall U^*, V^* \in \mathcal{V}_p.$$

- O *tensor métrico de* $g_\phi$, $C_\phi : T_pM \to T_pM$ é definido como

$$g_\phi(\overline{X}, \overline{Y}) = g(C_\phi \overline{X}, \overline{Y}), \quad \forall \overline{X}, \overline{Y} \in T_pM.$$

Com estes tensores, podemos escrever uma expressão útil para o levantamento horizontal de um vetor $\bar{X} = X + U^*$ (com respeito ao fibrado exibido na expressão [3.1]) conforme a seguinte equação:

$$L_\pi(\bar{X}) = (P^{-1}(P^{-1} + e^{2\phi}I)^{-1}V - U^* + X, -e^{2\phi}(P^{-1} + e^{2\phi}I)^{-1}U) \tag{3.19}$$

desse modo, pode-se escrever expressões algébricas no espírito da Proposição 16 para os tensores $C_\phi$ and $P_\phi$ como a seguir:

**Proposição 19.** *Os tensores $P_\phi$ e $C_\phi$ satisfazem:*

- $P_\phi = P(I + e^{2\phi}P)^{-1}$.
- $C_\phi(X + U^*) = X + (I + e^{2\phi}P)^{-1}U$.

*Demonstração.* Similar a Proposição 16. □

Aplicando a equação [3.19] na segunda relação da Proposição 19, obtém-se a expressão:

$$L_\pi(C_\phi^{-1}\bar{X}) = (X + V^*, -e^{2\phi}PV). \tag{3.20}$$

E esta expressão permite trabalharmos com reparametrizações do plano $(X, Y) \subset T_pM$ pelo tensor $C_\phi^{-1}$. O cálculo da curvatura desta métrica generalizada será realizado na seção seguinte.

## 3.5 Curvaturas da Deformação Generalizada

Decompondo $T_{(p,g)}(M \times G)$ em espaços horizontal e vertical para quaisquer $(p,g) \in M \times G$, utilizaremos as expressões para curvatura de Gray-O'Neill para calcularmos as curvaturas seccionais dos planos reparametrizados

$$\{L_\pi C_\phi^{-1}\bar{X}, L_\pi C_\phi^{-1}\bar{Y}\}$$

Em conformidade com a notação utilizada na seção 3.3, dados $X, Y \in T_pM$, considere a reparametrização da curvatura seccional do plano $(X,Y) \subset T_pM$ dada por:

$$\kappa_\phi(\overline{X},\overline{Y}) := R_{g_\phi}(C_\phi^{-1}\overline{X}, C_\phi^{-1}\overline{Y}, C_\phi^{-1}\overline{Y}, C_\phi^{-1}\overline{X}) \tag{3.21}$$

Utilizando a equação de Gray-O'Neill para a curvatura seccional, temos:

$$\kappa_\phi(\bar{X},\bar{Y}) = R_{g\times e^{-2\phi}Q}((\bar{X}, -e^{2\phi}PU), (\bar{Y}, -e^{2\phi}PV)) + z_\phi(\bar{X},\bar{Y}) \tag{3.22}$$

com $z_\phi$ não-negativo, que se escreve em termos do tensor de O'Neill, conforme o Teorema 9).

O cálculo da curvatura em 3.22 será realizado utilizando as expressões para a curvatura seccional de *produtos retorcidos verticais gerais*. Uma exposição bastante geral é feita em (Gromoll e Walshap 2009, Cap. 2) mas há alguns misprints no enunciado do Teorema que expressa a fórmula para cálculo das curvaturas seccionais destes produtos. Apresentaremos aqui a versão corrigida do enunciado.

Primeiramente, considere as identificações a seguir (decomposições em espaços vertical e horizontal):

$$\bar{X} = (\bar{X}, 0); \tag{3.23}$$

$$\bar{Y} = (\bar{Y}, 0); \tag{3.24}$$

$$\bar{U} = (0, -e^{2\phi}PU); \tag{3.25}$$

$$\bar{V} = (0, -e^{2\phi}PV). \tag{3.26}$$

Com estas identificações, podemos reescrever a expressão (3.22) como:

$$\kappa_\phi(\bar{X},\bar{Y}) = R_g(\bar{X},\bar{Y}) + R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{U},\bar{V}) + 2R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{X},\bar{V},\bar{U},\bar{Y}) +$$
$$R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{X},\bar{V}) + R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{Y},\bar{U}) + z_\phi(\bar{X},\bar{Y})$$

Os termos individuais desta curvatura serão calculados utilizando a seguinte Proposição:

**Proposição 20** (Curvatura seccional do Produto Retorcido Vertical Geral)**.** *Seja* $(M,g)$ *uma variedade Riemanniana com uma folheação Riemanniana induzida por uma submersão*

*Riemanniana e $\tilde{g}$ uma métrica do produto torcido vertical geral (consulte general warped product em (Walschap 1992)) por uma função básica $h^{-1}$. Fixe $p \in M$. Então as seguintes fórmulas para a curvatura seccional $\widetilde{K}$ de $\tilde{g}$ são válidas:*

1. $\widetilde{K}(X,Y) = (1-h^{-1})K_B(X,Y) + h^{-1}K(X,Y),\ \forall X,Y \in \mathcal{H}_p$;
2. $\widetilde{K}(V_1,V_2) = (h^{-1}-h^{-2})K_F(V_1,V_2) + h^{-2}K_g(V_1,V_2) - \frac{1}{4}h^{-4}|V_1|^2|V_2|^2|\nabla h|^2 - \frac{1}{2}h^{-3}dh(\sigma(V_1,V_1))|V_2|^2 - \frac{1}{2}h^{-3}dh(\sigma(V_2,V_2))|V_1|^2,\ \forall V_1,V_2 \in \mathcal{V}_p$ *tais que* $g(V_1,V_2)=0$;
3. $\widetilde{K}(X,V) = K_g(X,V)h^{-1} - h^{-1}\left(1-h^{-1}\right)|A_X^*V|^2 - h^{-2}dh(X)g(S_XV,V) - \frac{1}{4}\left\{-2\text{Hess } h(X,X) + 3dh(X)^2\right\}h^{-2}|V|^2,\ \forall X \in \mathcal{H}_p, \forall V \in \mathcal{V}_p$.

Para a demonstração de 20, veja (Gromoll e Walshap 2009, Cap. 2).

Agora, utilizando as expressões para a curvatura de (Walschap 1992), temos:

$$R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{X},\bar{Y}) = R_g(X,Y); \tag{3.27}$$

$$R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{U},\bar{V}) = \frac{1}{4}e^{6\phi}|[PU,PV]|_Q^2 - \frac{1}{4}|\nabla e^{2\phi}|_g^2|PU\wedge PV|_Q^2; \tag{3.28}$$

$$R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{X},\bar{V}) = \frac{1}{4}|PV|_Q^2(2\,\mathrm{Hess}\, e^{2\phi}(X) - 3de^{2\phi}(X)^2); \tag{3.29}$$

$$R_{g\times e^{-2\phi}Q}(\bar{Y},\bar{U}) = \frac{1}{4}|PU|_Q^2(2\,\mathrm{Hess}\, e^{2\phi}(Y) - 3de^{2\phi}(Y)^2). \tag{3.30}$$

Similarmente ao que fizemos para calcular as curvaturas da deformação de Cheeger clássica, tome uma base $\{v_1,\ldots,v_k,e_{k+1},\ldots,e_n\}$ de $T_pM$, onde $\{e_{k+1},\ldots,e_n\}$ é uma base horizontal e $\{v_1,\ldots,v_k\}$ é uma base vertical de autovetores de $P$ com autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ respectivamente e defina $e_i = \lambda_i^{-1/2}v_i$. Escreveremos expressões para as curvaturas seccionais desta base.

Separamos o cálculo destas curvaturas em três casos: as curvaturas horizontal, vertical e vertizontal.

1. Se $i,j \in \{k+1,\ldots,n\}$, então

$$R_{g_\phi}(e_i,e_j) = R_g(e_i,e_j) + z_\phi(e_i,e_j). \tag{3.31}$$

2. Se $i \in \{k+1,\ldots,n\}$ and $j \in \{1,\ldots,k\}$, então

$$\begin{aligned}R_{g_\phi}(e_i,C_\phi^{-1/2}e_j) =&(1+e^{2\phi}\lambda_j)^{-1}[R_g(e_i,e_j) + \frac{\lambda_j}{4}(2Hess(e^{2\phi})(e_i) - 3e^{-2\phi}de^{2\phi}(e_i)^2)]+\\ &z_\phi(e_i,C_\phi^{-1/2}e_j).\end{aligned}$$

3. Se $i, j \in \{1, \dots, k\}$, então

$$\begin{aligned} R_{g_\phi}(C_\phi^{-1/2}e_i, C_\phi^{-1/2}e_j) &= R_{g\times e^{-2\phi}Q}((C_\phi^{1/2}e_i, -e^{2\phi}PC_\phi^{1/2}e_i), (C_\phi^{1/2}e_j, -e^{2\phi}PC_\phi^{1/2}e_j)) \\ &= (1+e^{2\phi}\lambda_i)^{-1}(1+e^{2\phi}\lambda_j)^{-1}R_{g\times e^{-2\phi}Q}((e_i, -e^{2\phi}Pe_i), (e_j, -e^{2\phi}Pe_j)) \\ &+ z_\phi(C_\phi^{-1/2}e_i, C_\phi^{-1/2}e_j). \end{aligned}$$

Nos resta, então, calcular o termo

$$R_{g\times e^{-2\phi}Q}((e_i, -e^{2\phi}Pe_i), (e_j, -e^{2\phi}Pe_j)). \tag{3.32}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} R_{g\times e^{-2\phi}Q}((e_i, -e^{2\phi}Pe_i), (e_j, -e^{2\phi}Pe_j)) &= R_g(e_i, e_j) \\ &+ R_{g\times e^{-2\phi}Q}((0, -e^{2\phi}\lambda_i e_i), (0, -e^{2\phi}\lambda_j e_j)) \\ &+ 2R_{g\times e^{-2\phi}Q}((e_i, 0), (0, -e^{2\phi}\lambda_i e_i), (0, -e^{2\phi}\lambda_j e_j), (e_j, 0)) \\ &+ R_{g\times e^{-2\phi}Q}((e_i, 0), (0, -e^{2\phi}\lambda_j e_j)) \\ &+ R_{g\times e^{-2\phi}Q}((e_j, 0), (0, -e^{2\phi}\lambda_i e_i)). \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com as equações 3.27 - 3.30, temos, a menos de uma soma com o termo $(1+e^{2\phi}\lambda_i)^{-1}(1+e^{2\phi}\lambda_j)^{-1}z_\phi((e_i, -e^{2\phi}Pe_i), (e_j, -e^{2\phi}Pe_j))$, que:

$$\begin{aligned} R_{g\times e^{-2\phi}Q}((e_i, -e^{2\phi}Pe_i), (e_j, -e^{2\phi}Pe_j)) &= R_g(e_i, e_j) + \frac{1}{4}e^{6\phi}\lambda_i\lambda_j|[v_i, v_j]|_Q^2 \\ &- \lambda_i\lambda_j\tfrac{1}{4}|\nabla^g e^{2\phi}|_g^2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} &(1+e^{2\phi}\lambda_i)(1+e^{2\phi}\lambda_j)R_\phi(C_\phi^{-1/2}e_i, C_\phi^{-1/2}e_j) = \\ &R_g(e_i, e_j) + \frac{1}{4}e^{6\phi}\lambda_i\lambda_j|[v_i, v_j]|_Q^2 - \lambda_i\lambda_j\tfrac{1}{4}|\nabla^g e^{2\phi}|_g^2 + z_\phi((e_i, -e^{2\phi}Pe_i), (e_j, -e^{2\phi}Pe_j)). \end{aligned}$$

O que conclui o cálculo das expressões das curvaturas seccionais da Deformação de Cheeger Generalizada. Enunciamos:

**Proposição 21.** *Seja $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ uma base de $T_pM$ tal que:*

1. *$\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ é uma base $g$-ortonormal do espaço horizontal,*
2. *Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base vertical de autovetores de $P$ com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, respectivamente. Defina $e_i = \lambda_i^{-1/2}v_i$.*

*Por simplicidade, denote* $\lambda_i = 0$ *para* $i > k$. *Então,*

$$
\begin{aligned}
scal_{g_\phi} =& scal_g - \sum_{i,j=1}^{n+k} \frac{e^{2\phi}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_i\lambda_j e^{2\phi})R_g(e_i, e_j)}{(1+e^{2\phi}\lambda_i)(1+e^{2\phi}\lambda_j)} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j\left(2\tilde{\Delta}_g e^{2\phi} - 3e^{-2\phi}|\nabla e^{2\phi}|_g^2\right)}{1+e^{2\phi}\lambda_j} \\
&+ \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\frac{1}{4}e^{6\phi}\lambda_i\lambda_j|[v_i, v_j]|_Q^2 - \lambda_i\lambda_j\frac{1}{4}|\nabla e^{2\phi}|_g^2}{(1+e^{2\phi}\lambda_i)(1+e^{2\phi}\lambda_j)} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{z_\phi(e_i, e_j)}{(1+e^{2\phi}\lambda_i)(1+e^{2\phi}\lambda_j)}
\end{aligned}
$$

*onde* $\tilde{\Delta}$ *é o Laplaciano negativo horizontal.*

## 3.6 Eixos Fixos

A produção de métricas com curvatura de Ricci positiva é, em geral, uma tarefa árdua e as deformações de Cheeger representam uma ferramenta interessante para abordar algumas construções destas métrica. Lembremo-nos (conforme a seção introdutória) que Searle-Wilhelm provaram o seguinte resultado:

**Teorema 17** (Searle–Wilhelm, (Searle e Wilhelm 2015))**.** *Seja $G$ um grupo de Lie compacto e conexo agindo isometricamente e efetivamente numa variedade Riemanniana compacta $(M, g)$. Suponha que:*

*(1) uma órbita principal possui grupo fundamental finito.*

*(2) A métrica dada pela distância orbital em $M/G$ possui curvatura de Ricci $\geq 1$*

*Então, $M$ admite uma métrica $G$-invariante $\tilde{g}$ com curvatura de Ricci positiva.*

Lembremo-nos também que a construção da métrica do Teorema 17 possui duas etapas: inicialmente é realizada uma transformação conforme na métrica inicial e posteriormente uma Deformação de Cheeger clássica.

O objetivo desta seção é encontrar condições para que *apenas a Deformação de Cheeger clássica* seja necessária para produzir métricas com curvatura de Ricci positiva.

Define-se um **eixo fixo** de $M$ em $p \in M$ com respeito a ação de $G$ como sendo um vetor horizontal $X \in \mathcal{H}_p$ que satisfaz

$$\rho(G_p^0)X = X \tag{3.33}$$

onde $\rho : G_p \to O(\mathcal{H}_p)$ é a representação de isotropia e $G_p^0$ denota a componente conexa da identidade e $O(\mathcal{H}_p)$ denota o grupo ortogonal do espaço horizontal em $p$.

Mostraremos o seguinte Teorema:

**Teorema 18.** *Seja $(M^n, g)$ uma varidade Riemanniana com uma ação isométrica de um grupo de Lie compacto e conexo $G$. Assuma que:*

*(1) uma órbita principal possui grupo fundamental finito.*

*(2) A métrica dada pela distância orbital em $M/G$ possui curvatura de Ricci $\geq 1$.*

*Se $g$ possui direções com curvatura de Ricci negativa para toda Deformação de Cheeger em tempo finito, então*

*a) Existe um ponto singular $p \in M$ e um eixo fixo não-nulo $X \in \mathcal{H}_p$.*

*b) A restrição de $\rho$ a $X^\perp \cap \mathcal{H}_p$ é redutível.*

*Além disso, se $X^\perp \cap \mathcal{H}_p$ se escreve como a soma de exatamente $n$ termos $\rho$-irredutíveis, $X^\perp \cap \mathcal{H}_p = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \cdots + \mathcal{H}_n$, então (a menos de ordenação dos termos somados), para todo vetor regular $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \cdots + \mathcal{H}_n$, existem $j, i \in \{1, \ldots, n\}$ tais que*

$$\dim \mathcal{H}_j - \dim G_p Y_j > \frac{(k-1)\dim \sum_{l \neq i} \mathcal{H}_l}{\dim \mathcal{H}_p - 1},$$

*onde $k$ é a codimensão de uma órbita órbita principal.*

Antes de demonstrarmos o Teorema 18, precisamos do seguinte resultado auxiliar que não será demonstrado neste trabalho, mas que encorajamos a leitura da demonstração em [(Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018), Lemma 3]:

**Lema 3** ((Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018), Lemma 3)**.** *Para todo $\overline{X} = X + U^*$, $\overline{Y} = Y + V^*$, $z_t$ satisfaz:*

$$z_t(\overline{X}, \overline{Y}) = 3t \max_{\substack{Z \in \mathfrak{g} \\ \|Z\|_Q = 1}} \frac{\{dw_Z(\overline{X}, \overline{Y}) + \frac{t}{2}Q([PU, PV], Z)\}^2}{tg(Z^*, Z^*) + 1}. \tag{3.34}$$

*Além disso, em pontos regulares,*

$$dw_Z(V^*, X) = \frac{1}{2}Xg(V^*, Z^*) = -g(S_X V^*, Z^*), \tag{3.35}$$

$$dw_Z(X, Y) = -\frac{1}{2}g([X, Y]^{\mathcal{V}}, Z^*) = -g(A_X Y, Z^*), \tag{3.36}$$

*onde $A_X Y = p_{\mathcal{V}}(\nabla_X Y)$, $S_X V^* = -p_{\mathcal{V}}(\nabla_X V^*)$ and $p_{\mathcal{V}}$ é a projeção ortogonal em $\mathcal{V} = \mathcal{H}^\perp$.*

Com este resultado, pode-se provar:

**Proposição 22** ((Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018), Proposition 4.1)**.** *Seja $X \in \mathcal{H}_p$ um eixo fixo. Então, para qualquer $Y \in \mathcal{H}_p$, vale que:*

$$z_t(X, Y) = 0, \ \forall t > 0. \tag{3.37}$$

*Em particular, $\lim_{t \to \infty} Ric_{g_t}(X) = Ric_g^{\mathcal{H}}(X)$.*

*Demonstração.* Basta provarmos que $dw_Z(X, Y) = 0, \ \forall Z \in \mathfrak{g}$.

Usando a definição de derivada exterior e lembrando que campos de ação $Z^*$ são Killing, então

$$2dw_Z(X, Y) = Xg(Z^*, Y) - Yg(Z^*, X) - g([X, Y], Z^*) = 2g(\nabla_X Z^*, Y) = 0,$$

pois $\tilde{S}_X = 0$. $\square$

Da Proposição 22 e do item (a) do Teorema 18, conclui-se que $(M, g_t)$ possui curvatura de Ricci positiva para algum $t$ suficientemente grande se, e somente se $Ric_g^{\mathcal{H}}(X) > 0$ para todo eixo fixo $X$.

Escrevemos este resultado na forma de Corolário:

**Corolário 1.** *Suponha que $(M, g)$ satisfaça*

1. *Uma órbita principal possui grupo fundamental finito.*
2. $Ric_{M^{reg}/G} \geq 1$ .

*Então, $(M, g_t)$ possui curvatura de Ricci positiva para algum $t > 0$ suficientemente grande se, e somente se $Ric_g^{\mathcal{H}}(X) > 0$ para todo eixo fixo $X \in \mathcal{H}$.*

### 3.6.1 Demonstração - item a), Teorema 18

Mostraremos este resultado utilizando uma subsequência convergente. Assuma que $M$ satisfaz as hipóteses (1) e (2) no Teorema. 18. Por hipótese, para todo $n \in \mathbf{N}$ existe um vetor $g$-unitário $\overline{X}_n = X_n + U_n^* \in T_{p_n}M$ tal que $Ric_{g_n}(\overline{X}_n) < 0$.

Tomando uma subsequência convergente, existe um $L > 0$ e um vetor $g$-unitário limitante $\overline{X} = \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n$ tal que $Ric_{g_t}(\overline{X}) \leq 0$ para todo $t > L$.

Mostraremos que $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ pertence a uma órbita singular (Afirmação 1) e que $\rho(G_p^0)X = X$.

A Proposição 17 nos dá:

$$0 \geq Ric_g^{\mathcal{H}}(X) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z_n(C_t\overline{X}, C_t^{1/2}e_i) + \frac{1}{4}\sum_j \|[v_j, U]\|_Q^2. \tag{3.38}$$

E conclui-se que $U = 0$, pois o último termo é positivo sempre que $U \neq 0$: lembremo-nos que $\frac{1}{4}\sum_j \|[v_j, U]\|_Q^2$ é a curvatura de Ricci do espaço homogêneo normal $G/G_p$, com respeito a métrica $Q$. A curvatura deste espaço é positiva desde que $\pi_1(G/G_p)$ seja finito.

Mas, $\pi_1(G/H)$ é finito, onde $H$ é um grupo de isotropia principal e, segundo Bredon (Bredon 1972, section IV.3), pode-se assumir (a menos de conjugação) que $H < G_p$.

A sequência longa de homotopia de $G_p/H \hookrightarrow G/H \to G/G_p$ fornece a expressão:

$$\cdots \to \pi_1(G/H) \to \pi_1(G/G_p) \to \pi_0(G_p/H) \to \cdots$$

Portanto, $\pi_1(G/G_p)$ é finito se e somente se $G_p/H$ possui um número finito de componentes conexas. Enfim, $G_p$ é uma variedade compacta, pois é subgrupo fechado de um grupo de Lie de onde segue a finitude do grupo fundamental.

Além disso, como o termo $z_t$ em (3.38) é não-negativo, conclui-se que $Ric_g^{\mathcal{H}}(X) \leq 0$. Lembrando que $Ric_{M^{reg}/G} \geq 1$, a próxima afirmação demonstra que $p$ não é ponto regular.

**Afirmação 1.** *Considere a submersão Riemanniana* $\pi\colon (M^{reg}, g) \to (M^{reg}/G, \bar{g})$. *Se* $p \in M^{reg}$, *então,*

$$\lim_{t\to\infty} Ric_{g_t}(X) = Ric_{\bar{g}}(d\pi X). \tag{3.39}$$

A demonstração da Afirmação 1 segue da Proposição 3.3 que pode ser verificada em (Searle e Wilhelm 2015). Enfim, a veracidade do item a) do Teorema 18 segue ao notar-se que $d\rho(\mathfrak{g}_p)X = 0$.

Caso contrário, existiria $Y \in \mathcal{H}_p$ satisfazendo $\tilde{S}_X Y \neq 0$ e portanto os Lemas 17 e 3 dariam $Ric_{g_t}(X) \to +\infty$.

### 3.6.2 Demonstração item b), Teorema 18

O Corolário 1 nos fornece uma condição necessária e suficiente para termos métricas deformadas com curvatura de Ricci positiva em termos de eixos fixos da representação de isotropia $\rho : G_p \to O(\mathcal{H}_p)$.

Os objetivos desta seção são descrever o tensor de curvatura nestes eixos fixos, demonstrar o item (b) do Teorema 18 e descrever algebricamente as condições para que a curvatura de Ricci seja positiva em alguma deformação de Cheeger com tempo finito.

Considere em $(M, g)$ a conexão de Levi-Civita $\nabla$ e o respectivo tensor de curvatura $R$. Considere também a versão estendida da representação de isotropia $\tilde{\rho} : G_p \to O(T_pM)$. Dado $X \in \mathcal{H}$ um eixo fixo de $\tilde{\rho}$, considere o operador

$$R_X := R(\cdot, X)X.$$

Para todo $\bar{Y} \in T_pM$ e $r \in G_p$ vale que:

$$\tilde{\rho}(r) \circ R_X(\overline{Y}) = R(\tilde{\rho}(r)\overline{Y}, \tilde{\rho}(r)X)\tilde{\rho}(r)X = R(\tilde{\rho}(r)\overline{Y}, X)X = R_X(\tilde{\rho}(r)\overline{Y}), \tag{3.40}$$

Segue do Lema de Schur para representações que $R_X$ é um múltiplo da identidade em cada componente irredutível de $\tilde{\rho}$. Concluímos a demonstração do Lema:

**Lema 4.** *Seja $V \subset T_pM$ um subespaço $\tilde{\rho}$-irredutível. Então, $R_X|_V$ é um operador múltiplo da identidade.*

Mais particularmente, como $\mathcal{H}_p$ é $\tilde{\rho}$-invariante, segue que $R_X(\mathcal{H}_p) \subseteq \mathcal{H}_p$ e como $R_X(X) = 0$, então $\mathcal{H}_p \cap X^\perp$ é $R_X$-invariante. Denotaremos a restrição

$$R_X : \mathcal{H}_p \cap X^\perp \to \mathcal{H}_p \cap X^\perp$$

por $R_X$. Note que nesta notação,

$$Ric_g^{\mathcal{H}}(X) = tr R_X.$$

Para uma deformação de Cheeger em $M$ ser inefetiva, basta construirmos uma métrica $g$ satisfazendo as condições *(1)-(2)* do Corolário 1 e $Ric_g^{\mathcal{H}}(X) < 0$ para algum eixo fixo $X$.

Seja $l$ a codimensão de uma órbita regular. Da Afirmação 1 e da condição *(2)*, observe que

$$\lim_{t\to\infty} Ric_{g_t}(X') \geq 1$$

para qualquer $X' \in \mathcal{H}$ regular. Observe também que se $\{e_0 = X, e_1, ..., e_{l-1}\}$ é uma base ortonormal para o subespaço $\mathcal{W}$, então a Proposição 22 nos garante que $z_t(X, e_i) = 0$ para todo $i$.

Desse modo, para todo subespaço $l$–dimensional $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}_p$ obtido pelo limite de subespaços horizontais, vale que:

$$Ric_g^{\mathcal{W}}(X) := \sum_{i=1}^{l-1} R_g(X, e_i, e_i, X) = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{l-1} R_{g_t}(X, e_i, e_i, X) \geq 1, \tag{3.41}$$

onde $\{e_0 = X, e_1, ..., e_{l-1}\}$ é uma base ortonormal para o subespaço $\mathcal{W}$.

O conjunto de tais $\mathcal{W}$'s pode ser restrito de modo a serem válidas as condições (3.41) e $Ric_g^{\mathcal{H}}(X) < 0$. Essa restrição é descrita a seguir:

Considere uma curva suave $c(s)$ com $c(0) = p$ e $c(s) \in M^{reg}$ para todo $s > 0$. Dado $s \in \mathbf{R}$, então $\mathcal{H}_{c(s)}$ define uma curva na Grassmanniana $Gr_l(TM)$. Qualquer subespaço limite $\mathcal{W}$ da curva $\mathcal{H}_{c(s)} \in Gr_l(TM)$, $s \to 0$ deve então satisfazer (3.41).

Conclui-se que todo $\mathcal{W}$ assim descrito é o limite de espaços horizontais ao longo de alguma curva na Grassmaniana $Gr_l(TM)$ e chamamos estes subespaços $\mathcal{W}$ de *Espaços Limitantes Horizontais*. Denotamos a família de subespaços limitantes horizontais em $p$ por $\tilde{\mathcal{W}}_p$.

Seguindo (Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018), podemos dar uma descrição algébrica destes subespaços limitantes horizontais. Recorde-se que

$$S_X Y = -\nabla^v_X Y$$

Provaremos:

**Lema 5.** *Seja $\mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{W}}_p$. Então existe $Y \in \mathcal{H}_p$ tal que*

$$\mathcal{W} = (\tilde{S}_Y \mathfrak{g}_p)^\perp = (d\rho(\mathfrak{g}_p)Y)^\perp$$

*Demonstração.* Considere uma curva suave $c(s)$ tal que $\mathcal{W}$ é o limite de $\mathcal{H}_{c(s)}$. Uma base (suave) para $\mathcal{H}_{c(s)}$ com $s \in (0, \epsilon)$, para $\epsilon$ suficientemente pequeno, é dada por

$$\{\frac{1}{s}v_1^*, ..., \frac{1}{s}v_d^*, v_{d+1}^*, ..., v_k^*\}$$

onde $\{v_1, ..., v_k\}$ é uma base para $\mathfrak{m}_{c(\epsilon)}$, com $v_1^*, ..., v_d^* \in \mathfrak{g}_p$ e os vetores $v_{d+1}^*, ..., v_k^*$ são $Q$-ortogonais a $\mathfrak{g}_p$.

Mas, $v_i^*(c(s)) \to 0$ para todo $i \leq d$. Portanto,

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} v_i^*(c(s)) = \nabla_{\dot{c}(0)} v_i^* = \tilde{S}_{\dot{c}(0)} v_i^*.$$

O que prova o Lema, pois $\{v_1, ..., v_d\}$ deve gerar $\mathfrak{p}_X$. □

O exposto nesta seção permite reescrever as condições para que a curvatura de Ricci seja positiva: se $X \in \mathcal{H}$ é um eixo fixo de $\rho$, então $d\rho(\mathfrak{g}_p)(X) = 0$, de onde segue que $X \in \mathcal{W}$ para todo $\mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{W}}_p$.

Desse modo, a deformação de Cheeger será inefetiva desde que para todo eixo fixo $X \in \mathcal{H}_p$ sejam satisfeitas as condições:

(1') $Ric_g^{\mathcal{H}}(X) < 0.$

(2') $Ric_g^{\mathcal{W}}(X) \geq 1$ para todo $\mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{W}}_p$.

Além disso, podemos concluir a demonstração do item **(b)** do Teorema 18, uma vez que se $\mathcal{H}_p \cap X^{\perp}$ for $\rho$-irredutível, então a condição *(2')* fornece $Ric^{\mathcal{H}_p}(X) > 0$.

### 3.6.3 Expressão para subespaços $\rho$-irredutíveis

Esta subseção é dedicada a apresentar uma descrição combinatória das condições (1') e (2'). Especificamente, procuramos condições algébricas para a existência de um operador simétrico $R_X$ que satisfaça (1') e (2'), e então, *a posteriori*, construímos uma métrica com tal operador de curvatura.

Para maior clareza, primeiro assumimos que $\mathcal{H}_p = \operatorname{span} X \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, onde $\mathcal{H}_i$ são subespaços $\rho$-irredutíveis. Como ficará evidente a partir do Lema 6, neste caso, $R_X$ tem exatamente dois autovalores distintos, $\lambda_1$ e $\lambda_2$, portanto, $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$. Fornecemos um resultado de existência para $\lambda_1$ e $\lambda_2$, de modo que (1') e (2') sejam atendidas.

**Observação.** *Embora o espaço $\mathcal{H}_p$ dependa da métrica, a ação linear de $G_p$ em $\mathcal{H}_p$ é equivalente à representação isotrópica clássica de $G_p$ no quociente $T_pM/T_pG_p$. Portanto, todos os cálculos podem ser realizados usando um complemento fixo de $T_pG_p$.*

**Observação.** *A irreducibilidade de $\mathcal{H}_i$ é necessária apenas para provar o Teorema 18. Para produzir exemplos de métricas não eficazes, apenas assumimos que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são $\rho$-invariantes. Em qualquer caso, uma vez que os autovalores de $R_X|_{\mathcal{H}1}$ e $R_X|_{\mathcal{H}_2}$ devem ter sinais diferentes, temos que $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$.*

Considere as projeções complementares:

$$p_i : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_i.$$

Então, para qualquer métrica $g$ que seja $G$-invariante e $Y \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$,

$$R_X(Y) = \lambda_1 |p_1 Y|_g^2 + \lambda_2 |p_2 Y|_g^2,$$

onde $\lambda_i$ são as constantes determinadas pelo Lema de Schur.

Em particular, $Ric^{\mathcal{H}}(X) = \lambda_1 \dim \mathcal{H}_1 + \lambda_2 \dim \mathcal{H}_2$ e, para $\mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{W}}_p$,

$$Ric^{\mathcal{W}}(X)g = \sum_{i=1}^{l} (\lambda_1 |p_1 e_i|_g^2 + \lambda_2 |p_2 e_i|_g^2) = \lambda_1 \operatorname{tr}(p_1|\mathcal{W}) + \lambda_2 \operatorname{tr}(p_2|\mathcal{W}). \tag{3.42}$$

**Observação.** *Embora a definição de $\mathcal{W} = (d\rho(\mathfrak{g}_p)Y)^{\perp}$ dependa da métrica,*

$$tr(p_1|_{\mathcal{W}}) = tr(p_1) - tr(p_1|_{d\rho(\mathfrak{g}_p)Y})$$

*é independente da métrica.*

A existência de $\lambda_1, \lambda_2$ satisfazendo (1'), (2') é totalmente traduzida a propriedades do conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\operatorname{tr}(p_1|_{\mathcal{W}}), \operatorname{tr}(p_2|_{\mathcal{W}})) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{W}}_p\}$$

Temos o problema:

**Problema 1.** *Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ uma coleção de números reais satisfazendo $a + b = l - 1,\ \forall (a, b) \in \mathcal{A}$. Encontre $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 \geq 1,\ \forall (a, b) \in \mathcal{A} \tag{3.43}$$

*e,*

$$\lambda_1 \dim \mathcal{H}_1 + \lambda_2 \dim \mathcal{H}_2 < 0. \tag{3.44}$$

O Lema 6 nos dá condições necessárias e suficientes para resolver o Problema 1.

**Lema 6.** *Denote $A := \dim \mathcal{H}_1$ e $B := \dim \mathcal{H}_2$. Então, o problema 1 tem resposta afirmativa se, e somente se, ou*

$$\inf_{(a,b)\in\mathcal{A}} \{a\} > \frac{A(l-1)}{A+B}, \tag{3.45}$$

*ou*

$$\inf_{(a,b)\in\mathcal{A}} \{b\} > \frac{B(l-1)}{A+B}, \tag{3.46}$$

*Demonstração.* A partir das condições (3.43) e (3.44), fica claro que $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Além disso, se $\lambda_1, \lambda_2$ são uma solução para o Problema 1, então $-\lambda_1, -\lambda_2$ também o são se trocarmos os papéis de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. As duas condições estabelecidas no Lema 6 diferem pelo sinal de $\lambda_1$. Sem perda de generalidade, assumimos que $\lambda_1 > 0$ e provamos (3.45).

Para ver que (3.45) é necessária, suponha que o Problema 1 tenha uma resposta afirmativa com $\lambda_1 > 0$. Seja $(a, b) \in \mathcal{A}$. A Equação (3.43) nos dá $a > -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}b + \dfrac{\epsilon}{\lambda_1}$, para algum $0 < \epsilon < 1$, então $a > (a - (l-1))\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} + \dfrac{\epsilon}{\lambda_1}$, já que $a + b = l - 1$. Obtemos

$$a > (l-1)\frac{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Por outro lado, a Equação (3.44) nos dá $\dfrac{A}{B} < -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Como a função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ é crescente em $]0, \infty[$, concluímos que

$$a > (l-1)\frac{\frac{A}{B}}{(\frac{A}{B} + 1)} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(l-1)A}{A+B} + \frac{\epsilon}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

para todo $(a, b) \in \mathcal{A}$, provando a condição (3.45).

Reciprocamente, suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que

$$a \geq \frac{A(l-1) + 2\epsilon B}{A+B}$$

para todo $(a, b) \in \mathcal{A}$ para todo $(a, b) \in \mathcal{A}$. Como $a + b = l - 1$, temos $a(A + B) - 2\epsilon B \geq A(a + b)$, portanto $\dfrac{a - 2\epsilon}{b} \geq \dfrac{A}{B}$ sempre que $b \neq 0$.

Escolha $\lambda_1, \lambda_2$ de modo que $\lambda_1 > 0$ e $\frac{a-\epsilon}{b} \geq -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \frac{A}{B}$. Obtemos $0 > \lambda_1 A + \lambda_2 B$ e $\lambda_1 a + \lambda_2 b \geq \epsilon$ para todo $(a,b) \in \mathcal{A}$, $b \neq 0$. O Lema segue por reescalonamento de $\lambda_1, \lambda_2$ uma vez que, quando $\lambda_1 > 0$, a equação (3.43) é automaticamente satisfeita para $b = 0$. □

Utilizando o resultado acima, pode-se concluir o seguinte resultado:

**Proposição 23.** *Suponha que $\mathcal{H}_p$ possui um subespaço $\rho$-invariante $\mathcal{H}_1$, $X \notin \mathcal{H}_1$, tal que*

$$\inf_{\mathcal{W} \in \tilde{\mathcal{W}}_p} \{\operatorname{tr}(p_1|_{\mathcal{W}})\} > \frac{(l-1)\dim \mathcal{H}_1}{\dim \mathcal{H}_p - 1}. \tag{3.47}$$

*Então, existe uma métrica $G$-invariante $g$ numa vizinhança $U$ de $p$ satisfazendo*

1. $\operatorname{Ric}_{U^{reg}/G} \geq 1$,
2. $\operatorname{Ric}_{g_t}(X) < 0$ *para toda deformação de Cheeger clássica $g_t$ de $g$.*

Embora não o demonstremos aqui, recomendamos a leitura da demonstração em [(Cavenaghi L. F.; Silva e Sperança 2018), Proposition 4.3]

## 3.7 Caminhos de Curvatura Escalar Positiva

O Teorema de Lawson-Yau (Teorema 15) nos garante que se um grupo conexo $G$ agindo em uma variedade Riemanniana compacta for não-abeliano, existe $t > 0$ tal que a deformação de Cheeger $g_t$ possui curvatura escalar positiva.

Com o objetivo de oferecer um contraponto ao Teorema de Lawson-Yau, considere o grupo abeliano $S^1$. Em notas não-publicadas, Ziller (veja (Ziller)) explora o conceito de fibrados de tipo *Fat*, i.e. fibrados para os quais o tensor de O'Neill satisfaz $A_X U \neq 0$ para todo $X, U \neq 0$.

Uma classe de fibrados Fat que possuímos interesse especial é a de *circle-bundles*, ou seja, fibrados cuja fibra seja $S^1$. Ziller provou o seguinte resultado:

**Proposição 24.** *Seja $p : P \to B$ um fibrado $S^1$-principal, $\theta$ uma conexão principal, $\Omega : TP \times TP \to \mathbb{R}$ a $2-$forma dada por $d\theta = \Omega$ e $\omega$ a $2-$forma dada pelo pullback $p^*\omega = \Omega$. Então, $\theta$ é Fat se, e somente se $\omega$ é uma forma simplética em $B$.*

Se $P$ for um circle-bundle fat, então (Ziller, Prop. 2.14) garante que se $P$ possui curvatura escalar positiva e $B$ for simplético, o Teorema 19 que mostraremos adiante garante que existe um caminho de métricas com curvatura escalar positiva ligando a métrica original em $P$ à métrica deformada $g_1$ no instante $t = 1$.

Desse modo, o objetivo desta seção é encontrar condições geométricas para existirem caminhos de métricas com curvatura escalar positiva que liguem a métrica original de uma variedade à métrica deformada em um instante $t > 0$. Esta seção está dividida em duas subseções de acordo com a dimensão do espaço vertical.

### 3.7.1 Caso 1: $\dim \mathcal{V} = 1$

Seja $M$ uma variedade Riemanniana $n$-dimensional com espaço vertical 1-dimensional munido de uma ação isométrica de um grupo de Lie compacto $G$ e suponha que as curvaturas escalar e escalar horizontal de $(M, g)$, respectivamente $S^g$ e $S^{\mathcal{H}}_g$, são ambas positivas.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $T_pM$ com $e_1$ vertical e $\{e_2, \ldots, e_n\}$ uma base horizontal, onde $e_1 = \lambda_i^{-1/2} v_1^*$ onde $v_1$ é autovetor de $P$ com autovalor $\lambda_1$.

A Deformação de Cheeger Clássica nos dá a seguinte expressão para a curvatura escalar da métrica deformada [18]:

$$S_{g_t} = S^{\mathcal{H}}_g + \frac{Ric(e_1)}{1 + t\lambda_1} + z_t. \tag{3.48}$$

Mostremos que

$$S_g^{\mathcal{H}} + \frac{Ric(e_1)}{1+t\lambda_1} > 0 \tag{3.49}$$

para todo $t > 0$. De fato, a inequação [3.49] implica

$$1 + t\lambda_1 < -\frac{Ric(e_1)}{S_g^{\mathcal{H}}} \tag{3.50}$$

e portanto

$$t\lambda_1 < -\frac{S_g}{S_g^{\mathcal{H}}} < 0 \tag{3.51}$$

de onde obtemos um absurdo, pois $t, \lambda_1 > 0$ uma vez que $P$ é positivo definido. Enfim, como $z_t \geq 0$, concluímos que $S_{gt} > 0$. Dessa forma provamos o teorema:

**Teorema 19.** *Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana $n$-dimensional munida de uma ação isométrica de um grupo de Lie compacto $(G, Q)$ tal que a curvatura escalar de $g$ é positiva e o espaço horizontal possui dimensão $(n-1)$. Se a curvatura horizontal escalar de $M$ for positiva, então existe um caminho de métricas $g_{\gamma(t)}$ ligando $g$ e $g_1$ tal que $S_{g_{\gamma(t)}} > 0$ para todo $t \in [0, 1]$, onde $g_1$ é a Deformação de Cheeger clássica de $g$ no instante $t = 1$.*

### 3.7.2 Caso 2: $\dim \mathcal{V} = 2$

Suponha agora que o espaço vertical de $M$ com respeito a ação de $G$ seja 2-dimensional. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de $T_pM$ com $\{e_1, e_2\}$ dados por

$$e_i = \lambda_i^{-1/2} v_i^*$$

onde $\{v_1, v_2\}$ é uma base de autovetores de $P$ e $\{e_3, \ldots, e_n\}$ é uma base horizontal. Suponha tambem que as curvaturas escalar e escalar horizontal de $(M, g)$, respectivamente $S^g$ e $S_g^{\mathcal{H}}$, são ambas positivas

A Deformação de Cheeger clássica nos dá a seguinte expressão [18] para curvatura escalar da métrica deformada no instant $t > 0$:

$$\frac{S^{g_t}}{2} = \frac{S^{\mathcal{H}}}{2} + \sum_{i=3}^{n} \frac{K^g(e_1, e_i)}{1+t\lambda_1} + \sum_{j=3}^{n} \frac{K^g(e_2, e_j)}{1+t\lambda_2} + \frac{K^g(e_1, e_2)}{(1+t\lambda_1)(1+t\lambda_2)} + z_t + \\ + \frac{t^3}{4(1+t\lambda_1)(1+t\lambda_2)} ||[v_1, v_2]||_Q^2. \tag{3.52}$$

Defina

$$F(t) = \frac{t^3}{4(1+t\lambda_1)(1+t\lambda_2)} + z_t \tag{3.53}$$

e observe que $F(t) > 0$ para todo $t > 0$ e $F(0) = 0$, de modo que

$$\min_{t\in[0,1]} F(t) = 0 \tag{3.54}$$

Desejamos encontrar condições para que valha a seguinte desigualdade:

$$\frac{S^{\mathcal{H}}}{2} + \sum_{i=3}^{n} \frac{K^g(e_1, e_i)}{1+t\lambda_1} + \sum_{j=3}^{n} \frac{K^g(e_2, e_j)}{1+t\lambda_2} + \frac{K^g(e_1, e_2)}{(1+t\lambda_1)(1+t\lambda_2)} > 0 \tag{3.55}$$

para todo $t > 0$ e todo ponto $p \in M$.

Escreva:

$$A = \sum_{i=3}^{n} K^g(e_1, e_i) \tag{3.56}$$

$$B = \sum_{j=3}^{n} K^g(e_2, e_j) \tag{3.57}$$

$$C = K^g(e_1, e_2) \tag{3.58}$$

$$D = \frac{S^{\mathcal{H}}}{2} \tag{3.59}$$

$$a = \lambda_1 \tag{3.60}$$

$$b = \lambda_2 \tag{3.61}$$

$$x = t \tag{3.62}$$

Então, a desigualdade [3.55] pode ser reescrita como:

$$\frac{abDx^2 + (b(A+D) + a(B+D))x + (A+B+C+D)}{(1+ax)(1+bx)} > 0 \tag{3.63}$$

Como $P$ é positivo-definido, vale que $a, b > 0$, de modo que é suficiente encontrar condições para que valha a desigualdade:

$$p(x) = abDx^2 + (b(A+D) + a(B+D))x + (A+B+C+D) > 0 \tag{3.64}$$

Agora, observe que se $p(0) > 0$, $p'(0) > 0$ e $p''(x) > 0$, então a condição [3.64] é satisfeita. Mas, vale que

$$p(0) = A + B + C + D = \frac{S^g}{2} > 0 \tag{3.65}$$

e se $S^{\mathcal{H}} > 0$, então

$$p''(x) = 2abD > 0. \tag{3.66}$$

Enfim, a condição $p'(0) > 0$ é equivalente a

$$\frac{a}{b}(B+D) > -(A+D) \tag{3.67}$$

e se $A + D > 0$ e $B + D > 0$, então esta condição também é satisfeita. Provamos:

**Teorema 20** (Condições de Curvatura)**.** *Seja $(M, g)$ uma variedade compacta $n$-dimensional munida de uma ação isométrica por um grupo de Lie compacto $(G, Q)$ tal que a curvatura escalar $S_g$ de $g$ é positiva e o espaço horizontal possui dimensão $n-2$. Suponha que as condições a seguir sejam satisfeitas:*

$$(S_g)^{\mathcal{H}} > 0 \tag{3.68}$$

$$\frac{(S_g)^{\mathcal{H}}}{2} + Ric(U) - sec_g(U, V) > 0 \tag{3.69}$$

*para todo $U, V \in \mathcal{V}$ ortogonais e unitários. Então, existe um caminho de métricas $g_{\gamma(t)}$ ligando $g$ a $g_1$ tal que $S_{g_{\gamma(t)}} > 0$ para todo $t > 0$.*

# Referências


ALEXANDRINO, B.; TOEBEN. Progress in the theory of singular riemannian foliations, differential geometry and its applications. Elsevier, v. 31, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

BREDON, G. *Introduction to Compact Transformation Groups*. [S.l.]: Academic press, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 60.

CAVENAGHI L. F.; SILVA, R. M. J.; SPERANÇA, L. D. Positive ricci curvature through cheeger deformation. *arXiv:1810.09725*, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 47, 49, 59, 63 e 67.

CHEEGER, J. Some examples of manifolds of nonnegative curvature. *J. Diff. Geom.*, v. 8, p. 623–628, 1973. Citado na página 12.

EWERT, H. A splitting theorem for equifocal submanifolds in simply connected compact symmetric spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 126, n. 8, p. 2443–2452, 1998. Citado na página 32.

GORODSKI, C. An introduction to riemannian symmetric space. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

GROMOLL, D.; WALSHAP, G. *Metric Foliations and Curvature*. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 34, 44, 54 e 55.

HIRSCH, M. *Differential Topology*. [S.l.]: Springer. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 40.

KAZDAN, J.; WARNER, F. W. Existence and conformal deformation of metrics with prescribed gaussian and scalar curvatures. *The Annals of Mathematics*, 1975. Citado na página 11.

LEE, J. M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. [S.l.]: Springer, 1997. Citado 6 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 27 e 40.

LIU, X.; RADESCHI, M. Polar foliations on symmetric spaces and the mean curvature flow. *arXiv preprint arXiv:2006.03945*, p. 1–28, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 43.

LYTCHAK, A. Geometric resolution of singular riemannian foliations. *Geometriae Dedicata*, 2010. Citado na página 37.

______. Polar foliations of symmetric spaces. *Geometric and Functional Analysis*, Springer, v. 24, n. 4, p. 1298–1315, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 32, 38, 39 e 43.

MUNKRES, J. *Topology*. [S.l.]: Pirinciton Hall, 2000. Citado na página 15.

MÜTER, M. *Krummüngserhöhende deformationen mittels gruppenaktionen*. Tese (Doutorado) — Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, 1987. Citado na página 48.

SEARLE, C.; WILHELM, F. How to lift positive Ricci curvature. *Geometry & Topology*, Mathematical Sciences Publishers, v. 19, n. 3, p. 1409–1475, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 12, 44, 58 e 61.

TOEBEN, D. Parallel focal structure and singular riemannian foliations. *Transactions of the Am. Math. Soc.*, p. 1677—-1704, 2006. Citado na página 43.

WALSCHAP, G. Metric foliations and curvature. *J. Geom. Anal.*, v. 2, p. 373–381, 1992. Citado na página 55.

WILKING, B. A duality theorem for riemannian foliations in nonnegative sectional curvature. *Geometric and Functional Analysis*, v. 17, p. 1297–1320, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 11, 31, 37, 38, 39 e 42.

ZILLER, W. Fatness revisited. Citado na página 68.

_____. On M. Müter's PhD thesis. Https://www.math.upenn.edu/ wziller/papers/SummaryMueter.pdf. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.