UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

RONDINEI ALMEIDA DA SILVA

Controlabilidade exata local a trajetórias para um modelo de solidificação com convecção

Campinas

2023

Rondinei Almeida da Silva

Controlabilidade exata local a trajetórias para um modelo de solidificação com convecção

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Rondinei Almeida da Silva e orientada pela Profª. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Si38c

Silva, Rondinei Almeida da, 1987-
Controlabilidade exata local a trajetórias para um modelo de solidificação com convecção / Rondinei Almeida da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Desigualdades de Carleman. 3. Controle ótimo. 4. Controlabilidade exata. I. Calsavara, Bianca Morelli Rodolfo, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Local exact controllability to the trajectories for a solidification model with convection
Palavras-chave em inglês:
Partial differential equations
Carleman inequalities
Optimal control
Exact controllability
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara [Orientador]
Lucas Catão de Freitas Ferreira
Ademir Pastor Ferreira
Fágner Dias Araruna
Felipe Wallison Chaves Silva
Data de defesa: 13-12-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0001-0863-7191
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8294412599274206

Tese de Doutorado defendida em 13 de dezembro de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

Prof(a). Dr(a). FÁGNER DIAS ARARUNA

Prof(a). Dr(a). FELIPE WALLISON CHAVES SILVA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Sou muitíssimo grato aos meus pais, Valdinei e Nalva, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são os maiores de todos os meus professores, a minha base, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Agradeço à minha orientadora, Bianca M. R. Calsavara, pela paciência, aprendizado valioso, e pela pessoa maravilhosa que é.

Sou muito grato à minha esposa, Luana, pelo seu amor, apoio incondicional e por possuir a nobre virtude de estar bem perto mesmo estando longe.

Agradeço ao meu nobre e exclusivo irmão, Ney Almeida, aos meus primos Isaac, Jairo e Taiane e ao meu amigo de infância, Tiago, pelo companheirismo, força e alegria.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos.

Aos professores e funcionários do IMECC-UNICAMP, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, nº do processo 140992/2016-2.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre controlabilidade local exata à trajetória para um sistema de equações diferenciais parciais que modela um processo de solidificação/fusão e consiste em uma equação do tipo campo de fase acoplada a um sistema Navier-Stokes-Boussinesq. Provamos que, sob certas condições, o sistema é controlável à trajetória, com controles agindo apenas nas equações de velocidade e temperatura. Um primeiro passo é provar a desigualdade de Carleman para o sistema adjunto de uma versão linearizada do sistema. Combinando desigualdades de Carleman com estimativas de energia, conseguimos uma desigualdade de observabilidade, o que leva à controlabilidade nula do sistema linearizado no tempo $T > 0$. O resultado de controlabilidade do sistema não linear segue por um teorema de função inversa, o Teorema de Lyusternik.
Estabelecemos ainda uma relação entre controle ótimo e controlabilidade. Mais precisamente, provamos que uma sequência de soluções de certo problema de controle ótimo converge para uma solução do problema de controlabilidade descrito.

Palavras-chave: Modelo de mudança de fase, Controlabilidade, Desigualdade de Carleman, Observabilidade, Controle ótimo.

Abstract

In this work we present a study on exact local controllability to the trajectory for a partial differential equations system that models a solidification/melting process consisting of a phase field equation coupled to a Navier-Stokes-Boussinesq system. We proved that, under suitable conditions, the system is controllable to trajectory, with controls acting only on the motion and temperature equations. The first step is to prove Carleman's inequality for the adjoint system of a linearized version of the system. Combining Carleman's inequalities with energy estimates, we achieve an observability inequality, which leads to null controllability of a linearized system at time $T > 0$. The controllability result of the nonlinear system is obtained by using an inverse function theorem, the Lyusternik Theorem.

We also established a relationship between optimal control and controllability. More precisely, we prove that a sequence of solutions of a certain optimal control problem converges to a solution of the described controllability problem.

Keywords: Phase change model, Controllability, Carleman inequality, Observability, Optimal control.

Sumário

Introdução

Estudar o comportamento de certos fenômenos da natureza sempre foi um dos maiores interesses da humanidade ao longo do tempo. Um questionamento levantado é sobre a capacidade de agir de modo que este fenômeno seja influenciado para um comportamento desejado. Modelando tais fenômenos, abre-se um leque de possibilidades de mecanismos e técnicas que se desenvolvem no sentido de controlar as variáveis que constituem a representação matemática do fenômeno estudado.

Neste trabalho temos como primeiro objetivo o estudo de controlabilidade para um modelo de mudança de fase sólido/líquido no qual é permitida movimentação nas regiões não-sólidas descrito por equações diferenciais parciais parabólicas. Além disso, o segundo objetivo é o estudo de um problema de controle ótimo e, em seguida, uma relação entre funções de controle do resultado de controlabilidade e as funções de controle do resultado de controle ótimo. No decorrer desta introdução descreveremos os problemas abordados e as estratégias que seguimos para estudá-los.

Alguns modelos solidificação de um líquido e/ou fusão de um sólido conduzem a problemas de fronteira livre descrevendo muitos efeitos físicos diferentes. Métodos de campo de fase de interface difusa são uma abordagem alternativa para estudar fenômeno de solidificação em estrutura de modelo contínuo, uma vez que, a matemática clássica que envolve problemas de fronteira livre pode levar a dificuldades quando são formuladas com práticas computacionais, por exemplo.

Na estrutura de campo de fase, um parâmetro é introduzido, o qual toma dois valores diferentes nas fases líquida e sólida e muda através de uma fina interface difusa, uma região intermediária. Frequentemente, este método é capaz de incorporar muitos fenômenos físicos importantes e se torna uma ferramenta bem sucedida. O primeiro estudo matemático rigoroso para um problema de campo de fase modelando um processo de solidificação/fusão foi feito por Caginalp em [10]. E outros resultados analíticos tem sido estudado para este tipo de modelo. Por exemplo, em Bates e Zheng [8], Colli *et al.* [13] e Miranville [28].

Nosso objetivo neste trabalho é estudar controlabilidade local à trajetória do sistema (2) dado abaixo. Questões sobre controlabilidade por sistemas de campo de fase por materiais puros, ou seja, envolvendo apenas uma função campo de fase tem sido considerado, entre outros, por Ammar Khodja *et al.* [2], González-Burgos e Pérez-García [17], Barbu [6] e Araruna *et al.* [4]. Em [2] e [17], sob certas condições, a controlabilidade nula, a controlabilidade exata à trajetórias e a controlabilidade aproximada para modelos de campo de fase foram obtidas envolvendo não linearidades com crescimento polinomial. Barbu [6] provou a controlabilidade nula para um modelo de campo de fase com uma não linearidade clássica derivada do potencial duplo poço, que foi alcançada usando dois controles. Em Araruna *et al.* [4] foi mostrada a controlabilidade nula de um sistema de campo de fase para o caso em que apenas uma função de controle é usada, e uma relação entre controle ótimo e controlabilidade também foi obtida.

Um outro objetivo é estabelecer a conexão entre controlabilidade dado pelo Teorema 0.0.3 e problema de controle ótimo para o sistema (2) dado pelo Teorema 0.0.8. Mais especificamente, queremos mostrar para este sistema que os controles da controlabilidade nula local é, na verdade, o limite de uma sequência de controles ótimos.

O sistema original que serve como base para este trabalho é apresentado por Calsavara e Guillen-González [11] e descrito por:

$$\begin{cases} \widehat{v}_t + \widehat{v}\cdot\nabla\widehat{v} - \nabla\cdot(2\mu(\widehat{\alpha})D\widehat{v}) + \nabla\widehat{p} - \lambda\varepsilon\Delta\widehat{\alpha}\nabla\widehat{\alpha} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon}F'(\widehat{\alpha})\nabla\widehat{\alpha} & \\ = -(1 - C_1\widehat{\tau} + C_2\widehat{\alpha})g\mathbf{e}_N & \text{em } Q_{ml}, \\ & \\ (\widehat{\tau} + lG(\widehat{\alpha}))_t + \widehat{v}\cdot\nabla(\widehat{\tau} + lG(\widehat{\alpha})) - \nabla\cdot(k(\widehat{\alpha})\nabla\widehat{\tau}) = 0 & \text{em } Q, \\ & \\ \widehat{\alpha}_t + \widehat{v}\cdot\nabla\widehat{\alpha} - \gamma\varepsilon\Delta\widehat{\alpha} - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}F'(\widehat{\alpha}) - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}G'(\widehat{\alpha})\widehat{\tau} = 0 & \text{em } Q, \\ & \\ div\ \widehat{v} = 0 & \text{em } Q_{ml}, \\ D\widehat{v} = 0 & \text{em } Q_s, \end{cases} \tag{1}$$

em que

$$D\widehat{v} = (\nabla\widehat{v} + (\nabla\widehat{v})^t)/2,$$

$$Q_{ml} = \{(x,t) \in Q; \widehat{\alpha}(x,t) < 1\},\ \ Q_s = \{(x,t) \in Q; \widehat{\alpha}(x,t) = 1\}\ \text{ e}$$

$$(\widehat{v}_1 \cdot \nabla\widehat{v}_2)_i = (\nabla\cdot(\widehat{v}_1 \otimes \widehat{v}_2))_i = \sum_{j=1}^{N} \partial_j((\widehat{v}_1)_i(\widehat{v}_2)_j),\ \ i = 1, ..., N.$$

O sistema (2) do qual trata este trabalho, é derivado do sistema original (1) pela regularização da função μ pela constante k_1. Observemos que quando fazemos essa regularização não temos o problema de fronteira livre, e substituímos Q_{ml} e Q_s por Q.

No presente trabalho, lidamos com um sistema de equações diferenciais parciais que modela o processo de solidificação/fusão. Tal sistema consiste em um sistema de equações do tipo Navier-Stokes-Boussinesq acoplado a uma equação do tipo Allen-Cahn para a função campo de fase e é dado por:

$$\begin{cases} \widehat{v}_t + \widehat{v} \cdot \nabla \widehat{v} - k_1 \Delta \widehat{v} + \nabla \widehat{p} - \lambda \varepsilon \Delta \widehat{\alpha} \nabla \widehat{\alpha} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon} F'(\widehat{\alpha}) \nabla \widehat{\alpha} & \\ = -(1 - C_1 \widehat{\tau} + C_2 \widehat{\alpha}) g \mathbf{e}_N + \mathcal{H} 1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \\ \widehat{\tau}_t + \widehat{v} \cdot \nabla \widehat{\tau} - k \Delta \widehat{\tau} + l(G(\widehat{\alpha}))_t + l(\widehat{v} \cdot \nabla G(\widehat{\alpha})) = h 1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \\ \widehat{\alpha}_t + \widehat{v} \cdot \nabla \widehat{\alpha} - \gamma \varepsilon \Delta \widehat{\alpha} - \dfrac{\gamma}{\varepsilon} F'(\widehat{\alpha}) - \dfrac{\gamma}{\varepsilon} G'(\widehat{\alpha}) \widehat{\tau} = 0 & \text{em } Q, \\ \\ div\ \widehat{v} = 0 & \text{em } Q, \\ \widehat{v} = 0, \quad \dfrac{\partial \widehat{\tau}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \widehat{\alpha}}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \\ \widehat{v}(\cdot, 0) = \widehat{v}_0,\ \widehat{\tau}(\cdot, 0) = \widehat{\tau}_0,\ \widehat{\alpha}(\cdot, 0) = \widehat{\alpha}_0 & \text{em } \varOmega. \end{cases} \tag{2}$$

Este sistema foi citado pela primeira vez em Calsavara e Guillen-González [11]. Aqui, $\widehat{v} = \widehat{v}(x,t)$ representa o campo velocidade, $\widehat{\tau} = \widehat{\tau}(x,t)$ a temperatura, $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}(x,t)$ a função campo de fase e $\widehat{p} = \widehat{p}(x,t)$ a pressão, $\mathcal{H}$ e h são funções controle e $\mathbf{e}_N$, $N = 2, 3$, representa o último vetor da base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Além disso, $g > 0$ é a (constante) aceleração gravitacional, $k_1 > 0$ é o coeficiente de viscosidade, $k > 0$ é a condutividade térmica, $l > 0$ é o calor latente, $\lambda > 0$ é a capilaridade, $\varepsilon > 0$ é um parâmetro relacionado à largura da interface, $\gamma > 0$ é a constante ligada ao tempo de relaxação, a função F é um potencial do tipo duplo poço e G é uma função de interpolação.

As hipóteses do sistema (2) são dadas abaixo e as denotaremos por (**H**).

- $\varOmega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou $N = 3$, um domínio aberto e limitado, $Q = \varOmega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$ e $\Sigma = \partial\varOmega \times (0,T)$;
- $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto não-vazio de $\varOmega$;
- $\mathcal{H} \in (L^2(Q))^N$ e $h \in L^2(Q)$;
- $F = F(s) \in C^2(\mathbb{R})$ satisfaz $F(0) = F(1) = 0$ com $F(s) > 0$ para cada $s \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $F'(\widehat{\alpha}) < 0$ se $\widehat{\alpha} < 0$ e $F'(\widehat{\alpha}) > 0$ se $\widehat{\alpha} > 1$. Um exemplo clássico é $F(\widehat{\alpha}) = \widehat{\alpha}^2(1 - \widehat{\alpha})^2$;
- $G = G(s) \in C^2(\mathbb{R})$ é uma função não crescente tal que $G(\widehat{\alpha}) \equiv 1$ para $\widehat{\alpha} \leqslant 0$, $G(\widehat{\alpha}) \equiv 0$ para $\widehat{\alpha} \geqslant 1$ e $0 < G(\widehat{\alpha}) < 1$ para $0 < \widehat{\alpha} < 1$. Um exemplo clássico é dado por $G(\widehat{\alpha}) = (\widehat{\alpha} - 1)^2(1 + 2\widehat{\alpha})$;
- $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para as condições iniciais assumimos

$$\widehat{v}_0 \in (L^{2N-2}(\varOmega))^N \cap \boldsymbol{H},\ \widehat{\tau}_0 \in L^2(\varOmega) \text{ e } \widehat{\alpha}_0 \in H^1(\varOmega) \cap C^0(\overline{\varOmega}),\ 0 \leqslant \widehat{\alpha}_0 \leqslant 1 \text{ em } \varOmega, \tag{3}$$

em que o espaço $\boldsymbol{H}$, assim como o espaço $\boldsymbol{V}$ no Teorema 0.0.1 abaixo, são dados na Definição 1.1.1 da Secção 1.1.

O teorema seguinte garante a existência de solução para o problema (2) e sua demosntração pode ser encontrada no Teorema 2 na pág. 6266 de Calsavara e Guillen-González [11].

Teorema 0.0.1. *Considerando as hipóteses em (3) para as condições iniciais, existe uma solução fraca $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ em Q do problema (2), isto é,*

$$\begin{gathered}
\widehat{v} \in L^{\infty}(0,T;\boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}),\\
\widehat{\tau} \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\
\widehat{\alpha} \in L^{\infty}(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)),
\end{gathered}$$

satisfazendo

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_{\Omega} \widehat{v}(T)u(T)\,dx - \int_0^T\int_{\Omega} \widehat{v}\,u_t\,dxdt + \int_0^T (\widehat{v}.\nabla\widehat{v}\,,u)\,dt + k_1\int_0^T \nabla\widehat{v}\,.\,\nabla u\,dxdt\\
\displaystyle+\int_0^T(\nabla\widehat{p}\,,u)\,dt - \lambda\varepsilon\int_0^T(\Delta\widehat{\alpha}\nabla\widehat{\alpha}\,,u)\,dt - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^T(F'(\widehat{\alpha})\nabla\widehat{\alpha}\,,u)\,dt\\
\displaystyle=\int_0^T\Big(-(1-C_1\widehat{\tau}+C_2\widehat{\alpha})g\boldsymbol{e}_N + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}\,,u\Big)\,dt,\\
\\
\displaystyle\int_{\Omega}\widehat{\tau}(T)u(T)\,dx + l\int_{\Omega}G(\widehat{\alpha}(T))u(T)\,dx - \int_0^T\langle\widehat{\tau}+lG(\widehat{\alpha})\,,u_t\rangle\,dt\\
\displaystyle-\int_0^T((\widehat{\tau}+lG(\widehat{\alpha}))\,\widehat{v},\nabla u)\,dt + k\int_0^T(\nabla\widehat{\tau}\,,\nabla u)\,dt = \int_0^T(h1_{\mathcal{O}}\,,u)\,dt,\\
\\
\displaystyle\widehat{\alpha}_t + \widehat{v}\cdot\nabla\widehat{\alpha} - \gamma\varepsilon\Delta\widehat{\alpha} - \frac{\gamma}{\varepsilon}F'(\widehat{\alpha}) - \frac{\gamma}{\varepsilon}G'(\widehat{\alpha})\widehat{\tau} = 0 \qquad \textit{q.t.p. em } Q,\\
\displaystyle\widehat{v}=0,\quad \frac{\partial\widehat{\tau}}{\partial\nu} = \frac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial\nu} = 0 \qquad \textit{sobre } \Sigma,
\end{cases}$$

em que $u \in C^{\infty}(\overline{Q})$ *tal que* $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}\times(0,T]$.

De forma a introduzir o problema que queremos estudar, fixemos uma trajetória $(\overline{v},\overline{\tau},\overline{\alpha})$ (junto com a pressão $\overline{p}$), que será uma solução regular do sistema não linear (2) sem funções de controle. Isto é, $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \overline{v}_t + \overline{v} \cdot \nabla \overline{v} - k_1 \Delta \overline{v} + \nabla \overline{p} - \lambda \varepsilon \Delta \overline{\alpha} \nabla \overline{\alpha} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon} F'(\overline{\alpha}) \nabla \overline{\alpha} & \\ = -(1 - C_1 \overline{\tau} + C_2 \overline{\alpha}) g \mathbf{e}_N & \text{em } Q, \\ \\ \overline{\tau}_t + \overline{v} \cdot \nabla \overline{\tau} - k \Delta \overline{\tau} + l(G(\overline{\alpha}))_t + l(\overline{v} \cdot \nabla G(\overline{\alpha})) = 0 & \text{em } Q, \\ \\ \overline{\alpha}_t + \overline{v} \cdot \nabla \overline{\alpha} - \gamma \varepsilon \Delta \overline{\alpha} - \dfrac{\gamma}{\varepsilon} F'(\overline{\alpha}) - \dfrac{\gamma}{\varepsilon} G'(\overline{\alpha}) \overline{\tau} = 0 & \text{em } Q, \\ \\ div\ \overline{v} = 0 & \text{em } Q, \\ \overline{v} = 0, \quad \dfrac{\partial \overline{\tau}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \overline{\alpha}}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \\ \overline{v}(\cdot, 0) = \overline{v}_0, \;\; \overline{\tau}(\cdot, 0) = \overline{\tau}_0, \;\; \overline{\alpha}(\cdot, 0) = \overline{\alpha}_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

em que

$$(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha}) \in (L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega)))^N \times L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega)) \times L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega)), \tag{5}$$

com

$$(\overline{v}_t, \overline{\tau}_t, \overline{\alpha_t}) \in (L^2(0,T; L^r(\Omega)))^N \times L^2(0,T; L^r(\Omega)) \times L^2(0,T; L^r(\Omega)), \tag{6}$$

para $N = 2$ ou $N = 3$, com $r > 1$ para $N = 2$ e $r > 6/5$ para $N = 3$, e

$$(\overline{v}_0, \overline{\tau}_0, \overline{\alpha}_0) \in \big((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}\big) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N,$$

em que

$$\widetilde{E}_N = L^q(\Omega) \;\; \text{com} \;\; \begin{cases} q > 4, \;\; \text{se } N = 2, \\ q > 5, \;\; \text{se } N = 3. \end{cases} \tag{7}$$

Para o sistema não linear (2), vamos introduzir o conceito de controlabilidade local exata à trajetória no tempo $T > 0$.

Definição 0.0.2. *Dizemos que o problema (2) possui controlabilidade local exata à trajetória $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ no tempo $T > 0$, se existe $\delta > 0$ tal que para cada $(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0) \in \big((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}\big) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N$ satisfazendo*

$$\|(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0) - (\overline{v}_0, \overline{\tau}_0, \overline{\alpha}_0)\|_{((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N} \leqslant \delta,$$

tem-se que existem controles $(\mathcal{H}, h) \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, $N = 2$ ou $N = 3$, tais que a solução correspondente $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ do problema (2) satisfaz

$$\widehat{v}(T) = \overline{v}(T), \;\; \widehat{\tau}(T) = \overline{\tau}(T) \;\; e \;\; \widehat{\alpha}(T) = \overline{\alpha}(T) \;\; em \; \Omega. \tag{8}$$

Observemos que o nosso objetivo é encontrar um par de controles e não três controles, sendo um em cada equação. Pois não faz sentido físico função de controle na equação de campo de fase.

Um dos principais resultados deste trabalho diz respeito a controlabilidade local exata à trajetória do sistema (2) e é apresentado no seguinte teorema:

Teorema 0.0.3 (**Controlabilidade Local Exata à Trajetória**). *Suponha que* $(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0) \in \big((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}\big) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N$ *e que as hipóteses* (**H**) *sejam satisfeitas. Então, o problema (2) possui controlabilidade local exata no tempo T à trajetória $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ solução do sistema (4) satisfazendo (5) e (6), isto é, existe $\delta > 0$ tal que se*

$$\|(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0) - (\overline{v}_0, \overline{\tau}_0, \overline{\alpha}_0)\|_{((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}) \times \tilde{E}_N \times \tilde{E}_N} \leqslant \delta,$$

então existem controles $(\mathcal{H}, h) \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))^{N+1}$, $N = 2$ ou $N = 3$, tais que a solução correspondente do problema (2) satisfaz (8). Além disso,

$$||(\mathcal{H}, h)||_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}} \leqslant C,$$

onde C é uma constante positiva que depende de T, λ e s, em que λ e s são constantes suficientemente grandes envolvidas na definição das funções-peso em (2.2).

Vamos agora esboçar a estratégia que seguiremos para provar o Teorema 0.0.3. Consideremos as funções

$$v = \widehat{v} - \overline{v}, \quad p = \widehat{p} - \overline{p}, \;\; \tau = \widehat{\tau} - \overline{\tau} \;\; \text{e} \;\; \alpha = \widehat{\alpha} - \overline{\alpha}.$$

Temos que (v, p, τ, α) é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} v_t - k_1\Delta(\widehat{v} - \overline{v}) + v\cdot\nabla v + v\cdot\nabla\overline{v} + \overline{v}\cdot\nabla v + \nabla p \\ -\lambda\varepsilon\big(\Delta\alpha\nabla(\alpha+\overline{\alpha}) - \Delta\overline{\alpha}\nabla\alpha\big) - \dfrac{\lambda}{\varepsilon}\big(F'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla(\alpha+\overline{\alpha}) - F'(\overline{\alpha})\nabla\overline{\alpha}\big) \\ \qquad\qquad = (C_1\tau + C_2\alpha)g\mathbf{e}_N + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \\ \tau_t - k\Delta\tau + l\big(G'(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha})\big)_t + v\cdot\nabla\tau + v\cdot\nabla\overline{\tau} + \overline{v}\cdot\nabla\tau \\ +l\big(v\cdot\nabla(G(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha}))\big) + l\big(\overline{v}\cdot\nabla(G(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha}))\big) = h1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \\ \alpha_t - \gamma\varepsilon\Delta\alpha + v\cdot\nabla\alpha + v\cdot\nabla\overline{\alpha} + \overline{v}\cdot\nabla\alpha - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}\big(F'(\alpha+\overline{\alpha}) - F'(\overline{\alpha})\big) \\ \qquad - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}\big(G'(\alpha+\overline{\alpha})(\tau+\overline{\tau}) - G'(\overline{\alpha})\overline{\tau}\big) = 0 & \text{em } Q, \\ \\ div\ v = 0 & \text{em } Q, \\ v = 0, \quad \dfrac{\partial\tau}{\partial\nu} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \\ v(\cdot,0) = v_0, \;\; \tau(\cdot,0) = \tau_0, \;\; \alpha(\cdot,0) = \alpha_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Para o problema (9), vamos introduzir o conceito de controlabilidade local nula no tempo $t = T > 0$.

Definição 0.0.4. *Dizemos que o problema (9), possui controlabilidade local nula no tempo $T > 0$, se existe $\delta > 0$ tal que para cada $(v_0, \tau_0, \alpha_0) \in \big((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}\big) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N$ satisfazendo*

$$\|(v_0, \tau_0, \alpha_0)\|_{((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N} \leqslant \delta$$

tem-se que existem controles $(\mathcal{H}, h) \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, $N = 2$ ou $N = 3$, tais que a solução correspondente (v, τ, α) do problema (9) satisfaz

$$v(T) = \boldsymbol{0}, \;\; \tau(T) = 0 \;\; e \;\; \alpha(T) = 0 \;\; em \;\Omega. \tag{10}$$

Note que (v, τ, α) solução de (9) satisfaz (10) se, e somente se, $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ solução de (2) satisfaz (8). Consequentemente o resultado de controlabilidade local exata à trajetória $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ dado no Teorema 0.0.3 é equivalente à controlabilidade local nula para a solução (v, τ, α) do sistema (9). Em outras palavras, para provar o Teorema 0.0.3 basta provar o seguinte resultado:

Teorema 0.0.5 (Controlabilidade Local Nula). *Seja $(v_0, \tau_0, \alpha_0) \in \big((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}\big) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N$ e suponha que as hipóteses* **(H)** *sejam satisfeitas. Então, o problema (9) possui controlabilidade local nula no tempo $T > 0$, isto é, existe $\delta > 0$ tal que se*

$$\|(v_0, \tau_0, \alpha_0)\|_{((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N} \leqslant \delta,$$

então existem controles $(\mathcal{H}, h) \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ tais que a solução correspondente do problema (2) satisfaz (10). Além disso,

$$||(\mathcal{H}, h)||_{(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} \leqslant C,$$

onde C é uma constante positiva que depende de T, λ e s, em que λ e s são constantes suficientemente grandes envolvidas na definição das funções-peso em (2.2).

Usaremos a controlabilidade nula de um sistema linearizado adequado e, em seguida, o Teorema de Lyusternik, que é um teorema de função inversa, ver [21], para demonstrar o Teorema 0.0.5.

A linearização do sistema (9) é feita derivando cada equação do sistema em relação a v, τ e α, respectivamente, e avaliando no ponto $(\mathbf{0}, 0, 0)$. Também podemos encontrar este tipo de linearização em [3], [15] e [18]. Assim consideramos o seguinte sistema linearizado:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& v_t - k_1\Delta v + v\cdot\nabla\overline{v} + \overline{v}\cdot\nabla v + \nabla p - \lambda\varepsilon\Delta\alpha\nabla\overline{\alpha} \\
& +\Big(\lambda\varepsilon\Delta\overline{\alpha} + \frac{\lambda}{\varepsilon}F'(\overline{\alpha})\Big)\nabla\alpha - \frac{\lambda}{\varepsilon}F''(\overline{\alpha})(\nabla\overline{\alpha})\alpha - C_1\tau g\mathbf{e}_N + C_2\alpha g\mathbf{e}_N \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \vartheta + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}} \qquad\qquad \text{em } Q, \\
& \tau_t - k\Delta\tau + lG'(\overline{\alpha})\alpha_t + (lG''(\overline{\alpha})\overline{\alpha}_t + lG''(\overline{\alpha})(\overline{v}\cdot\nabla\overline{\alpha}) + lG'(\overline{\alpha})(\overline{v}\cdot\nabla\overline{\alpha}))\alpha \\
& \qquad\qquad\qquad + v\cdot\nabla\overline{\tau} + \overline{v}\cdot\nabla\tau = \vartheta_1 + h1_{\mathcal{O}} \qquad \text{em } Q, \\
& \alpha_t - \gamma\varepsilon\Delta\alpha + v\cdot\nabla\overline{\alpha} + \overline{v}\cdot\nabla\alpha - \frac{\gamma}{\varepsilon}(F''(\overline{\alpha}) + G''(\overline{\alpha})\overline{\tau})\alpha - \frac{\gamma}{\varepsilon}G'(\overline{\alpha})\tau \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \vartheta_2 \qquad\qquad \text{em } Q, \\
& div\ v = 0 \qquad\qquad \text{em } Q, \\
& v = 0, \quad \frac{\partial\tau}{\partial\nu} = \frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0 \qquad\qquad \text{sobre } \Sigma, \\
& v(\cdot,0) = v_0, \ \ \tau(\cdot,0) = \tau_0, \ \ \alpha(\cdot,0) = \alpha_0 \qquad\qquad \text{em } \mathit{\Omega},
\end{aligned}
\right.
\tag{11}
$$

em que ϑ, ϑ_1 e ϑ_2 são funções apropriadas com decaimento exponencial quando $t \to T^-$, a serem determinadas adequadamente.

Em seguida, o objetivo é provar a controlabilidade nula (não local) para o sistema linearizado (11) e isso será feito na Proposição 3.1.2 do Capítulo 3, ou seja, encontraremos um par de controles $(\mathcal{H}, h)$ tais que (10) é satisfeito para cada condição inicial dada no Teorema 0.0.5.

A desigualdade de Carleman é uma ferramenta usada para provar a desigualdade de observabilidade, e a desigualdade de observabilidade nos fornece a controlabilidade nula do sistema linearizado (11).

A partir de agora descreveremos cada capítulo do trabalho, passando pelos conhecimentos básicos importantes, abordagem do problema de controle trabalhado e, para finalizar, uma relação entre controlabilidade e controle ótimo.

Capítulo 1
Conceitos preliminares

Este capítulo tem por objetivo descrever as notações usadas no decorrer do trabalho, bem como os principais conceitos relacionados a espaços de Sobolev, resultados auxiliares, imersões em espaços de Sobolev, desigualdades e convergências.

Capítulo 2
Desigualdade de Carleman e desigualdade de observabilidade

A estratégia seguida ao longo dos capítulos 2 e 3 para o problema (2) possuir controlabilidade local exata à trajetória pode ser encontrada nos trabalhos [3], [15], [16] e [18], entre outros.

A desigualdade de Carleman para as soluções do sistema adjunto (12) é um instrumento usado para provar a desigualdade de observabilidade, que nos fornece a controlabilidade nula do sistema linear (11).

Segue abaixo o sistema adjunto:

$$\begin{cases} -\mathbf{z}_t - k_1\Delta\mathbf{z} + D\mathbf{z}\overline{v} + \nabla\overline{\mathbf{z}}\varphi + \nabla q = \widetilde{\vartheta} - \varphi\nabla\overline{\tau} - \psi\nabla\overline{\alpha} & \text{em } Q, \\ \\ -\varphi_t - k\Delta\varphi - (\overline{v}\cdot\nabla\varphi) = \widetilde{\vartheta}_1 - C_1(g_N\cdot\mathbf{z}) + \overline{B}_2\psi & \text{em } Q, \\ \\ -\psi_t - \gamma\varepsilon\Delta\psi - (\overline{v}\cdot\nabla\psi) - \overline{B}_1\psi = \widetilde{\vartheta}_2 + \gamma\varepsilon(\nabla\overline{\alpha}\cdot\Delta\mathbf{z}) + \overline{C}_2\,\mathrm{div}(\mathbf{z}) & \\ \qquad\qquad - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot\mathbf{z}) + \overline{A}_2\varphi_t - C_2(g_N\cdot\mathbf{z}) - \overline{A}_1\varphi & \text{em } Q, \\ \\ div\ \mathbf{z} = 0 & \text{em } Q, \\ \mathbf{z} = 0, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \\ \mathbf{z}(\cdot,T) = z_0, \;\; \varphi(\cdot,T) = \varphi_0, \;\; \psi(\cdot,T) = \psi_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{12}$$

onde $D\mathbf{z} = \nabla\mathbf{z} + (\nabla\mathbf{z})^T$ denota o gradiente simetrizado, $(\widetilde{\vartheta},\widetilde{\vartheta}_1,\widetilde{\vartheta}_2) \in (L^2(Q))^N \times [L^2(Q)]^2$ e ainda

$$\begin{aligned} \overline{A}_1 &= G''(\overline{\alpha})\overline{\alpha}_t + lG''(\overline{\alpha})(\overline{v}\cdot\nabla\overline{\alpha}) + lG'(\overline{\alpha})(\overline{v}\cdot\nabla\overline{\alpha}); \\ \overline{A}_2 &= G'(\overline{\alpha}); \\ \overline{B}_1 &= \frac{\gamma}{\varepsilon}F''(\overline{\alpha}) + \frac{\gamma}{\varepsilon}G''(\overline{\alpha})\overline{\tau}; \\ \overline{B}_2 &= \frac{\gamma}{\varepsilon}G'(\overline{\alpha}); \\ \overline{C}_1 &= \gamma\varepsilon\nabla\overline{\alpha}; \\ \overline{C}_2 &= \lambda\varepsilon\Delta\overline{\alpha} + \frac{\lambda}{\varepsilon}F'(\overline{\alpha}); \\ \overline{C}_3 &= \frac{\lambda}{\varepsilon}F''(\overline{\alpha}); \\ g_N &= g\mathbf{e}_N. \end{aligned}$$

Neste ponto do trabalho utilizamos uma desigualdade de Carleman. No nosso caso, a desigualdade de Carleman obtida é a do resultado que segue:

Proposição 0.0.6. *(Desigualdade de Carleman) Sejam $(\overline{v},\overline{\tau},\overline{\alpha})$ solução de (4) satisfazendo (5) e (6), e $(\widetilde{\vartheta},\widetilde{\vartheta}_1,\widetilde{\vartheta}_2) \in (L^2(Q))^N \times [L^2(Q)]^2$. Então, existe uma constante positiva C dependendo de Ω, $\mathcal{O}$ e T tal que, para qualquer $(\boldsymbol{z}_0,\varphi_0,\psi_0) \in \left(\boldsymbol{H} \cap (L^4(\Omega))^N\right) \times [L^2(\Omega)]^2$,* *a solução $(\boldsymbol{z}, \varphi, \psi)$ do sistema adjunto (12) satisfaz*

$$K(\boldsymbol{z}, \varphi, \psi) \leqslant C\Big(s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt$$
$$+s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2 dxdt + s^4\lambda^4\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|z|^2 dxdt\Big),$$

para s e λ suficientemente grandes. As funções-peso α e ξ são definidas em (2.2) e

$$K(\boldsymbol{z}, \varphi, \psi) = R_0(s, \lambda; \boldsymbol{z}) + I_2(s, \lambda; \varphi) + I_1(s, \lambda; \psi) \tag{13}$$

onde

$$\begin{aligned} R_0(s,\lambda;y) \quad = \quad & s^{-1}\int_Q e^{2s\widehat{\alpha}}\widehat{\xi}^{-1}|\partial_t y|^2 dxdt + s^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\Delta y|^2 dxdt \\ & + \int_Q e^{2s\alpha}|\nabla(\nabla\times y)|^2 dxdt + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\nabla y|^2 dxdt \\ & + s^2\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi^2|\nabla\times y|^2 dxdt + s^3\lambda^4\int_Q e^{2s\alpha}\xi^3|y|^2 dxdt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_m(s,\lambda;g) \quad := \quad & s^{m-4}\lambda^{m-3}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{m-4}(|g_t|^2 + |\Delta g|^2)dxdt \\ + \quad & s^{m-2}\lambda^{m-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla g|^2 dxdt + s^m\lambda^{m+1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^m|g|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Este capítulo trata, ainda, de outra importante desigualdade, a desigualdade de observabilidade. Usaremos a desigualdade de Carleman para prová-la. A desigualdade de observabilidade é aplicada no Capítulo 3 na demonstração da controlabilidade nula global, do problema linearizado (11). Abaixo a desigualdade de observabilidade:

Proposição 0.0.7. *(Desigualdade de Observabilidade) Sejam $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ solução de (4) satisfazendo (5) e (6), e $(\widetilde{\vartheta}, \widetilde{\vartheta}_1, \widetilde{\vartheta}_2) \in (L^2(Q))^N \times [L^2(Q)]^2$. Então, existe uma constante positiva C dependendo de Ω, $\mathcal{O}$, T, s e λ tal que toda solução $(\boldsymbol{z}, \varphi, \psi)$ do sistema adjunto (12) satisfaz*

$$\begin{aligned} & \int_Q e^{2s\beta}\gamma|\nabla\boldsymbol{z}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^3|\boldsymbol{z}|^2 dxdt + \|\boldsymbol{z}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_Q e^{2s\beta}|\nabla\varphi|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi|^2 dxdt + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2 dxdt + \|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & \leqslant C(T,s,\lambda)\Big(\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt \\ & + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5|\varphi|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3|\boldsymbol{z}|^2 dxdt\Big), \end{aligned} \tag{14}$$

para s e λ suficientemente grandes. As funções-peso β e γ são definidas em (2.23).

Capítulo 3
Controlabilidade nula de um modelo de solidificação

O principal objetivo deste capítulo é aplicar o Teorema de Lyusternik para obter a controlabilidade nula local do problema não linear (9) e, consequentemente, a controlabilidade local exata à trajetória do sistema (2), dado pelo Teorema 0.0.3. Para as hipóteses do Teorema de função inversa de Lyusternik estarem plenamente satisfeitas, provaremos um resultado de controlabilidade nula global do problema linearizado (11).

Capítulo 4
Controle Ótimo x Controlabilidade

Neste capítulo obtemos um resultado de controle ótimo e, em seguida, uma relação entre funções de controle do resultado de controlabilidade e as funções de controle do resultado de controle ótimo. Primeiramente, consideremos o funcional de custo

$$\begin{aligned} J_\rho[\widehat{v},\widehat{\tau},\widehat{\alpha};\mathcal{H},h] &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|\widehat{v}(x,T)-\overline{v}(x,T)|^2+|\widehat{\tau}(x,T)-\overline{\tau}(x,T)|^2 \\ &+ |\widehat{\alpha}(x,T)-\overline{\alpha}(x,T)|^2\Big)dx+\frac{\rho}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}\Big(|\mathcal{H}|^2+|h|^2\Big)dxdt, \end{aligned} \tag{15}$$

onde $(\widehat{v},\widehat{\tau},\widehat{\alpha})$ é solução do problema (2) associada ao par de controle $(\mathcal{H},h)$.

Um resultado de controle ótimo é estabelecido no seguinte resultado:

Teorema 0.0.8. *Sejam $(\widehat{v},\widehat{\tau},\widehat{\alpha})$ solução do sistema (2) associada ao par de controles $(\mathcal{H},h)$ e $(\overline{v},\overline{\tau},\overline{\alpha})$ solução de (4). Suponha que as hipóteses* $(\mathbf{H})$ *sejam satisfeitas com $G(s)\in C^2(\mathbb{R})$ uma função decrescente. Então, para cada $\rho>0$, existe pelo menos um par de controles ótimos $(\mathcal{H}_\rho,h_\rho)\in(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^N\times L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ minimizando o funcional de custo J_ρ, isto é, a correspondente solução $(\widehat{v}_\rho,\widehat{\tau}_\rho,\widehat{\alpha}_\rho)$ de (2) satisfaz*

$$J_\rho[\widehat{v}_\rho,\widehat{\tau}_\rho,\widehat{\alpha}_\rho;\mathcal{H}_\rho,h_\rho]=\inf_{(\mathcal{H},h)\in(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^N\times L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}J_\rho[\widehat{v},\widehat{\tau},\widehat{\alpha};\mathcal{H},h]. \tag{16}$$

Uma caracterização de um par de controles ótimos $(\mathcal{H},h)$ é abordada no Teorema 4.0.2.

Para finalizar, no último resultado do capítulo, estabelecemos que existe uma sequência de soluções do problema de controle ótimo a qual minimiza os funcionais em (16) que converge para uma solução do problema de controlabilidade obtido no Teorema 0.0.3.

Teorema 0.0.9. *Sejam $T>0$, $(\widehat{v}_0,\widehat{\tau}_0,\widehat{\alpha}_0)\in\Big((L^{2N-2}(\Omega))^N\cap\boldsymbol{H}\Big)\times\widetilde{E}_N\times\widetilde{E}_N$ e $(\overline{v},\overline{\tau},\overline{\alpha})$ solução de (4). Suponha que as hipóteses* $(\mathbf{H})$ *sejam satisfeitas com $G(s)\in C^2(\mathbb{R})$ uma função decrescente. Para cada $\rho>0$ consideremos $(\widehat{v}_\rho,\widehat{\tau}_\rho,\widehat{\alpha}_\rho)$ uma solução do problema de* *controle ótimo (4.2) associada à condição inicial* $(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0)$. *Então, existe uma subsequência de* $(\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho)$*, que continuaremos denotando por* $(\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho)$*, funções*

$$\begin{aligned} v^* &\in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T;\,\boldsymbol{V}),\\ \tau^* &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\ \alpha^* &\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \end{aligned}$$

tais que as seguintes convergências se verificam quando $\rho \to 0$

$$\begin{aligned} \widehat{v}_\rho &\rightharpoonup v^* && \textit{fracamente em } L^2(0,T;\,\boldsymbol{V}),\\ \widehat{v}_\rho &\overset{*}{\rightharpoonup} v^* && \textit{fraco} * \textit{em } L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}),\\ \widehat{\tau}_\rho &\rightharpoonup \tau^* && \textit{fracamente em } L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\ \widehat{\tau}_\rho &\overset{*}{\rightharpoonup} \tau^* && \textit{fraco} * \textit{em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\ \widehat{\alpha}_\rho &\rightharpoonup \alpha^* && \textit{fracamente em } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\ \widehat{\alpha}_\rho &\overset{*}{\rightharpoonup} \alpha^* && \textit{fraco} * \textit{em } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\\ (\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho) &\longrightarrow (v^*, \tau^*, \alpha^*) && \textit{fortemente em } [L^5(Q)]^{N+2}. \end{aligned}$$

Além disso, (v^*, τ^*, α^*) *é solução do problema de controlabilidade exata obtida no Teorema 0.0.3.*

Os resultados do Capítulo 4 foram baseados nos trabalhos de Araruna *et al* [4] e de Hoffman e Jiang [19].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos enunciar alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Notações e Espaços de Funções

Nesta seção vamos descrever as notações e definições de espaços de funções que serão usados ao longo do trabalho. Para mais detalhes consultar Brezis [9] e Medeiros e Miranda [27]. Usaremos as seguintes notações:

- $\mathbb{R}^N$ representa o espaço euclidiano N-dimensional, com $N = 2$ ou $N = 3$;
- Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com medida de Lebesgue $|\Omega|$ e fronteira $\partial\Omega$;
- Q representará o cilindro parabólico $\Omega \times (0, T)$;
- $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ representará a superfície lateral do cilindro parabólico Q;
- $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{N}$ denotará o operador gradiente;
- $div = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}$ denotará o operador divergente;
- $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representará o operador Laplaciano;
- $|x| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ denota a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^N$;

Definiremos a seguir os espaços de funções necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.1.1. *Definamos os espaços* $\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{w} \in (L^2(\Omega))^N; div\, \boldsymbol{w} = 0,\ \boldsymbol{w}.\nu|_{\partial\Omega} = 0\}$ *e* $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{w} \in (H^1(\Omega))^N; div\, \boldsymbol{w} = 0,\ \boldsymbol{w}|_{\partial\Omega} = 0\}$*,* $N = 2$ *ou* $N = 3$*, onde* $\nu(x)$ *denota o vetor normal unitário exterior a* Ω *no ponto* $x \in \partial\Omega$*. Esses são espaços de funções clássicos para Navier-Stokes.*

Definição 1.1.2. *Seja* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *contínua. O suporte de* u*, denotado por* $\operatorname{supp}(u)$*, é definido como o fecho em* Ω *do conjunto* $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$*. Se este conjunto for um compacto do* $\mathbb{R}^n$*, então dizemos que* u *possui suporte compacto. Denotamos por* $C_0(\Omega)$ *ao espaço das funções contínuas em* Ω *com suporte compacto.*

Definição 1.1.3. $C^m(\Omega)$*,* $m \in \mathbb{Z}_+$*, é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a* m *contínuas em* Ω *e* $C^\infty(\Omega) = \cap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\Omega)$*. Denotaremos por* $C^0(\Omega) = C(\Omega)$*.*

Definição 1.1.4. *O conjunto das funções* $C^m(\Omega)$*,* $m \in \mathbb{Z}_+$*, e que têm suporte compacto, é denotado por* $C_0^m(\Omega)$*. O conjunto das funções* $C^\infty(\Omega)$ *e que têm suporte compacto, é denotado por* $C_0^\infty(\Omega)$*.*

Definição 1.1.5. *Chamamos de sequência regularizante a toda sequência* $(\eta_n)_{n\geqslant 1}$ *de funções tal que*

$$\eta_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \operatorname{supp}\ \eta_n \subset B\Big(0, \frac{1}{n}\Big),\ \int_{\mathbb{R}^N} \eta_n dx = 1\ e\ \eta_n \geqslant 0\ em\ \mathbb{R}^N.$$

Definição 1.1.6. *Definimos* $C^{1,2}(\overline{Q})$ *e* $C^{0,1}(\overline{Q})$ *como sendo os seguintes espaços:*

$$C^{1,2}(\overline{Q}) = \left\{ y \in C(\overline{Q}) : \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\overline{Q}), i, j = 1, ..., N \right\}$$

e

$$C^{0,1}(\overline{Q}) = \left\{ y \in C(\overline{Q}) : \frac{\partial y}{\partial x_i} \in C(\overline{Q}), i = 1, ..., N \right\}.$$

Definição 1.1.7. *Seja* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*. Denotamos por* $L^p(\Omega)$ *o espaço das (classes de) funções mensuráveis definidas em* Ω *com valores em* $\mathbb{R}$*, tais que* $|u|^p$ *é integrável no sentido de Lebesgue em* Ω*.* $L^\infty(\Omega)$ *denota o espaço das (classes de) funções mensuráveis de* u *definidas sobre* Ω*, que são essecialmente limitadas.*

Definição 1.1.8. *Seja* $1 \leqslant p < +\infty$*. Denotamos por* $L^p(e^{-2s\beta}\gamma^{-1}, Q)$ *e* $L^p(e^{-2s\beta}\gamma^2, Q)$ *os espaços das (classes de) funções mensuráveis definidas em* Q *com valores em* $\mathbb{R}$*, tais que* $e^{-2s\beta}\gamma^{-1}|u|^p$ *e* $e^{-2s\beta}\gamma^2|u|^p$*, respectivamente, são integráveis no sentido de Lebesgue em* Q*. As funções* β *e* γ *são definidas na Seção 2.2.*

Definição 1.1.9. $W^{k,p}(\Omega)$*,* $k \in \mathbb{N}$*,* $p \geqslant 1$*, é o espaço das funções* $u \in L^p(\Omega)$ *com derivadas fracas de ordem menor ou igual a* k *que pertencem a* $L^p(\Omega)$*. Em particular, denotamos* $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Definição 1.1.10. *Dado $1 \leqslant p < +\infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Em particular, denotamos $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Definição 1.1.11. *O espaço dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p < +\infty$, é denotado por $W^{-1,p'}(\Omega)$, onde $1/p + 1/p' = 1$. Em particular, o dual de $H_0^1(\Omega)$ é denotado por $H^{-1}(\Omega)$.*

Definição 1.1.12. *Denotamos por $W_p^{2,1}(Q)$, $p \geqslant 1$, o espaço das funções $u \in L^p(Q)$, $D^\alpha u \in L^p(Q)$, com $|\alpha| \leqslant 2$ e $u_t \in L^p(Q)$.*

Definição 1.1.13. *Dado B um espaço de Banach, se $T > 0$ é um número real e $1 \leqslant p \leqslant \infty$, representamos por $L^p(0,T;B)$ o espaço das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow B$ tais que u é mensurável e $||u(t)||_B \in L^p(0,T)$.*

Definição 1.1.14. *Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito relativamente compacto quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto, ou equivalentemente, se toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente em M.*

Definição 1.1.15 (Funções teste)**.** *Definimos o espaço das funções teste em Ω como sendo o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a topologia usual. Denotamos esse espaço por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

1.2 Resultados Auxiliares e Imersões

A seguir estão alguns resultados, dentre eles os de imersões, que serão usados nos demais capítulos. De modo geral, não apresentaremos as demonstrações, mas serão indicadas as respectivas referências bibliográficas.

Teorema 1.2.1. *A norma usual para o espaço $L^p(\Omega)$ é dada por*

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para} \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

e

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \quad \textit{para} \quad p = +\infty.$$

Demonstração. Teorema 4.7, pág. 93, Brezis [9]. □

Teorema 1.2.2. *As normas usuais para os espaços $L^2(e^{-2s\beta}\gamma^{-1}, Q)$ e $L^2(e^{-2s\beta}\gamma^2, Q)$ são dadas, respectivamente, por*

$$||u||_{L^2(e^{-2s\beta}\gamma^{-1},Q)} = \left(\int_Q e^{-2s\beta}\gamma^{-1}|u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$||u||_{L^2(e^{-2s\beta}\gamma^{2},Q)} = \left(\int_Q e^{-2s\beta}\gamma^{2}|u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leqslant p < +\infty$.

Teorema 1.2.3. *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma usual para todo $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*

Demonstração. Teorema 4.8, pág. 93, Brezis [9]. □

Teorema 1.2.4. *$W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach com a norma usual para todo $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. A norma usual é definida por*

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)},$$

onde D^α denota o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$.

Demonstração. Pág. 216, Brezis [9]. □

O resultado que segue pode ser encontrado na pág. 05 em Ladyzenskaja [24].

Teorema 1.2.5. *$W_p^{2,1}(Q)$, $p \geqslant 1$, é espaço de Banach com a norma usual. A norma usual é definida por*

$$||u||_{W_p^{2,1}(Q)} = ||u_t||_{L^p(Q)} + \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2} ||D^\alpha u||_{L^p(Q)}.$$

O resultado abaixo pode ser encontrado na pág. 04 em Ladyzenskaja [24].

Teorema 1.2.6. *$L^p(0, T; L^q(\Omega))$, $p, q \geqslant 1$, é espaço de Banach com a norma usual. A norma usual é definida por*

$$||u||_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad se \ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$||u||_{L^\infty(0,T;B)} = ess \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} ||u(t)||_B \ \ se \ \ p = \infty.$$

O teorema a seguir, devido a Lions-Peetre, pode ser encontrado em Lions [26].

Teorema 1.2.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira C^∞, $0 < T < \infty$, $Q = \Omega \times (0, T)$ e $1 \leqslant q < \infty$. Então:*

(i) se $\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2} < 0$, $\quad W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^\infty(Q)$, com imersão contínua e compacta;

(ii) se $\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2} = 0$, $\quad W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$, $\forall p \in [1, \infty)$, com imersão contínua e compacta;

(iii) se $\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2} > 0$, $\quad W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$, $p \in [1, r]$ para $r = \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{N+2} \right)^{-1}$, com imersão contínua e para $p \in [1, r)$ com imersão contínua e compacta.

Proposição 1.2.8 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, com Ω de classe C^1, e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então, as seguintes imersões são compactas:*

(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para* $1 \leqslant q < p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, *se* $p < N$,

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para* $1 \leqslant q < \infty$, *se* $p = N$,

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, *se* $p > N$.

Demonstração. Teorema 2.5.4, pág. 79, Medeiros e Miranda [27]. □

Proposição 1.2.9 (Imersões de Sobolev)**.** *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, com $\partial\Omega$ de classe C^m, e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para* $1 \leqslant q \leqslant p^* = \dfrac{Np}{N-mp}$, *se* $mp < N$,

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para* $1 \leqslant q < \infty$, *se* $mp = N$,

(iii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, *para* $k < m - \dfrac{N}{p} \leqslant k+1$, *se* $mp > N$, *onde k é um inteiro não negativo.*

Demonstração. Lema 5.14, pág. 106, Adams [1]. □

Lema 1.2.10. *Sejam Ω um domínio aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $r \geqslant 1$ e $1 \leqslant p < \infty$. Se j e m são inteiros tais que $0 \leqslant j < m$ e*

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} + \frac{j}{N} - \frac{m}{N},$$

então a seguinte imersão é compacta

$$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega).$$

Demonstração. Teorema 6.2, pág. 144, Adams [1]. □

Proposição 1.2.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto limitado e $Q = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, então a seguinte imersão compacta se verifica*

$$W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$$

com $2 \leqslant p < 10$ para $N = 3$ e com qualquer p finito para $N = 2$.

Demonstração. Pág. 13, Lions [26]. □

Lema 1.2.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Então, existe uma constante $M > 0$ tal que, para todas as funções $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$, temos*

$$||u||_{L^r(0,T;L^s(\Omega))} \leqslant M||u||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \quad \text{com} \quad \frac{1}{r} + \frac{N}{2s} = \frac{N}{4},$$

onde $r \in [2,\infty]$, $s \in [2, 2N/(N-2)]$ quando $N \geqslant 3$ e $r \in (2,\infty]$, $s \in [2,\infty)$ quando $N = 2$.

Demonstração. Pág. 74, Ladyzenskaja [25]. □

Teorema 1.2.13 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$. Então, para todo $1 \leqslant p < \infty$, existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p) tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leqslant C||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Proposição 8.13, pág. 218, Brezis [9]. □

Observação 1.2.14. *Como consequência da desigualdade acima, a expressão $||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$. Mais ainda, em $H_0^1(\Omega)$ a expressão*

$$(\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx$$

define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$ que induz a norma $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ equivalente a norma de $||u||_{H^1(\Omega)}$.

Teorema 1.2.15. *Seja Ω um domínio aberto e limitado, então $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, onde $2N/(N+2) \leqslant p < \infty$ com imersões contínuas e densas. Em particular temos $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Além disso, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))'$ com imersões contínuas e densas.*

Demonstração. Observação 3, pág. 136 e pág. 291, Brezis [9]. □

O resultado seguinte é um exemplo de uma classe de resultados de imersão conhecidos como imersões do tipo Aubin-Lions. Essa versão foi apresentada por Simon em [29], Corolário 4, pág. 85.

Lema 1.2.16. *Sejam X, B e Y espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$, com imersão compacta $X \hookrightarrow\hookrightarrow B$.*
(i) Seja F um conjunto limitado em $L^p(0,T;X)$, onde $1 \leqslant p < \infty$, e $\partial F/\partial t = \{\partial f/\partial t : f \in F\}$ um conjunto limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então, F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$;
(ii) Seja F um conjunto limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\partial F/\partial t$ um conjunto limitado em $L^r(0,T;Y)$, para algum $r > 1$. Então, F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Os seguintes resultados são teoremas clássicos da teoria de regularidade L^p para as equações diferenciais parabólicas lineares.

Considere o seguinte o problema parabólico linear:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u = f(x,t) & \text{em} \quad Q \\ u(x,t) = 0 & \text{em} \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

O lema abaixo é um caso particular do Teorema 9.1, pág. 341, Ladyzenskaja [24].

Lema 1.2.17. *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e $Q = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$. Suponha que $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $b_i \in L^q(0,T;L^r(\Omega))$, com $\dfrac{1}{r} + \dfrac{N}{2q} = \dfrac{1}{2}$ e $r < \infty$, $a \in L^q(0,T;L^r(\Omega))$, com $r < \infty$ e*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} + \dfrac{N}{2q} = 1, & q > 2 \quad \textit{para} \quad N = 3, \\ r > 4, & q = 2 \quad \textit{para} \quad N = 3, \\ r > 2, & q = 2 \quad \textit{para} \quad N = 2. \end{cases}$$

Então, existe uma única solução $u \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema (1.1) satisfazendo a seguinte estimativa:

$$||u||_{W_2^{2,1}(Q)} \leqslant C\Big(||f||_{L^2(Q)} + ||u_0||_{W_0^{1,2}(\Omega)}\Big),$$

onde C é uma constante que depende de $T, q, r, \Omega, ||b||_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}$ e $||a||_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}$.

Lema 1.2.18. *Consideremos, para cada $b \in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)$, o sistema de Stokes*

$$\begin{cases} -w_t - \Delta w + \nabla h = b & \textit{em } Q, \\ \textit{div}\, w = 0 & \textit{em } Q, \\ w = 0 & \textit{sobre } \Sigma, \\ w(T) = 0 & \textit{em } Q. \end{cases} \tag{1.2}$$

Seja $N = 3$ e $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha}) \in (L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)))^{N+2}$. Então, para cada $b \in L^{4/3}(0,T;L^{12/11}(\Omega)^3)$, existe uma única solução (w,h) para o sistema de Stokes (1.2) satisfazendo

$$w \in L^2(0,T;W_0^{1,6/5}(\Omega)^3) \cap C^0([0,T];L^{4/3}(\Omega)^3)$$

que depende continuamente de b nesses espaços.

Demonstração. Lema 2, pág. 1538, Fernandez-Cara, Guerrero e Imanuvulov [15]. □

O resultado abaixo é um lema clássico que é muito usado nos cálculos do Capítulo 2.

Lema 1.2.19 (Lema de Gronwall).

(i) Seja $\eta(.)$ uma função não negativa, absolutamente contínua em $[0,T]$, satisfazendo para todo t q.t.p. a inequação diferencial

$$\eta'(t) \leqslant \varpi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

com $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ não negativas, definidas em $[0,T]$, então

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \varphi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right], \ \ para \ \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

(ii) Em particular, se $\eta' \leqslant \varphi(t)\eta(t)$ em $[0,T]$ e $\eta(0) = 0$, então $\eta \equiv 0$ em $[0,T]$.

Demonstração. Seção k, pág. 624, Evans [14]. □

Teorema 1.2.20. *Sejam $m \geqslant 1$ e $p \in [1, +\infty)$. Se $k = m - (N/p) > 0$, então para todo $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}$$

para todo α com $|\alpha| \leqslant k$.

Demonstração. Corolário 9.13, pág. 283, Brezis [9]. □

O resultado abaixo pode ser encontrado em Guerrero [18], Teorema 2, pág. 56.

Teorema 1.2.21 (Lyusternik)**.** *Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ dois espaços de Banach e seja $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A} \in C^1(\mathcal{E}; \mathcal{G})$. Seja ainda $e_0 \in \mathcal{E}$, $\mathcal{A}(e_0) = h_0$ e $\mathcal{A}'(e_0) : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ sobrejetora. Então, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $h \in \mathcal{G}$ satisfazendo $\|h - h_0\|_{\mathcal{G}} < \delta$, existe pelo menos uma solução da equação*

$$\mathcal{A}(e) = h, \ \ e \in \mathcal{E}.$$

1.3 Desigualdades e Convergências

Nesta seção enunciamos os principais resultados que envolvem desigualdades e convergências que usaremos no decorrer do texto com suas correspondentes referências.

Teorema 1.3.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), f_2 \in L^{p_2}(\Omega), ..., f_n \in L^{p_n}(\Omega), n \in \mathbb{N}$, com $p_1, ..., p_n \geqslant 1$ e $\dfrac{1}{p_1} + ... + \dfrac{1}{p_n} = 1$. Então, $f_1 \cdots f_n \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f_1 \cdots f_n| \leqslant ||f_1||_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots ||f_n||_{L^{p_n}(\Omega)}.$$

Demonstração. Teorema 4.6, Pág. 92, Brezis [9]. □

Proposição 1.3.2. *Seja (x_n) uma sequência no espaço de Banach E. Então,*

$$se \ \ x_n \rightharpoonup x \ \ em \ \ E, \ \ então \ \ (\|x_n\|) \ \ é \ limitada \ e \ \ \|x_n\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Demonstração. Proposição 3.5, Pág. 58, Brezis [9]. □

Proposição 1.3.3 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $a, b \geqslant 0$ *e* $p, q > 1$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Teorema 6.9, pág. 56, Bartle [7]. □

Uma consequência da desigualdade de Young que será muito utilizada neste trabalho é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 1.3.4. *Sejam* $a, b \geqslant 0$ *e* $p, q > 1$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Para todo* $\varepsilon > 0$ *tem-se*

$$ab \leqslant c(\varepsilon) a^p + \varepsilon b^q.$$

Demonstração. Temos

$$ab = (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} ab = \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right) \left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right).$$

Aplicando a Desigualdade de Young dada na Proposição 1.3.3 segue

$$ab \leqslant \frac{1}{p} \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} \right)^p + \frac{1}{q} \left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b \right)^q = \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}} a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Tomando $c(\varepsilon) = \dfrac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}}$ temos

$$ab \leqslant c(\varepsilon) a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

□

Proposição 1.3.5. *Sejam números reais* $a, b \geqslant 0$ *e* $p \geqslant 1$*, então*

$$(a + b)^p \leqslant 2^p (a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo obtemos

$$\begin{aligned} (a + b)^p &\leqslant (2 \max\{a, b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leqslant 2^p (a^p + b^p). \end{aligned}$$

□

O lema a seguir e sua demosntração pode ser encontrada no Lema 5 na pág. 6271 de Calsavara e Guillen-González [11].

Lema 1.3.6. *Considerando as hipóteses em (3) para as condições iniciais, existe uma constante C tal que toda solução fraca $(\widehat{v}_\epsilon, \widehat{\tau}_\epsilon, \widehat{\alpha}_\epsilon)$ em Q do problema (2) satisfaz*

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{v}_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})\cap L^2(0,T;\boldsymbol{V})} \leqslant C;\\
&\|\widehat{\tau}_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C;\\
&\|\widehat{\alpha}_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C.
\end{aligned}$$

Teorema 1.3.7. *Considerando as hipóteses ($\boldsymbol{H}$) para o problema (2) e as hipóteses em (3) para as condições iniciais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ a sequência (v_n, τ_n, α_n) é solução do problema (2), então existe uma solução fraca (v^*, τ^*, α^*) em Q do problema (2) tais que*

$$\begin{aligned}
v^* &\in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}),\\
\tau^* &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\
\alpha^* &\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))
\end{aligned}$$

e

$$-\int_0^T \langle v_n\,,\,\omega_t\rangle\,dt \longrightarrow -\int_0^T \langle v^*\,,\,\omega_t\rangle\,dt \tag{1.3}$$

$$\int_0^T (v_n.\nabla v_n\,,\omega)\,dt \longrightarrow \int_0^T (v^*.\nabla v^*\,,\omega)\,dt, \tag{1.4}$$

$$\int_0^T (\nabla v_n\,,\nabla\omega)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla v^*\,,\nabla\omega)\,dt, \tag{1.5}$$

$$\int_0^T (\Delta\alpha_n\nabla\alpha_n\,,\omega)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\Delta\alpha^*\nabla\alpha^*\,,\omega)\,dt, \tag{1.6}$$

$$F'(\alpha_n) \longrightarrow F'(\alpha^*) \;\; em \;\; L^p(Q),\;\; p<\infty, \tag{1.7}$$

$$\int_0^T (F'(\alpha_n)\nabla\alpha_n\,,\omega)\,dt \longrightarrow \int_0^T (F'(\alpha^*)\nabla\alpha^*\,,\omega)\,dt, \tag{1.8}$$

$$G(\alpha_n) \longrightarrow G(\alpha^*) \;\; em \;\; L^p(Q),\;\; p<\infty, \tag{1.9}$$

$$-\int_0^T \langle \tau_n + lG(\alpha_n), \theta_t\rangle\,dt \longrightarrow -\int_0^T \langle \tau^* + lG(\alpha^*), \theta_t\rangle\,dt, \tag{1.10}$$

$$-\int_0^T \Big((\tau_n + lG(\alpha_n))\,v_n, \nabla\theta\Big)\,dt \longrightarrow -\int_0^T \Big((\tau^* + lG(\alpha^*))\,v^*, \nabla\theta\Big)\,dt, \tag{1.11}$$

$$\int_0^T k\,(\nabla\tau_n\,,\nabla\theta)\,dt \longrightarrow \int_0^T k\,(\nabla\tau^*\,,\nabla\theta)\,dt, \tag{1.12}$$

quando $n \to +\infty$, para todo $\omega \in \mathcal{W} = \{\omega : \omega \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}) \cap L^4(0,T;L^6(\Omega)), \omega_t \in L^2(0,T;\boldsymbol{V'}), \omega(x,T) = 0$ q.t.p. $x \in \Omega$, ω tem suporte compacto em $\Omega \times [0,T)\}$ e $\Theta = \{\theta : \theta \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\ \theta_t \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))'),\ \theta(x,T) = 0$ q.t.p. $x \in \Omega$, θ tem suporte compcato em $\Omega \times [0,T)\}$.

Demonstração. Págs. 6276, 6277 e 6278, Calsavara e Guillen-González [11]. □

Teorema 1.3.8. *Consideremos as hipóteses* (***H***) *para o problema (2) e as hipóteses em (3) para as condições iniciais. Seja* (v_n, τ_n, α_n) *solução do problema (2) para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então existem*

$$
\begin{aligned}
v &\in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}),\\
\tau &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\
\alpha &\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))
\end{aligned}
$$

tais que

$$
\begin{aligned}
&v_n \longrightarrow v \ \ em \ \ L^2(Q),\\
&\tau_n \longrightarrow \tau \ \ em \ \ L^2(Q),\\
&\alpha_n \longrightarrow \alpha \ \ em \ \ L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração. Págs. 6272, 6273 e 6275, Calsavara e Guillen-González [11]. □

Teorema 1.3.9. *Consideremos as hipóteses* (***H***) *para o problema (2) e as hipóteses em (3) para as condições iniciais. Seja* (v_n, τ_n, α_n) *a sequência de soluções do problema (2) para todo* $n \in \mathbb{N}$ *com limite* (v, τ, α) *dado no Teorema 1.3.8, então*

$$F'(\alpha_n) \longrightarrow F'(\alpha) \ \ e \ \ G'(\alpha_n) \longrightarrow G'(\alpha) \ \ em \ \ L^p(Q), \ \ p < \infty, \tag{1.14}$$

$$v_n \rightharpoonup v \ \ fracamente \ \ em \ \ L^4(0,T;L^3(\Omega)), \tag{1.15}$$

$$\nabla\alpha_n \longrightarrow \nabla\alpha \ \ fortemente \ \ em \ \ L^2(Q), \tag{1.16}$$

$$v_n \cdot \nabla\alpha_n \rightharpoonup v \cdot \nabla\alpha \ \ fracamente \ \ em \ \ L^4(0,T;L^{6/5}(\Omega)), \tag{1.17}$$

$$\alpha_{n,t} \rightharpoonup \alpha_t \ \ fracamente \ \ em \ \ L^{4/3}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{1.18}$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração. Pág. 6276, Calsavara e Guillen-González [11]. □

Desigualdade de Carleman para o sistema de Stokes:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, um subconjunto aberto e limitado de classe C^2. Denotamos por $\nu = (n_1, ..., n_N)^t$ o vetor normal interior unitário definido sobre $\partial\Omega$. Para uma função escalar w ou um campo vetorial $y = (y_1, ..., y_N)^t$ definimos $\nabla w = (\partial x_1 w, ..., \partial x_N\, w)^t$, $\nabla y = (\partial_{x_j} y_i)_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ e as derivadas normais $\dfrac{dw}{d\nu} = (\nabla w)\cdot\nu$ e $\dfrac{dy}{d\nu} = (\nabla y)\cdot\nu$ sobre $\partial\Omega$. Recordamos que o divergente de y é definido por $\nabla \cdot y = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j} y_j$ e o rotacional de y e de w são definidos por

$$\nabla \times y = \partial_{x_1} y_2 - \partial_{x_2} y_1 \ \text{ e } \ \nabla \times w = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} w \\ -\partial_{x_1} w \end{pmatrix} \ \text{ se } N = 2,$$

e

$$\nabla \times y = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} y_3 - \partial_{x_3} y_2 \\ \partial_{x_3} y_1 - \partial_{x_1} y_3 \\ \partial_{x_1} y_2 - \partial_{x_2} y_1 \end{pmatrix} \ \text{ se } \ N = 3, \ \text{ respectivamente.}$$

Agora, para

$$y_T \in (L^2(\Omega))^N, \ \nabla \cdot y_T = 0 \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ e } \ y_T \cdot \nu = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \tag{1.19}$$

consideremos o sistema não homogêneo:

$$\begin{cases} -\partial_t y - \Delta y + \nabla p = f & \text{em} \quad Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{sobre} \quad Q, \\ y = 0 & \text{em} \quad \Sigma, \\ y(T) = y_T & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.20}$$

onde f tem a seguinte forma:

$$f = f_0 + f_1 + \sum_{j=1}^{N} \big((\nabla f_{1,j}) z_{1,j} + {}^t(\nabla f_{2,j}) z_{2,j}\big), \ \ N \in \mathbb{N}, \tag{1.21}$$

além disso para $i = 0, 1, 2$ e $j = 1, 2, ..., N$, tem-se

$$\begin{gathered} f_i \in (L^2(Q))^N, \quad \nabla \times f_1 \in (L^2(Q))^{2N-3}, \\ f_{i,j} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^N), \quad z_{i,j} \in L^\infty(0, T; (W^{1,\infty}(\Omega))^N). \end{gathered} \tag{1.22}$$

Agora, vamos introduzir as seguintes notações:

$$\begin{aligned} R_0(s, \lambda; y) \ \ = \ \ & s^{-1} \int_Q e^{2s\widehat{\alpha}} \widehat{\xi}^{-1} |\partial_t y|^2 dxdt + s^{-1} \int_Q e^{2s\alpha} \xi^{-1} |\Delta y|^2 dxdt \\ & + \int_Q e^{2s\alpha} |\nabla(\nabla \times y)|^2 dxdt + s\lambda^2 \int_Q e^{2s\alpha} \xi |\nabla y|^2 dxdt \\ & + s^2\lambda^2 \int_Q e^{2s\alpha} \xi^2 |\nabla \times y|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \int_Q e^{2s\alpha} \xi^3 |y|^2 dxdt, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R_1(s,\lambda;f) &= s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|f_0|^2dxdt \\
&\quad + s^{1/2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi|f_1|^2dxdt + s^{-1}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\nabla\times f_1|^2dxdt \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s^{1/2}\xi|\nabla f_{i,j}|^2 + s\xi|\nabla\times f_{i,j}|^2)dsdt,
\end{aligned}$$

onde α, $\widehat{\alpha}$, ξ e $\widehat{\xi}$ são dados em (2.2).

Procedendo como na demonstração do Teorema 2.4 de Badra [5], porém usando o Teorema 2.2 de Imanuvilov, Puel e Yamamoto [23], 2010, no lugar do Teorema 2.1 de Imanuvilov, Puel e Yamamoto [22], 2009, (ou Lema 2.1 de Badra [5]) obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.10. *Assuma (1.19), (1.21) e (1.22). Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$ existem duas constantes $C_0 > 1$ e $\widehat{s}_0 > 0$ tais que para todo $s \geqslant \widehat{s}_0$ a solução (y,p) para (1.20) satisfaz:*

$$\begin{aligned}
R_0(s,\lambda;y) + s^{-1}\int_Q e^{2s\widehat{\alpha}}\widehat{\xi}^{-1}|\nabla p|^2dxdt &\leqslant C_0R_1(s,\lambda;f) \\
&\quad + C_0^2s^4\lambda^4\int_0^T\int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\xi^3|y|^2dxdt,
\end{aligned}$$

com C_0 independente de λ para λ suficientemente grande.

Desigualdade de Carleman para a equação do calor:

Uma desigualdade de Carleman para a equação do calor pode ser vista em Fursikov e Imanuvilov [16]. Consideremos agora o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases}
-\dfrac{\partial g}{\partial t} - \Delta g - (v\cdot\nabla g) + cg = f & \text{em} \quad Q, \\
\dfrac{\partial g}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\
g(x,T) = g_0(x). & \text{em} \quad \Omega.
\end{cases} \tag{1.23}$$

Assumiremos que

$$v \in C^{0,1}(\overline{Q})^N \quad \text{e} \quad c \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega)), \tag{1.24}$$

onde $p > 2$ para $N = 1,2$ e $p > N$ para $N \geqslant 3$.

Agora, consideremos a notação encontrada em Araruna, Calsavara e Fernández-Cara [3]:

$$\begin{aligned}
I_m(s,\lambda;g) &:= s^{m-4}\lambda^{m-3}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{m-4}(|g_t|^2 + |\Delta g|^2)dxdt \\
&+ s^{m-2}\lambda^{m-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{m-2}|\nabla g|^2dxdt + s^m\lambda^{m+1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^m|g|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Teorema 1.3.11. *Consideremos $g_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$, e α, ξ funções dadas em (2.2). Então existem $s > 0$ e $\lambda > 0$ tais que para cada solução g de (1.23) a seguinte estimativa se verifica:*

$$I_m(s, \lambda; g) \leqslant C \left(s^{m-3} \lambda^{m-3} \int_Q e^{2s\alpha} \xi^{m-3} |f|^2 dxdt + s^m \lambda^{m+1} \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} e^{2s\alpha} \xi^m |g|^2 dxdt \right),$$

onde C depende de $||v||_{C^{0,1}(\overline{Q})^N}$ e $||c||_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))}$.

Demonstração. Lema 1.3, pág. 892, Imanuvilov [20]. □

Capítulo 2

Desigualdade de Carleman e Desigualdade de Observabilidade

Neste capítulo nos dedicamos a provar duas das desigualdades mais importantes deste trabalho: A Desigualdade de Carleman e a Desigualdade de Observabilidade para as soluções do sistema adjunto (12). A Desigualdade de observabilidade é usada para provar a controlabilidade nula do sistema linear (11), e para provar a Desigualdade de Observabilidade é utilizada uma Desigualdade de Carleman adequada.

2.1 Desigualdade de Carleman para o Sistema Adjunto

Nesta seção provaremos a Desigualdade de Carleman para as soluções do sistema adjunto (12). Primeiramente, definiremos algumas funções-peso que serão utilizadas na sequência.
Seja $\omega \subset \mathcal{O}$ um subconjunto aberto não vazio tal que $\overline{\omega} \subset \mathcal{O}$ e seja $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{array}{rl} \eta(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ \eta(x) > 0 & \forall x \in \Omega, \\ |\nabla\eta(x)| > 0 & \forall x \in \overline{\Omega\backslash\omega}. \end{array} \tag{2.1}$$

A existência de tal função η é provada no Lema 1.1. pág. 04, Fursikov e Imanuvilov [16].

Agora, introduziremos $\ell \in C^\infty(0,T)$ tal que

$$\begin{cases} \ell(t) = t & \forall t \in (0, T/4), \\ \ell(t) \in [T/4, T/2] & \forall t \in (T/4, T/2), \\ \ell(t) = T - t & \forall t \in (T/2, T). \end{cases}$$

Finalmente, para $\lambda > 1$ definimos:

$$\begin{aligned}
\alpha(x,t) &= \frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4}, & \xi(x,t) &= \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4},\\
\widehat{\alpha}(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x,t) &= \frac{1 - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4}, & \widehat{\xi}(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} \xi(x,t) &= \frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4},\\
\alpha^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x,t) &= \frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4}, & \xi^*(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \xi(x,t) &= \frac{e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

De agora em diante, de uma maneira geral, C representa constantes reais positivas distintas.

Lema 2.1.1. *Consideremos $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ conjuntos abertos não-vazios tais que $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$ e a função $\mathcal{X} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$ tal que $\mathcal{X} \equiv 1$ em $\mathcal{O}_1$ e $0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 1$ em $\mathcal{O}_2$. Então,*

$|\alpha_t| \leqslant C(\xi^*)^{1/2}\,\xi,\ |\xi_t| \leqslant C(\xi^*)^{1/2}\,\xi,\ |\nabla(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)| \leqslant Cs\lambda e^{2s\alpha}\xi^2$ *e* $|\Delta(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)| \leqslant Cs^2\lambda^2 e^{2s\alpha}\xi^3$.

Demonstração.

Primeiramente, provaremos que $|\alpha_t| \leqslant C(\xi^*)^{1/2}\,\xi$. Note que

$$\begin{aligned}
|\alpha_t| &= |(e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty})(-4\,\ell(t)^{-5})\,\ell'(t)|\\
&= \left|\frac{-4}{\ell(t)}\,(e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty})(\,\ell(t)^{-4})\,\ell'(t)\right|
\end{aligned} \tag{2.3}$$

e pela definição da função $\ell(t)$, temos $\ell(t) \leqslant C$ e $|\ell'(t)| \leqslant C$ para todo $t \in (0,T)$. Segue de (2.3) que

$$\begin{aligned}
|\alpha_t| &\leqslant C\left|\frac{1}{\ell(t)}\right|\left|\frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4}\right| \leqslant C\left|\frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^2}\right|\left|\frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^3}\right|\\
&\leqslant C\,\frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^2}\,\frac{e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^3}\,\frac{\ell(t)}{\ell(t)} \leqslant C\,\frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^2}\,\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4}\\
&= C\,(\xi^*)^{1/2}\,\xi.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que $|\xi_t| \leqslant C(\xi^*)^{1/2}\,\xi$ procedemos de maneira análoga. Isto é,

$$\begin{aligned}
|\xi_t| &= |(e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)})(-4\,\ell(t)^{-5}\,\ell'(t)| \leqslant \left|\frac{C}{\ell(t)^2}\right|\left|\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^3}\right|\\
&\leqslant C\,\frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^2}\,\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^3}\,\frac{\ell(t)}{\ell(t)} \leqslant C\,\frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^2}\,\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4}\\
&= C\,(\xi^*)^{1/2}\,\xi.
\end{aligned}$$

Provaremos agora que $|\nabla(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)| \leqslant Cs\lambda e^{2s\alpha}\xi^2$. De fato, para $(x_1,...,x_n) \in$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3, temos

$$\begin{aligned}
|\nabla(\mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi)| &\leqslant \left|\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_1}(e^{2s\alpha}\xi) + \mathcal{X}\,\frac{\partial(e^{2s\alpha})}{\partial x_1}\xi + \mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\right| \\
&+ \cdots + \left|\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_N}(e^{2s\alpha}\xi) + \mathcal{X}\,\frac{\partial(e^{2s\alpha})}{\partial x_N}\xi + \mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \xi}{\partial x_N}\right| \\
&= \left|\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_1}(e^{2s\alpha}\xi) + \mathcal{X}\,2s\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\xi + \mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \xi}{\partial x_1}\right| \\
&+ \cdots + \left|\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_N}(e^{2s\alpha}\xi) + \mathcal{X}\,2s\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_N}\xi + \mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \xi}{\partial x_N}\right|.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $\mathcal{X} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$, então $\mathcal{X}$ e $\dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}$ são limitadas para todo $n \in \{1, ..., N\}$. Além disso, como $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ então $\left|\dfrac{\partial \eta(x)}{\partial x_n}\right| \leqslant C$ para todo $x \in \Omega$ e todo $n \in \{1, ..., N\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_n}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4}\right)\right| = \left|\lambda\frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n}e^{\lambda\eta(x)}\frac{1}{\ell(t)^4}\right| \\
&\leqslant C\lambda\left|\frac{e^{\lambda\eta(x)}}{\ell(t)^4}\right| \leqslant C\lambda\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4} = C\lambda\xi
\end{aligned} \tag{2.5}$$

e

$$\left|\frac{\partial \xi(x)}{\partial x_n}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4}\right)\right| = \left|\lambda\frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n}\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4}\right| \leqslant C\lambda\xi. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.4) obtemos

$$|\nabla(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)| \leqslant Cs\lambda e^{2s\alpha}\xi^2,$$

para $\lambda > 1$ e como $\xi(x,t) \geqslant 1$ para todo $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$.

Por fim, vamos mostrar que $|\Delta(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)| \leqslant Cs^2\lambda^2 e^{2s\alpha}\xi^3$. Para $n \in \{1, ..., N\}$, temos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^2(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)}{\partial x_n^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x_n^2}(e^{2s\alpha}\xi) + 2\,\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}\frac{\partial(e^{2s\alpha}\xi)}{\partial x_n} + \mathcal{X}\frac{\partial^2(e^{2s\alpha}\xi)}{\partial x_n^2}\right| \\
&= \left|\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x_n^2}(e^{2s\alpha}\xi) + \mathcal{X}\,\frac{\partial^2(e^{2s\alpha})}{\partial x_n^2}\xi + 2\,\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}\frac{\partial(e^{2s\alpha}\xi)}{\partial x_n} + 2\mathcal{X}\frac{\partial(e^{2s\alpha})}{\partial x_n}\frac{\partial \xi}{\partial x_n} + \mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_n^2}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x_n^2}(e^{2s\alpha}\xi)\right| + \left|\mathcal{X}\,\frac{\partial(e^{2s\alpha})}{\partial x_n}\frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\,\xi\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n^2}\,\xi\right| \\
&+ \left|2\,\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}\frac{\partial(e^{2s\alpha}\xi)}{\partial x_n}\right| + \left|2\mathcal{X}\frac{\partial(e^{2s\alpha})}{\partial x_n}\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_n^2}\right| \\
&= \left|\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x_n^2}(e^{2s\alpha}\xi)\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\,\xi\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n^2}\,\xi\right| \\
&+ \left|2\,\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}\left(\frac{\partial(e^{2s\alpha})}{\partial x_n}\xi + e^{2s\alpha}\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right)\right| + \left|2\mathcal{X}e^{2s\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_n^2}\right| \\
&= \left|\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x_n^2}(e^{2s\alpha}\xi)\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\right)^2\xi\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_n^2}\,\xi\right| \\
&+ \left|4\,\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}s\,e^{2s\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\xi\right| + \left|2\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}\,e^{2s\alpha}\,\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right| + \left|2\mathcal{X}e^{2s\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\frac{\partial \xi}{\partial x_n}\right| + \left|\mathcal{X}\,e^{2s\alpha}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_n^2}\right|.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Como $\mathcal{X} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$, então $\mathcal{X}$, $\dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_n}$ e $\dfrac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial x_n^2}$ são limitadas para todo $n \in \{1, ..., N\}$. Além disso, como $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ então $\left|\dfrac{\partial \eta(x)}{\partial x_n}\right| \leqslant C$ e $\left|\dfrac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x_n^2}\right| \leqslant C$ para todo $x_n \in \Omega$ e todo $n \in \{1, ..., N\}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 \alpha(x)}{\partial x_n^2}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\ell(t)^4}\right)\right]\right| \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\lambda \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n} e^{\lambda\eta(x)} \frac{1}{\ell(t)^4}\right)\right| \\
&= \left|\lambda \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x_n^2} e^{\lambda\eta(x)} \frac{1}{\ell(t)^4} + \lambda \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n} \frac{\partial (e^{\lambda\eta(x)})}{\partial x_n} \frac{1}{\ell(t)^4}\right| \\
&\leqslant \left|\lambda \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x_n^2} \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4} + \lambda^2 \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n} e^{\lambda\eta(x)} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n} \frac{1}{\ell(t)^4}\right| \\
&= \left|\lambda \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x_n^2} \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4} + \lambda^2 \left(\frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n}\right)^2 e^{\lambda\eta(x)} \frac{1}{\ell(t)^4}\right| \\
&\leqslant C\left(\left|\lambda \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4}\right| + \lambda^2 \left|\frac{e^{\lambda\eta(x)}}{\ell(t)^4}\right|\right) = C\left(\lambda \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4} + \lambda^2 \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4}\right) \\
&\leqslant C\lambda^2 \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^4} = C\lambda^2 \xi
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 \xi(x)}{\partial x_n^2}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^2}\right)\right]\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\lambda \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_n} \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^2}\right)\right| \\
&\leqslant C\lambda\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_n^2} \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_n} \frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\ell(t)^2}\right) \\
&\leqslant C\lambda\xi.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Substituindo (2.5), (2.6), (2.8) e (2.9) em (2.7) obtemos

$$
\begin{aligned}
|\Delta(\mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi)| &= \left|\frac{\partial^2(\mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi)}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2(\mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi)}{\partial x_N^2}\right| \\
&\leqslant Cs^2\lambda^2 e^{2s\alpha}\xi^3.
\end{aligned}
$$

□

Agora demonstraremos a desigualdade de Carleman para as soluções do sistema adjunto, isto é, a Proposição 0.0.6.

Demonstração da Proposição 0.0.6:

Aplicando o Teorema 1.3.10 à primeira equação do sistema adjunto (12), temos:

$$
\begin{aligned}
& R_0(s,\lambda;\mathbf{z}) + s^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\widehat{\xi}^{-1}|\nabla q|^2 dxdt \\
& = \; s^{-1}\int_Q e^{2s\widehat{\alpha}}\widehat{\xi}^{-1}|\partial_t \mathbf{z}|^2 dxdt + s^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\Delta \mathbf{z}|^2 dxdt \\
& + \int_Q e^{2s\alpha}|\nabla(\nabla\times\mathbf{z})|^2 dxdt + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\nabla\mathbf{z}|^2 dxdt \\
& + s^2\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi^2|\nabla\times\mathbf{z}|^2 dxdt + s^3\lambda^4\int_Q e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt,) \\
& + s^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\widehat{\xi}^{-1}|\nabla q|^2 dxdt \\
& \leqslant C\Big(\|\overline{v}\|_\infty^2 s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|D\mathbf{z}|^2 dxdt + \|\nabla\overline{\mathbf{z}}\|_\infty^2 s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\varphi|^2 dxdt \\
& + s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \|\nabla\overline{\tau}\|_\infty^2 s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\varphi|^2 dxdt \\
& + \|\nabla\overline{\alpha}\|_\infty^2 s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt + s^4\lambda^4\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\Big) \\
& \leqslant C\Big(s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|D\mathbf{z}|^2 dxdt + s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\varphi|^2 dxdt + s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt \\
& + s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt + s^4\lambda^4\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\Big).
\end{aligned}
$$

Para s e λ grandes suficientemente, o termo

$$
s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|D\mathbf{z}|^2 dxdt
$$

é estimado por $s\lambda\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\nabla\mathbf{z}|^2 dxdt$, que, por sua vez, é absorvido por $s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\nabla\mathbf{z}|^2 dxdt$. O que implica

$$
\begin{aligned}
R_0(s,\lambda;\mathbf{z}) \;\leqslant\; & s^{-1}\int_Q e^{2s\widehat{\alpha}}\widehat{\xi}^{-1}|\partial_t\mathbf{z}|^2 dxdt + s^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\Delta\mathbf{z}|^2 dxdt \\
+ \; & \int_Q e^{2s\alpha}|\nabla(\nabla\times\mathbf{z})|^2 dxdt + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\nabla\mathbf{z}|^2 dxdt \\
+ \; & s^2\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi^2|\nabla\times\mathbf{z}|^2 dxdt + s^3\lambda^4\int_Q e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt \\
+ \; & s^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\widehat{\xi}^{-1}|\nabla q|^2 dxdt \\
\leqslant \; & C\Big(s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\varphi|^2 dxdt \\
+ \; & s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt + s^4\lambda^4\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\Big).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Agora, aplicaremos a Desigualdade de Carleman para a equação do calor dada pelo Teorema 1.3.11 para cada componente φ e ψ do sistema adjunto (12), com $m = 2$ e $m = 1$, respectivamente. Dessa maneira, obtemos o seguinte para s e λ suficientemente grandes:

$$
\begin{aligned}
I_2(s,\lambda,\varphi) &= s^{-2}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi_t|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\Delta\varphi|^2dxdt\\
&+ \lambda\int_Q e^{2s\alpha}|\nabla\varphi|^2dxdt + s^2\lambda^3\int_Q e^{2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2dxdt\\
&\leqslant \|C_1\overrightarrow{g}_N\|^2_\infty s^{-1}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\mathbf{z}|^2dxdt + \|\overline{B}_2\|^2_\infty s^{-1}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\psi|^2dxdt\\
&+ s^{-1}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + s^2\lambda^3\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2dxdt,\\
&\leqslant \widetilde{C}_1\Big(s^{-1}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-1}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\psi|^2dxdt\\
&+ s^{-1}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + s^2\lambda^3\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2dxdt\Big) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_1(s,\lambda;\psi) &= s^{-3}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\psi_t|^2dxdt + s^{-3}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\Delta\psi|^2dxdt\\
&+ s^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\nabla\psi|^2dxdt + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt\\
&\leqslant \widetilde{C}_1\Big(s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\Delta\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla\mathbf{z}|dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi_t|^2dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt\\
&+ s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt\Big), \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}$.

Assim, somando as desigualdades (2.10), (2.11) e (2.12), temos

$$
\begin{aligned}
K(\mathbf{z},\varphi,\psi) &\leqslant C\Big(s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2dxdt + s^{-1}\lambda^{-1}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt + s^4\lambda^4\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2dxdt\\
&+ s^2\lambda^3\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2dxdt + s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt\Big), \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

onde K é dado por (13).

Agora, vamos eliminar a integral local de $|\psi|^2$ da desigualdade (2.13). Para isso, seja $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$ aberto e não-vazio tal que

$$\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$$

e a função $\mathcal{X} \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_2)$ tal que $\mathcal{X} \equiv 1$ em $\mathcal{O}_1$ e $0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 1$ em $\mathcal{O}_2$. Das hipóteses do sistema (2), $\overline{B}_2 \neq 0$ em $[0,T]$, e então

$$\begin{aligned}
& s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt \\
& \leqslant s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt \\
& = s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\Big[\frac{1}{\overline{B}_2}\big(-\varphi_t - k\Delta\varphi - \overline{v}.\nabla\varphi - \widetilde{\vartheta}_1 + C_1(g_N.\mathbf{z})\big)\Big]\psi dxdt \\
& = -\frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\varphi_t\psi dxdt - \frac{1}{\overline{B}_2} k s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\Delta\varphi\psi dxdt \\
& -\frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi(\overline{v}.\nabla\varphi)\psi dxdt - \frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\widetilde{\vartheta}_1\psi dxdt \\
& -\frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi C_1(g_N.\mathbf{z})\psi dxdt \\
& = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_5.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

O próximo passo é trabalhar com cada termo da soma do lado direito da última igualdade de (2.14). Primeiramente, vamos integrar por partes o primeiro termo do lado direito de (2.14), isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1 &= -\frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\varphi_t\psi dxdt \\
&= -\frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T (\mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\psi)\varphi_t dxdt \\
&= \frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T \mathcal{X}(e^{2s\alpha}\xi\psi)_t\varphi dxdt \\
&= \frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T \mathcal{X}(2se^{2s\alpha}\alpha_t\xi + e^{2s\alpha}\xi_t)\psi\varphi dxdt \\
&+ \frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\psi_t\varphi dxdt,
\end{aligned}$$

e como do Lema 2.1.1 temos $|\alpha_t| \leqslant C(\xi^*)^{1/2}\xi$ e $|\xi_t| \leqslant C(\xi^*)^{1/2}\xi$, usando a Desigualdade de Young dada pelo Corolário 1.3.4 vem que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\overline{B}_2}s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T \mathcal{X}\big((2se^{2s\alpha}\alpha_t\xi + e^{2s\alpha}\xi_t)\psi + (e^{2s\alpha}\xi)\psi_t\big)\varphi dxdt\\
&\leqslant \frac{C}{\overline{B}_2}s\lambda^2\Big(\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T 2se^{2s\alpha}(\xi^*)^{1/2}\xi^2|\psi||\varphi|dxdt + \int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T e^{2s\alpha}(\xi^*)^{1/2}\xi|\psi||\varphi|dxdt\\
&+\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T e^{2s\alpha}\xi|\psi_t||\varphi|dxdt\Big)\\
&\leqslant C\Big(2\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T \big(e^{s\alpha}s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\psi|\big)\big(e^{s\alpha}s^{3/2}\lambda(\xi^*)^2|\varphi|\big)\,dxdt\\
&+\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T \big(e^{s\alpha}s^{1/2}\lambda\,\xi^{1/2}|\psi|\big)\big(e^{s\alpha}s^{1/2}\lambda\,\xi^*|\varphi|\big)\,dxdt + \int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T s\lambda^2e^{2s\alpha}\xi|\psi_t||\varphi|dxdt\Big)\\
&= C\Big(2\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T e^{s\alpha}\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{C}s^{1/2}\lambda\,\xi^{1/2}|\psi|\frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{s\alpha}s^{3/2}\lambda\,(\xi^*)^2|\varphi|dxdt\\
&+\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T e^{s\alpha}\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{C}s^{1/2}\lambda\,\xi^{1/2}|\psi|\frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{s\alpha}s^{1/2}\lambda\,\xi^*|\varphi|dxdt\\
&+\int_{\mathcal{O}_2}\int_0^T e^{2s\alpha}\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{C}s^{-3/2}\lambda^{-1}\xi^{-3/2}|\psi_t|\frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}}s^{5/2}\lambda^3\xi^{5/2}|\varphi|dxdt\Big)\\
&\leqslant \varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt + C(\varepsilon)s^3\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^4|\varphi|^2dxdt\\
&+\varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^2|\varphi|^2dxdt\\
&+\varepsilon s^{-3}\lambda^{-2}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\psi_t|^2dxdt + C(\varepsilon)s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^5|\varphi|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

De onde

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\overline{B}_2}s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi\varphi_t\psi dxdt\\
&\leqslant \varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt + C(\varepsilon)s^3\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^4|\varphi|^2dxdt\\
&+\varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^2|\varphi|^2dxdt\\
&+\varepsilon s^{-3}\lambda^{-2}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\psi_t|^2dxdt + C(\varepsilon)s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^5|\varphi|^2dxdt\\
&\leqslant \varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt + \varepsilon s^{-3}\lambda^{-2}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\psi_t|^2dxdt\\
&+C(\varepsilon)s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Seguindo de modo análogo a (2.15), integraremos por partes a segunda parcela do lado direito da equação (2.14) e aplicaremos a Desigualdade de Young dada pelo Corolário 1.3.4, e como do Lema 2.1.1 temos $|\nabla(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)| \leqslant Cs\lambda e^{2s\alpha}\xi^2$ e $|\Delta(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)| \leqslant Cs^2\lambda^2e^{2s\alpha}\xi^3$, então

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_2 &= -\frac{1}{\overline{B}_2} ks\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} (\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi\psi)\Delta\varphi dxdt \\
&= -\frac{1}{\overline{B}_2} ks\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \Delta(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi\psi)\varphi dxdt \\
&= -\frac{1}{\overline{B}_2} ks\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \Big(\Delta(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)\psi\varphi dxdt + 2\nabla(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)(\nabla\psi)\varphi\Big) dxdt \\
&- \frac{1}{\overline{B}_2} ks\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi(\Delta\psi)\varphi dxdt \\
&\leqslant C\,\frac{k}{\overline{B}_2} \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \Big(e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\xi^3|\psi||\varphi| + e^{2s\alpha}s^2\lambda^3\xi^2|\nabla\psi||\varphi| + e^{2s\alpha}s\lambda^2\xi|\Delta\psi||\varphi|\Big) dxdt \\
&\leqslant C\Bigg(\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\big(\sqrt{2\varepsilon}s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\psi|\big)\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}s^{5/2}\lambda^3\xi^{5/2}|\varphi|\right) dxdt \\
&+ \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\big(\sqrt{2\varepsilon}s^{-1/2}\xi^{-1/2}|\nabla\psi|\big)\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}s^{5/2}\lambda^3\xi^{5/2}|\varphi|\right) dxdt \\
&+ \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\big(\sqrt{2\varepsilon}s^{-3/2}\lambda^{-1}\xi^{-3/2}|\Delta\psi|\big)\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}s^{5/2}\lambda^3\xi^{5/2}|\varphi|\right) dxdt\Bigg) \\
&\leqslant \varepsilon s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt + \varepsilon s^{-1}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\nabla\psi|^2 dxdt \\
&+ \varepsilon s^{-3}\lambda^{-2}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\Delta\psi|^2 dxdt + C(\varepsilon)s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^5|\varphi|^2 dxdt. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Integrando por partes a terceira parcela do lado direito da equação (2.14) e depois utilizando a Desigualdade de Young dada pelo Corolário 1.3.4, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_3 &= -\frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi(\overline{v}.\nabla\varphi)\psi dxdt \\
&= \frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \nabla(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi\overline{v}\psi)\varphi dxdt \\
&\leqslant C\left(\|\overline{v}\|_\infty + \|\nabla\overline{v}\|_\infty\right)s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \big(\nabla(\mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi)\psi\varphi + \mathcal{X}e^{2s\alpha}\xi(\nabla\psi)\varphi\big) dxdt \\
&\leqslant C\Big(\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}s^2\lambda^3\xi^2|\psi||\varphi| dxdt + \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}s\lambda^2\xi|\nabla\psi||\varphi| dxdt\Big) \\
&= C\Big(\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\big(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\psi|\big)\big(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\varphi|\big) dxdt \\
&+ \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\big(s^{-1/2}\xi^{-1/2}|\nabla\psi|\big)\big(s^{3/2}\lambda\xi^{3/2}|\varphi|\big) dxdt\Big) \\
&\leqslant \varepsilon s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\varphi|^2 dxdt \\
&+ \varepsilon s^{-1}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\nabla\psi|^2 dxdt + C(\varepsilon)s^3\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2 dxdt. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Trabalhando agora com a quarta parcela do lado direito da equação (2.14), usando a Desigualdade de Young dada pelo Corolário 1.3.4, vem que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_4 &= -\frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi\widetilde{\vartheta}_1\psi dxdt \\
&\leqslant \frac{1}{\overline{B}_2} \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}s\lambda^2\xi|\widetilde{\vartheta}_1||\psi|dxdt \\
&\leqslant C\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\big(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\psi|\big)\big(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\widetilde{\vartheta}_1|\big)dxdt \\
&\leqslant \varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Por fim, aplicando mais uma vez a Desigualdade de Young dada pelo Corolário 1.3.4 na quinta parcela do lado direito da equação (2.14), temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_5 &= \frac{1}{\overline{B}_2} s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} \mathcal{X} e^{2s\alpha}\xi C_1(g_N.\mathbf{z})\psi dxdt \\
&\leqslant \frac{1}{\overline{B}_2} \int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} s\lambda^2 e^{2s\alpha}\xi C_1|g_N||\psi||\mathbf{z}|dxdt \\
&\leqslant C\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\big(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\psi|\big)\big(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}|\mathbf{z}|\big)dxdt \\
&\leqslant \varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\mathbf{z}|^2dxdt. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (2.15)-(2.19) em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
& s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt \\
& \leqslant \varepsilon s^{-3}\lambda^{-2}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\psi_t|dxdt + \varepsilon s^{-3}\lambda^{-2}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-3}|\Delta\psi|^2dxdt \\
& + \varepsilon s^{-1}\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\nabla\psi|^2dxdt + \varepsilon s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt \\
& + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\mathbf{z}|^2dxdt \\
& + C(\varepsilon)s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
& s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt \leqslant \varepsilon I_1(s,\lambda;\psi) \\
& + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\mathbf{z}|^2dxdt \\
& + C(\varepsilon)s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2dxdt. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Agora, por (2.12)

$$
\begin{aligned}
&I_1(s,\lambda;\psi)\\
&\leqslant C\Big(s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\Delta\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla.\mathbf{z}|dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi_t|^2dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt\\
&+ s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt\Big).
\end{aligned}
$$

Logo, de (2.20) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&I_1(s,\lambda;\psi)\\
&\leqslant C\Big(s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\Delta\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla.\mathbf{z}|dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi_t|^2dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt\\
&+ \varepsilon I_1(s,\lambda;\psi) + C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt\\
&+ C(\varepsilon)s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\mathbf{z}|^2dxdt + C(\varepsilon)s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2dxdt\Big),
\end{aligned}
$$

e então

$$
\begin{aligned}
&I_1(s,\lambda;\psi) - \varepsilon I_1(s,\lambda;\psi)\\
&\leqslant C(\varepsilon)\Big(s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\Delta\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla.\mathbf{z}|dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\mathbf{z}|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi_t|^2dxdt\\
&+ s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi|^2dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt\\
&+ s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\mathbf{z}|^2dxdt\\
&+ s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2dxdt\Big).
\end{aligned}
$$

Tomando $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, vem que

$$
\begin{aligned}
& I_1(s,\lambda;\psi) \\
& \leqslant C\Big(s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\Delta \mathbf{z}|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla.\mathbf{z}|dxdt \\
& + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\mathbf{z}|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi_t|^2 dxdt \\
& + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt \\
& + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\mathbf{z}|^2 dxdt \\
& + s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2 dxdt\Big).
\end{aligned}
$$

Como, por definição,

$$
s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt \leqslant I_1(s,\lambda;\psi),
$$

então

$$
\begin{aligned}
& s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt \\
& \leqslant C\Big(s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\Delta \mathbf{z}|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\nabla.\mathbf{z}|dxdt \\
& + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\mathbf{z}|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi_t|^2 dxdt \\
& + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\varphi|^2 dxdt + s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt \\
& + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + s\lambda^2\int_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi|\mathbf{z}|^2 dxdt \\
& + s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2 dxdt\Big). \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo a desigualdade (2.21) na desigualdade (2.13) e sabendo que $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}$, temos

$$
\begin{aligned}
K(\mathbf{z},\varphi,\psi) \;\leqslant\; & C\Big(s\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + s\lambda^2\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt \\
+ \; & s^{-2}\lambda^{-2}\int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt + s^5\lambda^6\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2 dxdt \\
+ \; & s^4\lambda^4\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\Big),
\end{aligned}
$$

para s e λ suficientemente grandes.

2.2 Desigualdade de Observabilidade para o Sistema Adjunto

A desigualdade de observabilidade para as soluções do sistema adjunto (12) dada pela Proposição 0.0.7 será últil para estudar o problema de controlabilidade nula para o sistema linearizado (11) dado pela Proposição 3.1.2. Primeiramente, definiremos as funções-peso que não se anulam em $t = 0$ envolvidas na desigualdade de observabilidade. Mais precisamente, consideremos a função:

$$\widetilde{\ell}(t) = \begin{cases} \dfrac{T}{2} & \text{Se } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2} \\ T - t & \text{Se } \dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{2.22}$$

e as seguintes funções-peso:

$$\begin{aligned} \beta(x,t) &= \frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda||\eta||_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4}, & \gamma(x,t) &= \frac{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)^4}, \\ \widehat{\beta}(t) &:= \min_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x,t) = \frac{1 - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4}, & \gamma^*(t) &:= \min_{x\in\overline{\Omega}} \gamma(x,t) = \frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4}, \\ \beta^*(t) &:= \max_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x,t) = \frac{e^{\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4}, & \widehat{\gamma}(t) &:= \max_{x\in\overline{\Omega}} \gamma(x,t) = \frac{e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Agora demonstraremos a desigualdade de observabilidade, isto é, a Proposição 0.0.7.

Demonstração da Proposição 0.0.7: Primeiramente introduziremos uma função $\sigma \in C^1([0,T])$, tal que

$$\sigma \equiv 1 \text{ em } [0,T/2], \;\; \sigma \equiv 0 \text{ em } [3T/4,T], \;\; |\sigma'| \leqslant C/T.$$

Observemos que, como $(\mathbf{z},\varphi,\psi)$ é solução do problema (12), então $(\sigma\mathbf{z},\sigma\varphi,\sigma\psi)$ é solução do problema

$$\begin{cases} -(\sigma\mathbf{z})_t - k_1\Delta(\sigma\mathbf{z}) + D(\sigma\mathbf{z})\overline{v} + \nabla\overline{\mathbf{z}}(\sigma\varphi) + \nabla(\sigma q) = \sigma\widetilde{\vartheta} - \nabla\overline{\tau}(\sigma\varphi) & \\ \qquad - \nabla\overline{\alpha}(\sigma\psi) - \sigma'\mathbf{z} & \text{em } Q, \\ \nabla.(\sigma\mathbf{z}) = 0 & \text{em } Q, \\ -(\sigma\varphi)_t - k\Delta(\sigma\varphi) - \overline{v}.\nabla(\sigma\varphi) = \sigma\widetilde{\vartheta}_1 - C_1(g_N.(\sigma\mathbf{z})) + \overline{B}_2(\sigma\psi) - \sigma'\varphi & \text{em } Q, \\ -(\sigma\psi)_t - \gamma\varepsilon\Delta(\sigma\psi) - \overline{v}.\nabla(\sigma\psi) - \overline{B}_1(\sigma\psi) = \sigma\widetilde{\vartheta}_2 + \gamma\varepsilon(\nabla\overline{\alpha}.\Delta(\sigma\mathbf{z})) & \\ \qquad + \overline{C}_2\, div(\sigma\mathbf{z}) - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}.(\sigma\mathbf{z})) + \overline{A}_2(\sigma\varphi)_t - C_2(g_N.(\sigma\mathbf{z})) & \\ \qquad - \overline{A}_1(\sigma\varphi) - \overline{A}_2(\sigma'\varphi) - \sigma'\psi & \text{em } Q, \\ \sigma\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \dfrac{\partial(\sigma\varphi)}{\partial\eta} = \dfrac{\partial(\sigma\psi)}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (\sigma\mathbf{z})(\cdot,T) = 0, \;\; (\sigma\varphi)(\cdot,T) = 0, \;\; (\sigma\psi)(\cdot,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.24}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.24) por $\sigma\mathbf{z}$ vem que

$$\begin{aligned} &-(\sigma\mathbf{z})_t(\sigma\mathbf{z}) - k_1\Delta(\sigma\mathbf{z})(\sigma\mathbf{z}) - D(\sigma\mathbf{z})\overline{v}(\sigma\mathbf{z}) + \nabla\overline{\mathbf{z}}(\sigma\varphi)(\sigma\mathbf{z}) + \nabla(\sigma q)(\sigma\mathbf{z}) \\ &= (\sigma\widetilde{\vartheta})(\sigma\mathbf{z}) - \nabla\overline{\tau}(\sigma\varphi)(\sigma\mathbf{z}) - \nabla\overline{\alpha}(\sigma\psi)(\sigma\mathbf{z}) - (\sigma'\mathbf{z})(\sigma\mathbf{z}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Sabemos que $\mathbf{z} := \mathbf{z}(x,t)$ onde $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$, e fazendo uma mudança de variável de $t \in [0,T]$ para $T-t$, ainda teremos $(T-t) \in [0,T]$. Substituindo $\mathbf{z} := \mathbf{z}(x,t)$ por $\mathbf{z} := \mathbf{z}(x,T-t)$ em (2.25), temos

$$\begin{aligned}
&-\left((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)\right)_t(\sigma\mathbf{z})(x,T-t) - k_1\Delta((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)\\
&-D((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))\overline{v}(x,T-t)(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)\\
&+\nabla(\overline{\mathbf{z}}(x,T-t))(\sigma\varphi)(x,T-t)(\sigma\mathbf{z})(x,T-t) + \nabla((\sigma q)(x,T-t))(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)\\
&=(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)(\sigma\mathbf{z})(x,T-t) - \nabla(\overline{\tau}(x,T-t))(\sigma\varphi)(x,T-t)(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)\\
&-\nabla(\overline{\alpha}(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)(\sigma\mathbf{z})(x,T-t) - (\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)(\sigma\mathbf{z})(x,T-t).
\end{aligned}\tag{2.26}$$

Integrando (2.26) em Ω e usando o fato de $\nabla.(\sigma\mathbf{z}) = 0$ em Q, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)\right)^2 dx + k_1\int_\Omega |\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx\\
&\leqslant \|\overline{v}\|_\infty \int_\Omega |D(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)||(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|dx\\
&+\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)||(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|dx\\
&+\left(\|\nabla\overline{\tau}\|_\infty + \|\nabla\overline{\mathbf{z}}\|_\infty\right)\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)||(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|dx\\
&+\|\nabla\overline{\alpha}\|_\infty \int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)||(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|dx\\
&+\int_\Omega |(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)||(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\sigma\mathbf{z}(x,T-t))^2 + k_1\int_\Omega |\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx\\
&\leqslant \frac{k_1}{2}\int_\Omega |\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx + \frac{1}{2k_1}\|\overline{v}\|_\infty^2 \int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2 dx + \frac{1}{2}\left(\|\nabla\overline{\tau}\|_\infty + \|\nabla\overline{\mathbf{z}}\|_\infty\right)^2\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2 dx + \frac{1}{2}||\nabla\overline{\alpha}||_\infty^2\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Rearranjando termos e multiplicando a última desigualdade por 2, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx + k_1\int_\Omega |\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx\\
&\leqslant C\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx + \int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2 dx + \int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2 dx\\
&+\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2 dx + \int_\Omega |(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2 dx.
\end{aligned}\tag{2.27}$$

Multiplicando a segunda equação de (2.24) por $\sigma\varphi$ e fazendo mudança de variável de $t \in [0,T]$ para $T-t \in [0,T]$, vem que

$$
\begin{aligned}
&-((\sigma\varphi)(x,T-t))_t(\sigma\varphi)(x,T-t) - k\Delta((\sigma\varphi)(x,T-t))(\sigma\varphi)(x,T-t)\\
&-(\overline{v}(x,T-t).\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t)))(\sigma\varphi)(x,T-t)\\
&=(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)(\sigma\varphi)(x,T-t) - C_1(g_N.((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)))(\sigma\varphi)(x,T-t)\\
&+\overline{B}_2(x,T-t)(\sigma\psi)(x,T-t)(\sigma\varphi)(x,T-t) - (\sigma'\varphi)(x,T-t)(\sigma\varphi)(x,T-t).
\end{aligned}
$$

Integrando em Ω e usando as desigualdades de Hölder e de Young, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega((\sigma\varphi)(x,T-t))^2dx + k\int_\Omega|\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx\\
&\leqslant \|\overline{v}\|_\infty\int_\Omega|\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)||(\sigma\varphi)(x,T-t)|dx\\
&+\int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)||(\sigma\varphi)(x,T-t)|dx\\
&+|C_1||g_N|\int_\Omega|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)||(\sigma\varphi)(x,T-t)|dx\\
&+\|\overline{B}_2\|_\infty\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)||(\sigma\varphi)(x,T-t)|dx\\
&+\int_\Omega|(\sigma'\varphi)(x,T-t)||(\sigma\varphi)(x,T-t)|dx\\
&\leqslant \frac{k}{2}\int_\Omega|\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + C\int_\Omega|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2.
\end{aligned}
$$

Rearranjando termos e multiplicando a última desigualdade por 2, segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + k\int_\Omega|\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx\\
&\leqslant C\int_\Omega|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2 + \int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx\\
&+\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Multiplicando a terceira equação de (2.24) por $\sigma\psi$ e fazendo mudança de variável de $t \in [0,T]$ para $T-t \in [0,T]$, temos

$$
\begin{aligned}
&-((\sigma\psi)(x,T-t))_t(\sigma\psi)(x,T-t) - \gamma\varepsilon\Delta((\sigma\psi)(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)\\
&-\overline{v}(x,T-t).\nabla((\sigma\psi)(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)\\
&-\overline{B}_1(x,T-t)((\sigma\psi)(x,T-t))^2\\
&=(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)(\sigma\psi)(x,T-t) + \gamma\varepsilon(\nabla(\overline{\alpha}(x,T-t)).\Delta((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)))(\sigma\psi)(x,T-t)\\
&+\overline{C}_2(x,T-t)\,div((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)\\
&-\overline{C}_3(x,T-t)(\nabla(\overline{\alpha}(x,T-t)).(\sigma\mathbf{z})(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)\\
&+\overline{A}_2(x,T-t)((\sigma\varphi)(x,T-t))_t(\sigma\psi)(x,T-t) - C_2(g_N.((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)))(\sigma\psi)(x,T-t)\\
&-\overline{A}_1(x,T-t)(\sigma\varphi)(x,T-t)(\sigma\psi)(x,T-t) - \overline{A}_2(x,T-t)((\sigma'\varphi)(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)\\
&-(\sigma'\psi)(x,T-t)(\sigma\psi)(x,T-t).
\end{aligned}
$$

Integrando em Ω e usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + \gamma\varepsilon\int_\Omega |\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx\\
&\leqslant \frac{\gamma\varepsilon}{4}\int_\Omega |\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + C\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx\\
&+\gamma\varepsilon\int_\Omega (\nabla(\overline{\alpha}(x,T-t)).\Delta((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)))(\sigma\psi)(x,T-t)dx + \frac{k_1}{4}\int_\Omega |\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)((\sigma\varphi)(x,T-t))_t(\sigma\psi)(x,T-t)dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx. \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Em (2.29) chamemos

$$D_1 = \gamma\varepsilon\int_\Omega (\nabla(\overline{\alpha}(x,T-t)).\Delta((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)))(\sigma\psi)(x,T-t)dx$$

e

$$D_2 = \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)((\sigma\varphi)(x,T-t))_t(\sigma\psi)(x,T-t)dx.$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \gamma\varepsilon\int_\Omega (\nabla(\overline{\alpha}(x,T-t)).\Delta((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)))(\sigma\psi)(x,T-t)dx\\
&= -\gamma\varepsilon\int_\Omega \Delta(\overline{\alpha}(x,T-t))\,\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)dx\\
&- \gamma\varepsilon\int_\Omega \nabla(\overline{\alpha}(x,T-t))\,\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))\nabla((\sigma\psi)(x,T-t))dx.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
D_1 &\leqslant \frac{\gamma\varepsilon\|\Delta\overline{\alpha}\|_\infty}{2}\int_\Omega |\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))|^2dx + \frac{\gamma\varepsilon\|\Delta\overline{\alpha}\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx\\
&+ 2\|\nabla\overline{\alpha}\|_\infty^2\gamma\varepsilon\int_\Omega |\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))|^2dx + \frac{\gamma\varepsilon}{8}\int_\Omega |\nabla((\sigma\psi)(x,T-t))|^2dx. \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Para o desenvolvimento de D_2, usamos o fato de

$$(\sigma\varphi)_t = -k\Delta(\sigma\varphi) - \overline{v}.\nabla(\sigma\varphi) - \sigma\widetilde{\vartheta}_1 + C_1(g_N.(\sigma\mathbf{z})) - \overline{B}_2(\sigma\varphi) + \sigma'\varphi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D_2 &= \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)\,((\sigma\varphi)(x,T-t))_t(\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&= \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)\Big[-k\,\Delta((\sigma\varphi)(x,T-t)) - \overline{v}(x,T-t).\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t)) \\
&- (\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t) + C_1(g_N.((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))) - \overline{B}_2(x,T-t)(\sigma\varphi)(x,T-t) \\
&+ (\sigma'\varphi)(x,T-t)\Big](\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&= \int_\Omega k\,\nabla(\overline{A}_2(x,T-t))\,\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&+ \int_\Omega k\,\overline{A}_2(x,T-t)\,\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))\nabla((\sigma\psi)(x,T-t))dx \\
&- \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)\overline{v}(x,T-t).\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))(\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&- \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)(\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&+ \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)C_1(g_N.((\sigma\mathbf{z})(x,T-t)))(\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&- \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)\overline{B}_2(x,T-t)(\sigma\varphi)(x,T-t)(\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&+ \int_\Omega \overline{A}_2(x,T-t)(\sigma'\varphi)(x,T-t)(\sigma\psi)(x,T-t)dx \\
&\leqslant \frac{k\|\nabla\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx + \frac{k\|\nabla\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
&+ \frac{2\|\overline{A}_2\|_\infty^2\,k^2}{\gamma\varepsilon}\int_\Omega |\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx + \frac{\gamma\varepsilon}{8}\int_\Omega |\nabla((\sigma\psi)(x,T-t))|^2dx \\
&+ \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty}{2}\int_\Omega |\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx + \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
&+ \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx + \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
&+ \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty|C_1||g_N|}{2}\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
&+ \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{B}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{B}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
&+ \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx + \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
D_2 \;\leqslant\;& \left(\frac{k\|\nabla\overline{A}_2\|_\infty}{2}+\frac{2\|\overline{A}_2\|_\infty^2\,k^2}{\gamma\varepsilon}+\frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty}{2}\right)\int_\Omega|\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx\\
+\;& \frac{\gamma\varepsilon}{8}\int_\Omega|\nabla((\sigma\psi)(x,T-t))|^2dx+C\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx\\
+\;& \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx+\frac{\|\overline{A}_2\|_\infty|C_1||g_N|}{2}\int_\Omega|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx\\
+\;& \frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{B}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx+\frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.30) e (2.31) em (2.29), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx+\gamma\varepsilon\int_\Omega|\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx\\
&\leqslant C\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx+\frac{\gamma\varepsilon}{2}\int_\Omega|\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx\\
&+\frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx\\
&+\left(\frac{\gamma\varepsilon\|\Delta\overline{\alpha}\|_\infty^2}{2}+2\gamma\varepsilon\|\nabla\overline{\alpha}\|_\infty^2+\frac{k_1}{4}\right)\int_\Omega|\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))|^2dx\\
&+\left(\frac{k\|\nabla\overline{A}_2\|_\infty}{2}+\frac{2\|\overline{A}_2\|_\infty^2\,k^2}{\gamma\varepsilon}+\frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty}{2}\right)\int_\Omega|\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx\\
&+C\int_\Omega|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx+\left(\frac{1}{2}+\frac{\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{B}_2\|_\infty}{2}\right)\int_\Omega|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx\\
&+\left(\frac{1}{2}+\frac{\|\overline{A}_2\|_\infty}{2}\right)\int_\Omega|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx.
\end{aligned}$$

Rearranjando termos e multiplicando a última desigualdade por 2, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx+\gamma\varepsilon\int_\Omega|\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx\\
&\leqslant C\int_\Omega|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx+\int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx+\|\overline{A}_2\|_\infty\int_\Omega|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx\\
&+\left(\gamma\varepsilon\|\Delta\overline{\alpha}\|_\infty^2+4\gamma\varepsilon\|\nabla\overline{\alpha}\|_\infty^2+\frac{k_1}{2}\right)\int_\Omega|\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))|^2dx\\
&+\left(k\|\nabla\overline{A}_2\|_\infty+\frac{4\|\overline{A}_2\|_\infty^2\,k^2}{\gamma\varepsilon}+\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty\right)\int_\Omega|\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx\\
&+C\int_\Omega|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx+\left(1+\|\overline{A}_2\|_\infty\|\overline{B}_2\|_\infty\right)\int_\Omega|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx\\
&+\left(1+\|\overline{A}_2\|_\infty\right)\int_\Omega|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx+\int_\Omega|(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + \gamma\varepsilon\int_\Omega |\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
&\leqslant C\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx + C\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx \\
&+ C\int_\Omega |\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))|^2dx + C\int_\Omega |\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx \\
&+ C\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + C\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx \\
&+ C\int_\Omega |(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega |(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

Consideremos A uma constante positiva a ser definida posteriormente e façamos a soma $A\times$ (2.27) $+ A\times$ (2.28) $+$ (2.32), então

$$
\begin{aligned}
& A\frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + A\frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
+\ & A\,k_1\int_\Omega |\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + A\,k\int_\Omega |\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx \\
+\ & \gamma\varepsilon\int_\Omega |\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
\leqslant\ & \Big[A(C+1)+C\Big]\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \Big[A(C+1)+C\Big]\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx \\
+\ & (2A+C)\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + C\int_\Omega |\nabla((\sigma\mathbf{z})(x,T-t))|^2dx \\
+\ & C\int_\Omega |\nabla((\sigma\varphi)(x,T-t))|^2dx + A\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2dx \\
+\ & (A+C)\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx + A\int_\Omega |(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx \\
+\ & (A+C)\int_\Omega |(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega |(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
& A\frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + A\frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
+\ & \Big(A\,k_1 - C\Big)\int_\Omega |\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \Big(A\,k - C\Big)\int_\Omega |\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx \\
+\ & \gamma\varepsilon\int_\Omega |\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
\leqslant\ & \Big[A(C+1)+C\Big]\int_\Omega |(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \Big[A(C+1)+C\Big]\int_\Omega |(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx \\
+\ & (2A+C)\int_\Omega |(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx + A\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2dx \\
+\ & (A+C)\int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega |(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx + A\int_\Omega |(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx \\
+\ & (A+C)\int_\Omega |(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_\Omega |(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Tomando a constante A suficientemente grande em (2.33), vem que

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
+ & \int_{\Omega}|\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \gamma\varepsilon\int_{\Omega}|\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
\leqslant & \; C\Bigg(\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
+ & \int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx \\
+ & \int_{\Omega}|(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx\Bigg). \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
\leqslant & \; C\Bigg(\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
+ & \int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx \\
+ & \int_{\Omega}|(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx\Bigg).
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
\leqslant & \; e^{Ct}\Bigg(\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(0)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(0)|^2dx + \int_{\Omega}|(\sigma\psi)(0)|^2dx \\
+ & \int_0^t\int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2dxds + \int_0^t\int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dxds \\
+ & \int_0^t\int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dxds + \int_0^t\int_{\Omega}|(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2dxds \\
+ & \int_0^t\int_{\Omega}|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dxds + \int_0^t\int_{\Omega}|(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dxds\Bigg),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. De onde,

$$\begin{aligned}
& \|(\sigma\mathbf{z})\|^2_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})} + \|(\sigma\varphi)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|(\sigma\psi)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
\leqslant & \; e^{CT}\Big(\|(\sigma\widetilde{\vartheta})\|^2_{L^2(Q)} + \|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)\|^2_{L^2(Q)} + \|(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)\|^2_{L^2(Q)} \\
+ & \|(\sigma'\mathbf{z})\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H})} + \|(\sigma'\varphi)\|^2_{L^2(Q)} + \|(\sigma'\psi)\|^2_{L^2(Q)}\Big). \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Integrando (2.34) de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,0)|^2dx-\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T)|^2dx+\int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,0)|^2dx \\
- & \int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T)|^2dx+\int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,0)|^2dx-\int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T)|^2dx \\
+ & \int_0^T\int_{\Omega}|\nabla(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dxdt+\int_0^T\int_{\Omega}|\nabla(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dxdt \\
+ & \int_0^T\int_{\Omega}|\nabla(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dxdt \\
\leqslant & C\Bigg(\int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx+\int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T-t)|^2dx+\int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T-t)|^2dx \\
+ & \int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta})(x,T-t)|^2dx+\int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_1)(x,T-t)|^2dx+\int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma\widetilde{\vartheta}_2)(x,T-t)|^2dx \\
+ & \int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma'\mathbf{z})(x,T-t)|^2dx+\int_0^T\int_{\Omega}|(\sigma'\varphi)(x,T-t)|^2dx+\int_{\Omega}|(\sigma'\psi)(x,T-t)|^2dx\Bigg).
\end{aligned}$$

Do fato de que $\sigma(T)=0$, segue que

$$\int_{\Omega}|(\sigma\mathbf{z})(x,T)|^2dx=\int_{\Omega}|(\sigma\varphi)(x,T)|^2dx=\int_{\Omega}|(\sigma\psi)(x,T)|^2dx=0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& \|(\sigma\mathbf{z})(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(\sigma\varphi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(\sigma\psi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \|\sigma\mathbf{z}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})}+\|\sigma\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|\sigma\psi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
\leqslant & C\Big(\|\sigma\mathbf{z}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H})}+\|\sigma\varphi\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma\widetilde{\vartheta}_1\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma\widetilde{\vartheta}_2\|^2_{L^2(Q)} \\
+ & \|\sigma'\mathbf{z}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H})}+\|\sigma'\varphi\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma'\psi\|^2_{L^2(Q)}\Big). \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Do fato de $L^\infty\hookrightarrow L^2$, então de (2.36) temos

$$\begin{aligned}
& \|(\sigma\mathbf{z})(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(\sigma\varphi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(\sigma\psi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \|\sigma\mathbf{z}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})}+\|\sigma\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|\sigma\psi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
\leqslant & C\Big(\|\sigma\mathbf{z}\|^2_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})}+\|\sigma\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\sigma\psi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\sigma\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(Q)} \\
+ & \|\sigma\widetilde{\vartheta}_1\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma\widetilde{\vartheta}_2\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma'\mathbf{z}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H})}+\|\sigma'\varphi\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma'\psi\|^2_{L^2(Q)}\Big). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.35) em (2.37), segue que

$$\begin{aligned}
& \|(\sigma\mathbf{z})(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(\sigma\varphi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(\sigma\psi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \|\sigma\mathbf{z}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})}+\|\sigma\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|\sigma\psi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
\leqslant & C\Big(\|\sigma\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma\widetilde{\vartheta}_1\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma\widetilde{\vartheta}_2\|^2_{L^2(Q)} \\
+ & \|\sigma'\mathbf{z}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H})}+\|\sigma'\varphi\|^2_{L^2(Q)}+\|\sigma'\psi\|^2_{L^2(Q)}\Big). \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Somando (2.35) e (2.38) segue que

$$\begin{aligned}
& \|(\sigma \mathbf{z})(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\sigma\varphi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\sigma\psi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+ \quad & ||\sigma \mathbf{z}||^2_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})} + ||\sigma \mathbf{z}||^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})} + ||\sigma\varphi||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
+ \quad & ||\sigma\varphi||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||\sigma\psi||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\sigma\psi||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
\leqslant \quad & C\Big(||\sigma\widetilde{\vartheta}||^2_{L^2(Q)} + ||\sigma\widetilde{\vartheta}_1||^2_{L^2(Q)} + ||\sigma\widetilde{\vartheta}_2||^2_{L^2(Q)} \\
+ \quad & ||\sigma' \mathbf{z}||^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H})} + ||\sigma'\varphi||^2_{L^2(Q)} + ||\sigma'\psi||^2_{L^2(Q)} \Big),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& \|(\sigma \mathbf{z})(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\sigma\varphi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(\sigma\psi)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+ \quad & ||\sigma \mathbf{z}||^2_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})\cap L^2(0,T;\boldsymbol{V})} + ||(\sigma\varphi,\sigma\psi)||^2_{[L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))]^2} \\
\leqslant \quad & C\left(||\sigma\widetilde{\vartheta}||^2_{L^2(Q)} + ||(\sigma\widetilde{\vartheta}_1,\sigma\widetilde{\vartheta}_2)||^2_{[L^2(Q)]^2} + ||\sigma' \mathbf{z}||^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{H})} + ||(\sigma'\varphi,\sigma'\psi)||^2_{[L^2(Q)]^2} \right).
\end{aligned}$$

Consequentemente, como $\sigma \in C^1([0,T])$, tal que

$$\sigma \equiv 1 \text{ em } [0,T/2], \;\; \sigma \equiv 0 \text{ em } [3T/4,T] \;\text{ e }\; |\sigma'| \leqslant C/T,$$

temos

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{z}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
+ \quad & ||\mathbf{z}||^2_{L^2(0,T/2;\boldsymbol{V})\cap L^\infty(0,T/2;\boldsymbol{H})} + ||(\varphi,\psi)||^2_{[L^2(0,T/2;H^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T/2;L^2(\Omega))]^2} \\
\leqslant \quad & C\Big(||\widetilde{\vartheta}||^2_{L^2(0,3T/4;L^2(\Omega))} + ||(\widetilde{\vartheta}_1,\widetilde{\vartheta}_2)||^2_{[L^2(0,3T/4;L^2(\Omega))]^2} \\
+ \quad & \frac{1}{T}||\mathbf{z}||^2_{L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega))} + \frac{1}{T}||(\varphi,\psi)||^2_{[L^2(T/2,3T/4;L^2(\Omega))]^2} \Big).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Agora, para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,T/2]$ as funções-peso definidas em (2.23) satisfazem

$$e^{2s\beta} = e^{2s\left(\frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda||\eta||_\infty}}{\tilde{\ell}(t)^4}\right)} \leqslant e^{-2s\beta} = e^{2s\left(\frac{e^{2\lambda||\eta||} - e^{\lambda\eta(x)}}{\tilde{\ell}(t)^4}\right)} \leqslant e^{2s\left(e^{\frac{2\lambda||\eta||_\infty}{\tilde{\ell}(t)^4}}\right)} \leqslant C_1. \tag{2.40}$$

Observemos que $C_1 > 1$, pois $e^{2s\left(e^{(\frac{2\lambda||\eta||_\infty}{\tilde{\ell}(t)^4})}\right)} > 1$, já que $2se^{\left(\frac{2\lambda||\eta||_\infty}{\tilde{\ell}(t)^4}\right)} > 0$.

Temos, ainda, que a função γ é limitada superiormente, uma vez que

$$\gamma(x,t) = \frac{e^{2\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\left(\frac{T}{2}\right)^4} \leqslant \frac{e^{2\lambda(||\eta||+||\eta||_\infty)}}{\left(\frac{T}{2}\right)^4} = \frac{16}{T^4}\, e^{4\lambda||\eta||_\infty} \leqslant C_2(T,\lambda),$$

onde $C_2(T,\lambda) > 1$. Além disso, γ é limitada inferiormente, pois

$$\gamma(x,t) = \frac{e^{2\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\left(\frac{T}{2}\right)^4} \geqslant \frac{e^{2\lambda||\eta||_\infty}}{\left(\frac{T}{2}\right)^4} \geqslant C_3 > 0.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}(x,t)|^2 \leqslant C_1C_2^3|\mathbf{z}(x,t)|^2, \quad e^{2s\beta}\gamma|\nabla\mathbf{z}(x,t)|^2 \leqslant C_1C_2|\nabla\mathbf{z}(x,t)|^2,\\
&e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi(x,t)|^2 \leqslant C_1C_2^2|\varphi(x,t)|^2, \quad e^{2s\beta}|\nabla\varphi(x,t)| \leqslant C_1|\nabla\varphi(x,t)|^2,\\
&e^{2s\beta}\gamma|\psi(x,t)|^2 \leqslant C_1C_2|\psi(x,t)|^2, \quad e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi(x,t)|^2 \leqslant \frac{C_1}{C_3}|\nabla\psi(x,t)|^2,
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

para todo $(x,t) \in \Omega\times[0,T/2]$. Portanto, somando as desigualdades em (2.41) e integrando em $\Omega\times(0,T/2)$, temos

$$
\begin{aligned}
& \|\mathbf{z}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\nabla\mathbf{z}|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}|\nabla\varphi|^2dxdt\\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2dxdt\\
\leqslant & C\Bigg(\|\mathbf{z}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega |\nabla\mathbf{z}|^2dxdt\\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega |\mathbf{z}|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega |\varphi|^2dxdt\\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega |\nabla\psi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega |\psi|^2dxdt\Bigg).
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

De (2.39) e (2.42), segue que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\nabla\mathbf{z}|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}|^2dxdt + ||\mathbf{z}(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}|\nabla\varphi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi|^2dxdt + ||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2dxdt + ||\psi(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant & C\Big(\|\mathbf{z}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
+ & ||\mathbf{z}||^2_{L^2(0,T/2;\boldsymbol{V})\cap L^\infty(0,T/2;\boldsymbol{H})} + ||(\varphi,\psi)||^2_{L^2(0,T/2;H^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T/2;L^2(\Omega))}\Big)\\
\leqslant & C\Bigg(\int_0^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\widetilde{\vartheta}|^2dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt\\
+ & \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\mathbf{z}|^2dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\varphi|^2dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega |\psi|^2dxdt\Bigg).
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Na definição da função $\widetilde{\ell}$ em (2.22), no intervalo $\left(0,\dfrac{3T}{4}\right)$, temos que

$$
\widetilde{\ell}(t) \nrightarrow 0 \text{ quando } t\to 0^+,\ t\to\left(\frac{T}{2}\right)^-,\ t\to\left(\frac{T}{2}\right)^+ \ \text{ e } \ t\to\left(\frac{3T}{4}\right)^-.
$$

Logo, da definição da função-peso β em (2.23), temos que

$$\beta(x,t) \twoheadrightarrow -\infty \text{ quando } t \to 0^+ \text{ e } t \to \left(\frac{T}{2}\right)^-.$$

Assim, existe $C > 0$ tal que $-C < \beta(x,t)$ para $(x,t) \in \Omega \times \left[0, \frac{3T}{4}\right]$, e então

$$-\beta(x,t) < C \Rightarrow -2s\beta(x,t) < C \Rightarrow e^{-2s\beta(x,t)} \leqslant C.$$

Logo, existe

$$\theta(t) = \sup\{e^{-2s\beta(x,t)} : x \in \Omega\} < \infty.$$

Dessa maneira,

$$e^{-2s\beta(x,t)} \leqslant \theta(t),$$

de onde concluímos que

$$1 \leqslant \theta(t)e^{2s\beta(x,t)}. \tag{2.44}$$

Observemos que $-\beta = \dfrac{e^{2\lambda||\eta||_\infty} - e^{\lambda\eta(x)}}{\widetilde{\ell}(t)^4} \leqslant \dfrac{e^{2\lambda||\eta||_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4}$, e da definição de $\widetilde{\ell}$ em (2.22) , temos $\dfrac{T}{4} \leqslant \widetilde{l}(t) \leqslant \dfrac{T}{2}$ para $t \in \left[0, \frac{3T}{4}\right]$, e então

$$\theta(t) \leqslant e^{\left(\frac{2se^{(2\lambda||\eta||_\infty)}}{(\frac{T}{4})^4}\right)}.$$

Desse modo, de (2.44) vem que

$$1 \leqslant e^{\left(\frac{2se^{(2\lambda||\eta||_\infty)}}{(\frac{T}{4})^4}\right)} e^{2s\beta(x,t)}.$$

Consequentemente, existe $C > 0$ dependente de s e λ tal que

$$C\, e^{2s\beta(x,t)} \geqslant 1. \tag{2.45}$$

Por outro lado, por (2.22), $T/4 \leqslant \widetilde{\ell}(t) \leqslant T/2$ em $\left[0, \frac{3T}{4}\right]$, então,

$$\gamma(x,t) = \frac{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)^4} \geqslant \frac{e^{\lambda||\eta||_\infty}}{\frac{T}{2}} \geqslant \frac{1}{C}.$$

Portanto,

$$C\,\gamma(x,t) \geqslant 1, \text{ para } (x,t) \in \Omega \times \left[0, \frac{3T}{4}\right], \tag{2.46}$$

com C dependendo de λ.

De (2.45) e (2.46) segue que

$$|\widetilde{\vartheta}(x,t)|^2 \leqslant Ce^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\vartheta}(x,t)|^2,$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times [0, 3T/4]$, onde C depende de s e λ. Então,

$$\int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt \leqslant C \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt,$$

onde C depende de s e λ.

Procedendo de modo análogo para $\widetilde{\vartheta}_1, \widetilde{\vartheta}_2, \mathbf{z}, \varphi$ e ψ, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt &\leqslant C \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt, \\
\int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt &\leqslant C \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^{-2} |\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt, \\
\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\mathbf{z}|^2 dxdt &\leqslant C \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^3 |\mathbf{z}|^2 dxdt, \\
\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\varphi|^2 dxdt &\leqslant C \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^2 |\varphi|^2 dxdt, \\
\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\psi|^2 dxdt &\leqslant C \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\psi|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt \\
+ & \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\mathbf{z}|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\varphi|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega |\psi|^2 dxdt \\
\leqslant & C \Bigg(\int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^{-2} |\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt \\
+ & \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^3 |\mathbf{z}|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^2 |\varphi|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\psi|^2 dxdt \Bigg). \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.47) em (2.43), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{T}{2}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\nabla \mathbf{z}|^2 dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^3 |\mathbf{z}|^2 dxdt + ||\mathbf{z}(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}} \int_\Omega e^{2s\beta} |\nabla \varphi|^2 dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^2 |\varphi|^2 dxdt + ||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ & \int_0^{\frac{T}{2}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^{-1} |\nabla \psi|^2 dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\psi|^2 dxdt + ||\psi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant & C \Bigg(\int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^{-2} |\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt \\
+ & \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^3 |\mathbf{z}|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma^2 |\varphi|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} \int_\Omega e^{2s\beta} \gamma |\psi|^2 dxdt \Bigg). \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Carleman dada pela Proposição 0.0.6 aos três últimos termos da desigualdade anterior e notando que $\gamma = \xi$ em $[T/2, 3T/4]$, vem que

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}|^2dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\alpha}\gamma^2|\varphi|^2dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2dxdt \\
&= \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2dxdt \\
&\leqslant CK(\mathbf{z},\varphi,\psi) \\
&\leqslant C(T,s,\lambda)\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt \\
&+ \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2dxdt\Bigg), \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

onde $K(\mathbf{z},\varphi,\psi)$ é dado por (13).

Substituindo (2.49) em (2.48), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{T}{2}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma|\nabla\mathbf{z}|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}|^2dxdt + ||\mathbf{z}(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ &\int_0^{\frac{T}{2}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}|\nabla\varphi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi|^2dxdt + ||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
+ &\int_0^{\frac{T}{2}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi|^2dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2dxdt + ||\psi(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant\ & C\Bigg(\int_0^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\vartheta}|^2dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + \int_0^{\frac{3T}{4}}\int_{\Omega} e^{2s\beta}\gamma^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt \\
+ &\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt \\
+ &\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2dxdt\Bigg). \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

Observemos que para $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$,

$$-\alpha(x,t) = \frac{e^{2\lambda||\eta||_\infty} - e^{\lambda\eta(x)}}{\ell(t)^4} \geqslant \frac{e^{2\lambda||\eta||_\infty} - e^{\lambda\eta(x)}}{(\frac{T}{2})^4} = -\beta(x,t)$$

pois $\dfrac{T}{2} \geqslant \ell(t)$ para todo $t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$. Consequentemente,

$$e^{2s\alpha(x,t)} = e^{-2s(-\alpha)} = e^{-2s\left(\frac{e^{2\lambda||\eta||_\infty} - e^{\lambda\eta(x)}}{\ell(t)^4}\right)} \leqslant e^{-2s\left(\frac{e^{2\lambda||\eta||_\infty} - e^{\lambda\eta(x)}}{(T/2)^4}\right)} = e^{-2s(-\beta)} = e^{2s\beta(x,t)}$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$. E da definição de ξ em (2.2) e γ dada em (2.23), temos que

$$\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\ell(t)^4} \leqslant \frac{e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4} := \max_{x\in\overline{\Omega}}\gamma(x,t) = \widehat{\gamma}(t)$$

e

$$(\xi(x,t))^{-1} = \frac{\ell(t)^4}{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}} \leqslant \frac{\widetilde{\ell}(t)^4}{e^{\lambda\|\eta\|_\infty}} = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\gamma(x,t)\right)^{-1} = (\gamma^*(t))^{-1}$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$, e então (2.50) se torna

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\nabla \mathbf{z}|^2 dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}|^2 dxdt + ||\mathbf{z}(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
+ &\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}|\nabla\varphi|^2 dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi|^2 dxdt + ||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
+ &\int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi|^2 dxdt + \int_0^{\frac{T}{2}}\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2 dxdt + ||\psi(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant\ & C\Bigg(\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt\\
+ &\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5|\varphi|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\Bigg).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Por outro lado, da definição de α em (2.2) e β em (2.23), temos $\alpha = \beta$ em $\Omega \times \left(\frac{T}{2}, T\right)$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\nabla \mathbf{z}|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\\
&+ \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\beta}|\nabla\varphi|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi|^2 dxdt\\
&+ \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2 dxdt\\
&= \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\alpha}\xi|\nabla \mathbf{z}|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\\
&+ \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\alpha}|\nabla\varphi|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\alpha}\xi^2|\varphi|^2 dxdt\\
&+ \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\alpha}\xi^{-1}|\nabla\psi|^2 dxdt + \int_{\frac{T}{2}}^T\int_\Omega e^{2s\alpha}\xi|\psi|^2 dxdt\\
&\leqslant CK(\mathbf{z},\varphi,\psi)\\
&\leqslant C(T,s,\lambda)\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\xi|\widetilde{\vartheta}_1|^2 + \int_Q e^{2s\alpha}\xi^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt\\
&+ \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}(\xi^*)^5|\varphi|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\alpha}\xi^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\Bigg)\\
&\leqslant C(T,s,\lambda)\Bigg(\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt\\
&+ \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5|\varphi|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3|\mathbf{z}|^2 dxdt\Bigg),
\end{aligned} \tag{2.52}$$

onde $K(\mathbf{z},\varphi,\psi)$ é dado por (13).

Portanto, somando as desigualdades (2.51) e (2.52) temos a desigualdade de observabilidade (14), ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\beta}\gamma|\nabla\mathbf{z}|^2dxdt+\int_Q e^{2s\beta}\gamma^3|\mathbf{z}|^2dxdt+||\mathbf{z}(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\int_Q e^{2s\beta}|\nabla\varphi|^2dxdt+\int_Q e^{2s\beta}\gamma^2|\varphi|^2dxdt+||\varphi(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\int_Q e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\psi|^2dxdt+\int_Q e^{2s\beta}\gamma|\psi|^2dxdt+||\psi(0)||^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant C(T,s,\lambda)\Bigg(\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}|^2+\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt+\int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt\\
&+\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5|\varphi|^2dxdt+\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3|\mathbf{z}|^2dxdt\Bigg).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Controlabilidade Nula de um Modelo de Solidificação

No presente capítulo, trataremos um problema de controlabilidade nula para o sistema linearizado (11). Usando o Teorema de Lyusternik e o problema de controlabilidade nula para o sistema linearizado dado pela Proposição 3.1.2, prova-se a controlabilidade local nula para o sistema não linear (2).

A fim de satisfazer as condições necessárias e suficientes para aplicar o Teorema de Lyusternik para o sistema não linear (9), vamos introduzir os seguintes espaços:

$$
\begin{aligned}
E_2 := \{&(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) \in E_0;\\
&e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(L_1 v + \nabla p - (\overline{C}_1\Delta\alpha - \overline{C}_2\nabla\alpha + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha})\alpha + \overline{A}_3\tau - \overline{A}_4\alpha + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}))\\
&\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2),\\
&e^{-s\beta}(L_2\tau - (-\overline{A}_1\alpha - \overline{A}_2\alpha_t - v\cdot\nabla\overline{\tau} - h1_{\mathcal{O}})) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(L_3\alpha - (\overline{B}_2\tau - v\cdot\nabla\overline{\alpha}) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)))\},
\end{aligned}
$$

quando $N=2$, onde $\overline{A}_3 = C_1 g\mathbf{e}_2$ e $\overline{A}_4 = C_2 g\mathbf{e}_2$,

$$
\begin{aligned}
E_3 := \{&(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) \in E_0; e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4} v \in L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3),\\
&e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(L_1 v + \nabla p - (\overline{C}_1\Delta\alpha - \overline{C}_2\nabla\alpha + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha})\alpha + \overline{A}_3\tau - \overline{A}_4\alpha + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}))\\
&\in L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3),\\
&e^{-s\beta}(L_2\tau - (-\overline{A}_1\alpha - \overline{A}_2\alpha_t - v\cdot\nabla\overline{\tau} + h1_{\mathcal{O}})) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(L_3\alpha - (\overline{B}_2\tau - v\cdot\nabla\overline{\alpha})) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\},
\end{aligned}
$$

quando $N=3$, onde $\overline{A}_3 = C_1 g\mathbf{e}_3$ e $\overline{A}_4 = C_2 g\mathbf{e}_3$.

Aqui

$$
\begin{aligned}
L_1 v &= v_t - k_1\Delta v + v\cdot\nabla\overline{v} + \overline{v}\cdot\nabla v,\\
L_2\tau &= \tau_t - k\Delta\tau + \overline{v}\cdot\nabla\tau,\\
L_3\alpha &= \alpha_t - \gamma\varepsilon\Delta\alpha + \overline{v}\cdot\nabla\alpha - \overline{B}_1\alpha
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&E_0 := \{(v,\mathcal{H},\tau,h,\alpha); e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}),\\
&e^{-s\beta}\gamma^{-1/2}v, e^{-s\beta}\gamma^{-3/2}\mathcal{H}1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q),\\
&e^{-s\beta/2}\tau, e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}\alpha \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&e^{-s\beta}\gamma^{-1/2}\tau, e^{-s\beta}\gamma^{-5/2}h1_{\mathcal{O}}, e^{-s\beta}\gamma\alpha \in L^2(Q), \alpha \in L^4(0,T;H^4(\Omega))\}.
\end{aligned}
$$

E_0, E_2 e E_3 são espaços de Banach munidos das normas

$$
\begin{aligned}
&||(v,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)||_{E_0} = \Big(||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v||^2_{L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)} + ||e^{-s\beta}\gamma^{-1/2}v||^2_{L^2(Q)}\\
&+||e^{-s\beta}\gamma^{-3/2}\mathcal{H}1_{\mathcal{O}}||^2_{L^2(Q)} + ||e^{-s\beta/2}(\tau,\gamma^{1/4}\alpha)||^2_{[L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))]^2}\\
&+||e^{-s\beta}\gamma^{-1/2}\tau||^2_{L^2(Q)} + ||e^{-s\beta}\gamma^{-5/2}h1_{\mathcal{O}}||^2_{L^2(Q)} + ||e^{-s\beta}\gamma\alpha||^2_{L^2(Q)}\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&||(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)||_{E_2} = \Big(||(v,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)||^2_{E_0}\\
&+||e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(L_1v+\nabla p)||^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)}\\
&+||(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2})(\overline{C}_1\Delta\alpha - \overline{C}_2\nabla\alpha + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha})\alpha + \overline{A}_3\tau - \overline{A}_4\alpha + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}))||^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)}\\
&+||e^{-s\beta}(L_2\tau - (-\overline{A}_1\alpha - \overline{A}_2\alpha_t - v\cdot\nabla\overline{\tau} + h1_{\mathcal{O}}))||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\
&+||e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(L_3\alpha - (\overline{B}_2\tau - v\cdot\nabla\overline{\alpha}))||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&||(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)||_{E_3} = \Big(||(v,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)||^2_{E_0} + ||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v||^2_{L^4(0,T;L^{12}(\Omega)^3)}\\
&+||e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(L_1v+\nabla p)||_{L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)}\\
&+||(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2})(\overline{C}_1\Delta\alpha - \overline{C}_2\nabla\alpha + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha})\alpha + \overline{A}_3\tau - \overline{A}_4\alpha + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}))||^2_{L^2(0,T;W^{-1,6}(\Omega)^3)}\\
&+||e^{-s\beta}(L_2\tau - (-\overline{A}_1\alpha - \overline{A}_2\alpha_t - v\cdot\nabla\overline{\tau} + h1_{\mathcal{O}}))||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\
&+||e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(L_3\alpha - (\overline{B}_2\tau - v\cdot\nabla\overline{\alpha}))||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

respectivamente.

3.1 Controlabilidade Nula Para o Sistema Linear

Observação 3.1.1. *Note que*

$$T - t \longrightarrow 0^+, \quad \textit{quando } t \longrightarrow T^-,$$

logo

$$-\beta(t) = \frac{e^{2\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda\eta(x)}}{\widetilde{\ell}(t)^4} = \frac{e^{2\lambda\|\eta\|_\infty} - e^{\lambda\eta(x)}}{(T-t)^4} \longrightarrow +\infty, \quad \textit{quando } t \longrightarrow T^-.$$

E então,

$$e^{-s\beta/2} \longrightarrow +\infty, \quad quando \ t \longrightarrow T^-. \tag{3.2}$$

Temos ainda que

$$(\gamma^*(t))^{-1/4} = \frac{(T-t)}{e^{\frac{1}{4}\lambda\|\eta\|_\infty}} \longrightarrow 0^+, \quad quando \ t \longrightarrow T^-.$$

Como qualquer função exponencial vai ao infinito mais rápido do que qualquer potência vai à zero, segue que

$$e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4} \longrightarrow +\infty \ \ quando \ t \to T^-.$$

Além disso,

$$(\gamma(x,t))^{1/4} = \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)} = \frac{e^{\frac{1}{4}\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{T-t} \longrightarrow +\infty, \quad quando \ t \longrightarrow T^-. \tag{3.3}$$

Por (3.2) e (3.3), temos

$$e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4} \longrightarrow +\infty, \quad quando \ t \to T^-.$$

Do fato de que $(v, \mathcal{H}, \tau, h, \alpha) \in E_N$, $N = 2$ *ou* $N = 3$, *e portanto,* $(v, \mathcal{H}, \tau, h, \alpha) \in E_0$, *então*

$$e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H),$$
$$e^{-s\beta/2}\tau \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

e

$$e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}\alpha \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Como

$$e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4} \longrightarrow +\infty \ \ quando \ t \to T^-$$

e

$$e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H),$$

então $v(T) = 0$.

De forma análoga, como

$$e^{-s\beta/2} \longrightarrow +\infty, \quad quando \ t \longrightarrow T^- \tag{3.4}$$

e

$$e^{-s\beta/2}\tau \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

então $\tau(T) = 0$.

Temos, ainda,

$$e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4} \longrightarrow +\infty, \quad quando \ t \to T^-,$$

e

$$e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}\alpha \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

então $\alpha(T) = 0$.

Logo, concluímos que $(v,\tau,\alpha)(T) = 0$. *Desse modo,* (v,p,τ,α), *solução do sistema linearizado (11), é tal que* $v(\cdot,T) = 0$, $\tau(\cdot,T) = 0$ *e* $\alpha(\cdot,T) = 0$.

Proposição 3.1.2. *Consideremos* $(\overline{v},\overline{\tau},\overline{\alpha})$ *satisfazendo (5) e (6) e que as seguintes hipóteses sejam válidas:*

- *Se* $N = 2 : (v_0,\tau_0,\alpha_0) \in \boldsymbol{H} \times \widetilde{E}_2 \times \widetilde{E}_2$, *onde* $\widetilde{E}_2 = L^q(\Omega)$, *com* $q > 4$, *como em (7) e*

  $$(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}\vartheta, e^{-s\beta}\vartheta_1, e^{-s\beta}\gamma^{1/2}\vartheta_2) \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^2) \times [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^2.$$

- *Se* $N = 3 : (v_0,\tau_0,\alpha_0) \in \left(\boldsymbol{H} \cap (L^4(\Omega))^3\right) \times \widetilde{E}_3 \times \widetilde{E}_3$, *onde* $\widetilde{E}_3 = L^q(\Omega)$, *com* $q > 5$, *como em (7) e*

  $$(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}\vartheta, e^{-s\beta}\vartheta_1, e^{-s\beta}\gamma^{1/2}\vartheta_2) \in L^2(0,T;(W^{-1,6}(\Omega))^3) \times [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^2.$$

Então, para todo $T > 0$, *existe um par de controles* $(\mathcal{H},h) \in L^2(\mathcal{O}\times(0,T))^N \times L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ *tal que se* (v,p,τ,α) *é solução do problema linearizado (11), então* $(v,\tau,\alpha) \in E_N$. *Em particular,*

$$v(\cdot,T) = 0, \quad \tau(\cdot,T) = 0 \quad e \quad \alpha(\cdot,T) = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos procurar por uma quíntupla $(v,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)$ satisfazendo o sistema (3.5) abaixo. Para isso, seguiremos o método introduzido por Fursikov e Imanuvilov [16].

Consideremos então o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{l}
\inf \dfrac{1}{2}\Bigg(\displaystyle\int_Q (e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|v|^2 + e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\tau|^2 + e^{-2s\beta}(\gamma^*)^2|\alpha|^2)dxdy \\
+ \displaystyle\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-3}|\mathcal{H}|^2 + e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-5}|h|^2)dxdy\Bigg) \\
\text{sujeito a } \mathcal{H} \in L^2(Q), h \in (L^2(Q))^N, \operatorname{supp}\mathcal{H}, \operatorname{supp} h \subset \mathcal{O}\times(0,T) \text{ e} \\
\left\{\begin{array}{lll}
L_1 v + \nabla p = \vartheta + \overline{C}_1\Delta\alpha - \overline{C}_2\nabla\alpha + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha})\alpha + \overline{A}_3\tau - \overline{A}_4\alpha + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}} & \text{em} & Q, \\
\nabla\cdot v = 0, & \text{em} & Q, \\
L_2\tau = \vartheta_1 - \overline{A}_1\alpha - \overline{A}_2\alpha_t - v\cdot\nabla\overline{\tau} + h1_{\mathcal{O}} & \text{em} & Q, \\
L_3\alpha = \vartheta_2 + \overline{B}_2\tau - v\cdot\nabla\overline{\alpha} & \text{em} & Q, \\
v = 0, \dfrac{\partial\tau}{\partial\eta} = 0, \dfrac{\partial\alpha}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\
v(\cdot,0) = v_0, \tau(\cdot,0) = \tau_0, \alpha(\cdot,0) = \alpha_0, v(T) = \tau(T) = \alpha(T) = 0 & \text{em} & \Omega,
\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{3.5}$$

em que $L_1 v$, $L_2\tau$ e $L_3\alpha$ são dados em (3.1).

Suponhamos por ora que (3.5) possui uma solução $(\widehat{v}, \widehat{p}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\tau}, \widehat{h}, \widehat{\alpha})$. Provaremos essa afirmação mais adiante. Então, pelo Princípio de Lagrange, existem variáveis duais $(\widehat{z}, \widehat{q}, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$, tais que

$$\begin{cases} \widehat{v} = e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_1^*\widehat{z} + \nabla\widehat{q} + (\nabla\overline{z})\widehat{\varphi} + (\nabla\overline{\alpha})\widehat{\psi} + (\nabla\overline{\tau})\varphi) & \text{em} \quad Q, \\ \nabla \cdot \widehat{z} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \widehat{\mathcal{H}} = -e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3\widehat{z} & \text{em} \quad \mathcal{O} \times (0,T), \\ \widehat{\tau} = e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_2^*\widehat{\varphi} + C_1(g_N \cdot \widehat{z}) - \overline{B}_2\widehat{\psi}) & \text{em} \quad Q, \\ \widehat{h} = -e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5\widehat{\varphi} & \text{em} \quad \mathcal{O} \times (0,T), \\ \widehat{\alpha} = e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}(L_3^*\widehat{\psi} - \overline{C}_1\Delta\widehat{z} - \overline{C}_2\, div(\widehat{z}) - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha} \cdot \widehat{z}) & \\ \qquad - \ \overline{A}_2\widehat{\varphi}_t + \ C_2(g_N \cdot \widehat{z}) + \overline{A}_1\widehat{\varphi}) & \text{em} \quad Q, \\ \widehat{z} = 0, \ \dfrac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\eta} = 0, \ \dfrac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.6}$$

em que

$$\begin{aligned} L_1^*\widehat{z} &= -\widehat{z}_t - k_1\Delta\widehat{z} + D\widehat{z}\overline{v}, \\ L_2^*\widehat{\varphi} &= -\widehat{\varphi}_t - k\Delta\widehat{\varphi} - \overline{v} \cdot \nabla\widehat{\varphi} \end{aligned}$$

e

$$L_3^*\widehat{\psi} = -\widehat{\psi}_t - \gamma\epsilon\Delta\widehat{\psi} - (\overline{v} \cdot \nabla\widehat{\psi}) - \overline{B}_1\widehat{\psi}.$$

Agora, definamos o conjunto

$$P_0 = \Big\{(w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in (C^\infty(\overline{Q}))^{N+2}; \nabla \cdot w = 0 \text{ em } Q, \ \ w = 0 \text{ em } \Sigma,$$
$$\int_{\mathcal{O}} \pi(x,t)dx = 0 \text{ em } (0,T), \ \ \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta} = \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\eta} = 0 \text{ em } \Sigma\Big\}$$

e também o operador bilinear $a : P_0 \times P_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} & a((\widehat{z}, \widehat{q}, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi}), (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})) \\ & = \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_1^*\widehat{z} + \nabla\widehat{q} + (\nabla\overline{z})\widehat{\varphi} + (\nabla\overline{\tau})\widehat{\varphi} + (\nabla\overline{\alpha})\widehat{\psi}) \\ & (L_1^*w + \nabla\pi + (\nabla\overline{z})\widetilde{\varphi} + (\nabla\overline{\tau})\widetilde{\varphi} + (\nabla\overline{\alpha})\widetilde{\psi})dxdt \\ & + \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_2^*\widehat{\varphi} + C_1(g_N \cdot \widehat{z}) - \overline{B}_2\widehat{\psi})(L_2^*\widetilde{\varphi} + C_1(g_N \cdot w) - \overline{B}_2\widetilde{\psi})dxdt + \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2} \\ & \Big((L_3^*\widehat{\psi} - \gamma\epsilon(\nabla\overline{\alpha} \cdot \Delta\widehat{z}) - \overline{C}_2\operatorname{div}(\widehat{z}) + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha} \cdot \widehat{z}) - \overline{A}_2\widehat{\varphi}_t + C_2(g_N \cdot \widehat{z}) + \overline{A}_1\widehat{\varphi}) \\ & (L_3^*\widetilde{\psi} - \gamma\epsilon(\nabla\overline{\alpha} \cdot \Delta w) - \overline{C}_2\operatorname{div}(w) - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha} \cdot w) - \overline{A}_2\widetilde{\varphi}_t + C_2(g_N \cdot w) + \overline{A}_1\widetilde{\varphi})\Big)dxdt \\ & + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5\widehat{\varphi}\widetilde{\varphi}\,dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3\widehat{z} \cdot w\,dxdt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Definamos ainda o operador linear $\mathcal{L} : P_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}, (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})\rangle &= \int_0^T \langle\vartheta(t), w(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}dt + \int_0^T \langle\vartheta_1(t), \widetilde{\varphi}(t)\rangle_{L^2(\Omega), H^1(\Omega)}dt \\ &+ \int_0^T \langle\vartheta_2(t), \widetilde{\psi}(t)\rangle_{L^2(\Omega), H^1(\Omega)}dt + \int_\Omega [v_0 \cdot w(0) + \tau_0 \cdot \widetilde{\varphi}(0) + \alpha_0 \cdot \widetilde{\psi}(0)]dx. \end{aligned}$$

Provaremos agora que o problema (3.5) possui solução. Inicialmente, vamos provar que existe exatamente uma quádrupla $(\widehat{z}, \widehat{q}, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$ tal que

$$a((\widehat{z}, \widehat{q}, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi}), (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})) = \langle \mathcal{L}, (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \rangle, \quad \forall (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in P_0, \tag{3.8}$$

em um espaço apropriado. Em seguida, vamos definir $\widehat{v}$, $\widehat{\mathcal{H}}$, $\widehat{\tau}$ e $\widehat{h}$ como em (3.6) e verificar que $(\widehat{v}, \widehat{q}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\tau}, \widehat{h}, \widehat{\alpha})$ satisfaz (3.5).

Assim, consideremos então o espaço linear P_0 e o operador bilinear $a(\cdot, \cdot)$ em P_0. Observemos que a desigualdade de observabilidade dada pela Proposição 0.0.7 vale para todo $(w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in P_0$, isto é,

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\beta}\gamma|\nabla w|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^3|w|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}|\nabla\widetilde{\varphi}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^2|\widetilde{\varphi}|^2 dxdt \\
&+ \int_Q e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\widetilde{\psi}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\psi}|^2 dxdt + ||w(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{\varphi}(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{\psi}(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C(T, s, \lambda)\left(\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}_1|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2 dxdt\right) \\
&+ C(T, s, \lambda)\left(\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5|\widetilde{\varphi}|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3|w|^2 dxdt\right) \\
&= C(T, s, \lambda)\Big(\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_1^* w + \nabla\pi + (\nabla\overline{z})\widetilde{\varphi} + (\nabla\overline{\tau})\widetilde{\varphi} + (\nabla\overline{\alpha})\widetilde{\psi}) \\
&(L_1^* w + \nabla\pi + (\nabla\overline{z})\widetilde{\varphi} + (\nabla\overline{\tau})\widetilde{\varphi} + (\nabla\overline{\alpha})\widetilde{\psi}) dxdt \\
&+ \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_2^*\widetilde{\varphi} + C_1(g_N \cdot w) - \overline{B}_2\widetilde{\psi})(L_2^*\widetilde{\varphi} + C_1(g_N \cdot w) - \overline{B}_2\widetilde{\psi}) dxdt + \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2} \\
&\Big((L_3^*\widetilde{\psi} - \gamma\epsilon(\nabla\overline{\alpha}\cdot\Delta w) - \overline{C}_2\,\mathrm{div}(w) - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot w) - \overline{A}_2\widetilde{\varphi}_t + C_2(g_N\cdot w) + \overline{A}_1\widetilde{\varphi}) \\
&(L_3^*\widetilde{\psi} - \gamma\epsilon(\nabla\overline{\alpha}\cdot\Delta w) - \overline{C}_2\,\mathrm{div}(w) - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot w) - \overline{A}_2\widetilde{\varphi}_t + C_2(g_N\cdot w) + \overline{A}_1\widetilde{\varphi})\Big) dxdt \\
&+ \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5(\widetilde{\varphi})^2\, dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3 w^2\, dxdt\Big) \\
&= C(T, s, \lambda)\, a((w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}), (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})), \quad \forall (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in P_0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

O operador bilinear $a(\cdot, \cdot)$ define um produto interno em P_0, uma vez que os termos envolvidos na definição de $a(\cdot, \cdot)$ são lineares. Neste sentido, consideremos agora o espaço P, dado pelo completamento de P_0 com a norma induzida pelo produto interno $a(\cdot, \cdot)$, que vamos detonar por $|| \cdot ||_P$. Dessa maneira, o operador bilinear $a(\cdot, \cdot)$ também define um produto interno em P. Vamos provar que P é um espaço de Hilbert munido do produto interno $a(\cdot, \cdot)$ e $a(\cdot, \cdot)$ é um operador bilinear contínuo e coercivo em P.

Para mostrar que $a(\cdot, \cdot)$ é um operador bilinear contínuo, usamos o fato dela definir um produto interno em P para aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, ou seja,

$$|a((w_1, \pi_1, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\psi}_1), (w_2, \pi_2, \widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_2))| \leqslant \|(w_1, \pi_1, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\psi}_1)\| \|(w_2, \pi_2, \widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_2)\|$$

para todo $(w_1, \pi_1, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\psi}_1), (w_2, \pi_2, \widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\psi}_2)$ em P.

Agora, como $a(\cdot,\cdot)$ determina um produto interno em P, então

$$a((w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) = \|(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|_P^2,$$

para todo $(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in P$, ou seja, $a(\cdot,\cdot)$ é operador bilinear coercivo.

Vamos também introduzir o operador linear $\mathcal{L}$ para todo $(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in P$. Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{L},(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\rangle| &\leqslant ||e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta||_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))}||e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w||_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}\\
&+ ||e^{-s\beta}\vartheta_1||_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}||e^{s\beta}\widetilde{\varphi}||_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}\\
&+ ||e^{-s\beta}\gamma^{\frac{1}{2}}\vartheta_2||_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}||e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}||_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} + ||v_0||_{\boldsymbol{H}}||w(0)||_{\boldsymbol{H}}\\
&+ ||\tau_0||_{L^2(\Omega)}||\widetilde{\varphi}(0)||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha_0||_{L^2(\Omega)}||\widetilde{\psi}(0)||_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

para todo $(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in P$.

Observemos que $e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}$ e a função w dependem de $x \in \Omega$ e $t \in [0,T]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
||e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &= \int_0^T ||e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w||^2_{H_0^1(\Omega)}dt = \int_0^T\int_\Omega |\nabla(e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w)|^2dxdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega |\nabla(e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}})\,w + e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla w|^2dxdt \qquad (3.11)\\
&\leqslant C\left(\int_0^T\int_\Omega |(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla(e^{s\beta})\,w|^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega |e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla w|^2dxdt\right).
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar a primeira parcela da soma do lado direito de (3.11), isto é, $\int_0^T\int_\Omega |(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla(e^{s\beta})\,w|^2dxdt$. Por definição $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$, então existe uma constante $C > 0$ tal que $\left|\dfrac{\partial\eta(x)}{\partial x_n}\right| \leqslant C$, para todo $x \in \Omega$ e todo $n \in \{1,...,N\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\beta(x)}{\partial x_n}\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{e^{\lambda\eta(x)} - e^{2\lambda\|\eta\|_\infty}}{\widetilde{\ell}(t)^4}\right)\right| = \left|\lambda\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_n}e^{\lambda\eta(x)}\frac{1}{\widetilde{\ell}(t)^4}\right|\\
&\leqslant C\lambda\frac{e^{\lambda\eta(x)}}{\widetilde{\ell}(t)^4} \leqslant C\lambda\frac{e^{\lambda(\eta(x)+\|\eta\|_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)^4} = C\lambda\gamma. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Usando (3.12) temos

$$\begin{aligned}
|\nabla(e^{s\beta})| &\leqslant \left|\frac{\partial(e^{s\beta})}{\partial x_1}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial(e^{s\beta})}{\partial x_N}\right|\\
&= \left|s\,e^{s\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right| + \cdots + \left|s\,e^{s\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x_N}\right|\\
&\leqslant Cs\lambda e^{s\beta}\gamma = C(\lambda,s)e^{s\beta}\gamma. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T\int_\Omega |(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla(e^{s\beta})\,w|^2dxdt \leqslant \int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^*\gamma^2|w|^2dxdt. \qquad (3.14)$$

Aplicando (3.14) em (3.11), e usando o fato de $\gamma^*(t) := \min_{x\in\overline{\Omega}} \gamma(x,t)$, temos

$$\begin{aligned}
&||e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w||^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))}\\
&= \int_0^T ||e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w||^2_{H^1_0(\Omega)}dt = \int_0^T\int_\Omega |\nabla(e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w)|^2dxdt\\
&= \int_0^T\int_\Omega |\nabla(e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}})\,w + e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla w|^2dxdt\\
&\leqslant C\left(\int_0^T\int_\Omega |(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla(e^{s\beta})\,w|^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega |e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}\nabla w|^2dxdt\right)\\
&\leqslant C\left(\int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^*\gamma^2|w|^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^*|\nabla w|^2dxdt\right)\\
&\leqslant C\left(\int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^3|w|^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\nabla w|^2dxdt\right)\\
&\leqslant C\Big(\int_Q e^{2s\beta}\gamma|\nabla w|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^3|w|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}|\nabla\widetilde{\varphi}|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^2|\widetilde{\varphi}|^2dxdt\\
&+ \int_Q e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\widetilde{\psi}|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\psi}|^2dxdt + ||w(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{\varphi}(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{\psi}(0)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\leqslant C(T,s,\lambda)a((w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) = C\|(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|^2_P,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da desigualdade de observabilidade (3.9) para $w, \widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$. Então,

$$||e^{s\beta}(\gamma^*)^{\frac{1}{2}}w||_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leqslant C||(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})||_P. \tag{3.15}$$

Agora, vamos estimar $||e^{s\beta}\widetilde{\varphi}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$. Primeiramente, temos

$$\begin{aligned}
||e^{s\beta}\widetilde{\varphi}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &= \int_0^T ||e^{s\beta}\widetilde{\varphi}||_{H^1(\Omega)}dt\\
&= \int_0^T\left(\int_\Omega |e^{s\beta}\widetilde{\varphi}|^2dx + \int_\Omega |\nabla(e^{s\beta}\widetilde{\varphi})|^2dx\right)dt.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Para estimar a primeira parcela do lado direito da igualdade (3.16), observemos que como $\eta(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, então $\dfrac{1}{e^{\lambda\eta(x)}} < \widehat{C}$, $\forall x \in \Omega$. Então,

$$1 = \frac{e^{\lambda||\eta||_\infty}}{e^{\lambda||\eta||_\infty}}\frac{e^{\lambda\eta(x)}}{e^{\lambda\eta(x)}}\frac{(\widetilde{\ell}(t))^4}{(\widetilde{\ell}(t))^4} = \frac{1}{e^{\lambda||\eta||_\infty}}\frac{e^{\lambda||\eta||_\infty+\lambda\eta(x)}}{(\widetilde{\ell}(t))^4}\frac{(\widetilde{\ell}(t))^4}{e^{\lambda\eta(x)}} \leqslant \widehat{C}\gamma(x,t),$$

para alguma constante $\widehat{C} > 0$, uma vez que $\dfrac{1}{e^{\lambda||\eta||_\infty}} < 1$. Logo,

$$1 \leqslant \widehat{C}^2\,\gamma^2(x,t),$$

e assim

$$|e^{s\beta}\widetilde{\varphi}|^2 \leqslant Ce^{2s\beta}\gamma^2|\widetilde{\varphi}|^2,$$

em que $\widehat{C}^2 = C$.

Vamos agora estimar a segunda parcela do lado direito da igualdade (3.16), isto é, $|\nabla(e^{s\beta}\widetilde{\varphi})|$. De (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla(e^{s\beta}\widetilde{\varphi})| &\leqslant |\nabla(e^{s\beta})\widetilde{\varphi}| + |e^{s\beta}\nabla\widetilde{\varphi}| \\ &\leqslant |C(s,\lambda)e^{s\beta}\gamma\widetilde{\varphi}| + |e^{s\beta}\nabla\widetilde{\varphi}|. \end{aligned}$$

Então, pela Proposição (1.3.5)

$$\begin{aligned} |\nabla(e^{s\beta}\widetilde{\varphi})|^2 &\leqslant (\,|C(s,\lambda)e^{s\beta}\gamma\widetilde{\varphi}| + |e^{s\beta}\nabla\widetilde{\varphi}|\,)^2 \\ &\leqslant 2^2\left(C(s,\lambda)|e^{s\beta}\gamma\widetilde{\varphi}|^2 + |e^{s\beta}\nabla\widetilde{\varphi}|^2\right) \\ &\leqslant C(s,\lambda)(e^{2s\beta}\gamma^2|\widetilde{\varphi}|^2 + e^{2s\beta}|\nabla\widetilde{\varphi}|^2). \end{aligned}$$

Portanto, da desigualdade de observabilidade (14) e de (3.9) segue que

$$\begin{aligned} & ||e^{s\beta}\widetilde{\varphi}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ \leqslant\;& C(T,s,\lambda)\left(\int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^2|\widetilde{\varphi}|^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}|\nabla\widetilde{\varphi}|^2dxdt\right) \\ \leqslant\;& C(T,s,\lambda)\Bigg(\int_Q e^{2s\beta}\gamma|\nabla w|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^3|w|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}|\nabla\widetilde{\varphi}|^2dxdt \\ +\;& \int_Q e^{2s\beta}\gamma^2|\widetilde{\varphi}|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\widetilde{\psi}|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\psi}|^2dxdt \\ +\;& ||w(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{\varphi}(0)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\widetilde{\psi}(0)||^2_{L^2(\Omega)}\Bigg) \\ \leqslant\;& C(T,s,\lambda)\left(\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}|\widetilde{\vartheta}_1|^2dxdt + \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}|\widetilde{\vartheta}_2|^2dxdt\right) \\ +\;& C(T,s,\lambda)\left(\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5|\widetilde{\varphi}|^2dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3|w|^2dxdt\right) \\ \leqslant\;& C(T,s,\lambda)\,a((w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})). \end{aligned}$$

Então,

$$||e^{s\beta}\widetilde{\varphi}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C(a((w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})))^{\frac{1}{2}} = C\,\|(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|_P. \tag{3.17}$$

Por fim, estimaremos $||e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$. Notemos que

$$\begin{aligned} ||e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &= \int_0^T ||e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}||^2_{H^1(\Omega))}dt \\ &= \int_0^T\left(\int_\Omega |e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}|^2dx + \int_\Omega |\nabla(e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi})|^2dx\right)dt \end{aligned} \tag{3.18}$$

e

$$|e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}|^2 = e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\widetilde{\psi}|^2.$$

Das definições de η em (2.1), de $\widetilde{\ell}$ em (2.22) e de γ em (2.23), segue que

$$\gamma^{-1} = \frac{\widetilde{\ell}(t)^4}{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}} = \frac{1}{e^{\lambda||\eta||_\infty}} \frac{\widetilde{\ell}(t)^4}{e^{\lambda\eta(x)}} \leqslant \frac{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)^4} = \gamma, \tag{3.19}$$

para λ suficientemente grande. Então,

$$|e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}|^2 \leqslant Ce^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\psi}|^2. \tag{3.20}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.3.5,

$$\begin{aligned} |\nabla(e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi})|^2 &= |\nabla(e^{s\beta})\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi} + e^{s\beta}\nabla(\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi})|^2 \\ &\leqslant 2^2\left(|\nabla(e^{s\beta})\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}|^2 + |e^{s\beta}\nabla(\gamma^{-\frac{1}{2}})\widetilde{\psi} + e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla\widetilde{\psi}|^2\right) \\ &\leqslant 2^2\left(|\nabla(e^{s\beta})\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}|^2 + 2^2\left(|e^{s\beta}\nabla(\gamma^{-\frac{1}{2}})\widetilde{\psi}|^2 + |e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla\widetilde{\psi}|^2\right)\right). \end{aligned}$$

De (3.13), segue que $|\nabla(e^{s\beta})| \leqslant C(s,\lambda)e^{s\beta}\gamma$ e como

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial x_n} &= \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)^4}\right) = \lambda\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_n}\left(\frac{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)^4}\right) \\ &\leqslant C(\lambda)\left(\frac{e^{\lambda(\eta(x)+||\eta||_\infty)}}{\widetilde{\ell}(t)^4}\right) = C(\lambda)\gamma, \end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $n \in \{1, ..., N\}$, temos de (3.21) que

$$|\nabla(\gamma^{-\frac{1}{2}})| = \left|-\frac{1}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\nabla\gamma\right| \leqslant \left|C(\lambda)\left(-\frac{1}{2}\gamma^{-\frac{3}{2}}\gamma\right)\right| = |C(\lambda)\gamma^{-\frac{1}{2}}|.$$

Consequentemente,

$$|e^{s\beta}\nabla(\gamma^{-\frac{1}{2}})\widetilde{\psi}|^2 \leqslant C(\lambda)e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\widetilde{\psi}|^2.$$

Além disso, de (3.19) segue que $\gamma^{-1} \leqslant C(\lambda)\gamma$, para λ suficientemente grande, e daí

$$|e^{s\beta}\nabla(\gamma^{-\frac{1}{2}})\widetilde{\psi}|^2 \leqslant Ce^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\psi}|^2. \tag{3.22}$$

E, por fim,

$$|e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\nabla\widetilde{\psi}|^2 = e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\widetilde{\psi}|^2. \tag{3.23}$$

Portanto, substituindo (3.20), (3.22) e (3.23) em (3.18), segue que

$$\begin{aligned} ||e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &\leqslant C\left(\int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma|\widetilde{\psi}|^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega e^{2s\beta}\gamma^{-1}|\nabla\widetilde{\psi}|^2dxdt\right) \\ &\leqslant C(T,s,\lambda)\, a((w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) \\ &= \|(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|^2_P, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da desigualdade de observabilidade (3.9) para $w, \widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$. Ou seja,

$$||e^{s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C||(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})||_P. \tag{3.24}$$

Agora, das hipóteses da Proposição 3.1.2, temos

$$e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta \in L^2(0,T;(W^{-1,6}(\Omega))^3),$$

$$e^{-s\beta}\vartheta_1, e^{-s\beta}\gamma^{\frac{1}{2}}\vartheta_2 \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))'),$$

$$v_0 \in \boldsymbol{H} \cap (L^4(\Omega))^3, \ \ \tau_0 \in L^2(\Omega) \ \text{ e } \ \alpha_0 \in L^2(\Omega).$$

Observe que as hipóteses para $N = 2$ são satisfeitas pelas afirmações acima. E ainda, como $w, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} \in P_0$, então $w(0), \widetilde{\varphi}(0), \widetilde{\psi}(0) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ e limitadas em $\overline{\Omega}$. Como $C^\infty(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que

$$||w(0)||_{\boldsymbol{H}} \leqslant C||w(0)||_{\boldsymbol{H}\cap(L^4(\Omega))^3} \leqslant C||w(0)||_{C^\infty(\overline{\Omega})},$$

$$||\widetilde{\varphi}(0)||_{L^2(\overline{\Omega})} \leqslant C||\widetilde{\varphi}(0)||_{C^\infty(\overline{\Omega})}$$

e

$$||\widetilde{\psi}(0)||_{L^2(\overline{\Omega})} \leqslant C||\widetilde{\psi}(0)||_{C^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Agora, de (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} ||w(0)||_{P_0} + ||\widetilde{\varphi}(0)||_{P_0} + ||\widetilde{\psi}(0)||_{P_0} &\leqslant C\left(a((w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}))\right)^{1/2} \\ &= C\,||(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})||_{P_0}. \end{aligned}$$

Usando a densidade de P_0 em P, temos

$$||w(0)||_P + ||\widetilde{\varphi}(0)||_P + ||\widetilde{\psi}(0)||_P \leqslant C\,||(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})||_P. \tag{3.25}$$

Portanto, substituindo (3.15), (3.17), (3.24) e (3.25) na desigualdade (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{L},(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\rangle &\leqslant C\Big(||e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta||^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + ||e^{-s\beta}\vartheta_1||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &+ ||e^{-s\beta}\gamma^{\frac{1}{2}}\vartheta_2||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||v_0||_{\boldsymbol{H}} \\ &+ ||\tau_0||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha_0||_{L^2(\Omega)}\Big)||(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})||_P. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Logo, o operador linear $\mathcal{L}$ é contínuo em P.

Assim, o operador linear $\mathcal{L}$ pertence ao espaço dual do espaço P. Como mostramos que o operador bilinear $a(.,.)$ é contínuo e coercivo em P, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única quádrupla $(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi}) \in P$ tal que

$$a((\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi}),(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) = \langle L,(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\rangle, \tag{3.27}$$

para todo $(w,\pi,\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in P$.

Mostraremos agora que $(\widehat{v},\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\tau},\widehat{h},\ \widehat{\alpha})$ definida como em (3.6) é, de fato, solução do problema (3.5). Em outras palavras, vamos provar que $(\widehat{v},\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\tau},\widehat{h},\ \widehat{\alpha})$ satisfaz (3.5). Logo, temos que provar as duas afirmações a seguir:

Afirmação 1: Temos que $(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})\in P$ e verifica

$$\int_Q\Big(e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{v}|+e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{\tau}|^2+e^{-2s\beta}(\gamma^*)^2|\widehat{\alpha}|^2\Big)dxdy$$
$$+\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\Big(e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-3}|\widehat{\mathcal{H}}|^2+e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-5}|\widehat{h}|^2\Big)dxdy<+\infty.$$

Afirmação 2: $(\widehat{v},\widehat{p},\widehat{\tau},\widehat{\alpha})$ é solução do problema (3.5), correspondente às funções controle $(\widehat{\mathcal{H}},\widehat{h})$.

Prova da Afirmação 1: Note que $(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})\in P$, e de (3.6) temos

$$\begin{aligned}
&a((\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi}),(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi}))dxdt\\
&=\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_1^*\widehat{z}+\nabla\widehat{q}+(\nabla\overline{\tau})\widehat{\varphi}+(\nabla\overline{\alpha})\widehat{\psi})(L_1^*\widehat{z}+\nabla\widehat{q}+(\nabla\overline{\tau})\widehat{\varphi}+(\nabla\overline{\alpha})\widehat{\psi})dxdt\\
&+\int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_1^*\widehat{\varphi}+C_1(g_N\cdot\widehat{z})-\overline{B}_2\widehat{\psi})(L_2^*\widehat{\varphi}+C_1(g_N\cdot\widehat{z})-\overline{B}_2\widehat{\psi})dxdt\\
&+\int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}(L_3^*\widehat{\psi}-\overline{C}_1\Delta\widehat{z}-\overline{C}_2div(\widehat{z})-\overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot\widehat{z})-\overline{A}_2\widehat{\varphi}_t+C_2(g_N\cdot\widehat{z})+\overline{A}_1\widehat{\varphi})\\
&\cdot(L_3^*\widehat{\psi}-\overline{C}_1\Delta\widehat{z}-\overline{C}_2div(\widehat{z})-\overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot\widehat{z})-\overline{A}_2\widehat{\varphi}_t+C_2(g_N\cdot\widehat{z})+\overline{A}_1\widehat{\varphi})dxdt\\
&+\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3\widehat{z}\cdot\widehat{z}\;dxdt+\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\varphi}\;dxdt\\
&=\int_Q\left(e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{v}|^2+e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{\tau}|^2+e^{-2s\beta}(\gamma^*)^2|\widehat{\alpha}|^2\right)dxdt\\
&+\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\Big(e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-3}|\widehat{\mathcal{H}}|^2+e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-5}|\widehat{h}|^2\Big)dxdt.
\end{aligned}\tag{3.28}$$

Logo, como o operador bilinear $a(\cdot,\cdot)$ define um produto interno em P, de (3.28) obtemos

$$\int_Q\Big(e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{v}|+e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{\tau}|^2+e^{-2s\beta}(\gamma^*)^2|\widehat{\alpha}|^2\Big)dxdy$$
$$+\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\Big(e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-3}|\widehat{\mathcal{H}}|^2+e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-5}|\widehat{h}|^2\Big)dxdy<+\infty.$$

Prova da Afirmação 2: Note que, da Afirmação 1,

$\int_Q e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{v}|^2dxdt<+\infty$, $\int_Q e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{\tau}|^2dxdt<+\infty$ e $\int_Q e^{-2s\beta}(\gamma^*)^2|\widehat{\alpha}|^2dxdt<+\infty.$

Como

$$\int_Q|\widehat{v}|^2dxdt\leqslant C\int_Q e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{v}|^2dxdt,$$

$$\int_Q|\widehat{\tau}|^2dxdt\leqslant C\int_Q e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-1}|\widehat{\tau}|^2dxdt$$

e

$$\int_Q|\widehat{\alpha}|^2dxdt\leqslant C\int_Q e^{-2s\beta}(\gamma^*)^2|\widehat{\alpha}|^2dxdt$$

para algum $C > 0$, então $\widehat{v} \in L^2(Q)^2$, $\widehat{\tau} \in L^2(Q)$ e $\widehat{\alpha} \in L^2(Q)$.

Também temos que $\widehat{\mathcal{H}} \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2$ e $\widehat{h} \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, uma vez que da Afirmação 1,

$$\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-3}|\widehat{\mathcal{H}}|^2 dxdt < +\infty \text{ e } \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{-2s\beta}(\widehat{\gamma})^{-5}|\widehat{h}|^2 dxdt < +\infty.$$

Seja agora $(\widetilde{v}, \widetilde{q}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\alpha})$ uma solução fraca do problema linearizado (11). Multiplicando a primeira, a segunda e a terceira equações deste problema linearizado por $w, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$, respectivamente, e integrando em Q, segue que

$$\begin{aligned}
&a((\widehat{z}, \widehat{q}, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi}), (w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})) \\
&= \int_Q \widehat{v}(L_1^* w + \nabla\pi + (\nabla\overline{\tau})\widetilde{\varphi} + (\nabla\overline{\alpha})\widetilde{\psi})dxdt + \int_Q \widehat{\tau}(L_2^*\widetilde{\varphi} + C_1(g_i \cdot w) - \overline{B}_2\widetilde{\psi})dxdt \\
&+ \int_Q \widehat{\alpha}(L_3^*\widetilde{\psi} - \overline{C}_1\Delta w - \overline{C}_2 div(w) - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot w) - \overline{A}_2\widetilde{\varphi}_t + \overline{C}_2(g_i \cdot w) + \overline{A}_1\widetilde{\varphi})dxdt \\
&= \int_0^T \langle \vartheta(t), w(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \langle \vartheta_1(t), \widetilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega), H^1(\Omega)} dt \\
&+ \int_0^T \langle \vartheta_2(t), \widetilde{\psi}\rangle_{L^2(\Omega), H^1(\Omega)} dt + \int_Q (\widehat{\mathcal{H}} 1_{\mathcal{O}} \cdot w + \widehat{h} 1_{\mathcal{O}}\, \widetilde{\varphi})dxdt \\
&+ \int_\Omega [v_0 \cdot w(0) + \tau_0 \cdot \widetilde{\varphi}(0) + \alpha_0 \cdot \widetilde{\psi}(0)]dx, \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

para todo $(w, \pi, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in P$.

Em outras palavras, de (3.6) e (3.27), temos que $(\widehat{v}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\tau}, \widehat{h}, \widehat{\alpha})$ satisfaz (3.29), ou seja, $(\widehat{v}, \widehat{p}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ é solução fraca do problema linearizado (3.5) associada aos controles $(\mathcal{H}, h)$. Logo, pela unicidade da solução do problema linearizado (3.5) dada em (3.27), concluímos que $(\widehat{v}, \widehat{p}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}) = (\widetilde{v}, \widetilde{q}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\alpha})$ e, portanto, $(\widehat{v}, \widehat{p}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\tau}, \widehat{h}, \widehat{\alpha})$ é solução do problema linearizado (3.5).

Finalmente, resta mostrar que $(\widehat{v}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\tau}, \widehat{h}, \widehat{\alpha}) \in E_N$. Da Afirmação 1, segue que

$$e^{-s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widehat{v}, e^{-s\beta}\gamma^{-\frac{1}{2}}\widehat{\tau}, e^{-s\beta}\gamma\widehat{\alpha}, e^{-s\beta}\gamma^{-\frac{3}{2}}\widehat{\mathcal{H}}1_{\mathcal{O}}, e^{-s\beta}\gamma^{-\frac{5}{2}}\widehat{h}1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q).$$

E por hipótese temos $e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta \in L^2(0,T,(H^{-1}(\Omega))^2)$, $e^{-s\beta}\vartheta_1 \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ e $e^{-s\beta}(\gamma)^{\frac{1}{2}}\vartheta_2 \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$.

Provaremos, agora, que $e^{-\frac{s\beta}{2}}(\gamma^*)^{-\frac{1}{4}}\widehat{v} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})$ e que $e^{\frac{s\beta}{2}}\gamma^{\frac{1}{4}}\tau$, $e^{\frac{s\beta}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}\alpha \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Para isso, consideremos as funções

$$\begin{aligned}
v^* &= e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}\widehat{v}, & p^* &= e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}\widehat{p}, \\
\mathcal{H}^* &= e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}\widehat{\mathcal{H}}, & \tau^* &= e^{s\beta/2}\gamma^{1/4}\widehat{\tau}, \\
h^* &= e^{s\beta/2}\gamma^{1/4}\widehat{h}, & \alpha^* &= e^{s\beta/2}\gamma^{1/2}\widehat{\alpha}, \\
\vartheta^* &= e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}\vartheta, & \vartheta_1^* &= e^{s\beta/2}\gamma^{1/4}\vartheta_1 \text{ e} \\
\vartheta_2^* &= e^{s\beta/2}\gamma^{1/2}\vartheta_2.
\end{aligned}$$

Então, por substituição direta, $(v^*, p^*, \mathcal{H}^*, \tau^*, h^*, \alpha^*)$ satisfaz

$$\begin{cases} L_1 v^* + \nabla p^* = \vartheta^* + \overline{C}_1 \Delta\alpha^* - \overline{C}_2 \nabla\alpha^* + \overline{C}_3 \alpha^* + \overline{A}_3 \tau^* - \overline{A}_4 \alpha^* + \mathcal{H}^* 1_{\mathcal{O}} \\ +(e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t \widehat{v} & \text{em } Q, \\ \\ L_2 \tau^* = \vartheta_1^* - \overline{A}_1 \alpha^* - \overline{A}_2 \alpha_t^* - v^* \cdot \nabla\overline{\tau} + h^* 1_{\mathcal{O}} + (e^{-s\beta/2})_t \widehat{\tau} & \text{em } Q, \\ \\ L_3 \alpha^* = \vartheta_2^* + \overline{B}_2 \tau^* - v \cdot \nabla\overline{\alpha} + (e^{-s\beta/2})\gamma^{1/4})_t \widehat{\alpha} & \text{em } Q, \\ \\ div\ v^* = 0 & \text{em } Q, \\ v^* = 0, \quad \dfrac{\partial\tau^*}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\alpha^*}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \\ v^*(0) = e^{-s\beta(0)/2}(\gamma^*(0))^{-1/4} v_0, \quad \tau^*(0) = e^{s\beta(0)/2}(\gamma(0))^{1/4}\tau_0, \\ \alpha^*(0) = e^{s\beta(0)/2}\gamma^{1/2}(0)\alpha_0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.30}$$

Como

$$\begin{aligned} &\vartheta^*, \mathcal{H}^*, (e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4})_t \widehat{v} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)), \\ &\vartheta_1^*, \vartheta_2^*, h^*, (e^{s\beta/2}\gamma^{1/4})_t \widehat{\tau}, (e^{s\beta/2})\gamma^{1/2})_t \widehat{\alpha} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)), \\ &(v_0, \tau_0, \alpha_0) \in \boldsymbol{H} \times [L^2(\Omega)]^2, \end{aligned}$$

então, por regularidade parabólica, temos

$$v^* \in L^2(0,T; \boldsymbol{V}) \cap L^\infty(0,T; \boldsymbol{H}) \quad \text{e} \quad (\tau^*, \alpha^*) \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

Por fim, vamos mostrar que $v^* \in L^4(0,T; L^{12}(\Omega)^3)$ quando $N = 3$. Para isto, vamos considerar, para cada $b \in L^{4/3}(0,T; L^{12/11}(\Omega)^3)$, o sistema de Stokes

$$\begin{cases} -w_t - \Delta w + \nabla h = b & \text{em } Q, \\ \nabla . w = 0 & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(T) = 0 & \text{em } Q. \end{cases} \tag{3.31}$$

Pelo Lema 1.2.18 existe uma única solução (w, h) do sistema de Stokes (3.31) satisfazendo

$$w \in L^2(0,T; W_0^{1,6/5}(\Omega)^3) \cap C^0([0,T]; L^{4/3}(\Omega)^3), \tag{3.32}$$

dependendo continuamente de b nesses espaços.

Então, v^* deve coincidir com a solução fraca da primeira equação em (3.30), ou seja, a única função $v^* \in L^4(0,T; L^{12}(\Omega)^3)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Q v^* . b\ dxdt = \int_\Omega e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}(0)\ v_0 . w(0)\ dx + \int_0^T \langle F, w\rangle_{W^{-1,6}(\Omega), W_0^{1,6/5}(\Omega)} dt \\ \forall b \in L^{4/3}(0,T; L^{12/11}(\Omega)^3), \end{cases}$$

em que

$$F = \vartheta^* + \overline{C}_1\Delta\alpha^* - \overline{C}_2\nabla\alpha^* + \overline{C}_3\alpha^* + \overline{A}_3\tau^* - \overline{A}_4\alpha^* + \mathcal{H}^*1_{\mathcal{O}} - v^*\cdot\nabla\overline{v} - \overline{v}\cdot\nabla v^*$$

e (w, h) é a solução de (3.31) associado a b. Relembremos que, como já temos $v^* \in L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)$ e $(\tau^*, \alpha^*) \in (L^2(Q))^2$, todos os termos definidos anteriormente fazem sentido em virtude de (3.32) e porque assumimos $v_0 \in (L^4(\Omega))^3$.

Portanto, $v^* \in L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)$, e isso finaliza a demonstração da Proposição 3.1.2. □

3.2 Controlabilidade Local Nula do Sistema Não Linear

Nesta seção vamos estabelecer um resultado que permite concluir a controlabilidade nula local do sistema não linear (9), isto é,

$$\begin{cases}
L_1v + v\cdot\nabla v + \nabla p - \lambda\varepsilon\big(\Delta\alpha\nabla(\alpha+\overline{\alpha}) - \Delta\overline{\alpha}\nabla\alpha\big) & \\
-\dfrac{\lambda}{\varepsilon}\big(F'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla(\alpha+\overline{\alpha}) - F'(\overline{\alpha})\nabla\overline{\alpha}\big) = (C_1\tau + C_2\alpha)gC_3 + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q,\\[2ex]
L_2\tau + l\big(G'(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha})\big)_t + v\cdot\nabla\tau + v\cdot\nabla\overline{\tau} & \\
+l\big(v\cdot\nabla(G(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha}))\big) + l\big(\overline{v}\cdot\nabla(G(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha}))\big) = h1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q,\\[2ex]
L_3\alpha + v\cdot\nabla\alpha + v\cdot\nabla\overline{\alpha} - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}\big(F'(\alpha+\overline{\alpha}) - F'(\overline{\alpha})\big) & \\
\qquad\qquad - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}\big(G'(\alpha+\overline{\alpha})(\tau+\overline{\tau}) - G'(\overline{\alpha})\overline{\tau}\big) = 0 & \text{em } Q,\\[2ex]
div\ v = 0 & \text{em } Q,\\
v = 0, \quad \dfrac{\partial\tau}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma,\\[2ex]
v(\cdot,0) = v_0,\ \ \tau(\cdot,0) = \tau_0,\ \ \alpha(\cdot,0) = \alpha_0 & \text{em } \Omega,
\end{cases}$$

em que L_1v, $L_2\tau$ e $L_3\alpha$ são dados por (3.1).

Para isso, usaremos a seguinte versão do Teorema da Função Inversa, também conhecido como Teorema de Lyusternik.

Teorema 3.2.1. *Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Banach e seja $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A} \in C^1(\mathcal{E};\mathcal{G})$. Sejam, ainda, $e_0 \in \mathcal{E}$, $\mathcal{A}(e_0) = h_0$ e $\mathcal{A}'(e_0) : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ sobrejetora. Então, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $h \in \mathcal{G}$ satisfazendo $\|h - h_0\|_{\mathcal{G}} < \delta$, existe pelo menos uma solução da equação*

$$\mathcal{A}(e) = h, \ \ e \in \mathcal{E}.$$

Aqui, usaremos esse teorema com os espaços $\mathcal{E} = E_N$, $N = 2$ ou $N = 3$, e $\mathcal{G} = G_1 \times G_2$, com

$$G_1 = \begin{cases} L^2(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(H^{-1}(\Omega))^2) \times L^2(e^{-s\beta}(0,T);L^2(\Omega)) \\ \qquad \times L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);L^2(\Omega)) \quad \text{se } N=2, \\ L^2(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3) \times L^2(e^{-s\beta}(0,T);L^2(\Omega)) \\ \qquad \times L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);L^2(\Omega)) \quad \text{se } N=3, \end{cases}$$

$$G_2 = \begin{cases} \boldsymbol{H} \times L^q(\Omega) \times L^q(\Omega) \ \ (q>4) \quad \text{se } N=2, \\ ((L^4(\Omega))^3) \times L^q(\Omega) \times L^q(\Omega) \ \ (q>5) \quad \text{se } N=3 \end{cases}$$

e o operador

$$\mathcal{A} : E_N \to \mathcal{G}$$

dado por

$$\mathcal{A}(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) = \Big(\mathcal{A}_1(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha), \mathcal{A}_2(v,\tau,h,\alpha), \mathcal{A}_3(v,\tau,\alpha), v(0), \tau(0), \alpha(0)\Big),$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) &= L_1 v + v\cdot\nabla v + \nabla p - \lambda\varepsilon\big(\Delta\alpha\nabla(\alpha+\overline{\alpha}) - \Delta\overline{\alpha}\nabla\alpha\big) \\ &- \frac{\lambda}{\varepsilon}\big(F'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla(\alpha+\overline{\alpha}) - F'(\overline{\alpha})\nabla\overline{\alpha}\big) - (C_1\tau + C_2\alpha)gC_3 - \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) &= L_2\tau + l\big(G'(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha})\big)_t + v\cdot\nabla\tau + v\cdot\nabla\overline{\tau} \\ &+ l\big(v.(G'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla(\alpha+\overline{\alpha}))\big) - l\big(v.\nabla G(\overline{\alpha})\big) \\ &+ l\big(\overline{v}\cdot\nabla(G(\alpha+\overline{\alpha}) - G(\overline{\alpha}))\big) - h1_{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) &= L_3\alpha + v\cdot\nabla\alpha + v\cdot\nabla\overline{\alpha} - \frac{\gamma}{\varepsilon}\big(F'(\alpha+\overline{\alpha}) - F'(\overline{\alpha})\big) \\ &- \frac{\gamma}{\varepsilon}\big(G'(\alpha+\overline{\alpha})(\tau+\overline{\tau}) - G'(\overline{\alpha})\overline{\tau}\big), \end{aligned}$$

para todo $(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) \in E_N$.

Na próxima proposição, checaremos as hipóteses necessárias para aplicar o Teorema de Lyusternik, isto é, Teorema 3.2.1.

Proposição 3.2.2. *Sejam $(\overline{v},\overline{\tau},\overline{\alpha}) \in L^\infty(Q)^{N+2}$, $N = 2$ ou $N = 3$. Então, $\mathcal{A} \in C^1(E_N;\mathcal{G})$.*

Demonstração.
Vamos provar que $\mathcal{A} \in C^1(E_N;\mathcal{G})$, ou seja, que a derivada do operador $\mathcal{A}$ é limitada e, consequentemente, contínua. Para isso, vamos dividir a demonstração em alguns casos.

Termos que envolvem as derivadas de F e G na definição do operador $\mathcal{A}$:
Observemos que, das hipóteses (**H**) dadas na Introdução, os termos que envolvem as derivadas de F e G, ou seja, $F'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla(\alpha+\overline{\alpha})$, $\big(G'(\alpha+\overline{\alpha})-G(\overline{\alpha})\big)_t$, $\overline{v}\cdot\nabla(G(\alpha+\overline{\alpha}))$, $F'(\alpha+\overline{\alpha})$ e $G'(\alpha+\overline{\alpha})$ são de classe C^1.

Termos lineares na definição do operador $\mathcal{A}$:
Os termos L_1v, $L_2\tau$, $L_3\alpha$, $\Delta\overline{\alpha}\nabla\alpha$, $C_1\tau\, gC_3$, $C_2\alpha\, gC_3$, $v\cdot\nabla\overline{\tau}$, $v.\nabla G(\overline{\alpha})$ e $v\cdot\nabla\overline{\alpha}$ na definição de $\mathcal{A}$ são lineares e, consequentemente, são de classe C^1.

Termo que não é linear e nem bilinear na definição do operador $\mathcal{A}$:
Note que o termo $v.G'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla\alpha+v.(G'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla\overline{\alpha})$ não é linear nem bilinear. Considerando as hipóteses (**H**), temos que a função G' é de classe C^1, e como v e $\nabla\alpha$ são termos lineares, então são de classe C^1. Logo, como o produto e o produto escalar de funções diferenciáveis é função diferenciável, então $v.G'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla\alpha+v.(G'(\alpha+\overline{\alpha})\nabla\overline{\alpha})$ é de classe C^1.

Termos bilineares na definição do operador $\mathcal{A}$:
Os termos $v.\nabla v$, $v.\nabla\tau$, $v.\nabla\alpha$, além da primeira parcela da soma $\Delta\alpha\nabla(\alpha+\overline{\alpha})=\Delta\alpha\nabla\alpha+\Delta\alpha\nabla\overline{\alpha}$ são bilineares.

Desse modo, o operador

$$\begin{aligned}\mathcal{B}: E_N\times E_N &\longrightarrow G_1\\ \big((v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha),(\widetilde{v},\widetilde{p},\widetilde{\mathcal{H}},\widetilde{\tau},\widetilde{h},\widetilde{\alpha})\big) &\longmapsto \big(v.\nabla\widetilde{v},\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha},v.\nabla\widetilde{\tau},v.\nabla\widetilde{\alpha}\big)\end{aligned} \tag{3.33}$$

é bilinear. Consequentemente, para provar que $\mathcal{A}\in C^1(E_N;\mathcal{G})$ é suficiente mostrar que o operador bilinear dado por (3.33) é contínuo de $E_N\times E_N$ em G_1.

Provaremos agora que o operador bilinear dado por (3.33) é contínuo de $E_N\times E_N$ em G_1.

Para $N=2$ temos $e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v\in L^2(0,T;\boldsymbol{V})\cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})$, $e^{-s\beta/2}\tau$, $e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}\alpha\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, pela definição do espaço E_0. Então, como para $N=2$, $L^\infty(0,T)\hookrightarrow L^4(0,T)$ e $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$, segue que $e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}(v,\widetilde{v})\in L^4(Q)^4$, $e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}(\alpha,\widetilde{\alpha})\in L^4(Q)^2$ e $e^{-s\beta/2}\widetilde{\tau}\in L^4(Q)$, para cada $(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)$, $(\widetilde{v},\widetilde{p},\widetilde{\mathcal{H}},\widetilde{\tau},\widetilde{h},\widetilde{\alpha})\in E_N$. Daí,

$$||(v.\nabla)\widetilde{v}||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(H^{-1}(\Omega))^2)}=||\nabla(v\otimes\widetilde{v})||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(H^{-1}(\Omega))^2)}. \tag{3.34}$$

Do fato do operador

$$\begin{aligned}\nabla: L^2\big(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(L^2(\Omega))^2\big) &\longrightarrow L^2\big(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);((H^{-1}(\Omega))^2\big)\\ v\otimes\widetilde{v} &\longmapsto \nabla(v\otimes\widetilde{v})\end{aligned}$$

ser contínuo temos que

$$||\nabla(v\otimes\widetilde{v})||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(H^{-1}(\Omega))^2)}\leqslant C\,||v\otimes\widetilde{v}||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T;(L^2(\Omega))^2))}.$$

Logo, de (3.34) segue que

$$
\begin{aligned}
& ||(v.\nabla)\widetilde{v}||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(H^{-1}(\Omega))^2)} \\
&= ||\nabla(v\otimes\widetilde{v})||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(H^{-1}(\Omega))^2)} \\
&\leqslant C\,||v\otimes\widetilde{v}||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T;(L^2(\Omega))^2))} \\
&= C\,||(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2})^{1/2}\,(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2})^{1/2}\,(v\otimes\widetilde{v})||_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \\
&\leqslant ||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v||_{(L^4(Q))^2}\,||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}\widetilde{v}||_{(L^4(Q))^2}.
\end{aligned}
$$

Agora, pelo Teorema 1.2.15 temos $L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, e então

$$
\begin{aligned}
\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leqslant C\,\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leqslant C\,\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\,\|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Pela definição do espaço E_0, temos $\alpha,\widetilde{\alpha}\in L^4(0,T;H^4(\Omega))$, e pelo Teorema 1.2.20 com $m = 4$, $N = 2$, $p = 2$ e $k = m-(N/p) = 4-2/2 = 3 > 0$, obtemos $\alpha,\widetilde{\alpha}\in L^4(0,T;H^4(\Omega))$ e

$$
\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^\infty(\Omega))}\leqslant C\,\|\alpha\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}\ \text{ e }\ \|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^\infty(\Omega))}\leqslant C\,\|\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}.
$$

Consequentemente, do fato de $L^\infty(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ segue que

$$
\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\leqslant C\,\|\alpha\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}\ \text{ e }\ \|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\leqslant C\,\|\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}. \tag{3.36}
$$

Substituindo (3.36) em (3.35), temos que

$$
\begin{aligned}
\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leqslant C\,\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leqslant C\,\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\,\|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \\
&\leqslant C\,\|\alpha\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}\,\|\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))},
\end{aligned}
$$

ou seja, a segunda componente $\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}$ do operador bilinear dado por (3.33) é uma aplicação limitada.

Notemos ainda que,

$$
\nabla(v\,\widetilde{\tau}) = v.\nabla\widetilde{\tau} + (\nabla.v)\,\widetilde{\tau}
$$

e por (2) temos que $\nabla.v = 0$ em Q. Então,

$$
v.\nabla\widetilde{\tau} = \nabla(v\,\widetilde{\tau}).
$$

Desse modo,

$$
||v.\nabla\widetilde{\tau}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)} = ||\nabla(v\,\widetilde{\tau})||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2))}. \tag{3.37}
$$

Do fato do operador

$$\begin{array}{rcl}\nabla : L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2\big) & \longrightarrow & L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2\big)\\ v\,\widetilde{\tau} & \longmapsto & \nabla(v\,\widetilde{\tau})\end{array}$$

ser contínuo temos que

$$\|\nabla(v\,\widetilde{\tau})\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)} \leqslant C\,\|v\,\widetilde{\tau}\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)}$$

e assim de (3.37) segue que

$$\begin{aligned}&||v.\nabla\widetilde{\tau}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)}\\ &= ||\nabla(v\,\widetilde{\tau})||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)}\\ &\leqslant C\,||v\,\widetilde{\tau}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)} = C\,||(e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}\,v)\;(e^{-s\beta/2}\,\widetilde{\tau})||_{(L^2(Q))^2}\\ &\leqslant C\,||(e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v)(e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}\widetilde{\tau})||_{(L^2(Q))^2}\\ &\leqslant C||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v||_{(L^4(Q))^2}||e^{-s\beta/2}\widetilde{\tau}||_{(L^4(Q))^2}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

De forma análoga ao que foi feito para a obtenção de (3.38), segue que

$$\nabla(v\,\widetilde{\alpha}) = v.\nabla\widetilde{\alpha} + (\nabla.v)\,\widetilde{\alpha}$$

e por (2) temos que $\nabla.v = 0$ em Q. Então,

$$v.\nabla\widetilde{\alpha} = \nabla(v\,\widetilde{\alpha}).$$

Desse modo,

$$||v.\nabla\widetilde{\alpha}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)} = ||\nabla(v\,\widetilde{\alpha})||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)}. \tag{3.39}$$

Do fato do operador

$$\begin{array}{rcl}\nabla : L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2\big) & \longrightarrow & L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2\big)\\ v\,\widetilde{\alpha} & \longmapsto & \nabla(v\,\widetilde{\alpha})\end{array}$$

ser contínuo temos que

$$\|\nabla(v\,\widetilde{\alpha})\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)} \leqslant C\,\|v\,\widetilde{\alpha}\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^2(\Omega))^2)}$$

e então de (3.39) segue que

$$\begin{aligned}&||v.\nabla\widetilde{\alpha}||_{L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);L^2(\Omega))}\\ &= ||\nabla(v\,\widetilde{\alpha})||_{L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);L^2(\Omega))}\\ &\leqslant C\,||v\,\widetilde{\alpha}||_{L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);(L^2(\Omega))^2)} = C\,||(e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}\,v)\,e^{-s\beta/2}(e^{-s\beta/2}\,\widetilde{\alpha})||_{(L^2(Q))^2}\\ &\leqslant C\,||(e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v)(e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}\widetilde{\alpha})||_{(L^2(Q))^2}\\ &\leqslant C\,||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v||_{(L^4(Q))^2}||e^{-s\beta/2}\gamma^{1/4}\widetilde{\alpha}||_{(L^4(Q))^2}.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Para $N = 3$, temos que

$$||(v.\nabla)\widetilde{v}||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)} = ||\nabla(v\otimes\widetilde{v})||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)}. \tag{3.41}$$

Do fato do operador

$$\begin{array}{rcl}\nabla : L^2\big(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(L^6(\Omega))^3\big) & \longrightarrow & L^2\big(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3\big)\\ v\otimes\widetilde{v} & \longmapsto & \nabla(v\otimes\widetilde{v})\end{array}$$

ser contínuo temos que

$$||\nabla(v\otimes\widetilde{v})||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)} \leqslant C\,||v\otimes\widetilde{v}||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(L^6(\Omega))^3)}.$$

Da definição de E_3 segue que $e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/4}v \in L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)$, e assim de (3.41), obtemos

$$\begin{aligned}&||(v.\nabla)\widetilde{v}||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)}\\ &= ||\nabla(v\otimes v)||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)}\\ &\leqslant C\,||v\otimes v||_{L^2(e^{-s\beta}(\gamma*)^{-1/2}(0,T);(L^6(\Omega))^3)}\\ &= C\,||(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2})^{1/2}(e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-1/2})^{1/2}(v\otimes v)||_{L^2(0,T;(L^6(\Omega))^3)}\\ &\leqslant C\,||(e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4})v||_{L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)}||(e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4})v||_{L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)}.\end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema 1.2.15 temos $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, e então

$$\begin{aligned}\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leqslant C\,\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\leqslant C\,\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\,\|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Pela definição do espaço E_0, temos $\alpha, \widetilde{\alpha} \in L^4(0,T;H^4(\Omega))$, e pelo Teorema 1.2.20 com $m = 4$, $N = 3$, $p = 2$ e $k = m-(N/p) = 4-\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} > 0$, obtemos $\alpha, \widetilde{\alpha} \in L^4(0,T;H^4(\Omega))$ e

$$\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant C\,\|\alpha\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))} \text{ e } \|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant C\,\|\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}.$$

Consequentemente, do fato de $L^\infty \hookrightarrow L^4(\Omega)$, segue que

$$\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \leqslant C\,\|\alpha\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))} \text{ e } \|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))} \leqslant C\,\|\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}. \tag{3.43}$$

Pelo Teorema 1.2.15 temos $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e substituindo (3.43) em (3.42), segue que

$$\begin{aligned}\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leqslant C\,\|\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ &\leqslant C\,\|\Delta\alpha\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\,\|\nabla\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;L^4(\Omega))}\\ &\leqslant C\,\|\alpha\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))}\,\|\widetilde{\alpha}\|_{L^4(0,T;H^4(\Omega))},\end{aligned}$$

ou seja, a segunda componente $\Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}$ do operador bilinear dado por (3.33) é uma aplicação limitada.

De forma análoga ao que foi feito para a obtenção de (3.38) e (3.40), temos ainda

$$\nabla(v\,\widetilde{\tau}) = v.\nabla\widetilde{\tau} + (\nabla.v)\,\widetilde{\tau}$$

e por (2) temos que $\nabla.v = 0$ em Q. Então,

$$v.\nabla\widetilde{\tau} = \nabla(v\,\widetilde{\tau}).$$

Desse modo,

$$||v.\nabla\widetilde{\tau}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);((W^{-1,6}(\Omega))^3)} = ||\nabla(v\,\widetilde{\tau})||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);((W^{-1,6}(\Omega))^3)}. \tag{3.44}$$

Do fato do operador

$$\begin{array}{rcl} \nabla : L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(L^6(\Omega))^3\big) & \longrightarrow & L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3\big) \\ v\,\widetilde{\tau} & \longmapsto & \nabla(v\,\widetilde{\tau}) \end{array}$$

ser contínuo temos que

$$\|\nabla(v\,\widetilde{\tau})\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);((W^{-1,6}(\Omega))^3)} \leqslant C\,\|v\,\widetilde{\tau}\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^6(\Omega))^3)}. \tag{3.45}$$

Logo, substituindo (3.45) em (3.44) segue que

$$\begin{aligned} & ||v.\nabla\widetilde{\tau}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);W^{-1,6}(\Omega))} \\ & = ||\nabla(v.\widetilde{\tau})||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)} \\ & \leqslant C\,||v.\widetilde{\tau}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^6(\Omega))^3)} \\ & \leqslant C\,||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v||_{L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)}||e^{-s\beta/2}\gamma^{1/2}\widetilde{\tau}||_{L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)}. \end{aligned}$$

Ainda de forma análoga a (3.38) e (3.40), temos

$$\nabla(v\,\widetilde{\alpha}) = v.\nabla\widetilde{\alpha} + (\nabla.v)\,\widetilde{\alpha}$$

e por (2) temos que $\nabla.v = 0$ em Q. Então,

$$v.\nabla\widetilde{\alpha} = \nabla(v\,\widetilde{\alpha}).$$

Desse modo,

$$||v.\nabla\widetilde{\alpha}||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);((W^{-1,6}(\Omega))^3)} = ||\nabla(v\,\widetilde{\alpha})||_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);((W^{-1,6}(\Omega))^3)}. \tag{3.46}$$

Do fato do operador

$$\begin{array}{rcl} \nabla : L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(L^6(\Omega))^3\big) & \longrightarrow & L^2\big(e^{-s\beta}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3\big) \\ v\,\widetilde{\alpha} & \longmapsto & \nabla(v\,\widetilde{\alpha}) \end{array}$$

ser contínuo temos que

$$\|\nabla(v\,\widetilde{\alpha})\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);((W^{-1,6}(\Omega))^3)} \leqslant C\,\|v\,\widetilde{\alpha}\|_{L^2(e^{-s\beta}(0,T);(L^6(\Omega))^3)}. \tag{3.47}$$

Logo, substituindo (3.47) em (3.46) segue que

$$\begin{aligned}
&||v.\nabla\widetilde{\alpha}||_{L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)}\\
&= ||\nabla(v.\widetilde{\alpha})||_{L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);(W^{-1,6}(\Omega))^3)}\\
&\leqslant C\,||v\,\widetilde{\alpha}||_{L^2(e^{-s\beta}\gamma^{1/2}(0,T);(L^6(\Omega))^3)}\\
&\leqslant C\,||e^{-s\beta/2}(\gamma^*)^{-1/4}v||_{L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)}||e^{-s\beta/2}\gamma^{1/2}\widetilde{\alpha}||_{L^4(0,T;(L^{12}(\Omega))^3)}.
\end{aligned}$$

Portanto, provamos a limitação de cada componente do operador bilinear dado por (3.33) para $N = 2$ e $N = 3$.

Agora, mostraremos que a derivada do operador dado por (3.33) também é contínuo. Note que podemos definir um operador bilinear com cada componente do operador bilinear dado por (3.33), ou seja,

$$\mathcal{B}_1(v,\widetilde{v}) = v.\nabla\widetilde{v}, \quad \mathcal{B}_2(\alpha,\widetilde{\alpha}) = \Delta\alpha\nabla\widetilde{\alpha}, \quad \mathcal{B}_3(v,\widetilde{\tau}) = v.\nabla\widetilde{\tau} \;\text{ e }\; \mathcal{B}_4(v,\widetilde{\alpha}) = v.\nabla\widetilde{\alpha}. \tag{3.48}$$

Assim, a derivada de cada operador bilinear dado em (3.48) é

$$\mathcal{B}_1'(v_1,\widetilde{v}_1)(v,\widetilde{v}) = \mathcal{B}_1(v,\widetilde{v}_1) + \mathcal{B}_1(v_1,\widetilde{v}) = v.\nabla\widetilde{v}_1 + v_1.\nabla\widetilde{v}, \;\text{ para todo }\; (v,\widetilde{v}),$$

$$\mathcal{B}_2'(\alpha_1,\widetilde{\alpha}_1)(\alpha,\widetilde{\alpha}) = \mathcal{B}_2(\alpha,\widetilde{\alpha}_1) + \mathcal{B}_2(\alpha_1,\widetilde{\alpha}) = \Delta\alpha.\nabla\widetilde{\alpha}_1 + \Delta\alpha_1.\nabla\widetilde{\alpha}, \;\text{ para todo }\; (\alpha,\widetilde{\alpha}),$$

$$\mathcal{B}_3'(v_1,\widetilde{\tau}_1)(v,\widetilde{\tau}) = \mathcal{B}_3(v,\widetilde{\tau}_1) + \mathcal{B}_3(v_1,\widetilde{\tau}) = v.\nabla\widetilde{\tau}_1 + v_1.\nabla\widetilde{\tau}, \;\text{ para todo }\; (v,\widetilde{\tau}) \;\text{ e}$$

$$\mathcal{B}_4'(v_1,\widetilde{\alpha}_1)(v,\widetilde{\alpha}) = \mathcal{B}_4(v,\widetilde{\alpha}_1) + \mathcal{B}_4(v_1,\widetilde{\alpha}) = v.\nabla\widetilde{\alpha}_1 + v_1.\nabla\widetilde{\alpha}, \;\text{ para todo }\; (v,\widetilde{\alpha}).$$

Logo, a derivada do operador bilinear (3.33) é dada em termos do próprio operador bilinear que já provamos que é contínua. Assim, a continuidade da derivada do operador dado em (3.33) é provada, ou seja, o operador bilinear definido em (3.33) é de classe C^1. E isso prova a Proposição 3.2.2. □

Como consequência da Proposição 3.2.2, conseguimos aplicar o Teorema de Lyusternik, isto é, Teorema 3.2.1 para $e_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$ e $h_0 \in \mathcal{G}$.

De fato,

$$\mathcal{A}'(0,0,0,0,0,0) : E_N \to \mathcal{G}$$

é dado por

$$\mathcal{A}'(0,0,0,0,0,0)(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha) = (\vartheta,\vartheta_1,\vartheta_2,v(0),\tau(0),\alpha(0)),$$

em que

$$\vartheta = L_1 v + \nabla p - (\overline{C}_1\Delta\alpha - \overline{C}_2\nabla\alpha + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha})\alpha + \overline{A}_3\tau - \overline{A}_4\alpha + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}),$$

$$\vartheta_1 = L_2\tau - (-\overline{A}_1\alpha - \overline{A}_2\alpha_t - v\cdot\nabla\overline{\tau} + h1_{\mathcal{O}}) \text{ e } \vartheta_2 = L_3\alpha - (\overline{B}_2\tau - v\cdot\nabla\overline{\alpha}),$$

sendo $L_1 v$, $L_2\tau$ e $L_3\alpha$ dados em (3.1), para todo $(v,p,\mathcal{H},\tau,h,\alpha)\in E_N$. Então $\mathcal{A}'(0,0,0,0,0,0) : E \to \mathcal{G}$ é sobrejetora pela Proposição 3.1.2.

Logo, pelo Teorema de Lyusternik, isto é, Teorema 3.2.1, existe $\delta > 0$ tal que, se

$$||(0,0,0,v(0),\tau(0),\alpha(0))||_{\mathcal{G}} = ||(v(0),\tau(0),\alpha(0))||_{H\times L^q(\Omega)\times L^q(\Omega)} < \delta,$$

em que $q > 4$, para $N = 2$, e $q > 5$, para $N = 3$, encontramos um par de controles $(\mathcal{H}, h)$ tal que a solução associada ao problema não linear (9) verifica

$$v(T) = 0,\ \tau(T) = 0,\ \alpha(T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Isso estabelece o resultado de controlabilidade nula do sistema não linear (9) dado pelo Teorema 0.0.5 e, consequentemente, o resultado de controlabilidade local exata à trajetória dado pelo Teorema 0.0.3.

Resta ainda provar que $||(\mathcal{H},h)||_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2} \leqslant C$.

De fato, observemos que pela definição do operador bilinear $a : P_0 \times P_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada em (3.7) e apresentada na demonstração da Proposição 3.1.2 e, ainda, de (3.6), temos

$$\begin{aligned}
&||\widehat{H}||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + ||\widehat{h}||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} = ||-e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^3\widehat{z}||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + ||-e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^5\widehat{\varphi}||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}\\
&\leqslant a((\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\phi}),(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})) = \langle \mathcal{L},(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})\rangle\\
&= \int_0^T \langle \vartheta(t),\widehat{z}(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}dt + \int_0^T \langle \vartheta_1(t),\widehat{\varphi}(t)\rangle_{L^2(\Omega),H^1(\Omega)}dt\\
&+ \int_0^T \langle \vartheta_2(t),\widehat{\psi}(t)\rangle_{L^2(\Omega),H^1(\Omega)}dt + \int_\Omega [v_0\cdot\widehat{z}(0) + \tau_0\cdot\widehat{\varphi}(0) + \alpha_0\cdot\widehat{\phi}(0)]dx\\
&\leqslant C\Big(||e^{-s\beta^*}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + ||e^{-s\beta}\vartheta_1||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\
&+||e^{-s\beta}(\gamma)^{\frac{1}{2}}\vartheta_2||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||v_0||_{\boldsymbol{H}} + ||\tau_0||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha_0||_{L^2(\Omega)}\Big)||(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})||_P.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Agora, notemos que de (3.7)

$$\begin{aligned}
&a((\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi}),(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi}))\\
&= \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_1^*\widehat{z} + \nabla\widehat{q} + (\nabla\overline{z})\widehat{\varphi} + (\nabla\overline{\alpha})\widehat{\psi})^2dxdt\\
&+ \int_Q e^{2s\beta}\widehat{\gamma}(L_2^*\widehat{\varphi} + C_1(g_i\cdot\widehat{z}) - \overline{B}_2\widehat{\psi})^2dxdt\\
&+ \int_Q e^{2s\beta}(\gamma^*)^{-2}(L_3^*\widehat{\psi} - \overline{C}_1\Delta\widehat{z} - \overline{C}_2\ div(\widehat{z}) - \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot\widehat{z}) - \overline{A}_2\widehat{\varphi}_t + C_2(g_i\cdot\widehat{z}) + \overline{A}_1)^2dxdt\\
&\qquad + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^3(\widehat{z})^2dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{2s\beta}(\widehat{\gamma})^5(\widehat{\varphi})^2dxdt\\
&= ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta_1||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\gamma^*)^{-1}\vartheta_2||^2_{L^2(Q)}\\
&\qquad + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{3}{2}}\widehat{z}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{5}{2}}\widehat{\varphi}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

pelo sistema adjunto (12).

Da definição do operador bilinear $a : P_0 \times P_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ em (3.7), de (3.8) e (3.26), segue que

$$\begin{aligned}
&||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta_1||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\gamma^*)^{-1}\vartheta_2||^2_{L^2(Q)} \\
&+||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{3}{2}}\widehat{z}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{5}{2}}\widehat{\varphi}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \\
&= a((\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\phi}),(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\phi})) = \langle \mathcal{L},(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})\rangle \\
&\leqslant C\Big(||e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + ||e^{-s\beta}\vartheta_1||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&+||e^{-s\beta}\gamma^{\frac{1}{2}}\vartheta_2||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||v_0||_{\boldsymbol{H}} + ||\tau_0||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha_0||_{L^2(\Omega)}\Big)||(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})||_P.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Mas como

$$\begin{aligned}
||(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})||_P = \Big(&||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta_1||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\gamma^*)^{-1}\vartheta_2||^2_{L^2(Q)} \\
&+||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{3}{2}}\widehat{z}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{5}{2}}\widehat{\varphi}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

segue da última igualdade e de (3.51) que

$$\begin{aligned}
&\Big(||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{1}{2}}\vartheta_1||^2_{L^2(Q)} + ||e^{s\beta}(\gamma^*)^{-1}\vartheta_2||^2_{L^2(Q)} \\
&+||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{3}{2}}\widehat{z}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + ||e^{s\beta}(\widehat{\gamma})^{\frac{5}{2}}\widehat{\varphi}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}\Big)^{1/2} \\
&= a((\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\phi}),(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\phi})) = \langle \mathcal{L},(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})\rangle \\
&\leqslant C\Big(||e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + ||e^{-s\beta}\vartheta_1||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&+||e^{-s\beta}\gamma^{\frac{1}{2}}\vartheta_2||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + ||v_0||_{\boldsymbol{H}} + ||\tau_0||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha_0||_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Das hipóteses da Proposição 3.1.2,

$$\begin{aligned}
&||e^{-s\beta}(\gamma^*)^{-\frac{1}{2}}\vartheta||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} < +\infty, \\
&||e^{-s\beta}\vartheta_1||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} < +\infty, \\
&||e^{-s\beta}\gamma^{\frac{1}{2}}\vartheta_2||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, de (3.50) e (3.52) temos,

$$a((\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\phi}),(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\phi})) = \langle \mathcal{L},(\widehat{z},\widehat{q},\widehat{\varphi},\widehat{\psi})\rangle \leqslant C(||v_0||_{\boldsymbol{H}} + ||\tau_0||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha_0||_{L^2(\Omega)})$$

e, de (3.49)

$$||\widehat{H}||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + ||\widehat{h}||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leqslant C(||v_0||_{\boldsymbol{H}} + ||\tau_0||_{L^2(\Omega)} + ||\alpha_0||_{L^2(\Omega)}).$$

Isto conclui a prova do Teorema 0.0.5 e, portanto, do Teorema 0.0.3.

Capítulo 4

Controle Ótimo e Controlabilidade

Neste capítulo estamos interessados em estabelecer uma conexão entre um problema de controle ótimo e a controlabilidade exata dada pelo Teorema 0.0.3.

Primeiramente vamos definir o operador solução do problema (2), ou seja, definiremos um operador R que associa cada par de controles $(\mathcal{H}, h) \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ à correspondente solução $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$.

Consideremos R o operador solução do problema (2), ou seja,

$$\begin{array}{rcl} R : (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T)) & \longrightarrow & \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3 \\ (\mathcal{H}, h) & \longmapsto & R(\mathcal{H}, h) = (\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}) \end{array} \tag{4.1}$$

em que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_1 & = & L^\infty(0,T; \boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T; \boldsymbol{V}), \\ \mathcal{S}_2 & = & L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega)), \\ \mathcal{S}_3 & = & L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)) \end{array}$$

e $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ satisfaz o sistema (2) com controles $(\mathcal{H}, h)$.

O estudo de existência de solução para o sistema (2) é dado pelo Teorema 0.0.1.

Agora consideremos o operador (15), isto é,

$$\begin{array}{rcl} J_\rho[\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}; \mathcal{H}, h] & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|\widehat{v}(x,T) - \overline{v}(x,T)|^2 + |\widehat{\tau}(x,T) - \overline{\tau}(x,T)|^2 \\ & + & \displaystyle |\widehat{\alpha}(x,T) - \overline{\alpha}(x,T)|^2 \Big) dx + \frac{\rho}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \Big(|\mathcal{H}|^2 + |h|^2 \Big) dxdt \end{array}$$

em que $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ é solução do problema (2) associada à $(\mathcal{H}, h)$ e $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ é solução do problema (4).

Um resultado de controle ótimo é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 4.0.1. *Sejam $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ solução de (2) associada ao par de controles $(\mathcal{H}, h)$ e $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ solução de (4). Suponha que as hipóteses* **(H)** *sejam satisfeitas com $G(s) \in C^2(\mathbb{R})$*

uma função decrescente. Então, para cada $\rho > 0$, existe pelo menos um par de controles ótimos $(\mathcal{H}_\rho, h_\rho) \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ minimizando o funcional de custo J_ρ, isto é, a correspondente solução $(\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho)$ de (2) satisfaz

$$J_\rho[\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho; \mathcal{H}_\rho, h_\rho] = \inf_{(\mathcal{H},h) \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^N \times L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} J_\rho[\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}; \mathcal{H}, h]. \tag{4.2}$$

Demonstração. Fixemos $\rho > 0$. Seja $(v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n)$ uma sequência minimizante de J_ρ tal que $(v_n, \tau_n, \alpha_n) = R(\mathcal{H}_n, h_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(v_n, \tau_n, \alpha_n, \mathcal{H}_n, h_n)$ é sequência minimizante de J_ρ, temos que

$$J_\rho[v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n] \leqslant C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de J_ρ, deduzimos que

$$||(\mathcal{H}_n, h_n)||_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}} \leqslant C.$$

Pelo Teorema 0.0.1, o problema (2) possui solução fraca satisfazendo

$$\begin{aligned} &||v_n||_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)} + ||\tau_n||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\quad + ||\alpha_n||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, existe pelo menos uma subsequência de $(v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $(v_n, \tau_n, \alpha_n) = R(\mathcal{H}_n, h_n)$, novamente denotada por $(v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_n \rightharpoonup \mathcal{H} \ \text{ fracamente em } \ (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^N, \\ &h_n \rightharpoonup h \ \text{ fracamente em } \ L^2(\mathcal{O} \times (0,T)), \\ &v_n \rightharpoonup v \ \text{ fracamente em } \ L^\infty(0,T; \boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T; \boldsymbol{V}), \\ &\tau_n \rightharpoonup \tau \ \text{ fracamente em } \ L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega)), \\ &\alpha_n \rightharpoonup \alpha \ \text{ fracamente em } \ L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3.8,

$$\begin{aligned} &v_n \to v \ \text{ fortemente em } \ L^2(Q), \\ &\tau_n \to \tau \ \text{ fortemente em } \ L^2(Q), \\ &\alpha_n \to \alpha \ \text{ fortemente em } \ L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C(0,T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_\rho[v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n] \ \to \ J_\rho[v, \tau, \alpha; \mathcal{H}, h].$$

Segue da Proposição 1.3.2 que

$$\liminf_{n\to\infty} J_\rho[v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n] \geqslant J_\rho[v, \tau, \alpha; \mathcal{H}, h]. \tag{4.3}$$

Como $(v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência minimizante, então

$$J_\rho[v_n, \tau_n, \alpha_n; \mathcal{H}_n, h_n] \to \inf_{(\mathcal{H},h)\in(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}} J_\rho[\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}; \mathcal{H}, h] \tag{4.4}$$

quando $n \to +\infty$, em que $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}) = R(\mathcal{H}, h)$ (mostraremos abaixo).

Por (4.3) e (4.4) temos

$$J_\rho[v, \tau, \alpha; \mathcal{H}, h] = \inf_{(\mathcal{H},h)\in(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}} J_\rho[\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}; \mathcal{H}, h].$$

Mostraremos agora que $(v, \tau, \alpha) = R(\mathcal{H}, h)$. Temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, (v_n, τ_n, α_n) é solução do problema (2) associado a $(\mathcal{H}_n, h_n)$, isto é, $(v_n, \tau_n, \alpha_n) = R(\mathcal{H}_n, h_n)$. Então,

$$\begin{cases} v_{n,t} + v_n.\nabla v_n - k_1\Delta v_n + \nabla\widehat{p} - \lambda\varepsilon\Delta\alpha_n\nabla\alpha_n - \dfrac{\lambda}{\varepsilon}F'(\alpha_n)\nabla\alpha_n & \\ \qquad\qquad = -(1 - C_1\tau_n + C_2\alpha_n)g\mathbf{e}_i + \mathcal{H}_n 1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \tau_{n,t} + v_n.\nabla\tau_n - k\Delta\tau_n + l(G(\alpha_n))_t + l(v_n.\nabla G(\alpha_n)) = h_n 1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \alpha_{n,t} + v_n.\nabla\alpha_n - \gamma\varepsilon\Delta\alpha_n - \dfrac{\lambda}{\varepsilon}F'(\alpha_n) - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}G'(\alpha_n)\tau_n = 0 & \text{em } Q, \\ div\ v_n = 0 & \text{em } Q, \\ v_n = 0, \quad \dfrac{\partial\tau_n}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\alpha_n}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ v_n(\cdot,0) = v_{n,0},\ \ \tau_n(\cdot,0) = \tau_{n,0},\ \ \alpha(\cdot,0) = \alpha_{n,0} & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

Multiplicando a primeira equação de (4.5) por $\omega \in \mathcal{W}$, em que $\mathcal{W}$ é dado no Teorema 1.3.7, e integrando por partes em Q, temos

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \langle v_n\,, \omega_t\rangle\,dt + \int_0^T (v_n.\nabla v_n\,, \omega)\,dt - k_1\int_0^T (\nabla v_n\,, \nabla\omega)\,dt \\ &+\int_0^T (\nabla\widehat{p}\,, \omega)\,dt - \lambda\varepsilon\int_0^T (\Delta\alpha_n\nabla\alpha_n\,, \omega)\,dt - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^T (F'(\alpha_n)\nabla\alpha_n\,, \omega)\,dt \\ &= \Big(v_0,\, \omega(0)\Big) + \int_0^T \Big(- (1 - C_1\tau_n + C_2\alpha_n)g\mathbf{e}_i + \mathcal{H}_n 1_{\mathcal{O}}\,, \omega\Big)\,dt. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pela convergência (1.13) dada no Teorema 1.3.8 e as convergências (1.3) - (1.8) dadas no Teorema 1.3.7, segue que a sequência em (4.6) converge para

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \langle v\,, \omega_t\rangle\,dt + \int_0^T (v.\nabla v\,, \omega)\,dt - k_1\int_0^T (\nabla v\,, \nabla\omega)\,dt \\ &+\int_0^T (\nabla\widehat{p}\,, \omega)\,dt - \lambda\varepsilon\int_0^T (\Delta\alpha\nabla\alpha\,, \omega)\,dt - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^T (F'(\alpha)\nabla\alpha\,, \omega)\,dt \\ &= \Big(v_0,\, \omega(0)\Big) + \int_0^T \Big(- (1 - C_1\tau + C_2\alpha)g\mathbf{e}_i + \mathcal{H} 1_{\mathcal{O}}\,, \omega\Big)\,dt, \end{aligned} \tag{4.7}$$

quando $n \to \infty$.

Agora, multiplicando a segunda equação de (4.5) por $\theta \in \Theta$, em que Θ é dado no Teorema 1.3.7, e integrando por partes em Q, temos

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \langle \tau_n + lG(\alpha_n), \theta_t \rangle \, dt - \int_0^T \Big((\tau_n + lG(\alpha_n))\, v_n, \nabla\theta \Big)\, dt + k \int_0^T (\nabla\tau_n \,, \nabla\theta)\, dt \\
&= \Big(\tau_0 + lG(\alpha_0), \theta(0)\Big) + \int_0^T (h1_{\mathcal{O}} \,, \theta)\, dt. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Pela convergência (1.13) dada no Teorema 1.3.8 e as convergências (1.9) - (1.12) dadas no Teorema 1.3.7, segue que a sequência em (4.8) converge para

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \langle \tau + lG(\alpha), \theta_t \rangle \, dt - \int_0^T \Big((\tau + lG(\alpha))\, v, \nabla\theta \Big)\, dt + k \int_0^T (\nabla\tau \,, \nabla\theta)\, dt \\
&= \Big(\tau_0 + lG(\alpha_0), \theta(0)\Big) + \int_0^T (h1_{\mathcal{O}} \,, \theta)\, dt, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

Agora, pela convergência (1.13) dada no Teorema 1.3.8 e as convergências (1.14) - (1.18) dadas no Teorema 1.3.9, passando ao limite $n \to \infty$ na terceira equação de (4.5), temos

$$\alpha_t + v.\nabla\alpha - \gamma\varepsilon\Delta\alpha - \frac{\lambda}{\varepsilon}F'(\alpha) - \frac{\gamma}{\varepsilon}G'(\alpha)\tau = 0. \qquad (4.10)$$

Portanto, de (4.7), (4.9) e (4.10) concluímos que $(v, \tau, \alpha) = R(\mathcal{H}, h)$, em que o operador R é dado por (4.1). $\square$

O resultado a seguir atribui uma caracterização a cada par de controles ótimos $(\mathcal{H}, h)$.

Teorema 4.0.2. *Seja $(\mathcal{H}, h)$ um par de controles ótimos do problema (2) dado pelo Teorema 4.0.1. Então, existe $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}, q, p, r; \mathcal{H}, h)$ satisfazendo os problemas (2) e (12),* *ou seja,*

$$\begin{cases} \widehat{v}_t + \widehat{v}\cdot\nabla\widehat{v} - k_1\Delta\widehat{v} + \nabla\widehat{p} - \lambda\varepsilon\Delta\widehat{\alpha}\nabla\widehat{\alpha} - \dfrac{\lambda}{\varepsilon}F'(\widehat{\alpha})\nabla\widehat{\alpha} & \\ = -(1 - C_1\widehat{\tau} + C_2\widehat{\alpha})g\boldsymbol{e}_i + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \widehat{\tau}_t + \widehat{v}\cdot\nabla\widehat{\tau} - k\Delta\widehat{\tau} + l(G(\widehat{\alpha}))_t + l(\widehat{v}\cdot\nabla G(\widehat{\alpha})) = h1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \widehat{\alpha}_t + \widehat{v}\cdot\nabla\widehat{\alpha} - \gamma\varepsilon\Delta\widehat{\alpha} - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}F'(\widehat{\alpha}) - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}G'(\widehat{\alpha})\widehat{\tau} = 0 & \text{em } Q, \\ -q_t - k_1\Delta q + Dq\,\overline{v} + \nabla q\,\varphi + \nabla\overline{\alpha}\,\psi + \nabla\widetilde{p} - \widetilde{\vartheta} + \varphi\nabla\overline{\tau} + \psi\nabla\overline{\alpha} = \widehat{v} - \overline{v} & \text{em } Q, \\ -p_t - k\Delta p - (\overline{v}\cdot\nabla p) - \widetilde{\vartheta}_1 + C_1(g_i\cdot q) - \overline{B_2}r = \widehat{\tau} - \overline{\tau} & \text{em } Q, \\ -r_t - \gamma\varepsilon\Delta r - (\overline{v}\cdot\nabla r) - \overline{B}_1 r - \widetilde{\vartheta}_2 - \gamma\varepsilon(\nabla\overline{\alpha}\cdot\Delta q) - \overline{C}_2\ div(q) & \\ \qquad + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot q) - \overline{A}_2 p_t + C_2(g_i\cdot q) + \overline{A}_1 p = \widehat{\alpha} - \overline{\alpha} & \text{em } Q, \\ div\ \widehat{v} = div\ q = 0 & \text{em } Q, \\ \widehat{v} = q = \dfrac{\partial\widehat{\tau}}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\widehat{\alpha}}{\partial\eta} = \dfrac{\partial p}{\partial\eta} = \dfrac{\partial r}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \widehat{v}(\cdot,0) = \widehat{v}_0,\ \widehat{\tau}(\cdot,0) = \widehat{\tau}_0,\ \widehat{\alpha}(\cdot,0) = \widehat{\alpha}_0 & \text{em } \Omega, \\ q(\cdot,T) = p(\cdot,T) = r(\cdot,T) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

e

$$\int_Q (q + |\mathcal{H}|)(\mathcal{F} - \mathcal{H}) + (p + |h|)(f - h)dxdt \geqslant 0 \tag{4.11}$$

para todo $(\mathcal{F}, f) \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}$.

Demonstração. Fixemos $\rho > 0$ e consideremos $\mathcal{H} := \mathcal{H}_\rho$, $h := h_\rho$ e $(\widehat{v},\widehat{\tau},\widehat{\alpha}) = R(\mathcal{H}, h)$. Temos

$$\begin{aligned} J[(\widehat{v},\widehat{\tau},\widehat{\alpha};\mathcal{H},h)] &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\widehat{v}(x,t) - \overline{v}(x,t)|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\widehat{\tau}(x,t) - \overline{\tau}(x,t)|^2dxdt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\widehat{\alpha}(x,t) - \overline{\alpha}(x,t)|^2dxdt + \frac{\rho}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}} (|\mathcal{H}|^2 + |h|^2)dxdt, \end{aligned}$$

onde $(\overline{v},\overline{\tau},\overline{\alpha})$ é a trajetória dada em (4) e $(\mathcal{H}, h)$ um par de funções de controle do problema (2). Então, consideremos a derivada direcional do operador J na direção $\mathcal{F} - \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda} \quad J[R((\mathcal{H} + \lambda(\mathcal{F} - \mathcal{H}), h + \lambda(f - h)); (\mathcal{H} + \lambda(\mathcal{F} - \mathcal{H}), h + \lambda(f - h))]|_{\lambda=0} \\ &= \int_Q |\widehat{v} - \overline{v}|v^*dxdt + \int_Q |\widehat{\tau} - \overline{\tau}|\tau^*dxdt + \int_Q |\widehat{\alpha} - \overline{\alpha}|\alpha^*dxdt \\ &+ \rho\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (|\mathcal{H}|(\mathcal{F} - \mathcal{H}) + |h|(f - h))dxdt, \end{aligned}$$

onde $(v^*,\tau^*,\alpha^*) = R'((\mathcal{H},h))((\mathcal{F}-\mathcal{H}, f-h))$ é a solução do sistema (11) que foi obtido pela derivação do sistema (9) como foi mostrado na Introdução, ou seja, (v^*,τ^*,α^*) é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} v_t^* - \Delta v^* + v^*.\nabla v^* + v^*.\nabla v^* + \nabla p^* - \lambda\varepsilon(\Delta\alpha^*\nabla\overline{\alpha} - \Delta\overline{\alpha}\nabla\alpha^*) & \\ -\dfrac{\lambda}{\varepsilon}\Big(F''(\overline{\alpha})\alpha^*\nabla\overline{\alpha} - F'(\overline{\alpha})\nabla\alpha^*\Big) + (-C_1\tau^* - C_2\alpha^*)g\mathbf{e}_N = (\mathcal{F}-\mathcal{H})1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \\ \tau_t^* - k\Delta\tau^* + lG'(\overline{\alpha})\alpha_t^* + (lG''(\overline{\alpha})\overline{\alpha}_t + lG''(\overline{\alpha})(\overline{v}\cdot\nabla\overline{\alpha}) + lG'(\overline{\alpha})(\overline{v}\cdot\nabla\overline{\alpha}))\alpha^* & \\ \qquad + v^*\cdot\nabla\overline{\tau} + \overline{v}\cdot\nabla\tau^* = (f-h)1_{\mathcal{O}} & \text{em } Q, \\ \\ \alpha_t^* - \gamma\varepsilon\Delta\alpha^* + v^*\cdot\nabla\overline{\alpha} + \overline{v}\cdot\nabla\alpha^* - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}(F''(\overline{\alpha}) + G''(\overline{\alpha})\overline{\tau})\alpha^* - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}G'(\overline{\alpha})\tau^* & \\ = 0 & \text{em } Q, \\ div\ v^* = 0 & \text{em } Q, \\ v^* = 0, \quad \dfrac{\partial\tau^*}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\alpha^*}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Logo, como $(\mathcal{H},h)$ é um par de controles ótimos, temos

$$\frac{d}{d\lambda}J[R((\mathcal{H}+\lambda(\mathcal{F}-\mathcal{H}), h+\lambda(f-h)); (\mathcal{H}+\lambda(\mathcal{F}-\mathcal{H}), h+\lambda(f-h))]|_{\lambda=0} \geqslant 0$$

para todo $(\mathcal{F},f) \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}$, uma vez que a última expressão é a derivada direcional de J saindo do ponto mínimo, e assim

$$\begin{aligned} \int_Q |\widehat{v}-\overline{v}|v^* dxdt + \int_Q |\widehat{\tau}-\overline{\tau}|\tau^* dxdt + \int_Q |\widehat{\alpha}-\overline{\alpha}|\alpha^* dxdt & \\ +\rho\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (|\mathcal{H}|(\mathcal{F}-\mathcal{H}) + |h|(f-h))dxdt \geqslant 0 & \end{aligned} \tag{4.12}$$

para todo $(\mathcal{F},f) \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}$.

Para provar a desigualdade (4.11), podemos usar a desigualdade acima com a introdução de uma tripla de variáveis (q,p,r) que é solução do problema:

$$\begin{cases} -q_t - k_1\Delta q + Dq\,\overline{v} + \nabla q\,\varphi + \nabla\overline{\alpha}\,\psi + \nabla\widetilde{p} - \widetilde{\vartheta} + \varphi\nabla\overline{\tau} + \psi\nabla\overline{\alpha} = \widehat{v} - \overline{v} & \text{em } Q, \\ \\ -p_t - k\Delta p - (\overline{v}\cdot\nabla p) - \widetilde{\vartheta}_1 + C_1(g_i\cdot q) - \overline{B_2}r = \widehat{\tau} - \overline{\tau} & \text{em } Q, \\ \\ -r_t - \gamma\varepsilon\Delta r - (\overline{v}\cdot\nabla r) - \overline{B}_1 r - \widetilde{\vartheta}_2 - \gamma\varepsilon(\nabla\overline{\alpha}\cdot\Delta q) - \overline{C}_2\,\mathrm{div}(q) & \\ \qquad + \overline{C}_3(\nabla\overline{\alpha}\cdot q) - \overline{A}_2 p_t + C_2(g_N\cdot q) + \overline{A}_1 p = \widehat{\alpha} - \overline{\alpha} & \text{em } Q, \\ div\ q = 0 & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial p}{\partial\eta} = \dfrac{\partial r}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ q(\cdot,T) = p(\cdot,T) = r(\cdot,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

Multiplicando a primeira, a segunda e a terceira equações de (4.13) por v^*, τ^* e α^*, respectivamente, integrando em Q e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned}\int_Q q(\mathcal{F}-\mathcal{H})dxdt + \int_Q p(f-h)dxdt &= \int_Q |\widehat{v}-\overline{v}|v^* dxdt + \int_Q |\widehat{\tau}-\overline{\tau}|\tau^* dxdt \\ &+ \int_Q |\widehat{\alpha}-\overline{\alpha}|\alpha^* dxdt.\end{aligned}$$

Portanto, de (4.12) concluímos que

$$\int_Q (q+|\mathcal{H}|)(\mathcal{F}-\mathcal{H}) + (p+|h|)(f-h) \geqslant 0$$

para todo $(\mathcal{F}, f) \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}$. $\square$

O próximo resultado nos fornece uma relação entre o problema de controle ótimo e um problema de controlabilidade exata. Mais precisamente, ele estabelece que uma sequência de soluções do problema de controle ótimo (4.2) converge para uma solução do problema de controlabilidade exata obtido no Teorema 0.0.3.

Teorema 4.0.3. *Sejam $T > 0$, $(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0) \in \big((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}\big) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N$ e $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ solução de (4). Suponha que as hipóteses* (**H**) *sejam satisfeitas com $G(s) \in C^2(\mathbb{R})$ uma função decrescente. Para cada $\rho > 0$ seja $(\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho)$ uma solução do problema de controle ótimo (4.2) associada à condição inicial $(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0)$. Então, existe uma subsequência de $(\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho)$, que continuaremos denotando por $(\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho)$, e funções*

$$\begin{aligned}&v^* \in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}),\\ &\tau^* \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\ &\alpha^* \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)),\end{aligned}$$

tais que as seguintes convergências se verificam quando $\rho \to 0$

$$\begin{aligned}\widehat{v}_\rho &\rightharpoonup v^* && \textit{fracamente em } L^2(0,T;\boldsymbol{V}),\\ \widehat{v}_\rho &\overset{*}{\rightharpoonup} v^* && \textit{fraco} * \textit{ em } L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}),\\ \widehat{\tau}_\rho &\rightharpoonup \tau^* && \textit{fracamente em } L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\ \widehat{\tau}_\rho &\overset{*}{\rightharpoonup} \tau^* && \textit{fraco} * \textit{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\ \widehat{\alpha}_\rho &\rightharpoonup \alpha^* && \textit{fracamente em } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\ \widehat{\alpha}_\rho &\overset{*}{\rightharpoonup} \alpha^* && \textit{fraco} * \textit{ em } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\\ (\widehat{v}_\rho, \widehat{\tau}_\rho, \widehat{\alpha}_\rho) &\longrightarrow (v^*, \tau^*, \alpha^*) && \textit{fortemente em } [L^5(Q)]^{N+2}.\end{aligned}$$

Além disso, (v^*, τ^*, α^*) é solução do problema de controlabilidade exata obtida no Teorema 0.0.3.

Demonstração. Fixemos $\rho > 0$ arbitrário, tomemos $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})$ solução de (4) e $(\widehat{v}_0, \widehat{\tau}_0, \widehat{\alpha}_0) \in ((L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H}) \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N$. Desta maneira, temos um par de controles $(\mathcal{H}, h) \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}$ tal que a solução associada $(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})$ de (2) satisfaz (8).

Por outro lado, o Teorema 4.0.1 nos garante a existência de um par de controles ótimos $(\mathcal{H}_\rho, h_\rho) \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^{N+1}$. Vamos denotar por $(v_\rho, \tau_\rho, \alpha_\rho)$ a correspondente solução de (2). Então, por (4.2), temos que

$$J[v_\rho, \tau_\rho, \alpha_\rho; \mathcal{H}_\rho, h_\rho] \leqslant J[\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha}; \mathcal{H}, h].$$

Pela última desigualdade e por (8),

$$\begin{aligned} &||(v_\rho, \tau_\rho, \alpha_\rho)(T) - (\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})||^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \rho||(\mathcal{H}_\rho, h_\rho)||^2_{(L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H} \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N} \\ &\leqslant ||(\widehat{v}, \widehat{\tau}, \widehat{\alpha})(T) - (\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{\alpha})||^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \rho||(\mathcal{H}, h)||^2_{(L^{2N-2}(\Omega))^N \cap \boldsymbol{H} \times \widetilde{E}_N \times \widetilde{E}_N} \\ &= \rho||(\mathcal{H}, h)||^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}} \leqslant C\,\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Do fato de $||(\mathcal{H}, h)||^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}} < C$ pelo Teorema 0.0.3, da desigualdade (4.14) temos

$$\begin{aligned} v_\rho(T) &\longrightarrow \overline{v} \text{ fortemente em } (L^2(\Omega))^N, \\ \tau_\rho(T) &\longrightarrow \overline{\tau} \text{ fortemente em } L^2(\Omega), \\ \alpha_\rho(T) &\longrightarrow \overline{\alpha} \text{ fortemente em } L^2(\Omega) \end{aligned} \tag{4.15}$$

e que $||(\mathcal{H}_\rho, h_\rho)||_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^{N+1}}$ é limitado. Então, existe $(\mathcal{H}^*, h^*) \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^{N+1}$ tal que

$$(\mathcal{H}_\rho, h_\rho) \rightharpoonup (\mathcal{H}^*, h^*) \text{ fracamente em } (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^{N+1}.$$

Agora, pelo Lema 1.3.6 temos que $||(v_\rho, \tau_\rho, \alpha_\rho)||_{\mathbf{B}}$ é limitado, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = (L^\infty(0,T; \boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T; \boldsymbol{V})) \times (L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega))) \\ \times (L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))). \end{aligned}$$

Então, existe $(v^*, \tau^*, \alpha^*) \in \mathbf{B}$ tal que

$$\begin{aligned} v_\rho &\rightharpoonup v^* \text{ fracamente em } L^\infty(0,T; \boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T; \boldsymbol{V}), \\ \tau_\rho &\rightharpoonup \tau^* \text{ fracamente em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega)), \\ \alpha_\rho &\rightharpoonup \alpha^* \text{ fracamente em } L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pela Proposição 1.2.8 temos que $\mathbf{B} \hookrightarrow (L^5(Q))^{N+2}$ compactamente. Logo, de (4.16) segue que

$$\begin{aligned} v_\rho &\longrightarrow v^* \text{ fortemente em } (L^5(Q))^N, \\ \tau_\rho &\longrightarrow \tau^* \text{ fortemente em } L^5(Q), \\ \alpha_\rho &\longrightarrow \alpha^* \text{ fortemente em } L^5(Q). \end{aligned}$$

Para concluir a prova do teorema, falta mostrar que $v^*(T) = \overline{v}$, $\tau^*(T) = \overline{v}$ e $\alpha^*(T) = \overline{v}$.

De fato, consideremos $u \in C^\infty(\overline{Q})$ tal que $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega} \times (0,T]$.

Como $(v_\rho, \tau_\rho, \alpha_\rho)$ satisfaz (2), multiplicando a primeira equação de (2) por u e integrando por partes em Q, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v_\rho(T)u(T)\,dx - \int_0^T\int_\Omega v_\rho u_t\,dxdt + \int_0^T (v_\rho.\nabla v_\rho\,,u)\,dt + k_1\int_0^T \nabla v_\rho\,.\,\nabla u\,dxdt \\
&+\int_0^T (\nabla\widehat{p}\,,u)\,dt - \lambda\varepsilon\int_0^T (\Delta\alpha_\rho\nabla\alpha_\rho\,,u)\,dt - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^T (F'(\alpha_\rho)\nabla\alpha_\rho\,,u)\,dt \\
&= \int_0^T \Big(-(1 - C_1\tau_\rho + C_2\alpha_\rho)g\mathbf{e}_N + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}\,,u\Big)\,dt.
\end{aligned}$$

Usando as convergências em (4.15), as convergências fracas obtidas em (4.16) e as convergências (1.4) - (1.8) dadas pelo Teorema 1.3.7, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \overline{v}\,u(T)\,dx - \int_0^T\int_\Omega v^* u_t\,dxdt + \int_0^T (v^*.\nabla v^*\,,u)\,dt - k_1\int_0^T (\Delta v^*\,,u)\,dt \\
&+\int_0^T (\nabla\widehat{p}\,,u)\,dt - \lambda\varepsilon\int_0^T (\Delta\alpha^*\nabla\alpha^*\,,u)\,dt - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^T (F'(\alpha^*)\nabla\alpha^*\,,u)\,dt \\
&= \int_0^T \Big(-(1 - C_1\tau^* + C_2\alpha^*)g\mathbf{e}_N + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}\,,u\Big)\,dt.
\end{aligned}\tag{4.17}$$

Como (v^*, τ^*, α^*) satisfaz (2), multiplicando a primeira equação de (2) por u e integrando por partes em Q, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega v^*(T)u(T)\,dx - \int_0^T\int_\Omega v^* u_t\,dxdt + \int_0^T (v^*.\nabla v^*\,,u)\,dt - k_1\int_0^T (\Delta v^*\,,u)\,dt \\
&+\int_0^T (\nabla\widehat{p}\,,u)\,dt - \lambda\varepsilon\int_0^T (\Delta\alpha^*\nabla\alpha^*\,,u)\,dt - \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^T (F'(\alpha^*)\nabla\alpha^*\,,u)\,dt \\
&= \int_0^T \Big(-(1 - C_1\tau^* + C_2\alpha^*)g\mathbf{e}_N + \mathcal{H}1_{\mathcal{O}}\,,u\Big)\,dt.
\end{aligned}\tag{4.18}$$

Subtraindo (4.17) de (4.18), obtemos

$$\int_\Omega (v^*(T) - \overline{v})\;u(T)\,dx = 0.$$

Sendo u arbitrário, concluímos que $v^*(T) = \overline{v}$.

Como $(v_\rho, \tau_\rho, \alpha_\rho)$ satisfaz (2), multiplicando a segunda equação de (2) por u e integrando por partes em Q, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \tau_\rho(T)u(T)\,dx + l\int_\Omega G(\alpha_\rho(T))u(T)\,dx - \int_0^T \langle \tau_\rho + lG(\alpha_\rho)\,,u_t\rangle\,dt \\
&-\int_0^T ((\tau_\rho + lG(\alpha_\rho))\,v, \nabla u)\,dt + k\int_0^T (\nabla\tau_\rho\,,\nabla u)\,dt = \int_0^T (h1_{\mathcal{O}}\,,u)\,dt.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

Usando as convergências em (4.15), as convergências fracas obtidas em (4.16) e as convergências (1.9) - (1.12) dadas pelo Teorema 1.3.7, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \overline{\tau}\,u(T)\,dx + l\int_\Omega G(\overline{\alpha})u(T)\,dx - \int_0^T \langle \tau^* + lG(\alpha^*)\,,u_t\rangle\,dt \\
&-\int_0^T ((\tau^* + lG(\alpha^*))\,v^*, \nabla u)\,dt + k\int_0^T (\nabla\tau^*\,,\nabla u)\,dt = \int_0^T (h1_{\mathcal{O}}\,,u)\,dt.
\end{aligned}\tag{4.20}$$

Como (v^*, τ^*, α^*) satisfaz (2), multiplicando a segunda equação de (2) por u e integrando por partes em Q, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \tau^*(T)\, u(T)\, dx + l \int_\Omega G(\alpha^*(T)) u(T)\, dx - \int_0^T \langle \tau^* + lG(\alpha^*)\,, u_t \rangle\, dt \\
&- \int_0^T (v^* \cdot (\tau^* + lG(\alpha^*)), \nabla u)\, dt + k \int_0^T (\nabla \tau^*\,, \nabla u)\, dt = \int_0^T (h 1_{\mathcal{O}}\,, u)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Sendo u arbitrário, subtraindo (4.20) de (4.21) concluímos que $\tau^*(T) = \overline{\tau}$.

Notemos que, ainda subtraindo (4.20) de (4.21), obtemos

$$\int_\Omega G(\overline{\alpha}) u(T)\, dx = \int_\Omega G(\alpha^*(T)) u(T)\, dx.$$

Então, como u é arbitrário, temos

$$G(\overline{\alpha}) = G(\alpha^*(T)).$$

Como G é uma função decrescente por hipótese, então G é injetora e assim $\alpha^*(T) = \overline{\alpha}$. Isso conclui a prova. $\square$

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre controlabilidade local exata à trajetória para um sistema de equações diferenciais parciais que modela um processo de solidificação/fusão e consiste em uma equação do tipo campo de fase acoplada a um sistema Navier-Stokes-Boussinesq. Provamos que, sob certas condições, o sistema é controlável à trajetória, com controles agindo apenas nas equações de velocidade e temperatura.

Estabelecemos ainda uma relação entre controle ótimo e controlabilidade. Mais precisamente, provamos que uma sequência de soluções de certo problema de controle ótimo converge para uma solução do problema de controlabilidade descrito.

Algumas mudanças podem ser feitas para que este modelo seja aperfeiçoado. Por exemplo, considerar os parâmetros termodinâmicos, tais como condutividade térmica, variando durante o processo. Ou, ainda, considerar o calor latente função de uma variável termodinâmica como a temperatura. Contudo, o estudo de controlabilidade de modelos um pouco mais realísticos podem levar a dificuldades técnicas consideráveis, inclusive para resultados de existência e regularidade de soluções.

A análise desses aspectos podem vir a ser objeto de pesquisas futuras, dando continuidade ao presente trabalho.

Referências

[1] ADAMS, R.A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] AMMAR KHODJA, F.; BENABDALLAH, A.; DUPAIX, C.; KOSTIN, I. Controllability to the trajectories of phase field models by one control force. **SIAM J. Control Optim**. 42(5), p. 1661–1680, 2003.

[3] ARARUNA, F. D.; CALSAVARA, B. M. R.; FERNÁNDEZ-CARA, E. Local exact controllability of two-phase field solidification systems with few controls. **Applied mathematics and Optimization**, v. 78, p. 267–296, 2018.

[4] ARARUNA, F. D.; BOLDRINI, J. L.; CALSAVARA, B. M. R. Optimal control and controllability of a phase field system with one control force. **Applied mathematics and Optimization**, v. 70, p. 539–563, 2014.

[5] BADRA, M. Global Carleman inequalities for stokes and penalized stokes equations. **Mathematical Control and Related Fields**, v. 1, n. 2, p. 149–175, 2011.

[6] BARBU, V. Local controllability of the phase field system. **Nonlinear Anal**., 50(3), p. 363–372, 2002.

[7] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.

[8] BATES, P. W.; ZHENG, S. Inertial manifolds and inertial sets for the phase field equations. **J Dynam. Differential Equations 4**, p. 375–398, 1992.

[9] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations**. Paris: Spinger, 2011.

[10] CAGINALP, G. An analysis of a phase field model of a free boundary. **Arch. Rational Mech**. Anal.92, p. 205–245, 1986.

[11] CALSAVARA, B. M. R.; GUILLÉN-GONZÁLEZ, F. Existence of global in time weak solutions for a solidification model with convection in the liquid and rigid motion in the solid. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**. Volume 52 (6), 2020 (online) 6260-6280.

[12] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: UEM/DMA, Vol. 1, 2000.

[13] COLLI, P.; HILHORST, D.; ISSARD-ROCH, F.; SCHMPERNA, G. Long time convergence for a class of variational phase-fields models. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, 25(1), p. 63–81, 2009.

[14] EVANS, L. C. **Partial Diferential Equations**. University of California, Berkeley, 1998.

[15] FERNANDEZ-CARA, E.; GUERRERO, S.; IMANUVILOV, O.YU.; PUEL, J.-P. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. **J. Math. Pures Appl**, n.83, p. 1501–1542, 2004.

[16] FURSIKOV, A. V.; IMANUVILOV, O. Controllability of Evolution Equations. **Lecture Notes**, vol. 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[17] GONZÁLEZ-BURGOS, M.; PÉREZ-GARCÍA, R. Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force. **Asymptot. Anal.**, 46(2), p. 123–162, 2006.

[18] GUERRERO, S. Local exact controllability to the trajectories of the Boussinesq system. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire**, n.23, p. 29–61, 2006.

[19] HOFFMAN, K.; LISHANG, J. Optimal control of a phase field model for solidification. **Numerical functional analysis and optimization**, v. 13, p. 11–27, 1992.

[20] IMANUVILOV, Y. O. Controllability of Parabolic Equations. **London Mathematical Society**, London, 1995.

[21] IMANUVILOV, Y. O. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. **ESAIM Control Optim. Calc. Var. 6**, p. 39–72, 2001.

[22] IMANUVILOV, Y. O.; PUEL, P. J.; YAMAMOTO, M. Carleman estimates for parabolic equations with nonhomogeneous boundary conditions. **Chinese Annals of Mathematics, Series B**, p. 333–378, 2009.

[23] IMANUVILOV, Y. O.; PUEL, P. J.; YAMAMOTO, M. Carleman Estimates for second order non homogeneous boundary conditions. **Chinese Annals of Mathematics, Series B**, 2010.

[24] LADYZENSKAJA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URAL'CEVA, N. N. **Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type**. Providence: American Mathematical Society, 1968.

[25] LADYZENSKAJA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URAL'CEVA, N. N. **Linear and quasilinear equations of parabolic type**. Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[26] LIONS, J. L. **Control of Distributed Singular Systems**. Paris: Gauthier-Villars, 1985.

[27] MEDEIROS, L. A. da J; MIRANDA, M. A. M. **Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000.

[28] MIRANVILLE, A. Some mathematical models in phase transition. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series, 7(2), p. 271–306, 2014.

[29] SIMON, J. **Compact sets in the space Lp (0, T ; B)**, Annali Mat. Pura Aplli., Serie IV, v.146 (1987), 65-96.