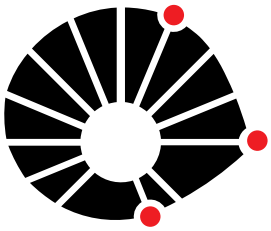

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ROBSON CARLOS DE MOURA JUNIOR

Resolução Numérica das Equações de Saint-Venant pelo Método de Galerkin Descontínuo

Campinas

2022

Robson Carlos de Moura Junior

Resolução Numérica das Equações de Saint-Venant pelo Método de Galerkin Descontínuo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Robson Carlos de Moura Junior e orientada pelo Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M865r

Moura Junior, Robson Carlos de, 1999-
Resolução numérica das equações de Saint-Venant pelo método de Galerkin descontínuo / Robson Carlos de Moura Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de Saint-Venant. 2. Equações de águas rasas. 3. Método dos elementos finitos. I. Correa, Maicon Ribeiro, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Numerical resolution of the Saint-Venant equations by the discontinuous Galerkin method
Palavras-chave em inglês:
Saint-Venant equations
Shallow water equations
Finite element method
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Maicon Ribeiro Correa [Orientador]
Giuseppe Romanazzi
Rogerio Gonçalves dos Santos
Data de defesa: 23-09-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-6617-2778
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/3921653053979004

Dissertação de Mestrado defendida em 23 de setembro de 2022 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA

Prof(a). Dr(a). GIUSEPPE ROMANAZZI

Prof(a). Dr(a). ROGERIO GONÇALVES DOS SANTOS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A minha mãe Mary, ao meu pai Robson e a minha irmã Kamila.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado graça e sabedoria até aqui.

A minha mãe Mary, ao meu pai Robson e a minha irmã Kamila, por estarem comigo em todos os momentos, me apoiando e me dando seus exemplos de força e dedicação.

Ao meu orientador Maicon, pela ótima orientação, direcionamento, paciência e compreensão.

A todos meus amigos da Unicamp. Vocês fazem a rotina pragmática da universidade ser divertida e agradável.

Aos professores do IMECC/UNICAMP pelas aulas de excelente qualidade.

Aos funcionários administrativos do IMECC, pelo rápido e bom atendimento prestado sempre quando solicitados, sendo uma parte fundamental da engrenagem do IMECC.

Aos funcionários da UNICAMP, da divisão de alimentação, responsável pelos restaurantes universitários, das bibliotecas, do CECOM, da prefeitura universitária, da limpeza do campus e a todos os demais não citados aqui.

Á UNICAMP pela oportunidade da realização deste mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“ O cientista não estuda a natureza porque é útil fazê-lo.
Ele a estuda porque tem prazer nela,
e tem prazer nela porque é bela.
Se a natureza não fosse bela,
não valeria a pena a conhecer,
e a vida não valeria a pena ser vivida.
(Henri Poincaré, Science and Method)

Resumo

As equações de Saint-Venant modelam o fluxo não-estacionário de um fluido newtoniano incompressível em canais abertos. Estas, são dadas pela equação da conservação da massa e do balanço do momento linear, e podem ser vistas como uma média das equações de Navier-Stokes sobre a hipótese de que a escala de comprimento vertical do fluido é muito menor do que a escala de comprimento horizontal. Tendo em vista que estas equações são um sistema de equações diferenciais hiperbólico, o método numérico escolhido para resolver estas equações deve ser capaz de capturar tais descontinuidades. Feito estas observações, o método de Galerkin Descontínuo nos parece uma escolha adequada para tratarmos o problema. Este método de elementos finitos, baseado na formulação fraca das equações, nos permite aproximar soluções descontínuas.

Neste trabalho, iremos apresentar a teoria das equações de águas rasas e consequentemente das equações de Saint-Venant. Em seguida, apresentaremos o método de Galerkin descontínuo. Iremos mostrar alguns experimentos numéricos para diferentes regimes de fluxo e leitos não horizontais, tais como, o rompimento de barragem idealizado, saltos hidráulicos e fluxos transcríticos em canais com batimetria não constante e irregular. Por fim, apresentaremos uma alteração no método de Galerkin descontínuo padrão que tem como objetivo balancear as equações e eliminar oscilações espúrias que são geradas na solução numérica da vazão quando a elevação do leito é não constante.

Palavras-chave: equações de Saint-Venant. equações de águas rasas. elementos finitos.

Abstract

The Saint-Venant equations model the unstable flow of an incompressible newtonian fluid in open channels. These, are given by the equation of conservation of mass and of linear momentum balance, and can be viewed as an average of the Navier-Stokes equations under the assumption that the vertical length scale is much smaller than the horizontal length scale. Given that these equations are a system of hyperbolic differential equations, the numerical method chosen to solve these equations must be able to capture such discontinuities. With these observations, the Discontinuous Galerkin method seems an adequate choice to treat the problem. This finite element method, based on the weak formulation of the equations, allows us to approximate discontinuous solutions.

In this work, we will present the theory of the shallow water equations and consequently the Saint-Venant equations. Next, we will present the discontinuous Galerkin method. We will show some numerical experiments for different flow regimes and non-horizontal beds, such as idealized dam breaking, hydraulic jumps, and transcritical flows in channels with non-constant and irregular bathymetry. Finally, we will present a modification to the standard discontinuous Galerkin method that aims to balance the equations and eliminates spurious oscillations that are generated in the numerical solution of the flow rate when the bed elevation is non-constant.

Keywords: Saint-Venant equations. shallow water equations. finite elements.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração de uma seção transversal em um ponto $x \in (0, L)$ que mostra a configuração do problema. O termo B, que não aparece nas equações (1)-(2), representa a largura máxima de uma seção transversal e $b(y)$, representa a variação da largura de uma seção transversal. 18
Figura 2 – Fluxo em um rio depois de uma comporta. Uma superfície livre por exemplo é a profundidade da água depois da comporta. 24
Figura 3 – Inundação de uma barragem. O fluxo após a inundação da barragem pode ser analisado, e uma informação importante é a profundidade da água depois da inundação, que é uma superfície livre. 24
Figura 4 – Fluxo em um mar depois da passagem de um barco. O barco se move causando alterações na profundidade da água, que é uma superfície livre. 24
Figura 5 – Problema do fluxo gravitacional sobre uma superfície livre ilustrando as coordenadas x_1, x_2 e x_3, a elevação do leito e a lâmina d'água. . . . 25
Figura 6 – Seções transversais vistas em alguns pontos do domínio. 31
Figura 7 – Ilustração de uma seção transversal mostrando a área molhada, a profundidade d'água, a elevação do leito e a largura do canal variando em um eixo y. 31
Figura 8 – Células e nós da malha computacional 37
Figura 9 – Valores limite dispostos na malha computacional 39
Figura 10 – Estrutura da onda para o fluxo HLL 50
Figura 11 – Volume de controle $[x_L, x_R] \times (0, T)$ no plano (x, t). 50
Figura 12 – Tratamento do leito seco a direita de um nó 58
Figura 13 – Tratamento do leito seco a esquerda de um nó 59
Figura 14 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha 62
Figura 15 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha . 62
Figura 16 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha 64
Figura 17 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha 64
Figura 18 – Comparação da superfície da água em um salto hidráulico com 50 elementos na malha 66

Figura 19 – Comparação da taxa de vazão em um salto hidráulico com 50 elementos na malha 66
Figura 20 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime supercrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 68
Figura 21 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 68
Figura 22 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 69
Figura 23 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 70
Figura 24 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 71
Figura 25 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 71
Figura 26 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 73
Figura 27 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 73
Figura 28 – Comparação da superfície da água no regime de água parada, com 50 elementos na malha 75
Figura 29 – Comparação da taxa de vazão no regime de água parada, com 50 elementos na malha 75
Figura 30 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha 80
Figura 31 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha . 81
Figura 32 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha 82
Figura 33 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha 82
Figura 34 – Comparação da superfície da água em um salto hidráulico com 50 elementos na malha 83
Figura 35 – Comparação da taxa de vazão em um salto hidráulico com 50 elementos na malha 83
Figura 36 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime supercrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 84

Figura 37 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 85
Figura 38 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 85
Figura 39 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 86
Figura 40 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 87
Figura 41 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha 87
Figura 42 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito irregular, com 50 elementos na malha 88
Figura 43 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito irregular, com 50 elementos na malha 88
Figura 44 – Comparação da superfície da água no regime de água parada, com 50 elementos na malha 89
Figura 45 – Comparação da taxa de vazão no regime de água parada, com 50 elementos na malha 90

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela com alguns parâmetros práticos para aplicação do método SSP-RK 45
Tabela 2 – Condições de fronteira necessárias para diferentes regimes de fluxo . . . 60
Tabela 3 – Variação da elevação do leito e distância 72
Tabela 4 – Tabela com alguns pontos de quadratura x_i e pesos ω_i para a aplicação da quadratura de Gauss-Legendre 99

Sumário

Introdução 17

1 EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS 21
1.1 Equação de Águas Rasas 2D 22
1.1.1 Equações de Navier-Stokes 22
1.1.2 Fluxo Gravitacional em Superfícies Livres 23
1.1.3 Dedução das Equações de Águas Rasas 2D 25
1.2 Equações de Saint-Venant 30
1.3 Forma Conservativa das Equações de Saint-Venant 32
1.3.1 Forma Conservativa das Equações de Saint-Venant para Canais Retangulares Uniformes 32
1.4 Forma Não-Conservativa das Equações de Saint-Venant 35

2 MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA LEIS DE CONSERVAÇÃO E LEIS DE BALANÇO 36
2.1 Discretização do Espaço 36
2.2 Espaços de Aproximação 37
2.3 Formulação Fraca 37
2.4 Formulação Variacional Local 38
2.5 Forma Matricial 41
2.6 Formulação Variacional Global 42
2.7 Fluxos Numéricos 42
2.8 Esquemas de Evolução Temporal 43
2.8.1 Método SSP-RK 44
2.9 Limitadores Locais de Inclinação 45
2.10 Condição CFL 46
2.11 Método DG para Sistemas de Leis de Balanço 47
2.12 Fluxos Numéricos para Sistemas Hiperbólicos 49
2.12.1 Fluxo HLL 50
2.12.2 Fluxo de Roe 53

3 ESQUEMAS NÃO-BALANCEADOS 55
3.1 Base do Espaço de Aproximação por Polinômios 55
3.2 Fluxos Numéricos 56
3.3 Limitador de Inclinação 57
3.4 Tratamento do Leito Seco 58

3.5 Regimes de Fluxo . . . 59
3.5.1 Condições Iniciais e de Fronteira . . . 60
3.6 Experimentos Numéricos . . . 60
3.6.1 Rompimento de barragem idealizado em um canal retangular . . . 61
3.6.2 Rompimento de barragem em uma calha retangular com atrito no leito . . . 63
3.6.3 Salto hidráulico . . . 65
3.6.4 Fluxo sobre um ressalto . . . 67
3.6.4.1 Regime supercrítico . . . 67
3.6.4.2 Regime subcrítico . . . 69
3.6.4.3 Regime transcrítico . . . 70
3.6.5 Fluxo sobre um leito irregular . . . 72
3.6.6 Regime de água parada . . . 74

4 UM ESQUEMA DG1 BEM-BALANCEADO . . . 76
4.1 Método DG Bem-Balanceado para as Equações de Saint-Venant . . . 76
4.2 Base do Espaço de Aproximação por Polinômios . . . 76
4.3 Modificações no Método DG Padrão . . . 77
4.4 Fluxos Numéricos . . . 78
4.5 Limitador de Inclinação . . . 78
4.6 Tratamento do Leito Seco . . . 79
4.7 Experimentos Numéricos . . . 80
4.7.1 Rompimento de barragem idealizado em um canal retangular . . . 80
4.7.2 Rompimento de barragem em uma calha retangular com atrito no leito . . . 82
4.7.3 Salto hidráulico . . . 83
4.7.4 Fluxo sobre um ressalto . . . 84
4.7.4.1 Regime supercrítico . . . 84
4.7.4.2 Regime subcrítico . . . 85
4.7.4.3 Regime transcrítico . . . 87
4.7.5 Fluxo sobre um leito irregular . . . 88
4.7.6 Regime de água parada . . . 89

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . 91

REFERÊNCIAS . . . 92

APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS E NOTAÇÕES . . . 94
A.1 Notações Matemáticas . . . 94
A.2 Leis de Conservação Escalares . . . 95
A.3 Sistema Hiperbólico de Leis de Conservação Escalares . . . 95

A.4 Derivada Material 97

APÊNDICE B – RESULTADOS AUXILIARES 98

B.1 Integração Numérica 98

B.1.1 Polinômios de Legendre 98

B.1.2 Quadratura de Gauss-Legendre 98

Introdução

Equações de Saint-Venant

As equações de Saint-Venant modelam o fluxo não-estacionário de um fluido newtoniano incompressível em canais abertos. Estas, são dadas pela equação da conservação da massa e do balanço do momento linear e são vistas como uma média das equações de Navier-Stokes.

Neste caso, a escala de comprimento vertical de profundidade da água é relativamente pequena em relação a escala horizontal. O nome das equações é devido ao engenheiro Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, que as publicou pela primeira vez em 1871, no trabalho (VENANT, 1871).

Para um canal de comprimento L, e um intervalo de tempo $(0, T)$, as equações de Saint-Venant são dadas pela equação da conservação da massa do fluido

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \tag{1}$$

e pela equação de balanço do momento linear, que é escrita como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1\right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \tag{2}$$

onde $A = A(x,t)$ é a área molhada da seção transversal na posição x e tempo t, $Q = Q(x,t)$ é a taxa de vazão, g é a aceleração gravitacional (tomada igual a $9.81\,\mathrm{m/s^2}$), I_1 e I_2 são os termos que lidam com a força de pressão hidrostática e força de pressão de parede, respectivamente, sendo expressos por

$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} (h-y)b(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{e} \quad I_2 = \int_0^{h(x,t)} (h-y)\frac{\partial b(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y; \tag{3}$$

e onde $b = b(x,y)$ é a largura do canal tal que, para um dado ponto x, é também uma função da profundidade y, como mostrado na Figura 1, e $h = h(x,t)$ é a profundidade da água, que pode ser pós-processada de A e b. Finalmente, $z_b(x)$ é a elevação do leito do canal em um ponto x, S_0 representa a derivada espacial

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x},$$

e S_f é o termo devido ao atrito com o leito, que pode ser escrito como

$$S_f = \frac{n^2 Q|Q|}{R^{4/3}A^2},$$

onde R é o raio hidráulico (quociente entre a área molhada e o perímetro molhado do canal) e $n\,(\mathrm{s/m^{1/3}})$ é o coeficiente de rigidez de Manning. A estimação do coeficiente de

Manning é um problema difícil relacionado com a simulação de cheias em canais naturais (LAI; KHAN, 2012).

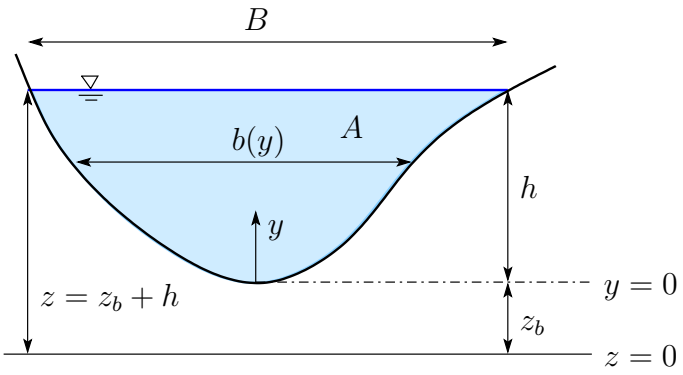

Figura 1 – Ilustração de uma seção transversal em um ponto $x \in (0, L)$ que mostra a configuração do problema. O termo B, que não aparece nas equações (1)-(2), representa a largura máxima de uma seção transversal e $b(y)$, representa a variação da largura de uma seção transversal.

As equações de Saint-Venant são também chamadas de equações de águas rasas 1D. Elas são muito utilizadas para modelar o fluxo de água em rios, canais, lagos, áreas costeiras, rompimento de barragens etc. Existem diferentes abordagens numéricas para resolver as equações de Saint-Venant, citamos aqui algumas referências que utilizam o método dos volumes finitos (YING; KHAN; WANG, 2004), (KURGANOV, 2018), e outras que utilizam o método de Galerkin descontínuo (XING, 2014), (LAI; KHAN, 2012) e (KHAN; LAI, 2014). Neste trabalho, iremos utilizar o método de Galerkin descontínuo. Vamos então apresentar este método.

Podemos escrever as equações (1)-(2) na forma vetorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x &= \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}(x,t), x, t), \quad \text{em } (0,L)\times(0,T), &(4)\\ \boldsymbol{u}(x,0) &= g(x), \quad \text{para todo } x \in (0,L), &(5)\end{aligned}$$

dadas condições de fronteira adequadas e onde

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} Q \\ \dfrac{Q^2}{A} + gI_1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ gA\left(S_0 - S_f\right) + gI_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Método de Galerkin Descontínuo

Seja $\{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}_{j=1}^{N}$ uma partição do intervalo $(0, L)$ com intervalos da partição $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, e tamanho $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$. Cada intervalo I_j será um elemento do nosso domínio espacial $(0, L)$. Vamos aproximar a solução exata por uma solução numérica em cada elemento I_j do domínio. Esta solução numérica, sobre cada elemento I_j

pertencerá a um subespaço de dimensão finita de $L^2(0,L)$, que chamaremos de espaço de aproximação V_h.

O subespaço de dimensão finita de $L^2(0,L)$ utilizado no método será o espaço de polinômios de grau até k

$$V_h := V_h^k := \{v \in L^2(0,L); v\,\big|_{I_j} \in P^k(I_j),\ j = 1,2,\ldots,N\}. \tag{7}$$

A formulação local variacional do problema (1)-(2) é dada então por

$$\begin{aligned}&\int_{I_j} \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t}(x,t)\boldsymbol{v}_h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{I_j} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_h(x,t))\frac{\partial \boldsymbol{v}_h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x \\ &+ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_h(x_{j+1/2},t))\boldsymbol{v}_h(x_{j+1/2}^-) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_h(x_{j-1/2},t))\boldsymbol{v}_h(x_{j-1/2}^+) = \int_{I_j} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}_h(x,t),x,t)\boldsymbol{v}_h(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\int_{I_j} \boldsymbol{u}_h(x,0)\ dx = \int_{I_j} g(x)\boldsymbol{v}_h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Os valores $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_h(x_{j+1/2},t))$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_h(x_{j-1/2},t))$ não estão bem definidos, então necessitam ser substituídos por um fluxo numérico. Os fluxos numéricos que usaremos em nossos experimentos numéricos serão o fluxo de Lax-Friedrichs Local, o fluxo HLL e o fluxo de Roe. Ao longo do trabalho, falaremos mais sobre estes fluxos numéricos.

Queremos obter uma solução aproximada $\boldsymbol{u}_h = [A_h, Q_h]^T$, onde $A_h, Q_h \in V_h$ e tal que a formulação variacional seja válida. A formulação variacional local (8)-(9) gera um sistema de EDO's acopladas que pode ser resolvido por um esquema de evolução temporal. O esquema utilizado no método é o Strong Stability Preserving Runge-Kutta (SSP-RK). Outro problema a ser tratado é o surgimento de oscilações espúrias quando escolhemos a base de V_h sendo formada por polinômios de grau maior ou igual à 1, o que é previsto pelo Teorema de Godunov. Este problema é resolvido com o uso de limitadores de inclinação. Para mais informações, consulte (COCKBURN; LIN; SHU, 1989).

Organização desta Dissertação

Este texto foi especialmente preparado para a dissertação de mestrado do programa de pós-graduação em Matemática Aplicada do IMECC.

Dedicamos o Capítulo 1 para um estudo detalhado das equações de águas rasas em duas dimensões, que consiste em uma adaptação das equações de Navier-Stokes para escoamentos e problemas onde a escala da componente vertical do espaço é relativamente pequena em relação as escalas horizontais, ademais, detalhamos o caso unidimensional que é o grande foco desse estudo que são as equações de Saint-Venant.

No Capítulo 2, introduzimos os conceitos básicos para a compreensão do método de Galerkin descontínuo para leis de conservação, desde a questão da discretização espacial

até encontrarmos o sistema de equações diferenciais ordinárias, que é a formulação semi-discreta, discreta no espaço e contínua no tempo. Estruturamos também os esquemas de evolução temporal, em particular entre esses, os esquemas SSP-RK. Falamos ainda, brevemente sobre a questão da extensão do método de Galerkin descontínuo para o caso de aproximações obtidas por polinômios lineares por partes, que demanda o uso de limitadores de inclinação por questões de estabilidade.

No Capítulo 3, aplicamos a teoria do método de Galerkin descontínuo padrão para a resolução das equações de Saint-Venant em canais retangulares uniformes. São apresentados a base do espaço de polinômios, os fluxos numéricos que serão utilizados nos experimentos, e o limitador de inclinação. Mais a frente, mostramos como a condição de leito seco, que é quando a profundidade da água é nula, é tratada, e também os tipos de regimes de fluxo, que podem apresentar ou não oscilações espúrias no gráfico da vazão obtida pelo método de Galerkin descontínuo padrão, isto é, não balanceado. Ao fim do capítulo, são apresentados vários experimentos numéricos comparando a base de aproximação formada por polinômios constantes por partes e lineares por partes, e diferentes fluxos numéricos.

Por fim, no Capítulo 4, apresentamos um método de Galerkin descontínuo bem-balanceado, que tem como referência o trabalho (LAI; KHAN, 2012). Todos os itens do Capítulo 3 são explicitados novamente com as devidas modificações para o balanceamento do método. Nos experimentos numéricos, comparamos o método bem-balanceado com o melhor método não-balanceado do Capítulo 3 para cada experimento.

No Apêndice, apresentamos uma introdução aos conceitos preliminares que envolvem partes da teoria de equações diferenciais parciais, sistemas hiperbólicos e leis de conservação. Apresentamos também uma fórmula de integração numérica utilizada nos experimentos numéricos.

1 Equações de Águas Rasas

A modelagem e simulação de fluxos em superfícies livres são muito frequentes em problemas práticos da engenharia hidráulica. Uma importante característica dos fluxos em superfície livre é a de que a sua fronteira na direção vertical é desconhecida, e o problema então é determinar quem é esta superfície livre e como ela se comporta ao decorrer do tempo. Vários problemas práticos podem ser vistos como problemas de superfície livre, são exemplos destes o fluxo nas seguintes situações

- Rios;
- Canais Pluviais;
- Lagos;
- Reservatórios;
- Áreas costeiras;
- Tsunamis, furacões, tufões;
- Rompimento de barragens com inundações, etc.

O comportamento do fluido nas situações anteriores pode ser descrito completamente pelas equações de Navier-Stokes. Porém, a resolução numérica das equações de Navier-Stokes é muito custosa e necessita de técnicas numéricas excessivamente exigentes. Em vista destas informações, simplificações das equações de Navier-Stokes que fornecem resultados apropriados nos parecem muito interessantes.

Uma abordagem amplamente utilizada são os modelos 2D de profundidade média. As características deste tipo de abordagem para o problema de fluxo em superfície livre são que a escala de comprimento horizontal é muito maior que a escala de comprimento vertical, e a velocidade na direção vertical é praticamente nula, então é realizado um processo de média das equações de Navier-Stokes com respeito a profundidade.

Estas novas equações simplificadas são então chamadas de equações de águas rasas. Do ponto de vista matemático, estes modelos constituem um sistema de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico, referidas como um sistema hiperbólico de leis de conservação.

Apesar da suposta simplicidade das equações de águas rasas em relação as equações de Navier-Stokes, a hipótese de água rasa é utilizada em muitas aplicações na hidráulica e fornecem base científica para a resolução de problemas práticos.

Como nosso trabalho tem enfoque tanto na área teórica quanto na área numérica, achamos importante incluir a dedução das equações de águas rasas 2D para a maior cultura do leitor experiente, e como uma introdução para o leitor inicial, mesmo que o modelo 2D não seja o modelo com o qual iremos realizar nossos experimentos numéricos.

1.1 Equação de Águas Rasas 2D

Nesta seção, iremos introduzir as equações de águas rasas 2D, que são uma aproximação do problema de superfície livre. As equações de águas rasas são utilizadas para modelar o fluxo de fluidos newtonianos onde a magnitude da direção vertical do fluido é muito pequena em relação as direções longitudinais, daí vem o nome águas rasas.

1.1.1 Equações de Navier-Stokes

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio (aberto e conexo) Lipschitz limitado e $I = (0, T)$ um intervalo de tempo. Para um fluido isotérmico com velocidade $\boldsymbol{u} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^3$ e massa específica $\rho : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, a equação da conservação da massa é escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0. \tag{1.1}$$

A equação de balanço do momento é descrita por

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \rho \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \sigma. \tag{1.2}$$

Na Equação (1.2), o símbolo $\otimes$ representa o produto tensorial de vetores e σ é definido como o tensor de tensões de Cauchy. A função $\boldsymbol{f}$ representa as forças por unidade de massa externas ao sistema, por exemplo, forças gravitacionais, magnéticas, etc.

Se supormos que o fluido é newtoniano, o tensor de tensões de Cauchy é descrito por

$$\sigma = 2\mu \mathcal{E}(\boldsymbol{u}) + \lambda \left(\operatorname{div} \boldsymbol{u}\right) \boldsymbol{I} - p\boldsymbol{I}. \tag{1.3}$$

Em (1.3), p representa a pressão, λ e μ são coeficientes de Lamé e $\mathcal{E}(\boldsymbol{u})$ é o tensor taxa de deformação linearizado, dado

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right).$$

Substituindo (1.3) em (1.2), obtemos a equação do balanço do momento para fluidos newtonianos, dada por

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}(2\mu \mathcal{E}(\boldsymbol{u}) - \lambda (\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{I}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{f}. \tag{1.4}$$

As equações que modelam o comportamento do fluxo de um fluido newtoniano compressível são as equações da conservação da massa (1.1) e do balanço do momento linear (1.4). Estas equações são chamadas de equações de Navier-Stokes.

Equações de Navier-Stokes Compressíveis

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}(2\mu \mathcal{E}(\boldsymbol{u}) + \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{u})\boldsymbol{I}) + \nabla p = \rho \boldsymbol{f}. \tag{1.6}$$

Equações de Navier-Stokes Incompressíveis

Supondo que a derivada material (A.9) da massa específica é igual a zero, e que a massa específica é positiva, isto é

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{e} \quad \rho > 0,$$

podemos simplificar as equações (1.5) e (1.6) obtendo as equações de Navier-Stokes incompressíveis.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}(\tau(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{f}. \tag{1.8}$$

Onde

$$\tau(\boldsymbol{u}) = 2\mu \mathcal{E}(\boldsymbol{u}).$$

1.1.2 Fluxo Gravitacional em Superfícies Livres

Em vários problemas práticos, uma superfície livre pode ocorrer no movimento de um fluido. Em geral, a superfície livre não é conhecida, e o problema principal é determiná-la.

Na maior parte dos problemas, os fluidos são considerados incompressíveis, então as equações utilizadas para estudar o movimento destes fluidos são as equações de Navier-Stokes incompressíveis (1.7)-(1.8).

As características principais desse problema são que a força externa $\boldsymbol{f}$ da Equação (1.8) é dada por

$$\boldsymbol{f} = (0, 0, -g),$$

onde g é a aceleração gravitacional, o fluido está em movimento em uma superfície livre que possui fronteira, e tanto a aceleração do fluido quanto a pressão possuem condições de fronteira na superfície livre.

Nas figuras 2, 3 e 4 abaixo, iremos ilustrar alguns problemas de superfície livre vistos no cotidiano.

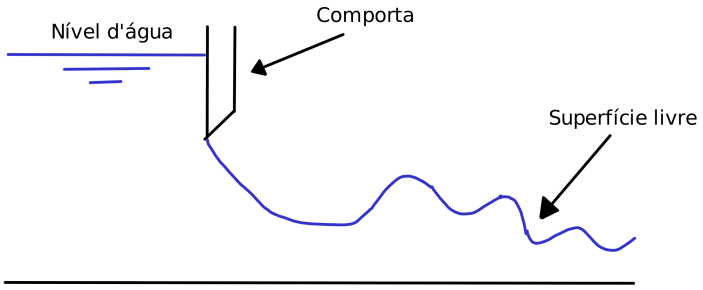

Figura 2 – Fluxo em um rio depois de uma comporta. Uma superfície livre por exemplo é a profundidade da água depois da comporta.

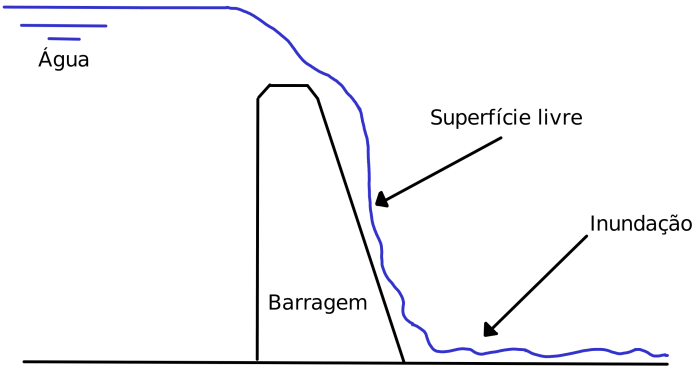

Figura 3 – Inundação de uma barragem. O fluxo após a inundação da barragem pode ser analisado, e uma informação importante é a profundidade da água depois da inundação, que é uma superfície livre.

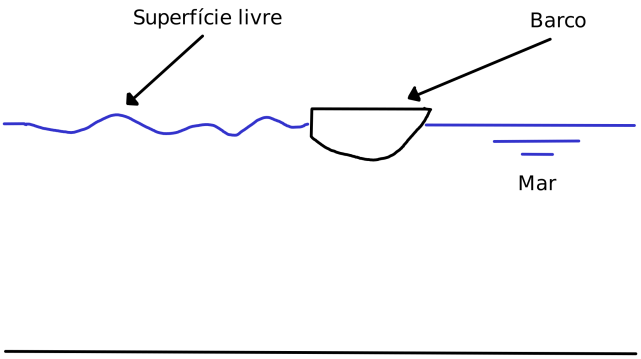

Figura 4 – Fluxo em um mar depois da passagem de um barco. O barco se move causando alterações na profundidade da água, que é uma superfície livre.

1.1.3 Dedução das Equações de Águas Rasas 2D

As equações de águas rasas 2D aproximam o problema de fluxo gravitacional em superfície livre (TORO, 2013).

Para obtermos as equações de águas rasas 2D vamos efetuar um processo de média das equações de Navier-Stokes incompressíveis (1.7)-(1.8) com respeito a profundidade assumindo as hipóteses do problema de fluxo gravitacional em superfície livre.

Na Figura 5, temos a ilustração do perfil onde as equações de águas rasas estão dispostas. São mostradas a localização das variáveis e de alguns outros termos para um melhor compreendimento do problema.

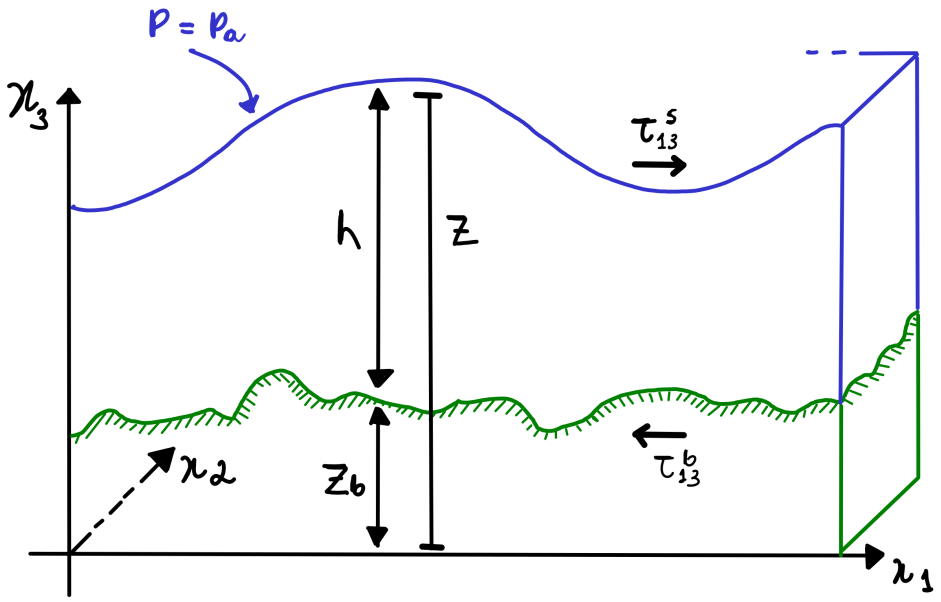

Figura 5 – Problema do fluxo gravitacional sobre uma superfície livre ilustrando as coordenadas x_1, x_2 e x_3, a elevação do leito e a lâmina d'água.

Vamos escrever as equações (1.7) e (1.8) utilizando o mesmo procedimento de (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2014), considerando $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, onde x_1 e x_2 são as direções longitudinais e x_3 é a direção vertical. Assim

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) : \Omega \times I \to \mathbb{R}^3; \\
\tau(\boldsymbol{u}) = (\tau_{ij})_{i,j=1}^{3} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}; \\
p : \Omega \times I \to \mathbb{R}; \\
\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \times I \to \mathbb{R}^3.
\end{gathered}$$

Para o problema de superfície livre, temos mais ainda

$$h : \tilde{\Omega} \times I \to \mathbb{R};$$
$$z_b : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R};$$
$$z = h + z_b : \tilde{\Omega} \times I \to \mathbb{R}.$$

Onde h é a altura da lâmina d'água ou profundidade d'água, z_b é a elevação do leito e o domínio espacial de h e z_b é dado por

$$\tilde{\Omega} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ (x_1, x_2, x_3) \in \Omega\right\}.$$

Vamos agora estabelecer as condições de fronteira para o problema de superfície livre. São elas

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} + u_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial z}{\partial x_2} - u_3\right)\Big|_{x_3=z} = 0; \tag{1.9}$$
$$p|_{x_3=z} = p_a. \tag{1.10}$$

A condição (1.9) em termos de derivada material (A.9) é equivalente a

$$\frac{D}{Dt}(z - x_3)|_{x_3=z} = 0. \tag{1.11}$$

Onde p_a é a pressão atmosférica, que pode não ser constante dependendo do problema analisado. Temos também a condição de fronteira no leito, que é dada abaixo.

$$\left(-u_1\frac{\partial z_b}{\partial x_1} - u_2\frac{\partial z_b}{\partial x_2} + u_3\right)\Big|_{x_3=z_b} = 0. \tag{1.12}$$

Em termos de derivada material, a condição (1.12) é equivalente a

$$\frac{D}{Dt}(-z_b + x_3)|_{x_3=z_b} = 0. \tag{1.13}$$

Agora escrevemos as equações (1.7) e (1.8) em termos das funções coordenadas, obtendo assim

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \tag{1.14}$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f_i = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3. \tag{1.15}$$

No caso do fluxo em águas rasas, a velocidade vertical u_3 é muito pequena, tanto quanto sua aceleração correspondente. Então a equação do momento (1.15) na direção vertical, isto é, para $i = 3$, é então reduzida para

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} + g = 0. \tag{1.16}$$

Integrando a Equação (1.16) com relação a profundidade, e utilizando a condição de fronteira (1.10), obtemos

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t) = \rho g(z - x_3) + p_a. \tag{1.17}$$

Com efeito,

$$\int_{x_3}^{z} \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g \right) \mathrm{d}x_3 = 0,$$

e então

$$p(x_1, x_2, z, t) - p(x_1, x_2, x_3, t) + \rho g(z - x_3) = 0,$$

finalmente

$$p = p(x_1, x_2, x_3, t) = \rho g(z - x_3) + p_a.$$

A partir da equação da conservação da massa (1.14) e considerando as condições de fronteira (1.9) e (1.12), podemos obter a equação média da conservação da massa com relação a profundidade, dada por

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial (h\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{1.18}$$

onde $h(x_1, x_2, t) = z(x_1, x_2, t) - z_b(x_1, x_2)$ e

$$\bar{u}_i = \left(\int_{z_b}^{z} u_i(x_1, x_2, x_3, t) \, \mathrm{d}x_3 \right) \frac{1}{h} \, , \qquad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Agora integramos as equações do momento (1.15) para $i = 1, 2, 3$ com respeito a profundidade, obtendo

$$\int_{z_b}^{z} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - f_i \right) \mathrm{d}x_3 = 0, \qquad \text{para cada } i = 1, 2, 3. \tag{1.19}$$

Iremos usar a seguinte fórmula de Leibniz para a integração dos termos de (1.19).

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s} F(r, s) \, \mathrm{d}r = \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_a^b F(r, s) \, \mathrm{d}r \right) - F(b, s) \frac{\partial b}{\partial s} + F(a, s) \frac{\partial a}{\partial s}. \tag{1.20}$$

Utilizando a fórmula de Leibniz (1.20), e as condições de fronteira (1.9) e (1.12), adquirimos

$$\int_{z_b}^{z} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_3 = \frac{\partial (h\bar{u}_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \frac{(h\overline{u_i u_j})}{\partial x_j}, \qquad \text{para } i = 1, 2. \tag{1.21}$$

Para o termo da pressão, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{z_b}^{z} \frac{\partial p}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_3 &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_{z_b}^{z} p\,\mathrm{d}x_3\right) - p|_{x_3=z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + p|_{x_3=z_b}\left(\frac{\partial z_b}{\partial x_i}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_{z_b}^{z}(\rho g(z-x_3)+p_a)\,\mathrm{d}x_3\right)\\ &\quad - p_a\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \rho g h\left(\frac{\partial z_b}{\partial x_i}\right) + p_a\left(\frac{\partial z_b}{\partial x_i}\right)\\ &= \rho g z\frac{\partial h}{\partial x_i} + h\frac{\partial p_a}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{\rho}\int_{z_b}^{z} \frac{\partial p}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_3 = gz\frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_i}, \qquad \text{para } i=1,2. \tag{1.22}$$

Para os termos de $\tau(u)$, temos

$$\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\left(\int_{z_b}^{z}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_3\right) = \frac{1}{\rho}(\tau_{i3}^{s}-\tau_{i3}^{b}) + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{2}\left(\int_{z_b}^{z}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_3\right), \qquad \text{para } i=1,2. \tag{1.23}$$

Na Equação (1.23), os super-índices s e b representam as fronteiras de cima e de baixo da superfície livre. Então as equações médias do momento com respeito a profundidade são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial(h\bar{u_i})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial(h\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} &= -gz\frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}(\tau_{i3}^{s}-\tau_{i3}^{b}) + hf_i\\ &\quad - \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{2}\left(\int_{z_b}^{z}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_3\right), \qquad \text{para } i=1,2.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Os coeficientes τ_{i3}^{s} e τ_{i3}^{b} são chamados de tensões de cisalhamento na superfície e são prescritos externamente. O termo τ_{i3}^{s} é devido ao arrasto do vento, que pode contribuir ou prejudicar o movimento do fluido. O termo τ_{i3}^{b} é o termo devido ao atrito com o leito, que sempre atua contra o movimento do fluido. O coeficiente τ_{i3}^{b} é frequentemente expresso por uma fórmula de resistência hidráulica, por exemplo, pela fórmula de Chézi, dada por

$$\tau_{i3}^{b} = \frac{\rho g|\bar{u}_i|\bar{u}_i}{Ch^2},$$

onde

$$|\bar{u}|_i = \sqrt{\bar{u}_i\bar{u}_i}, \quad i=1,2,$$

e C é o coeficiente de Chézi.

Neste momento, vamos omitir o cisalhamento atuando sobre o fluido nas direções longitudinais x_1 e x_2, e considerar apenas o arrasto do vento τ_{i3}^{s} e o cisalhamento do leito τ_{i3}^{b}. Iremos também considerar $\boldsymbol{f}$ como no problema de superfície livre,

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3) = (0, 0, -g).$$

Então as equações médias do momento modificadas sobre estas condições são descritas por

$$\frac{\partial(h\bar{u_i})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial(h\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} = -gz\frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}(\tau_{i3}^s - \tau_{i3}^b) - \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, 2. \tag{1.25}$$

Com o objetivo de escrever as equações anteriores como leis de conservação, consideramos $h = z - z_b$ e a seguinte identidade

$$-gz\frac{\partial h}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\left(\frac{z^2 - {z_b}^2}{2}\right)\right) + g(z - z_b)\frac{\partial z_b}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, 2. \tag{1.26}$$

Substituindo a Equação (1.26) na Equação (1.25), obtemos a forma conservativa da equação média do momento, dada abaixo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(h\bar{u_i})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial(h\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} = &-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}g(z^2 - {z_b}^2)\right] + \frac{1}{\rho}(\tau_{i3}^s - \tau_{i3}^b) \\ &+ g(z - z_b)\left(\frac{\partial z_b}{\partial x_i}\right) - \frac{h}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x_i}, \quad \text{para } i = 1, 2.\end{aligned} \tag{1.27}$$

As equações (1.18) e (1.27) formam as equações de águas rasas 2D. Estas equações podem ser escritas na forma compacta

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{F_j}}{\partial x_j} + \boldsymbol{Q} = 0, \tag{1.28}$$

onde

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} h \\ h\bar{u_1} \\ h\bar{u_2} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F_j} = \begin{bmatrix} h\bar{u_j} \\ h\overline{u_1 u_j} + \dfrac{\delta_{1j}}{2}g(z^2 - {z_b}^2) \\ h\overline{u_2 u_j} + \dfrac{\delta_{2j}}{2}g(z^2 - {z_b}^2) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(z - z_b)\left(\dfrac{\partial z_b}{\partial x_1}\right) + \dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial p_a}{\partial x_1} - \dfrac{1}{\rho}\tau_{13}^s + \dfrac{g\bar{u_1}|\bar{u}|}{Ch^2} \\ -g(z - z_b)\left(\dfrac{\partial z_b}{\partial x_2}\right) + \dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial p_a}{\partial x_2} - \dfrac{1}{\rho}\tau_{23}^s + \dfrac{g\bar{u_2}|\bar{u}|}{Ch^2}. \end{bmatrix}$$

Onde $\delta_{mn} = 1$ se $m = n$ e $\delta_{mn} = 0$ caso $m \neq n$.

A Equação (1.28) é então chamada de forma conservativa das equações de águas rasas 2D.

1.2 Equações de Saint-Venant

Para a modelagem do fluxo não-estável de um fluido newtoniano em canais abertos, existe um modelo unidimensional de equações que consegue obter a velocidade e a altura do fluido analisado. Estas são as equações de águas rasas 1D, que também são obtidas através das equações de conservação da massa (1.7) e de balanço do momento linear (1.8). Estas equações são usualmente chamadas de equações de Saint-Venant, nome que é devido ao engenheiro francês Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, que as publicou pela primeira vez no trabalho (VENANT, 1871).

Estas equações são baseadas em algumas suposições fundamentais, que serão descritas abaixo:

(i) O fluxo é unidimensional, ou seja, a velocidade é uniforme em uma seção transversal e o perfil transversal da superfície livre é horizontal;

(ii) A curvatura aerodinâmica é muito pequena e as acelerações verticais do fluido são negligenciáveis, de forma que a pressão é hidrostática como em (1.16);

(iii) A resistência do fluxo e as perdas devidas a turbulência são as mesmas se comparadas com um fluxo em estado estável com a mesma profundidade e velocidade, independente das pretensões da profundidade;

(iv) A inclinação do leito é pequena;

(v) A massa específica do fluido é constante .

Com estas hipóteses, o fluxo pode ser descrito em qualquer ponto do domínio utilizando duas variáveis, a saber, a velocidade u e a área molhada A, ou a vazão Q e a área molhada A. Nas figuras 6 e 7, temos a ilustração das seções transversais ao longo do eixo x, e de uma seção transversal ampliada juntamente com as variáveis do sistema.

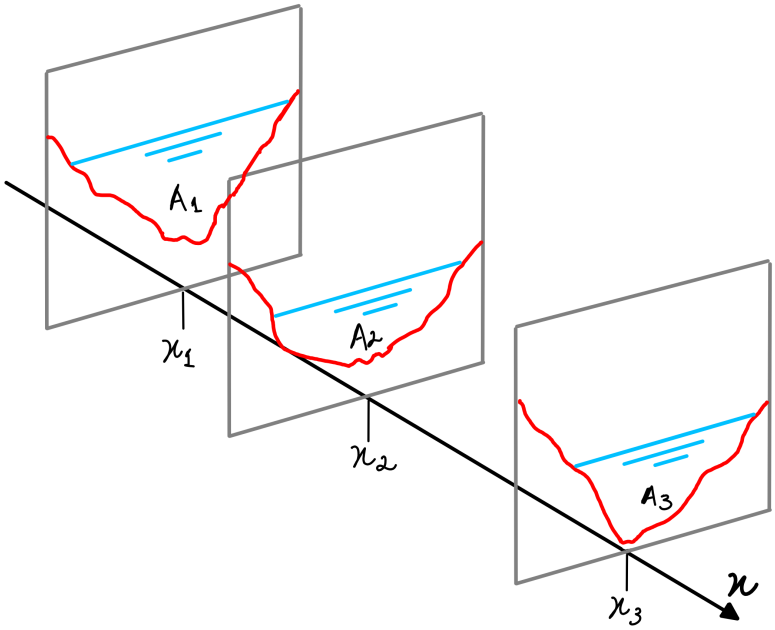

Figura 6 – Seções transversais vistas em alguns pontos do domínio.

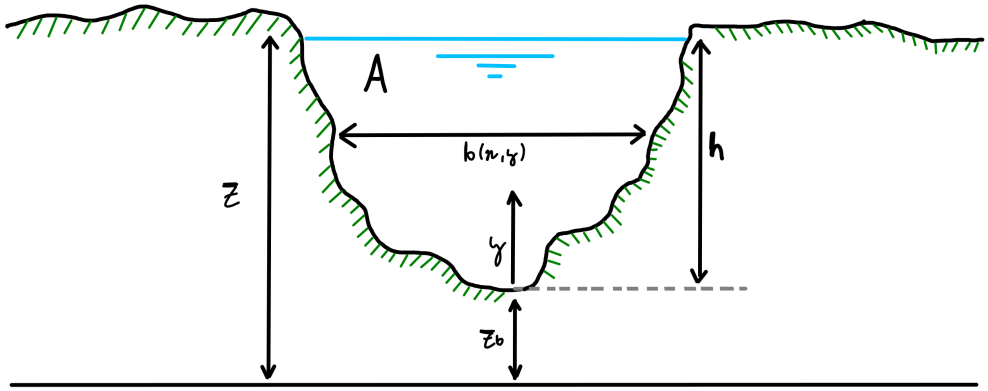

Figura 7 – Ilustração de uma seção transversal mostrando a área molhada, a profundidade d'água, a elevação do leito e a largura do canal variando em um eixo y.

A dedução das equações de Saint-Venant é feita de forma análoga a dedução das equações de águas rasas 2D. A observação principal a ser considerada é que surgem termos nas equações de Saint-Venant que não aparecem nas equações de águas rasas 2D. Estes termos aparecem pois consideramos agora seções transversais do domínio, e então precisamos de variáveis que capturem as variações na largura do canal nas seções transversais, pois estas informações influenciam na área molhada e na vazão do fluido. Para mais informações, consulte (CHANSON, 2004).

1.3 Forma Conservativa das Equações de Saint-Venant

Como dito na introdução, para um canal de comprimento L e um intervalo de tempo $(0, T)$, as equações de Saint-Venant na forma conservativa, escritas em função de Q e A, são dadas por

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1\right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T). \tag{1.30}$$

Onde

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x}; \quad S_f = \frac{n^2|Q|Q}{R^{4/3}A^2};$$
$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} (h-y)b(x,y)\,\mathrm{d}y; \quad I_2 = \int_0^{h(x,t)} (h-y)\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

As variáveis procuradas são a área molhada $A = A(x,t)$ e a vazão $Q = Q(x,t)$. Os demais termos são a aceleração gravitacional g (tomada como $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$), a profundidade da água $h = h(x,t)$, a largura do canal $b = b(x,t)$, a força de pressão hidrostática I_1, a força de pressão de parede I_2, a inclinação do leito S_0 e a inclinação de fricção S_f. Para S_0 e S_f, temos mais ainda a elevação do leito do canal $z_b = z_b(x)$, o coeficiente de rugosidade de Manning n e o raio hidráulico da seção transversal R.

1.3.1 Forma Conservativa das Equações de Saint-Venant para Canais Retangulares Uniformes

Vamos agora considerar o caso particular onde o canal analisado é retangular, neste caso, a função $b(x,y)$ é constante em y, e então escrevemos simplesmente $b(x,y) = b(x)$. Temos então a seguinte largura do canal.

$$A(x,t) = b(x)h(x,t).$$

Note que neste caso,

$$g\frac{\partial I_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{2b}A^2\right). \tag{1.31}$$

De fato,

$$gI_1 = g\int_0^h (h-y)b(x)\,\mathrm{d}y = gb(x)\int_0^h (h-y)\,\mathrm{d}y = \frac{gbh^2}{2} = \frac{g}{2b}A^2.$$

Podemos então reescrever as equações da conservação da massa e do balanço do momento utilizando a identidade (1.31), que resultam em:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A} + \frac{g}{2b}A^2\right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2. \tag{1.33}$$

A velocidade média do sistema é dada por

$$u(x,t) = \frac{Q}{A}.$$

Definimos então

$$q(x,t) = h(x,t)u(x,t).$$

Vamos agora escrever as equações (1.32) e (1.33) em termos das variáveis h e q.

Dado que

$$A = b(x)h(x,t),$$

tem-se

$$Q = A(x,t)u(x,t) = b(x)h(x,t)u(x,t) = b(x)q(x,t).$$

Pela equação de conservação da massa (1.32) segue-se que

$$b\frac{\partial h}{\partial t} + b\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}q = 0. \tag{1.34}$$

Abrindo os termos da equação do momento (1.33) observamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b\frac{\partial q}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right) = b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right) + \frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{bq^2}{h}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{2b}A^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{gbh^2}{2}\right) = \frac{gh^2}{2}\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{gh^2}{2}\right);$$

$$gA(S_0 - S_f) = bgh(S_0 - S_f).$$

Então a Equação (1.33) é reescrita por

$$b\frac{\partial q}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) + \frac{\partial b}{\partial x}(hu^2) + \frac{gh^2}{2}\frac{\partial b}{\partial x} = gbh(S_0 - S_f) + gI_2. \tag{1.35}$$

Se além disso, tivermos um canal retangular uniforme, isto é, se $b(x)$ é constante para todo $x \in (0, L)$ de modo que $b(x) = b$ com $b > 0$, então

$$\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \quad I_2 = \int_0^h (h - y)\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Obtemos então a partir de (1.34) e (1.35) as seguintes equações de conservação de massa e do momento para canais retangulares uniformes.

Equações de Saint-Venant para Canais Retangulares Uniformes

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) = gh(S_0 - S_f), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \tag{1.37}$$

onde

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_f = \frac{n^2 q|q|}{h^{10/3}}.$$

Uma observação a ser considerada é que para canais retangulares uniformes, é feita a seguinte aproximação

$$S_f = \frac{n^2|Q|Q}{R^{4/3}A^2} \approx \frac{n^2 q|q|}{h^\eta},$$

como em (YANG; YANG; XING, 2021), no nosso caso escolhemos $\eta = \dfrac{10}{3}$.

As equações de Saint-Venant (1.36)-(1.37), podem ser escritas na forma vetorial, onde $\boldsymbol{u}$ é o vetor das variáveis, $\boldsymbol{f}$ é o vetor de fluxo e $\boldsymbol{s}$ é o vetor fonte.

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t), \tag{1.38}$$

com

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} q \\ \dfrac{gh^2}{2} + \dfrac{q^2}{h} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh\,(S_0 - S_f) \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

A matriz jacobiana do vetor de fluxo $\boldsymbol{f}$, bem como seus autovalores e respectivos autovetores são dados por

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - \dfrac{q^2}{h^2} & \dfrac{2q}{h} \end{bmatrix}, \tag{1.40}$$

$$\lambda_1 = \frac{q}{h} - \sqrt{gh}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{q}{h} - \sqrt{gh} \end{bmatrix}, \tag{1.41}$$

$$\lambda_2 = \frac{q}{h} + \sqrt{gh}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{q}{h} + \sqrt{gh} \end{bmatrix}. \tag{1.42}$$

Os autovalores λ_1, λ_2 de $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}$ são reais e distintos quando $h > 0$. Então as equações (1.36)-(1.37) dispostas na forma conservativa (1.38) geram um sistema hiperbólico.

Para equações hiperbólicas, mesmo com condição inicial suave e condições de fronteira adequadas, uma solução descontínua pode se desenvolver no domínio computacional. Portanto, o modelo numérico para as equações de águas rasas deve ser capaz de capturar estas descontinuidades, e o método de elementos finitos descontínuo é uma escolha adequada para tais problemas.

1.4 Forma Não-Conservativa das Equações de Saint-Venant

Devido a dificuldade no cálculo da força de pressão hidrostática I_1, e da força de pressão de parede I_2, em canais não-retangulares e não-prismáticos, os dois termos podem ser simplificados da seguinte forma.

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2 \approx A\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1.43}$$

Substituindo na Equação (1.30) e explicitando o termo S_0, obtemos

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial h}{\partial x} = gA\left(-\frac{\partial z_b}{\partial x} - S_f\right).$$

Passando o termo $gA\dfrac{\partial h}{\partial x}$ para o lado direito da equação, temos

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = -gA\frac{\partial}{\partial x}(z_b + h) - gAS_f.$$

Dado que $z = z_b + h$,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = -gA\frac{\partial z}{\partial x} - gAS_f. \tag{1.44}$$

As equações (1.29) e (1.44) são a forma não-conservativa das equações de Saint-Venant (1.29)-(1.30). Diversos trabalhos com métodos para a resolução numérica das equações de Saint-Venant utilizam a forma não-conservativa, como em (LAI; KHAN, 2012) e (YING; KHAN; WANG, 2004). Utilizar a forma não-conservativa é um modo de balancear as equações.

As equações (1.29)-(1.44), também podem ser escritas na forma vetorial

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t).$$

Onde

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} Q \\ \dfrac{Q^2}{A} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gA\dfrac{\partial z}{\partial x} - gAS_f \end{bmatrix}.$$

Temos agora que a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ com respeito à $\boldsymbol{u}$ é dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\dfrac{Q}{A}\right)^2 & \dfrac{2Q}{A} \end{bmatrix},$$

com autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{Q}{A}$. Note que este sistema não é hiperbólico.

2 Método de Galerkin Descontínuo para Leis de Conservação e Leis de Balanço

Neste capítulo, iremos apresentar o método de Galerkin Descontínuo para leis de conservação e leis de balanço. Seguiremos os artigos de (COCKBURN; SHU, 1989) e (COCKBURN; SHU, 1991) e os bons trabalhos em português (SILVA, 2015) e (SILVA, 2019).

O método de Galerkin Descontínuo (DG) é um método pertencente a classe dos métodos de elementos finitos que usa uma base de funções polinomiais descontínuas entre os elementos. Segundo (SHU, 2009), o primeiro método DG foi introduzido em (REED; HILL, 1973) e depois foi desenvolvido por diversos autores, em especial, pelo matemático Bernardo Cockburn.

Dado que o foco principal do trabalho não é o estudo do método em si, mas sua aplicação nas equações de Saint-Venant, não entraremos muito nos seus detalhes técnicos. Para mais informações, o autor pode consultar (SILVA, 2015) e (SILVA, 2019). Ao longo desta dissertação, iremos também denotar o método de Galerkin Descontínuo como método DG.

De início, estamos interessados em resolver a seguinte lei de conservação escalar

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad \text{em } (0,L)\times(0,T); \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad \text{para todo } x \in (0,L); \tag{2.2}$$

e condição de fronteira periódica.

2.1 Discretização do Espaço

Seja $\{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}_{j=1}^{N}$ uma partição do intervalo $(0,L)$ em N intervalos $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, de tamanho $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$. No caso de malhas uniformes $\Delta x_j = \Delta x$ é o mesmo para todo $j = 1, 2, \ldots, N$.

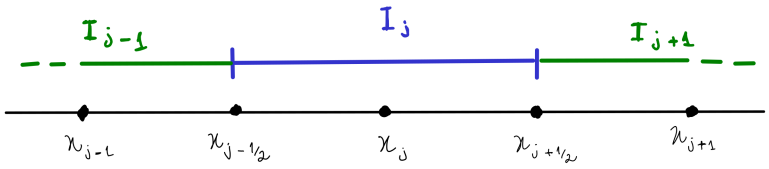

Figura 8 – Células e nós da malha computacional

Cada intervalo I_j será um *elemento* do nosso domínio espacial $(0, L)$. Cada elemento I_j será genericamente representado por três nós, o nó da esquerda $x_{j-1/2}$, o centroide x_j e o nó da direita $x_{j+1/2}$. Esta notação é vantajosa pois para o método de Galerkin Descontínuo, as soluções não serão necessariamente contínuas nos nós $x_{j-1/2}, x_{j+1/2}$, mas serão contínuas no interior do elemento I_j. Os elementos e nós estão representados na Figura 8.

2.2 Espaços de Aproximação

Iremos aproximar a solução exata por uma solução numérica em cada elemento I_j do domínio. Esta solução numérica pertencerá a um subespaço de dimensão finita de $L^2(0, L)$ que chamaremos de espaço de aproximação V_h.

O subespaço de dimensão finita de $L^2(0, L)$ utilizado no método é o espaço de polinômios de grau até k

$$V_h := V_h^k := \{v \in L^2(0, L); v\big|_{I_j} \in P^k(I_j),\ j = 1, 2, \ldots, N\}. \tag{2.3}$$

No caso em que estivermos interessados na formulação global, denotaremos por $V_{h,j}$ ao invés de somente V_h, isto porque neste caso, rotular os elementos será importante.

2.3 Formulação Fraca

Tomando uma função teste $v \in C^\infty(0, L)$, multiplicamos a Equação (2.1) e a Equação (2.2) por $v(x)$, e integramos em cada elemento $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$, obtendo

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(u_t(x,t)v(x) + f(u(x,t))_x\right) v(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, N; \tag{2.4}$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,0)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(x)v(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall j = 1, \ldots, N. \tag{2.5}$$

Utilizando integração por partes, segue-se que

$$\begin{aligned}&\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_t(x,t)v(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u(x,t))v_x(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + f(u(x_{j+1/2}^-,t))v(x_{j+1/2}^-) - f(u(x_{j-1/2}^+,t))v(x_{j-1/2}^+) = 0, \quad \forall j = 1,\ldots,N;\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,0)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall j = 1,\ldots,N. \tag{2.7}$$

Esta é a *formulação fraca* do Problema (2.1)-(2.2). Se u satisfaz as equações (2.6) e (2.7) para toda função teste $v \in C^\infty(0,L)$, dizemos que u é uma solução fraca do problema (2.1)-(2.2).

2.4 Formulação Variacional Local

O próximo passo é substituir a função $v \in C^\infty(0,L)$ por uma função v_h do espaço de aproximações V_h. Ao invés de u, buscamos uma solução numérica $u_h \in V_h$ que satisfaça as equações (2.6) e (2.7), isto é,

$$\begin{aligned}&\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \partial_t u_h(x,t)v_h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_h(x,t))\partial_x v_h(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + f(u_h(x_{j+1/2},t))v_h(x_{j+1/2}^-) - f(u_h(x_{j-1/2},t))v_h(x_{j-1/2}^+) = 0, \quad \forall j = 1,\ldots,N;\end{aligned}$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_h(x,0)v_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(x)v_h(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall j = 1,\ldots,N.$$

Como a função u_h é possivelmente descontínua nos pontos $x_{j-1/2}$ e $x_{j+1/2}$, a avaliação do fluxo f em $u_h(x_{j-1/2})$ e $u_h(x_{j+1/2})$ não está bem definida, temos então que substituir $f(u_h(x_{j-1/2}))$ e $f(u_h(x_{j+1/2}))$ por uma função de *fluxo numérico* que depende dos valores limite. Iremos fixar as notações

$$x_{j-1/2}^- = \lim_{\varepsilon\to 0} x_{j-1/2} - \varepsilon.$$

$$x_{j-1/2}^+ = \lim_{\varepsilon\to 0} x_{j-1/2} + \varepsilon.$$

O valor $f(u_h(x_{j-1/2}))$ então é substituído pelo *fluxo numérico* $f_h(u_h)_{j-1/2}(t)$ dado por

$$f_h(u_h)_{j-1/2}(t) = f_h(u_h(x_{j-1/2}^-,t), u(x_{j-1/2}^+,t)). \tag{2.8}$$

Analogamente, definimos

$$x_{j+1/2}^- = \lim_{\varepsilon\to 0} x_{j+1/2} - \varepsilon.$$

$$x^+_{j+1/2} = \lim_{\varepsilon \to 0} x_{j+1/2} + \varepsilon.$$

$$f_h(u_h)_{j+1/2}(t) = f_h(u_h(x^-_{j+1/2}, t), u(x^+_{j+1/2}, t)). \tag{2.9}$$

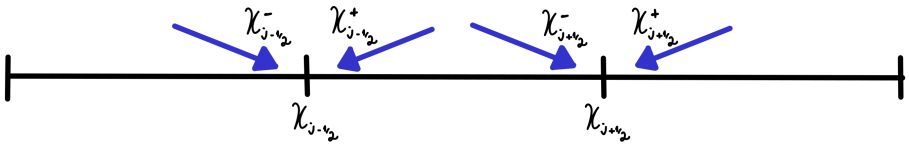

Figura 9 – Valores limite dispostos na malha computacional

Fazendo as devidas substituições pelas funções de fluxo numérico, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \partial_t u_h(x,t) v_h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_h(x,t))\partial_x v_h(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + f_h(u_h)_{j+1/2}(t) v_h(x^-_{j+1/2}) - f_h(u_h)_{j-1/2}(t) v_h(x^+_{j-1/2}) = 0; \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_h(x,0) v_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(x) v_h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Então a solução aproximada $u_h|_{I_j}$, no elemento I_j e no tempo t, dada pelo método de Galerkin Descontínuo é definida como sendo a solução da formulação variacional local (2.10)-(2.11) para toda função teste $v_h \in V_h$.

As funções da base de V_h são dadas por

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x).$$

Escrevemos então u_h como combinação linear dos vetores da base de V_h.

$$u_h(x,t) = \sum_{i=0}^{k} c_i(t)\varphi_i(x),$$

desta forma,

$$\partial_t u_h(x,t) = \sum_{i=0}^{k} \partial_t c_i(t)\varphi_i(x),$$

e também

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \partial_t u_h(x,t) v_h(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{k} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \partial_t c_i(t)\varphi_i(x) v_h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{k} \partial_t c_i(t) \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \varphi_i(x) v_h(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Observe que como a integral é em x, as derivadas em t são constantes na integração no espaço. Substituindo a Equação (2.12) em (2.10) obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\partial_t c_i(t)\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}\varphi_i(x)v_h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_h(x,t))\partial_x v_h(x)\,\mathrm{d}x \\ + f_h(u_h)_{j+1/2}(t)v_h(x^-_{j+1/2}) - f_h(u_h)_{j-1/2}(t)v_h(x^+_{j-1/2}) = 0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Como V_h é um espaço vetorial de dimensão finita $k+1$, para que a formulação fraca seja satisfeita para toda função teste $v_h \in V_h$, basta que seja satisfeita para as funções da base de V_h. Fazendo $v_h(x) = \varphi_l(x)$, para $l = 0, \ldots, k$ obtemos o sistema de EDO's acopladas pelo fluxo numérico

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\partial_t c_i(t)\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}\varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_h(x,t))\partial_x \varphi_l(x)\,\mathrm{d}x \\ + f_h(u_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x^-_{j+1/2}) - f_h(u_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x^+_{j-1/2}) = 0\ ,\end{aligned} \tag{2.14}$$

para cada $l = 0, 1, \ldots, k$.

Reunindo os resultados anteriores, temos a seguinte definição.

Definição 1. *Seja $V_{h,j}$ um espaço de aproximação local com dimensão $k+1$. Dizemos que*

$$u_h(x,t)|_{I_j} = \sum_{i=0}^{k} c_i(t)\varphi_i(x)$$

é uma solução local obtida pelo método de Galerkin Descontínuo se satisfazer as equações

(i)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\partial_t c_i(t)\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}\varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_h(x,t))\partial_x \varphi_l(x)\,\mathrm{d}x \\ + f_h(u_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x^-_{j+1/2}) - f_h(u_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x^+_{j-1/2}) = 0\ ,\end{aligned} \tag{2.15}$$

para cada $l = 0, 1, \ldots, k$.

(ii)

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_h(x,0)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

para cada $l = 0, 1, \ldots, k$.

Se ao invés de (2.1)-(2.2) quisermos resolver a lei de balanço

$$u_t + f(u)_x = s(u,x,t), \quad \text{em } (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (0,T); \tag{2.17}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad \text{para todo } x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}); \tag{2.18}$$

e condição de fronteira periódica, substituímos a equação (2.15) por

$$\sum_{i=0}^{k}\partial_t c_i(t)\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}\varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_h(x,t))\partial_x\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x$$
$$+\ f_h(u_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x^-_{j+1/2}) - f_h(u_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x^+_{j-1/2}) = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s(u_h(x,t),x,t)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x\ , \tag{2.19}$$

para cada $l = 0, 1, \ldots, k$.

2.5 Forma Matricial

Podemos escrever o sistema (2.14) na forma

$$B\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = H(\boldsymbol{u}), \tag{2.20}$$

onde os vetores $\boldsymbol{u}, H(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{k+1}$, e a matriz $B \in \mathbb{R}^{k+1\times k+1}$ são dados por

$$\boldsymbol{u}(t) = \left[c_0(t), c_1(t), \ldots, c_k(t)\right]^T,$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} = \left[\partial_t c_0(t), \partial_t c_1(t), \ldots, \partial_t c_k(t)\right]^T, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{u})_l = &\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(u_h(x,t))\partial_x\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - f_h(u_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x_{j+1/2}) \\ &+ f_h(u_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x_{j-1/2}), \qquad \text{para } l = 0, 1, \ldots, k, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$B_{i,l} = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } i, l = 0, 1, \ldots, k, \tag{2.23}$$

lembrando que $u_h(x,t)$ depende dos coeficientes $c_0(t), c_1(t), \ldots, c_k(t)$.

Como a matriz $B \in \mathbb{R}^{k+1\times k+1}$ é uma matriz de Gram com o produto interno de $L^2(0,L)$, segundo (LIMA, 2001), B é uma matriz invertível. Portanto podemos escrever

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = B^{-1}H(\boldsymbol{u})\ . \tag{2.24}$$

2.6 Formulação Variacional Global

A solução aproximada global $u_h(x,t)$ obtida pelo Método de Galerkin Descontínuo no tempo t é dada por

$$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N} u_h(x,t)|_{I_j}\ \chi_{I_j}(x), \quad \forall x \in (0,L); \tag{2.25}$$

$$u_h(x,0) = g_h(x) = \sum_{j=1}^{N} g_h(x,t)|_{I_j}\ \chi_{I_j}(x). \tag{2.26}$$

Onde $g_h(x,t)|_{I_j}$ é a projeção da função g no espaço $V_{h,j}$ e χ_{I_j} é a função característica do conjunto I_j, definida por

$$\chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in I_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada elemento I_j do domínio, temos um sistema diferencial dado pela Equação (2.24). Então mudaremos a notação da Equação (2.24) para

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^j}{\mathrm{d}t} = (B^j)^{-1} H(\boldsymbol{u}^j) \ \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, N.$$

Fazendo $k_{total} = N(k+1)$, definimos os vetores $\boldsymbol{u}, \mathcal{H}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{k_{total}}$, e a matriz $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{k_{total} \times k_{total}}$ como sendo

$$\boldsymbol{u} = \left[\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \ldots, \boldsymbol{u}^N\right], \tag{2.27}$$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{u}) = \left[H(\boldsymbol{u}^1),\ H(\boldsymbol{u}^2), \ldots,\ H(\boldsymbol{u}^N)\right], \tag{2.28}$$

$$\mathcal{B} = \operatorname{diag}\left(B^1, B^2, \ldots, B^N\right). \tag{2.29}$$

Então o sistema global de EDO's é dado por

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{L}_h(\boldsymbol{u}); \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{u}(x,0) = g_h(x). \tag{2.31}$$

Descrito desta forma, podemos resolver o sistema de EDO's por um esquema de evolução temporal, tal como o método de Runge-Kutta.

2.7 Fluxos Numéricos

Para completar a definição da nossa solução aproximada u_h, precisamos escolher um fluxo numérico f_h. Queremos construir esquemas que são pertubações de esquemas

monótonos, pois apesar dos esquemas monótonos serem de primeira ordem de acurácia, são estáveis e convergem para a solução de entropia. Mais precisamente, quando u_h for aproximada por funções constantes por partes, o método de Galerkin Descontínuo deve gerar um esquema monótono.

A função de fluxo numérico $f_h(a, b)$ deve ser Lipschitz, consistente, e com fluxo monótono, ou seja, deve possuir as seguintes propriedades.

(i) É localmente Lipschitz;

(ii) É consistente com o fluxo $f(u)$, i.e $f_h(u, u) = f(u)$;

(iii) É uma função não-decrescente do seu primeiro argumento, i.e, $\forall b \in \mathbb{R}$

$$a_- < a_+ \Longrightarrow f_h(a_-, b) \leq f_h(a_+, b);$$

(iv) É uma função não-crescente do seu segundo argumento, i.e, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$b_- < b_+ \Longrightarrow f_h(a, b_-) \geq f_h(a, b_+).$$

2.8 Esquemas de Evolução Temporal

Método de Euler Avançado

Dado o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{L}_h(\boldsymbol{u}); \\ \boldsymbol{u}(x, 0) &= g_h(x). \end{aligned}$$

o Método de Euler Avançado é dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{n+1} &= \boldsymbol{u}^n + \Delta t \mathcal{L}_h(\boldsymbol{u}^n); \\ \boldsymbol{u}^0 &= g_h(x). \end{aligned}$$

Este é o método mais simples para resolver problemas de valor inicial. Para um leitor não familiarizado com o método de Galerkin Descontínuo, nos primeiros experimentos numéricos recomendamos utilizar o método de Euler, devido a sua facilidade de implementação e entendimento em comparação aos outros métodos para a resolução de PVI's. A configuração do problema é a dada pela forma matricial (2.30).

2.8.1 Método SSP-RK

De acordo com (SILVA, 2019), os esquemas da classe TVD-RK (Total Variation Dimishing Runge-Kutta), foram escolhidos por Cockburn e seus colaboradores devido as suas boas propriedades de estabilidade. Neste esquema, os coeficientes do método de Runge-Kutta são escolhidos a fim de satisfazer a propriedade TVD (Total Variation Dimishing) nos casos unidimensionais. A nomenclatura TVD-RK foi substituída por SSP-RK(Strong Stability Preserving Runge-Kutta).

Considere novamente o problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{L}_h(\boldsymbol{u}); \tag{2.32}$$

$$\boldsymbol{u}(x,0) = g_h(x). \tag{2.33}$$

Se nós estamos utilizando um espaço de aproximações V_h de dimensão $k+1$, gostaríamos que o método utilizado para resolver o sistema (2.32)-(2.33) possua pelo menos ordem $k+2$ de acurácia. Para obtermos isto, utilizamos a discretização SSP-RK.

O esquema SSP-RK que utilizaremos nos experimentos numéricos pode ser encontrado em (COCKBURN; SHU, 1991), (COCKBURN; SHU, 1989) e (COCKBURN; LIN; SHU, 1989). Este, será descrito detalhadamente a seguir.

Tomando a partição $\{t_n\}_{n=0}^{N}$ de $(0,T)$ e $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, nosso algoritmo de passo no tempo é dado da seguinte maneira,

- Tome $u_h^0 = g_h$;
- Para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ calcule u_h^{n+1} como se segue:

  (i) Tome $u_h^{(0)} = u_h^n$;

  (ii) Para $i = 1, \ldots, k$ calcule as funções intermediárias

$$u_h^{(i)} = \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n \mathcal{L}_h(u_h^{(l)}) \right\};$$

  (iii) Faça $u_h^{n+1} = u_h^{(k)}$.

Tabela 1 – Tabela com alguns parâmetros práticos para aplicação do método SSP-RK

Parâmetros Práticos de Algumas Discretizações de Runge-Kutta							
Ordem	α_{il}			β_{il}			$\max\{\beta_{il}/\alpha_{il}\}$
2							1
	1			1			
	1/2	1/2		0	1/2		
3							1
	1			1			
	3/4	1/4		0	1/4		
	1/3	0	2/3	0	0	2/3	

Os valores β_{il}, α_{il} na tabela de Butcher 1, são tomados considerando $0 \leq i, l \leq k$. Observa-se também que são todos métodos explícitos, pois os valores de β_{il}, α_{il} na diagonal, e acima da diagonal são todos iguais a zero.

2.9 Limitadores Locais de Inclinação

Trabalharemos com dois espaços de aproximação, o espaço formado por polinômios constantes por partes, cujo método será chamado de DG0 (método de Galerkin Descontínuo com espaço de aproximação por polinômios de grau 0), e o espaço formado por polinômios lineares por partes, cujo método será chamado de DG1.

No caso DG0, a viscosidade artificial produzida pelo fluxo numérico é suficiente para que o método seja estável. Por outro lado, no caso DG1, e em outros casos onde o espaço de aproximação tem dimensão maior que 1, a influência estabilizante que os fluxos numéricos possuem não é suficiente para que o método seja estável. Para eliminar as oscilações espúrias e garantir a estabilidade do método nestes casos, um limitador de inclinação $\Lambda\Pi_h$ é adicionado no algoritmo de passos no tempo. A seguir, temos o algoritmo modificado com o limitador de inclinação $\Lambda\Pi_h$.

- Tome $u_h^0 = \Lambda\Pi_h \; g_h$;
- Para $n = 0, 1, \ldots, N-1$ calcule u_h^{n+1} como se segue:

  (i) Tome $u_h^{(0)} = u_h^n$;

  (ii) Para $i = 1, \ldots, k$ calcule as funções intermediárias

$$u_h^{(i)} = \Lambda\Pi_h \left\{ \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n \mathcal{L}_h(u_h^{(l)}) \right\};$$

  (iii) Tome $u_h^{n+1} = u_h^k$.

2.10 Condição CFL

Esta seção é baseada em (SILVA, 2015) e (LEVEQUE, 2002). Vamos denotar o maior espaçamento da malha espacial por Δx, o número total de elementos por N, o número de passos no tempo por n_t e o tempo total da simulação por T. O coeficiente Δt será determinado a partir do número de Courant.

Condição CFL: Um método numérico pode ser convergente somente se seu domínio numérico de dependência conter o domínio de dependência verdadeiro da EDP em questão, pelo menos no limite, quando Δt e Δx tenderem para zero.

A condição CFL é apenas uma condição necessária para a estabilidade do método, não é uma condição suficiente.

O número de Courant é definido por

$$\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1\leq p\leq m} |\lambda_p(\boldsymbol{u}(x,t))|,$$

onde $\max\limits_{1\leq p\leq m} |\lambda_p(\boldsymbol{u}(x,t))|$ é a maior velocidade de onda do sistema, e este sistema possui m velocidades de onda (autovalores).

Em (COCKBURN; SHU, 1991), para o problema de advecção linear, foi mostrado que se um método de Runge-Kutta de segunda ordem é utilizado, o esquema é $L^\infty(0,T;L^2(0,T))$ estável, dado ν tal que

$$\max_{1\leq p\leq m} |\lambda_p(\boldsymbol{u}(x,t))| \frac{\Delta t}{\Delta x} = \nu \leq \frac{1}{3}.$$

Isto nos sugere que precisamos escolher pelo menos $\nu_{max} \leq \frac{1}{3}$ para os nossos experimentos numéricos. Aqui ν_{max} será o número de Courant utilizado nos experimentos numéricos.

Implementação da Condição CFL.

Nosso método é explícito no tempo, então para cada tempo t_n, iremos determinar um passo de tempo Δt de modo que a condição CFL seja satisfeita. Precisamos que

$$\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{1\leq p\leq m} |\lambda_p(\boldsymbol{u}(x,t))| \leq \nu_{max} \tag{2.34}$$

para cada passo de tempo t.

Considerando a partição $\{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}_{j=1}^N$ do intervalo $(0,L)$ do método de Galerkin Descontínuo, obtemos quem é

$$\lambda = \max_{1\leq j\leq N} \left\{ \max_{1\leq p\leq m} |\lambda_p(\boldsymbol{u}(x_{j-1/2},t))|,\ \max_{1\leq p\leq m} |\lambda_p(\boldsymbol{u}(x_j,t))|,\ \max_{1\leq p\leq m} |\lambda_p(\boldsymbol{u}(x_{j+1/2},t))| \right\}. \tag{2.35}$$

Escolhemos então

$$\Delta t = \frac{\nu_{\max} \cdot \Delta x}{\lambda}. \tag{2.36}$$

Se $\lambda = 0$, podemos tomar qualquer passo de tempo Δt, desde que possua pelo menos a ordem de Δx. Nos experimentos numéricos, caso aconteça esta situação, tomaremos $\lambda = 0.1$.

No caso de uma lei de conservação escalar, a Equação (2.35) se reduz simplesmente a

$$\lambda = \max_{1\leq j\leq N} \left\{ |\lambda(\boldsymbol{u}(x_{j-1/2},t))|,\ |\lambda(\boldsymbol{u}(x_j,t))|,\ |\lambda(\boldsymbol{u}(x_{j+1/2},t))| \right\}. \tag{2.37}$$

Nos experimentos numéricos, o número $\nu_{\max}$ será o chamado número de Courant.

2.11 Método DG para Sistemas de Leis de Balanço

Esta seção é baseada em (COCKBURN; SHU, 1989) e (KHAN; LAI, 2014). Estamos agora interessados em resolver o problema

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u},x,t), \quad \text{para } (x,t)\in(0,L)\times(0,T); \tag{2.38}$$

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{g}(x), \quad \text{para } x\in(0,L); \tag{2.39}$$

onde

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \vdots \\ u_m(x,t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{u}) \\ f_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u},x,t) = \begin{bmatrix} s_1(\boldsymbol{u},x,t) \\ s_2(\boldsymbol{u},x,t) \\ \vdots \\ s_m(\boldsymbol{u},x,t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{g}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

Para $1\leq p\leq m$, temos

$$u_p(x,t) : (0,L)\times(0,T)\to\mathbb{R};$$
$$f_p(\boldsymbol{u}) : (0,L)\times(0,T)\to\mathbb{R};$$
$$s_p(\boldsymbol{u},x,t) : (0,L)\times(0,T)\to\mathbb{R};$$
$$g_p(x) : (0,L)\to\mathbb{R}.$$

e

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) : (0,L)\times(0,T)\to\mathbb{R}^m$$

é a incógnita. Vamos assumir que este sistema é hiperbólico, como na Definição 3.

Temos então que resolver simultaneamente m problemas do tipo

$$(u_p)_t + f_p(\boldsymbol{u})_x = s_p(\boldsymbol{u},x,t), \quad \text{em } (0,L)\times(0,T); \tag{2.42}$$

$$u_p(x,0) = g_p(x), \quad \text{para todo } x\in(0,L). \tag{2.43}$$

para $1 \leq p \leq m$.

Podemos usar o mesmo procedimento desenvolvido nas seções anteriores para cada um destes problemas.

Escrevendo

$$\boldsymbol{u}_h(x,t)|_{I_j} = \begin{bmatrix} u_{1,h}(x,t)|_{I_j} \\ u_{2,h}(x,t)|_{I_j} \\ \vdots \\ u_{m,h}(x,t)|_{I_j} \end{bmatrix},$$

segundo a Definição 1, fixado $1 \leq p \leq m$, a solução local obtida pelo método de Galerkin Descontínuo é tal que

$$u_{p,h}(x,t)|_{I_j} = \sum_{i=0}^{k} c_{p,i}(t)\varphi_i(x),$$

onde os coeficientes são tais que

(i)

$$\sum_{i=0}^{k} \partial_t c_{p,i}(t) \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f_p(\boldsymbol{u}_h)\partial_x\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x$$
$$+ f_{p,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x_{j+1/2}) - f_{p,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x_{j-1/2}) = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s_p(\boldsymbol{u}_h,x,t)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x\ , \tag{2.44}$$

para cada $l = 0, 1, \ldots, k$.

(ii)

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_{p,h}(x,0)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g_p(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.45}$$

para cada $l = 0, 1, \ldots, k$.

Forma Matricial para Sistemas Hiperbólicos

Assim como na Seção 2.5, para $1 \leq p \leq m$, podemos escrever cada uma das equações (2.44) na forma

$$B\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_p}{\mathrm{d}t} = H(\boldsymbol{u}_p); \tag{2.46}$$

onde os vetores $\boldsymbol{u}_p, H(\boldsymbol{u}_p) \in \mathbb{R}^k$, e a matriz $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$, são dados por

$$\boldsymbol{u}_p(t) = [c_{p,0}(t), c_{p,1}(t), \ldots, c_{p,k}(t)]^T\ ; \tag{2.47}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_p(t)}{\mathrm{d}t} = [\partial_t c_{p,0}(t), \partial_t c_{p,1}(t), \ldots, \partial_t c_{p,k}(t)]^T\ ; \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{u}_p)_l = &\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f_p(\boldsymbol{u}_h)\partial_x\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - f_{p,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x_{j+1/2}) \\ &+ f_{p,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x_{j-1/2}) + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s_p(\boldsymbol{u}_h, x, t)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.49}$$

para $l = 0, 1, \ldots, k$;

$$B_{i,l} = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } i, l = 0, 1, \ldots, k. \tag{2.50}$$

Novamente, a matriz B é invertível, e obtemos então

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_p}{\mathrm{d}t} = B^{-1}H(\boldsymbol{u}_p). \tag{2.51}$$

Finalmente, escrevemos

$$\boldsymbol{u}(t) = [\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \ldots, \boldsymbol{u}_m(t)]^T; \tag{2.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t) = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_2(t)}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_m(t)}{\mathrm{d}t}\right]^T; \tag{2.53}$$

$$H(\boldsymbol{u}) = [H(\boldsymbol{u}_1), H(\boldsymbol{u}_2), \ldots, H(\boldsymbol{u}_m)]^T \tag{2.54}$$

onde $\boldsymbol{u}(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}$, $H(\boldsymbol{u})$ são vetores de ordem mk, e definimos a matriz em blocos

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & B \end{bmatrix}, \text{ com } \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.55}$$

de ordem $mk \times mk$, adquirindo assim o sistema

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} = \tilde{B}^{-1}H(\boldsymbol{u}). \tag{2.56}$$

Podemos resolver este sistema de EDO's por um esquema de evolução temporal, tal como o método de Runge-Kutta.

2.12 Fluxos Numéricos para Sistemas Hiperbólicos

Iremos introduzir o fluxo HLL e o fluxo de Roe com entropia fixa. Esta seção é baseada em (KHAN; LAI, 2014), (HARTEN; LAX; LEER, 1983) e (ROE, 1981).

2.12.1 Fluxo HLL

Como descontinuidades são permitidas entre a fronteira dos elementos, a solução para os fluxos numéricos pode ser considerada um problema de Riemann. Este problema de Riemann é dado por

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = 0; \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_L, \quad \text{se } x \leq 0; \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_R, \quad \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{2.57}$$

Onde $\boldsymbol{f}(x = 0, t)$ precisa ser resolvido.

Desenvolvido por Harten, Lax e Leer em (HARTEN; LAX; LEER, 1983), o fluxo HLL é baseado em três estados constantes separados por duas ondas.

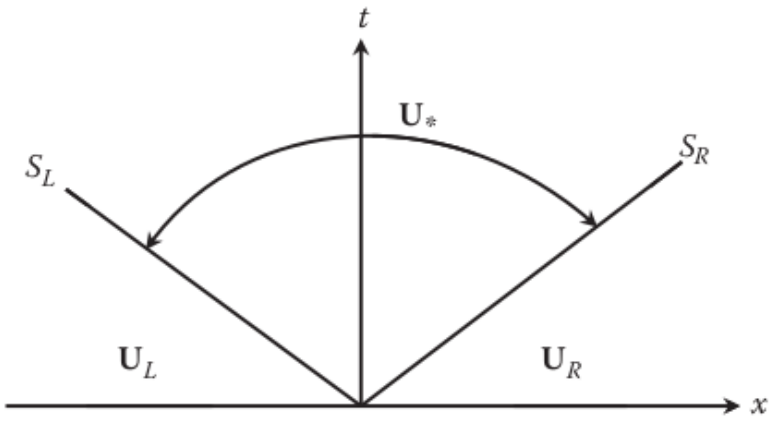

Figura 10 – Estrutura da onda para o fluxo HLL

As velocidades de onda mais lenta e mais rápida são dadas respectivamente por S_L e S_R, vamos assumir que ambas são conhecidas. O fluxo numérico é obtido através de integrais em um certo volume de controle, ilustrado na Figura 11.

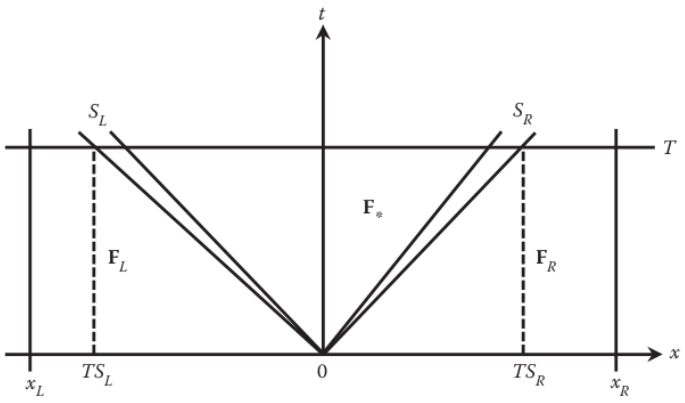

Figura 11 – Volume de controle $[x_L, x_R] \times (0, T)$ no plano (x, t).

A forma integral da lei de conservação (2.57) é dada por

$$\int_{x_L}^{x_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x = \int_{x_L}^{x_R} \boldsymbol{u}(x,0)\,\mathrm{d}x + \int_0^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x_L,t))\,\mathrm{d}t - \int_0^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x_R,t))\,\mathrm{d}t. \tag{2.58}$$

Calculando o lado direito da expressão (2.58), obtemos

$$\int_{x_L}^{x_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x = x_R\boldsymbol{u}_R - x_L\boldsymbol{u}_L + T(\boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R), \tag{2.59}$$

onde $\boldsymbol{f}_L = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_L)$ e $\boldsymbol{f}_R = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_R)$. Agora dividimos o lado esquerdo de (2.58) em três integrais,

$$\int_{x_L}^{x_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x = \int_{x_L}^{TS_L} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x + \int_{TS_L}^{TS_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x + \int_{TS_R}^{x_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x \tag{2.60}$$

Calculando o primeiro e o terceiro termo do lado direito de (2.60), obtemos

$$\int_{x_L}^{x_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x = \int_{TS_L}^{TS_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x + (TS_L - x_L)\boldsymbol{u}_L + (x_R - TS_R)\boldsymbol{u}_R. \tag{2.61}$$

Comparando (2.59) com (2.61), segue-se que

$$\int_{TS_L}^{TS_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x = T\left(S_R\boldsymbol{u}_R - S_L\boldsymbol{u}_L + \boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R\right). \tag{2.62}$$

Dividindo pelo comprimento $T(S_R - S_L)$, que é a largura do sistema de ondas para a solução do problema de Riemann, entre a menor e a maior velocidade de onda no tempo T, temos que

$$\frac{1}{T(S_R - S_L)} \int_{TS_L}^{TS_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x = \frac{S_R\boldsymbol{u}_R - S_L\boldsymbol{u}_L + \boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R}{S_R - S_L}.$$

Após isto, avaliamos a forma integral da lei de conservação (2.57) no volume de controle $[x_L, 0] \times (0, T)$. Obtemos então

$$\int_{TS_L}^{0} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x = -TS_L\boldsymbol{u}_L + T(\boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_{0L}),$$

onde $\boldsymbol{f}_{0L}$ é o fluxo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ ao longo do eixo t. Pondo $\boldsymbol{f}_{0L}$ em evidência, adquiri-se

$$\boldsymbol{f}_{0L} = \boldsymbol{f}_L - S_L\boldsymbol{u}_L - \frac{1}{T}\int_{TS_L}^{0} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x. \tag{2.63}$$

De forma análoga, avaliando a forma integral de (2.57) no volume de controle $[0, x_R] \times (0, T)$, tem-e que

$$\boldsymbol{f}_{0R} = \boldsymbol{f}_R - S_R\boldsymbol{u}_R + \frac{1}{T}\int_{0}^{TS_R} \boldsymbol{u}(x,T)\,\mathrm{d}x. \tag{2.64}$$

É direto provar que $\boldsymbol{f}_{0R} - \boldsymbol{f}_{0L} = 0$, e então

$$\boldsymbol{f}_{0R} = \boldsymbol{f}_{0L} = \frac{S_R\boldsymbol{u}_R - S_L\boldsymbol{u}_L + \boldsymbol{f}_L + \boldsymbol{f}_R}{S_R - S_L}.$$

Vamos denotar esta constante por

$$\boldsymbol{u}^* = \frac{S_R\boldsymbol{u}_R - S_L\boldsymbol{u}_L + \boldsymbol{f}_L + \boldsymbol{f}_R}{S_R - S_L}.$$

A solução exata do problema de Riemann (2.57) é então dada por

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(x,t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_L, & \text{se } \dfrac{x}{t} \leq S_L; \\ \boldsymbol{u}^*, & \text{se } S_L \leq \dfrac{x}{t} \leq S_R; \\ \boldsymbol{u}_R, & \text{se } \dfrac{x}{t} \geq S_R. \end{cases}$$

O fluxo HLL para o caso $S_L \leq 0 \leq S_R$ é estabelecido adicionando $\boldsymbol{u}^*$ em (2.63) ou (2.64), obtendo

$$\boldsymbol{f}^{\text{HLL}} = \boldsymbol{f}_L + S_L\left(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_L\right)$$

ou

$$\boldsymbol{f}^{\text{HLL}} = \boldsymbol{f}_R + S_R\left(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_R\right).$$

Em ambos os casos concluímos que

$$\boldsymbol{f}^{\text{HLL}} = \frac{S_R\boldsymbol{f}_L - S_L\boldsymbol{f}_R + S_LS_R(\boldsymbol{u}_R - \boldsymbol{u}_L)}{S_R - S_L},$$

para o caso $S_L \leq 0 \leq S_R$.

No caso em que $S_L \geq 0$, ou seja a *menor* velocidade de onda é maior ou igual a zero, o fluxo numérico é tomado igual a $\boldsymbol{f}_L$. No caso em $S_R \leq 0$, isto é, quando a *maior* velocidade de onda é menor ou igual a zero, o fluxo numérico é tomado igual a $\boldsymbol{f}_R$. O fluxo HLL é então dado por

$$\boldsymbol{f}^{HLL} = \begin{cases} \boldsymbol{f}_L, & \text{se } S_L \geq 0; \\ \dfrac{S_R\boldsymbol{f}_L - S_L\boldsymbol{f}_R + S_LS_R\left(\boldsymbol{u}_R - \boldsymbol{u}_L\right)}{S_R - S_L}, & \text{se } S_L < 0 < S_R; \\ \boldsymbol{f}_R, & \text{se } S_R \leq 0. \end{cases} \tag{2.65}$$

O caso particular onde só existe uma velocidade de onda, isto é, $S = S_L = S_R$, resulta no fluxo upwind dado por

$$\boldsymbol{f}^{up} = \begin{cases} \boldsymbol{f}_L, & \text{se } S \geq 0; \\ \boldsymbol{f}_R, & \text{se } S < 0. \end{cases} \tag{2.66}$$

2.12.2 Fluxo de Roe

Leis de conservação podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + A(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x &= 0; \\ A(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}. \end{aligned}$$

Na abordagem de Roe em (ROE, 1981), a matriz jacobiana $A(\boldsymbol{u})$ é substituída por uma matriz constante $\tilde{A}$, que representa as condições locais. O sistema não-linear de leis de conservação é então convertido em um sistema linear com coeficientes constantes, como se segue nas equações (2.67) e (2.68).

$$\tilde{A} = A(\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_R); \tag{2.67}$$

$$\boldsymbol{u}_t + \tilde{A}\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{u}_t + \tilde{\boldsymbol{f}}_x = 0. \tag{2.68}$$

A solução deste sistema linear é dado pela Equação (2.69), onde m é o número de autovalores da lei de conservação,

$$\tilde{\alpha_i} = \tilde{\alpha_i}\left(\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_R\right)$$

são as forças de onda (wave strengths) e $\tilde{K_i}$, para $1 \leq i \leq m$, são os autovetores da matriz $\tilde{A}$.

$$\boldsymbol{u}_R - \boldsymbol{u}_L = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha_i} \tilde{K_i}. \tag{2.69}$$

Aplicando o teorema de Green sobre um volume de controle, como no fluxo HLL, obtemos o fluxo numérico para a lei de conservação original, que é dado pela Equação (2.70). O fluxo numérico para o sistema linearizado é dado pela Equação (2.71), baseados nas afirmações da Equação (2.72). Os componentes de (2.71) são então combinados para obter o fluxo de Roe em uma fronteira, como dado na Equação (2.73).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_* &= \boldsymbol{f}_L - S_L\boldsymbol{u}_L - \frac{1}{T}\int_{TS_L}^{0} \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x; \\ \boldsymbol{f}_* &= \boldsymbol{f}_R - S_R\boldsymbol{u}_R - \frac{1}{T}\int_{0}^{TS_R} \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x; \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{f}}_* &= \tilde{\boldsymbol{f}}_L - S_L\boldsymbol{u}_L - \frac{1}{T}\int_{TS_L}^{0} \tilde{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}x; \\ \tilde{\boldsymbol{f}}_* &= \tilde{\boldsymbol{f}}_R - S_R\boldsymbol{u}_R - \frac{1}{T}\int_{0}^{TS_R} \tilde{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}x; \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} \int_{TS_L}^{0} \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x &= \int_{TS_L}^{0} \tilde{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}x; \\ \int_{0}^{TS_R} \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{TS_R} \tilde{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}x; \\ \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}) &= \tilde{A}\boldsymbol{u}; \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\boldsymbol{f}^{Roe} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{f}_L + \boldsymbol{f}_R\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{K}_i. \tag{2.73}$$

3 Esquemas Não-Balanceados

A resolução das equações de Saint-Venant (1.29)-(1.30) pelo método DG padrão não é precisa quando a elevação do leito $z_b(x)$ é não constante. Nos pontos $x \in (0, L)$ onde $z_b(x)$ é não diferenciável, oscilações espúrias são geradas na simulação numérica da vazão pelo método. Esquemas de resolução das equações deste tipo são chamados esquemas não-balanceados, pois os termos fonte das equações não estão balanceados com o fluxo.

Neste capítulo, iremos apresentar um esquema DG não-balanceado para resolver as equações de águas rasas 1D em canais retangulares uniformes, dadas por (1.36)-(1.37).

Vamos começar relembrando o nosso modelo. As equações de Saint-Venant para canais retangulares uniformes são dadas por

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) = gh(S_0 - S_f), \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \tag{3.2}$$

onde

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_f = \frac{n^2 q|q|}{h^{10/3}}.$$

Na forma vetorial

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t), \tag{3.3}$$

onde

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} q \\ \dfrac{gh^2}{2} + \dfrac{q^2}{h} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh\,(S_0 - S_f) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Então utilizaremos o método DG proposto na Seção 2.11 para resolver a lei de balanço (3.3). Iremos explicitar todos os itens que podem ser alterados no método DG. São eles a base do espaço de polinômios, o fluxo numérico e o limitador de inclinação.

3.1 Base do Espaço de Aproximação por Polinômios

A base para o espaço local de aproximações $V_{h,j}$ do método DG0 será dada por $\{\varphi_0(x)\}$, onde $\varphi_0(x) = 1$ para todo $x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$.

A base para o espaço local de aproximações $V_{h,j}$ do método DG1 será dada por $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x)\}$, onde

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2});$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_j}{x_j - x_{j-1/2}}, \qquad \text{para todo } x \in x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}).$$

3.2 Fluxos Numéricos

Iremos utilizar os fluxos numéricos introduzidos na Seção 2.12, que são o fluxo HLL e o fluxo de Roe. Para as equações (3.1)-(3.2) eles são dados por;

Fluxo HLL para as Equações de Saint-Venant em Canais Retangulares Uniformes

$$\boldsymbol{f}^{HLL} = \begin{cases} \boldsymbol{f}^-, & \text{se } S_L \geq 0; \\ \dfrac{S_R \boldsymbol{f}^- - S_L \boldsymbol{f}^+ + S_L S_R \left(\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-\right)}{S_R - S_L}, & \text{se } S_L < 0 < S_R; \\ \boldsymbol{f}^+, & \text{se } S_R \leq 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} S_L &= \min\left(u^- - \sqrt{gh^-}, u^+ - \sqrt{gh^+}\right); \\ S_R &= \max\left(u^- + \sqrt{gh^-}, u^+ + \sqrt{gh^+}\right); \end{aligned} \tag{3.6}$$

ou

$$\begin{aligned} S_L &= \min\left(u^- - \sqrt{gh^-}, u^* - c^*\right); \\ S_R &= \max\left(u^- + \sqrt{gh^-}, u^* + c^*\right); \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2}(u^- + u^+) + \sqrt{gh^-} - \sqrt{gh^+}; \\ c^* &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{gh^-} + \sqrt{gh^+}\right) + \frac{1}{4}(u^- - u^+). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Fluxo de Roe para as Equações de Saint-Venant em Canais Retangulares Uniformes

$$\boldsymbol{f}^{Roe} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{f}^- + \boldsymbol{f}^+\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{K}_i \; ; \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha_1} &= \frac{1}{2}\left(\Delta h - \frac{\tilde{h}\Delta u}{\tilde{c}}\right); \\ \tilde{\alpha_2} &= \frac{1}{2}\left(\Delta h + \frac{\tilde{h}\Delta u}{\tilde{c}}\right); \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K_1} &= [1, \tilde{u} - \tilde{c}]^T; \\ \tilde{K_2} &= [1, \tilde{u} + \tilde{c}]^T; \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h^+ - h^-; \\ \Delta u &= u^+ - u^-. \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= \sqrt{h^- h^+}; \\ \tilde{u} &= \frac{\sqrt{h^-}u^- + \sqrt{h^+}u^+}{\sqrt{h^-} + \sqrt{h^+}}\ ; \\ \tilde{c} &= \sqrt{\frac{g(h^- + h^+)}{2}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda_1} &= \tilde{u} - \tilde{c}; \\ \tilde{\lambda_2} &= \tilde{u} + \tilde{c}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3 Limitador de Inclinação

O método DG0 não necessita do uso de limitadores de inclinação, pois é de ordem 1. O limitador de inclinação que utilizaremos no método DG1 não-balanceado será o limitador MUSCL, baseado em (COCKBURN, 1998). Iremos explicitá-lo abaixo, antes iremos definir uma função auxiliar que será utilizada.

Definição 2. *A função minmod m é definida como se segue:*

$$m(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} s \min\limits_{1 \le i \le n} |a_i|, & \text{se } s = \operatorname{sign}(a_1) = \cdots = \operatorname{sign}(a_n); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.15}$$

Para cada elemento I_j, a solução numérica u_h do método DG1 pode ser escrita por

$$u_h|_{I_j}(x) = \overline{u_h}|_{I_j} + a(x - x_j), \quad x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}), \tag{3.16}$$

onde

$$\overline{u_h}|_{I_j} = \frac{1}{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_h \, \mathrm{d}x,$$

e $a \in \mathbb{R}$ é a constante que define a inclinação da reta (3.16).

O limitador de inclinação MUSCL é então dado por

$$\Lambda\Pi_h u_h|_{I_j} = \overline{u_h}|_{I_j} + (x - x_j) m \left(a, \frac{\overline{u_h}|_{I_{j+1}} - \overline{u_h}|_{I_j}}{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})}, \frac{\overline{u_h}|_{I_j} - \overline{u_h}|_{I_{j-1}}}{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})} \right). \tag{3.17}$$

3.4 Tratamento do Leito Seco

Quando a profundidade da água $h(x,t)$ é nula em um ponto $(x,t) \in (0,L) \times (0,T)$, dizemos que o leito é seco em (x,t). As equações de Saint-Venant em canais retangulares uniformes (3.1)-(3.2) são estritamente hiperbólicas quando $h(x,t) > 0,\ \forall (x,t) \in (0,L) \times (0,T)$, mas não estão bem definidas quando $h(x_0,t_0) = 0$ para algum $(x_0,t_0) \in (0,L) \times (0,T)$. Precisamos então modificar o cálculo do fluxo numérico no caso onde temos a condição de leito seco. As modificações que faremos serão feitas no fluxo HLL.

O tratamento da condição de leito seco é feita na fronteira entre dois elementos I_{j-1} e I_j. Precisamos de uma tolerância $\varepsilon > 0$ para verificar se em uma fronteira o tratamento é necessário ou não, e se é necessário, precisamos verificar em qual lado da fronteira temos a condição de leito seco. Nas figuras 12 e 13 temos a ilustração das condições de leito seco a direita e a esquerda de um nó respectivamente.

Se

$$h^-_{j-1/2} = \lim_{\delta \to 0} h(x_{j-1/2} - \delta, t) > \varepsilon, \quad \text{e} \quad h^+_{j-1/2} = \lim_{\delta \to 0} h(x_{j-1/2} + \delta, t) < \varepsilon,$$

temos a condição de leito seco a direita do nó $x_{j-1/2}$. Então os coeficientes S_L e S_R do fluxo HLL são calculados da seguinte maneira;

$$\begin{aligned} S_L &= u^-_{j-1/2} - \sqrt{g h^-_{j-1/2}}; \\ S_R &= u^-_{j-1/2} + 2\sqrt{g h^-_{j-1/2}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

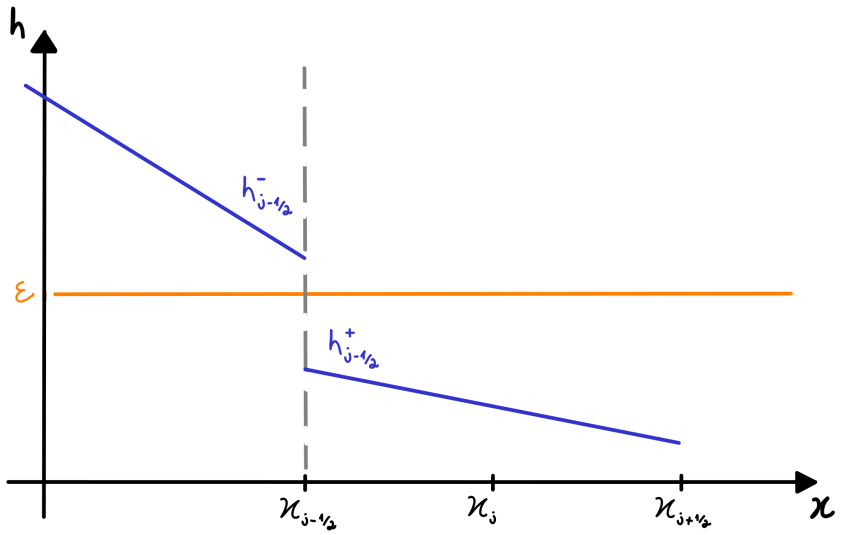

Figura 12 – Tratamento do leito seco a direita de um nó

Analogamente, se

$$h^-_{j-1/2} = \lim_{\delta \to 0} h(x_{j-1/2} - \delta, t) < \varepsilon, \quad \text{e} \quad h^+_{j-1/2} = \lim_{\delta \to 0} h(x_{j-1/2} + \delta, t) > \varepsilon,$$

temos a condição de leito seco a esquerda do nó $x_{j-1/2}$. Os coeficientes S_L e S_R modificados são então dados por

$$\begin{aligned} S_L &= u^+_{j-1/2} - 2\sqrt{gh^+_{j-1/2}}; \\ S_R &= u^+_{j-1/2} + \sqrt{gh^+_{j-1/2}}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

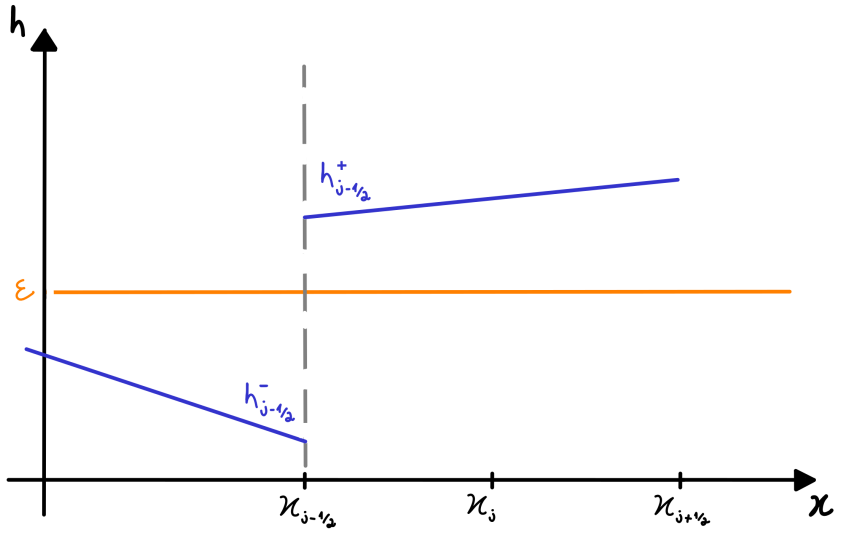

Figura 13 – Tratamento do leito seco a esquerda de um nó

Por fim, se

$$h^-_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0} h(x_{j-1/2} - \delta, t) < \varepsilon, \quad \text{e} \quad h^+_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0} h(x_{j-1/2} + \delta, t) < \varepsilon,$$

o fluxo numérico calculado na fronteira entre os elementos I_{j-1} e I_j é tomado igual a zero.

Depois de efetuar tais alterações, se a profundidade da água calculada é menor ou igual a ε, a velocidade no nó é tomada igual a zero. Se a profundidade da água calculada é menor do que zero, então ambas, a profundidade e a velocidade da água são tomadas iguais a zero.

3.5 Regimes de Fluxo

Uma propriedade importante para as equações de Saint-Venant é o regime do fluxo. Ele aparecerá nos nossos experimentos numéricos e servirá para identificar os casos onde temos mais problemas no balanceamento das equações. Os diferentes regimes de um fluxo dependem de uma constante adimensional chamada de número de Froude.

Para um ponto $(x,t) \in (0,L)\times(0,T)$, o número de Froude $F_R(x,t)$ é igual ao quociente das forças inerciais e gravitacionais, e é dado por

$$F_R(x,t) = \frac{u(x,t)}{\sqrt{gA(x,t)}}, \quad \text{onde} \quad u(x,t) = \frac{Q(x,t)}{A(x,t)}. \tag{3.20}$$

Temos então a seguinte classificação para o regime de um fluido em um ponto $(x,t) \in (0,L) \times (0,T)$. Se

$$F_R(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{então o regime do fluxo é crítico em } (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \\ < 1, & \text{então o regime do fluxo é subcrítico em } (x,t) \in (0,L) \times (0,T); \\ > 1, & \text{então o regime do fluxo é supercrítico em } (x,t) \in (0,L) \times (0,T). \end{cases} \tag{3.21}$$

Finalmente, um fluido é dito estar em regime de fluxo transcrítico se $F_R(x,t) < 1$ para algum $x \in (0,L)$ e $F_R(y,t) > 1$ para algum $y \in (0,L)$, com $x \neq y$.

3.5.1 Condições Iniciais e de Fronteira

Condições iniciais e de fronteira são necessárias para a resolução das equações (3.1)-(3.2). Segundo (KHAN; LAI, 2014), estas condições dependem do regime do fluxo nas fronteiras à jusante e à montante, e das curvas características das equações diferenciais (3.1)-(3.2). A quantidade de condições de fronteira necessárias para a resolução das equações é dada pela Tabela 2.

Tabela 2 – Condições de fronteira necessárias para diferentes regimes de fluxo

Regime de fluxo	Fronteira a Montante	Fronteira a Jusante	Condição Inicial
Supercrítico	2	0	2
Subcrítico	1	1	2
Crítico	1	0	2

3.6 Experimentos Numéricos

Nesta seção iremos apresentar alguns experimentos do método DG proposto utilizando a base de polinômios, os fluxos numéricos e o limitador de inclinação propostos nas seções anteriores. Iremos resolver as equações de Saint-Venant (3.1)-(3.2) com os métodos DG0 e DG1 padrão, para diferentes regimes de fluxo e configurações com elevação do leito $z_b(x)$ não nula.

Vamos simular o rompimento de barragem idealizado, o rompimento de barragem com atrito no leito, o salto hidráulico, fluxos sobre um ressalto e o fluxo em um leito irregular. Utilizaremos uma malha com 50 elementos. Os fluxos numéricos utilizados serão o fluxo de Lax-Friedrichs local, o fluxo HLL e o fluxo de Roe. O número de Courant utilizado será

$$\nu_{max} = 0.1.$$

As soluções numéricas obtidas pelos métodos DG0 e DG1 padrão, utilizando os diferentes fluxos numéricos serão comparadas com a solução numérica obtida pelo método

DG1, bem balanceado, utilizando o fluxo numérico HLL em uma malha refinada com 2000 elementos. Esta solução será chamada de solução de referência nos gráficos.

3.6.1 Rompimento de barragem idealizado em um canal retangular

Utilizamos o método de Galerkin descontínuo para modelar o rompimento de barragem idealizado em um canal retangular de leito horizontal. O canal possui 1000 m de comprimento com uma barragem localizada em 500 m. A profundidade da água na montante da barragem é de 10 m, e a profundidade da água na jusante é de 2 m. A barragem é removida instantaneamente e a água flui, depois é simulada. A superfície da água, e a taxa de fluxo simulados em uma malha com 50 elementos 20 s após o rompimento da barragem são mostrados na Figura 14 e na Figura 15 respectivamente.

Formulação Matemática:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, & x \in (0, 1000),\ t \in (0, 20]; \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Condição Inicial:

$$h(x,0) = \begin{cases} 10, & \text{se } 0 < x \leq 500; \\ 2, & \text{se } 500 < x < 1000. \end{cases}$$

$$q(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1000).$$

Condição de fronteira:

$$h(1000, t) = 2, \quad \forall t \in (0, 20];$$

$$q(0, t) = 0, \quad \forall t \in (0, 20].$$

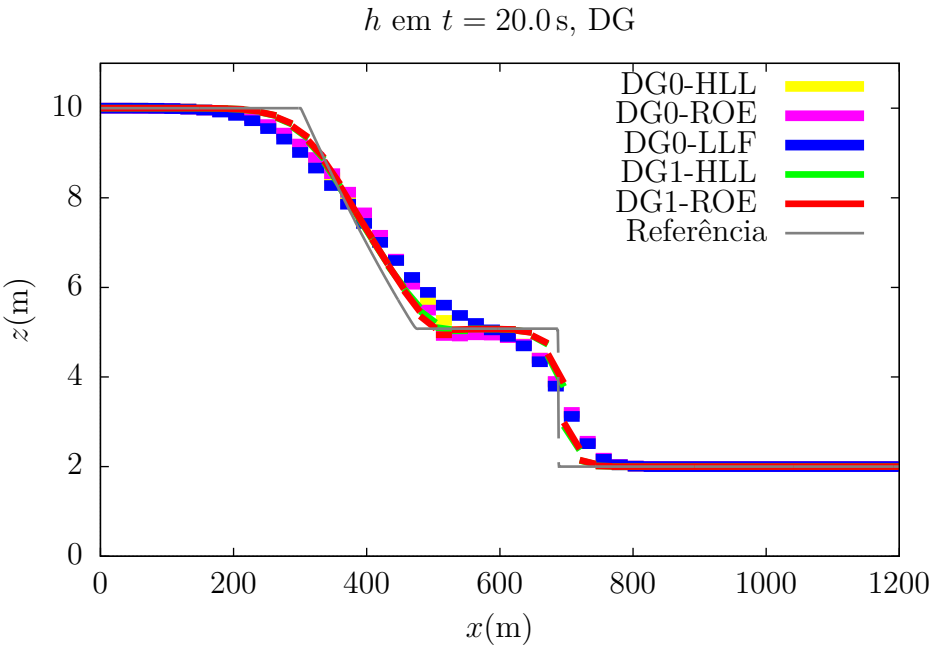

Figura 14 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha

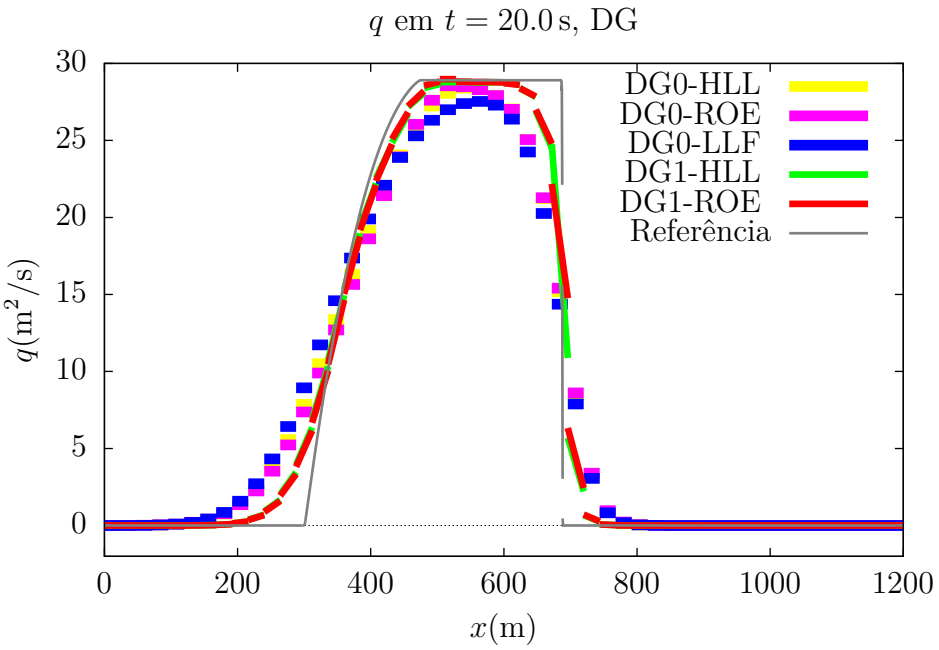

Figura 15 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha

Neste experimento, podemos observar que o método que melhor se aproxima da solução de referência é o método DG1-ROE. Ele consegue aproximar tanto a profundidade da água quanto a vazão sem oscilações espúrias. Este experimento é o mais tranquilo pois a equação do balanço do momento linear não possui termos fonte.

3.6.2 Rompimento de barragem em uma calha retangular com atrito no leito

Nesse experimento, iremos simular um rompimento de barragem em uma calha retangular horizontal com atrito no leito. A calha possui 0.096 m de largura, 0.08 m de altura e 20 m de comprimento, com uma barragem localizada em 10 m. Esta calha é feita de madeira suave, o coeficiente de Manning neste caso é dado por

$$n = 0.009\,\mathrm{s/m^{1/3}}.$$

A profundidade da água na montante é de 0.074 m, com leito seco, profundidade da água de 0 m na jusante. A barragem é então removida instantaneamente, e o fluxo é simulado. A profundidade da água e a taxa de vazão simulados para uma malha de 50 elementos depois de 9.4 s são mostrados na Figura 16 e na Figura 17 respectivamente.

Formulação Matemática:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad x \in (0,20),\ t \in (0,9.4]; \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2}\right) = -g\left(\dfrac{n^2 q|q|}{h^{10/3}}\right). \end{cases}$$

Condição Inicial:

$$h(x,0) = \begin{cases} 0.074, & \text{se } 0 < x \leq 10; \\ 0, & \text{se } 10 < x < 20. \end{cases}$$

$$q(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,20).$$

Condição de fronteira:

$$h(20,t) = 0, \quad \forall t \in (0,9.4];$$
$$q(0,t) = 0, \quad \forall t \in (0,9.4].$$

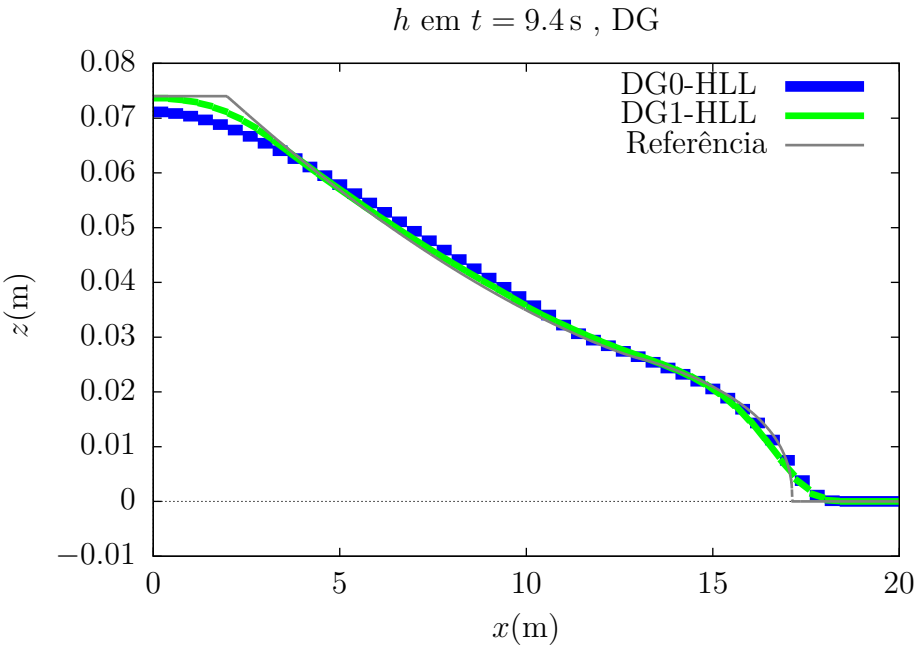

Figura 16 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha

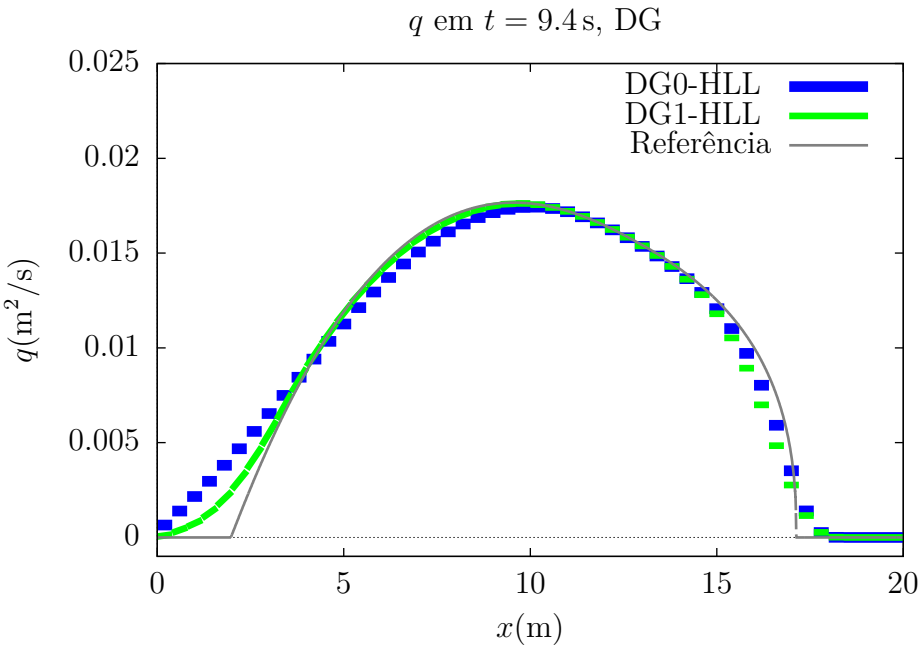

Figura 17 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha

O experimento do rompimento de barragem é um experimento complicado, pois temos que lidar com o atrito no leito e a condição de leito seco. O único fluxo numérico que utilizamos neste experimento foi o fluxo HLL, dado que tratamos a condição de leito

seco somente para este fluxo. Os resultados numéricos apontam que o método DG1-HLL é o que melhor se aproxima da solução de referência, tanto para a profundidade da água quanto para a vazão.

3.6.3 Salto hidráulico

Iremos realizar a simulação de um salto hidráulico. O canal possui 14 m de comprimento e 0.46 m de largura, com leito horizontal. O coeficiente de Manning é tomado igual a

$$n = 0.008\,\mathrm{s/m^{1/3}}.$$

A profundidade da água no tempo inicial é de 0.031 m, com taxa de vazão nula. Na montante do canal, uma profundidade da água de 0.031 m, e uma descarga na taxa de vazão de $0.118\,\mathrm{m^2/s}$ são especificados. Na jusante, a profundidade da água cresce de 0.031 m para 0.265 m em 50 s, e permanece constante igual a 0.265 m depois disto. As soluções numéricas em estado permanente para a profundidade da água e a taxa de vazão considerando uma malha com 50 elementos e tomando $t = 400\,\mathrm{s}$, que é suficientemente grande, são mostradas na Figura 18 e na Figura 19 respectivamente.

Formulação Matemática:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, & x \in (0,14),\ t \in (0,400]; \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2}\right) = -g\left(\dfrac{n^2 q|q|}{h^{10/3}}\right). \end{cases}$$

Condição Inicial:

$$\begin{aligned} h(x,0) &= 0.031, \quad \forall x \in (0,14). \\ q(x,0) &= 0, \quad \forall x \in (0,14). \end{aligned}$$

Condição de fronteira:

$$\begin{aligned} h(0,t) &= 0.031, \quad \forall t \in (0,400]; \\ q(0,t) &= 0.118, \quad \forall t \in (0,400]. \end{aligned}$$

$$h(14,t) = \begin{cases} 0.031 + 0.00468\,t, & \text{se } 0 < t \leq 50; \\ 0.265, & \text{se } t > 50. \end{cases}$$

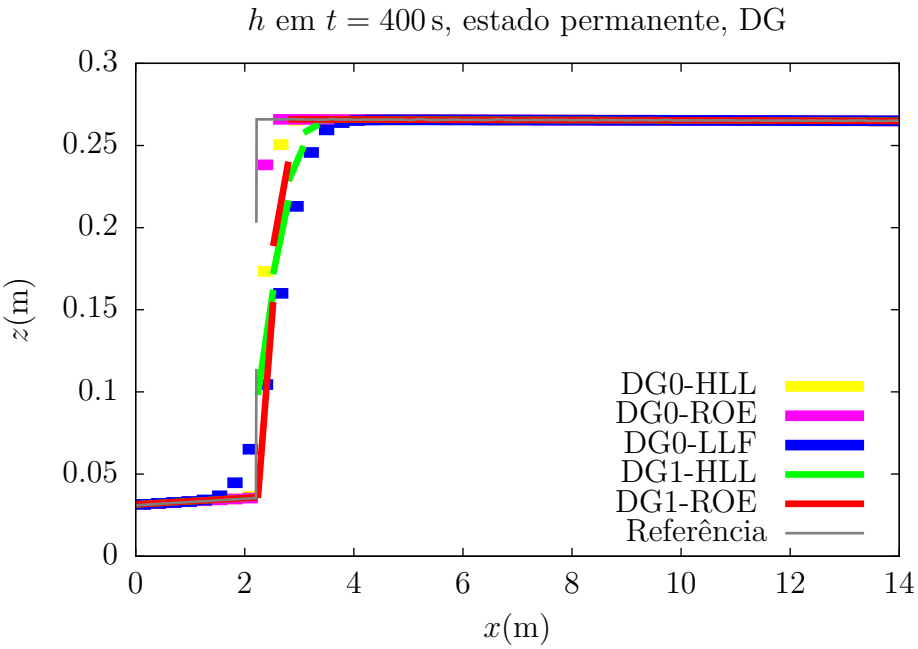

Figura 18 – Comparação da superfície da água em um salto hidráulico com 50 elementos na malha

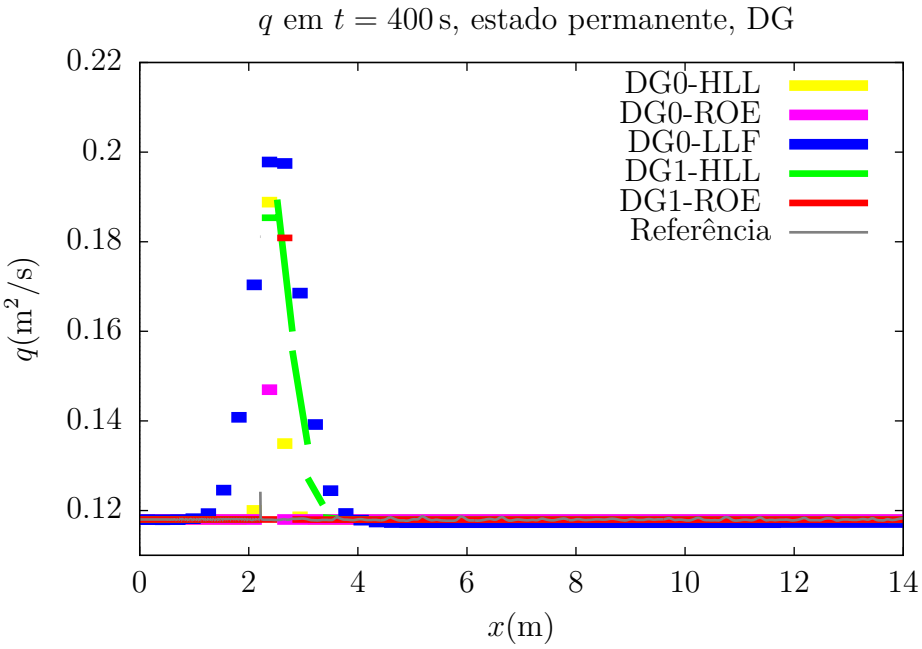

Figura 19 – Comparação da taxa de vazão em um salto hidráulico com 50 elementos na malha

O experimento do salto hidráulico é muito interessante, nele podemos perceber a importância de calcular bem o termo fonte do atrito, pois é a partir deste atrito que o salto hidráulico é criado. Curiosamente, o método que melhor se aproxima da solução de referência é o método DG0-ROE. O problema é que os métodos DG1 não conseguem

capturar com exatidão o ponto em que a descontinuidade na profundidade da água é gerada. Já o método DG0-ROE consegue capturar o local da descontinuidade com exatidão.

Sobre a vazão, neste experimento podemos observar as oscilações espúrias que a falta de balanceamento das equações gera. Ainda assim, o método DG0-ROE consegue se aproximar bem da solução de referência, com apenas 1 elemento com oscilações espúrias. Este elemento se encontra na mesma localidade da descontinuidade na profundidade da água.

3.6.4 Fluxo sobre um ressalto

Iremos realizar simulações numéricas do fluxo sobre um ressalto, com diferentes regimes de fluxo. Vamos utilizar um canal sem atrito, com 1 m de largura e 25 m de comprimento, com elevação do leito z_b dada por

$$z_b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x-10)^2, & \text{se } 8 \leq x \leq 12; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.22}$$

Iremos utilizar o mesmo canal para os três testes que realizaremos.

Formulação Matemática:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, & x \in (0,25),\ t \in (0,400]; \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2}\right) = -gh\dfrac{\partial z_b}{\partial x}. \end{cases}$$

As condições iniciais e de fronteira serão indicadas para cada tipo de regime de fluxo.

3.6.4.1 Regime supercrítico

Para o experimento em um regime de fluxo supercrítico sobre um ressalto, a superfície da água inicial é de 2 m, com água parada, isto é, vazão inicial nula. Na montante do canal, a taxa de vazão de 25.0567 m^2/s, e a superfície da água de 2 m são especificados, resultando em um regime de fluxo supercrítico através do canal. As soluções numéricas em estado permanente considerando uma malha com 50 elementos, tomando $t = 400$ s, são mostradas na Figura 20 e na Figura 21 respectivamente.

Condição Inicial:

$$\begin{aligned} h(x,0) + z_b(x) &= 2, \quad \forall x \in (0,25). \\ q(x,0) &= 0, \quad \forall x \in (0,25). \end{aligned}$$

Condição de fronteira:

$$\begin{aligned} h(0,t) &= 2, \quad \forall t \in (0,400]; \\ q(0,t) &= 25.0567, \quad \forall t \in (0,400]. \end{aligned}$$

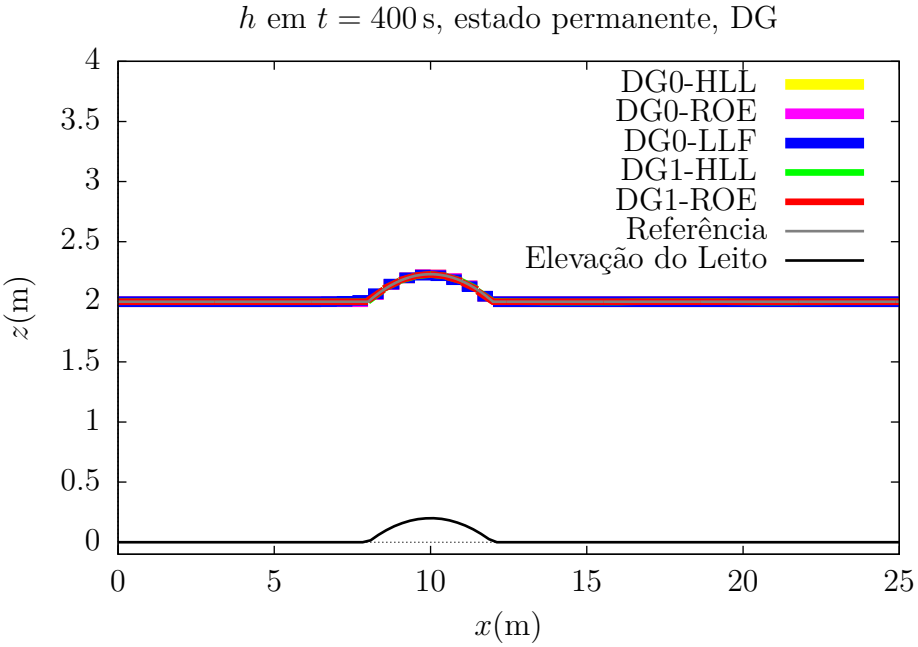

Figura 20 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime supercrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

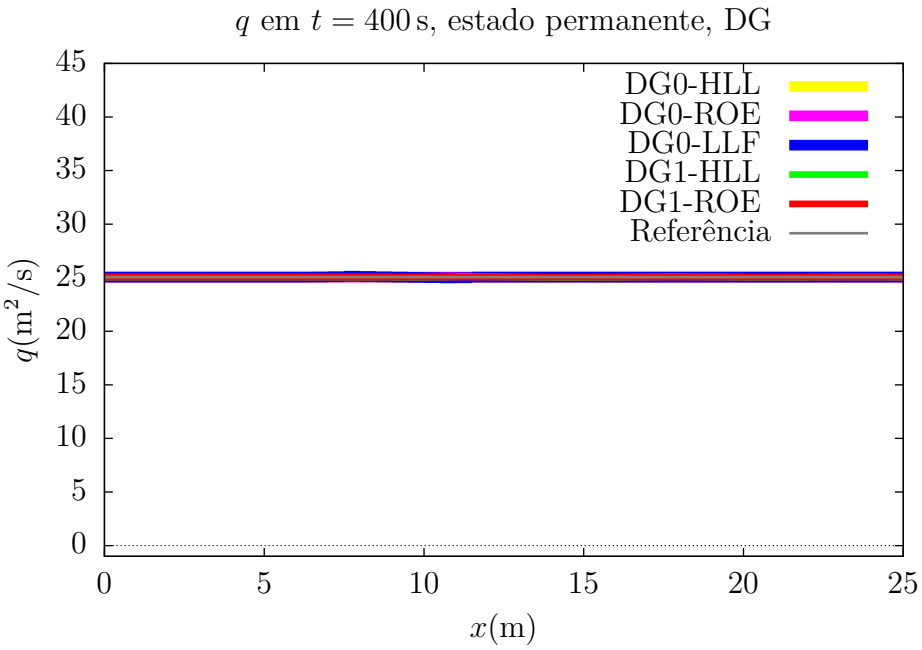

Figura 21 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

Neste experimento, notamos que todos os métodos propostos conseguiram aproximar bem a solução de referência, mesmo com a elevação do leito não nula. A profundidade da água é bem aproximada e não são geradas oscilações espúrias na vazão. O método que melhor se aproxima da solução de referência é o método DG1-ROE.

3.6.4.2 Regime subcrítico

Para o experimento numérico em um fluxo com regime subcrítico sobre um ressalto, a superfície da água inicial é dada por 0.5 m, com água parada. A taxa de vazão na montante do canal é de 0.18 m^2/s, e a superfície da água na jusante é de 0.5 m. Portanto, o fluxo assume um regime subcrítico através do canal. As soluções numéricas em estado permanente, tomando $t = 400$ s, para uma malha com 50 elementos são mostradas na Figura 22 e na Figura 23 respectivamente.

Condição Inicial:

$$h(x,0) + z_b(x) = 0.5, \quad \forall x \in (0,25).$$
$$q(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,25).$$

Condição de fronteira:

$$h(25,t) = 0.5, \quad \forall t \in (0,400];$$
$$q(0,t) = 0.18, \quad \forall t \in (0,400].$$

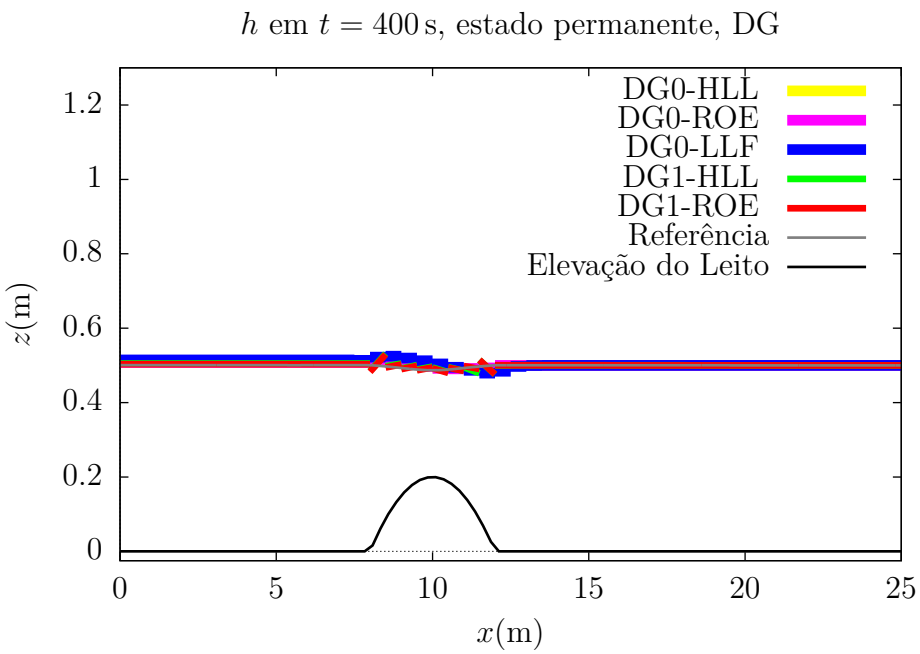

Figura 22 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

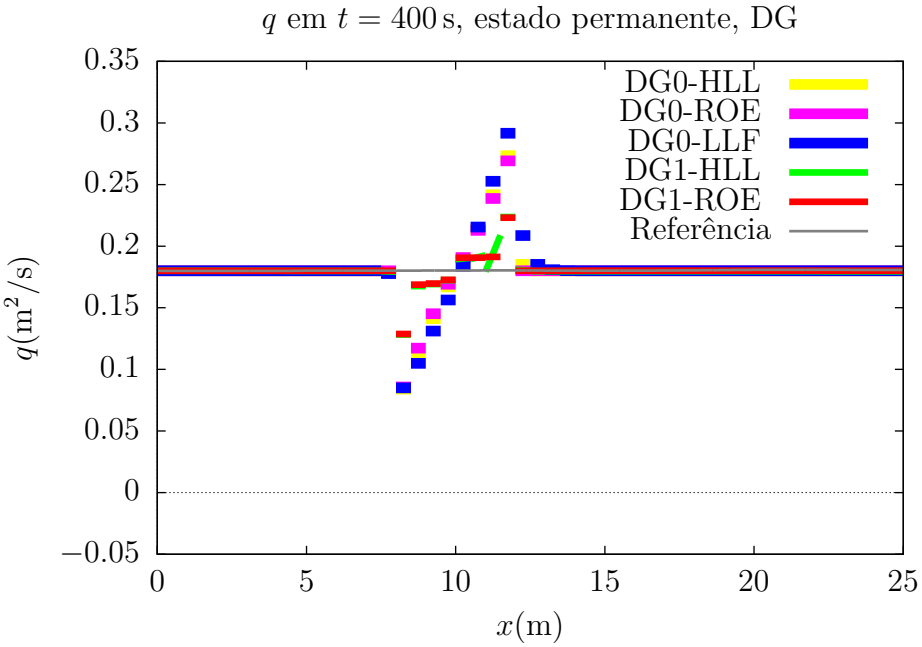

Figura 23 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

Neste experimento, nem a profundidade da água, nem a vazão se aproximam da solução de referência. Os métodos oscilam bastante na região onde a elevação do leito é não constante. As soluções numéricas para a profundidade da água ainda possuem um erro tolerável, mas as soluções numéricas para a vazão são muito diferentes da solução de referência. Mais uma vez, a falta de balanceamento das equações gera oscilações espúrias na solução numérica da vazão. Apesar destas observações, o método que melhor se aproxima da solução de referência foi o método DG1-ROE.

3.6.4.3 Regime transcrítico

Simularemos um regime de fluxo transcrítico sobre um canal com ressalto, utilizando a superfície de água inicial de 0.33 m, com água parada. A taxa de vazão na montante do canal é dada por $0.18\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, e a profundidade da água na jusante é de 0.33 m. O fluido muda do regime subcrítico, para o regime supercrítico, e depois volta para o regime subcrítico através de um salto hidráulico. As soluções numéricas em estado permanente, em uma malha com 50 elementos tomando $t = 400\,\mathrm{s}$, são mostradas na Figura 24 e na Figura 25 respectivamente.

Condição Inicial:

$$h(x,0) + z_b(x) = 0.33, \quad \forall x \in (0,25).$$
$$q(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,25).$$

Condição de fronteira:

$$h(25,t) = 0.33, \quad \forall t \in (0,400];$$
$$q(0,t) = 0.18, \quad \forall t \in (0,400].$$

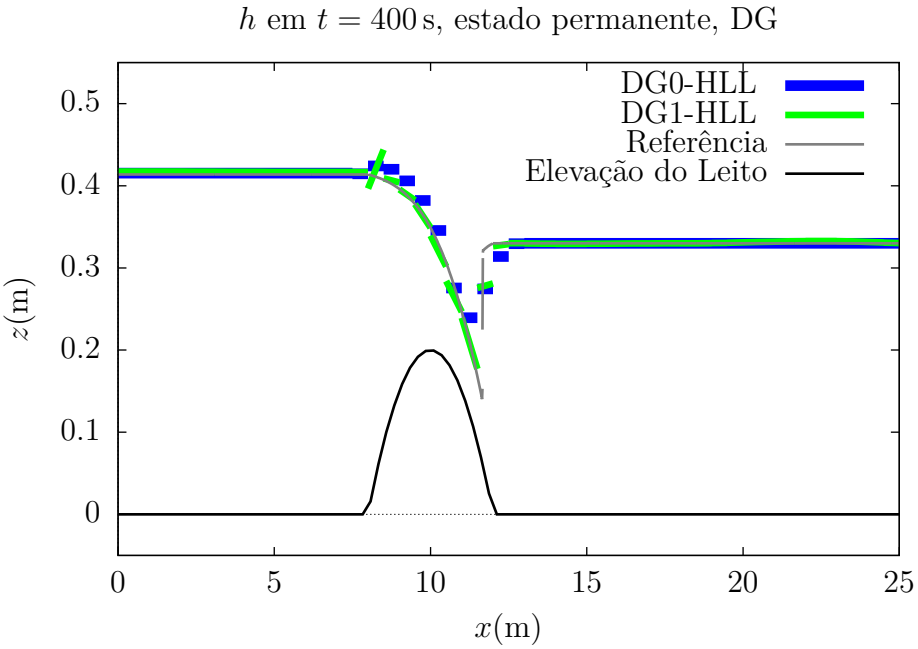

Figura 24 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

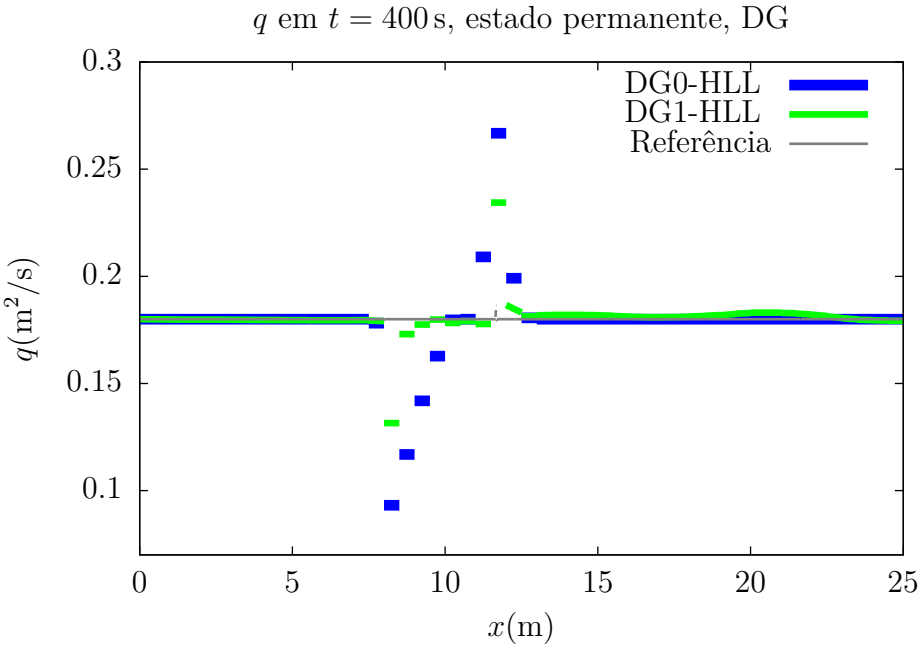

Figura 25 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

Neste experimento, utilizamos somente o fluxo HLL, pois é necessário o tratamento do leito seco em certos momentos antes de chegarmos no estado permanente. O método DG1-HLL consegue aproximar bem a solução de referência da profundidade da água. Novamente, tanto o método DG0-HLL quanto o DG1-HLL geram oscilações espúrias na vazão.

3.6.5 Fluxo sobre um leito irregular

Iremos simular um fluxo no regime transcrítico em um canal com leito irregular e sem atrito. As condições iniciais consistem em uma superfície de água de 16 m, com velocidade inicial zero. A taxa de vazão na montante é tomada igual a $50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, e a superfície de água na jusante é mantida igual a 16 m. O fluxo no domínio computacional muda do regime subcrítico, para o regime supercrítico, e depois volta para o regime subcrítico gerando um salto hidráulico. As soluções numéricas em estado permanente, tomando $t = 4000\,\mathrm{s}$, são mostradas na Figura 26 e na Figura 27 respectivamente. A elevação do leito é dada pela Tabela 3, desenvolvida em (GOUTAL, 1997).

Tabela 3 – Variação da elevação do leito e distância

$x(m)$	0	50	100	150	200	250	300	350	400	425
$z_b(m)$	0	0	2.5	5	5	3	5	5	7.5	8
$x(m)$	435	450	470	475	500	505	530	550	565	575
$z_b(m)$	9	9	9	9.1	9	9	6	5.5	5.5	5
$x(m)$	600	650	700	750	800	820	900	950	100	1500
$z_b(m)$	4	3	3	2.3	2	1.2	0.4	0	0	0

Formulação Matemática:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad x \in (0, 1500),\ t \in (0, 4000]; \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2}\right) = -gh\dfrac{\partial z_b}{\partial x}. \end{cases}$$

Condição Inicial:

$$h(x,0) + z_b(x) = 16, \quad \forall x \in (0, 1500).$$
$$q(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1500).$$

Condição de fronteira:

$$h(1500, t) = 16, \quad \forall t \in (0, 4000];$$
$$q(0,t) = 50, \quad \forall t \in (0, 4000].$$

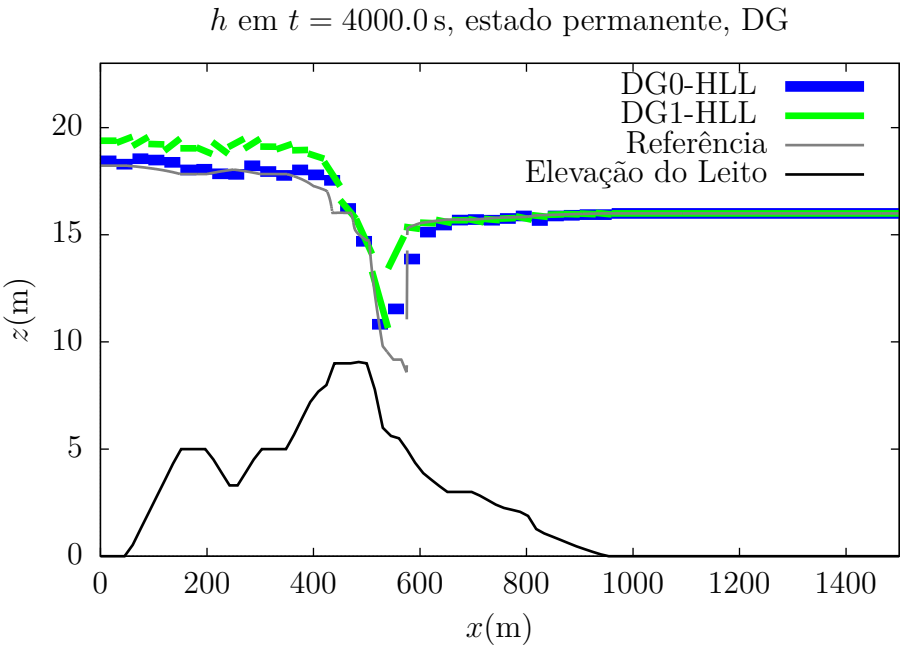

Figura 26 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

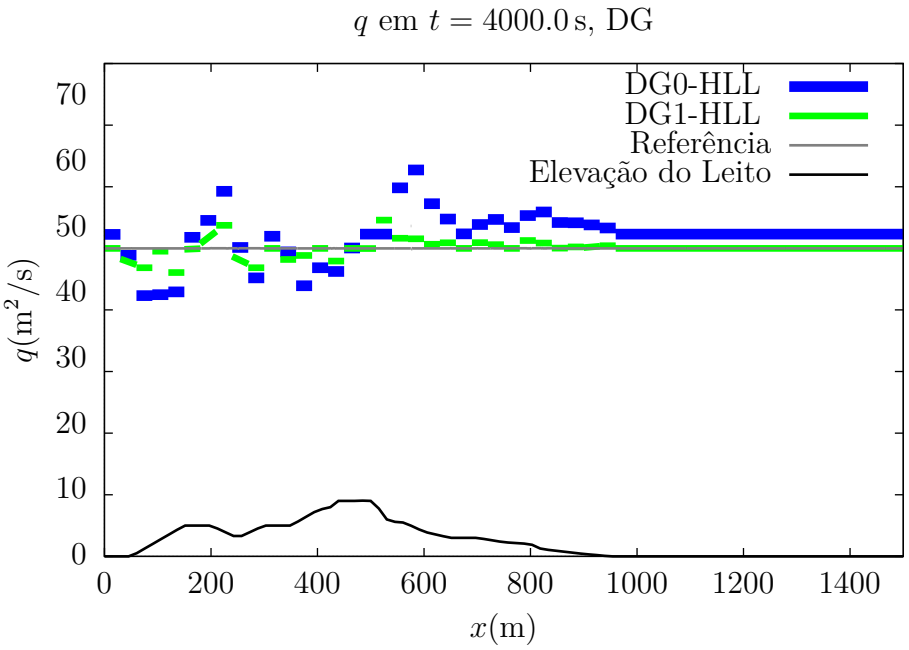

Figura 27 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

A importância deste experimento é devida ao fato de que leitos irregulares causam muito mais oscilações espúrias na solução numérica da vazão do que leitos regulares. A condição de leito seco é satisfeita em algum momento do experimento, por isto, utilizamos

somente o fluxo HLL. Os métodos DG0-HLL e DG1-HLL não aproximam bem nem a profundidade da água, nem a vazão. O método que melhor se aproximou da solução de referência foi o método DG1-HLL.

3.6.6 Regime de água parada

Iremos simular um regime de água parada em um canal com elevação do leito dada por

$$z_b(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x-10)^2, & \text{se } 8 \leq x \leq 12; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Iremos considerar um canal sem atrito no leito, com 1 m de largura e 25 m de comprimento. A taxa de vazão na montante será tomada igual a $0\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, e a superfície da água na jusante será tomada igual a 0.33 m. É esperado que tanto a vazão quanto a superfície da água se mantenham inalterados depois de um certo tempo, pois não há entrada de fluxo. As soluções numéricas em estado permanente, em uma malha com 50 elementos, tomando $t = 400\,\mathrm{s}$, são mostradas na Figura 28 e na Figura 29 respectivamente.

Formulação Matemática:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0, & x \in (0,14),\ t \in (0,400]; \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{q^2}{h} + \dfrac{gh^2}{2}\right) = -gh\dfrac{\partial z_b}{\partial x}. \end{cases}$$

Condição Inicial:

$$h(x,0) = 0.33, \quad \forall x \in (0,25).$$
$$q(x,0) = 0, \quad \forall x \in (0,25).$$

Condição de fronteira:

$$h(0,t) = 0.33, \quad \forall t \in (0,400];$$
$$q(0,t) = 0, \quad \forall t \in (0,400].$$

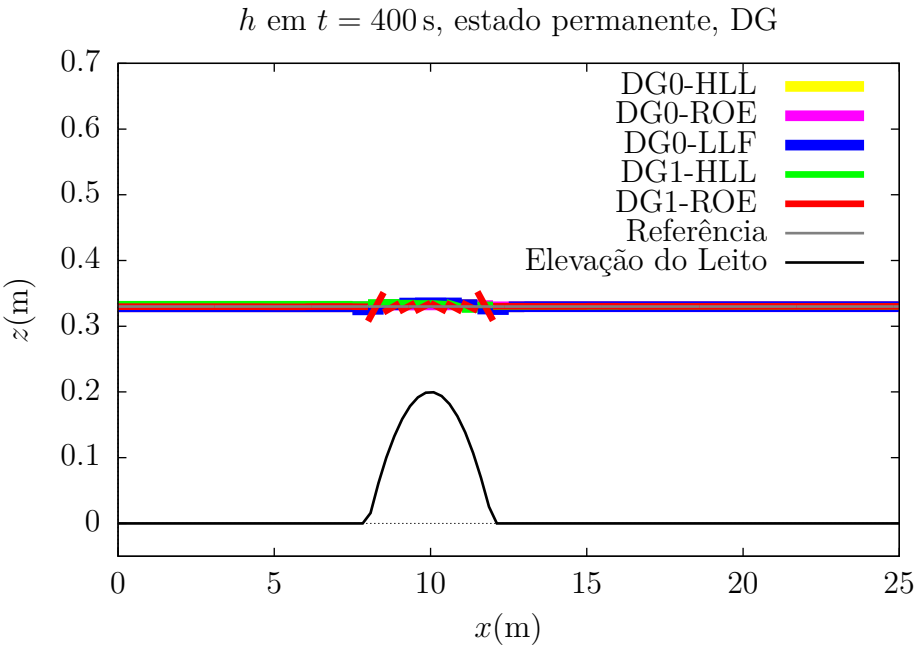

Figura 28 – Comparação da superfície da água no regime de água parada, com 50 elementos na malha

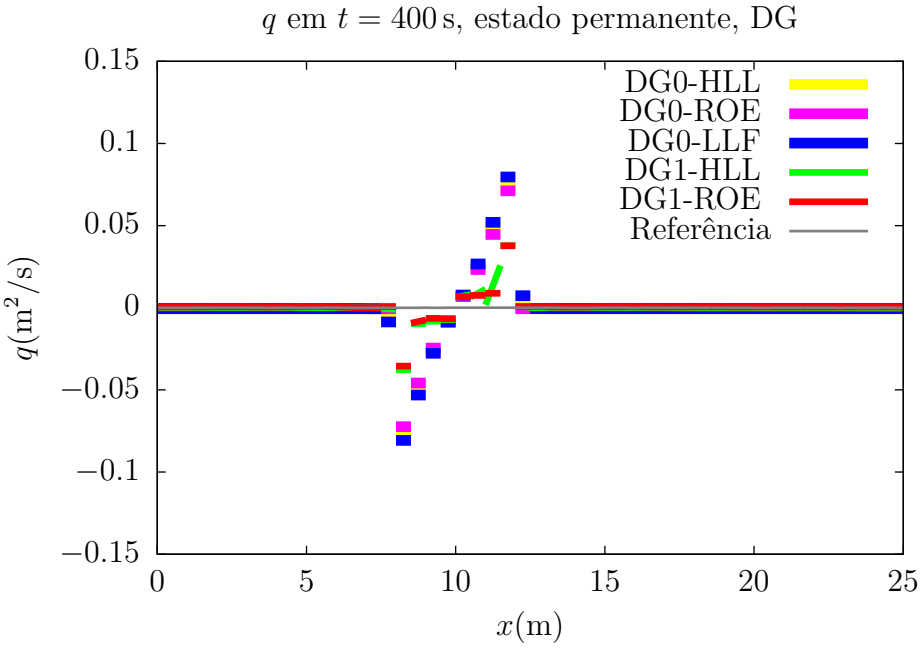

Figura 29 – Comparação da taxa de vazão no regime de água parada, com 50 elementos na malha

Neste experimento, percebemos que mesmo em um regime de água parada, os métodos geram oscilações espúrias na vazão, que consequentemente, afetam a profundidade da água. O método que melhor se aproxima da solução de referência é o método DG1-ROE.

4 Um Esquema DG1 Bem-Balanceado

Lai e Khan em (LAI; KHAN, 2012) propuseram um método DG bem-balanceado para as equações (1.29)-(1.44). Foi proposto um tratamento dos termos fontes de modo que as equações (1.29)-(1.44) sejam balanceadas no método DG. Da mesma forma que o Capítulo 3, iremos explicitar a base do espaço de polinômios, o fluxo numérico e o limitador de inclinação utilizados neste método.

4.1 Método DG Bem-Balanceado para as Equações de Saint-Venant

Neste método, usaremos a forma não-conservativa das equações, que é dada por

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = -gA\frac{\partial z}{\partial x} - gAS_f. \tag{4.2}$$

Na forma vetorial temos

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t),$$

onde

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} Q \\ \dfrac{Q^2}{A} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}, x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -gA\dfrac{\partial z}{\partial x} - gAS_f \end{bmatrix}.$$

Podemos então utilizar a teoria DG desenvolvida na Seção 2.11 para resolver as equações (4.1)-(4.2).

4.2 Base do Espaço de Aproximação por Polinômios

Para balancearmos as equações (4.1)-(4.2), precisamos no mínimo de um método onde as aproximações são lineares por partes. O espaço de aproximações em que trabalharemos será o espaço formado por polinômios lineares por partes, e o método com esta base de polinômios será denotado por DG1-Balanceado (Método de Galerkin Descontínuo com aproximação por polinômios de grau 1 e base nodal).

A base para o espaço local de aproximações $V_{h,j}$ do método DG1-NODAL será dada por $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x)\}$, onde

$$\varphi_0(x) = \frac{-(x - x_{j+1/2})}{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})}, \quad \text{para todo } x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2});$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_{j-1/2})}{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})}, \quad \text{para todo } x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2});$$

4.3 Modificações no Método DG Padrão

Algumas alterações no cálculo do termo fonte do método DG padrão são feitas com o objetivo de balancear o método. A configuração do método DG para leis de balanço pode ser encontrada na Seção 2.11.

Utilizando a forma vetorial das equações, escrevemos

$$\boldsymbol{u}_h(x,t)|_{I_j} = \begin{bmatrix} u_{1,h}(x,t) \\ u_{2,h}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{Q} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_h) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{u}_h(x,t)) \\ f_2(\boldsymbol{u}_h(x,t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q} \\ \dfrac{\hat{Q}^2}{\hat{A}} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}_h,x,t) = \begin{bmatrix} s_1(\boldsymbol{u}_h,x,t) \\ s_2(\boldsymbol{u}_h,x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\hat{A}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{gn^2\hat{Q}|\hat{Q}|}{\hat{R}^{4/3}\hat{A}} \end{bmatrix}.$$

Dado que nosso espaço de aproximação tem dimensão 2, escrevemos

$$\hat{A} = \hat{A}(x,t) = \sum_{i=0}^{1} c_{0,i}(t)\varphi_i(x);$$

$$\hat{Q} = \hat{Q}(x,t) = \sum_{i=0}^{1} c_{1,i}(t)\varphi_i(x).$$

A formulação (2.44) do método DG nos diz que os coeficientes $c_{p,i} \in \mathbb{R}$ com $p = 0,1$, $i = 0,1$ são tais que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{1} \partial_t c_{i,0}(t) \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \hat{Q}\partial_x\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + f_{0,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x^-_{j+1/2}) - f_{0,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x^+_{j-1/2}) = 0; \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{1} \partial_t c_{i,1}(t) \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \varphi_i(x)\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\hat{Q}^2}{\hat{A}}\partial_x\varphi_l(x)\,\mathrm{d}x \\ &+ f_{1,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j+1/2}(t)\varphi_l(x^-_{j+1/2}) - f_{1,h}(\boldsymbol{u}_h)_{j-1/2}(t)\varphi_l(x^+_{j-1/2}) \\ &= -\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(g\hat{A}\frac{\partial \hat{Z}}{\partial x}\varphi_l(x)\right)\,\mathrm{d}x - -\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\frac{gn^2\hat{Q}|\hat{Q}|}{\hat{R}^{4/3}\hat{A}}\varphi_l(x)\right)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.4}$$

para cada $l = 0,1$.

Aproximamos então o termo fonte da Equação (4.4) abaixo da seguinte maneira. Fazemos

$$g\hat{A}\frac{\partial \hat{Z}}{\partial x}\varphi_0(x) = \left(\frac{g(A^-_{j-1/2} + A^-_{j+1/2})(Z^-_{j+1/2} - Z^-_{j-1/2})}{2(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})}\right)\varphi_0(x); \tag{4.5}$$

$$g\hat{A}\frac{\partial \hat{Z}}{\partial x}\varphi_1(x) = \left(\frac{g(A^+_{j-1/2} + A^+_{j+1/2})(Z^+_{j+1/2} - Z^+_{j-1/2})}{2(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})}\right)\varphi_1(x); \tag{4.6}$$

Onde

$$A^-_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0}\hat{A}(x_{j-1/2} - \delta, t), \quad A^+_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0}\hat{A}(x_{j-1/2} + \delta, t);$$
$$A^-_{j+1/2} = \lim_{\delta\to 0}\hat{A}(x_{j+1/2} - \delta, t), \quad A^+_{j+1/2} = \lim_{\delta\to 0}\hat{A}(x_{j+1/2} + \delta, t).$$

A definição dos termos $Z^-_{j-1/2}, Z^+_{j-1/2}, Z^-_{j+1/2}$ e $Z^+_{j+1/2}$ é análoga.

Utilizando esta discretização, o método DG balanceia o termo fonte $-gA\dfrac{\partial z}{\partial x}$ da Equação (4.2).

4.4 Fluxos Numéricos

O fluxo numérico utilizado será o fluxo HLL. Para as equações (4.1)-(4.2) o fluxo HLL é dado por;

$$\boldsymbol{f}^{HLL} = \begin{cases} \boldsymbol{f}^-, & \text{se } S_L \geq 0; \\ \dfrac{S_R\boldsymbol{f}^- - S_L\boldsymbol{f}^+ + S_LS_R\left(\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-\right)}{S_R - S_L}, & \text{se } S_L < 0 < S_R; \\ \boldsymbol{f}^+, & \text{se } S_R \leq 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

onde

$$\begin{aligned} S_L &= \min\left(u^- - \sqrt{g(A/b)^-}, u^* - c^*\right); \\ S_R &= \max\left(u^+ - \sqrt{g(A/b)^+}, u^* + c^*\right); \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2}(u^- + u^+) + \sqrt{g(A/b)^-} - \sqrt{g(A/b)^+}; \\ c^* &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{g(A/b)^-} + \sqrt{g(A/b)^+}\right) + \frac{1}{4}(u^- - u^+). \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.5 Limitador de Inclinação

O limitador de inclinação utilizado no nosso método DG bem-balanceado será diferente do utilizado no Capítulo 3. Vamos explicitá-lo a seguir.

Podemos escrever nossa solução numérica u_h em cada elemento I_j como

$$u_h|_{I_j}(x) = \overline{u_h}|_{I_j} + a(x - x_j), \quad x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}), \tag{4.10}$$

onde

$$\overline{u_h}|_{I_j} = \frac{1}{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_h \, \mathrm{d}x,$$

Defina

$$\alpha = \frac{\overline{u_h}|_{I_j} - \overline{u_h}|_{I_{j-1}}}{(x_j - x_{j-1})};$$
$$\beta = \frac{\overline{u_h}|_{I_{j+1}} - \overline{u_h}|_{I_j}}{(x_{j+1} - x_j)};$$
$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\overline{u_h}|_{I_{j+1}} - \overline{u_h}|_{I_{j-1}}}{(x_{j+1} - x_{j-1})}.$$

Por fim, escreva

$$\sigma = \frac{(\text{sign}(\alpha) + \text{sign}(\beta))}{2} \min\left(\frac{|\alpha+\beta|}{2}, 2|\alpha|, 2|\beta|\right).$$

O limitador de inclinação do nosso método é então dado por

$$\Lambda\Pi_h u_h|_{I_j} = \overline{u_h}|_{I_j} + \sigma(x - x_j), \qquad \text{para } x \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}). \tag{4.11}$$

4.6 Tratamento do Leito Seco

Da mesma forma que cuidamos da condição de leito seco no Capítulo 3, precisamos cuidar desta condição nosso método bem-balanceado. As alterações no fluxo HLL proposto na Seção 4.4 serão dadas a seguir.

Se

$$h^-_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0} h(x_{j-1/2} - \delta, t) > \varepsilon, \qquad \text{e} \qquad h^+_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0} h(x_{j-1/2} + \delta, t) < \varepsilon,$$

temos a condição de leito seco a direita do nó $x_{j-1/2}$. Então os coeficientes S_L e S_R do fluxo HLL são calculados da seguinte maneira;

$$\begin{aligned} S_L &= u^-_{j-1/2} - \sqrt{g(A^-_{j-1/2}/b_{j-1/2})}; \\ S_R &= u^-_{j-1/2} + 2\sqrt{g(A^-_{j-1/2}/b_{j-1/2})}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Se

$$h^-_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0} h(x_{j-1/2} - \delta, t) < \varepsilon, \qquad \text{e} \qquad h^+_{j-1/2} = \lim_{\delta\to 0} h(x_{j-1/2} + \delta, t) > \varepsilon,$$

temos a condição de leito seco a esquerda do nó $x_{j-1/2}$. Os coeficientes S_L e S_R modificados são então dados por

$$\begin{aligned} S_L &= u^+_{j-1/2} - 2\sqrt{g(A^+_{j-1/2}/b_{j-1/2})}; \\ S_R &= u^+_{j-1/2} + \sqrt{g(A^+_{j-1/2}/b_{j-1/2})}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.7 Experimentos Numéricos

Iremos agora realizar experimentos numéricos para comparar o melhor método não-balanceado, com o nosso método balanceado e obter as conclusões. A descrição matemática dos problemas é a mesma da Seção 3.6, por este motivo, iremos apresentar de forma direta os resultados numéricos obtidos, sem a descrição matemática dos problemas. Iremos utilizar uma malha com 50 elementos. O número de Courant será tomado $\nu_{max} = 0.1$.

A solução de referência nos experimentos numéricos foi obtida utilizando o método DG1 bem-balanceado, munido do fluxo HLL em uma malha com 2000 elementos como foi feito no capítulo anterior.

4.7.1 Rompimento de barragem idealizado em um canal retangular

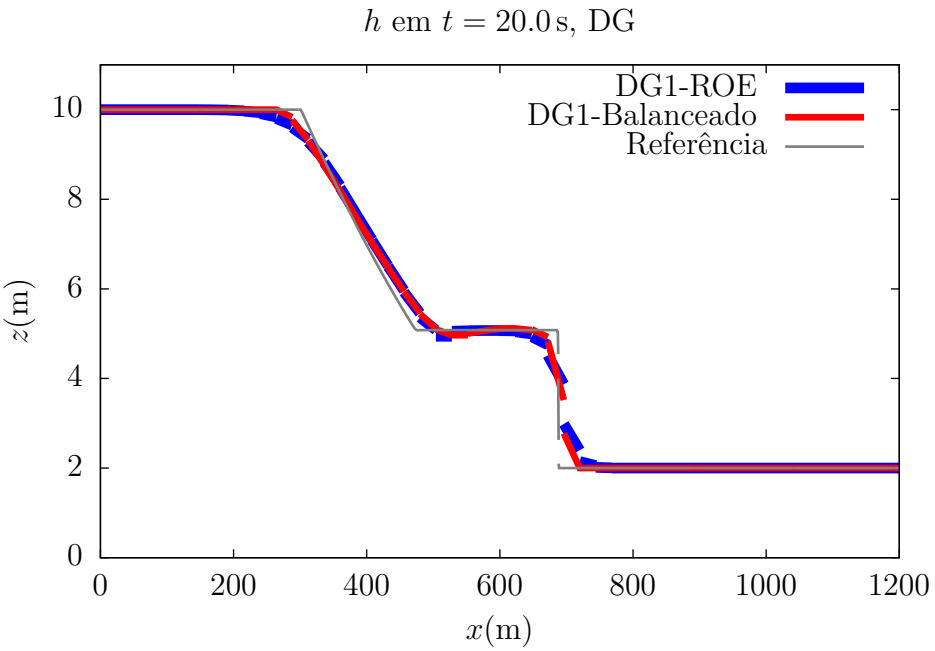

Figura 30 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha

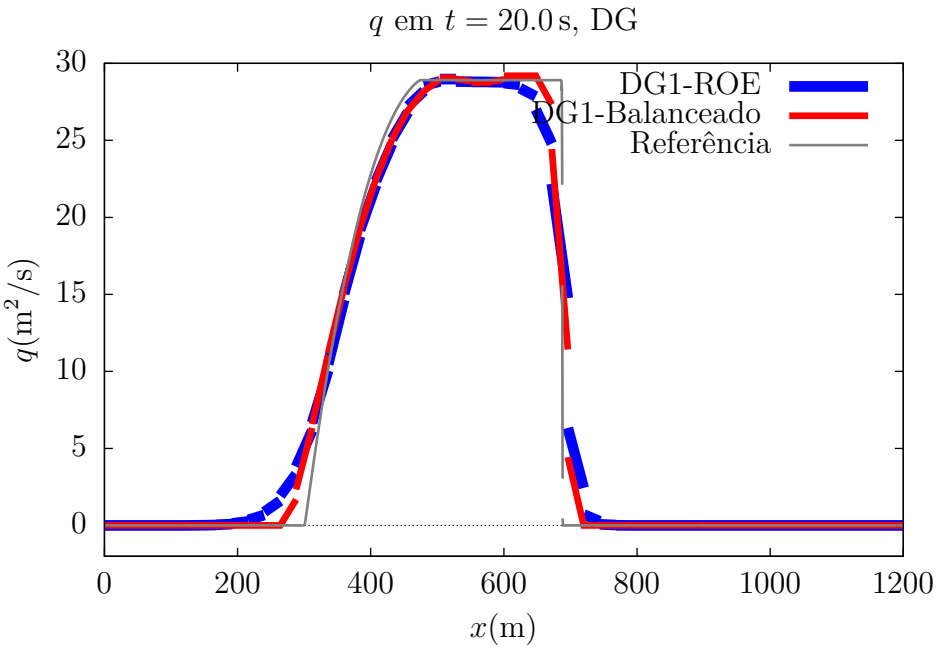

Figura 31 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e sem atrito com 50 elementos na malha

Neste experimento, vemos que o método DG1 bem-balanceado se aproxima melhor da solução de referência que o melhor método não-balanceado. Tanto a profundidade da água, quanto a vazão, são bem aproximadas pelo método DG1 bem-balanceado.

4.7.2 Rompimento de barragem em uma calha retangular com atrito no leito

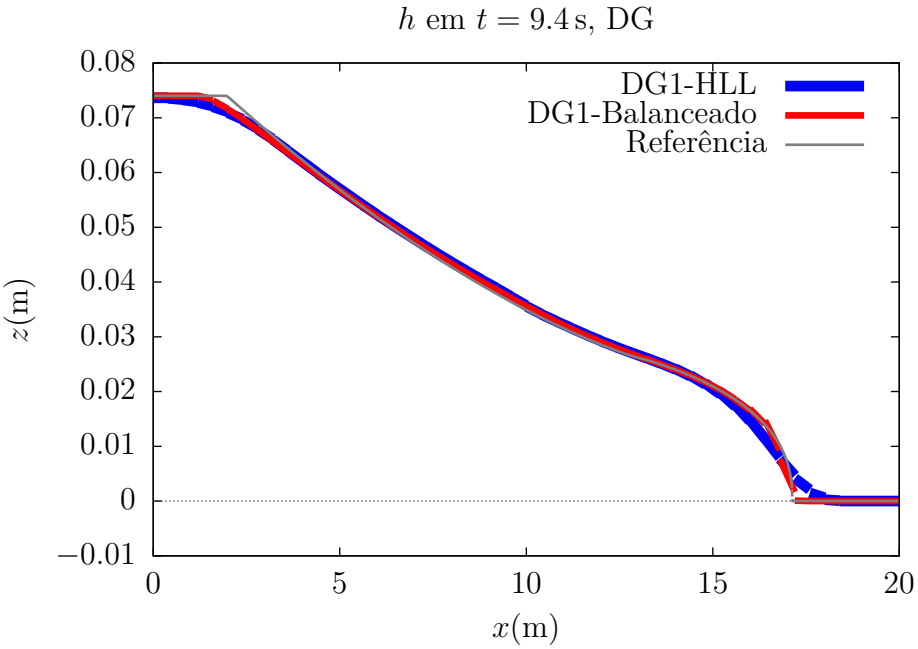

Figura 32 – Comparação da superfície da água para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha

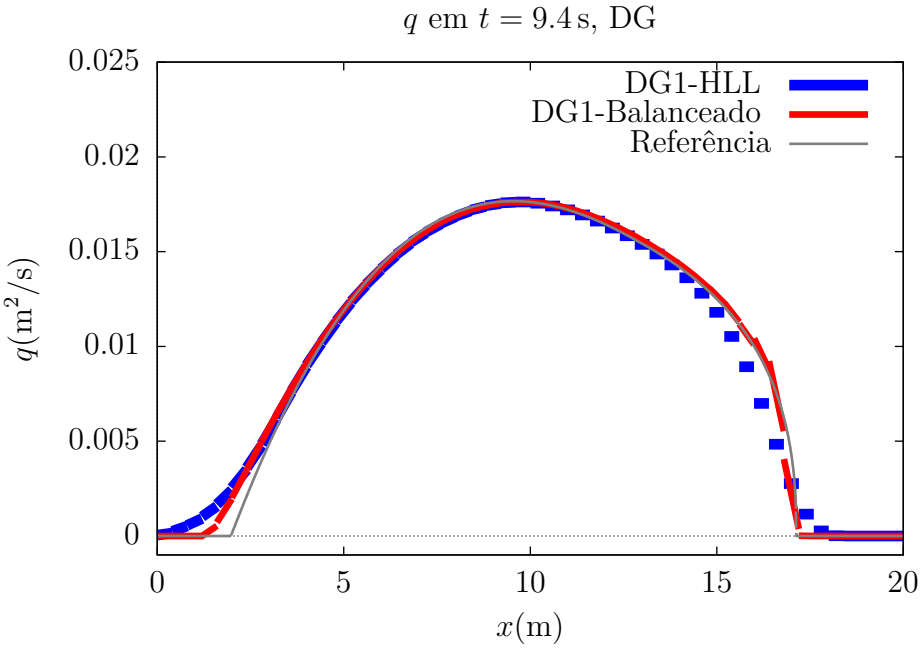

Figura 33 – Comparação da taxa de vazão para um rompimento de barragem sobre um leito horizontal, molhado e com atrito, com 50 elementos na malha

Neste experimento, com condição de água parada, vemos que o método DG1 bem-balanceado aproxima melhor que o método DG1-HLL a solução de referência. O método

bem-balanceado consegue lidar bem com a condição de leito seco.

4.7.3 Salto hidráulico

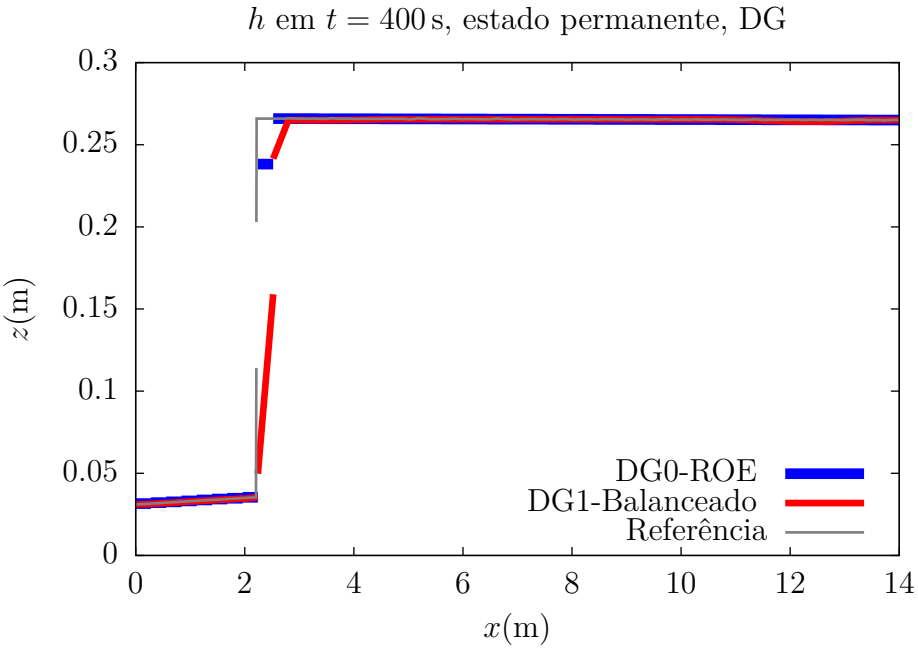

Figura 34 – Comparação da superfície da água em um salto hidráulico com 50 elementos na malha

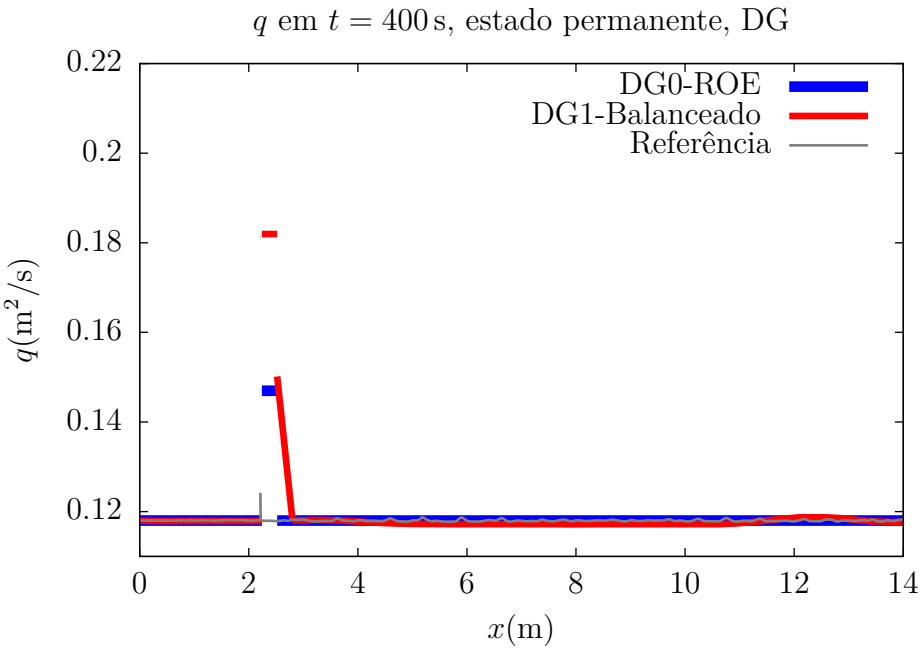

Figura 35 – Comparação da taxa de vazão em um salto hidráulico com 50 elementos na malha

Neste experimento, vemos que o método não-balanceado DG0-ROE, consegue se aproximar melhor da solução de referência que o método DG1 bem-balanceado. O método DG1 bem-balanceado erra um pouco o local em que a descontinuidade se desenvolve na solução numérica da profundidade da água. Sobre a vazão, lembramos que o método bem-balanceado balanceia o termo fonte da elevação do leito, mas não balanceia o termo que acompanha o atrito de Manning.

4.7.4 Fluxo sobre um ressalto

4.7.4.1 Regime supercrítico

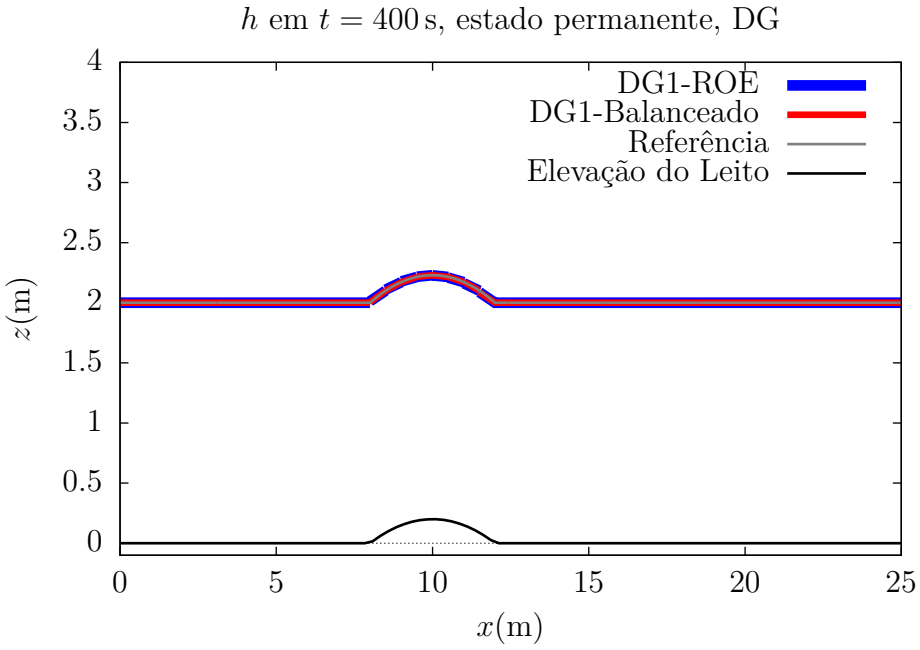

Figura 36 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime supercrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

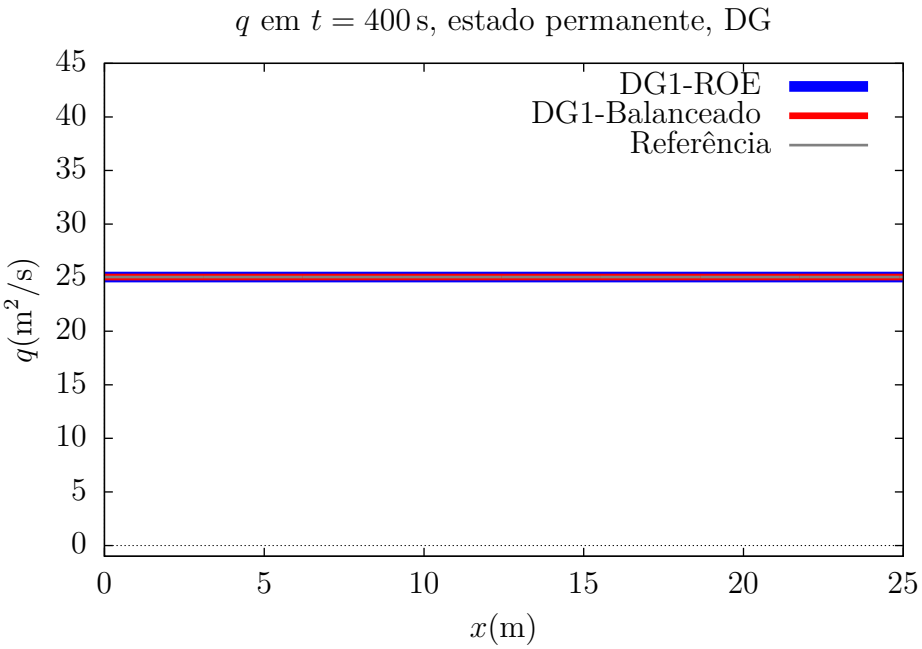

Figura 37 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

No experimento de regime supercrítico, ambos os métodos DG1 não-balanceado e balanceado aproximam bem a solução de referência.

4.7.4.2 Regime subcrítico

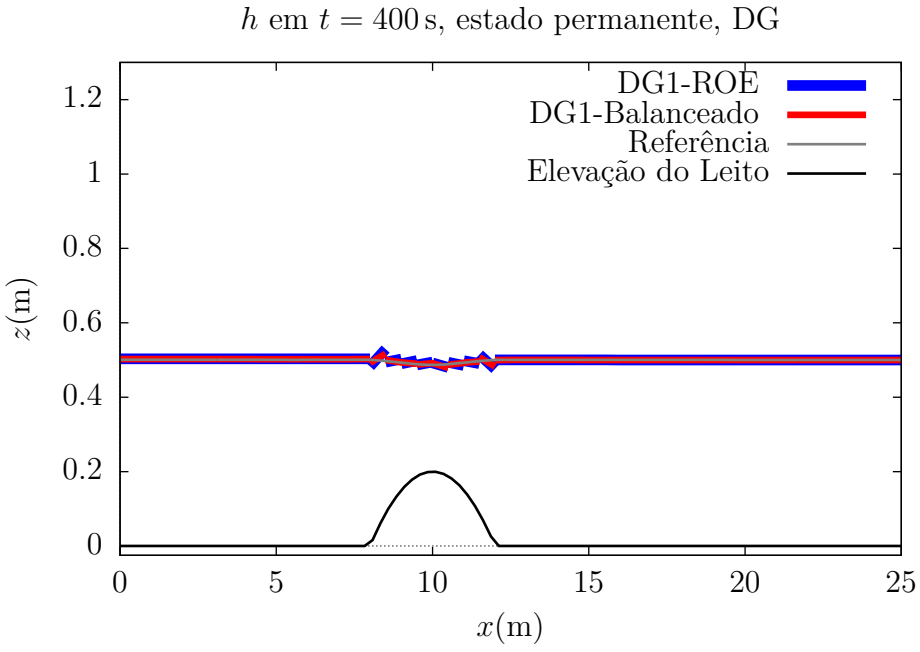

Figura 38 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

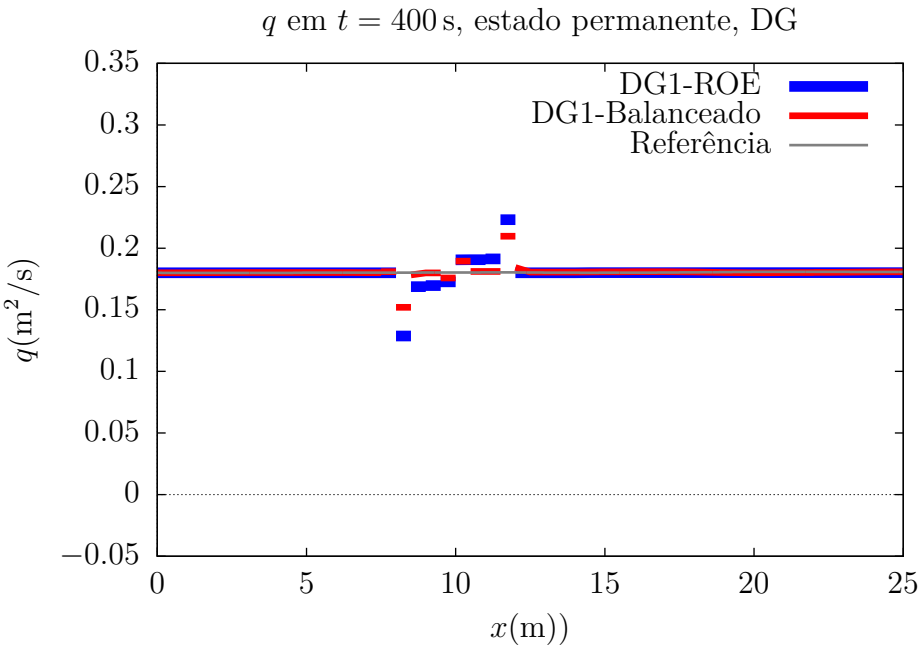

Figura 39 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime subcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

No experimento de regime subcrítico, o método DG1 bem-balanceado se aproxima melhor da solução de referência que o método DG1-ROE, que é não-balanceado. Apesar do método DG1-Balanceado aproximar bem a profundidade da água, a solução numérica da vazão ainda possui oscilações espúrias. No limite, quando aumentamos o número de elementos na malha, a solução numérica vai se aproximando da solução de referência, que quase não possui oscilações espúrias.

4.7.4.3 Regime transcrítico

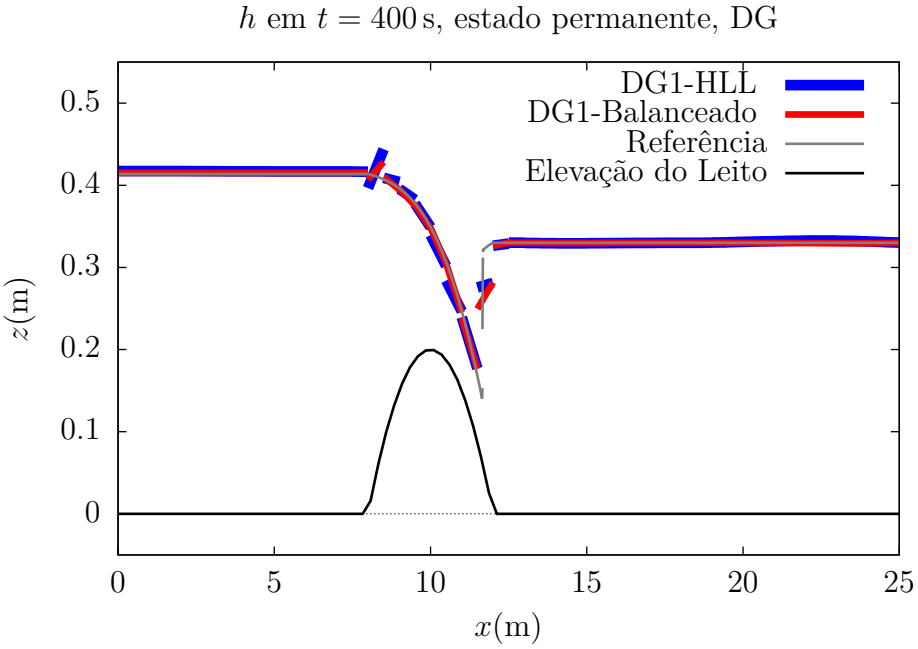

Figura 40 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

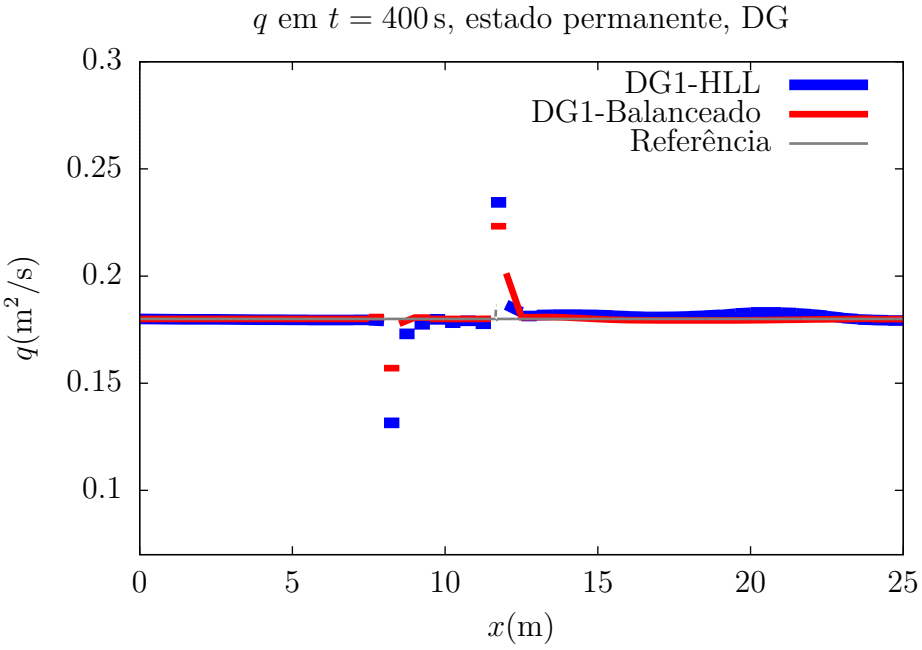

Figura 41 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito com ressalto, com 50 elementos na malha

No experimento de regime transcrítico, o método DG1 bem-balanceado aproxima ligeiramente melhor a solução de referência que o método DG não-balanceado. Vemos que

ainda assim, o método bem-balanceado gera oscilações espúrias na vazão.

4.7.5 Fluxo sobre um leito irregular

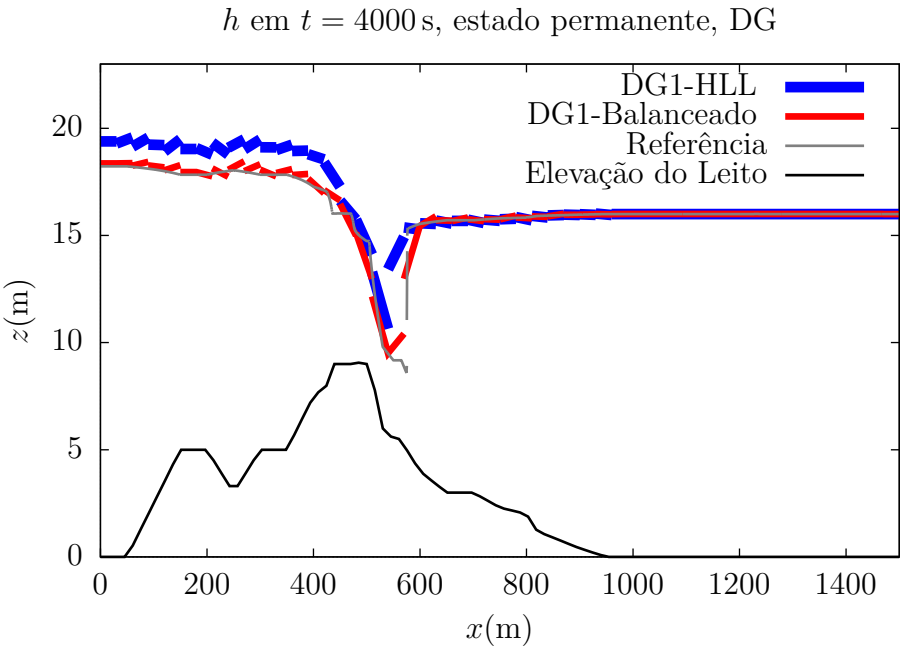

Figura 42 – Comparação da superfície da água em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito irregular, com 50 elementos na malha

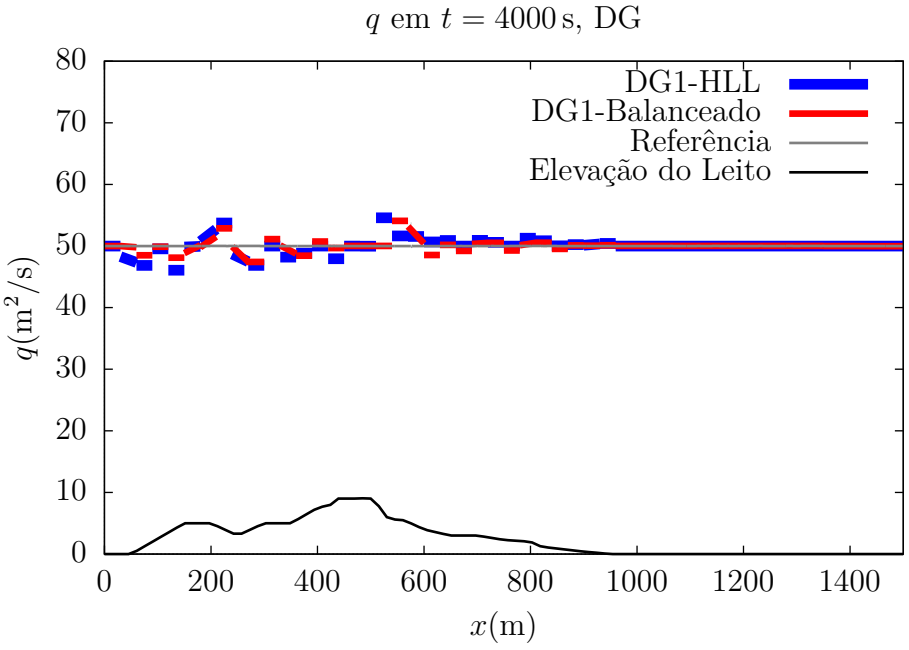

Figura 43 – Comparação da taxa de vazão em um fluxo no regime transcrítico sobre um leito irregular, com 50 elementos na malha

Neste experimento, o método DG1 bem-balanceado aproxima melhor a solução de referência que o método não-balanceado. A solução numérica da profundidade no método bem-balanceado é satisfatória, já a da vazão, possui oscilações espúrias semelhantes as do método não-balanceado.

4.7.6 Regime de água parada

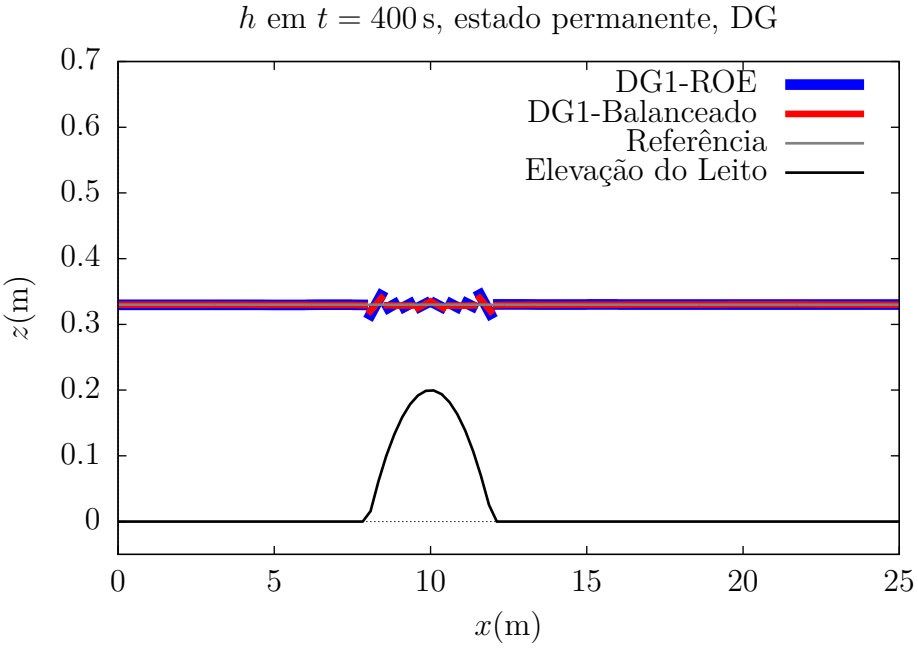

Figura 44 – Comparação da superfície da água no regime de água parada, com 50 elementos na malha

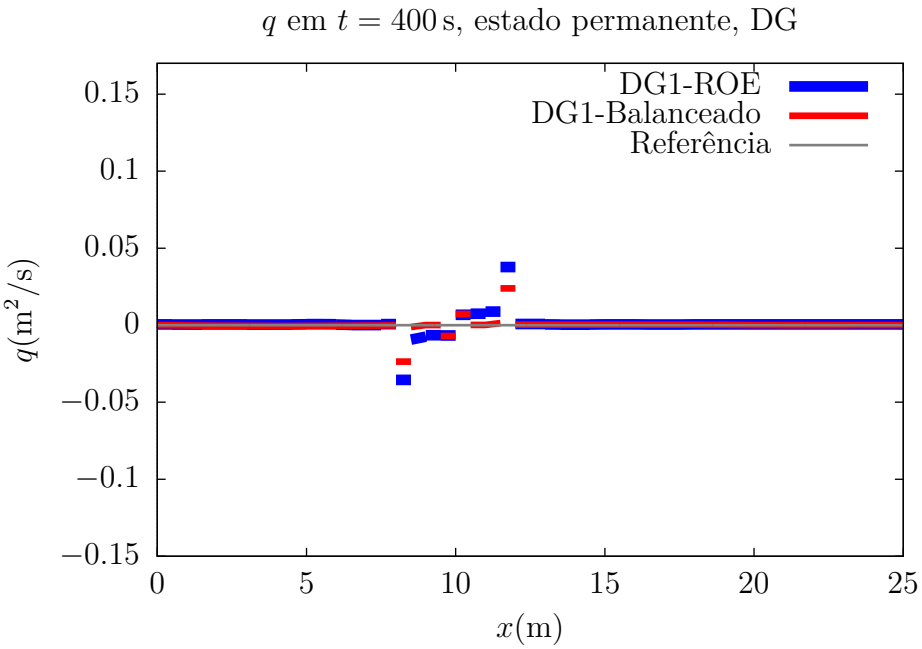

Figura 45 – Comparação da taxa de vazão no regime de água parada, com 50 elementos na malha

Neste experimento, concluímos que o método bem-balanceado aproxima melhor a solução de referência que o método não-balanceado. Oscilações espúrias na solução numérica da vazão ainda existem, mas se anulam no limite, quando o número de elementos na malha aumenta.

5 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, estudamos a resolução numérica das equações de Saint-Venant pelo método de Galerkin descontínuo. Foi feito um estudo das equações de águas rasas 2D e um estudo breve das equações de Saint-Venant. Depois, apresentamos a teoria do método de Galerkin descontínuo. Nos dois últimos capítulos, apresentamos as aplicações e experimentos numéricos.

A conclusão mais importante que chegamos com este trabalho é a de que as equações de Saint-Venant não são simples de se resolver. Detalhes como a elevação do leito e o atrito dificultam a resolução das equações. O não-balanceamento das equações gera oscilações espúrias na solução da vazão, e consequentemente na profundidade da água. Mesmo que o método numérico escolhido seja capaz de capturar soluções descontínuas, não é suficiente para resolver com exatidão as equações. Apresentamos um esquema DG1 bem-balanceado, ainda assim não foi suficiente, mas melhorou consideravelmente as soluções numéricas.

Para trabalhos futuros, propõe-se o estudo de uma série de artigos de Xing e colaboradores sobre esquemas bem-balanceados utilizando o método de Galerkin descontínuo para a resolução das equações de Saint-Venant, a saber os trabalhos (XING; SHU, 2005), (XING; ZHANG; SHU, 2010), (NOELLE; XING; SHU, 2007) e (XING; SHU, 2006). Nestes artigos, o problema foi totalmente resolvido, mas a teoria por trás do balanceamento das equações é muito mais sutil, o que demanda bastante tempo de estudos.

Referências

CHANSON, H. *Hydraulics of open channel flow*. [S.l.]: Elsevier, 2004. Citado na página 31.

COCKBURN, B. An introduction to the discontinuous galerkin method for convection-dominated problems. *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*, Springer, p. 150–268, 1998. Citado na página 57.

COCKBURN, B.; LIN, S.-Y.; SHU, C.-W. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws iii: one-dimensional systems. *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 84, n. 1, p. 90–113, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 44.

COCKBURN, B.; SHU, C.-W. Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite element method for conservation laws. ii. general framework. *Mathematics of computation*, v. 52, n. 186, p. 411–435, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 36, 44 e 47.

_____. The runge-kutta local projection-discontinuous-galerkin finite element method for scalar conservation laws. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, EDP Sciences, v. 25, n. 3, p. 337–361, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 36, 44 e 46.

GOUTAL, N. *Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation*. [S.l.]: Department Laboratoire National d'Hydraulique, Groupe Hydraulique Fluviale, 1997. Citado na página 72.

HARTEN, A.; LAX, P. D.; LEER, B. v. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM review*, SIAM, v. 25, n. 1, p. 35–61, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

KHAN, A. A.; LAI, W. *Modeling shallow water flows using the discontinuous Galerkin method*. [S.l.]: CRC Press New York, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 18, 47, 49 e 60.

KURGANOV, A. Finite-volume schemes for shallow-water equations. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, v. 27, p. 289–351, 2018. Citado na página 18.

LAI, W.; KHAN, A. Discontinuous Galerkin method for 1d shallow water flows in natural rivers. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, Taylor & Francis, v. 6, n. 1, p. 74–86, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 18, 20, 35 e 76.

LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Citado na página 46.

LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear–Col*. [S.l.: s.n.], 2001. Citado na página 41.

NOELLE, S.; XING, Y.; SHU, C.-W. High-order well-balanced finite volume weno schemes for shallow water equation with moving water. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 226, n. 1, 2007. Citado na página 91.

REED, W. H.; HILL, T. R. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation.* [S.l.], 1973. Citado na página 36.

ROE, P. L. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 43, n. 2, p. 357–372, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 53.

SHU, C.-W. *Discontinuous Galerkin methods: general approach and stability.* [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2009. v. 201. Citado na página 36.

SILVA, F. A. G. da. *Um Estudo de Métodos de Galerkin Descontínuo de Alta Ordem para Problemas Híperbólicos.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 46.

SILVA, F. A. G. da. *Métodos de Galerkin Descontínuo de Mais Alta Ordem para Leis de Conservação Hiperbólicas.* Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 44.

TORO, E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 25.

VENANT, B. D. S. Theorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivers et a l'introduntion des marees dans leur lit. *Academic de Sci. Comptes Redus*, v. 73, n. 99, p. 148–154, 1871. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 30.

XING, Y. Exactly well-balanced discontinuous galerkin methods for the shallow water equations with moving water equilibrium. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 257, 2014. Citado na página 18.

XING, Y.; SHU, C.-W. High order finite difference weno schemes with the exact conservation property for the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 208, n. 1, p. 206–227, 2005. Citado na página 91.

_____. High order well-balanced finite volume weno schemes and discontinuous galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 214, n. 2, 2006. Citado na página 91.

XING, Y.; ZHANG, X.; SHU, C.-W. Positivity-preserving high order well-balanced discontinuous galerkin methods for the shallow water equations. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 33, n. 12, p. 1476–1493, 2010. Citado na página 91.

YANG, R.; YANG, Y.; XING, Y. High order sign-preserving and well-balanced exponential runge-kutta discontinuous galerkin methods for the shallow water equations with friction. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 444, p. 110543, 2021. Citado na página 34.

YING, X.; KHAN, A. A.; WANG, S. S. Upwind conservative scheme for the saint venant equations. *Journal of hydraulic engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 10, p. 977–987, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 35.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; NITHIARASU, P. *The finite element method for fluid dynamics, ed.* [S.l.: s.n.], 2014. v. 3. Citado na página 25.

APÊNDICE A – Conceitos Básicos e Notações

Neste capítulo apresentaremos as ferramentas matemáticas que utilizamos ao longo desta dissertação. Iremos principalmente introduzir os conceitos de lei de conservação escalar e sistema hiperbólico de leis de conservação escalares, que é o tipo de sistema de equações diferenciais parciais em que as equações de águas rasas, para canais retangulares uniformes, pertence.

A.1 Notações Matemáticas

Denotaremos o espaço das matrizes de ordem M por N definidas sobre o corpo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^{M\times N}$, em particular o espaço das matrizes quadradas de ordem $M \times M$ é dado por $\mathbb{R}^{M\times M}$.

Dado o intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, definimos o espaço de Lebesgue $L^2([a,b])$ como sendo o espaço das classes de funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mensuráveis tais que

$$\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Lembramos que o espaço $L^2([a,b])$ é formado por classes de funções que são iguais quase-todo-ponto, mas por simplicidade, dada uma classe de funções $\overline{f} \in L^2([a,b])$, denotaremos $\overline{f}$ apenas por uma representante f de $\overline{f}$, e escreveremos $f \in L^2([a,b])$.

O espaço $L^2([a,b])$ é um espaço de Hilbert, isto é, é um espaço vetorial normado completo munido com a norma induzida pelo produto interno

$$(f,g)_{L^2([a,b])} = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Dado um subespaço vetorial X de $L^2([a,b])$, munido com a norma induzida, e com dimensão finita n, dada uma base $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,\}$ de X, definimos a projeção de uma função $f \in L^2([a,b])$ em X por

$$\mathrm{proj}_X f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(\varphi_i, f)_{L^2([a,b])}}{\|\varphi_i\|^2_{L^2([a,b])}} \varphi_i \right).$$

A.2 Leis de Conservação Escalares

A equação

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \tag{A.1}$$
$$u(x,0) = g(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{A.2}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $u = u(x,t)$ é a incógnita, é dita ser uma *lei de conservação escalar*.

Geralmente u representa a concentração de uma quantidade física Q e $f(u)$ é sua função de fluxo. Abaixo, iremos deduzir a modelagem que mostra que a Equação (A.1) representa uma ligação entre a concentração Q e o fluxo.

Dado um intervalo $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ fixo, a integral

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,\mathrm{d}x$$

nos fornece uma quantidade Q entre x_1 e x_2 no tempo t.

Uma lei de conservação estabelece que, sem fontes ou sumidouros, a taxa de variação de Q no interior de $[x_1, x_2]$, é dada pela diferença do fluxo calculado nos pontos da fronteira. Se a função de fluxo é dada por uma função $f = f(u)$, a relação acima é descrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,\mathrm{d}x = -f(u(x_2,t)) + f(u(x_1,t)), \tag{A.3}$$

onde nós assumimos $f > 0$ para um fluxo na direção positiva e $f < 0$ para um fluxo na direção negativa do eixo x.

Se u e f são funções suaves, a equação (A.3) pode ser reescrita como

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(u_t + f(u(x,t))_x\right)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pela arbitrariedade do intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos (A.1).

A.3 Sistema Hiperbólico de Leis de Conservação Escalares

Um sistema de leis de conservação em uma dimensão é dado por

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = 0, \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty); \tag{A.4}$$
$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{g}(x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; \tag{A.5}$$

onde

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\begin{bmatrix} u_1(x,t)\\ u_2(x,t)\\ \vdots\\ u_m(x,t)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x,t))=\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{u}(x,t))\\ f_2(\boldsymbol{u}(x,t))\\ \vdots\\ f_m(\boldsymbol{u}(x,t))\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}(x)=\begin{bmatrix} g_1(x)\\ g_2(x)\\ \vdots\\ g_m(x)\end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

Para $1\leq i\leq m$, temos

$$u_i(x,t):\mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R};$$
$$f_i(\boldsymbol{u}(x,t)):\mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R};$$
$$g_i(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

e

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,t):\mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^m$$

é a incógnita.

Motivação para a definição de sistema hiperbólico.

Podemos motivar a definição de sistema hiperbólico pelo desenvolvimento a seguir. Considere a classe de sistemas semilineares dada na forma não-divergente

$$\boldsymbol{u}_t+B(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x=0,\quad \text{para } (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty); \tag{A.7}$$

onde $B:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m\times m}$.

Dado

$$B(\boldsymbol{u})=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_m}\\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_m}\end{bmatrix},$$

a lei de conservação (A.4) é equivalente à (A.7).

Suponhamos que procuramos soluções do tipo *onda viajante*

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\boldsymbol{v}(x-\sigma t),\quad \text{para } (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty); \tag{A.8}$$

onde $\boldsymbol{v}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ e a velocidade $\sigma\in\mathbb{R}$ serão encontrados.

Substituindo (A.8) em (A.7), chegamos à igualdade

$$-\sigma\boldsymbol{v}'(x-\sigma t)+B(\boldsymbol{v}(x-\sigma t))\boldsymbol{v}'(x-\sigma t)=0,$$

o que implica

$$B(\boldsymbol{v}(x-\sigma t))\boldsymbol{v}'(x-\sigma t)=\sigma\boldsymbol{v}'(x-\sigma t),$$

ou seja, σ é um autovalor da matriz $B(\boldsymbol{v})$ correspondente ao autovetor $\boldsymbol{v}'$.

Com esta conclusão, devemos exigir certas condições para os autovalores de B se quisermos ter soluções do tipo *onda viajante*, o que motiva a definição a seguir.

Definição 3.

(i) Se para cada $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, os autovalores de $B(\boldsymbol{u})$ são todos reais e $B(\boldsymbol{u})$ é diagonalizável, o sistema de equações diferenciais parciais (A.7) é dito ser hiperbólico.

(ii) Se para cada $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, os autovalores de $B(\boldsymbol{u})$ são todos reais e distintos, o sistema de equações diferenciais parciais (A.7) é dito ser estritamente hiperbólico.

No caso particular das leis de conservações, lembramos que $B(\boldsymbol{u}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}$, isto é, $B(\boldsymbol{u})$ é a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ com respeito as variáveis $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Veremos que as equações de águas rasas para canais retangulares uniformes, serão um exemplo de sistema hiperbólico de leis de conservação escalares.

A.4 Derivada Material

Definição 4. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio (aberto e conexo) e um intervalo de tempo $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$, conidere um campo vetorial dependente do tempo $\phi : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, onde escrevemos $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$. Então a taxa de variação no tempo de ϕ com velocidade do fluido $V = (u_1, u_2, u_3)$ é dada por*

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + V \cdot \nabla \phi. \tag{A.9}$$

A derivada no tempo $\dfrac{D\phi}{Dt}$ é usualmente chamada de derivada substancial ou derivada material.

APÊNDICE B – Resultados Auxiliares

B.1 Integração Numérica

Vamos utilizar as fórmulas de quadratura de Gauss-Legendre.

B.1.1 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são uma classe importante de polinômios muito utilizada na Análise Numérica. Vamos definir estes polinômios indutivamente pela fórmula de Rodrigues, dada abaixo,

$$P_1(x) = 1;$$
$$P_N(x) = \frac{1}{2^N N!}\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N}(x^2-1)^N.$$

Alguns dos primeiros polinômios de Legendre são dados por

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1;\\
P_1(x) &= x;\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1);\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x);\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3);\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).
\end{aligned}$$

B.1.2 Quadratura de Gauss-Legendre

A *quadratura de Gauss-Legendre* é uma aproximação numérica da integral definida

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \sum_{i=1}^{N}\omega_i f(x_i). \tag{B.1}$$

Estudaremos agora para um número N fixo, os coeficientes da *quadratura de Gauss-Legendre de ordem N*.

Os pontos de quadratura x_i são dados pelas raízes dos polinômios de Legendre, isto é,

$$P_N(x_i) = 0, \qquad \text{para } 1 \le i \le N.$$

Calculando as raízes de $P_N(x)$, é direto mostrar que

$$-1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < 1.$$

Os pesos ω_i da Equação (B.1) são dados também em termos dos polinômios de Legendre pela seguinte relação,

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i)^2 \left(P'_N(x_i)\right)^2}.$$

Abaixo iremos mostrar uma tabela com algumas fórmulas de quadratura úteis para o nosso trabalho.

Tabela 4 – Tabela com alguns pontos de quadratura x_i e pesos ω_i para a aplicação da quadratura de Gauss-Legendre

Número de Pontos	Pontos de quadratura x_i	Pesos ω_i
1	0	2
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}, \ -\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\sqrt{\frac{3}{5}}, \ -\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}, \ -\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}, \ -\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \ -\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \ -\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

Agora queremos integrar sobre um intervalo arbitrário $[a, b]$, isto é, queremos calcular

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Sabemos calcular a integral de f no intervalo $[-1, 1]$, então basta efetuarmos uma mudança de variável. Fazendo

$$u = \left(\frac{b-a}{2}\right) x + \left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{b-a}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

Desta forma,

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^{1} f\left(\left(\frac{b-a}{2}\right) x + \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}x. \tag{B.2}$$

Aplicando a quadratura de Gauss-Legendre com N pontos agora em (B.2), obtemos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{i=1}^{N} \omega_i f\left(\left(\frac{b-a}{2}\right) x_i + \left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \tag{B.3}$$