



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

VICTOR ANTONIO BLANCO VILORIA

**Resultados de Existência, Multiplicidade e
Regularidade de Soluções em Modelos Elípticos
Degenerados**

Campinas

2023

Victor Antonio Blanco Vilorio

Resultados de Existência, Multiplicidade e Regularidade de Soluções em Modelos Elípticos Degenerados

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: João Vitor da Silva

Coorientador: Alessio Fiscella

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Victor Antonio Blanco Vilorio e orientada pelo Prof. Dr. João Vitor da Silva.

Campinas

2023

B598r Blanco Viloria, Victor Antonio, 1994-
Resultados de existência, multiplicidade e regularidade de soluções em modelos degenerados elípticos / Victor Antonio Blanco Viloria. - Campinas, SP: [s.n.], 2023.

Orientador: João Vitor da Silva.

Coorientador: Alessio Fiscella.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Existência de solução (Equações diferenciais parciais). 3. Problemas de fronteira livre. I. Silva, João Vitor da, 1986-. II. Fiscella, Alessio, 1985-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Existence results, multiplicity and regularity of solutions in degenerate elliptic models

Palavras-chave em inglês:

Elliptic differential equations

Existence of solution (Partial differential equations)

Free boundary problems

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

João Vitor da Silva [Orientador]

Pêdra Dariclêa Santos Andrade

Lucas Catão de Freitas Ferreira

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Elzon César Bezerra Júnior

Makson Sales Santos

Data de defesa: 31-07-2023

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-2150-5676>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4646734712726456>

**Tese de Doutorado defendida em 31 de julho de 2023 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). JOÃO VITOR DA SILVA

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO

Prof(a). Dr(a). ELZON CÉZAR BEZERRA JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). MAKSON SALES SANTOS

Prof(a). Dr(a). PÊDRA DARICLÉA SANTOS ANDRADE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Em memória de Victoriano Blanco Ibarra e Antonio Ballesteros Naar.

Agradecimentos

Primeiramente quero dar graças a Deus pela oportunidade de estudar no Brasil. Agradeço muito pela oportunidade que foi dada para mim pela Universidade Estadual de Campinas, a meu orientador o Professor João Vitor da Silva e meu coorientador o professor Alessio Fiscella. Também agradeço a minha família, em especial a meus pais Argido Antonio Blanco Cordero y Marfa Inés Viloría Fernandez, minha namorada Rosicela Tenorio Martínez, minha avó Estevana Cordero e meu irmão José David Blanco Viloría. Agradeço enormemente a meus amigos e colegas Alvaro Machado, Vicente Perez, Jesus Correa, Romário Tomilhero, Elzon César Bezerra e Luís Urbiñes. Em geral, agradeço a cada pessoa que me ajudou com este difícil processo, sem vocês não teria conseguido tão imensa conquista.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Resumo 1. Na primeira parte deste trabalho focaremos nosso interesse em encontrar uma família de soluções $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ – no sentido da viscosidade – para o problema singularmente perturbado governado pelo operador $p(x)$ –Laplaciano normalizado

$$\begin{cases} \Delta_{p_\varepsilon(x)}^N u_\varepsilon(x) &= \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon(x) &= g(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para dados p_ε , ζ_ε e f_ε contínuos adequados. Neste contexto, mostraremos que tais soluções satisfazem certas propriedades analíticas e geométricas, a saber, elas são uniformemente limitadas (via estimativas **A.B.P**), gozam de regularidade Lipschitz e estimativas de não-degenerescência em um domínio regular $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e um dado de bordo g suficientemente regular. Como consequência, mostraremos que para uma subsequência $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_j} = u_0$, com $u_0 \in C^{0,1}(\Omega; [0, L])$ sendo solução no sentido da viscosidade para um problema de fronteira livre do tipo Bernoulli de uma fase, a saber,

$$\begin{cases} \Delta_{p_0(x)}^N u_0(x) &= f_0(x) & \text{em } \{u_0 > 0\}, \\ u_0(x) &= g(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u_0(x) &\geq 0, \end{cases}$$

onde $p_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p_\varepsilon(x)$ e $f_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x)$. Tais problemas de fronteira livre são a contraparte não-variacional de certos problemas tratados em propagação de chamas na teoria de combustão.

Resumo 2. Na segunda parte do trabalho estudaremos questões sobre existência e multiplicidade de soluções fracas do problema misto envolvendo os operadores p –Laplaciano clássico e o p –Laplaciano fracionário

$$-\Delta_p u + (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{r-2} u + |u|^{p^*-2} u \text{ em } \Omega, u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto, limitado e suave, $2 \leq N$, $1 < p < N$, $0 < s < 1 < r < p^* = \frac{Np}{N-p}$ e λ um parâmetro positivo. O interessante de nosso problema é que estudaremos três possíveis casos para o expoente r . Mais precisamente

1. $p \geq 2$ e $p > r$ (caso sublinear);
2. $r = p \geq 2$ (caso linear);
3. $r > p > 1$ (caso superlinear).

Portanto, precisamos combinar diversos métodos variacionais junto com algumas ferramentas topológicas. Em cada um dos casos, precisamos estabelecer uma condição de **Palais-Smale**

(*PS*) para o funcional relacionado ao nosso problema e transpor a falta de compacidade na imersão de Sobolev produzida pela presença do termo crítico $|u|^{p^*-2}u$.

Palavras chaves: Equações diferenciais elípticas, Existência de solução, Equações diferenciais parciais, Problemas de limites livres.

Abstract

Abstract 1. In the first part of our work we focus our attention in looking for a family of solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ – in the viscosity sense – for the singularly perturbed problem driven by the normalized $p(x)$ -Laplacian operator

$$\begin{cases} \Delta_{p_\varepsilon(x)}^N u_\varepsilon(x) &= \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon(x) &= g(x) & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where p_ε , ζ_ε and f_ε are suitable continuous data. In this context, we show that such solutions satisfy certain analytical and geometric properties, namely, they enjoy uniform boundedness (vi **A.B.P** estimate), they are Lipschitz continuous and fulfill a non-degeneracy property, for a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ and a regularly boundary datum g . As a result, we show that, up to subsequence $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_j}(x) = u_0(x)$, with $u_0 \in C^{0,1}(\Omega; [0, L])$ satisfying, in the viscosity sense, a one-phase free boundary problem of Bernoulli type as follows

$$\begin{cases} \Delta_{p_0(x)}^N u_0(x) &= f_0(x) & \text{in } \{u_0 > 0\}, \\ u_0(x) &= g(x) & \text{on } \partial\Omega, \\ u_0(x) &\geq 0, \end{cases}$$

where $p_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p_\varepsilon(x)$ and $f_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x)$. Such a class of free boundary problem must be understood as the non-variational counterpart of certain problems in flame propagation coming from combustion theory.

Abstract 2. In the second part of the work, we will study the existence and multiplicity of weak solutions for the mixed problem involving the classic p -Laplacian and the fractional p -Laplacian operators

$$-\Delta_p u + (-\Delta)_s^p u = \lambda |u|^{r-2} u + |u|^{p^*-2} u \text{ em } \Omega, u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is an open, bounded and smooth domain, $2 \leq p < N$, $0 < s < 1 < r < p^* = \frac{Np}{N-p}$ and λ is a positive parameter. The interesting thing about our problem is that we will study three possible cases for the exponent r . More precisely:

1. $r < p$ (sub-linear case);
2. $r = p$ (linear case);
3. $r > p$ (super-linear case).

Therefore, we need to combine several variational methods together with some tools topological. In each case, we need to establish a **Palais-Smale**(PS) condition for the functional associated

with our operator and surpass the lack of compactness in Sobolev immersion provoked by the presence of the critical term $|u|^{p^*-2}u$.

Keywords: Elliptic differential equations, Existence of solution, Partial differential equations, Free boundary problems.

Notações e símbolos

A seguir, escreveremos alguns símbolos e notações que usaremos ao longo do trabalho.

- $\mathbb{R}^N$ denotará o espaço N –dimensional usual;
- Ω denotará um domínio contido em $\mathbb{R}^N$;
- Ω' denotará um subconjunto compactamente contido em um domínio Ω ;
- $B_r(x)$ denotará a bola aberta com raio $r > 0$ e centrada no ponto x ;
- $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ denotará o complementar do Ω ;
- $C^0(\cdot)$ denotará o conjunto das funções contínuas em seu respectivo domínio.
- $C^{m,\alpha}(\cdot)$ denotará o conjunto das funções Hölder contínuas m –vezes diferenciáveis no seu respectivo domínio;
- $C_0^{\alpha,m}(\cdot)$ denotará o conjunto das funções Hölder contínuas m –vezes diferenciáveis e com suporte compacto no seu respectivo domínio.
- $\Delta_p(\cdot)$ denotará o operador laplaciano;
- $(-\Delta)_p^s(\cdot)$ denotará o operador p –Laplaciano fraccionário;
- $L^m(\Omega)$ denotará o conjunto de todas as funções mensuráveis em Ω com

$$\int_{\Omega} |u(x)|^m dx < \infty.$$

- $X_0^{1,p}(\Omega)$ denotará o espaço fraccionário

$$X_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : u|_{\Omega} \in W_0^{1,p}(\Omega), u = 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\};$$

- $\|u\|$ denotará a norma para o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{1/p};$$

- $[u]_{p,s}$ denotará a seminorma de Gagliardo

$$[u]_{p,s} := \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dy dx \right);$$

- $\mathcal{L}^N(E)$ denotará a medida de Lebesgue N –dimensional do conjunto E ;

- $\mathcal{L}_{p,s}(u)$ denotará o operador misto

$$\mathcal{L}_{p,s} u(x) = -\Delta_p u(x) + (-\Delta)_p^s u(x);$$

- $Sim(N)$ denotará o conjunto das matrizes quadradas simétricas de tamanho $N \times N$;
- $\lambda_{\max}(M)$ e $\lambda_{\min}(M)$ denotarão o máximo e o mínimo autovalor respetivamente de uma matriz simétrica M ;
- Para matrizes simétricas X e Y a notação $X \leq Y$ terá o seguinte significado

$$\langle (X - Y) \cdot \xi, \xi \rangle \leq 0 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^N;$$

- $dist(x, A)$ denotará a distância do ponto x ao conjunto A definida por

$$dist(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|;$$

- $\mathcal{H}^t(E)$ denotará a medida de Hausdorff t -dimensional do conjunto E ;
- $diam(\Omega)$ denotará o diâmetro do conjunto N -dimensional Ω ;
- p^* denotará o expoente crítico de Sobolev

$$p^* = \frac{Np}{N-p};$$

- $\mathcal{S}$ denotará a melhor constante de Sobolev ou constante ótima de Sobolev

$$\mathcal{S} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^p}.$$

Sumário

	INTRODUÇÃO	14
1	PRELIMINARES	24
1.1	Soluções no sentido da viscosidade e soluções do tipo Perron	24
1.2	Tópicos de Teoria da Medida	28
1.3	Princípio de comparação para equações quase-lineares	29
1.3.1	Desigualdade de Harnack para EDPs uniformemente elípticas	31
1.3.2	Estimativas de Schauder para equações quase lineares	31
1.4	Métodos variacionais e algumas notações	32
1.5	Espaços funcionais e imersões de Sobolev	33
1.6	Índice Cohomológico	35
1.7	Genus de Krasnoselskii	39
2	PROBLEMA SINGULARMENTE PERTURBADO	42
2.1	Estimativas de regularidade Lipschitz	42
2.2	Propriedade geométrica de não-degenerescência	47
2.3	Algumas implicações dos Teoremas 2.1.1 e 2.2.2	51
2.4	Estimativas da medida de Hausdorff para a fronteira livre	54
2.5	Configuração limítrofe quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$	56
3	MODELOS MISTOS LOCAIS/NÃO-LOCAIS DEGENERADOS	62
3.1	Caso sublinear	62
3.2	Caso linear	72
3.3	Caso superlinear	85
	REFERÊNCIAS	93

Introdução

O objetivo desta tese de doutorado é estudar questões relacionadas à existência, multiplicidade e regularidade de certas soluções para uma classe de problemas degenerados elípticos, com estrutura não-variacional e variacional respetivamente. O desenvolvimento de nosso trabalho será dividido em duas componentes: na primeira parte, analisaremos a existência e estimativas de regularidade Lipschitz para soluções no sentido da viscosidade de um problema singularmente perturbado, governado pelo $p(x)$ -Laplaciano normalizado, bem como um problema de fronteira livre de uma fase do tipo Bernoulli associado. Na segunda parte da tese buscaremos analisar 3 classes de problemas relacionados ao operador do tipo p -Laplaciano misto (composto pelo p -Laplaciano e o p -Laplaciano fracionário), a saber os problemas com não-linearidades com crescimento sub-linear, linear e super-linear respetivamente.

A seguir detalharemos as problemáticas a serem estudadas em nosso trabalho, o estado da arte de cada problema e a estratégia para abordá-los.

Problema 01: Problema singularmente perturbado governado pelo operador $p(x)$ -Laplaciano normalizado (veja [32])

Antes de ressaltarmos o caráter Lipschitz das estimativas obtidas para as soluções no sentido da viscosidade para um problema governado pelo $p(x)$ -Laplaciano normalizado, permitam-nos introdução um panorama histórico sobre a teoria por trás de tais operadores e sua relevância nos contextos de Análise Matemática atuais: Nos últimos anos, pesquisas sobre o Tug-of-war game (Jogos de cabo-de-guerra) com probabilidades variáveis têm surgido na interação moderna da Teoria das Probabilidades e dos modelos de EDPs elípticos. Precisamente, em [5] os autores estudaram um Tug-of-war game de soma-zero para dois jogadores com probabilidades variáveis que dependem da localização do jogo $x \in \Omega$. Particularmente, eles mostram que o valor do jogo (i.e., uma solução de um problema discretizado associado ao operador sob análise, veja e.g. [8]) é local e assintoticamente Hölder contínuo, assim como a existência e unicidade de valores do jogo. Como consequência, eles provam que a função valor do jogo converge para uma solução do $p(x)$ -Laplaciano normalizado, o qual é definido da seguinte forma

$$\Delta_{p(x)}^N u(x) := \frac{1}{p(x)} \Delta u(x) + \frac{p(x) - 2}{p(x)} \left\langle D^2 u(x) \frac{Du(x)}{|Du(x)|}, \frac{Du(x)}{|Du(x)|} \right\rangle,$$

onde $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-negativa e Lipschitz contínua. Observe que o operador de segunda ordem

$$\left\langle D^2 u(x) \frac{Du(x)}{|Du(x)|}, \frac{Du(x)}{|Du(x)|} \right\rangle := \Delta_{\infty}^N u(x)$$

é conhecido como o ∞ -Laplaciano normalizado e constitui um operador totalmente não-linear com caráter degenerado elíptico.

Dando prosseguimento, recentemente, em [6], os autores provaram uma estimativa de regularidade Lipschitz assintótica para as funções de valor dos jogos de cabo de guerra com probabilidades variáveis (do tipo $p(x)$ -Laplaciano normalizado). O método é baseado em uma abordagem da teoria dos jogos para estimar o valor de um jogo relacionado definido em $\Omega \times \Omega$ por meio de acoplamentos.

Devemos destacar que modelos de EDPs elípticas governadas por operadores normalizados com assinatura não-uniformemente elíptica têm recebido enorme atenção nos últimos anos devido suas amplas conexões com alguns Processos Estocásticos (Random Walks), Teoria das Probabilidades (Princípios de Programação Dinâmica), Teoria dos jogos (Tug-of-War games com ruído) para mais detalhes veja (cf. [7], [8], [20], [56], [68], [70] e [21] para tais temas de pesquisa relacionados).

Por tal razão, motivados por questões modernas de EDPs singulares em modelos não-variacionais (cf. [4], [81] e [82]), gostaríamos de estudar propriedades quantitativas e qualitativas de soluções no sentido da viscosidade para:

$$\begin{cases} \Delta_{p_\varepsilon(x)}^N u_\varepsilon(x) &= \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon(x) &= g(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde assumiremos que $p_\varepsilon \in C^{0,1}(\Omega)$, $f_\varepsilon \in C^{1,\alpha_0}(\Omega)$ (para algum $\alpha_0 \in (0, 1]$) e existem constantes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, p^+, p^-, p_l > 0$ tais que

$$1 < p^- \leq p_\varepsilon(x) \leq p^+ < \infty, \quad |Dp_\varepsilon(x)| \leq p_l \quad (2)$$

e

$$\mathcal{A} \leq f_\varepsilon(x) \leq \mathcal{B} \quad \text{para cada } x \in \Omega \text{ e todo } \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Além disso, $0 \leq g \in W^{2,\infty}(\overline{\Omega})$ e $\zeta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, com $0 \leq \zeta \in C_0^\infty([0, 1])$.

Vale ressaltar que nossos resultados são extensões de certos modelos não-variacionais, citamos por exemplo [4], [72], [82] e [89], e, até certo ponto, os de [33], [39], [65], [71], [73] e [90], sobre modelos degenerados e variacionais, onde utilizamos um conjunto de abordagens e técnicas alternativas ajustadas ao contexto de modelos totalmente não-lineares e normalizados.

Motivação e Estado-da-arte A teoria matemática de perturbação singular diz respeito a uma ampla classe de métodos empregados em diversos campos da Matemática, da Física e suas áreas afins (veja e.g., [58] para um ensaio introdutório sobre tal temática). De fato, tais métodos de penalização foram fundamentais no estudo de problemas de minimização descontínuos no contexto da teoria de pontos críticos de funcionais não-diferenciáveis, onde o trabalho seminal

de Alt e Caffarelli em [2] marca o ponto de partida de tal teoria realizando o estudo do seguinte problema de minimização

$$\min_{H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega}=g} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \mathcal{Q}(x) \chi_{\{v>0\}} \right) dx \quad \text{para um dado apropriado } g \geq 0 \text{ e } \mathcal{Q} > 0 \quad (4)$$

Devemos destacar que historicamente tal problema variacional (4) surgiu na formulação matemática de uma variedade de modelos relevantes de uma-fase, e.g. problemas do tipo cavidade (cf. [39]), problema de jatos (cf. [29, Ch. 1] e suas referências) apenas para mencionar alguns deles. Observe que a equação de Euler-Lagrange para (4) é dada por

$$\Delta u_0(x) = \mathcal{Q}(x) \delta_0(u_0) \quad \text{em } \Omega$$

em um sentido distribucional apropriado, abordado em [2]. Assim, podemos ressaltar que minimizantes de (4) podem ser caracterizados como limite uniforme quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ no seguinte problema

$$\Delta u^\varepsilon(x) = \mathcal{Q}^2(x) \zeta_\varepsilon(u^\varepsilon) \quad \text{em } \Omega \quad (\text{para } \zeta_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1} \chi_{(0,\varepsilon)}).$$

Portanto, a ideia central de estudar soluções via aproximação é que “pequenas perturbações” para certos problemas elípticos se propagam de forma quantificável para seu perfil limite (quando este existe). Assim, a análise de soluções penalizadas pode ser útil para estabelecer estimativas de regularidade para a solução minimal desejada de (4) e sua fronteira livre.

Observamos que tal ideia também pode ser aplicada ao estudo de problemas super-determinados na interface de EDPs e Geometria como segue: fixados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado e funções $0 \leq f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ e $0 < \mathcal{Q} \in C^0(\overline{\Omega})$, gostaríamos de encontrar uma “hiper-superfície compacta” $\Gamma_0 := \partial\Omega' \subset \Omega$ tal que o *problema não-homogêneo do tipo Bernoulli de uma-fase*

$$\begin{cases} \mathcal{L} u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \setminus \Omega' \\ u(x) = g(x) & \text{on } \partial\Omega \\ u(x) = 0 & \text{on } \Omega' \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \mathcal{Q}(x) & \text{on } \Gamma_0 \quad (\text{em um sentido adequado}) \end{cases} \quad (5)$$

possua uma solução (em um sentido apropriado) não-negativa para um operador elíptico de segunda ordem $\mathcal{L}$ com estrutura adequada. Como descrito acima, soluções via processo de limite provenientes de certos problemas regularizados aproximados são perfis naturais para resolver (5) (em um sentido apropriado com $\Gamma_0 := \partial\{u > 0\}$). Isso motivará o próximo parágrafo.

Um breve passeio pela teoria de perturbação singular

Devemos ressaltar que nosso ímpeto para os estudos atuais neste trabalho também provém de suas conexões intrínsecas com problemas não-lineares monofásicos, que emergem na teoria matemática de combustão, como também na análise de fenômenos de propagação de

chama (configuração estacionária). Mais precisamente, eles emergem na configuração de chamas laminares descritas como um limite assintótico para a formulação não-linear de certos modelos de ativação de alta energia com termos de fonte não-homogêneos (veja [28], [33], [62] e [91] para trabalhos relacionados a esta temática). Em uma concepção geral, tais modelos são obtidos como o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em (1), ou seja, um típico problema de fronteira livre (de uma-fase) não-homogêneo, onde a parte da reação-difusão é regida por um operador elíptico degenerado (cf. [4], [72] e [82] para resultados similares):

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta_{p(x)}^N u(x) & = & f(x) \quad \text{em } \{u > 0\}, \quad (\text{para } f \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \\ u(x) & \geq & 0 \quad \text{em } \Omega \\ u(x) & = & g(x) \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ G(|\nabla u(x)|) & \leq & Q(x) \quad \text{sobre } \partial\{u > 0\}, \quad (\text{para } 0 < Q \in C^0(\overline{\Omega})) \end{array} \right. \quad (\text{PFL-NH})$$

Devemos destacar que a condição que G cumpre é referida como *condição de fronteira livre*.

Observamos que o desenvolvimento matemático de tais problemas regularizados (via métodos de penalização) produziu importantes avanços científicos na teoria das fronteiras livres. Historicamente, seus estudos remontam ao trabalho pioneiro [11] realizado por Berestycki-Caffarelli-Nirenberg, onde o cenário linear elíptico foi abordado (cf. [90] para a análise de EDPs elípticas via um tratamento variacional)

$$\mathcal{L}_0[u] := \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) = \zeta_\varepsilon(u), \quad (\text{para coeficientes } C^1).$$

A seguir apresentaremos os desenvolvimentos recentes no cenário de EDPs totalmente não-linear. Antes de tal apresentação, permita-nos referir algumas contribuições pivotais de vários autores sobre problemas singularmente perturbados homogêneos/não-homogêneos de uma-fase, bem como problemas variacionais (de fronteiras livres e sobredeterminados) envolvendo operadores uniformemente elíptico e/ou com estrutura degenerada:

<i>EDP modelo</i>	<i>Assinatura do operador</i>	<i>Referências</i>
$\operatorname{div}(\mathfrak{A}(x)\nabla u^\varepsilon) = \Gamma(x)\zeta_\varepsilon(u^\varepsilon)$	Operador uniformemente elíptico	[2], [39] e [73]
$\Delta_p u^\varepsilon = \zeta_\varepsilon(u^\varepsilon) + f_\varepsilon(x)$	p -Laplaciano	[33] e [72]
$\operatorname{div}(\nabla u^\varepsilon ^{p_\varepsilon(x)-2} \nabla u^\varepsilon) = \zeta_\varepsilon(u^\varepsilon) + f_\varepsilon(x)$	$p(x)$ -Laplaciano	[47], [65], [66] e [67]
$\Delta_p^N u^\varepsilon(x) = \zeta_\varepsilon(u^\varepsilon)$	p -Laplaciano normalizado ($p > 2$)	[9] e [79]

Salientamos que nas últimas duas décadas ou mais, problemas de fronteiras livres não-lineares como (PFL-NH) foram amplamente estudados na literatura através de métodos de perturbação singular. Em contraste com sua contraparte variacional (veja [2], [33], [65], [71], [73] e [90]), a análise de EDPs singularmente perturbadas não-variacionais impõem desafios significativos, principalmente devido à falta de fórmulas de monotonicidade (cf. [63] e [64]), estimativas de energia (cf. [33]) e uma noção estável de formulação fraca para soluções (veja, [90]), somente para citar algumas dificuldades inerentes.

Neste novo cenário desafiador, Teixeira em [89] iniciou a estratégia de estudar EDPs singularmente perturbadas totalmente não-lineares da seguinte forma

$$F(x, D^2 u^\varepsilon) = \zeta_\varepsilon(u^\varepsilon) \quad \text{in } \Omega \quad \text{com } u^\varepsilon \geq 0, \quad (6)$$

onde $\zeta_\varepsilon(u^\varepsilon) \rightarrow \delta_0$ (a medida delta zero de Dirac) em um sentido adequado. Mais precisamente, Teixeira prova que soluções da equação (6) gozam de regularidade Lipschitz e tal regularidade é ótima, bem como a compacidade em H^1 para as EDPs singulares do tipo Bellman. Em seguida, Ricarte-Teixeira em [82] finalizam a análise iniciada por Teixeira em [89]. De fato, eles provam algumas propriedades analíticas e geométricas para soluções e suas fronteiras livres. Destas, devemos destacar que a condição de fronteira livre em (6) é governada por um novo operador, ou seja,

$$F^*(X) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon F\left(\frac{1}{\varepsilon} X\right),$$

o *perfil de recessão*, que surge por meio de um argumento do tipo blow-up sobre a família de EDPs elípticas governadas pelo operador original:

$$F^*(z, Du_0(z) \otimes Du_0(z)) = 2 \int_0^1 \zeta(t) dt, \quad \text{para } z \in \partial\{u_0 > 0\} \quad \text{e } u_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon.$$

Na sequência das contribuições relativas a este tema, Da Silva-Ricarte em [80, Theorem 1.3] obtêm estimativas globais para a regularidade Lipschitz de soluções de problemas da forma

$$\begin{cases} F(x, Du^\varepsilon, D^2 u^\varepsilon) = \zeta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ u^\varepsilon(x) \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u^\varepsilon(x) = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Recentemente, [23] estabeleceram estimativas Lipschitz uniformes até o bordo para um problema singularmente perturbado para modelos elípticos totalmente não-lineares como (7) com ingredientes ilimitados. Além disso, [72] estudam um problema de fronteira livre como (7) (com estrutura uniformemente elíptica) com um termo força não-homogêneo. Também devemos citar [24], onde os autores provaram estimativas do gradiente até o bordo para problemas de fronteira livre não-lineares e não-homogêneos como (5) governados por equações elípticas totalmente não-lineares e com ingredientes ilimitados.

Em [4], Araújo *et al* estabelecem resultados de existência, regularidade Lipschitz ótima e propriedades geométricos para a classe de PFLs elípticos degenerados anisotrópicos totalmente não-lineares da seguinte forma:

$$|Du^\varepsilon|^p F(D^2 u^\varepsilon) \simeq \zeta_\varepsilon(u^\varepsilon) + f_\varepsilon(x) \quad \text{em } \Omega \quad \text{com } p > 0 \text{ e } u^\varepsilon \geq 0.$$

Depois disso, em [14], Bezerra Júnior *et al* estudaram modelos elípticos não-variacionais, não-lineares e singularmente perturbados gozando de uma dupla assinatura de degenerescência

como segue

$$\begin{cases} [|Du_\varepsilon(x)|^p + \mathbf{a}(x)|Du_\varepsilon(x)|^q] F(D^2u_\varepsilon(x)) = \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon(x) = g(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para dados adequados $0 < p \leq q < \infty$, $\mathbf{a}$ e g , onde $\zeta_\varepsilon \approx O(\varepsilon^{-1})$ perto de superfícies ε -nível. Em tal contexto, eles estabeleceram a existência de soluções no sentido da viscosidade e provaram que as soluções são localmente-Lipschitz contínuas e crescem de forma linear.

Finalmente, em [79] os autores obtêm estimativas Lipschitz interiores para soluções no sentido da viscosidade para um problema singularmente perturbado do tipo p -Laplaciano na forma não-divergente. Tais resultados dependem de problemas de Dirichlet de aproximação e passagem ao limite, obtendo assim um problema de fronteira livre no limite.

Neste ponto, surge uma pergunta natural: quais devem ser a regularidade ótima e características geométricas das soluções e das superfícies de níveis para problemas do tipo (1)? Em particular, procuramos provar neste trabalho propriedades geométricas que sejam independentes do parâmetro de regularização e que, portanto, possam ser transportadas (de forma uniforme) no processo de limite ao perfil limítrofe.

Portanto, segundo nosso conhecimento, poucos avanços são conhecidos em relação à teoria da regularidade para problemas de fronteiras livre não-homogêneos como (PFL-NH). De fato, como descrito acima, muitos destes estão somente disponíveis no contexto de operadores lineares (cf. [2], [63] e [64]) e/ou no cenário uniformemente/degenerado elíptico (cf. [4] e [82]), os quais não condizem com o modelo que queremos analisar. Além disso, devemos destacar que em nossa análise consideramos o problema (PFL-NH) com caráter não-homogêneo, bem como nossos estudos contemplam não somente o cenário degenerado, *i.e.*, $p(x) > 2$, pois podemos incluir também o caso singular, *i.e.*, $1 < p(x) < 2$. Por fim, nossos resultados estendem as estimativas para o caso de expoente constante e com caráter homogêneo estabelecidas por Araújo-Ricarte em [79].

Método de Bernstein: A prova de nossa estimativa de regularidade Lipschitz local depende de uma adaptação do bem conhecido Método de Bernstein para soluções de problemas (regularizados) da forma

$$\text{Tr} \left(a_{ij}^{p(x),\delta}(Du) D^2u \right) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p(x),\delta}(Du) u_{ij} = h(x).$$

O método ou técnica de Bernstein foi primeiramente apresentado em [12] e [13].

Resumidamente, o Método de Bernstein para a equação de Laplace consiste em

- Introduzir uma nova função auxiliar;

- Verificar que tal função auxiliar satisfaz uma “desigualdade ou EDP chave” (relacionada ao problema original) e usar o Princípio do Máximo ou a estrutura do operador, *e.g.* (elipticidade uniforme);
- Deduzir das estimativas do passo anterior alguma estimativa adequada para a solução original.

A título de motivação consideremos o exemplo simples: seja $\eta \in C_0^\infty(B_1)$ uma função de corte com $\eta = 1$ em $B_{1/2}$, $\nu \in \mathbb{R}^N$ um vetor unitário e $\sigma > 0$ uma constante. Considere a função auxiliar

$$\phi := \eta^2 (\partial_\nu u)^2 + \sigma u^2.$$

Então, estimando para o operador $\Delta(\cdot) = \text{Tr}(\text{Id}_N D^2(\cdot))$:

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= -2|\nabla\eta|^2 (\partial_e u)^2 - 2\eta\Delta\eta (\partial_e u)^2 - 8\eta\nabla\eta \cdot \nabla (\partial_e u) \partial_e u \\ &\quad - 2\eta^2 |\nabla\partial_e u|^2 - 2\eta^2 \partial_e u \partial_e \Delta u - 2\sigma|\nabla u|^2 - 2\sigma u \Delta u. \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|8\eta\nabla\eta \cdot \nabla (\partial_e u) \partial_e u| \leq 2\eta^2 |\nabla\partial_e u|^2 + 8|\nabla\eta|^2 (\partial_e u)^2$$

e obtemos que

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &\leq 6|\nabla\eta|^2 (\partial_e u)^2 - 2\eta\Delta\eta (\partial_e u)^2 - 2\sigma|\nabla u|^2 \\ &\quad + 2\eta^2 \partial_e u (-\Delta)\partial_e u + 2\sigma u (-\Delta u). \end{aligned}$$

Em particular, escolhendo σ suficientemente grande, temos a desigualdade chave

$$-\Delta\phi \leq 2\eta^2 \partial_e u (-\Delta)\partial_e u + 2\sigma u (-\Delta u).$$

Além disso, se u é harmônica em $B_1 \subset \mathbb{R}^N$, então

$$-\Delta\phi \leq 0 \quad \text{in } B_1.$$

Agora, pelo princípio do máximo

$$\max_{B_1} \phi = \max_{\partial B_1} \phi.$$

Portanto, em $B_{1/2}$,

$$\begin{aligned} (\partial_e u)^2 &= \eta^2 (\partial_e u)^2 \\ &\leq \eta^2 (\partial_e u)^2 + \sigma u^2 \\ &= \phi \\ &\leq \max_{\partial B_1} \phi \\ &= \max_{\partial B_1} \eta^2 (\partial_e u)^2 + \sigma u^2 \\ &= \max_{\partial B_1} \sigma u^2 \\ &\leq \sigma \|u\|_{L^\infty(B_1)}^2, \end{aligned}$$

a qual é uma estimativa interior para o gradiente da solução original.

Problema 02: Um problema misto local/não-local quase-linear com termo crítico do tipo Sobolev

O propósito da segunda parte do trabalho é estudar a existência e/ou multiplicidade para soluções fracas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para o problema misto

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) + (-\Delta)_p^s u(x) = \lambda |u(x)|^{r-2} u(x) + |u(x)|^{p^*-2} u(x) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \quad (8)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado, com dimensão $N \geq 2$, $1 < p < N$, $\lambda > 0$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e $0 < s < 1 < r < p^*$. Como é usual

$$\Delta_p u(x) := \operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x))$$

denota o operador p -Laplaciano clássico. Enquanto o p -Laplaciano fracionário é definido por (a menos de constante de normalização)

$$(-\Delta)_p^s u(x) := \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy,$$

onde P.V. é a abreviatura para o sentido de "valor principal".

O estudo dos operadores mistos locais/não-locais recebeu recentemente um nível crescente de atenção, especialmente pela estrutura matemática que combina o esquema clássico do p -Laplaciano e as características não-locais do operador p -Laplaciano fracionário, veja [1, 16, 19, 35, 50] e algumas importantes aplicações como a hipótese de forrageamento animal [36, 75]. Também devemos destacar as importantes contribuições nos temas:

1. Desigualdade de Hong-Krahn-Szegö (veja [18]);
2. Desigualdade de Faber-Krahn e aplicações (veja [17]);
3. Sistema de auto-valores e seus limites assintóticos quando $p \rightarrow \infty$ (veja [27]);
4. Modelos mistos com não-linearidades côncavas-convexas e seus limites assintóticos quando $p \rightarrow \infty$ (veja [31]);
5. Equações do tipo Henon local/não-local (veja [83]);
6. Teoria de regularidade para modelos mistos (veja [34], [51] e [88]).
7. Estimativas de regularidade Hölder mais elevadas (veja [52]).

Observe que o problema (8) pode ser pensado como um problema de tipo “Brezis-Nirenberg”, sendo a versão mista local/não-local do famoso trabalho [26] devido a Brezis e

Nirenberg. Recorde que o problema em [26] foi estendido no caso quase-linear em [53] e no caso fracionário em [84]. Mencionamos também o artigo [15], onde os autores estudaram (8) quando $p = 2$, provando a existência de uma solução para $r \in (1, p^*)$. Portanto, nosso objetivo é estender o resultado de [15] no caso $p \neq 2$, provando assim a multiplicidade de soluções de (8), dependendo do valor de r .

No que diz respeito a esta parte da tese, a mesma está dividida na seguinte forma: no Capítulo 1 apresentaremos os conceitos necessários para abordar o problema (8). Em particular forneceremos uma introdução aos métodos topológicos e variacionais necessários para mostrar a existência e/ou multiplicidade de soluções fracas de (8). Além disso, vamos introduzir as propriedades do espaço homogêneo de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ dotado da norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{1/p}$$

para funções definidas em todo $\mathbb{R}^N$, considerando a natureza não-local do problema (8).

Na primeira parte do Capítulo 3 estudaremos o caso sublinear $1 < r < p$. De fato, estabeleceremos um resultado de multiplicidade no Teorema 3.1.1, baseado no esquema variacional visto em [45], que usa fortemente a teoria do *genus de Krasnoselskii*. Ao acharmos um intervalo ótimo para o parâmetro $\lambda > 0$, produziremos uma sequência de pontos críticos para o operador de Euler-Lagrange vinculado ao nosso problema (8), mostrando assim a existência de infinitas soluções fracas. Destacamos que o resultado do Teorema 3.1.1 estende o mesmo resultado do caso clássico devido a Garcia Azorero-Peral em [53].

Na segunda parte do capítulo 3 abordaremos o caso linear $r = p$. Enunciaremos um resultado de existência e multiplicidade no Teorema 3.2.2. Porém, precisaremos de um resultado abstrato obtido na *teoria de índice cohomológico de Fadell e Rabinowitz* [76, 77], onde precisaremos que o parâmetro $\lambda > 0$ esteja em uma vizinhança apropriada de algum autovalor do operador

$$\mathcal{L}_{p,s}u := -\Delta_p u + (-\Delta)_p^s u.$$

Por tal razão, precisaremos construir uma sequência de autovalores variacionais $(\lambda_k)_{k \geq 1}$, através da teoria de índice cohomológico de Fadell e Rabinowitz, veja [76, 77].

Por fim, na última parte do capítulo 3 estudaremos o problema (8) no caso superlinear, ou seja, quando $r > p \geq 2$. Nós estabeleceremos um resultado de existência no Teorema 3.3.1 através do clássico *Teorema do Passo de Montanha*, em duas situações apropriadas dependendo dos valores

$$m_{N,p,s} = \min \left\{ \frac{N-p}{p-1}, p(1-s) \right\}, \quad \beta_{N,r,p} = N - \frac{r(N-p)}{p}.$$

Mais precisamente, o problema (8) admite pelo menos uma solução quando uma das seguintes situações ocorre:

- (i) $m_{N,p,s} > \beta_{N,r,p}$ e $\lambda > 0$ é genérico (i.e., não há restrições quanto a sua limitação);
- (ii) $m_{N,p,s} \leq \beta_{N,r,p}$ e $\lambda \geq \lambda^*$, com $\lambda^* > 0$ suficientemente grande.

Finalmente, devemos observar que tal dicotomia não é verificada no caso clássico quando $s = 1$, pois temos sempre $m_{N,p,1} \leq \beta_{N,r,p}$. Por tal razão, nosso resultado no Teorema 3.3.1 complementa o mesmo resultado do caso clássico em [53, Theorem 3.3].

1 Preliminares

Nesta seção destacaremos alguns ferramentas fundamentais que serão utilizadas nos capítulos subsequentes desta tese. Trataremos de fornecer as referências adequadas para que o leitor possa averiguar a validade dos resultados e temas que introduziremos a seguir.

1.1 Soluções no sentido da viscosidade e soluções do tipo Perron

Iniciaremos com as definições dos tipos de soluções que são foco de interesse em nosso trabalho relativo ao problema não-variacional (1).

Definição 1.1.1 (Solução no sentido da viscosidade). *Uma função $u \in C^0(\Omega)$ é chamada de sub-solução no sentido da viscosidade (resp. super-solução) de*

$$\Delta_{p(x)}^N u = h(x, u(x)) \quad \text{em } \Omega, \text{ com } h \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}_+) \quad (1.1)$$

se sempre que $\phi \in C^2(\Omega)$ e $u - \phi$ tem um máximo local (resp. mínimo) para $x_0 \in \Omega$, então

- Se $D\phi(x_0) \neq 0$, então

$$\Delta_{p(x_0)}^N \phi(x_0) \leq h(x_0, \phi(x_0)) \quad (\text{resp. } \geq h(x_0, \phi(x_0))).$$

- Se $D\phi(x_0) = 0$, então

(1) Para $p(x_0) \geq 2$:

$$\frac{1}{p(x_0)} \Delta \phi(x_0) + \frac{p(x_0) - 2}{p(x_0)} \lambda_{\max}(D^2 \phi(x_0)) \leq h(x_0, \phi(x_0)) \quad (\text{resp. } \geq h(x_0, \phi(x_0))),$$

onde $\lambda_{\max}(D^2 \phi(x_0))$ é o maior autovalor da matriz $D^2 \phi(x_0)$;

(2) Para $p(x_0) \in (1, 2)$:

$$\frac{1}{p(x_0)} \Delta \phi(x_0) + \frac{p(x_0) - 2}{p(x_0)} \lambda_{\min}(D^2 \phi(x_0)) \leq h(x_0, \phi(x_0)) \quad (\text{resp. } \geq h(x_0, \phi(x_0))),$$

onde $\lambda_{\min}(D^2 \phi(x_0))$ é o menor autovalor da matriz $D^2 \phi(x_0)$.

Finalmente, u é solução no sentido da viscosidade para (1.1) quando é simultaneamente uma sub-solução e super-solução de viscosidade.

A seguir, enunciaremos um resultado que mostrar a existência de soluções do tipo Perron para (1).

Proposição 1.1.2 (Existência de soluções do tipo Perron). *Seja $g_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e Lipschitz contínua. Consideremos um operador elíptico degenerado $\mathcal{L} : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \text{Sim}(N) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\text{Sim}(N)$ é o conjunto das matrizes quadradas simétricas $N \times N$, satisfazendo a seguinte condição de monotonicidade*

$$\mathcal{L}(x, \vec{p}, Y) \leq \mathcal{L}(x, \vec{p}, X) \quad \text{sempre que } Y \leq X,$$

para quaisquer $\vec{p} \in \mathbb{R}^N$ e $X, Y \in \text{Sim}(N)$. Se a equação

$$\mathcal{L}(x, Du, D^2u) = g_0(u) + f(x) \quad (1.2)$$

com $f \in C(\Omega)$, admite uma sub-solução e uma super-solução de viscosidade $\underline{u}, \bar{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ respectivamente, e $\underline{u}|_{\partial\Omega} = \bar{u}|_{\partial\Omega} = \psi \in W^{2,\infty}(\bar{\Omega})$, então dado o conjunto de funções

$$\mathcal{S}_\psi = \{w \in C^0(\bar{\Omega}) \mid w \text{ é super-solução para (1.2), e } \underline{u} \leq w \leq \bar{u}\},$$

então a função

$$u(x) = \inf_{w \in \mathcal{S}_\psi} w(x) \quad (\text{Sol. Perron})$$

é uma solução contínua no sentido da viscosidade para (1.2) que satisfaz $u = \psi$ sobre $\partial\Omega$.

Demonstração. Para uma demonstração, recomendamos por exemplo a leitura de [79, Proposition 2.5]. $\square$

Remark 1.1.3. Devemos destacar que as soluções de viscosidade obtidas através do processo descrito em (Sol. Perron) serão denotadas ao longo deste trabalho como *soluções do tipo Perron*.

Com o propósito de mostrar a existência de soluções no sentido da viscosidade para (1), escolhemos um esquema aproximado apropriado de (1) dado por um problema regularizado. De fato, fixados $\delta, \varepsilon > 0$, seja $u_{\varepsilon, \delta}$ uma solução suficientemente regular (veja e.g. o livro da Ladyženskaja *et al* [61] para tal tema) para

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x), \delta}(Du)u_{ij} &= \zeta_\varepsilon(u) + f_\varepsilon(x) & \text{em } \Omega \\ u(x) &= g(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde o operador $\nu \mapsto a_{ij}^{p_\varepsilon(x), \delta}(\nu)$ é definido por:

$$a_{ij}^{p_\varepsilon(x), \delta}(\nu) = \frac{1}{p_\varepsilon(x)} \delta_{ij} + \frac{p_\varepsilon(x) - 2}{p_\varepsilon(x)} \frac{\nu_i \nu_j}{|\nu|^2 + \delta^2}, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, observe que $(a_{ij}^{p_\varepsilon(x),\delta})_{i,j}$ é uma matriz uniformemente elíptica, i.e.,

$$\lambda \|\xi\|^2 \leq a_{ij}^{p_\varepsilon(x),\delta}(\eta) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \|\xi\|^2,$$

onde

$$\Lambda = \max \left\{ \frac{p_\varepsilon(x_0) - 1}{p_\varepsilon(x)}, \frac{1}{p_\varepsilon(x)} \right\} \quad \text{e} \quad \lambda = \min \left\{ \frac{p_\varepsilon(x) - 1}{p_\varepsilon(x)}, \frac{1}{p_\varepsilon(x)} \right\}.$$

No resultado a seguir garantimos a existência de soluções no sentido da viscosidade para (1).

Proposição 1.1.4. *Seja $u_{\varepsilon,\delta} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução clássica para (1.3). Suponha além disso que as hipóteses (2) e (3) são satisfeitas. Então existe uma sub-solução $\underline{u}^\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ e uma super-solução no sentido da viscosidade $\bar{u}^\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ para o problema original (1), com*

$$\begin{cases} \underline{u}^\varepsilon(x) &:= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \{u_{\varepsilon,\mu}(\xi) \mid \xi \in B_\delta(x), 0 < \mu < \delta\} \\ \bar{u}^\varepsilon(x) &:= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \{u_{\varepsilon,\mu}(\xi) \mid \xi \in B_\delta(x), 0 < \mu < \delta\}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Em particular, o problema (1) tem soluções no sentido da viscosidade $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Além disso, existe uma constante $\Xi = \Xi(N, \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, p^+, p^-, \mathcal{B}, \Omega)$, tal que

$$0 \leq u_\varepsilon \leq \Xi.$$

Demonstração. Seja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ as soluções do tipo Perron para (1). Lembrando a estimativa de Alexandroff-Bakelman-Pucci (A.B.P. veja [30, Theorem 4]) permite-nos concluir que

$$\sup_{\Omega} |u_\varepsilon| \leq \sup_{\partial\Omega} g + \frac{\text{diam}(\Omega)p^+}{N \sqrt[N]{|B_1(0)|(p^- - 1)}} \|f_\varepsilon\|_{L^N(C^+(u_\varepsilon))} := \Xi,$$

onde

$$C^+(u_\varepsilon) = \{x \in \Omega : u(x) = F(u)(x)\}$$

e $F(u)(x) = \{w(x) : w \geq u \text{ em } \Omega \text{ e } w \text{ é côncava}\}$.

Dando prosseguimento a prova, vamos mostrar que u_ε é não-negativa. Para isso, analisaremos os perfis regularizados, i.e., $u_{\varepsilon,\delta}$. Por contradição, vamos assumir que $\mathcal{A}_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid u_{\varepsilon,\delta} < 0\} \neq \emptyset$. Então, sem perda de generalidade u_ε é solução para

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x),\delta} (Du_{\varepsilon,\delta})(u_{\varepsilon,\delta})_{ij} = f_\varepsilon(x) & \text{em } \mathcal{A}_\varepsilon \\ u_{\varepsilon,\delta}(x) = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{A}_\varepsilon, \end{cases}$$

Agora, dado que $f_\varepsilon(x) > 0$ e $u_{\varepsilon,\delta} = 0$ sobre $\partial\mathcal{A}_\varepsilon$, usando o Princípio do Máximo (veja e.g. livro do Evans [42]) $u_{\varepsilon,\delta} \geq 0$ em $\mathcal{A}_\varepsilon$, mas isto gera uma contradição. Portanto, $0 \leq u_{\varepsilon,\delta}$, e como consequência $0 \leq u_\varepsilon \leq \Xi$ depois de passar o limite quando $\delta \rightarrow 0^+$ em (1.4). $\square$

Enunciaremos e demonstraremos um lema que garante o princípio de estabilidade para nosso problema singularmente perturbado. Destacamos que o resultado está inspirado em [44, Lemma 4.1] e [85, Lemma B1].

Lema 1.1.5. (Estabilidade) *Suponha que $p_0 \in C^0(B_1)$, $p_{\min} > 1$ e que $f_0 : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Sejam u_ε as soluções do tipo Perron para (1) e assumamos que a menos de subsequência $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u \in C^0(B_1)$, $f_{\varepsilon_k} \rightarrow f_0$ e $p_{\varepsilon_k} \rightarrow p_0$ local e uniformemente quando $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Então, u é uma solução no sentido da viscosidade para*

$$-\Delta u - (p_0(x) - 2) \frac{\langle D^2 u Du, Du \rangle}{|Du|^2} = f_0(x) \quad \text{em } B_1 \cap \{u > 0\}.$$

Demonstração. É suficiente fazer para o caso de sub-solução. Assumamos que $\varphi \in C^2$ toca u em um ponto x_0 . Dado que $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u$ local e uniformemente, em particular, existe uma sequência $x_{\varepsilon_k} \rightarrow x_0$ tal que $u_{\varepsilon_k} - \varphi$ tem um mínimo local para x_{ε_k} .

Se $D\varphi(x_0, t_0) \neq 0$, então, dado que u_{ε_k} é sub-solução viscosa, obtemos que

$$\begin{aligned} \zeta_{\varepsilon_k}(\varphi(x_{\varepsilon_k})) + f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) &\geq \text{tr } D^2 \varphi(x_{\varepsilon_k}) + (p_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) - 2) \\ &\quad \cdot \left\langle D^2 \varphi(x_{\varepsilon_k}) \frac{D\varphi(x_{\varepsilon_k})}{(|D\varphi(x_{\varepsilon_k})|^2 + \varepsilon_{\varepsilon_k}^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{D\varphi(x_{\varepsilon_k})}{(|D\varphi(x_{\varepsilon_k})|^2 + \varepsilon_{\varepsilon_k}^2)^{\frac{1}{2}}} \right\rangle \end{aligned}$$

fazendo $k \rightarrow \infty$, concluímos que

$$f(x_0) \geq F(x_0, D\varphi(x_0), D^2 \varphi(x_0)),$$

onde $F(x, \eta, X) := \text{tr } X + (p_0(x) - 2) \left\langle X \frac{\eta}{|\eta|}, \frac{\eta}{|\eta|} \right\rangle$.

Se $D\varphi(x_0) = 0$, dividimos a prova em dois casos. Quando $D\varphi(x_{\varepsilon_k}) \neq 0$ for k suficientemente grande, de isto segue que

$$\begin{aligned} \zeta_{\varepsilon_k}(\varphi(x_{\varepsilon_k})) + f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) &\geq \text{tr } D^2 \varphi(x_{\varepsilon_k}) + (p_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) - 2) \\ &\quad \cdot \left\langle D^2 \varphi(x_{\varepsilon_k}) \frac{D\varphi(x_{\varepsilon_k})}{(|D\varphi(x_{\varepsilon_k})|^2 + \varepsilon_{\varepsilon_k}^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{D\varphi(x_{\varepsilon_k})}{(|D\varphi(x_{\varepsilon_k})|^2 + \varepsilon_{\varepsilon_k}^2)^{\frac{1}{2}}} \right\rangle \end{aligned}$$

Para algum vetor $\xi \in \mathbb{R}^N$ com $|\xi| \leq 1$, deduzimos ao fazer $k \rightarrow \infty$

$$f(x_0) \geq \text{tr } D^2 \varphi(x_0) + (p_0(x_0) - 2) \langle D^2 \varphi(x_0) \xi, \xi \rangle.$$

Quando $D\varphi(x_{\varepsilon_k}) \equiv 0$ para k suficientemente grande, pela definição de sub-solução obtemos que

$$\zeta_{\varepsilon_k}(\varphi(x_{\varepsilon_k})) + f_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) \geq \text{tr } D^2 \varphi(x_{\varepsilon_k}) + (p_{\varepsilon_k}(x_{\varepsilon_k}) - 2) \langle D^2 \varphi(x_{\varepsilon_k}) \xi_{\varepsilon_k}, \xi_{\varepsilon_k} \rangle$$

onde $\xi_{\varepsilon_k} \in \mathbb{R}^N$ satisfaz $|\xi_{\varepsilon_k}| \leq 1$. Portanto, segue que para algum vetor $|\xi| \leq 1$

$$f(x_0) \geq \text{tr } D^2\varphi(x_0) + (p_0(x_0) - 2) \langle D^2\varphi(x_0) \xi, \xi \rangle$$

quando $k \rightarrow \infty$.

□

1.2 Tópicos de Teoria da Medida

Nesta seção vamos apresentar resumidamente a medida de Hausdorff e daremos algumas notações que serão importantes ao longo dos próximos capítulos desta tese.

Definição 1.2.1 (δ_0 -densidade). *Dado $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, diremos que $\mathcal{O}$ satisfaz a propriedade de δ_0 -densidade em Ω para $0 < \delta_0 < 1$, se existir $\tau > 0$ tal que*

$$\mathcal{L}^N(B_{\delta_0}(x) \cap \mathcal{O}) \geq \tau \cdot \mathcal{L}^N(B_{\delta_0}(x)),$$

onde $\mathcal{L}^N$ denota a medida de Lebesgue N -dimensional.

Definição 1.2.2 (δ_0 -vizinhança de um conjunto). *Dados $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e uma constante $\delta_0 > 0$, definimos:*

$$\mathcal{N}_{\delta_0}(A) := \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, A) < \delta_0\}$$

a δ_0 -vizinhança de A em $\mathbb{R}^N$.

A seguir, introduziremos a noção de medida de Hausdorff.

Definição 1.2.3 (Medida de Hausdorff $\mathcal{H}^t$). *Seja $r_0 > 0$ dado, $0 < \delta' < r_0$ fixo, e seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto Boreliano. Para $t > 0$ arbitrário, definimos o conteúdo (δ', t) -Hausdorff de A na seguinte forma:*

$$\mathcal{H}_{\delta'}^t(A) := \inf \left\{ \sum_i r_i^t : A \subset \bigcup_{i \geq 1} B_{r_i}(x_i) \text{ tal que } 2r_i < \delta' \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ de A , i.e., $A \subset \bigcup_{i \geq 1} B_{r_i}(x_i)$ com $x_i \in A$ e diâmetro sob controle (i.e., $2r_i < \delta'$). Então, a medida de Hausdorff $\mathcal{H}^t$ de A é definida como:

$$\mathcal{H}^t(A) := \lim_{\delta' \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_{\delta'}^t(A).$$

Agora, enunciamos um Lema que será fundamental na parte das estimativas da medida de Hausdorff que serão trabalhadas no **Capítulo 2**.

Lema 1.2.4 (Propriedade de densidade). *Dado $\mathcal{O} \Subset \Omega$ um conjunto aberto, temos as seguintes conclusões:*

- (1) *Se existe $0 < \delta' < 1$ tal que $\mathcal{O}$ satisfaz a propriedade de δ' -densidade, então existe $C = C(\tau, N) > 0$, para a qual:*

$$|\mathcal{N}_{\delta'}(\partial\mathcal{O}) \cap B_\rho(x)| \leq \frac{1}{2^{N\tau}} |\mathcal{N}_\delta(\partial\mathcal{O}) \cap B_\rho(x) \cap \mathcal{O}| + C\delta'\rho^{N-1}$$

com $x \in \partial\mathcal{O} \cap \Omega$ e $\delta \ll \rho$.

- (2) *Se A possui densidade uniforme em Ω (ao longo de $\mathcal{O}$), então $|\partial A \cap \Omega| = 0$.*

Demonstração. A prova da propriedade (1) segue via um argumento de recobrimento. A propriedade (2) é consequência do Teorema da Diferenciação de Lebesgue (veja por exemplo o Livro do Evans-Gariepy [43]).

□

1.3 Princípio de comparação para equações quase-lineares

Nesta parte preliminar inspirada fortemente em [57, Chapter 2] apresentamos algumas noções sobre o princípio de comparação e estimativas interiores para equações elípticas quase lineares.

Ao longo desta preliminar consideraremos uma equação da forma

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, \nabla u) u_{ij} = f(x) \text{ in } \Omega. \quad (1.5)$$

Além disso, assumiremos a condição de elipticidade uniforme no seguinte sentido: para todo $x \in \Omega$ e todo $\rho, \xi \in \mathbb{R}^N$;

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, \rho) \xi_i \xi_j \leq \Lambda|\xi|^2,$$

para algumas constantes positivas $0 < \lambda \leq \Lambda$. Por simplicidade vamos escrever

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, \nabla u) u_{ij}.$$

A seguir, procederemos em enunciar e demonstrar o princípio de comparação para este tipo de equações.

Teorema 1.3.1. *Seja $a_{ij} \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ satisfazendo a condição de elipticidade uniforme. Sejam $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tais que $Q(u) \geq Q(v)$ em Ω e $u \leq v$ sobre $\partial\Omega$. Então, $u \leq v$ em Ω .*

Demonstração. Primeiramente escrevemos

$$\begin{aligned} Q(u) - Q(v) &= \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x, \nabla u)u_{ij} - a_{ij}(x, \nabla v)v_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, \nabla u)(u - v)_{ij} + \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x, \nabla u) - a_{ij}(x, \nabla v))v_{ij}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} a_{ij}(x, \nabla u) - a_{ij}(x, \nabla v) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} a_{ij}(x, t\nabla u + (1-t)\nabla v) dt \\ &= \int_0^1 a_{ij,p_k}(x, t\nabla u + (1-t)\nabla v) dt \cdot (u - v)_k. \end{aligned}$$

Assim,

$$Q(u) - Q(v) = \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij}(u - v)_{ij} + \sum_{k=1}^N \tilde{b}_k(u - v)_k,$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, \nabla u), \\ \tilde{b}_k &= v_{ij} \int_0^1 a_{ij,p_k}(x, t\nabla u + (1-t)\nabla v) dt \end{aligned}$$

Então, obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij}(u - v)_{ij} + \sum_{k=1}^N \tilde{b}_k(u - v)_k &\geq 0 \text{ em } \Omega, \\ u - v &\leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $\tilde{a}_{ij}$ satisfaz, para todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\lambda|\xi|^2 \leq \tilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2.$$

Então, pelo princípio do máximo para equações lineares elípticas, concluímos que $u \leq v$ in Ω . □

Como uma consequência do resultado anterior temos o seguinte corolário.

Corolário 1.3.2. *Seja $a_{ij} \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ satisfazendo a uniformidade elíptica. Suponhamos que $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfazem $Q(u) = Q(v)$ em Ω e $u = v$ sobre $\partial\Omega$. Então, $u = v$ em Ω .*

1.3.1 Desigualdade de Harnack para EDPs uniformemente elípticas

Como um complemento, enunciaremos os seguinte resultado relativo a desigualdade de Harnack. Enunciamos o primeiro resultado, o qual pode ser achado na seguinte referência (veja [57, Theorem 1.2.12]).

Teorema 1.3.3. *Seja B_R uma bola em $\mathbb{R}^N$ e $L(u) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_{ij} u$ em B_R , para $a_{ij} \in C^0(B_R)$ satisfazendo a condição de elipticidade uniforme. Além disso, assumamos que $u \in L^\infty(B_R) \cap C^2(B_R)$ é uma solução não negativa (no sentido da viscosidade) para*

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{in } B_R,$$

para alguma $f \in L^n(B_R) \cap C^0(B_R)$. Então,

$$\sup_{B_{R/2}} u(x) \leq C \left\{ \inf_{B_{R/2}} u(x) + R \|f\|_{L^n(B_R)} \right\},$$

onde C é uma constante positiva dependendo somente em N, λ e Λ .

O último resultado é uma versão mais geral do resultado anterior.

Teorema 1.3.4. (veja [41, Lemma 1]) *Sejam B_R uma bola em $\mathbb{R}^N$ e $L(u) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_{ij} u$ em B_R , para $a_{ij} \in C^0(B_R)$ satisfazendo a condição de elipticidade uniforme e u não negativa (no sentido da viscosidade). Então, existem constantes $C > 0$ e $\varepsilon_0 \geq N/2$ dependendo em Λ/λ tais que*

$$\sup_{B_{R/2}} u \leq C \left[\inf_{B_{R/2}} u + R^{2-N/q_0} \|f\|_{L^{q_0}(B_R)} \right],$$

onde $q_0 \geq N - \varepsilon_0$.

1.3.2 Estimativas de Schauder para equações quase lineares

Agora, continuamos enunciando resultados referentes às estimativas de Schauder. Para a demonstração deste resultado veja [57, Proposition 2.1.4].

Proposição 1.3.5. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ uma constante e $a_{ij} \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ satisfazendo a condição de elipticidade uniforme. Assumamos que u é uma solução $C^2(\Omega)$ para.*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, \nabla u) u_{ij}(x) = f(x) \quad \text{em } \Omega$$

para $f \in C^0(\Omega)$. Para todo inteiro $m \geq 0$, se $a_{ij}(\cdot, v_1, \dots, v_N) \in C^{m,\alpha}(\Omega)$ para qualquer $v_1, \dots, v_N \in C^{m,\alpha}(\Omega)$ e se $f \in C^{m,\alpha}(\Omega)$, então $u \in C^{m+2,\alpha}(\Omega)$. Em particular, se $a_{ij} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.

Uma versão global da regularidade mais alta também é válida se aplicamos a regularidade global de Schauder. Para mais detalhes, veja [57, Proposition 2.1.5]

Proposição 1.3.6. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ uma constante e $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ satisfazendo a condição de elipticidade uniforme. Assumamos que u é uma solução $C^2(\bar{\Omega})$ para*

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x, \nabla u(x)) u_{ij}(x) = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = \varphi(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

para $f \in C^0(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$. Para qualquer inteiro $m \geq 0$, se $\partial\Omega \in C^{m+2,\alpha}$, $a_{ij}(\cdot, v_1, \dots, v_N) \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ para todo $v_1, \dots, v_N \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$, $f \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$, e $\varphi \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega})$, então $u \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Em particular, se $\partial\Omega \in C^\infty$, $a_{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, e $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

1.4 Métodos variacionais e algumas notações

Nesta parte apresentaremos algumas definições e notações que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

Definição 1.4.1. *Sejam X um espaço vetorial de Banach sobre $\mathbb{R}$ e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Fixadas as constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (com $\alpha < \beta$), definimos os conjuntos*

$$\begin{cases} J^\beta &:= \{u \in X : J(u) \leq \beta\} \\ J_\alpha &:= \{u \in X : J(u) \geq \alpha\} \\ J_\alpha^\beta &:= J_\alpha \cap J^\beta. \end{cases}$$

Além disso, no caso que o operador J seja diferenciável (no sentido de Fréchet), escrevemos

$$K_\alpha = \{u \in X : J(u) = \alpha \text{ e } J'(u) = 0\}.$$

A seguinte definição é importante no desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.4.2. *Sejam V um espaço vetorial de Banach real, $J \in C^1(V, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Diremos que uma sequência $(u_n)_{n \geq 1} \subset V$ satisfaz a condição de **Palais–Smale** ao nível c , (ou por simplicidade é uma sequência $(PS)_c$), se verifica que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J'(u_n) = 0. \quad (1.7)$$

Então, diremos que J satisfaz a condição de **Palais–Smale** a nível c , ou $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência convergente (na norma de V). Se J satisfaz $(PS)_c$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$, simplesmente diremos que J satisfaz (PS) .

Enunciamos a seguir um resultado abstrato fundamental para a demonstração do Teorema 3.1.1. De fato, tal resultado consiste em uma proposição clássica que nos permitirá encontrar pontos críticos de funcionais que verificam a geometria chamada de *passo de montanha*. Para uma demonstração ao leitor interessado, recomendamos ver as referências [3] e [78].

Proposição 1.4.3 (Teorema do Passo da Montanha). *Sejam V um espaço vetorial de Banach sobre os reais e $J \in C^1(V, \mathbb{R})$ um funcional tal que*

$$(i) \quad J(0) = 0;$$

$$(ii) \quad \text{Existem } \rho, \alpha \in (0, \infty) \text{ tais que } \inf_{\|u\|=\rho} J(u) \geq \alpha;$$

$$(iii) \quad \text{Existe um } v \in V \text{ com } \|v\| > \rho \text{ tal que } J(v) \leq 0;$$

$$(iv) \quad J \text{ verifica } (PS)_\beta, \text{ com } \beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)), \text{ onde}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = v\}.$$

Então β é um valor crítico de J .

1.5 Espaços funcionais e imersões de Sobolev

Nossos estudos sobre questões relacionadas à existência e multiplicidade de soluções de (8) será feito sobre o bem conhecido espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto, limitado e com fronteira regular, $p > 1$, $0 < s < 1$ e trabalharemos com a seguinte norma para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dy dx \right)^{1/p}, \quad (1.8)$$

onde denotaremos por $[u]_s^p$, a semi-norma de Gagliardi dada por

$$[u]_{p,s}^p := \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dy dx. \quad (1.9)$$

Devemos destacar que a escolha da norma anterior é devido a relação direta entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o espaço fracionário $X_0^{1,p}(\Omega)$, definido comumente na literatura como sendo

$$X_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : u|_{\Omega} \in W_0^{1,p}(\Omega), u = 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

Focados ao nosso estudo definiremos o que é uma solução no sentido fraco para (8). O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (8) está dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{r} \int_{\Omega} |u|^r dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx.$$

Por conseguinte podemos dar a seguinte definição

Definição 1.5.1 (Solução no sentido fraco). *Diremos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução no sentido fraco para (8) se para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} ((u(x) - u(y))(v(x) - v(y)))}{|x - y|^{N+sp}} \, dy \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} |u|^{r-2} u v \, dx - \int_{\Omega} |u|^{P^*-2} u v \, dx = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Permita-nos lembrar alguns resultados sobre imersões contínuas e compactas de Sobolev necessários para nossos propósitos no Capítulo 3 deste trabalho.

Proposição 1.5.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio aberto, limitado e suave. Então são válidas as seguintes imersões contínuas:*

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^{p^*}(\Omega), & \text{se } p < N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^m(\Omega) \quad \forall m \in [p, \infty), & \text{se } p = N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^\infty(\Omega), & \text{se } p > N. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Além disso, temos as seguintes imersões compactas:

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^m(\Omega) \quad \forall m \in [1, p^*), & \text{se } p < N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset L^m(\Omega) \quad \forall m \in [p, \infty), & \text{se } p = N, \\ W_0^{1,p}(\Omega) &\subset C^0(\overline{\Omega}), & \text{se } p > N. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Para uma prova, veja Corollary 9.14 e o Theorem 9.16 em [25].

Como consequências de (1.11) e (1.12), temos que, para $p < N$ a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^m(\Omega)$ para algum $m \in [1, p^*]$, garante a existência de uma constante $C_m > 0$ tal que

$$\|u\|_m = \|u\|_{L^m(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^m \, dx \right)^{1/m} \leq C_m \|u\|, \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Neste ponto, surge naturalmente a questão de averiguar qual seria a melhor constante (ou constante ótima) para a qual a desigualdade acima é verificada.

No caso $m = p^*$ definimos

$$\mathcal{S} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^p}, \quad (1.13)$$

a qual é conhecida como a *melhor constante para a imersão de Sobolev*.

É um fato bem conhecido que $\mathcal{S}$ é um número positivo. Tal constante será fundamental nos resultados do nosso trabalho no Capítulo 3. Além disso, considerando uma equivalência topológica entre a norma $\|\nabla u\|_p$ e a norma $\|u\|$ dada em (1.8), de fato $\mathcal{S}$ coincide com a melhor constante na desigualdade mista do tipo Sobolev (veja [59, Lemma 2.1]).

A seguir enunciamos um resultado para os espaços $L^m(\Omega)$, com $m \in [1, \infty]$, o qual nos permitirá controlar sequências convergentes de $L^m(\Omega)$ em termos de uma função deste mesmo espaço.

Proposição 1.5.3. *Sejam $m \in [1, \infty]$, $(f_n)_n$ e f_0 em $L^m(\Omega)$ tais que $f_n \rightarrow f_0$ em $L^m(\Omega)$. Então existem uma subsequência $(f_{n_k})_k$ e uma função Lebesgue mensurável $h \in L^m(\Omega)$ tais que:*

- (i) $f_{n_k}(x) \rightarrow f_0(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$;
- (ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. $x \in \Omega$.

Como referencia para a prova, veja o Livro do Brézis [25, Theorem 4.9].

Concluimos esta parte das preliminares enunciando uma desigualdade clássica que será fundamental no Capítulo 3.

Proposição 1.5.4 ([86, Formula 2.2]). Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e $p > 1$, então existem constantes positivas C_p e $\widetilde{C}_p$ tais que

$$|\xi - \eta|^p \leq \begin{cases} C_p(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta), & \text{se } p \geq 2, \\ \widetilde{C}_p [(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta)]^{\frac{p}{2}} (|\xi|^p + |\eta|^p)^{\frac{2-p}{2}}, & \text{se } 1 < p < 2. \end{cases} \quad (1.14)$$

1.6 Índice Cohomológico

Nesta parte, daremos uma breve ideia do *índice de cohomologia de Fadell e Rabinowitz*, o qual será fundamental na prova do Teorema 3.2.2. Devemos ressaltar que a maioria das definições e resultados que daremos a seguir podem ser encontrados em [76, Chapter 2].

Definição 1.6.1 ([76, Section 2.5]). *Seja V um espaço de Banach e denotemos por $\mathcal{F}$ a classe dos subconjuntos de $V \setminus \{0\}$ que são simétricos. Para cada $F \in \mathcal{F}$, seja $\bar{F} = F/\mathbb{Z}_2$ o espaço quociente de F identificando pontos antípodais, e considere*

$$g^* : H^*(\mathbb{RP}^\infty) \longrightarrow H^*(\bar{F})$$

o homomorfismo induzido de Alexander–Spanier entre anéis de cohomologias, onde $\mathbb{RP}^\infty$ é o plano projetivo infinito sobre os reais.

Definimos o $\mathbb{Z}_2$ -índice de cohomologia (denotado por ind) para F como sendo

$$ind(F) := \sup\{k \in \mathbb{N} : g^*(\omega^{k-1}) \neq 0\} \text{ se } F \neq \emptyset, \text{ e } ind(\emptyset) = 0,$$

onde $\omega \in H^1(\mathbb{RP}^\infty)$ é o gerador do anel de polinômios $H^*(\mathbb{RP}^\infty) = \mathbb{Z}_2[\omega]$.

Agora, enunciaremos algumas propriedades para o índice cohomológico, as quais serão essenciais na demonstração do Teorema 3.2.2.

Proposição 1.6.2. *O índice $ind : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $ind(X) = 0$ se e só se $X = \emptyset$;

(ii) Se $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação equivariante (em particular se $X \subseteq Y$), então

$$ind(X) \leq ind(Y)$$

e a igualdade é válida se $X \simeq Y$ (Homotópicamente equivalentes);

(iii) Dados um espaço vetorial normado V e um subconjunto $X \subset V$, simétrico não contendo o zero, então

$$ind(X) \leq dim(V);$$

(iv) Se U é uma vizinhança aberta, limitada e simétrica de zero em um espaço vetorial normado V , então

$$ind(\partial U) = dim(V).$$

Particularmente, $ind(S_r) = dim(V)$, onde S_r é a esfera de raio r ;

(v) Se X é a união disjunta de subconjuntos $U, -U$, então $ind(X) = 1$. Particularmente, se X for finito seu índice é 1;

(vi) Se X é compacto, então $ind(X) < \infty$.

Demonstração. Como uma referência para as provas das propriedades acima, veja [76, Propositions 2.12 and 2.14]. $\square$

Considere $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Enunciaremos a seguir um resultado que nos permitirá aplicar a teoria do índice de cohomologia no estudo da existência de soluções para problemas variacionais elípticos do tipo (8). Antes disso, precisamos da seguinte definição que será necessária para enunciar a Proposição 1.6.4.

Denotemos por $\mathcal{A}$ a classe dos subconjuntos de V que não contém o zero e são simétricos com respeito à origem, identificados por homeomorfismos ímpares.

Definição 1.6.3. *Sejam $0 < r, d \leq \infty$ e denote por Γ^* o grupo formado por todos os homeomorfismos ímpares em V que são a identidade fora de $J^{-1}(0, d)$. Definimos o pseudo-índice (denotado por ind_r^*) de $N \in \mathcal{A}$ relativo a S_r , ind e Γ^* como sendo*

$$ind_r^*(N) := \min_{\theta \in \Gamma^*} (ind(\theta(N) \cap S_r)).$$

Proposição 1.6.4 ([77, Theorem 2.2]). *Sejam A_0, B_0 subconjuntos simétricos de $S_1 = S_1(V)$ (esfera unitária no espaço V) tal que A_0 é compacto em V e B_0 é fechado em V , e*

$$\text{ind}(A_0) \geq k + m, \quad \text{ind}(S_1 \setminus B_0) \leq k$$

para inteiros $k \geq 0$ e $m \geq 1$. Suponhamos que existem $b \in \mathbb{R}$ e $R > r > 0$ tais que

$$\sup_{u \in A} J(u) \leq 0 < \inf_{u \in B} J(u), \quad \sup_{u \in X} J(u) < b,$$

onde $A =: \{Ru : u \in A_0\}$, $B =: \{ru : u \in B_0\}$ e $X =: \{tu : u \in A, t \in [0, 1]\}$. Para $j = k + 1, \dots, k + m$ seja

$$\mathcal{A}^* = \{N \in \mathcal{A} : N \text{ é compacto e } \text{ind}_r^*(N) \geq j\}$$

e seja

$$c_j^* := \inf_{N \in \mathcal{A}^*} \sup_{u \in N} J(u).$$

Então,

$$\inf_{u \in B} J(u) \leq c_{k+1}^* \leq \dots \leq c_{k+m}^* \leq \sup_{u \in X} J(u).$$

Particularmente, $0 < c_j^ < b$. Além disso, se J satisfaz $(PS)_c$ para cada $c \in (0, b)$, então cada c_j^* é um ponto crítico para J , e portanto J tem distintos pares de pontos críticos associados.*

Definição 1.6.5. *Sejam V e W espaços vetoriais de Banach sobre $\mathbb{R}$. Um operador $l : V \rightarrow W$ é dito α -homogêneo, onde $\alpha > 0$, se*

$$l(tu) = t^\alpha l(u) \quad \forall u \in V.$$

Fazendo $t = 0$, temos que $l(0) = 0$.

Um operador contínuo e m -homogêneo l é limitado no seguinte sentido:

Proposição 1.6.6 ([76, Proposition 1.1]). *Se $l \in C(V, W)$ é m -homogêneo, então existe uma constante $C_m > 0$ para a qual*

$$\|l(u)\|_W \leq C_m \|u\|_V^m \quad \forall u \in V. \quad (1.15)$$

Particularmente, l é limitado restrito a conjuntos limitados.

Definição 1.6.7. *Denotemos por V^* o espaço dual de V . Então um operador $l \in C(V, V^*)$ é denotado **operador potencial** se existir um funcional $L \in C^1(V, \mathbb{R})$, denominado de **potencial de l** , tal que*

$$L'(u) = l(u) \quad \forall u \in V.$$

Observe que, ao trocarmos L por $L - L(0)$, podemos assumir, se é necessário, que $L(0) = 0$.

Proposição 1.6.8 ([76, Proposition 1.2]). *Se l é um operador potencial e L é seu potencial, então*

$$L(u) = \int_0^1 \langle l(tu), u \rangle dt \quad u \in V.$$

Particularmente, L é par, se e somente, se l é ímpar. Além disso, se l é m -homogêneo, então

$$L(u) = \frac{1}{m+1} \langle l(u), u \rangle \quad u \in V.$$

Consideramos uma vez mais $J \in C^1(V, \mathbb{R})$ um funcional par. Assumamos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular para J e $J(0) = 0$. Logo

$$\mathcal{N} = \{u \in V : J(u) = c\}$$

é uma variedade completa de classe C^1 . Além disso, o plano tangente para $u \in \mathcal{N}$ é dado por

$$T_u \mathcal{N} = \text{Ker}(J'(u)).$$

Agora, designamos por $\mathcal{F}$ a classe dos subconjuntos simétricos de $\mathcal{N}$. Seja $\Phi \in C^1(V, \mathbb{R})$ um funcional par e $\tilde{\Phi}$ sua restrição a $\mathcal{N}$. Definamos para $b \in \mathbb{R}$ de acordo a Definição 1.4.1

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_b &= \Phi_b \cap \mathcal{N}, \\ \tilde{\Phi}^b &= \Phi^b \cap \mathcal{N}, \\ \tilde{K}_b &= K_b \cap \mathcal{N}, \end{aligned}$$

e para cada inteiro $1 \leq k \leq \dim(V) = d$ defina

$$\mathcal{F}_k := \{N \in \mathcal{F} : \text{ind}(N) \geq k\} \quad e \quad c_k = \inf_{N \in \mathcal{F}_k} \sup_{u \in N} \tilde{\Phi}(u).$$

Observe que a sequência $(c_k)_{k \leq d}$ é crescente e será utilizada para encontrar pontos críticos de funcionais pares restritos a $\mathcal{N}$. Além disso, se $d < \infty$ definimos $c_k = \infty \quad \forall k > d$.

A Proposição seguinte estabelece uma forma de aplicarmos a dita sequência.

Proposição 1.6.9 ([76, Propositions 3.52 and 3.53]). *Suponhamos que Φ seja par.*

- (i) *Se $-\infty < c_k = \dots = c_{k+m-1} = c < \infty$ para algum $m \geq 1$ e $\tilde{\Phi}$ satisfaz $(PS)_c$, então $\text{ind}(\tilde{K}_c) \geq m$. Particularmente, se $-\infty < c_k < \dots < c_{k+m-1} < \infty$ e $\tilde{\Phi}$ satisfaz $(PS)_c$ para $c = c_k, \dots, c_{k+m-1}$, então cada $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico e $\tilde{\Phi}$ tem m pares distintos de pontos críticos.*
- (ii) *Se $\dim(V) = \infty$ e $\tilde{\Phi}$ satisfaz (PS) e $-\infty < c_k < \infty$ para todo k suficientemente grande, então $c_k \rightarrow \infty$.*

(iii) Se c_k é finito e $\tilde{\Phi}$ satisfaz $(PS)_{c_k}$, então

$$\text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Phi}_{c_k}) < k \leq \text{ind}(\tilde{\Phi}_{c_k}). \quad (1.16)$$

(iv) Se $c_k < c_{k+1}$ são finitos e $\tilde{\Phi}$ satisfaz $(PS)_c$ para $c = c_k, c_{k+1}$, então

$$\text{ind}(\tilde{\Phi}^{c_k}) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Phi}^a) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Phi}_{c_{k+1}}) = k \quad \forall a \in (c_k, c_{k+1}).$$

1.7 Genus de Krasnoselskii

Nesta subseção daremos uma breve introdução à teoria de **genus de Krasnoselskii** e resultados necessários para a prova do Teorema 3.1.1.

Definição 1.7.1 (Genus de Krasnoselskii). *Seja V um espaço vetorial de Banach sobre $\mathbb{R}$ e denote por Γ a classe de todos os subconjuntos fechados (em V) que não contém o zero e são simétricos com respeito à origem, identificados por homeomorfismos ímpares. Para $A \in \Gamma$ definimos o genus de A (denotado por $\gamma(A) = n$) como o menor inteiro não negativo n tal que existe $\psi \in C^0(A, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Se não existir tal inteiro, definimos $\gamma(A) = \infty$ para A não-vazio e $\gamma(\emptyset) = 0$.*

Enunciamos algumas propriedades do genus de Krasnoselskii.

Proposição 1.7.2 ([3, Lemma 1.2 and Proposition 7.5] e [78, Example 7.2]). *Sejam $A, B \in \Gamma$. Então:*

- (i) *Se existe $\phi \in C^0(A, B)$ com ϕ ímpar, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$. Em particular, se $A \subseteq B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*
- (ii) *Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{B \setminus A}) \geq \gamma(B) - \gamma(A)$;*
- (iii) *Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe um $\delta > 0$ tal que, o conjunto*

$$\mathcal{N}_\delta(A) = \{w \in W : \|w - A\| \leq \delta\}$$

está em $\mathcal{A}$ e $\gamma(A) = \gamma(\mathcal{N}_\delta(A))$;

- (iv) *Se A é homeomorfo por aplicação ímpar ao bordo de uma vizinhança simétrica e aberta do zero em $\mathbb{R}^n$, então $\gamma(A) = n$. Particularmente, $\gamma(S^{n-1}) = n$, onde S^{n-1} é a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$;*
- (v) *Se $B \cap (-B) = \emptyset$, então $B \cup (-B) \in \mathcal{A}$ e $\gamma(B \cup (-B)) = 1$. Particularmente, se A for finito $\gamma(A) = 1$;*

(vi) Se $\gamma(A) > 1$, então A tem infinitos pontos.

Utilizando a notação dada na Sub-seção 1.4, enunciaremos agora um resultado geral na teoria variacional, o qual é fundamental para a prova do Teorema 3.1.1 *a posteriori*.

Proposição 1.7.3 (Lema de deformação – [76, Lemma 3.46] e [3, Lemma 1.3]). *Suponha que $J \in C^1(V, \mathbb{R})$ satisfaz (PS), sejam $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathfrak{N}$ qualquer vizinhança de K_c . Então, existem $\eta \in C^0([0, 1] \times V, V)$, com $\eta_t(x) = \eta(t, x)$, e constantes $\varepsilon > 0$, $|c| > d_1 > 0$ tais que:*

- (i) $\eta_0 = Id_V$;
- (ii) $\eta_t(u) = u$ para todo $u \notin J^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ e $t \in [0, 1]$;
- (iii) η_t é um homeomorfismo para cada $t \in [0, 1]$;
- (iv) $J(\eta_t(u)) \leq J(u)$ para todo $u \in V$ e $t \in [0, 1]$;
- (v) $\eta_1(J^{c+d_1} \setminus \mathfrak{N}) \subseteq J^{c-d_1}$;
- (vi) Se $K_c = \emptyset$, então $\eta_1(J^{c+d_1}) \subseteq J^{c-d_1}$;
- (vii) Se J é par, então η_t é ímpar para todo $t \in [0, 1]$.

Concluimos este capítulo fornecendo uma versão simétrica da Proposição 1.4.3, i.e., a versão simétrica do Teorema do Passo de Montanha.

Proposição 1.7.4 (Teorema do Passo de Montanha simétrico – [60]). *Sejam E um espaço de dimensão infinita e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$. Denotemos por Γ_n a família dos subconjuntos simétricos e fechados A de E , com $\gamma(A) \geq n$ e suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- (J₁) J é par, limitado por baixo, $J(0) = 0$ e J verifica $(PS)_c$, para cada $c < \bar{c}$, com $\bar{c} > 0$ apropriado;
- (J₂) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $A_n \in \Gamma_n$ tal que $\sup_{u \in A_n} J(u) < 0$.

Então valem ou (i) ou (ii) abaixo:

(i) Existe uma sequência $(u_n)_n$ tal que

$$J'(u_n) = 0, \quad J(u_n) < 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

(ii) *Existem duas sequências $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que*

$$J'(u_n) = 0, \quad J(u_n) = 0, \quad u_n \neq 0, \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

$$J'(v_n) = 0, \quad J(v_n) < 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = 0,$$

e $(v_n)_n$ converge a um limite não-nulo.

2 Problema singularmente perturbado

Nesta seção estudaremos o problema singularmente perturbado descrito em (1). Nosso principal objetivo será estabelecer estimativas de regularidade Lipschitz (uniforme com relação ao parâmetro ε (resp. $\delta > 0$)), bem como provar algumas propriedades geométricas das soluções e de suas fronteiras livres. No final deste capítulo, obteremos, após passagem ao limite no problema (1), um problema de fronteira livre de uma-fase do tipo Bernoulli (cf. [29]). Destacamos que as estimativas obtidas na primeira parte desta capítulo, são estáveis por passagem ao limite.

2.1 Estimativas de regularidade Lipschitz

Iniciaremos esta seção estudando estimativas uniformes para o gradiente das soluções de (1), as quais particularmente fornecerão compacidade na topologia da convergência local-uniforme.

Teorema 2.1.1 (Regularidade Lipschitz local). *Seja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ uma família de soluções para (1). Dado $\Omega' \Subset \Omega$ (subconjunto compactamente contido), existe uma constante $C > 0$ que depende somente de parâmetros universais e de Ω' , mas independente de $\varepsilon > 0$, tal que*

$$\|Du_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C.$$

Além disso, se $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ é uniformemente limitada, então esta família é pre-compacta na topologia Lipschitz.

Portanto, para demonstrarmos o Teorema 2.1.1, precisamos do seguinte Lema técnico inspirado no método de Bernstein descrito na introdução.

Lema 2.1.2. *Seja $u_{\varepsilon,\delta}$ uma solução de viscosidade para (1.3). Então, existe uma constante $L(\text{universal}) > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ e $0 < \varepsilon < 1$*

$$|Du_{\varepsilon,\delta}(x)| \leq L \left(1 + \frac{1}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \right) \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Demonstração. Fixado $0 < \varepsilon < 1$, para todo δ , considere $u_{\varepsilon,\delta} = u^\delta$ (para simplificar a notação) a solução suave para (1.3) (a existência de tal solução é assegurada por [61]). Dividiremos a demonstração do resultado em duas partes:

(1) Se $x \in \{u^\delta \geq \varepsilon\} \cap \Omega$.

Neste caso,

$$\zeta_\varepsilon(u^\delta) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x),\delta} (Du^\delta) u_{ij}^\delta = f_\varepsilon(x),$$

então pela teoria da regularidade até o bordo para EDPs uniformemente elípticas (veja [46, Section 2.6] e [61]) concluímos que

$$|Du^\delta(x)| \leq C(\text{universal}) \leq C \left(1 + \frac{1}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \right),$$

onde $C > 0$ é independente de ε e δ .

(2) Se $x \in \{u^\delta \leq \varepsilon\} \cap \Omega$.

Seja $v(x) = (\|Du^\delta(x)\|^2 + \delta^2)^{1/2}$ e considere a função auxiliar

$$w(x) = \xi(x)v(x) + \mu(u^\delta(x))^2,$$

onde $\mu > 0$ é uma constante que determinaremos *a posteriori*, $\xi \in C^0(\overline{\Omega}, [0, 1])$ e $\xi = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Seja $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que w atinge seu máximo neste ponto. Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\|Du^\delta(x_0)\| \geq 1,$$

pois, se $\|Du^\delta(x_0)\| < 1$, então para $1 < \delta \leq 1/2$

$$\begin{aligned} \|Du^\delta(x)\| &\leq v(x) \leq w(x) \leq w(x_0) \\ &= \xi(x_0)v(x_0) + \mu(u^\delta(x_0))^2 \\ &\leq \sqrt{1 + \delta^2} + \varepsilon^2 \mu \\ &< 2 + \mu. \end{aligned}$$

Primeiramente, suporemos que $x_0 \notin \partial\Omega$, então $D^2(u^\delta)(x_0)$ é uma matriz não-positiva definida e portanto obtemos que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) w_{ij}(x_0) \leq 0.$$

Então, para tal x_0 temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) w_{ij}(x_0) \\
&= -\xi(x_0) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) v_{ij}(x_0) - v(x_0) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) \xi_{ij}(x_0) \\
&\quad - 2\mu u^\delta(x_0) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) u_{ij}^\delta(x_0) - 2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) \xi_j(x_0) v_i(x_0) \\
&\quad - 2\mu \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) u_i^\delta(x_0) u_j^\delta(x_0). \tag{2.2}
\end{aligned}$$

A seguir estimamos cada termo separadamente para obter a desigualdade apropriada. Para o terceiro termo obtemos que

$$-2\mu u^\delta(x_0) \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) u_{ij}^\delta(x_0) \right) = -2\mu u^\delta(x_0) \zeta_\varepsilon(u^\delta(x_0)) - 2\mu f_\varepsilon(x_0) \leq 0 \tag{2.3}$$

pois u^δ é uma solução clássica para (1.3).

Sigamos estimando o primeiro termo notando que

$$v_{ij}(x_0) = \frac{1}{v(x_0)} \sum_{k=1}^N u_{ik}^\delta(x_0) u_{jk}^\delta(x_0) + \frac{1}{v(x_0)} \sum_{k=1}^N u_k^\delta(x_0) u_{ijk}^\delta(x_0) - \frac{1}{v^2(x_0)} \sum_{k=1}^N \left(u_k^\delta(x_0) u_{ik}^\delta(x_0) \right) \sum_{l=1}^N \left(u_l^\delta(x_0) u_{jl}^\delta(x_0) \right),$$

e por um cálculo direto

$$\begin{aligned}
- \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) v_{ij}(x_0) &= -\frac{1}{v(x_0)} \frac{1}{p_\varepsilon(x_0)} \sum_{i,k=1}^N (u_{ik}^\delta(x_0))^2 - \frac{1}{v^2(x_0)} \frac{p_\varepsilon(x_0) - 2}{p_\varepsilon(x_0)} \left(\sum_{i,j=1}^N u_j^\delta(x_0) u_i^\delta(x_0) u_{ij}^\delta(x_0) \right)^2 \\
&\quad + \frac{p_\varepsilon(x_0) - 1}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{1}{v^3(x_0)} \|Dv(x_0)\|^2 v^2(x_0).
\end{aligned}$$

Agora, notemos que

$$\frac{1}{p_\varepsilon(x_0)} \sum_{i,k=1}^N (u_{ik}^\delta(x_0))^2 + \frac{p_\varepsilon(x_0) - 2}{p_\varepsilon(x_0)} \left(\sum_{i,j=1}^N u_j^\delta(x_0) u_i^\delta(x_0) u_{ij}^\delta(x_0) \right)^2 \geq \lambda \sum_{i,k=1}^N (u_{ik}^\delta(x_0))^2 \geq 0,$$

e assim temos a seguinte estimativa

$$-\xi(x_0) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) v_{ij}(x_0) \leq \xi(x_0) \frac{p_\varepsilon(x_0) - 1}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{\|Dv(x_0)\|^2}{v(x_0)}. \tag{2.4}$$

Agora, forneceremos uma estimativa para o quarto termo observando que em x_0

$$w_i(x_0) = \xi_i(x_0) v(x_0) + \xi(x_0) v_i(x_0) + 2\mu u^\delta(x_0) u_i^\delta(x_0) = 0,$$

e isto implica que

$$\begin{aligned} \xi(x_0) \frac{\|Dv(x_0)\|^2}{v(x_0)} &\leq \frac{v(x_0)}{\xi(x_0)} (\|D\xi(x_0)\|^2 + 4\mu|u^\delta(x_0)|\|D\xi(x_0)\| + 4(\mu u^\delta(x_0))^2) \\ &\leq 6 \frac{v(x_0)}{\xi(x_0)} (\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) \xi_j(x_0) v_i(x_0) &= -\frac{2}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{1}{\xi(x_0)} \sum_{i=1}^N \xi_i(x_0) (v_i(x_0) \xi(x_0)) \\ &\quad - 2 \frac{p_\varepsilon(x_0) - 2}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{1}{\xi(x_0)} \sum_{i,j=1}^N \frac{u_i^\delta(x_0) u_j^\delta(x_0)}{v^2(x_0)} \xi_j(x_0) (\xi(x_0) v_i(x_0)) \\ &\leq 4 \frac{1 + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{v(x_0)}{\xi(x_0)} (\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para o segundo termo em (2.2) temos que

$$\begin{aligned} -v(x_0) \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) \xi_{ij}(x_0) &\leq \frac{N}{p_\varepsilon(x_0)} v(x_0) \|D^2\xi(x_0)\| + v(x_0) \frac{p_\varepsilon(x_0) - 2}{p_\varepsilon(x_0)} \\ &\leq \eta \mu v^2(x_0) + \frac{1}{4\eta\mu} \left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\| \right)^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde utilizamos na última linha a desigualdade de Young com $\eta > 0$.

Usando as desigualdades (2.3)-(2.7) e (2.2) obtemos para o quinto termo a seguinte expressão

$$\begin{aligned} 2\mu \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{p_\varepsilon(x_0),\delta} (Du^\delta(x_0)) u_i^\delta(x_0) u_j^\delta(x_0) &= 2\mu \left(\frac{1}{p_\varepsilon(x_0)} + \frac{p_\varepsilon(x_0) - 2}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{\|Du^\delta(x_0)\|^2}{v^2(x_0)} \right) \\ &\leq \frac{6v(x_0)}{\xi(x_0)} \frac{p_\varepsilon(x_0) - 1}{p_\varepsilon(x_0)} (\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2) + \mu\eta v^2(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{4\eta\mu} \left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\| \right)^2 \\ &\quad + 4 \frac{1 + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{v}{\xi}(x_0) (\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2) \\ &\leq 12 \frac{v}{\xi}(x_0) (\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2) \\ &\quad + \mu\eta v^2(x_0) + \left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\| \right)^2. \end{aligned}$$

Agora, dado que $\|Du^\delta(x_0)\| \geq 1$, podemos mostrar que

$$2\mu \|Du^\delta(x_0)\|^2 \left(\frac{1}{p_\varepsilon(x_0)} + \frac{p_\varepsilon(x_0) - 2}{p_\varepsilon(x_0)} \frac{\|Du^\delta(x_0)\|^2}{v^2(x_0)} \right) \geq \frac{8}{9} \frac{p_\varepsilon(x_0) - 1}{p_\varepsilon(x_0)} \mu v^2(x_0),$$

e portanto temos

$$\begin{aligned} \frac{8}{9} \frac{p_\varepsilon(x_0) - 1}{p_\varepsilon(x_0)} \mu v^2(x_0) &\leq 12 \frac{v}{\xi}(x_0) (\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2) + \frac{\left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\| \right)^2}{4\eta\mu} \\ &\leq \frac{36}{\eta\mu} \frac{(\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2)^2}{\xi^2(x_0)} + 2\eta\mu v^2(x_0) + \frac{1}{4\eta\mu} \left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\| \right)^2, \end{aligned}$$

e isso implica que

$$\left(\frac{8 p_\varepsilon(x_0) - 1}{9 p_\varepsilon(x_0)} - 2\eta \right) \mu v^2(x_0) \xi^2(x_0) \leq \frac{36}{\eta \mu} \left(\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2 \right)^2 + \frac{1}{4\eta \mu} \left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\|^2 \right)^2.$$

Agora, dado que $1 < p^- \leq p_\varepsilon(x) \leq p^+ < \infty$ podemos fixar $\eta > 0$ suficientemente pequeno e encontrar uma constante $C_1(p^-, p^+, \eta) > 0$ tal que

$$C_1 \leq \left(\frac{8 p_\varepsilon(x_0) - 1}{9 p_\varepsilon(x_0)} - 2\eta \right).$$

Além disso, para algum $C_2(C_1) > 0$ concluimos que

$$\begin{aligned} (v^2 \xi^2)(x_0) &\leq \frac{C_2}{\mu^2} \left(\left(\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2 \right)^2 + \xi^2(x_0) \left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\|^2 \right)^2 \right) \\ &\leq \left(\left(\|D\xi(x_0)\|^2 + (\mu u^\delta(x_0))^2 \right)^2 + \xi(x_0) \left(\frac{N + |p_\varepsilon(x_0) - 2|}{p_\varepsilon(x_0)} \|D^2\xi(x_0)\|^2 \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Considere agora $x \in \Omega$. Escolhamos ξ de forma que $\xi(x_0) = 1$ e

$$\max\{\|D^2\xi\|, \|D\xi\|_\infty\} \leq \frac{1}{\text{dist}(x, \partial\Omega)}.$$

Então, pela desigualdade (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \|Du^\delta(x)\| &\leq w(x) \leq w(x_0) = v(x_0) + \mu(u^\delta(x_0))^2 \\ &\leq \frac{C}{\mu} (\|D\xi(x_0)\|^2 + \mu^2 \|u^\delta(x_0)\|_\infty + \|D^2\xi(x_0)\|_\infty) + \mu(u^\delta(x_0))^2 \\ &\leq \frac{C}{\mu} \left(\frac{1}{(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2} + \frac{1}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \right) + (C + 1)\mu \|u^\delta\|_\infty^2 \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Então, existe $L > 0$ tal que

$$\|Du^\delta(x)\| \leq L \left(\frac{1}{(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2} + \frac{1}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} + 1 \right) \leq 2L \left(1 + \frac{1}{(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2} \right). \quad (2.9)$$

Finalmente, quando o ponto máximo $x_0 \in \partial\Omega$, então

$$\|Du^\delta(x_0)\| \leq w(x_0) = \mu(u^\delta(x_0))^2 \leq \mu \|g\|_\infty^2 \leq L' \left(1 + \frac{1}{(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2} \right),$$

para algum $L' > 0$.

□

Agora estamos em uma posição em demonstrar o Teorema 2.1.1.

Prova do Teorema 2.1.1. Seja $\Omega' \subseteq \Omega$. Note que as funções aproximadas $u_{\varepsilon,\delta}$ convergem local e uniformemente para a solução viscosa u_ε de (1) (veja [37]), então pelo Lema 2.1.2 existe $C' > 0$ tal que para qualquer $x \in \Omega'$ obtemos que

$$\|Du_\varepsilon(x)\| \leq C' \left(1 + \frac{1}{(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2} \right),$$

e isto implica a desigualdade desejada:

$$\|Du_\varepsilon(x)\| \leq C' \left(1 + \frac{1}{(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2} \right) \leq C' \left(1 + \frac{1}{(\text{dist}(\Omega', \partial\Omega))^2} \right) =: C.$$

□

2.2 Propriedade geométrica de não-degenerescência

Conforme explicado anteriormente na introdução, uma das principais dificuldades em trabalhar com modelos singularmente perturbados degenerados é evitar que as soluções degenerem ao longo de suas superfícies de transição. Por esta razão, uma forma para superar tal obstáculo será a implementação de uma estimativa de não degenerescência geométrica.

Nesta segunda parte do capítulo, mostramos que as soluções crescem linearmente através das superfícies ao nível ε , dentro de $\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. A prova será baseada na construção de uma função barreira apropriada. Para esse fim, estudaremos modelos elípticos degenerados e não-omogêneos, mais precisamente, modelos do tipo:

$$\Delta_{p(x)}^N w(x) = \zeta(x, w) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad (2.10)$$

onde o termo de reação satisfaz a hipótese de não-degenerescência :

$$\mathcal{J}^* := \inf_{\mathbb{R}^N \times [t_0, T_0]} \zeta(x, t) > 0, \quad (2.11)$$

Proposição 2.2.1 (Função Barreira). *Sejam $0 < t_0 < T_0 < 1$ fixos. Assuma que $0 \in \Omega$. Dado $0 < \eta < \text{dist}(0, \partial\Omega)$, existe uma função Θ_ε (radialmente simétrica) e constantes universais $\epsilon_0, \kappa_0 > 0$ tal que, se $\varepsilon < \epsilon_0$, então temos que*

- (1) $\Theta_\varepsilon \in C_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$;
- (2) $\Theta_\varepsilon = t_0\varepsilon$ in $B_{\eta/4}$;
- (3) $\Theta_\varepsilon \geq \kappa_0\eta$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_\eta$;
- (4) Θ_ε satisfaz $\Delta_{p_\varepsilon(x)}^N \Theta_\varepsilon \leq \zeta_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) + f_\varepsilon$ em $\mathbb{R}^N$ no sentido da viscosidade.

Demonstração. Vamos estudar o caso $\varepsilon = 1$, porque a função radialmente simétrica Θ_ε pode ser construída a partir de Θ_1 (via escalonamento).

Sejam $\alpha, A_0 > 0$ a serem escolhidos (*a posteriori*) e $L \geq L_0 = \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}}$. Consideremos então

$$\Theta_L(x) := \begin{cases} t_0 & \text{for } 0 \leq \|x\| < L; \\ A_0 (\|x\| - L)^2 + t_0 & \text{for } L \leq \|x\| < L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}}; \\ \psi(L) - \frac{\phi(L)}{\|x\|^\alpha} & \text{for } \|x\| \geq L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}} \end{cases} \quad (2.12)$$

onde estamos considerando

$$\begin{cases} \phi(L) := \frac{2}{\alpha} \sqrt{(T_0 - t_0)A_0} \left(L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}} \right)^{1+\alpha} \\ \psi(L) := T_0 + \phi(L) \left(L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}} \right)^{-\alpha}, \end{cases} \quad (2.13)$$

Observe que temos pela definição que $\Theta_L \in C_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Por esta razão, vamos calcular as segundas derivadas de Θ_L q.t.p.. Portanto,

1. Para $0 \leq \|x\| < L$

$$\frac{1}{p_\varepsilon(x)} \Delta \Theta_L(x) + \frac{p_\varepsilon(x) - 2}{p_\varepsilon(x)} \lambda_{\max, \min}(D^2 \Theta_L)(x) = 0 \leq \zeta(\Theta_L) + f_1(x).$$

2. Para $L \leq \|x\| < L + L_0$. Neste caso

$$\begin{aligned} D_i \Theta_L(x) &= 2A_0 \frac{(\|x\| - L)}{\|x\|} x_i \\ D_{ij} \Theta_L(x) &= 2A_0 \left[\left(\frac{1}{\|x\|^2} - \frac{\|x\| - L}{\|x\|^3} \right) x_i x_j + \frac{\|x\| - L}{\|x\|} \delta_{ij} \right] \text{ e } D^2 \Theta_L(x) \leq 4A_0 \text{Id}_N. \end{aligned}$$

Além disso, note que se $\|x\| = L$, então $D\Theta_L(x) = 0$ e para A_0 suficientemente pequeno

$$\frac{1}{p_\varepsilon(x)} \Delta \Theta_L(x) + \frac{p_\varepsilon(x) - 2}{p_\varepsilon(x)} \lambda_{\max, \min}(D^2 \Theta_L)(x) \leq 2A_0 < \inf_{[t_0, T_0]} \zeta \leq \zeta(\Theta_L(x)).$$

Quando $L < \|x\| < L + L_0$ obtemos $\Delta_\infty^N \Theta_L(x) = 2A_0$ e para A_0 suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} \Delta_{p_\varepsilon(x)}^N \Theta_L(x) &\leq \frac{4A_0 N}{p_\varepsilon(x)} + \frac{2(p_\varepsilon(x) - 2)}{p_\varepsilon(x)} A_0 \leq A_0 \left(\frac{4N}{p^-} + 2 \right) \\ &\leq \inf_{[t_0, T_0]} \zeta \\ &\leq \zeta(\Theta_L(x)). \end{aligned}$$

3. Por fim, para $\|x\| \geq L + L_0$. Calculando diretamente temos que

$$\begin{aligned} D_i \Theta_L(x) &= \alpha \phi(L) x_i \|x\|^{-(\alpha+2)} \\ D_{ij} \Theta_L(x) &= \alpha \phi(L) \|x\|^{-(\alpha+2)} \left(-(\alpha+2) \|x\|^{-2} x_i x_j + \delta_{ij} \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta_\infty^N \Theta_L(x) &= -\alpha(\alpha+1) \|x\|^{-(\alpha+2)} \text{ e} \\ \Delta_{p_\varepsilon(x)}^N \Theta_L(x) &= \alpha \phi(L) \|x\|^{-(\alpha+2)} \left(\frac{N - \alpha - 2}{p_\varepsilon(x)} + \frac{p_\varepsilon(x) - 2}{p_\varepsilon(x)} (-\alpha - 1) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Logo, escolhemos $\alpha > \max \left\{ \sup_\Omega \left\{ \frac{N - p_\varepsilon(x)}{p_\varepsilon(x) - 1} \right\}, 0 \right\}$ para obter de (2.14) que

$$\Delta_{p_\varepsilon(x)}^N \Theta_L(x) = \alpha \phi(L) \|x\|^{-(\alpha+2)} \left(\frac{N - \alpha - 2}{p_\varepsilon(x)} + \frac{p_\varepsilon(x) - 2}{p_\varepsilon(x)} (-\alpha - 1) \right) \leq 0 \leq \zeta(\Theta_L(x)).$$

Para finalizarmos a prova, mostraremos que existe uma constante universal $\kappa_0 > 0$ tal que

$$\Theta_L(x) \geq 4\kappa_0 L \quad \text{para} \quad \|x\| \geq 4L. \quad (2.15)$$

De fato, utilizando (2.13) temos que

$$\|x\| \geq 4L \geq 2(L + L_0) = \left(\frac{\phi(L)}{\psi(L) - T_0} \right)^{1/\alpha}$$

e assim

$$\Theta_L(x) \geq \psi(L) - \psi(L) \|x\|^{-\alpha} \geq \psi(L) - 2^{-\alpha} (\psi(L) - T_0) > \frac{1}{2^\alpha} (\psi(L) - T_0),$$

para $\alpha > 0$ apropriado. Portanto, utilizando (2.13) temos a conclusão desejada para κ_0 dependendo de N , α e $T_0 - t_0$ dado por

$$\kappa_0 := \frac{1}{\alpha 2^{1+\alpha}} \sqrt{A_0(T_0 - t_0)}.$$

Para o caso geral, tomemos

$$\eta = \frac{1}{3} d_\varepsilon \quad \text{e} \quad \epsilon_0 = \frac{\eta}{4L_0},$$

e defina

$$\Theta_\varepsilon(x) = \varepsilon \cdot \Theta_{\frac{\eta}{4\varepsilon}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right),$$

onde $d_\varepsilon := \text{dist}(0, \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\})$. □

A fim de estabelecermos cotas inferiores no crescimento das soluções para (1) dentro do conjunto $\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$, adotaremos a estratégia de considerar versões apropriadas da barreira Θ_L . Portanto, enunciamos e demonstramos o principal resultado desta subseção:

Teorema 2.2.2 (Crescimento linear). *Sejam $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ as soluções do tipo Perron para (1). Existe $c = c(\text{parâmetros universais}) > 0$ tal que, para $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$ e $0 < \varepsilon \ll d_\varepsilon(x_0) \ll 1$, temos a seguinte estimativa:*

$$u_\varepsilon(x_0) \geq c \cdot d_\varepsilon(x_0).$$

Demonstração. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. Agora, considere $\eta := \frac{d_\varepsilon(0)}{3}$. Seja $\Theta_\varepsilon(x)$ a função radialmente simétrica dada na Proposição 2.2.1. Mostraremos que existe um $z_0 \in \partial B_\eta$ tal que

$$\Theta_\varepsilon(z_0) \leq u_\varepsilon(z_0) \quad (2.16)$$

De fato, se assumimos por contradição que $\Theta_\varepsilon > u_\varepsilon$ sobre ∂B_η , então

$$v_\varepsilon(x) := \min\{\Theta_\varepsilon(x), u_\varepsilon(x)\}$$

seria uma super-solução para (1). Note que, v_ε está estritamente abaixo de u_ε , pois $\Theta_\varepsilon(0) = t_0\varepsilon < u_\varepsilon(0)$, o que contradiz a minimalidade de u_ε .

Por outro lado, graças a Proposição 2.2.1 (Item (3)), obtemos que

$$\kappa_0\eta \leq \Theta_\varepsilon(z_0) \leq u_\varepsilon(z_0) \leq \sup_{\overline{B_\eta}} u_\varepsilon. \quad (2.17)$$

Notemos agora que, $\overline{B_{2\eta}}$ é um subconjunto compacto $\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega$ e para qualquer $x \in \overline{B_{2\eta}}$ existe

$n_x \in \mathbb{N}$ tal que $u_\varepsilon(x) > \varepsilon + n_x^{-1}$. Pela convergência local-uniforme, existe um $r_x > 0$ e $B_{r_x}(x) \subset \{u_\varepsilon(x) > \varepsilon + n_x^{-1}\}$, tal que

$$u_{\varepsilon,\delta} \rightarrow u_\varepsilon \quad \text{uniformemente em } B_{r_x}(x).$$

Então, obtemos a existência de algum $\delta_x > 0$ para os quais

$$u_{\varepsilon,\delta} > \varepsilon \quad \text{em } B_{r_x}(x) \quad \forall \delta \leq \delta_x.$$

Usando que $\overline{B_{2\eta}}$ é compacta, podemos encontrar sequências finitas $x_1, \dots, x_m \in \overline{B_{2\eta}}$, $r_{x_1}, \dots, r_{x_m} > 0$ e $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_m} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \overline{B_{2\eta}} &\subset \bigcup_{i=1}^m B_{r_{x_i}}(x_i) \quad \text{e} \\ u_{\varepsilon,\delta} &> \varepsilon \quad \text{em } B_{r_{x_i}}(x_i) \quad \forall \delta \leq \delta_{x_i}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\delta_0 = \min\{\delta_{x_i} \mid 1 \leq i \leq m\}$, para qualquer $\delta \leq \delta_0$, temos que $u_{\varepsilon,\delta} > \varepsilon$ em $B_{2\eta}$ e assim

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{p_\varepsilon(x),\delta} (Du_{\varepsilon,\delta})(u_{\varepsilon,\delta})_{ij} = f_\varepsilon(x) \quad \text{em } B_{2\eta} \quad \forall \delta \leq \delta_0.$$

Portanto, pela desigualdade de Harnack (veja [46]), obtemos que

$$\sup_{B_\eta} u_{\varepsilon,\delta} \leq C(N, \lambda, \Lambda) \left(\inf_{B_\eta} u_{\varepsilon,\delta} + \eta^2 \|f_\varepsilon\|_\infty \right) \quad \forall \delta \leq \delta_0. \quad (2.18)$$

Agora, a convergência uniforme $u_{\varepsilon,\delta} \rightarrow u_\varepsilon$ em B_η e (2.18) implicam que

$$\sup_{B_\eta} u_\varepsilon \leq C(N, \lambda, \Lambda) \left(\inf_{B_\eta} u_\varepsilon + \eta^2 \|f_\varepsilon\|_\infty \right). \quad (2.19)$$

Logo, pelas sentenças (2.17) e (2.19) temos que

$$Cu_\varepsilon(0) \geq \kappa_0 \eta - C\eta^2 = C\eta(\kappa_0 - \eta).$$

Finalmente, escolhendo $\eta > 0$ suficiente pequeno concluímos que

$$u_\varepsilon(0) \geq C\eta = cd_\varepsilon(0),$$

para $c > 0$ (independente de ε). □

2.3 Algumas implicações dos Teoremas 2.1.1 e 2.2.2

Nesta parte do capítulo, discutimos algumas implicações do controle preciso para as soluções de (1), que seguirão do estabelecido nas seções anteriores. Primeiro obtemos um controle total de u_ε em termos de d_ε .

Corolário 2.3.1. *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante $C(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$ tal que, para todo $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$ e $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}d_\varepsilon(x_0)$, é válido que*

$$C^{-1}d_\varepsilon(x_0) \leq u_\varepsilon(x_0) \leq C d_\varepsilon(x_0). \quad (2.20)$$

Demonstração. Tomemos $z_0 \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$, tal que $\|z_0 - x_0\| = d_\varepsilon(x_0)$. Portanto, segue do Teorema 2.1.1,

$$u^\varepsilon(x_0) \leq C_0 d_\varepsilon(x_0) + u_\varepsilon(z_0) \leq (C_0 + 1) d_\varepsilon(x_0).$$

Além disso, a primeira desigualdade em (2.20) é consequência do Teorema 2.2.2. □

A seguir provaremos que as soluções do tipo Perron para (1) são fortemente não-degeneradas próximas aos ε -níveis. Isso significa que o $\sup_{B_\rho(x_0)} u_\varepsilon$ (para $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$) é comparável a ρ . Esta é uma informação importante sobre a taxa do crescimento de u_ε longe das ε -superfícies. A prova é, até certo ponto, um escólio da prova do Teorema (2.2.2).

Teorema 2.3.2 (Não-degenerescência forte). *Dado $\Omega' \subseteq \Omega$, existe uma constante positiva $c(\text{universal})$ tal que, para $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$ e $\varepsilon \ll \rho \ll 1$, é válido que*

$$c \cdot \rho \leq \sup_{B_\rho(x_0)} u_\varepsilon(x) \leq c^{-1} \cdot (\rho + u_\varepsilon(x_0)).$$

Demonstração. Em primeiro lugar, a estimativa por cima segue diretamente da regularidade Lipschitz (Teorema 2.1.1). Agora, como no Teorema 2.2.2, tomamos $\Theta_\varepsilon(x) = \varepsilon \Theta_{\frac{\rho}{4\varepsilon}}(x)$. Portanto,

$$u_\varepsilon(z_0) > \Theta_\varepsilon(z_0),$$

para algum ponto $z_0 \in \partial B_\rho(x_0)$. Por fim, notemos que

$$\sup_{\overline{B_\rho(x_0)}} u_\varepsilon(x) \geq u_\varepsilon(z) > \Theta_\varepsilon(z_0) \geq \kappa_0 \cdot \rho.$$

□

Corolário 2.3.3. *Dado $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$, $\varepsilon \ll \rho$ e $\rho \ll 1$ suficientemente pequeno (de uma forma universal), existe uma constante $0 < c_0(\text{universal}) < 1$ tal que*

$$\mathcal{L}^N(B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon\}) \geq c_0 \cdot \mathcal{L}^N(B_\rho(x_0))$$

onde $\mathcal{L}^N(S)$ denota a medida de Lebesgue do conjunto $S \subset \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Segue da não-degenerescência forte (Teorema 2.3.2) que existe um $y_0 \in B_\rho(x_0)$ tal que

$$u_\varepsilon(y_0) \geq c_0 \rho.$$

Da regularidade Lipschitz (Teorema 2.1.1), para $z_0 \in B_{\kappa\rho}(y_0)$, obtemos

$$u_\varepsilon(z_0) + C\kappa\rho \geq u_\varepsilon(y_0).$$

Assim, pelas estimativas prévias, é possível escolher $0 < \kappa \ll 1$ pequeno (de forma universal) tal que

$$z \in B_{\kappa\rho}(y_0) \cap B_\rho(x_0) \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(z) > \varepsilon.$$

Finalmente, existe uma porção de $B_\rho(x_0)$ com volume da ordem $\sim \rho^N$ dentro de $\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. Assim, nós verificamos que

$$\mathcal{L}^N(B_\rho(x_0) \cap \{u_\varepsilon > \varepsilon\}) \geq \mathcal{L}^N(B_\rho(x_0) \cap B_{\kappa\rho}(y_0)) = c_0 \mathcal{L}^N(B_\rho(x_0)),$$

para certa constante $0 < c_0(\text{universal}) \ll 1$.

□

Corolário 2.3.4. Dado $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$, $\varepsilon \ll \rho$ e $\rho \ll 1$ suficientemente pequeno (em um sentido universal), então

$$\int_{B_\rho(x_0)} u_\varepsilon(x) dx \geq c\rho,$$

para uma constante $c(\text{universal}) > 0$ independentemente de ε .

Demonstração. Como no Corolário 2.3.3, existe uma constante $0 < \kappa(\text{universal}) \ll 1$, tal que

$$\int_{B_\rho(x_0)} u_\varepsilon(x) dx \geq C_N \int_{B_\rho(x_0) \cap B_{\kappa\rho}(y_0)} u_\varepsilon(x) dx \geq c\rho$$

para alguma constante $0 < c(\text{universal}) \ll 1$ e algum $y_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$.

□

Porosidade das superfícies de nível. Como consequência da taxa de crescimento e da não-degenerescência (Teoremas 2.1.1 e 2.2.2), obtemos a porosidade dos conjuntos de níveis.

Definição 2.3.5 (Conjunto poroso). Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ é denominado poroso com porosidade $\sigma > 0$, se $\exists R > 0$ tal que

$$\forall x \in S, \forall r \in (0, R), \exists y \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } B_{\sigma r}(y) \subset B_r(x) \setminus S.$$

Recordamos que um conjunto σ -poroso tem dimensão de Hausdorff não excedendo $N - c\sigma^N$, onde $c = c(N) > 0$ é uma constante dependendo apenas da dimensão. Em particular, um conjunto σ -poroso tem medida de Lebesgue zero (veja [92] para mais detalhes).

Teorema 2.3.6 (Porosidade). Seja u_ε uma solução do tipo Perron para (1). Então, os conjuntos de nível $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$ são porosos com constante de porosidade independente de ε .

Demonstração. Sejam $R > 0$ e $x_0 \in \Omega' \subseteq \Omega$ tais que $\overline{B_{4R}(x_0)} \subset \Omega$.

Afirmção: O conjunto $\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap B_R(x_0)$ é poroso.

Seja $x \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap B_R(x_0)$ fixo. Para cada $r \in (0, R)$ temos que $\overline{B_r(x)} \subset B_{2R}(x_0) \subset \Omega$. Agora, seja $y \in \partial B_r(x)$ tal que $u_\varepsilon(y) = \sup_{\partial B_r(x)} u_\varepsilon(x)$. Da não-degenerescência forte (Teorema 2.3.2) vale que

$$u_\varepsilon(y) \geq c \cdot r. \quad (2.21)$$

Por outro lado, sabemos do Teorema 2.1.1 que perto da fronteira livre

$$u_\varepsilon(y) \leq C \cdot d_\varepsilon(y), \quad (2.22)$$

onde $d_\varepsilon(y)$ é a distância de y ao conjunto $\overline{B_{2R}(x_0)} \cap \Gamma_\varepsilon$ e $\Gamma_\varepsilon := \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. Então, utilizando (2.21) e (2.22) obtemos que

$$d_\varepsilon(y) \geq \sigma r \quad (2.23)$$

para uma constante $\sigma \in (0, 1)$.

Considere agora $y^* \in [x, y]$ (segmento de reta que une os pontos x e y) tal que

$$\|y - y^*\| = \frac{\sigma r}{2}.$$

Assim, vemos que

$$B_{\frac{\sigma}{2}r}(y^*) \subset B_{\sigma r}(y) \cap B_r(x). \quad (2.24)$$

De fato, para cada $z \in B_{\frac{\sigma}{2}r}(y^*)$

$$\|z - y\| \leq \|z - y^*\| + \|y - y^*\| < \frac{\sigma r}{2} + \frac{\sigma r}{2} = \sigma r,$$

e

$$\|z - x\| \leq \|z - y^*\| + (\|x - y\| - \|y^* - y\|) < \frac{\sigma r}{2} + \left(r - \frac{\sigma r}{2}\right) = r,$$

então a sentença (2.24) se verifica.

Agora, de (2.23) temos que $B_{\sigma r}(y) \subset B_{d_\varepsilon(y)}(y) \subset \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$, então

$$B_{\sigma r}(y) \cap B_r(x) \subset \{u_\varepsilon > \varepsilon\},$$

o qual fornece junto com (2.24) a seguinte conclusão

$$B_{\frac{\sigma}{2}r}(y^*) \subset B_{\sigma r}(y) \cap B_r(x) \subset B_r(x) \setminus \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \subset B_r(x) \setminus (\partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap B_R(x_0)),$$

concluindo assim a prova da $\frac{\sigma}{2}$ -porosidade.

□

2.4 Estimativas da medida de Hausdorff para a fronteira livre

Nesta parte do capítulo, estabelecemos estimativas na medida de Hausdorff para as superfícies de nível aproximadas. Uma condição necessária para o estudo de tais estimativa é impor a não-degenerescência do termo de reação quando este propaga-se até a região de transição. A seguir, vamos supor em (2.11) que $t_0 = 0$, i.e.,

$$\mathcal{J} := \inf_{\Omega \times [0, T_0]} \varepsilon \zeta_\varepsilon(x, \varepsilon t) > 0,$$

para algum $T_0 > 0$ que determinaremos depois.

O próximo resultado afirma que, em medida, a Hessiana de uma solução aproximada explode perto da região de transição quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. A prova segue as mesmas ideias empregadas em [4, Proposition 6.1] e [81, Proposition 5.1]. Por esse motivo, vamos omiti-la.

Proposição 2.4.1. *Fixado $\Omega' \subseteq \Omega$, $C \gg 1$ e $\rho < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ vale que*

$$\int_{B_\rho(x_\varepsilon)} (\zeta_\varepsilon(x, u_\varepsilon) - C) dx \geq 0 \quad \text{para todo } x_\varepsilon \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'. \quad (2.25)$$

Matematicamente, a Proposição 2.4.1 implica que, perto da região de transição, o operador governante F é avaliado em matrizes muito grandes.

Remark 2.4.2. *Seguindo o mesmo esquema que [4], notemos que*

$$\Delta_{p(x)}^N u = \text{Tr} \left(\left(\delta_{ij} + \frac{Du \otimes Du}{|Du|^2} \right) D^2 u \right), \quad (2.26)$$

é um operador “uniformemente elíptico” com “constantes de elipticidade” dadas por λ e Λ (veja (1.3) para detalhes). Além disso, se

$$\mathcal{A}_{ij}(x, Du) = \delta_{ij} + \frac{Du \otimes Du}{|Du|^2},$$

então é claro que, para $\Omega' \subseteq \Omega$, $\rho < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ e $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega$ temos que

$$\int_{B_\rho(x_\varepsilon)} \mathcal{A}_{ij}(x, Du) D_{ij} u_\varepsilon(x) dx \geq 0.$$

O próximo resultado, nós permitirá adaptar alguns argumentos disponíveis para problemas lineares elípticos (cf. [2]). Neste ponto, a prova pode ser obtida com as mesmas ideias vistas em [4, Lemma 6.3] e [82, Lemma 4.1].

Lema 2.4.3. *Existe uma constante $C(\Omega', \text{parâmetros, universais}) > 0$ tal que, para cada $x_\varepsilon \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$ e $\rho \ll 1$, vale a desigualdade*

$$\int_{B_\rho(x_\varepsilon) \cap \{\varepsilon \leq u_\varepsilon < \mu\}} |Du_\varepsilon|^2 dx \leq C\mu\rho^{N-1}.$$

Demonstração. Definimos a seguinte função **cut-off** apropriada

$$\Psi^\varepsilon = \begin{cases} C\varepsilon & \text{em } \{u_\varepsilon \leq C\varepsilon\}; \\ u_\varepsilon & \text{em } \{C\varepsilon < u_\varepsilon \leq \mu\}; \\ \mu & \text{em } \{u_\varepsilon > \mu\}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Note que

$$0 \leq \int_{B_\rho(x_\varepsilon)} \Psi_\varepsilon \mathcal{A}_{ij} D_{ij} u_\varepsilon dx = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(x_\varepsilon)} \mathcal{A}_{ij} D_i u_\varepsilon \Psi_\varepsilon (x^i - x_\varepsilon^i) d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{B_\rho(x_\varepsilon)} \mathcal{A}_{ij} D_j u_\varepsilon D_i \Psi_\varepsilon dx$$

e portanto,

$$\int_{B_\rho(x_\varepsilon) \cap \{\varepsilon \leq u_\varepsilon < \mu\}} \mathcal{A}_{ij} D_j u_\varepsilon D_i u_\varepsilon dx \leq \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(x_\varepsilon)} \mathcal{A}_{ij} D_i u_\varepsilon \Psi_\varepsilon(x^i - x_\varepsilon^i) d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Finalmente, usando a regularidade Lipschitz de u_ε (Teorema 2.1.1) e elipticidade da matriz $\mathcal{A}_{ij}$, obtemos que

$$\int_{B_\rho(x_\varepsilon) \cap \{\varepsilon \leq u_\varepsilon < \mu\}} |Du_\varepsilon|^2 dx \leq C\mu\rho^{N-1}.$$

□

Agora, obteremos uma estimativa da medida N -dimensional nas regiões de nível ε , que são uniformes em relação ao parâmetro ε . A prova segue as mesmas ideias como em [4, Lemma 6.5].

Lema 2.4.4. *Fixado $\Omega' \Subset \Omega$, existe $C^*(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$, tal que, se $C^*\mu \leq 2\rho \ll \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ então, para $\mu, \varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, com $3C_1\varepsilon < \mu \ll \rho$, obtemos que*

$$\mathcal{L}^N(\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon < \mu\} \cap B_\rho(x_\varepsilon)) \leq C^*\mu\rho^{N-1},$$

onde $x_\varepsilon \in \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$, com $d_\varepsilon(x_\varepsilon) \ll \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ e $C_1 > 1$.

Finalmente, estamos encaminhados para estabelecer a estimativa da medida $(N-1)$ -Hausdorff dos conjuntos de níveis aproximados (uniforme em relação ao parâmetro ε). A prova deste resultado é análoga à prova [14, Theorem 6.11].

Teorema 2.4.5. *Fixado $\Omega' \Subset \Omega$, existe $C^*(\Omega', \text{universal}) > 0$, tal que*

$$\mathcal{L}^N(\mathcal{N}_\mu(\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon\}) \cap B_\rho(x_\varepsilon)) \leq C\mu\rho^{n-1},$$

para $C_1 > 1$, $x_\varepsilon \in \partial\{C_1\varepsilon < u_\varepsilon\} \cap \Omega'$, $d_\varepsilon(x_\varepsilon) \ll \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ e $C_1\varepsilon \ll \rho$. Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\{u_\varepsilon = C_1\varepsilon\} \cap B_\rho(x_0)) \leq C \cdot \rho^{N-1}, \quad (2.28)$$

para certas constantes $C, C_1 > 0$ que independem de ε .

2.5 Configuração limítrofe quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Nesta parte final, analisaremos o cenário quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ para soluções de (1). Como consequência do Teorema 2.1.1, da Proposição 1.1.4 e do Lema 1.1.5 dado nas preliminares, obtemos a configuração para o perfil limite:

Teorema 2.5.1 (Perfil e EDP limite). *Seja u_ε a solução do tipo Perron para (1), então para qualquer sequência $\varepsilon_k \rightarrow 0^+$ existe uma subsequência $\varepsilon_{k_j} \rightarrow 0^+$ e $u_0 \in C_{loc}^{0,1}(\Omega)$ tal que, $p_\varepsilon \rightarrow p_0$ e $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ local e uniformemente em Ω . Além disso*

- (1) $u_{\varepsilon_{k_j}} \rightarrow u_0$ local e uniformemente em Ω ;
- (2) $u_0 \in [0, \Xi]$ in $\bar{\Omega}$ para uma constante $\Xi(\text{universal}) > 0$ (independente de ε);
- (3) $\Delta_{p_0(x)}^N u_0 = f_0(x)$ in $\{u_0 > 0\}$ no sentido da viscosidade.

Demonstração. A regularidade Lipschitz (Teorema 2.1.1) implica que a família $\{u_{\varepsilon_k}\}$ é pre-compacta na topologia $C_{loc}^{0,1}(\Omega)$. Portanto, a menos de sub-sequência, existe u_0 , obtida como o limite uniforme das $u_{\varepsilon_{k_j}}$, quando $\varepsilon_{k_j} \rightarrow 0$. Agora, usaremos a seguinte definição quando nos referirmos a u_0 :

$$u_0(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_{k_j}}(x).$$

Além disso, vemos pelo estabilidade de soluções de viscosidade que tal perfil limite verifica

- (1) $u_{\varepsilon_{k_j}} \rightarrow u_0$ local e uniformemente em Ω ;
- (2) $u_0 \in [0, \Xi]$ em $\bar{\Omega}$ para uma constante $\Xi(\text{universal}) > 0$ (independente em ε);
- (3) $\Delta_{p_0(x)}^N u_0 = f_0(x)$ em $\{u_0 > 0\}$ no sentido da viscosidade.

□

Permita-nos introduzir a seguinte notação, que usaremos em nosso próximo resultado:

$$\mathfrak{F}(u_0, \mathcal{O}) := \partial\{u_0 > 0\} \cap \mathcal{O},$$

onde $\mathcal{O} \subset \Omega$.

Teorema 2.5.2 (Comportamento assintótico perto da fronteira livre). *Seja $\Omega' \Subset \Omega$. Fixado $x_0 \in \{u_0 > 0\} \cap \Omega'$ tal que $\text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Então existe uma constante $C > 0$ que independente de ε tal que*

$$C^{-1} \cdot \text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \leq u_0(x_0) \leq C \cdot \text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')). \quad (2.29)$$

Demonstração. Primeiramente, a estimativa por cima segue pela continuidade Lipschitz local de u_0 (Teorema 2.5.1). Agora, do Corolário 2.3.1, existe um $y_\varepsilon \in \{0 \leq u_\varepsilon \leq \varepsilon\} \cap \Omega'$ com $d_\varepsilon(x_0) = |x_0 - y_\varepsilon|$ tal que

$$u_\varepsilon(x_0) \geq c \cdot d_\varepsilon(x) = c |x_0 - y_\varepsilon|,$$

para uma constante $c(\text{universal}) > 0$.

Portanto, módulo subsequência, $y_\varepsilon \rightarrow y_0 \in \{u_0 = 0\}$ e assim

$$u_0(x_0) \geq c |x_0 - y_0| \geq c \text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')).$$

□

Teorema 2.5.3. *Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existem $C_0(\text{universal}) > 0$ e $r_0(\text{universal}) > 0$, tais que*

$$C_0^{-1}r \leq \sup_{B_r(x_0)} u_0(x) \leq C_0(r + u_0(x_0))$$

para todo $x_0 \in \overline{\{u_0 > 0\}} \cap \Omega'$ com $\text{dist}(x_0, \partial\{u_0 > 0\}) \leq \frac{1}{2}\text{dist}(x_0, \partial\Omega')$ e $r \in (0, r_0]$.

Demonstração. Note que tais estimativas são consequências de passar o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ no Teorema 2.3.2 dado que as constantes são independentes de ε . □

O próximo resultado afirma que o conjunto $\{u_0 > 0\}$ é o limite, na distância de Hausdorff de $\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Teorema 2.5.4. *Dado $C_1 > 1$, as seguintes inclusões são válidas*

$$\{u_0 > 0\} \cap \Omega' \subset \mathcal{N}_\delta(\{u_{\varepsilon_k} > C_1\varepsilon_k\}) \cap \Omega' \quad \text{e} \quad \{u_{\varepsilon_k} > C_1\varepsilon_k\} \cap \Omega' \subset \mathcal{N}_\delta(\{u_0 > 0\}) \cap \Omega',$$

para $\delta \ll 1$ e $\varepsilon_k \ll \delta$.

Demonstração. Provaremos apenas a primeira inclusão, dado que a segunda é obtida de forma similar. Suponhamos, por contradição, que exista uma subsequência $\varepsilon_k \rightarrow 0$ e pontos $x_k \in \{u_0 > 0\} \cap \Omega'$ tais que

$$\text{dist}(x_k, \{u_{\varepsilon_k} > C_1\varepsilon_k\}) > \delta_0. \quad (2.30)$$

Do Teorema 2.5.3, e tomando $k \gg 1$, obtemos

$$u_{\varepsilon_k}(y_k) = \sup_{B_{\frac{\delta_0}{2}}(x_k)} u_{\varepsilon_k}(x) \geq \frac{1}{2} \cdot \sup_{B_{\frac{\delta_0}{2}}(x_k)} u_0(x_k) \geq c \frac{\delta_0}{2} \geq C_1\varepsilon_k$$

para algum $y_k \in \overline{B_{\frac{\delta_0}{2}}(x_k)} \cap \{u_{\varepsilon_k} > C_1\varepsilon_k\}$, a qual contradiz (2.30). Isto finaliza a prova do resultado. □

Teorema 2.5.5. *Dado um sub-domínio $\Omega' \Subset \Omega$, existem constantes $C(\text{universal}) > 0$ e $\rho_0(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$ tal que, para qualquer $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ e $\rho \in (0, \rho_0]$, temos a desigualdade*

$$C^{-1} \leq \int_{\partial B_\rho(x_0)} u_0(x) d\mathcal{H}^{N-1} \leq \rho C. \quad (2.31)$$

Demonstração. Pela regularidade Lipschitz, a estimativa por cima é facilmente obtida. Agora, para provar a outra desigualdade, consideremos $z_\varepsilon \in \partial\{u_\varepsilon > 0\} \cap \Omega'$, satisfazendo

$$\|z_\varepsilon - x_0\| = \text{dist}(x_0, \partial\{u_\varepsilon > 0\}).$$

Então, do Teorema 2.5.4, $z_\varepsilon \rightarrow x_0$. Assim, podemos passar o limite quando $\varepsilon_k \rightarrow 0$ na tese do Corolário 2.3.4, concluindo assim o Teorema. □

Remark 2.5.6. Levando em conta a condição (2.31), diremos que u_0 é localmente uniformemente e não-degenerada em $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$. Finalmente, em certa medida, tal propriedade é outra forma de dizer que u_0 possui regularidade Lipschitz e propriedade de não-degeneração.

A seguir, vemos que o conjunto $\{u_0 > 0\}$ tem densidade uniforme ao longo de $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$.

Teorema 2.5.7. Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe uma constante $c_0(\text{universal}) > 0$, tal que para $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ temos que

$$\mathcal{L}^N(B_\rho(x_0) \cap \{u_0 > 0\}) \geq c_0 \mathcal{L}^N(B_\rho(x_0)), \quad (2.32)$$

para $\rho \ll 1$. Em particular, $\mathcal{L}^N(\mathfrak{F}(u_0, \Omega')) = 0$.

Demonstração. A estimativa (2.32) segue como na prova do Corolário 2.3.3. Concluimos o resultado fazendo uso do teorema de diferenciação de Lebesgue e um argumento de cobertura (um resultado do tipo Besicovitch–Vitali, veja [43] para detalhes). □

Finalmente, estabeleceremos que a fronteira livre limite $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ tem local medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}$ localmente finita.

Teorema 2.5.8 (Estimativas de Hausdorff para $\partial\{u_0 > 0\}$). Dado $\Omega' \Subset \Omega$, existe um $C(\text{universal}) > 0$ tal que para $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ tem-se

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0, \Omega') \cap B_r(x_0)) \leq Cr^{N-1}.$$

Além disso, existe uma constante $C_0(\text{universal}) > 0$ tal que para $0 < r \ll 1$ e $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ segue que

$$C_0^{-1}r^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}_{\text{red}}(u_0, \Omega') \cap B_r(x_0)) \leq C_0r^{N-1},$$

onde $\mathfrak{F}_{\text{red}}(u_0, \Omega') := \partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\} \cap \Omega'$ denota a fronteira livre reduzida. Particularmente,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}_{\text{red}}(u_0, \Omega') \setminus \mathfrak{F}(u_0, \Omega')) = 0.$$

Demonstração. A prova segue como aquela estabelecida em [14, Theorem 1.9], por tal razão a motiremos aqui. $\square$

Comentários finais: Condição de fronteira livre – caso 1-dimensional

Estimaremos as derivadas quando $N = 1$. Neste caso, temos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{1}{p_\varepsilon(x)} u_\varepsilon'' + \frac{(p_\varepsilon(x) - 2)}{p_\varepsilon(x)} \frac{u_\varepsilon''(u_\varepsilon')^2}{|u_\varepsilon'|^2} = \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon(x) \quad \text{em } (-a, a),$$

ou equivalentemente

$$\frac{p_\varepsilon(x) - 1}{p_\varepsilon(x)} u_\varepsilon'' = \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon(x) \quad \text{em } (-a, a). \quad (2.33)$$

Note que (2.33) implica a desigualdade

$$u_\varepsilon'' \geq \frac{p_\varepsilon(x)}{p_\varepsilon(x) - 1} \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \frac{p^-}{p^+ - 1} \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Agora, se assumirmos que $u_\varepsilon' > 0$, então isto implica que

$$u_\varepsilon' u_\varepsilon'' \geq \frac{p^-}{p^+ - 1} \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) u_\varepsilon',$$

logo temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (u_\varepsilon')^2 \geq \frac{p^-}{p^+ - 1} \frac{d}{dx} \mathfrak{Z}_\varepsilon(u_\varepsilon),$$

onde

$$\mathfrak{Z}_\varepsilon(x) := \int_0^{x/\varepsilon} \zeta(s) ds \rightarrow \int_0^1 \zeta(s) ds := M_0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Por uma mudança de variáveis

$$v(x) = u_\varepsilon'(x) \implies dv = u_\varepsilon'' dx,$$

e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, podemos obter que

$$|u_0'|^2 \geq 2 \frac{p^-}{p^+ - 1} M_0 \implies |u_0'(z_0)| \geq \sqrt{2 \frac{p^-}{p^+ - 1} M_0}.$$

Por outro lado, multiplicando (2.33) pelo fator u_ε' e assumindo que $u_\varepsilon' > 0$, temos que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon' u_\varepsilon'' &= \frac{p_\varepsilon(x)}{p_\varepsilon(x) - 1} (u_\varepsilon' \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + u_\varepsilon' f_\varepsilon(x)) \\ &\leq \frac{p^+}{p^- - 1} (u_\varepsilon' \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon) + \mathcal{B} u_\varepsilon'), \end{aligned}$$

então, por um raciocínio semelhante ao empregado acima, temos (utilizando (3) e Proposição 1.1.4) que

$$|u'_0(z_0)| \leq \sqrt{2 \frac{p^+}{p^- - 1}} (M_0 + \Xi \mathcal{B}).$$

Finalmente, se assumimos que $u'_\varepsilon < 0$, então podemos provar estimativas análogas multiplicando (2.33) pelo fator u'_ε e partindo dos seguintes fatos

$$u''_\varepsilon u'_\varepsilon \geq \frac{p^+}{p^- - 1} \left(\frac{d}{dx} \mathfrak{Z}_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon u'_\varepsilon \right) \implies |u'_0(z_0)| \geq \sqrt{2 \frac{p^+}{p^- - 1}} M_0.$$

e

$$u''_\varepsilon u'_\varepsilon \leq \frac{p^-}{p^+ - 1} \left(\frac{d}{dx} \mathfrak{Z}_\varepsilon(u_\varepsilon) + f_\varepsilon u'_\varepsilon \right) \implies |u'_0(z_0)| \leq \sqrt{2 \frac{p^-}{p^+ - 1}} (M_0 + \Xi \mathcal{B}),$$

onde $z_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$, estabelecendo assim a condição de fronteira livre em 1 – D.

3 Modelos mistos locais/não-locais degenerados

Neste capítulo estudaremos o problema introduzido em (8). Nosso principal propósito será estabelecer existência e/ou multiplicidade de soluções em três diferentes cenários para a não-linearidade

$$f(x, u) = \lambda |u(x)|^{r-2}u(x) + |u(x)|^{p^*-2}u(x).$$

Precisamente, analisaremos os seguintes casos:

- ✓ Caso sublinear: $r < p$ (veja Subseção 3.1);
- ✓ Caso linear: $r = p$ (veja Subseção 3.2);
- ✓ Caso superlinear: $r > p$ (veja Subseção 3.3).

Gostaríamos de ressaltar que os resultados referentes a este capítulo podem ser encontrados no artigo [59].

3.1 Caso sublinear

Neste primeira parte do capítulo vamos estudar o problema misto no caso sublinear, ou seja, consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{r-2}u + |u|^{p^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

com $1 < r < p < p^*$, $p \geq 2$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$, o qual será assumido no capítulo inteiro sem repeti-lo. Neste caso o funcional associado (ou funcional de energia) ao nosso problema (3.1) é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{r} \int_\Omega |u|^r dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (3.2)$$

onde ressaltamos que, trabalhamos com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{1/p}.$$

Assim, poderemos estabelecer o primeiro resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.1.1. *Existe um $\lambda^* = \lambda^*(N, p, r, \mathcal{S}, \Omega) > 0$, onde $\mathcal{S}$ é dada em (1.13), tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ o problema (3.1) tem infinitas soluções fracas não-triviais com energia negativa.*

Enunciaremos o seguinte Lema o qual é fundamental na prova da condição (PS) para J_λ .

Lema 3.1.2. *Seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada de $(PS)_c$ para J_λ . Então, a menos de subsequência, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p em Ω quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Dado que $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, existem uma subsequência (que denotaremos por $(u_n)_n$) e funções h e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), & \nabla u_n &\rightharpoonup \nabla u \text{ em } (L^p(\Omega))^N, \\ |u_n(x)| &\leq h(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ u_n &\rightarrow u \text{ em } L^m(\Omega), & u_n &\rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega, \end{aligned} \quad (3.3)$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde $m \in [1, p^*)$ e $h \in L^p(\Omega)$.

Para cada $\kappa > 0$, definamos os truncamentos $T_\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$T_\kappa(t) = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq \kappa, \\ \kappa \frac{t}{|t|} & \text{se } |t| > \kappa. \end{cases}$$

Dado que $(u_n)_n$ é uma sequência de $(PS)_c$ para J_λ , temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle J'_\lambda(u_n), T_\kappa(u_n - u) \rangle \\ &= \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \cdot \nabla T_\kappa(u_n - u) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{A}u_n(x, y) (T_\kappa(u_n - u)(x) - T_\kappa(u_n - u)(y)) \, d\mu \\ &\quad - \lambda \int_\Omega |u_n|^{r-2} u_n T_\kappa(u_n - u) \, dx - \int_\Omega |u_n|^{p^*-2} u_n T_\kappa(u_n - u) \, dx, \end{aligned} \quad (3.4)$$

quando $n \rightarrow \infty$, pois $(T_\kappa(u_n - u))_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso,

$$\mathcal{A}u(x, y) := |u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) \text{ e } d\mu := |x - y|^{-N-sp} dx dy. \quad (3.5)$$

Assim, utilizando (3.3) podemos mostrar pela desigualdade de Hölder que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla T_\kappa(u_n - u) \, dx = 0 \quad \text{e} \quad (3.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{A}u(x, y) (T_\kappa(u_n - u)(x) - T_\kappa(u_n - u)(y)) \, d\mu = 0. \quad (3.7)$$

Agora, usando o fato que $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e a Proposição 1.5.2, concluímos que existe $C_0 > 0$ (independente de κ e n) tal que

$$\left| \int_\Omega |u_n|^{p^*-2} u_n T_\kappa(u_n - u) \, dx \right| \leq k \int_\Omega |u_n|^{p^*-1} \, dx \leq C_0 k. \quad (3.8)$$

Então, usando (3.4)-(3.8) obtemos que:

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} [|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \cdot \nabla T_k(u_n - u) \, dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y))(T_{\kappa}(u_n - u)(x) - T_{\kappa}(u_n - u)(y)) \, d\mu \right] \\ & = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{p^*-2} u_n T_{\kappa}(u_n - u) \, dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y))(T_{\kappa}(u_n - u)(x) - T_{\kappa}(u_n - u)(y)) \, d\mu \geq 0. \quad (3.10)$$

Para demonstrar isto, particionamos $\mathbb{R}^{2N}$ em 4 subconjuntos apropriados

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : |(u_n - u)(x)| \leq \kappa, \quad |(u_n - u)(y)| \leq \kappa\} \\ S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : |(u_n - u)(x)| \leq \kappa < |(u_n - u)(y)|\} \\ S_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : |(u_n - u)(y)| \leq \kappa < |(u_n - u)(x)|\} \\ S_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : |(u_n - u)(x)| > \kappa, \quad |(u_n - u)(y)| > \kappa\} \end{aligned}$$

e estudaremos caso por caso.

- *Caso 1.* Seja $(x, y) \in S_1$. Então, obtemos que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y))(T_{\kappa}(u_n - u)(x) - T_{\kappa}(u_n - u)(y)) \\ & = (\mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y))((u_n - u)(x) - (u_n - u)(y)) \geq 0 \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência da desigualdade de Simon (1.5.4).

- *Caso 2.* Seja $(x, y) \in S_2$. da desigualdade $|(u_n - u)(x)| \leq \kappa < |(u_n - u)(y)|$, temos que

$$T_{\kappa}(u_n - u)(x) - T_{\kappa}(u_n - u)(y) = \begin{cases} (u_n - u)(x) - \kappa \leq 0, & \text{se } u_n(x) \geq u(x) \text{ e } u_n(y) \geq u(y) \\ (u_n - u)(x) + \kappa \geq 0, & \text{se } u_n(x) \geq u(x) \text{ e } u_n(y) < u(y) \\ (u_n - u)(x) - \kappa \leq 0, & \text{se } u_n(x) < u(x) \text{ e } u_n(y) \geq u(y) \\ (u_n - u)(x) + \kappa \geq 0, & \text{se } u_n(x) < u(x) \text{ e } u_n(y) < u(y). \end{cases}$$

Enquanto $-|(u_n - u)(x)| \leq |(u_n - u)(x)| < |(u_n - u)(y)|$ e considerando a monotonicidade da função $h(t) = |t|^{p-2}t$, concluímos que

$$\begin{cases} \mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y) \leq 0, & \text{se } u_n(x) \geq u(x) \text{ e } u_n(y) \geq u(y) \\ \mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y) \geq 0, & \text{se } u_n(x) \geq u(x) \text{ e } u_n(y) < u(y) \\ \mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y) \leq 0, & \text{se } u_n(x) < u(x) \text{ e } u_n(y) \geq u(y) \\ \mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y) \geq 0, & \text{se } u_n(x) < u(x) \text{ e } u_n(y) < u(y). \end{cases}$$

Assím, em resumo obtemos (3.10), pois

- *Caso 3.* Seja $(x, y) \in S_3$. Este caso segue similar ao Caso 2 e
- *Caso 4.* Seja $(x, y) \in S_4$. Este caso é trivial, pois

$$T_\kappa(u_n - u)(x) - T_\kappa(u_n - u)(y) = \kappa - \kappa = 0.$$

Portanto concluímos a prova de nossa afirmação.

Pela desigualdade de Simon para vetores (1.5.4) obtemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla T_\kappa(u_n - u) \, dx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{p^*-2} u_n T_\kappa(u_n - u) \, dx \leq C_0 \kappa.$$

Agora, por simplicidade, consideremos

$$c_n(x) = (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u).$$

Assim, pela desigualdade de Simon, obtemos que $c_n(x) \geq 0$ q.t.p em Ω .

A seguir, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\kappa > 0$ particionaremos Ω em dois conjuntos disjuntos.

Precisamente:

$$\mathcal{S}_n^\kappa = \{x \in \Omega : |u_n(x) - u(x)| \leq \kappa\} \text{ e } \mathcal{G}_n^\kappa = \{x \in \Omega : |u_n(x) - u(x)| > \kappa\}.$$

Agora, fixado $\theta \in (0, 1)$, usando a desigualdade de Hölder, deduzimos de 1.5.4 que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_n^\theta(x) \, dx &\leq \left(\int_{\mathcal{S}_n^\kappa} c_n(x) \, dx \right)^\theta |\mathcal{S}_n^\kappa|^{1-\theta} + \left(\int_{\mathcal{G}_n^\kappa} c_n(x) \, dx \right)^\theta |\mathcal{G}_n^\kappa|^{1-\theta} \\ &\leq (\kappa C_0)^\theta |\mathcal{S}_n^\kappa|^{1-\theta} + \overline{C}_0^\theta |\mathcal{G}_n^\kappa|^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Então, ao observarmos que $|\mathcal{G}_n^\kappa| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} c_n^\theta(x) \, dx \leq (\kappa C_0) |\Omega|^{1-\theta}.$$

Finalmente, ao fazermos $\kappa \rightarrow 0^+$, concluímos que $c_n(x) \rightarrow 0$ q.t.p em Ω , e assim por (1.5.4) obtemos a conclusão. $\square$

Como discutido acima, agora utilizaremos o Lema 3.1.2 para assegurar a validade da condição $(PS)_c$ (Palais-Smale ao nível c) para J_λ .

Lema 3.1.3. *Seja $c < 0$. Então, existe um $\lambda_0 = \lambda_0(N, p, r, \mathcal{S}, \Omega) > 0$, tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração. Escolha λ_0 suficientemente pequeno (tal escolha é possível devido a relação entre os expoentes r e p), de forma que

$$\frac{1}{N} \mathcal{S}^{\frac{N}{p}} - |\Omega| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right)^{-\frac{r}{p^*-r}} \left[\lambda_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right]^{\frac{p^*}{p^*-r}} > 0 \quad (3.11)$$

Seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de $(PS)_c$ para J_λ . Primeiramente mostraremos que $(u_n)_n$ é uniformemente limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Suponha por propósito de contradição que tal afirmação acima não se verifique, logo, a menos de subsequência $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\|u_n\| \geq 1$. Assim, pela Proposição 1.5.2, obtemos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p^*} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\|\nabla u_n\|_p^p + [u_n]_{s,p}^p \right) - \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|_r^r \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|\nabla u_n\|_p^p - \lambda C_r \|\nabla u_n\|_p^r, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$[u]_{s,p}^p = \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy.$$

Então, pela Definição 1.4.2, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $C_r = C(r) > 0$ tais que

$$c_1 + c_2 \|\nabla u_n\|_p + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|\nabla u_n\|_p^p - \lambda C_r \|\nabla u_n\|_p^r \Leftrightarrow \infty > c_1 + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|\nabla u_n\|_p^p - \lambda C_r \|\nabla u_n\|_p^r - c_2 \|\nabla u_n\|_p.$$

Não obstante isto produz uma contradição, pois $p^* > p > r > 1$ e $\|\nabla u_n\|_p \simeq \|u_n\| \nearrow \infty$. Logo, como $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, a menos de subsequência são satisfeitas as seguintes condições:

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), \quad \nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \text{ em } (L^p(\Omega))^N, \\ \nabla u_n(x) &\rightarrow \nabla u(x), \quad u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega, \\ u_n &\rightarrow u \text{ em } L^m(\Omega), \quad \|u_n - u\|_{p^*} \rightarrow \alpha \text{ para algum } \alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

quando $n \rightarrow \infty$ e $m \in [1, p^*)$. Logo, por (3.13) e o Lema de Brézis-Lieb (veja [25]) obtemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_p^p - \|\nabla u_n - \nabla u\|_p^p &= \|\nabla u\|_p^p + o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \\ \|u_n\|_{p^*}^{p^*} - \|u_n - u\|_{p^*}^{p^*} &= \|u\|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim, por (3.13) e (1.4.2) podemos obter a estimativa

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle J'_\lambda(u_n), (u_n - u) \rangle \\ &= \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \cdot \nabla (u_n - u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{A} u_n(x, y) ((u_n - u)(x) - (u_n - u)(y)) d\mu \\ &\quad - \lambda \int_\Omega |u_n|^{r-2} u_n (u_n - u) dx - \int_\Omega |u_n|^{p^*-2} u_n (u_n - u) dx \\ &\geq \|\nabla u_n\|_p^p - \|\nabla u\|_p^p - \|u_n\|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Então, usando (3.13) e (3.14) segue que

$$\alpha^{p^*} + o_n(1) \geq \|\nabla u_n - \nabla u\|_p^p \geq \mathcal{S} \|u_n - u\|_{p^*}^p \quad (3.15)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Se assumimos por contradição que $\alpha > 0$, então por (3.15) vemos que

$$\alpha^{p^*} \geq \mathcal{S} \alpha^p \implies \alpha \geq \mathcal{S}^{\frac{1}{p^*-p}}. \quad (3.16)$$

Agora, fazendo a estimativa

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{p} \langle J'(u_n), u_n \rangle = -\lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \|u_n\|_r^r + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u_n\|_{p^*}^{p^*}$$

temos que, por (1.4.2), (3.13), (3.14), desigualdades de Hölder e Young, quando $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} c &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\alpha^{p^*} + \|u\|_{p^*}^{p^*} \right) - \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \|u\|_r^r \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\alpha^{p^*} + \|u\|_{p^*}^{p^*} \right) - \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) |\Omega|^{\frac{p^*-r}{p^*}} \|u\|_{p^*}^r \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\alpha^{p^*} + \|u\|_{p^*}^{p^*} \right) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u\|_{p^*}^{p^*} \\ &\quad - |\Omega| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right)^{-\frac{r}{p^*-r}} \left[\lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right]^{\frac{p^*}{p^*-r}}. \end{aligned}$$

Finalmente, pela escolha de λ_0 e (3.16) obtemos a seguinte contradição

$$\begin{aligned} 0 > c &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \mathcal{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} - |\Omega| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right)^{-\frac{r}{p^*-r}} \left[\lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right]^{\frac{p^*}{p^*-r}} \\ &= \frac{1}{N} \mathcal{S}^{\frac{N}{p}} - |\Omega| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right)^{-\frac{r}{p^*-r}} \left[\lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right]^{\frac{p^*}{p^*-r}} > 0. \end{aligned}$$

Logo $\alpha = 0$ e por (3.14) $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Para podermos utilizar a Proposição 1.7.4, precisamos que o funcional associado ao problema seja limitado inferiormente. De fato, tomando $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ temos que

$$J_\lambda(tu) = \frac{t^p}{p} \|u\|^p - \lambda \frac{t^r}{r} \int_\Omega |u|^r dx - \frac{t^{p^*}}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx \rightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

pois $r < p < p^*$.

Devido ao fato acima descrito, utilizaremos um argumento de truncamento inspirado no artigo [45]. Pela Proposição 1.5.2 existem constantes positivas C_r e C_{p^*} tais que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \lambda \frac{C_r}{r} \|u\|^r - \frac{C_{p^*}}{p^*} \|u\|^{p^*} \quad \text{para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Segue então que $J_\lambda(u) \geq g_\lambda(\|u\|)$, onde

$$g_\lambda(t) = \frac{1}{p}t^p - \frac{\lambda C_r}{r}t^r - \frac{C_{p^*}}{p^*}t^{p^*}, \quad t \in [0, \infty).$$

Agora, fixamos $R_1 > 0$ suficientemente pequeno de forma que

$$\frac{1}{p}R_1^p - \frac{C_{p^*}}{p^*}R_1^{p^*} > 0,$$

e considere

$$\lambda_1^* = \frac{r}{2C_r R_1^r} \left(\frac{1}{p}R_1^p - \frac{C_{p^*}}{p^*}R_1^{p^*} \right) > 0, \quad (3.17)$$

tal que $g_{\lambda_1^*}(R_1) > 0$. Definimos então

$$R_0 = \max \left\{ t \in (0, R_1) : g_{\lambda_1^*}(t) \leq 0 \right\}.$$

Dado que $r < p$, observamos que $g_{\lambda_1^*}(t) < 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, e como $g_{\lambda_1^*}(R_1) > 0$ então, $g_{\lambda_1^*}(R_0) = 0$.

Agora, consideremos $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ uma função infinitamente diferenciável tal que $\psi(t) = 1$ se $t \in [0, R_0]$ e $\psi(t) = 0$ se $t \in [R_1, \infty)$. Definimos o truncamento para J_λ pelo funcional

$$\tilde{J}_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{r} \int_\Omega |u|^r dx - \frac{\psi(\|u\|^p)}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Então, por construção, $\tilde{J}_\lambda \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e $\tilde{J}_\lambda(u) \rightarrow \infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$. Portanto, $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo e limitado inferiormente.

Lema 3.1.4. *Existe um $\lambda_2^* = \lambda_2^*(N, p, r, \mathcal{S}, \Omega) > 0$, tal que para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_2^*)$ valem as seguinte sentenças:*

- (i) $\tilde{J}_\lambda(u) < 0$ implica $\|u\| < R_0$ e $\tilde{J}_\lambda(v) = J_\lambda(v)$ para todo v em uma vizinhança aberta apropriada de u ;
- (ii) $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < 0$.

Demonstração. (i) Seja $0 < \lambda_2^* < \min\{\lambda_1^*, \lambda_0\}$, onde λ_0 é dado no Lema 3.1.3 e fixemos $\lambda \in (0, \lambda_2^*)$. Assumamos que $J_\lambda(u) < 0$. Como $\lambda < \lambda_1^*$, temos que, se $\|u\| \geq R_1$, então a Proposição 1.5.2 implica que

$$\tilde{J}_\lambda(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda_1^* C_r}{r}\|u\|^r > 0.$$

Agora, uma vez que $g_{\lambda_1^*}(R_1) > 0$, concluímos que

$$\frac{1}{p}R_1^p - \frac{\lambda_1^* C_r}{r}R_1^r > 0,$$

porém isto produz a seguinte contradição $0 \geq \tilde{J}_\lambda(u) > 0$.

Agora, quando $\|u\| < R_1$, como $\psi(t) \leq 1$ para todo $t \in [0, \infty)$ e $\lambda < \lambda_1^*$, segue que

$$0 > J_\lambda(u) \geq g_\lambda(\|u\|) \geq g_{\lambda_1^*}(\|u\|)$$

e isso implica que $\|u\| < R_0$, pela definição do R_0 . Além disso, pela continuidade do funcional $\tilde{J}_\lambda$, existe uma vizinhança aberta $\mathcal{O}$ de u tal que $\tilde{J}_\lambda(v) < 0$ para todo $v \in \mathcal{O}$, porém $\|v\| < R_0$ para qualquer $v \in \mathcal{O}$, portanto $J_\lambda(v) = \tilde{J}_\lambda(v)$, além disso $\tilde{J}'_\lambda(v) = J'_\lambda(v)$ para todo $v \in \mathcal{O}$.

(ii) Assuma que $c < 0$ e seja $(u_n)_n$ uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{J}_\lambda$. Como

$$J_\lambda(u_n) = \tilde{J}_\lambda(u_n) \rightarrow c < 0 \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) = \tilde{J}'_\lambda(u_n) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$ e $\tilde{J}_\lambda$ é limitado inferiormente, necessariamente a sequência $(u_n)_n$ tem de ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e assim pelo Lema 3.1.3 obtemos que, a menos de subsequência, $(u_n)_n$ é fortemente convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja, a condição $(PS)_c$ é satisfeita para $\tilde{J}_\lambda$. $\square$

A seguir mostraremos alguns resultados técnicos, onde precisaremos do Genus de Krasnoselskii γ apresentado na Definição 1.7.1.

Lema 3.1.5. *Para todo $0 < \lambda < \lambda_2^*$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\lambda, k) > 0$ para o qual $\gamma(\tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0}) \geq k$, onde $\tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0}$ é construído de acordo com a Definição 1.4.1.*

Demonstração. Fixemos $\lambda \in (0, \lambda_2^*)$ e $k \in \mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{V}_k$ um subespaço vetorial de $W_0^{1,p}(\Omega)$ k -dimensional. Logo, em particular as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_r$ são equivalentes em $\mathcal{V}_k$, pelo qual existe uma constante $C(k) > 0$ tal que

$$-C(k)\|u\|^r \geq -\|u\|_r^r \quad \text{para todo} \quad u \in \mathcal{V}_k. \quad (3.18)$$

Para qualquer $u \in \mathcal{V}_k$ com $\|u\| \leq R_0$, segue de (3.18) que

$$\tilde{J}_\lambda(u) = J_\lambda(u) \leq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda C(k)}{r}\|u\|^r. \quad (3.19)$$

Agora, escolhamos $\vartheta > 0$ tal que

$$\vartheta < \min \left\{ R_0, \left[\frac{\lambda C(k) p}{r} \right]^{\frac{1}{p-r}} \right\} \quad (3.20)$$

e seja $\mathbb{S}_\vartheta = \{u \in \mathcal{V}_k : \|u\| = \vartheta\}$. Claramente $\mathbb{S}_\vartheta$ é homeomorfa à esfera $(k-1)$ -dimensional $\mathbb{S}^{k-1}$.

Além disso, para $u \in \mathbb{S}_\vartheta$, obtemos de (3.19) a desigualdade

$$\tilde{J}_\lambda(u) \leq \vartheta^r \left(\frac{1}{p} \vartheta^{p-r} - \frac{\lambda C(k)}{r} \right) < 0$$

onde utilizamos na última desigualdade a condição (3.20). Assim, existe uma constante positiva ε_0 (dependo somente em λ e k) tal que $\tilde{J}_\lambda(u) < -\varepsilon_0$ para cada $u \in \mathbb{S}_\vartheta$. Pela Definição 1.7.1, segue que $\mathbb{S}_\vartheta \subset \tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0}$. Além disso, note que $\tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0} \in \Gamma$, pois $\tilde{J}_\lambda$ é contínuo, par e $\tilde{J}_\lambda(0) = 0$. Logo, segue da Proposição 1.7.2 que $\gamma(\tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0}) \geq \gamma(\mathbb{S}_\vartheta) = k$. $\square$

No que se segue, para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos

$$\Gamma_k := \{A \subseteq W_0^{1,p}(\Omega) : A \text{ é fechado, } 0 \notin A, A \text{ é simétrico e } \gamma(A) \geq k\},$$

e sejam c_k os níveis críticos dados por

$$c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} \tilde{J}_\lambda(u).$$

Claramente $c_k \leq c_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Lema 3.1.6. *Para cada $\lambda \in (0, \lambda_2^*)$, onde λ_2^* é dado pelo Lema 3.1.4 e cada $k \in \mathbb{N}$, os números c_k são negativos.*

Demonstração. Sejam $0 < \lambda < \lambda_2^*$ e $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.1.5, existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\gamma(\tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0}) \geq k$, pois $\tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0} \in \Gamma_k$. Além disso, $\sup_{u \in \tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0}} \tilde{J}_\lambda(u) \leq -\varepsilon_0$. Então, pelo raciocínio anterior e o fato de $\tilde{J}$ ser limitado inferiormente, obtemos que

$$-\infty < c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \sup_{u \in A} \tilde{J}_\lambda(u) \leq \sup_{u \in \tilde{J}_\lambda^{-\varepsilon_0}} \tilde{J}_\lambda(u) \leq -\varepsilon_0 < 0,$$

o que mostra o resultado. $\square$

A seguir, mostraremos o seguinte Lema, o qual é um argumento padrão como consta em [53].

Lema 3.1.7. *Sejam $\lambda \in (0, \lambda_2^*)$, onde λ_2^* é dado pelo Lema 3.1.4, e $k \in \mathbb{N}$. Se $c = c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+m}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, então*

$$\gamma(K_c) \geq m + 1,$$

onde K_c é dado pela Definição 1.4.1.

Demonstração. Seja $\lambda \in (0, \lambda_1^*)$. Pelo Lema 3.1.6 obtemos $c = c_k = \dots = c_{k+m} < 0$. Segue então pelo Lema 3.1.4 que K_c é compacto e assim, pela Proposição 1.7.2 temos que $\gamma(K_c) < \infty$ e existe um $\delta > 0$ tal que $\gamma(K_{\bar{c}}) = \gamma(\mathcal{N}_\delta(K_{\bar{c}}))$, onde $\mathcal{N}_\delta(K_c)$ é dado por

$$\mathcal{N}_\delta(K_c) = \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) : \text{dist}(w, K_c) \leq \delta\}$$

Assumamos por contradição que $\gamma(K_c) \leq m$. Então, pela Proposição 1.7.3 existe um $\varepsilon \in (0, -c)$ e um homeomorfismo ímpar $\eta : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\eta(\tilde{J}_\lambda^{c+\varepsilon} \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c)) \subset \tilde{J}_\lambda^{c-\varepsilon}. \quad (3.21)$$

Pela definição de $c = c_{k+1}$, existe um $A \in \Gamma_{k+m}$ tal que $\sup_{u \in A} \tilde{J}_\lambda(u) < c + \varepsilon$. Então, devido a Proposição 1.7.2, temos que

$$\gamma(\overline{A \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c)}) \geq \gamma(A) - \gamma(\mathcal{N}_\delta(K_c)), \quad \gamma(\eta(\overline{A \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c)})) \geq k. \quad (3.22)$$

Portanto,

$$\eta(\overline{A \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c)}) \in \Gamma_k.$$

Logo, vale a desigualdade

$$\sup_{u \in \eta(\overline{A \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c)})} \tilde{J}_\lambda(u) \geq c_k > c - \varepsilon. \quad (3.23)$$

Por outro lado, (3.21) e (3.22) implicam que

$$\eta(\overline{A \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c)}) \subset \overline{\eta(A \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c))} \subset \overline{\eta(\tilde{J}_\lambda^{c+\varepsilon} \setminus \mathcal{N}_\delta(K_c))} \subset \tilde{J}_\lambda^{c-\varepsilon}, \quad (3.24)$$

o qual contradiz (3.23). Portanto, $\gamma(K_c) \geq m + 1$. $\square$

Finalmente daremos uma prova para nosso resultado enunciado no Teorema 3.1.1.

Demonstração do Teorema 3.1.1. Seja $0 < \lambda^* < \min\{\lambda_0, \lambda_1^*, \lambda_2^*\}$, onde tais constantes são dadas em (3.1.3), (3.1.4) e (3.17) respectivamente. Seja $\lambda \in (0, \lambda^*)$, então para cada $c_k < 0$ e pelo Lema 3.1.4 sabemos que $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz $(PS)_{c_k}$. De fato, c_k é um valor crítico para $\tilde{J}$ (veja por exemplo [78]). Vamos considerar dois casos.

1. Se $-\infty < c_1 < c_2 < \dots < c_k < \dots$, então $\tilde{J}_\lambda$ tem infinitos pontos críticos e consequentemente J_λ teria infinitos pontos críticos, logo o problema (3.1) admite infinitas soluções.
2. Se existem $k_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tais que $c_{k_0} = c_{k_0+1} = \dots = c_{k_0+m_0}$, então pelo Lema 3.1.7, $\gamma(K_{c_{k_0}}) \geq m_0 + 1 \geq 2$, assim pela Proposição 1.7.2 necessariamente $K_{c_{k_0}}$ é infinito. Portanto, $\tilde{J}_\lambda$ tem infinitos pontos críticos.

Então pelo feito nos dois casos anteriores concluímos a prova de nosso resultado. $\square$

3.2 Caso linear

Nesta parte do capítulo, analisaremos o problema misto no caso linear, ou seja, quando $r = p$, portanto estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \quad (3.25)$$

Para analisar (3.25), aplicaremos a teoria do índice de cohomologia dada nas preliminares (veja Subseção 1.6). Com esta teoria construiremos uma sequência apropriada de autovalores para o operador não-linear

$$\mathcal{L}_{p,s} u(x) = -\Delta_p u(x) + (-\Delta)_p^s u(x), \quad (3.26)$$

como veremos no Lema 3.2.8. Por isto, definamos o que é um autovalor para (3.26).

Definição 3.2.1. Diremos que um número real λ é um autovalor para $\mathcal{L}_{p,s}$ se existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $v \neq 0$, solução do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{p,s} u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \quad (3.27)$$

A função $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é denotada de autovetor relativo a λ .

A seguir enunciamos nosso resultado principal desta subseção.

Teorema 3.2.2. Seja $\lambda^{**} = \frac{\mathcal{S}}{|\Omega|^{p/N}}$, onde $\mathcal{S}$ é definida em (1.13). Então, se

$$\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+m} < \lambda_{k+m+1}$$

para alguns $k, m \in \mathbb{N}$ e $\lambda > \lambda_{k+1} - \lambda^{**}$, o problema (3.25) tem m pares distintos de soluções não triviais $\pm u_j$ ($j=1, \dots, m$) tais que $u_j \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+1}$.

Para provarmos o Teorema 3.2.2, vamos argumentar como [76, Chapter 4]. Definamos os operadores $A_p, B_p \in C(W_0^{1,p}(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$ da seguinte forma:

$$\langle A_p(u), v \rangle = p \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u(x, y)(v(x) - v(y)) \, d\mu \right) \quad (3.28)$$

e

$$\langle B_p(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \, dx; \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (3.29)$$

onde $\mathcal{A}$ e $d\mu$ foram definidos em (3.5).

Temos as seguintes propriedades fundamentais na estratégia que usaremos inspirada em [76].

Lema 3.2.3. *As seguintes propriedades são satisfeitas:*

(A₁) A_p é $(p-1)$ -homogêneo e ímpar;

(A₂) A_p é uniformemente positivo (i.e.), existe um $c_0 > 0$ tal que

$$\langle A_p(u), u \rangle \geq c_0 \|u\|^p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

(A₃) A_p é um operador potencial;

(A₄) A_p é do tipo (S): verifica que, para toda sequência $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ com as propriedades

$$u_n \rightharpoonup u, \quad e \quad \langle A_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

a menos de subsequência $(u_n)_n$ é fortemente convergente para u .

Demonstração. As propriedades (A₁)–(A₃) seguem facilmente pela definição (3.28). Para provar que A_p satisfaz (A₄), note que, se $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência tal que, para algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega) \quad e \quad \langle A_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

então $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e portanto, a menos de subsequência

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ em } L^m(\Omega), \quad m \in [1, p^*), \\ u_n &\rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Agora, note que vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle A_p(u_n), (u_n - u) \rangle \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \cdot \nabla (u_n - u) \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u_n(x, y) ((u_n - u)(x) - (u_n - u)(y)) \, d\mu. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por um lado,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u) \, dx = \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u) \, dx + o_n(1), \quad (3.33)$$

e por outro lado, se $v_n = u_n - u$, então

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u_n(x, y) (v_n(x) - v_n(y)) \, d\mu &= \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} (\mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y)) (v_n(x) - v_n(y)) \, d\mu \\ &\quad + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u(x, y) (v_n(x) - v_n(y)) \, d\mu \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} (\mathcal{A}u_n(x, y) - \mathcal{A}u(x, y)) (v_n(x) - v_n(y)) \, d\mu + o_n(1). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Observe que, as últimas expressões no lado direito em (3.33) e em (3.34) são não-negativas (veja desigualdade de Simon), então segue de (3.32) que, em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u) dx = 0.$$

Logo, pela desigualdade de Simon (1.5.4) e a equivalência entre as normas $\|\cdot\|$ dada em (1.8) e $\|\nabla(\cdot)\|_p$, obtemos a existência de uma $C = C(p) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\| &\leq C_p \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^p dx \\ &\leq C_p \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u) dx \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ como queríamos demonstrar. □

Lema 3.2.4. *As seguintes propriedades são satisfeitas:*

(B₁) B_p é $(p-1)$ -homogêneo e ímpar;

(B₂) B_p é estritamente positivo (i.e.),

$$\langle B_p(u), u \rangle > 0 \quad \forall u \neq 0;$$

(B₃) B_p é um operador potencial e compacto.

Demonstração. Pela definição (3.29) é claro que B_p satisfaz (B₁)–(B₂). Para mostrarmos que B_p é um operador compacto, basta considerar $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Provaremos que

$$B_p(u_n) \rightarrow B_p(u) \quad \text{em } (W_0^{1,p}(\Omega))^*, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Se denotamos por $\|\cdot\|_*$ a norma no espaço dual $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, então

$$\begin{aligned} \|B_p(u_n) - B_p(u)\|_* &= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} |(B_p(u_n)(v) - B_p(u)(v))| \\ &= \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} p \left| \int_{\Omega} (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) v \, dx \right|. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pela desigualdade de Hölder e pela Proposição 1.5.2 existe uma constante positiva k_p tal que

$$\begin{aligned} \|B_p(u_n) - B_p(u)\|_* &\leq \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1} p \left(\int_{\Omega} |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u |v|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq k_p \left(\int_{\Omega} |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u |v|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sabemos pela Proposição 1.5.2 que $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Além disso, a Proposição 1.5.3 garante a existência de uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$|u_n(x)| \leq h(x) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo qual temos que

$$|u_n|^{p-2} u_n \leq (h(x))^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \quad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue vemos que (3.36) converge a zero, quando $n \rightarrow \infty$, concluindo assim que a menos de subsequência

$$B_p(u_n) \rightarrow B_p(u) \quad \text{em} \quad (W_0^{1,p}(\Omega))^*, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Neste ponto, devido as propriedades (A_1) – (A_4) e (B_1) – (B_3) , estamos autorizados a aplicar a Proposição 1.6.8. Neste caso, os potenciais de A_p e B_p são dados respetivamente, por:

$$\mathcal{I}_p(u) = \|u\|^p \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_p(u) = \|u\|_p^p.$$

Definimos o funcional $\Psi(u) = \frac{1}{\mathcal{J}_p(u)}$ para $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, e considere $\tilde{\Psi}$ a restrição de Ψ dada por

$$\tilde{\Psi} = \Psi|_{\mathcal{N}}, \quad \text{com} \quad \mathcal{N} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \mathcal{I}_p(u) = 1\}. \quad (3.37)$$

É um fato bem conhecido que $\mathcal{N}$ é uma variedade (Nehari) completa de classe C^1 para $p \geq 2$ (veja [76]). Provaremos que os valores e pontos críticos de $\tilde{\Psi}$ na verdade coincidem com os autovalores e autovetores de (3.27). Para tal propósito, precisaremos dos três seguintes Lemas para encontrarmos uma sequência apropriada $(\lambda_k)_k$ de autovalores para (3.27) usando a Proposição 1.6.9.

Lema 3.2.5. *Se W é um espaço vetorial de Banach sobre $\mathbb{R}$ e $L, L_0 \in W^*$, então*

$$\|L|_{\text{Ker}(L_0)}\|_* = \min_{\mu \in \mathbb{R}} \|L - \mu L_0\|_*,$$

onde $\|\cdot\|_*$ denota a norma de W^* .

Demonstração. Pela definição de norma do operador, para todo $\mu \in \mathbb{R}$

$$\|L|_{\text{Ker}(L_0)}\|_* = \sup_{\substack{v \in \text{Ker}(L_0) \\ \|v\|=1}} \langle L, v \rangle \leq \sup_{\|v\|=1} \langle L - \mu L_0, v \rangle = \|L - \mu L_0\|_*.$$

Reciprocamente, pelo teorema de extensão de Hahn–Banach (preservando a norma), existe um $\hat{L} \in W^*$ tal que

$$\hat{L}|_{\text{Ker}(L_0)} = L \quad \text{e} \quad \|\hat{L}\| = \|L|_{\text{Ker}(L_0)}\|_*.$$

Como $\text{Ker}(L_0) \subseteq \text{Ker}(L - \hat{L})$, existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tal que $L - \hat{L} = \mu_0 L_0$. Então, segue que

$$\|L - \mu_0 L_0\|_* = \|\hat{L}\|_*,$$

mostrando a igualdade desejada. □

Lema 3.2.6. $u \in \mathcal{N}$ é um ponto crítico de $\tilde{\Psi}$ se, e somente se, $\lambda = \tilde{\Psi}(u)$ é um autovetor para (3.26).

Demonstração. Notemos que, para cada $u \in \mathcal{N}$

$$\tilde{\Psi}'(u) = -\frac{J'_p(u)}{\mathcal{J}_p(u)} = -\tilde{\Psi}(u)^2 B_p(u) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}'_p(u) = A_p(u).$$

Então pelo Lema 3.2.5, $\tilde{\Psi}'(u) = 0$, se e somente se,

$$\mu A_p(u) + \tilde{\Psi}(u)^2 B_p(u) = 0 \quad \text{para algum} \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (3.38)$$

Suponhamos que $u \in \mathcal{N}$ é ponto crítico para $\tilde{\Psi}$, então usando (3.38)

$$\mu = -\tilde{\Psi}(u)^2 \frac{\langle B_p(u), u \rangle}{\langle A_p(u), u \rangle} = -\tilde{\Psi}(u)^2 \frac{\mathcal{J}_{\theta,p}(u)}{\mathcal{J}_{\theta,p}(u)} = -\tilde{\Psi}(u) < 0.$$

substituindo tal informação na equação (3.38) obtemos que

$$A_p(u) = \tilde{\Psi}(u) B_p(u),$$

isto é, $\lambda = \tilde{\Psi}(u)$ é um autovalor para (3.26).

Reciprocamente, se $\lambda = \tilde{\Psi}(u)$ é um autovalor para (3.26), então

$$\lambda = \frac{\mathcal{I}_p(u)}{\mathcal{J}_p(u)} \quad \text{e} \quad A_p(u) = \lambda B_p(u).$$

Logo, para $\mu = -\tilde{\Psi}(u)$ a identidade (3.38) é satisfeita, e portanto $\tilde{\Psi}'(u) = 0$. □

Lema 3.2.7. *O funcional $\tilde{\Psi}$ dado em (3.37) satisfaz a condição (PS) restrita à $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_n \subset \mathcal{N}$ tais que

$$\tilde{\Psi}(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \tilde{\Psi}'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Claramente $(u_n)_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, portanto existe um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por (B_3) , temos $B_p(u_n) \rightarrow B_p(u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, então

$$\tilde{\Psi}(u_n) = \frac{p}{\langle B_p(u_n), u_n \rangle} \longrightarrow \frac{p}{\langle B_p(u), u \rangle} \neq 0,$$

a qual implica que $c \neq 0$.

Pelo Lema 3.2.5, existe uma sequência $(\mu_n)_n \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\mu_n A_p(u_n) + \tilde{\Psi}(u_n)^2 B_p(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Aplicando (3.39) a u_n , obtemos que $\mu_n + \tilde{\Psi}(u_n) \rightarrow 0$ implica que $\mu_n \rightarrow -c \neq 0$. Aplicando (3.39) a $u_n - u$, obtemos $\langle A_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$ dado que $\langle B_p(u_n), u_n - u \rangle \rightarrow 0$, logo por (A_4) , a menos de subsequência, temos que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e como $\mathcal{N}$ é fechado concluímos $u_n \rightarrow u \in \mathcal{N}$. $\square$

Pela análise que acabamos de realizada, podemos construir uma sequência $(\lambda_k)_k$ de autovalores para (3.27), aplicando assim a Proposição 1.6.9. A ideia é seguir a estratégia empregada em [76, Theorem 4.6].

Lema 3.2.8. *Seja $\mathcal{F}$ a classe dos subconjuntos simétricos de $\mathcal{N}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ definamos*

$$\mathcal{F}_k = \{N \in \mathcal{F} : \text{ind}(N) \geq k\} \quad \text{e} \quad \lambda_k = \inf_{N \in \mathcal{F}_k} \sup_{u \in N} \tilde{\Psi}(u). \quad (3.40)$$

Então, $(\lambda_k)_k$ é uma sequência não-decrescente de autovalores para (3.27), que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) *Se $\lambda_k = \dots = \lambda_{k+m-1} = \lambda$, então $\text{ind}(\tilde{K}_\lambda) \geq m$; onde K_λ é definido em (1.4.1);*

(ii) *O menor autovalor, chamado primeiro autovalor, é dado por*

$$\lambda_1 = \min_{u \in \mathcal{N}} \tilde{\Psi}(u) = \min_{u \neq 0} \frac{\mathcal{I}_p(u)}{\mathcal{J}_p(u)};$$

(iii) *Temos que $\text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Psi}_{\lambda_k}) < k \leq \text{ind}(\tilde{\Psi}^{\lambda_k})$. Se $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, então*

$$\text{ind}(\tilde{\Psi}^{\lambda_k}) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Psi}_{\lambda_k}) = \text{ind}(\tilde{\Psi}^\lambda) = \text{ind}(\mathcal{N} \setminus \tilde{\Psi}_{\lambda_{k+1}}) = k;$$

(iv) $\lambda_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Observamos que $\lambda_1 > \lambda^{**}$, com λ^{**} dado no enunciado do Teorema 3.2.2. Se $u_1 \in \mathcal{N}$ denota o autovetor associado a λ_1 , então note que pela desigualdade de Hölder temos que

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u_1\|_p^p + [u_1]_{s,p}^p}{\|u_1\|_p^p} \geq \frac{\mathcal{S}\|\nabla u_1\|_{p^*}^{p/p^*}}{\|u_1\|_p^p} > \frac{S}{|\Omega|^{1-p/p^*}} = \lambda^{**}, \quad (3.41)$$

com desigualdade estrita, pois $\mathcal{S}$ não é atingido em u_1 . Portanto, graças a (3.41) o Teorema 3.2.2 é verificável para os índices $k = 1$ e $m = 0$. O funcional associado ao problema (3.25) e sua respectiva derivada de Fréchet são

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx, \quad \text{e para toda } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \langle J'_\lambda(u), v \rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u(x, y)(v(x) - v(y)) d\mu \\ &\quad - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx - \int_\Omega |u|^{p^*-2} uv dx. \end{aligned}$$

No Lema 3.2.10 a seguir, estabeleceremos um resultado que garante os valores para os quais J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, ou seja, um resultado semelhante ao Lema 3.1.2. De fato, omitiremos a prova deste Lema, pois a mesma é totalmente análoga a prova do Lema 3.1.2.

Lema 3.2.9. *Seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada de (PS) à nível c para J_λ . Então, a menos de subsequência, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p em Ω quando $n \rightarrow \infty$.*

Lema 3.2.10. *J_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p}$.*

Demonstração. Sejam $c < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p}$ e $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Mostraremos somente que $(u_n)_n$ é uniformemente limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois graças ao Lema 3.2.9 o resto da prova é similar ao demonstrado no Lema 3.2.10.

Assumamos por contradição que $(u_n)_n$ não é limitada, então a menos de subsequência, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e $u_n \neq 0$. Notemos que $(u_n \|u_n\|^{-1})_n$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então por (3.42)

$$\begin{aligned} o_n(1) = \langle J'_\lambda(u_n), u_n \|u_n\|^{-1} \rangle &= \frac{\|u_n\|^p - \lambda \|u_n\|_p^p - \|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|} \\ &= \frac{pJ_\lambda(u_n) + \left(\frac{p}{p^*} - 1\right) \|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|}, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Então, da estimativa acima combinada com (3.42) obtemos que

$$\frac{\|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.43)$$

e como $\|u_n\| \rightarrow \infty$ se $n \rightarrow \infty$, também obtemos que

$$\frac{\|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|^p} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.44)$$

Analogamente,

$$\frac{\|u_n\|_{p^*}^p}{\|u_n\|^p} = \frac{\|u_n\|_{p^*}^p}{\|u_n\|^{p/p^*} \|u_n\|^{p(p^*-1)/p^*}} \frac{1}{\|u_n\|^{p(p^*-1)/p^*}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.45)$$

Por último, mostraremos a seguinte convergência

$$\frac{\|u_n\|_p^p}{\|u_n\|^p} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.46)$$

Pela desigualdade de Hölder é válida a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|u_n\|_p^p &= \int_{\Omega} |u_n|^p dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_n|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} |\Omega|^{1-p/p^*} \\ &= \|u_n\|_{p^*}^p |\Omega|^{1-p/p^*}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\|u_n\|_p^p}{\|u_n\|^p} \leq \frac{\|u_n\|_{p^*}^p}{\|u_n\|^p} |\Omega|^{1-p/p^*} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.47)$$

Por (3.42) e do fato que $\|u_n\| \rightarrow \infty$, temos que

$$\langle J'_\lambda(u_n), u_n \|u_n\|^{-p} \rangle \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim, usando (3.44) e (3.46) concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \|u_n\|^{-p} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|^p - \lambda \|u_n\|_p^p - \|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|^p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lambda \frac{\|u_n\|_p^p}{\|u_n\|^p} - \frac{\|u_n\|_{p^*}^{p^*}}{\|u_n\|^p} \right) = 1, \end{aligned}$$

a qual gera uma contradição. Portanto, $(u_n)_n$ é limitada e podemos proceder como no Lema 3.2.10. □

Pelo Lema 3.2.8, se $\lambda_{k+m} < \lambda_{k+m+1}$, então $\text{ind}(\tilde{\Psi}^{k+m}) = k+m$. Com o objetivo de aplicar a Proposição 1.6.4, construiremos um subconjunto simétrico e compacto A_0 de $\tilde{\Psi}^{k+m}$ com índice idêntico a $k+m$.

Para isto, definamos o seguinte operador $\mathcal{L}_1$. Para cada $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle \mathcal{L}_1(u), v \rangle := \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u(x, y)(v(x) - v(y)) d\mu. \quad (3.48)$$

Mostraremos que de fato $\mathcal{L}_1(u)$ verifica a seguinte propriedade.

Definição 3.2.11. Dado um espaço vetorial de Banach W , diremos que um operador $T : W \longrightarrow W^*$ é estritamente monótono se

$$\langle T(u) - T(v), u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in W, \quad \text{com } u \neq v,$$

e com igualdade se, e somente se, $u = v$.

Lema 3.2.12. O operador $\mathcal{L}_1$ em (3.48) é estritamente monótono.

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder, não é difícil provar que para cada $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se

$$\langle \mathcal{L}_1(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u(x, y)(v(x) - v(y)) \, d\mu \leq \|u\|^{p-1} \|v\|. \quad (3.49)$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1(u) - \mathcal{L}_1(v), u - v \rangle &= \|u\|^p - \langle \mathcal{L}(u), v \rangle - \langle \mathcal{L}(v), u \rangle + \|v\|^p \\ &\geq \|u\|^p - \|u\|^{p-1} \|v\| - \|v\|^{p-1} \|u\| + \|u\|^p \\ &= (\|u\|^{p-1} - \|v\|^{p-1})(\|u\| - \|v\|) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Portanto, se $\langle \mathcal{L}_1(u) - \mathcal{L}_1(v), u - v \rangle = 0$, necessariamente $\|u\| = \|v\|$.

Pela desigualdade em (3.49) temos que

$$\langle \mathcal{L}_1(u), u \rangle = \|u\|^p = \|u\|^{p-1} \|u\| \geq \langle \mathcal{L}(u), v \rangle \implies \langle \mathcal{L}(u), u - v \rangle \geq 0, \quad (3.51)$$

$$\langle \mathcal{L}_1(v), v \rangle = \|v\|^p = \|v\|^{p-1} \|v\| \geq \langle \mathcal{L}(v), u \rangle \implies \langle \mathcal{L}(v), v - u \rangle \geq 0. \quad (3.52)$$

Se $\langle \mathcal{L}_1(u) - \mathcal{L}_1(v), u - v \rangle = 0$, então

$$\langle \mathcal{L}_1(u) - \mathcal{L}_1(v), u - v \rangle = \langle \mathcal{L}_1(u), u - v \rangle + \langle \mathcal{L}_1(v), v - u \rangle = 0,$$

e assim graças a (3.51) e (3.52)

$$\langle \mathcal{L}_1(u), u - v \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathcal{L}_1(v), v - u \rangle = 0.$$

Em particular valem as identidades

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1(u), v \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}u(x, y)(v(x) - v(y)) d\mu = \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} |\mathcal{A}u(x, y)| |v(x) - v(y)| d\mu = \|u\|^{p-1} \|v\|, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1(v), u \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \mathcal{A}v(x, y)(u(x) - u(y)) d\mu = \\ &= \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-1} |\nabla u| \, dx + \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} |\mathcal{A}v(x, y)| |u(x) - u(y)| d\mu = \|v\|^{p-1} \|u\|. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v - |\nabla u|^{p-1} |\nabla v|) \, dx = \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^{2N}} (|\mathcal{A}u(x, y)| |v(x) - v(y)| - \mathcal{A}u(x, y)(v(x) - v(y))) \, d\mu \geq 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Assim, deduzimos que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v - |\nabla u|^{p-1} |\nabla v|) \, dx = 0,$$

e desta forma, existe uma função escalar $\gamma(x) \geq 0$ tal que

$$\nabla u(x) = \gamma(x) \nabla v(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Então, como a igualdade em (3.53) é satisfeita (veja [49, Lemma 3.2]), obtemos que $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$, onde

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx, \quad a_2 = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ b_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+ps}} \, dx dy, \\ b_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \, dx dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Holder $a_1 - a_2 \leq 0$ e $b_2 - b_1 \geq 0$, logo obtemos que $a_1 = a_2$. Logo, pelo caso da igualdade na desigualdade de Holder, temos na verdade que existe uma constante $\alpha \geq 0$ tal que $|\nabla u(x)| = \alpha |\nabla v(x)|$ q.t.p $x \in \Omega$. Assim, concluímos que $u(x) = \alpha v(x)$ q.t.p $x \in \Omega$, mas, lembremos que $\|u\| = \|v\|$, pelo qual, se $\|v\| \neq 0$, então $\alpha = 1$ e desta forma $u = v$. No caso em que $\|v\| = 0$, automaticamente $\|u\| = 0$ e isto implica $u = v = 0$.

□

Lema 3.2.13. Para cada $w \in L^p(\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p u + (-\Delta)_p^s u = |w|^{p-2} w & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \quad (3.56)$$

tem uma única solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, o operador $H : L^p(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$, definido pela relação $w \mapsto H(w) = u$, com u a solução de (3.56), é contínuo.

Demonstração. A existência de soluções para (3.56) segue de um argumento de minimização clássico. A unicidade das soluções segue do Lema 3.2.12. Portanto o operador H está bem definido. Além disso, a continuidade do operador segue facilmente por um argumento padrão. $\square$

Lema 3.2.14. Se $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, então $\tilde{\Psi}^{\lambda_k}$ tem um subconjunto A_0 simétrico e compacto com $\text{ind}(A_0) = k$.

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\pi_p(u) = \frac{u}{\|u\|_p}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$$

chamada de **projeção radial** sobre $\mathcal{N}_p = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_p = 1\}$, e definamos o conjunto

$$A = \pi_p(\tilde{\Psi}^{\lambda_k}) = \{w \in \mathcal{N}_p : \|w\|^p \leq \lambda_k\}.$$

Então, invocando a Proposição 1.6.2 e o Lema 3.2.8, obtemos que $\text{ind}(A) = \text{ind}(\tilde{\Psi}^{\lambda_k}) = k$.

Seja $u = H(v)$ para $v \in A$, com H o operador definido no Lema 3.2.13. Então, se $\mathcal{L}_1$ é o operador definido em (3.48), temos as seguintes estimativas:

$$\langle \mathcal{L}(u), u \rangle = \|u\|^p = \int_{\Omega} |v|^{p-2} uv \, dx \leq \|v\|_p^{p-1} \|u\|_p,$$

$$1 = \langle \mathcal{L}(u), v \rangle \leq \|u\|_p^{p-1} \|v\|.$$

Portanto, obtemos que

$$\frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_p} \leq 1 \leq \|u\|_p^{p-1} \|v\| \implies \|\pi_p(u)\| = \frac{\|u\|_p}{\|u\|_p} \leq \|v\|,$$

e como consequence $\pi_p(H(A)) \subseteq A$. Definamos $\bar{H} = \pi_p \circ H$, e seja $\bar{A} = \bar{H}(A)$ e consideremos uma sequência $(\varphi_n)_n \subset \bar{A}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um $v_n \in A$ tal que $\bar{H}(v_n) = \varphi_n$. Como $(v_n)_n \subset A$, obtemos que $\|v_n\|_p^p \leq \lambda_k$, e portanto, a menos de subsequência, existe um $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para o qual $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Então, a Proposição 1.5.2 e a semi-continuidade inferior da norma implicam que

$$v_n \rightarrow v, \quad \text{em } L^p(\Omega), \quad e \quad \|v\|^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^p \leq \lambda_k.$$

Em particular $v \in A$. Pela continuidade do operador H (Lema 3.2.13,) temos que $H(v_n) \rightarrow H(v)$, e assim $\varphi_n = \bar{H}(v_n) \rightarrow \bar{H}(v) \in \bar{A}$, quando $n \rightarrow \infty$, pelo qual $\bar{A}$ é compacto em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por outro lado, dado que $\bar{A} \subset A$ e $\bar{H}$ é uma aplicação contínua e ímpar de A para $\bar{A}$, obtemos pela Proposição 1.6.2 a identidade $\text{ind}(A) = \text{ind}(\bar{A}) = k$. Finalmente, seja

$$\pi(u) = \frac{u}{\|u\|}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\},$$

chamada de **projeção radial sobre $\mathcal{N}$** .

Definamos $A_0 = \pi(\bar{A})$, então $A_0 \subseteq \tilde{\Psi}^{\lambda_k}$ é compacto em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e satisfaz $\text{ind}(\bar{A}) = \text{ind}(A_0) = k$ como almejávamos. $\square$

Por fim, concluiremos esta subseção dando a prova do Teorema 3.2.2, a qual será baseada principalmente na Proposição 1.6.4.

Demonstração do Teorema 3.2.2. Pelo Lema 3.2.10, J_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo

$$c < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p}.$$

A ideia será aplicar a Proposição 1.6.4 com $b = \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p}$.

Pelo Lema 3.2.14, $\tilde{\Psi}^{\lambda_{k+m}}$ possui um subconjunto compacto e simétrico A_0 com $\text{ind}(A_0) = k + m$. Seguindo a Proposição 1.6.4, escrevamos $B_0 = \tilde{\Psi}_{\lambda_{k+m}}$. Então, pelo Lema 3.2.8, temos que $\text{ind}(\mathcal{N} \setminus B_0) = k + m$.

Sejam $0 < r < R$, A , B e X como na Proposição 1.6.4. Para cada $u \in B_0$, usando (1.13) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} J_\lambda(ru) &= \frac{r^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda r^p}{p} \int_\Omega |u|^p dx - \frac{r^{p^*}}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx \\ &\geq \frac{r^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda r^p}{p} \frac{\|u\|^p}{\lambda_{k+m}} - \frac{r^{p^*}}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx \\ &\geq \frac{r^p}{p} \|u\|^p \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) - \frac{r^{p^*}}{p^*} \|u\|^{p^*} S^{-p^*/p} = \frac{r^p}{p} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) - \frac{r^{p^*}}{p^*} S^{-p^*/p}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Agora, dado que $\lambda < \lambda_{k+m}$ e $p < p^*$, segue da estimativa (3.57) que $\inf_{u \in B} J_\lambda(u) > 0$ para r suficientemente pequeno. Por outro lado, para $u \in A_0 \subset \tilde{\Psi}^{\lambda_{k+m}}$ temos pela desigualdade

de Hölder que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(Ru) &= \frac{R^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda R^p}{p} \int_\Omega |u|^p dx - \frac{R^{p^*}}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx \\
&\leq \frac{R^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda R^p}{p} \frac{\|u\|^p}{\lambda_{k+m}} - \frac{R^{p^*}}{p^*} \left(\frac{\int_\Omega |u|^{\theta p} dx}{\lambda_{k+m} |\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}}} \right)^{p^*/p} \\
&\leq \frac{R^p}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda R^p}{p} \frac{\|u\|^p}{\lambda_{k+m}} - \frac{R^{p^*}}{p^*} \left(\frac{\|u\|^p}{\lambda_{k+m} |\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}}} \right)^{p^*/p} \\
&= \frac{R^p}{p} \|u\|^p \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+m}} \right) - \frac{R^{p^*}}{p^*} \frac{1}{\left(\lambda_{k+m} |\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}} \right)^{p^*/p}}. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Agora, uma vez que $\lambda < \lambda_{k+m}$ e $p < p^*$, pela estimativa (3.58) podemos tomar $R > r$ suficientemente grande tal que $J_\lambda(u) \leq 0$, para cada $u \in A$. Para cada $u \in X$, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} dx \\
&\leq \frac{\lambda_{k+m} - \lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{p^*} \left(\frac{\int_\Omega |u|^p dx}{|\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}}} \right)^{p^*/p} \\
&= \frac{\lambda_{k+m} - \lambda}{p} \int_\Omega |u|^p dx - \frac{1}{p^*} \left(\frac{\|u\|_p^p}{|\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}}} \right)^{p^*/p}. \tag{3.59}
\end{aligned}$$

Definamos $g_\lambda : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$g(\tau) = \left(\frac{\lambda_{k+m} - \lambda}{p} \right) \tau - \frac{1}{p^*} \left(\frac{\tau}{|\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}}} \right)^{p^*/p}.$$

Dado que $p < p^*$ e $\lambda_{k+m} > \lambda$, a função g_λ atinge seu máximo no ponto crítico $\tau_0 = (\lambda_{k+m} - \lambda)^{p/(p^*-p)} |\Omega|$, com valor

$$\max g_\lambda(\tau_0) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) (\lambda_{k+m} - \lambda)^{\frac{p^*}{p^*-p}} |\Omega|.$$

Portanto,

$$\sup_{u \in X} J_\lambda(u) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) (\lambda_{k+m} - \lambda)^{\frac{p^*}{p^*-p}} |\Omega| \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \mathcal{S}^{\frac{p^*}{p^*-p}} = \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p}$$

pois $\lambda_{k+m} - \lambda^{**} < \lambda$. Usando a Proposição 1.6.4, obtemos a existência de m pares distintos de pontos críticos $\pm u_j$ para J_λ , com $j = 1, \dots, m$, tais que

$$0 < J_\lambda(u_j) \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) (\lambda_{k+m} - \lambda)^{\frac{p^*}{p^*-p}} |\Omega| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \lambda \rightarrow \lambda_{k+m},$$

e isto implica que

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \|u\|_{p^*}^{p^*} = J_\lambda(u_j) - \frac{1}{p} \langle J'_\lambda(u_j), u_j \rangle = J_\lambda(u_j) \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+m}$. Além disso, a desigualdade de Hölder implica que $u_j \rightarrow 0$ em $L^p(\Omega)$, quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+m}$, e portanto temos que

$$\|u_j\|^p = \left(pI_\lambda(u_j) + \lambda \|u_j\|_p^p + \frac{p}{p^*} \|u_j\|_{p^*}^{p^*} \right) \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \lambda_{k+m}$.

□

3.3 Caso superlinear

Neste último caso estudaremos o problema super-linear, mais precisamente, analisaremos a existência de soluções não-triviais para o problema misto

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{r-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \quad (3.60)$$

com $0 < s < 1 < p < r < p^*$. A ideia é aplicar a Proposição 1.4.3. Não obstante, precisamos construir a estrutura apropriada em base a lemas e resultados que daremos nesta seção. O resultado principal para esta parte do trabalho é

Teorema 3.3.1. *O problema (3.60) tem pelo menos uma solução não trivial nos seguintes casos :*

- (i) Se $\min \left\{ \frac{N-p}{p-1}, p(1-s) \right\} > N - r \frac{N-p}{p}$, para qualquer $\lambda > 0$;
- (ii) Se $\min \left\{ \frac{N-p}{p-1}, p(1-s) \right\} \leq N - r \frac{N-p}{p}$, para todo $\lambda \geq \lambda^*$, com $\lambda^* > 0$ a ser determinado *posteriori*.

Por simplicidade, escreveremos

$$m_{N,p,s} := \min \left\{ \frac{N-p}{p-1}, p(1-s) \right\} \quad \text{e} \quad \beta_{N,p,s} := N - r \frac{N-p}{p}. \quad (3.61)$$

Além disso, nosso funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (3.60) é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{r} \int_{\Omega} |u|^r dx - \frac{1}{p^*} \int_{\Omega} |u|^{p^*} dx. \quad (3.62)$$

Com o objetivo de provar o Teorema 3.3.1, enunciaremos os seguintes Lemas, que na verdade são padrões em cada um dos casos. A prova deste primeiro resultado é totalmente análoga ao que fizemos no Lema 3.1.2. Logo, vamos omití-la.

Lema 3.3.2. *Seja $(u_n)_n \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada de $(PS)_c$ para J_λ . Então, a menos de subsequência, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ q.t.p. em Ω quando $n \rightarrow \infty$.*

O próxima Lema garante a condição (PS) para nosso operador J_λ . A prova deste resultado é totalmente semelhante a prova realizada no Lema 3.1.3, portanto somente vamos enunciá-lo.

Lema 3.3.3. *Seja $\lambda > 0$. Então, J_λ satisfaz $(PS)_c$ para todo $0 < c < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p}$; onde $\mathcal{S}$ é dado por (1.13).*

Agora, a ideia é dar um truncamento apropriado da função

$$U_\varepsilon(x) = \frac{K_{N,p} \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}}{(\varepsilon^{p/(p-1)} + |x|^{p/(p-1)})^{(N-p)/p}}, \quad \text{com } \varepsilon > 0, \quad (3.63)$$

a qual está em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e na qual, como mostrado em [69] se atinge a melhor constante da imersão dada em (1.13), com constante de normalização $K_{N,p} > 0$ dada por

$$K_{N,p} = \left[N \left(\frac{N-p}{p-1} \right)^{p-1} \right]^{(N-p)/p^2}.$$

Fixemos $h > 0$ tal que $\overline{B_{4h}(0)} \subset \Omega$ e definamos a função cut-off $\phi_h \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ tal que

$$\phi_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_h(0), \\ 0 & \text{se } x \in B_{2h}^c(0). \end{cases} \quad (3.64)$$

Para todo $\varepsilon > 0$, escrevamos

$$u_\varepsilon = \phi_h U_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad v_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_{p^*}} \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.65)$$

Segundo [54, Lemma 7.1] (veja também [53, 40, 55]), temos as seguintes estimativas.

Lema 3.3.4. *Seja v_ε como em (3.65). Então,*

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_p^p = \mathcal{S} + \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}) \quad (3.66)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Lema 3.3.5. Seja v_ε como em (3.65). Então, existe $C > 0$ tal que

$$\|v_\varepsilon\|_r^r \geq C\varepsilon^{N-r(N-p)/p} \quad (3.67)$$

para qualquer $r > p^*(1 - 1/p)$.

Inspirados em [84, Proposition 21] podemos mostrar a seguinte estimativa.

Lema 3.3.6. Seja u_ε dada em (3.65). Então,

$$\int \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy = \mathcal{O}(\varepsilon^{m_{N,p,s}})$$

com $m_{N,p,s} = \min \left\{ \frac{N-p}{p-1}, p(1-s) \right\}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Demonstração. Seja $\varrho > 0$, por (3.63) e (3.65), para $x \in B_\varrho^c(0)$ obtemos que

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \frac{K_{N,p} \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}}{(\varepsilon^{p/(p-1)} + \varrho^{p/(p-1)})^{(N-p)/p}} \leq C \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}. \quad (3.68)$$

Por outro lado, sempre que $\|x\| \geq \varrho$ temos

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x)| &= \left| \nabla \phi_h(x) \frac{K_{N,p} \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}}{(\varepsilon^{p/(p-1)} + |x|^{p/(p-1)})^{(N-p)/p}} \right. \\ &\quad \left. + \phi_h(x) \frac{N-p}{p-1} |x|^{(2-p)/(p-1)} x \frac{K_{N,p} \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}}{(\varepsilon^{p/(p-1)} + |x|^{p/(p-1)})^{N/p}} \right| \\ &\leq C \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)} \left[\frac{1}{(\varepsilon^{p/(p-1)} + |x|^{p/(p-1)})^{(N-p)/p}} + \frac{|x|^{p/(p-1)}}{\varrho} \frac{1}{(\varepsilon^{p/(p-1)} + |x|^{p/(p-1)})^{N/p}} \right] \\ &\leq C \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Se $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in B_h^c(0)$ com $\|x - y\| \leq h/2$, então pela expansão de Taylor de ordem um segue que

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq |\nabla u(\xi)| \|x - y\|$$

com ξ no segmento $[x, y]$ (unindo x a y), então ξ tem a forma $\xi = tx + (1-t)y$ para algum $t \in [0, 1]$. Logo,

$$\|\xi\| = \|y + t(x - y)\| \geq \|y\| - t\|x - y\| \geq h - th/2 \geq h/2,$$

assim, da desigualdade (3.69) com $\varrho = h/2$, obtemos que

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq C \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)} \|x - y\| \quad \text{se } x \in \mathbb{R}^N, y \in B_h^c(0) \text{ com } \|x - y\| \leq h/2. \quad (3.70)$$

Agora, combinando (3.70) e (3.68) com $\varrho = h$, temos a estimativa

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq C \varepsilon^{(N-p)/p(p-1)} \min \{1, \|x - y\|\} \quad \text{se } x, y \in B_r^c(0). \quad (3.71)$$

Consideremos agora os conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathbb{D} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : x \in B_h(0), y \in B_h^c(0) \text{ e } |x - y| > h/2\}, \\ \mathbb{E} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : x \in B_h(0), y \in B_h^c(0) \text{ e } |x - y| \leq h/2\}.\end{aligned}$$

Logo, podemos descompor $[u_\varepsilon]_{p,s}^p$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy &= \iint_{B_r(0) \times B_r(0)} \frac{|U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\ &+ 2 \iint_{\mathbb{D}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\ &+ 2 \iint_{\mathbb{E}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\ &+ \iint_{B_h^c(0) \times B_h^c(0)} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Por (3.71) temos que

$$\begin{aligned}\iint_{B_h^c(0) \times B_h^c(0)} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy &\leq C\varepsilon^{(N-p)/(p-1)} \iint_{B_{2h}(0) \times \mathbb{R}^N} \frac{\min\{1, |x - y|^p\}}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}),\end{aligned}\tag{3.73}$$

enquanto que (3.70) garante que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{E}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy &\leq C\varepsilon^{(N-p)/(p-1)} \iint_{\substack{x \in B_h(0), y \in B_h^c(0) \\ |x - y| \leq h/2}} \frac{|x - y|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\ &\leq C\varepsilon^{(N-p)/(p-1)} \int_{B_h(0)} dx \int_{B_{h/2}(0)} \frac{1}{|\xi|^{N+ps-+}} d\xi = \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}).\end{aligned}\tag{3.74}$$

Pela definição de ϕ_h em (3.64) obtemos que $u_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x)$ para todo $x \in B_h(0)$, então para qualquer par $(x, y) \in \mathbb{D}$ pela convexidade (de $t \mapsto t^p$) temos

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p = |U_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p \leq 2^{p-1} [|U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon(y)|^p + |U_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(y)|^p],$$

para o qual obtemos

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \leq 2^{p-1} \left(\iint_{\mathbb{D}} \frac{|U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy + \iint_{\mathbb{D}} \frac{|U_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right).\tag{3.75}$$

Por (3.68) com $\vartheta = h$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{D}} \frac{|U_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy &\leq 2^{p-1} \iint_{\mathbb{D}} \frac{|U_\varepsilon(y)|^p + |u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\
&\leq 2^p \iint_{\mathbb{D}} \frac{|U_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\
&\leq C_{\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}} \iint_{\substack{x \in B_h(0), y \in B_h^c(0) \\ |x-y| > h/2}} \frac{1}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \\
&\leq C_{\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}} \int_{x \in B_h(0)} dx \int_{B_{h/2}^c(0)} \frac{1}{|\xi|^{N+ps}} d\xi = \mathcal{O}(\varepsilon^{(N-p)/(p-1)}).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Por fim, por uma mudança dupla de variáveis $x = \varepsilon\xi$ e $y = \varepsilon\zeta$, obtemos

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy = \varepsilon^{p-ps} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|U_1(\xi) - U_1(\zeta)|^p}{|\xi - \zeta|^{N+ps}} d\xi d\zeta = \mathcal{O}(\varepsilon^{p-ps}). \tag{3.77}$$

É claro que a desigualdade

$$\iint_V \frac{|U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy$$

é satisfeita com $V = B_r(0) \times B_r(0)$ e $V = \mathbb{D}$, então combinando (3.72)–(3.77) temos a conclusão da prova. □

Lema 3.3.7. Sejam v_ε dada em (3.65) e $m_{N,p,s}, \beta_{N,p,r} > 0$ como em (3.61). Então, temos os seguintes dois casos:

(i) Se $m_{N,p,s} > \beta_{N,p,r}$, então existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\sup_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\varepsilon) < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p} \quad \text{para todo } \lambda > 0;$$

(ii) Se $m_{N,p,s} \leq \beta_{N,p,r}$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda^* = \lambda^*(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\varepsilon) < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p} \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda^*.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, então

$$J_\lambda(tv_\varepsilon) = \frac{t^p}{p} (\|\nabla v_\varepsilon\|_p^p + [v_\varepsilon]_{p,s}^p) - \lambda \frac{t^r}{r} \|v_\varepsilon\|_r^r - \frac{t^{p^*}}{p^*}. \tag{3.78}$$

Como provado em [54, Lemma 7.1] é válida a igualdade

$$\|u_\varepsilon\|_{p^*}^{p^*} = \mathcal{S}^{N/p} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N/(p-1)}).$$

Assim, pelos Lemas 3.3.4–3.3.6 segue que

$$J_\lambda(tv_\varepsilon) \leq \frac{t^p}{p} (\mathcal{S} + \mathcal{O}(\varepsilon^{m_{N,p,s}})) - C\lambda \frac{t^r}{r} \varepsilon^{N-r(N-p)/p} - \frac{t^{p^*}}{p^*}. \quad (3.79)$$

Permita-nos agora definir

$$g(t) := \frac{t^p}{p} (\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}}) - C\lambda \frac{t^r}{r} \varepsilon^{N-r(N-p)/p} - \frac{t^{p^*}}{p^*}.$$

Note que $g(0) = 0$ e $g(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, existe $t_{\varepsilon,\lambda} \geq 0$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} g(t) = g(t_{\varepsilon,\lambda}).$$

Se $t_{\varepsilon,\lambda} = 0$, então a prova do lema segue facilmente. Por outro lado, se $t_{\varepsilon,\lambda} > 0$, então obtemos

$$0 = g'(t_{\varepsilon,\lambda}) = t_{\varepsilon,\lambda}^{p-1} (\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}}) - C\lambda t_{\varepsilon,\lambda}^{r-1} \varepsilon^{N-r(N-p)/p} - t_{\varepsilon,\lambda}^{p^*-1}, \quad (3.80)$$

para o qual obtemos

$$t_{\varepsilon,\lambda} < (\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}})^{1/(p^*-p)}.$$

Então, distinguimos dois casos:

Case (i): $m_{N,p,s} > \beta_{N,p,s}$.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, por (3.80) obtemos $t_{\varepsilon,\lambda} \geq \mu_\lambda > 0$, e além disso usando que a função

$$t \mapsto \frac{t^p}{p} (\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}}) - \frac{t^{p^*}}{p^*}$$

é não-decrescente no intervalo fechado $[0, (\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}})^{1/(p^*-p)}]$, o qual contém $t_{\varepsilon,\lambda}$. Concluimos portanto que

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} g(t) &= g(t_{\varepsilon,\lambda}) \\ &< \frac{(\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}})^{1+p/(p^*-p)}}{p} - C\varepsilon^{N-r(N-p)/p} - \frac{(\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}})^{p^*/(p^*-p)}}{p^*} \\ &= \frac{1}{N} (\mathcal{S} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}})^{N/p} - C\varepsilon^{N-r(N-p)/p} \\ &\leq \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p} + C\varepsilon^{m_{N,p,s}} - C\varepsilon^{N-r(N-p)/p} < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p} \end{aligned}$$

para o parâmetro $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, pois $m_{N,p,s} > N - q(N-p)/p$. Isto conclui a prova no primeiro caso.

Case (ii): $m_{N,p,r} \leq \beta_{N,p,r}$.

Dado que $p < r < p^*$, por (3.78) obtemos que $J_\lambda(tv_\varepsilon) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, considerando os fatos $J_\lambda(0) = 0$ e que J_λ é contínua, existe $\bar{t}_{\lambda,\varepsilon} > 0$ tal que $J_\lambda(\bar{t}_{\lambda,\varepsilon}v_\varepsilon) = \sup_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\varepsilon)$. Assim, obtemos a igualdade

$$\langle J'_\lambda(\bar{t}_{\lambda,\varepsilon}v_\varepsilon), v_\varepsilon \rangle = 0,$$

portanto

$$\bar{t}_{\lambda,\varepsilon}^{p-1} \|v_\varepsilon\|_{X_0}^p - \lambda \bar{t}_{\lambda,\varepsilon}^{r-1} \|v_\varepsilon\|_r^r - \bar{t}_{\lambda,\varepsilon}^{p^*-1} = 0. \quad (3.81)$$

Em particular, concluímos que $\{\bar{t}_{\lambda,\varepsilon}\}_\lambda \subset \mathbb{R}^+$ é limitada, pois $p < q < p^*$. Então, combinando (3.81) com

$$\lambda \bar{t}_{\lambda,\varepsilon}^{r-1} \|v_\varepsilon\|_r^r \rightarrow \infty, \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty,$$

deduzimos que $\bar{t}_{\lambda,\varepsilon} \rightarrow 0$ as $\lambda \rightarrow \infty$. De isto, dado que J_λ é contínuo, concluímos que

$$\sup_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\varepsilon) = J_\lambda(\bar{t}_{\lambda,\varepsilon}v_\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty$$

□

No seguinte Lema verificamos a geometria de passo de montanha para nosso funcional J_λ .

Lema 3.3.8. *Sejam ε e λ como no Lema 3.3.7. Então, existem $\alpha, \rho > 0$ tais que :*

- (i) *para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = \rho$ temos que $J_\lambda(u) \geq \alpha$;*
- (ii) *existe um $t_\varepsilon > 0$ suficientemente grande, tal que $\|t_\varepsilon v_\varepsilon\| > \rho$ e $J_\lambda(t_\varepsilon v_\varepsilon) < \alpha$, onde v_ε é dado no Lema 3.3.7.*

Demonstração. Usando as imersões de Sobolev (1.5.2) e (1.13), existe uma constante positiva C_r tal que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \lambda C_r \|u\|^r - \mathcal{S}^{p^*/p} \|u\|^{p^*},$$

para qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dado que $p < r < p^*$, podemos concluir facilmente a afirmação (i) assumindo que $\|u\|$ seja suficientemente pequeno. Por outro lado, nós temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_\lambda(tv_\varepsilon) = -\infty,$$

de onde podemos concluir a prova. □

Finalmente apresentaremos a prova do resultado principal desta seção usando o argumento do passo de montanha.

Demonstração do Teorema 3.3.1. Sejam λ e ε como no Lema 3.3.7. Graças ao Lema 3.3.8, podemos definir o nível crítico do passo da montanha

$$m_\lambda := \inf_{\xi \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\xi(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\xi \in C([0, 1], W_0^{1,p}(\Omega)) : \xi(0) = 0, \xi(1) = t_\varepsilon v_\varepsilon\}.$$

Pelo Lema 3.3.7 temos que

$$m_\lambda \leq \sup_{t \geq 0} J_\lambda(tv_\varepsilon) < \frac{1}{N} \mathcal{S}^{N/p},$$

e assim, da Proposição 1.4.3 obtemos que :

- (i) Se $m_{N,p,s} > \beta_{N,p,r}$, obtemos a existência de uma solução não-trivial u_0 para (3.60).
- (ii) Se $m_{N,p,s} \geq \beta_{N,p,r}$, então pelo Lema 3.3.7 para $\lambda \geq \lambda^*$ e as Proposições anteriormente mencionadas, obtemos a existência de uma solução não-trivial para (3.60).

□

Referências

- [1] N. Abatangelo and M. Cozzi. An elliptic boundary value problem with fractional nonlinearity. *SIAM J. Math. Anal.*, 53(3):3577–3601, 2021.
- [2] H. W. Alt and L. A. Caffarelli. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.*, 325:105–144, 1981.
- [3] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, 14:349–381, 1973.
- [4] D. J. Araújo, G. C. Ricarte, and E. V. Teixeira. Singularly perturbed equations of degenerate type. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 34(3):655–678, 2017.
- [5] Á. Arroyo, J. Heino, and M. Parviainen. Tug-of-war games with varying probabilities and the normalized $p(x)$ -Laplacian. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 16(3):915–944, 2017.
- [6] Á. Arroyo, H. Luiro, M. Parviainen, and E. Ruosteenoja. Asymptotic Lipschitz regularity for tug-of-war games with varying probabilities. *Potential Anal.*, 53(2):565–589, 2020.
- [7] Á. Arroyo and M. Parviainen. Asymptotic Hölder regularity for the ellipsoid process. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 26:Paper No. 112, 31, 2020.
- [8] A. Attouchi, H. Luiro, and M. Parviainen. Gradient and Lipschitz estimates for tug-of-war type games. *SIAM J. Math. Anal.*, 53(2):1295–1319, 2021.
- [9] A. Banerjee and B. Kawohl. Overdetermined problems for the normalized p -Laplacian. *Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 5:18–24, 2018.
- [10] V. Benci. On critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):533–572, 1982.
- [11] H. Berestycki, L. A. Caffarelli, and L. Nirenberg. Uniform estimates for regularization of free boundary problems. 122:567–619, 1990.
- [12] S. Bernstein. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math. Ann.*, 62(2):253–271, 1906.
- [13] S. Bernstein. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. *Math. Ann.*, 69(1):82–136, 1910.

-
- [14] E. C. Bezerra Júnior, J. V. da Silva, and G.C. Ricarte. Fully nonlinear singularly perturbed models with non-homogeneous degeneracy. *Rev. Mat. Iberoam.*, 39(1):123–164, 2023.
 - [15] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, and E. Vecchi. A brezis-nirenberg type result for mixed local and nonlocal operators. *Pure Appl. Math.*, 2022.
 - [16] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, and E. Vecchi. Mixed local and nonlocal elliptic operators: regularity and maximum principles. *Comm. Partial Differential Equations*, 47(3):585–629, 2022.
 - [17] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, and E. Vecchi. A faber-krahn inequality for mixed local and nonlocal operators. *JAMA* 150, (2):405–448, 2023.
 - [18] S. Biagi, S. Dipierro, E. Valdinoci, and E. Vecchi. A Hong-Krahn-Szegö inequality for mixed local and nonlocal operators. *Math. Eng.*, 5(1):Paper No. 014, 25, 2023.
 - [19] S. Biagi, D. Mugnai, and E Vecchi. A brezis–oswald approach for mixed local and nonlocal operators. *Communications in Contemporary Mathematics*, 22(1):2250057, 2022.
 - [20] P. Blanc, F. Charro, J.J. Manfredi, and J. D. Rossi. Asymptotic mean-value formulas for solutions of general second-order elliptic equations. *Adv. Nonlinear Stud.*, 22(1):118–142, 2022.
 - [21] P. Blanc and J.D. Rossi. Game theory and partial differential equations. 31:xvii+211, [2019] ©2019.
 - [22] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.
 - [23] J. E.M. Braga, J. G. Carneiro, and D. R. Moreira. Uniform Lipschitz estimates up to the boundary for singular perturbation problem for some nonlinear elliptic PDEs with unbounded ingredients. *Nonlinear Anal.*, 232:Paper No. 113283, 19, 2023.
 - [24] J. E.M. Braga and D.R. Moreira. Up to the boundary gradient estimates for viscosity solutions to nonlinear free boundary problems with unbounded measurable ingredients. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 61(5):Paper No. 197, 65, 2022.
 - [25] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.
 - [26] H. Brézis and L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36(4):437–477, 1983.

- [27] S. Buccheri, J. V. da Silva, and L. H. de Miranda. A system of local/nonlocal p -Laplacians: the eigenvalue problem and its asymptotic limit as $p \rightarrow \infty$. *Asymptot. Anal.*, 128(2):149–181, 2022.
- [28] L. A. Caffarelli, K.-A. Lee, and A. Mellet. Singular limit and homogenization for flame propagation in periodic excitable media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 172(2):153–190, 2004.
- [29] L.A. Caffarelli and S. Salsa. A geometric approach to free boundary problems. 68:x+270, 2005.
- [30] F. Charro, G. De Philippis, A. Di Castro, and D. Máximo. On the Aleksandrov-Bakelman-Pucci estimate for the infinity Laplacian. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 48(3-4):667–693, 2013.
- [31] J.V. da Silva and A.M. Salort. A limiting problem for local/non-local p -Laplacians with concave-convex nonlinearities. *Z. Angew. Math. Phys.*, 71(6):Paper No. 191, 27, 2020.
- [32] J.V da Silva, V.B Vilorio, and A. Fiscella. A singular perturbation problem for the normalized $p(x)$ -laplacian operator. *Preprint*, 2023.
- [33] D. Danielli, A. Petrosyan, and H. Shahgholian. A singular perturbation problem for the p -Laplace operator. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(2):457–476, 2003.
- [34] C. De Filippis and G. Mingione. Gradient regularity in mixed local and nonlocal problems. *Mathematische Annalen*, pages 1–68, 2022.
- [35] S. Dipierro, E. Proietti Lippi, and E. Valdinoci. (non)local logistic equations with neumann conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, DOI 10.4171/AIHPC/57, 2022.
- [36] S. Dipierro and E. Valdinoci. Description of an ecological niche for a mixed local/nonlocal dispersal: an evolution equation and a new Neumann condition arising from the superposition of Brownian and Lévy processes. *Phys. A*, 575:Paper No. 126052, 20, 2021.
- [37] K. Does. An evolution equation involving the normalized p -Laplacian. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 10(1):361–396, 2011.
- [38] A. Dold. Partitions of unity in the theory of fibrations. *Ann. of Math. (2)*, 78:223–255, 1963.
- [39] D. dos Prazeres and E.V. Teixeira. Cavity problems in discontinuous media. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 55(1):Art. 10, 15, 2016.

- [40] P. Drábek and Y. X. Huang. Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in $\mathbf{R}^N$ with critical Sobolev exponent. *J. Differential Equations*, 140(1):106–132, 1997.
- [41] L. Escauriaza. $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully nonlinear equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(2):413–423, 1993.
- [42] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [43] L. C. Evans and R. F. Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. pages xiv+299, 2015.
- [44] Y. Fang and C. Zhang. Gradient Hölder regularity for parabolic normalized $p(x, t)$ -Laplace equation. *J. Differential Equations*, 295:211–232, 2021.
- [45] C. Farkas, A. Fiscella, and P. Winkert. On a class of critical double phase problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 515(2):Paper No. 126420, 16, 2022.
- [46] X. Fernández-Real and X. Ros-Oton. *Regularity theory for elliptic PDE*, volume 28 of *Zurich Lectures in Advanced Mathematics*. EMS Press, Berlin, [2022] ©2022.
- [47] F. Ferrari, C. Lederman, and S. Salsa. Recent results on nonlinear elliptic free boundary problems. *Vietnam J. Math.*, 50(4):977–996, 2022.
- [48] G. B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.
- [49] P. Garain and A. Ukhlov. Mixed local and nonlocal dirichlet (p, q) -eigenvalue problem. *J Math Sci*, 270(1):782–792, 2023.
- [50] P. Garain and J. Kinnunen. On the regularity theory for mixed local and nonlocal quasilinear elliptic equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375(8):5393–5423, 2022.
- [51] P. Garain and J. Kinnunen. On the regularity theory for mixed local and nonlocal quasilinear elliptic equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375(8):5393–5423, 2022.
- [52] P. Garain and E. Lindgren. Higher Hölder regularity for mixed local and nonlocal degenerate elliptic equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 62(2):Paper No. 67, 36, 2023.
- [53] J. García Azorero and I. Peral Alonso. Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 323(2):877–895, 1991.

- [54] J. P. García Azorero and I. Peral Alonso. Existence and nonuniqueness for the p -Laplacian: nonlinear eigenvalues. *Comm. Partial Differential Equations*, 12(12):1389–1430, 1987.
- [55] M. Guedda and L. Véron. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Nonlinear Anal.*, 13(8):879–902, 1989.
- [56] J. Han. Time-dependent tug-of-war games and normalized parabolic p -Laplace equations. *Nonlinear Anal.*, 214:Paper No. 112542, 23, 2022.
- [57] Q. Han. *Nonlinear elliptic equations of the second order*, volume 171 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.
- [58] M. H. Holmes. Introduction to perturbation methods. 20:xviii+436, 2013.
- [59] A. Fiscella J.V da Silva and V.B Vilorio. A quasi-linear mixed local/nonlocal problem with sobolev-type critical growth. *arXiv preprint arXiv:2308.07460*, 1, 2023.
- [60] R. Kajikiya. A critical point theorem related to the symmetric mountain pass lemma and its applications to elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 225(2):352–370, 2005.
- [61] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’ceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. Translated from the Russian by S. Smith.
- [62] C. Lederman, J. L. Vázquez, and N. Wolanski. Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(2):655–692, 2001.
- [63] C. Lederman and N. Wolanski. A local monotonicity formula for an inhomogeneous singular perturbation problem and applications. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 187(2):197–220, 2008.
- [64] C. Lederman and N. Wolanski. A local monotonicity formula for an inhomogeneous singular perturbation problem and applications. II. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 189(1):25–46, 2010.
- [65] C. Lederman and N. Wolanski. An inhomogeneous singular perturbation problem for the $p(x)$ -Laplacian. *Nonlinear Anal.*, 138:300–325, 2016.
- [66] C. Lederman and N. Wolanski. An inhomogeneous singular perturbation problem for the $p(x)$ -Laplacian. *Nonlinear Anal.*, 138:300–325, 2016.
- [67] C. Lederman and N. Wolanski. Inhomogeneous minimization problems for the $p(x)$ -Laplacian. *J. Math. Anal. Appl.*, 475(1):423–463, 2019.
- [68] M. Lewicka. Noisy Tug of War games for the $\mathbf{p}$ -Laplacian: $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$. *Indiana Univ. Math. J.*, 70(2):465–500, 2021.

- [69] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1):145–201, 1985.
- [70] J. J. Manfredi, M. Parviainen, and J. D. Rossi. Dynamic programming principle for tug-of-war games with noise. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 18(1):81–90, 2012.
- [71] S. Martínez and N. Wolanski. A singular perturbation problem for a quasi-linear operator satisfying the natural growth condition of lieberman. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(1):318–359, 2001.
- [72] D. Moreira and L. Wang. Singular perturbation method for inhomogeneous nonlinear free boundary problems. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49(3-4):1237–1261, 2014.
- [73] D. R. Moreira and E. V. Teixeira. A singular perturbation free boundary problem for elliptic equations in divergence form. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 29(2):161–190, 2007.
- [74] S. Mosconi and M. Squassina. Nonlocal problems at nearly critical growth. *Nonlinear Anal.*, 136:84–101, 2016.
- [75] G. Pagnini and S. Vitali. Should I stay or should I go? Zero-size jumps in random walks for Lévy flights. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 24(1):137–167, 2021.
- [76] K. Perera, R.P. Agarwal, and D. O'Regan. *Morse theoretic aspects of p -Laplacian type operators*, volume 161 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [77] K. Perera, M. Squassina, and Y. Yang. Bifurcation and multiplicity results for critical p -Laplacian problems. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 47(1):187–194, 2016.
- [78] P. H. Rabinowitz. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, volume 65 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [79] G. C. Ricarte and J. G. Araújo. Up-to boundary regularity for a singular perturbation problem of p -Laplacian type equations in non-divergence form. *Nonlinear Anal.*, 188:339–361, 2019.
- [80] G. C. Ricarte and J. V. da Silva. Regularity up to the boundary for singularly perturbed fully nonlinear elliptic equations. *Interfaces Free Bound.*, 17(3):317–332, 2015.
- [81] G. C. Ricarte, J. V. Silva, and R. Teymurazyan. Cavity type problems ruled by infinity Laplacian operator. *J. Differential Equations*, 262(3):2135–2157, 2017.

- [82] G. C. Ricarte and E. V. Teixeira. Fully nonlinear singularly perturbed equations and asymptotic free boundaries. *J. Funct. Anal.*, 261(6):1624–1673, 2011.
- [83] A. M. Salort and E. Vecchi. On the mixed local-nonlocal Hénon equation. *Differential Integral Equations*, 35(11-12):795–818, 2022.
- [84] R. Servadei and E. Valdinoci. The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(1):67–102, 2015.
- [85] J. Siltakoski. Hölder gradient regularity for the inhomogeneous normalized $p(x)$ -Laplace equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 513(1):Paper No. 126187, 27, 2022.
- [86] J. Simon. Régularité de la solution d’une équation non linéaire dans $\mathbb{R}^N$ s. *Journées d’Analyse Non Linéaire (Proc. Conf. Besançon, 1977)*, 1:205–227, 1978.
- [87] E. H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, [1995]. Corrected reprint of the 1966 original.
- [88] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, and J. Zhang. Regularity results for solutions of mixed local and nonlocal elliptic equations. *Math. Z.*, 302(3):1855–1878, 2022.
- [89] E. V. Teixeira. Optimal regularity of viscosity solutions of fully nonlinear singular equations and their limiting free boundary problems. *Mat. Contemp.*, 30:217–237, 2006. XIV School on Differential Geometry (Portuguese).
- [90] E. V. Teixeira. A variational treatment for general elliptic equations of the flame propagation type: regularity of the free boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 25(4):633–658, 2008.
- [91] G. S. Weiss. A singular limit arising in combustion theory: fine properties of the free boundary. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 17(3):311–340, 2003.
- [92] L. Zajíček. Porosity and σ -porosity. *Real Anal. Exchange*, 13(2):314–350, 1987/88.