

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Civil Arquitetura e Urbanismo

Júlia Preto Predebon

**Aplicação de Materiais Compósitos Laminados aos
Elementos Estruturais Planos**

Campinas

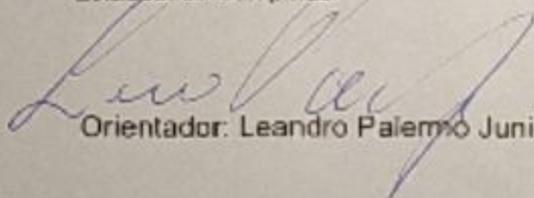
2019

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

Júlia Preto Predebon

**Aplicação de Materiais Compósitos Laminados aos
Elementos Estruturais Planos**

Trabalho Final de Curso apresentado
como requisito parcial para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Civil à
Faculdade de Engenharia Civil,
Arquitetura e Urbanismo da Universidade
Estadual de Campinas.



Orientador: Leandro Palermo Junior

Campinas
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

P912a Predebon, Júlia Preto, 1996-
Aplicação de materiais compósitos laminados aos elementos estruturais planos / Júlia Preto Predebon. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Leandro Palermo Junior.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Compósitos. 2. Materiais compostos. 3. Materiais laminados. 4. Engenharia de estruturas. I. Palermo Junior, Leandro, 1960-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações adicionais, complementares

Título em outro idioma: Application of laminated composite materials to flat structural elements

Palavras-chave em inglês:

Composites

Composite materials

Laminated materials

Structural engineering

Titulação: Bacharel

Banca examinadora:

Leandro Palermo Junior [Orientador]

Climar Donizete Basaglia

Luiz Carlos de Almeida

Data de entrega do trabalho definitivo: 09-12-2019

**Aplicação de Materiais Compósitos Laminados aos
Elementos Estruturais Planos.**

Júlia Preto Predebon

BANCA EXAMINADORA

.....
Prof. Leandro Palermo Junior
Orientador

.....
Prof. Cilmar D. Basaglia

.....
Prof. Luiz Carlos de Almeida

Aprovado em: 04 de Dezembro de 2019

RESUMO

O uso de materiais distintos combinados para obtenção de outro com propriedades melhores não é algo recente, nem tão pouco artificial. O conceito de materiais compósitos engloba diversas áreas de ensino e em especial os laminados vêm sendo utilizados em diferentes modelos estruturais, que englobam aeronaves, submarinos, equipamentos esportivos e laboratoriais (medicinais). Sendo assim, o trabalho em questão consiste em avaliar a mecânica dos materiais compósitos laminados para aplicação em elementos estruturais planos característicos da Engenharia Civil, tal como, a viga. Ao final, alguns problemas estruturais são resolvidos a partir da formulação teórica dos compósitos laminados para diferentes modelos de vigas e os resultados comparados entre diferentes tipos de laminados.

Palavras-chave: Compósitos laminados, engenharia civil, compósitos estruturais.

ABSTRACT

Materials formed by combining two or more materials such that they have better engineering properties than the conventional materials it's a old technology and not artificial. The concept of composite materials include different areas of education and in particular, laminates have been used in different structural models, including aircraft, submarines, sports and laboratory equipment (medical). Thus, this document consists of evaluating the mechanics of laminated composite materials for application in plates structural elements characteristic of Civil Engineering, such as the beam. In conclusion, some selected problems are solved from the theoretical application of laminated composites for different beam models and comparative results between different types of laminates.

Keywords: Laminated Composite, Civil Engineering, Structural Composite.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	JUSTIFICATIVA.....	2
1.2	OBJETIVOS.....	2
1.2.1	Objetivo Geral.....	2
1.2.2	Objetivos Específicos.....	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
3	METODOLOGIA	4
3.1	DEFINIÇÕES.....	4
3.2	MUDANÇAS DE COORDENADAS.....	7
3.3	ANÁLISE UNIDIRECIONAL DE COMPÓSITOS LAMINADOS.....	10
3.3.1	TEORIA CLÁSSICA DA LAMINAÇÃO.....	11
3.3.2	ANÁLISE VIGAS LAMINADAS USANDO A TEORIA CLÁSSICA DA LAMINAÇÃO.....	19
3.3.2.1	ELÁSTICAS DAS VIGAS.....	21
4	CONCLUSÃO.....	27
	REFERÊNCIAS.....	28

1 INTRODUÇÃO

O uso de materiais distintos combinados para obtenção de outro com propriedades melhores não é algo recente, nem tão pouco artificial. Em meados de 500 a.C. a cidade de Bam, na província iraniana de Kerman, foi construída em *adobe*, elemento que consiste na junção de terra seca com fibras naturais cortadas (origem vegetal como palha), sendo assim, um material compósito no qual a terra é a matriz e a palha exerce papel das fibras. Porém, tem-se também exemplos de compósitos naturais, como os ossos. Estes podem ser analisados como a combinação de colágeno e mineral hidroxiapatita, sendo eles respectivamente, matriz e fibra.

Na engenharia civil em se tratando de compósitos poliméricos, estes tinham utilização específica em reparos e adequações de pontes e edificações, até que no estado de Virginia nos EUA construíram-se leitos de pontes em material compósito laminado, que por sua vez, contudo, tinha custo 60% maior do que o leito em concreto.

No começo dos anos 2000, técnicas de trançagem ^[1] de fibras já eram aplicadas na manufatura de componentes aeroespaciais e se iniciavam na produção de hastes, estacas e tubos de menor peso aplicados no setor da construção civil, como componente com exigências estruturais. Essas estruturas trançadas tiveram uso nesse setor visto que, de acordo com a fibra e matriz polimérica escolhida, apresentavam preço competitivo com valores de resistência mecânica, rigidez e resistência à corrosão interessantes.

Contudo, o uso de compósitos na construção civil vem desde 1900 com a combinação de aço e concreto para um material que resistisse à compressão e à tração, atualmente denominado concreto armado. O concreto por si já é um material compósito particulado, sendo o Cimento Portland sua matriz e a areia e brita as partículas. Este ligado ao aço pode ser empregado como outro compósito, onde o concreto é a matriz e o aço as fibras.

¹ Texto extraído da Revista Polímeros: Ciência e Tecnologia, texto O Uso de Compósitos Estruturais na Indústria Aeroespacial dos autores Mirabel Rezende e Edson Botelho.

Dado tal panorama, e sabendo que em grande escala os elementos estruturais são dimensionados a partir da hipótese de materiais homogêneos e isotrópicos, este documento visa realizar o estudo de elementos estruturais planos através da mecânica dos compósitos laminados, integrando seu uso na Engenharia Civil.

1.1 JUSTIFICATIVA

A engenharia civil faz uso de diversos materiais para implementação de diferentes soluções. Esses materiais, porém, não seguem sempre a mesma metodologia de cálculo, uma vez que possuem peculiaridades de formação, podendo ser, por exemplo, diferenciados pela relação de simetria de suas tensões.

Tendo isso em vista, o trabalho a seguir abrange um estudo a respeito da mecânica dos materiais compósitos laminados. O faz para aprimorar conhecimento em outras tipologias com foco em sua formação estrutural, dada a ênfase de enfoque (Departamento de Estruturas).

1.2 OBJETIVOS

Este trabalho busca analisar a eficácia do uso de materiais compósitos laminados e sua mecânica em elementos estruturais planos comuns a Engenharia Civil, comparando o resultado mecânico de resistência com o obtido pela resistência dos materiais usuais. Espera-se deste modo contribuir para novas análises mecânicas de elementos, possibilitando também o estudo de novos métodos de dimensionamento e emprego de materiais distintos.

1.2.1 Objetivo Geral:

Analisar a mecânica de materiais compósitos laminados em elementos estruturais planos da Engenharia Civil.

1.2.2 Objetivos Específicos:

- Definir e determinar o que são os materiais compósitos, especificando os laminados;
- Identificar a mecânica dos materiais compósitos;
- Aplicar a metodologia de cálculo para elementos estruturais planos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Reddy (2003) em seu livro *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells* define os materiais compósitos sendo aqueles formados pela combinação de dois ou mais materiais a fim de promover melhores propriedades do que os materiais de origem. Ao integrar os materiais, as propriedades que podem ser modificadas são rigidez, resistência mecânica, peso, resistência à corrosão, propriedades térmicas, vida à fadiga e resistência ao desgaste.

A elaboração de um compósito consiste na combinação macroscópica de materiais e tal mistura pode ser dividida em duas fases, uma delas aglutinante, denominada Fase Matriz e a outra de enchimento denominada Fase Reforço, de acordo com Moreira (2009).

Há três grandes divisões dos materiais compósitos, de acordo com os materiais utilizados para sua confecção, sendo esses, materiais compósitos particulados, materiais compósitos fibrosos e materiais compósitos laminados, também definidos no livro de Reddy (2003). Como os próprios nomes indicam, o primeiro tem partículas como a fase constituinte do reforço, como por exemplo, os agregados na confecção do concreto. O segundo, por sua vez, é disposto de fibras e essas podem ser curtas ou longas. O último, e objetivo de estudo, são produzidos por camadas de materiais diferentes.

Soares (2017) expõe as principais características dos compósitos como a heterogeneidade, anisotropia, simetria e hierarquia. Com isso, o material não possui uniformidade em sua estrutura físico-química, tem propriedades dependentes da direção do estudo, além de natureza tensorial e interação de unidades estruturais distintas.

3. METODOLOGIA

3.1 DEFINIÇÕES

Em se tratando especificamente dos compósitos laminados, assim como Reddy (2003), Almeida (2017) define um laminado como uma coleção de lâminas, e assim, ele expressa as características de suas lâminas constituintes. Essas, por sua vez, têm como definição uma camada de fibras unidas por uma matriz, representando individualmente um “bloco de construção” fundamental ao compósito.

As fibras em uma lâmina podem estar dispostas em quatro formatos diferentes, definidos por Reddy (2003), ilustrada na Figura 1:

1. Unidirecionais;
2. Bidirecionais;
3. Descontínuas;
4. Tecidas.

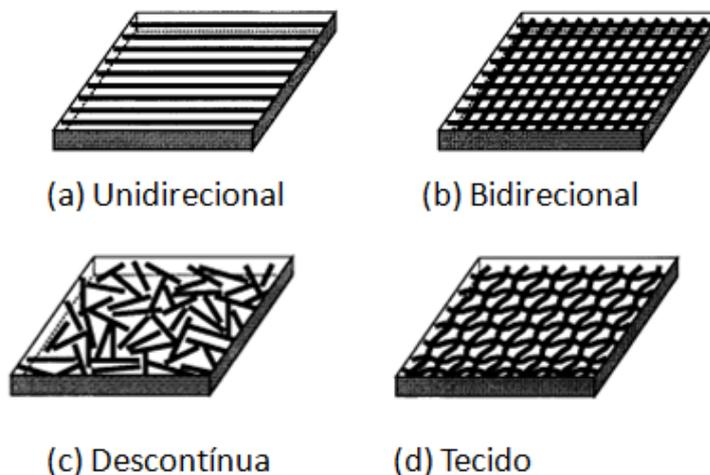


Figura 1. Possíveis disposições das fibras em uma lâmina.

Fonte: Reddy (2003) – adaptado pela autora.

Dentre essas, as lâminas reforçadas com fibras unidirecionais são as que exibem maior força e módulo na direção das fibras, contudo também têm resistência e módulo inferiores na direção transversal às fibras. Por conta disso, os laminados são compostos por essas lâminas em diferentes direções, de acordo com Figura 2,

possibilitando ao projetista a flexibilidade para adequação da rigidez e resistência.

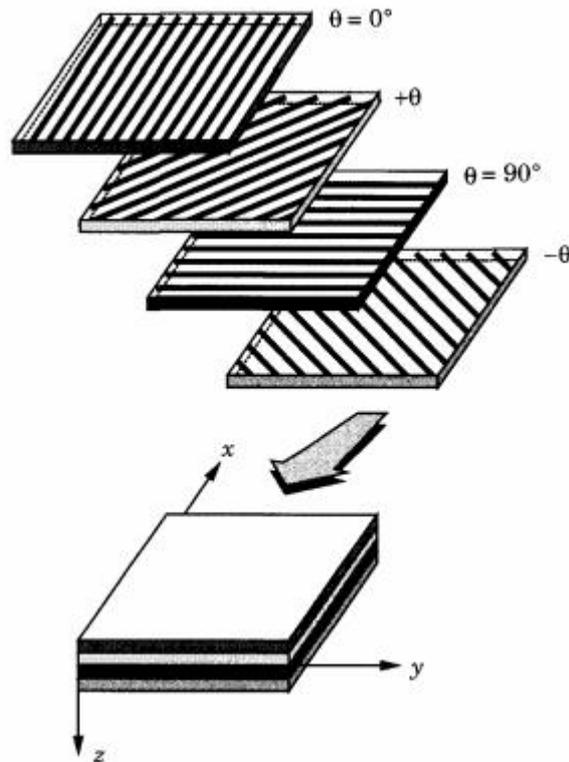


Figura 2. Esquema da confecção de um laminado a partir de lâminas unidirecionais.

Fonte: Reddy (2003)

Para a execução dessa união de lâminas, deve-se primeiramente entender o comportamento individualizado de cada uma. Deste modo, ao se estudar uma única lâmina, tem-se um material ortotrópico, cujas propriedades mecânicas dependem da direção que são estudadas. Com isso, se faz necessário a definição dos principais eixos do material, aos quais serão posteriormente atribuídas as características.

De acordo com a Figura 3, são definidos três eixos:

1. x_1 - Longitudinal à fibra;
2. x_2 - Transversal à fibra;
3. x_3 - Perpendicular à fibra.

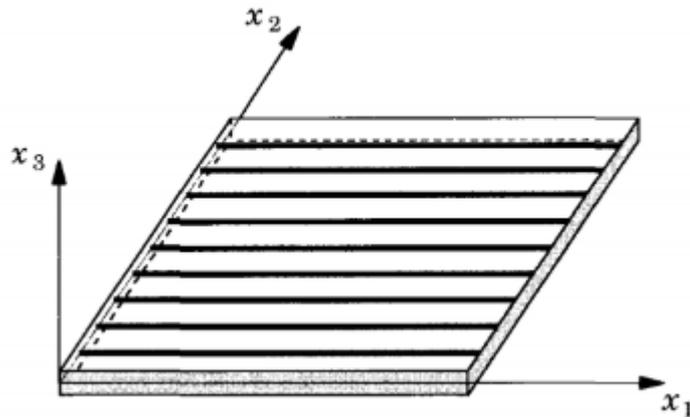


Figura 3. Identificação dos principais eixos de uma lâmina

Fonte: Reddy (2003)

Além de ortotrópica, a lâmina será dada como material elástico linear, suposição dada por Reddy (2003) que é removida se a constituição do modelo for dada por inelásticos. Tal consideração implica que a Lei de Hooke Generalizada é aplicável a ela. A equação 1 é a expressão da Lei de Hooke para o caso dado.

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (\text{eq. 1})$$

Sendo, σ o tensor de tensões, ε as deformações e C refere-se à matriz de rigidez do material. A ortotropia do material é representada pelo fato que as componentes de C serem distintas para cada plano e contendo 9 parâmetros (em caso de material homogêneo, as componentes de C são constantes). Além disso, todos são referenciados pelo sistema cartesiano definido anteriormente com (x_1, x_2, x_3) .

Continuando a caracterização das lâminas unidirecionais são definidas mais hipóteses do material compósito. Primeiramente, é dada como perfeita a ligação entre a matriz e as fibras, livres de vazios ou microfissuras. Além disso, as fibras são uniformemente distribuídas e, individualmente, fibra e matriz são isotrópicas. Por fim, será considerada força aplicada paralela ou normal às fibras.

Com isso, pode-se definir as constantes da engenharia, ou seja, constantes elásticas do material usadas para determinar matriz de rigidez (ou de flexibilidade $[S]$, sendo essa o inverso da matriz de rigidez). São definidos para as lâminas três constantes:

1. Módulo de Young (também denominado módulo de elasticidade) - E;
2. Módulo de Cisalhamento - G;
3. Quociente de Poisson - ν .

O módulo de elasticidade (E) e quociente de Poisson (ν) da lâmina serão dados a partir de uma combinação das mesmas constantes das partes envolvidas, ou seja, matriz (E_m e ν_m) e fibra (E_f e ν_f). Essa combinação será de modo ponderado de acordo com a fração de volume do elemento (V_m e V_f , da matriz e fibra, respectivamente). Além disso, para os módulos de elasticidade serão definidos para direção longitudinal (E_1) e transversal (E_2).

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \text{ e } E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \quad (\text{eq. 2})$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (\text{eq. 3})$$

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} \quad (\text{eq. 4})$$

Relembrando que $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Esses valores podem ser definidos por testes laboratoriais e tem-se também valores preestabelecidos para materiais de mercado.

3.2 MUDANÇAS DE COORDENADAS

As equações acima apresentadas tomam como referências o sistema de coordenadas principais de um elemento, este coincidente com (x_1, x_2, x_3) na Figura 4. Em um material compósito, porém, cada camada pode conter uma angulação distinta e assim se faz necessário compor um sistema de mudança de coordenada. Reddy (2003) define as coordenadas (x, y, z) como as governantes do compósito e (x_1, x_2, x_3) como as principais de cada camada. Deste modo, o sistema poderá ser aplicado em cada camada. Nota-se, também pela Figura 4, que o eixo normal não sofre alterações, sendo assim, as coordenadas x_3 dos elementos sempre coincide com z .

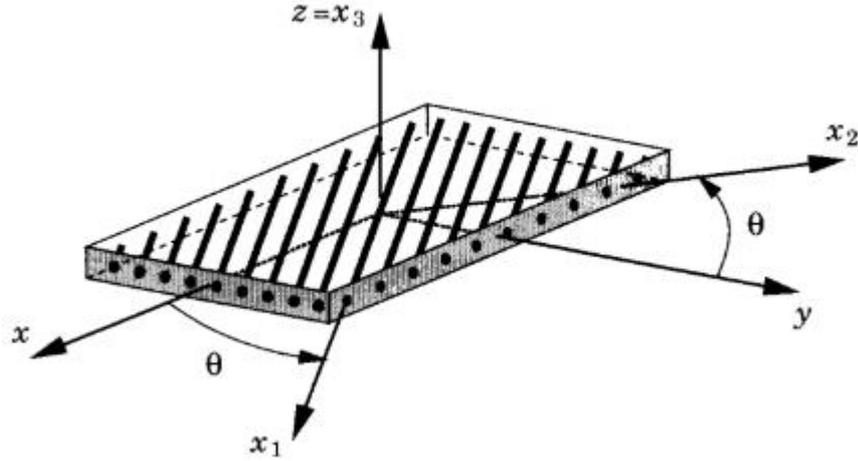


Figura 4. Lâmina com fibra a θ graus.

Fonte: Reddy (2003)

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{eq. 5a,b})$$

Denominando a matriz transformadora em 5a de $[L]$, para a operação inversa 5b, tem-se $[L]^T$, nota-se, portanto que $[L]^T = [L]^{-1}$.

Expandindo essa relação para a obtenção das tensões, deve-se também definir os tensores em (x,y,z) do problema e (x_1,x_2, x_3) da lâmina. Sendo assim, esses são respectivamente representados por σ_p e σ_l :

$$[\sigma_p] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, [\sigma_l] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{eq. 6a,b})$$

A partir dessa definição, estipulam-se as relações entre elas utilizando a matriz transformadora $[L]$ definida anteriormente.

$$[\sigma_l] = [L][\sigma_p][L]^T, [\sigma_p] = [L]^T[\sigma_l][L] \quad (\text{eq 7a,b})$$

O mesmo procedimento deve ser realizado para as deformações (ε). Dada suas equivalências:

$$[\varepsilon_l] = [L][\varepsilon_p][L]^T, [\varepsilon_p] = [L]^T[\varepsilon_l][L] \quad (\text{eq 8a,b})$$

Ao realizar as operações das equações 7, a e b, pode-se obter a expressão para mudança de coordenadas em torno do eixo z, correlacionando termo a termo de σ_p e σ_l , a partir do formato matriz coluna de seu tensor.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}2\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \text{sen}2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & 0 & 0 & 0 & \text{sen}2\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Representados de modo simplificado por:

$$\{\sigma_p\} = [T]\{\sigma_l\} \text{ e } \{\sigma_l\} = [R]\{\sigma_p\} \quad (\text{eq 9a,b})$$

As matrizes transformadoras apresentadas em 9a e 9b são denominadas, respectivamente, de [T] e [R], sendo que $[R(\theta)] = [T(-\theta)] = [T(\theta)]^{-1}$.

Tratando agora das deformações, deve-se também expandir a relação de mudança de coordenada do tensor, ou seja, realizar as operações de 8a e b. Nesse quesito, há uma ressalva que deve ser destacada. Para definição das deformações no formato de matriz coluna, tem-se que $2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6$, $2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5$ e $2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4$. Sendo assim, esses são respectivamente representados por ε_p e ε_l :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

Neste caso, as matrizes transformadoras são as transpostas das utilizadas nas tensões, ou seja, podem ser representados de modo simplificado por:

$$\{\varepsilon_p\} = [R]^T \{\varepsilon_l\} \text{ e } \{\varepsilon_l\} = [T]^T \{\varepsilon_p\} \quad (\text{eq 10a,b})$$

Retomando a equação 1, $\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$, tem-se até o momento as alterações das tensões e das deformações ao se alterar o eixo de referência. É necessário, portanto, analisar ainda os componentes da matriz de rigidez do elemento. Para tal, utilizaremos as relações já obtidas das mudanças de σ e ε e a relação entre eles. (eq 9a; eq1; eq10b)

$$\{\sigma_p\} = [T] \{\sigma_l\} = [T][C_l] \{\varepsilon_l\} = [T][C_l][T]^T \{\varepsilon_p\} \equiv [C_p] \{\varepsilon_p\}$$

3.3 ANÁLISE UNIDIRECIONAL DE COMPÓSITOS LAMINADOS

Para se resolver problemas de laminados, em caso de vigas e dobragem cilíndrica de tiras de placas laminadas, pode-se tratar o problema como unidimensional. Será realizado o estudo no caso em que o laminado se enquadra nas especificações de viga.

Isso ocorre quando o comprimento em relação ao eixo y é pequeno em comparação ao comprimento no eixo x e, além disso, os deslocamentos são apenas em função de x . O laminado também será fino, ou seja, laterais maiores que sua espessura.

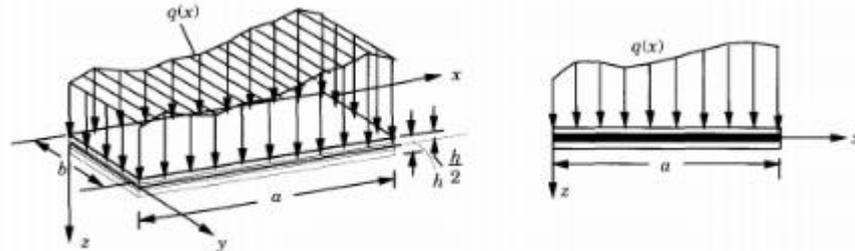


Figura 5 Viga laminada.

Fonte: Reddy (2003)

A análise de vigas laminadas será realizada usando a teoria clássica de placas laminadas.

3.3.1 TEORIA CLÁSSICA DA LAMINAÇÃO

Para adoção da teoria clássica as hipóteses de Kirchhoff devem ser sustentadas, e elas consistem em:

- Deslocamentos ao longo de x e y variam linearmente ao longo da espessura, ou seja, são funções lineares de z .
- A deformação normal transversal ε_{zz} é zero.
- Deformações transversais de cisalhamento nulas, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{yz} = 0$.
- Tensões transversais nulas $\sigma_z = 0$.

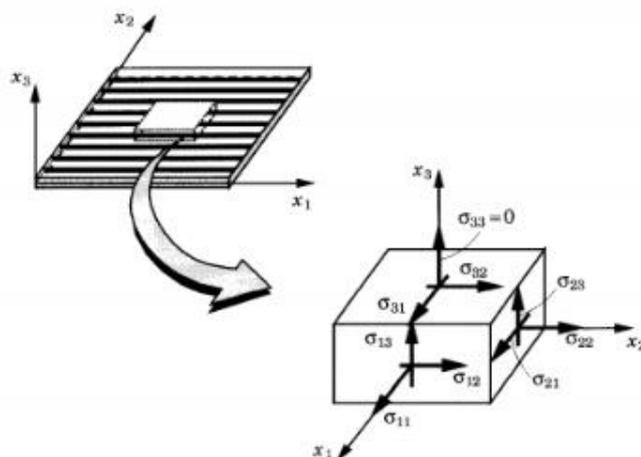


Figura 6. Tensões planas do elemento – transversal nula.

Fonte: Reddy (2003)

Além disso, ao formular teorias, certas suposições são determinantes para aplicação de fórmulas e conceitos. Sendo assim, para essa teoria, as premissas de Kirchhoff supõem camadas perfeitamente unidas, uma vez que não são consideradas imperfeições. Têm-se também restrições, cuja teoria só se aplica para esses casos. Nesse caso, as restrições físicas consideradas foram camadas de material linearmente elástico e de espessuras uniformes, cujo composto possui três planos de simetria (isto é, ortotrópico). Já como restrição mecânica determinou-se deformações e deslocamentos pequenos e tensões transversais de cisalhamento nas superfícies superior e inferior do laminado nulas.

A partir disso podem-se estudar as tensões e deformações do compósito.

Tomando como alusão um ponto de coordenadas (x,y,z) , após deformação suas coordenadas serão $(x+u, y+v, z+w)$, sendo que (u,v,w) são componentes do vetor deslocamento u , sendo esse $u = u\hat{e}_x + v\hat{e}_y + w\hat{e}_z$.

Destes deslocamentos, vale ressaltar que na direção z (z_i) serão medidos a partir de um plano de referência, denominado de plano médio, conforme Figura 7.

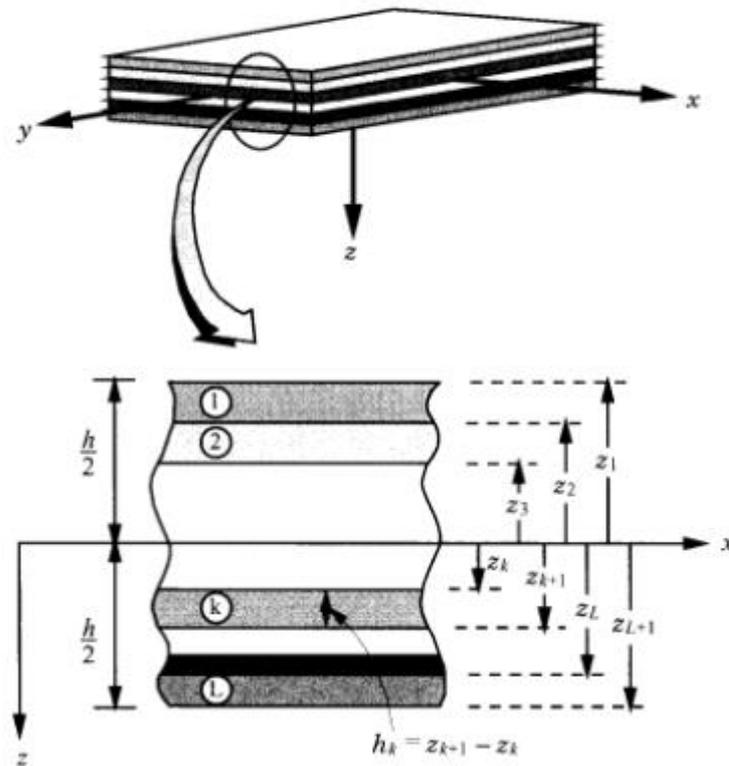


Figura 7. Tensões planas do elemento – transversal nula.

Fonte: Reddy (2003)

Utilizando essa referência tem-se no plano médio os deslocamentos dependentes apenas de x e y , pois $z=0$.

Para ilustrar as equações de deslocamento de um ponto fora do plano médio, o ponto fictício A de coordenada z_a . De acordo com as hipóteses de Kirchhoff tem-se:

$$u_a(x, y, z) = u_0(x, y) - z_a * \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{eq 11a})$$

$$v_a(x, y, z) = v_0(x, y) - z_a * \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{eq 11b})$$

$$w_a(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{eq 11c})$$

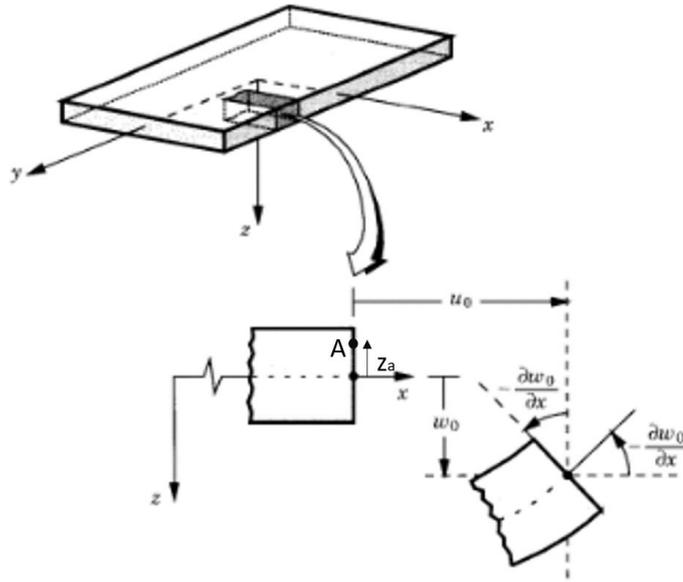


Figura 8. Relações de geometria de laminado indeformado e deformado.

Fonte: Reddy (2003) – adaptado pela autora.

Pois bem, a partir das equações 11 a, b e c, as deformações no plano seguem a formulação a seguir, onde $\frac{\partial w_0}{\partial x} = \psi_x$ e $\frac{\partial w_0}{\partial y} = \psi_y$.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (\text{eq. 12a})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (\text{eq. 12b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (\text{eq. 12c})$$

A forma reduzida que representa as equações acima em modo matricial é dada por:

$$\{\varepsilon^p\} = \{\varepsilon^p\}^0 + z\{k\} \quad (\text{eq. 13})$$

Sendo que $k_x = -\frac{\partial \psi_x}{\partial x}$, $k_y = -\frac{\partial \psi_y}{\partial y}$ e $k_s = -\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x}$.

As fórmulas acima, 12 a, b e c, simplificadas pela forma matricial, equação 13, exemplificam uma consequência das hipóteses de Kirchhoff, de que as deformações variam linearmente ao longo da espessura. Com deformações definidas calculamos as tensões.

Para isso, utiliza-se a relação tensão-deformação semelhante à equação 1, $\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$, porém dessa vez a rigidez será reduzida ao estado plano de tensão. A matriz de rigidez para tensão plana é dada por [Q], que por sua vez pode ser determinada em função das constantes de engenharia invertendo-se a matriz de flexibilidade [S].

Essa rigidez dependerá de características próprias de cada lâmina, como material e ângulo de laminação. Deste modo, cada camada terá uma matriz de relação diferente.

Para as deformações vimos que se utiliza o plano médio como referência. No caso das tensões, há um sistema de referência para o laminado e um para cada camada, sendo que o eixo z é comum a todos.

Similar a Figura 7, consideraremos para ilustrações um compósito de N camadas. A k-ésima camada terá ângulo de laminação θ_k em torno do eixo z e $h_k = z_{k+1} - z_k$. Para tal, apresenta-se a relação nas direções principais da camada:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{Bmatrix}_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}_k \quad (\text{eq. 14})$$

Equivalente a:

$$\{\sigma^p\}_{12}^k = [Q^p]_k \{\varepsilon^p\}_{12}^k \quad (\text{eq. 15})$$

Realizando a operação para o sistema de coordenadas do laminado tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{xs} \\ \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{yy} & \bar{Q}_{ys} \\ \bar{Q}_{xs} & \bar{Q}_{ys} & \bar{Q}_{ss} \end{Bmatrix}_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_k \quad (\text{eq. 16})$$

Equivalente a:

$$\{\sigma^p\}_{xy}^k = [\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}_{xy}^k \quad (\text{eq. 17})$$

Repetindo as equações 13 e 17, a seguir:

$$\begin{aligned} \{\sigma^p\}_{xy}^k &= [\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}_{xy}^k \\ \{\varepsilon^p\} &= \{\varepsilon^p\}^0 + z\{k\} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \{\sigma^p\}_{xy}^k = [\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}^0 + z[\bar{Q}^p]_k \{k\} \quad (\text{eq. 18})$$

Ao integrar as equações 13 (deformações) e 17(tensões), ambas para o sistema de referência do problema (xyz), equação 18, podemos concluir que para cada camada há também uma variação linear da tensão de acordo com z. Além disso, como a matriz Q não segue padrão de uma camada para outra, pode-se apresentar uma descontinuidades de tensões ao longo do laminado.

As possíveis descontinuidades de tensões estão apresentadas na Figura 9, assim como a linearidade das deformações. Em se tratando das tensões de cisalhamento, na teoria aqui utilizada de Kirchhoff elas são nulas.

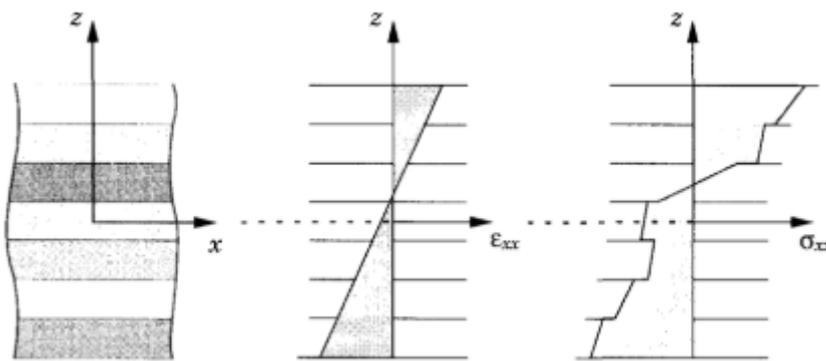


Figura 9. À esquerda exemplo base de uma seção do compósito laminado. No centro distribuição linear das deformações. À direita a distribuição das tensões com descontinuidade a cada camada, porém linear dentro de uma mesma camada.

Fonte: Reddy (2003)

Vale reforçar que as expressões de tensões apresentadas até o momento são referentes a cada camada, ainda se faz necessário definir as tensões do compósito laminado. Para se obter a análise global do laminado, é necessário estipular os esforços resultantes desse.

Partiremos então de uma composição arbitrária de tensões resultantes, as quais serão substituídas por esforços resultantes equivalentes. No plano as resultantes são expressas por uma força normal e um momento, como apresentado na Figura 10, neste caso, no plano x.

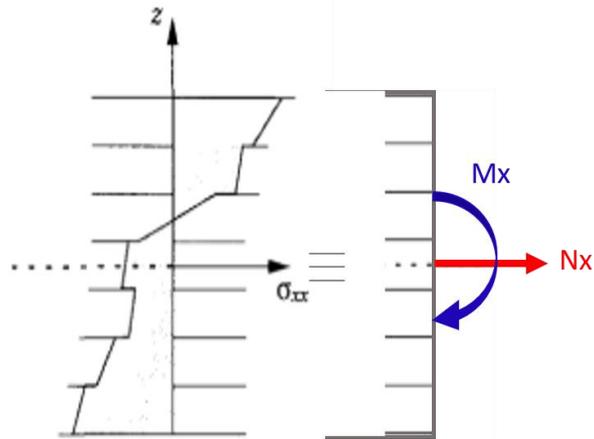


Figura 10. Esquema de esforço resultantes dada uma distribuição de tensões – plano x.

Fonte: Reddy (2003) – adaptado pela autora.

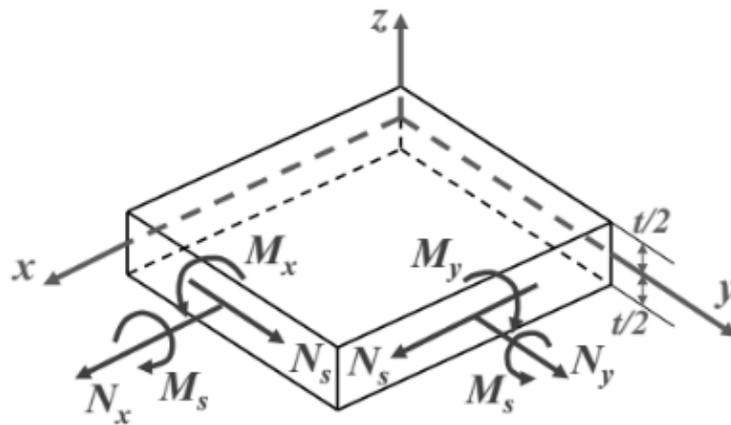


Figura 11. Esquema de esforço resultantes – tridimensional.

Definindo-se cada uma dessas componentes tem-se as seguintes formulações:

$$\text{Normal: } N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz \text{ e } N_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz \quad (\text{eq. 19 a e b})$$

$$\text{Cisalhamento: } N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_s dz \quad (\text{eq. 20})$$

$$\text{Matricialmente } \{N\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \{\sigma_{xy}^P\} dz \quad (\text{eq. 21})$$

$$\text{Momento: } M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz \text{ e } M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_y dz \quad (\text{eq. 22 a e b})$$

$$\text{Torção: } M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_s dz \quad (\text{eq. 23})$$

$$\text{Matricialmente: } \{M\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \{\sigma_{xy}^p\} dz. \quad (\text{eq.24})$$

Sendo t a espessura total do laminado.

Para dar continuidade aos estudos é necessário relacionar tais definições das resultantes com as tensões e deformações de cada camada, apresentadas na equação 18. Para tal, a equação 18 será substituída na forma matricial da equação 21.

$$\{N\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} ([\bar{Q}^p]_k \{\varepsilon^p\}^0 + z[\bar{Q}^p]_k \{k\}) dz.$$

Como cada camada k apresenta sua matriz $[\bar{Q}^p]_k$ e tem espessura $h_k = z_k - z_{k-1}$, a expressão pode ser apresentada como:

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}^p]_k (\{\varepsilon^p\}^0 + z \{k\}) dz \right)$$

Deste modo, observa-se a resultante como uma somatória das contribuições de cada das camadas. Como agora $[\bar{Q}^p]_k$ é constante nos limites da integral, pode-se retirá-lo da integral. E após realizaras operações será obtida a forma:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \left(\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) [\bar{Q}^p]_k \right) \{\varepsilon^p\}^0 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2} [\bar{Q}^p]_k \right) \{k\} \rightarrow \\ \{N\} &= [A] \{\varepsilon^p\}^0 + [B] \{k\} \end{aligned} \quad (\text{eq. 25})$$

A forma final simplificada apresenta as matrizes [A] e [B] como médias ponderadas de [Q], onde os pesos são em função das posições das camadas.

O mesmo procedimento é realizado para os momentos, que tem, por sua vez, a forma matricial dada pela equação 24. Após as iterações

$$\begin{aligned} \{M\} &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} \right) [\bar{Q}^p]_k \right) \{\varepsilon^p\}^0 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} [\bar{Q}^p]_k \right) \{k\} \rightarrow \\ \{M\} &= [B] \{\varepsilon^p\}^0 + [D] \{k\} \end{aligned} \quad (\text{eq. 26})$$

A forma final simplificada apresenta as matrizes [B] e [D] como médias ponderadas de [Q], onde os pesos são em função das posições das camadas, bem semelhante ao anterior.

Há ainda uma equação matricial que une as relações constitutivas do laminado, apresentada em:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^p\}^0 \\ \{k\} \end{Bmatrix} \quad (\text{eq. 27})$$

3.3.2 ANÁLISE VIGAS LAMINADAS USANDO A TEORIA CLÁSSICA DA LAMINAÇÃO

Nessa análise utilizaremos vigas simetricamente laminadas e ausência de forças no plano, ou seja, valendo que $\{M\} = [D]\{k\}$, lembrando que $k_x = -\frac{\partial \psi_x}{\partial x}$, $k_y = -\frac{\partial \psi_y}{\partial y}$ e $k_s = -\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x}$. Como se apresenta simetria podemos ainda simplificar o termo de k_s e a expressão completa é dada por:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \\ \frac{d^2 w_0}{dy^2} \\ 2 \frac{d^2 w_0}{dxdy} \end{Bmatrix} \text{ ou na forma inversa}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \\ \frac{d^2 w_0}{dy^2} \\ 2 \frac{d^2 w_0}{dxdy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{eq. 28 a, b})$$

Como as forças no plano são nulas, os deslocamentos (u_0, v_0) também são nulos e o problema simplifica, sendo $M_{yy} = M_{xy} = 0$. Assim, utilizando a equação 28b podemos concluir que:

$$\begin{cases} M_{xx} = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} D^*_{11} \\ M_{xx} = -\frac{d^2 w_0}{dy^2} D^*_{12} \\ M_{xx} = -2 \frac{d^2 w_0}{dxdy} D^*_{16} \end{cases} \text{ e } M(x) = -E^b_{xx} I_{yy} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (\text{eq. 29})$$

A partir dessa equação e das relações com a cortante e força aplicada, apresentadas na Figura 12, será possível obter as tensões laminares. As tensões entre lâminas, conforme Figura 13, estão equilibradas entre si devido as considerações aqui feitas.

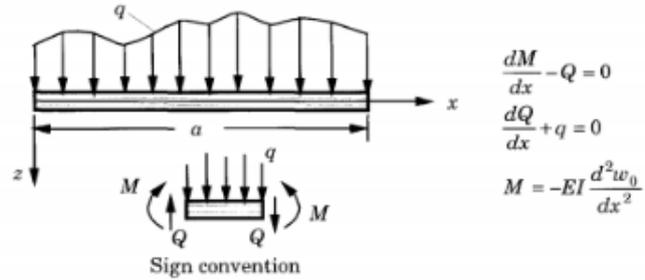


Figura 12. Convenções e relações de esforços.

Fonte: Reddy (2003)

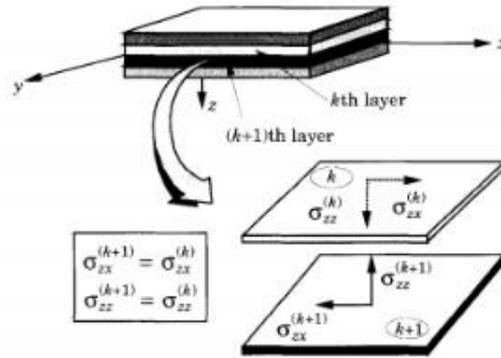


Figura 13. Tensões laminares em equilíbrio.

Fonte: Reddy (2003)

Para obtenção das tensões, a equação 28b será substituída em:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k &= z \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{xs} \\ \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{yy} & \bar{Q}_{ys} \\ \bar{Q}_{xs} & \bar{Q}_{ys} & \bar{Q}_{ss} \end{Bmatrix}_k \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{d^2w_0}{dx^2} \\ -\frac{d^2w_0}{dy^2} \\ -2\frac{d^2w_0}{dxdy} \end{Bmatrix} \rightarrow \\ \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k &= \frac{z}{b} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{xx} & \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{xs} \\ \bar{Q}_{xy} & \bar{Q}_{yy} & \bar{Q}_{ys} \\ \bar{Q}_{xs} & \bar{Q}_{ys} & \bar{Q}_{ss} \end{Bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{eq. 30})$$

A partir de agora essas relações serão utilizadas em cada tipo e esquema de viga laminada para obtenção de seus resultados individuais. Aqui será apresentado o cálculo da fórmula da linha elástica.

3.3.2.1 ELÁSTICAS DAS VIGAS

Consideraremos a viga da Figura 14 para essa análise. Ela apresenta comprimento total de a , força F_0 aplicada no ponto $\frac{a}{2}$.

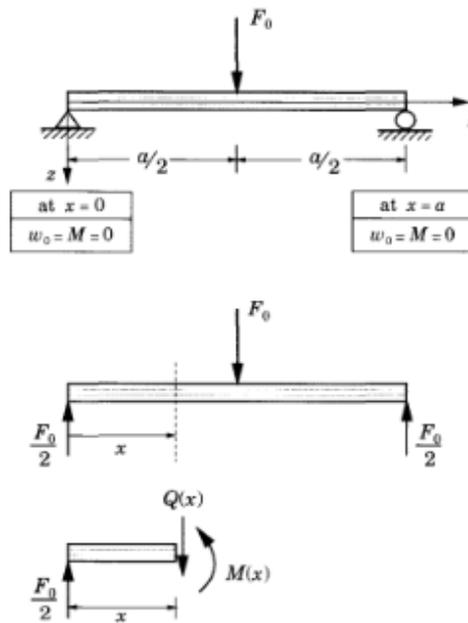


Figura 14. Viga laminada bi apoiada com carga pontual central.

A partir daí pode-se determinar a equação de momento dada por:

$$M(x) = \frac{(F_0 b)x}{2}, \text{ sendo } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

Resolvendo a relação

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^4 w_0}{dx^4},$$

tem-se que:

$$\frac{(F_0 b)x^3}{12} + c_1 x + c_2 = E_{xx}^b I_{yy} w_0(x)$$

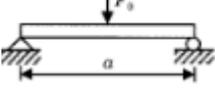
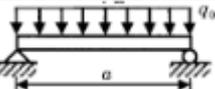
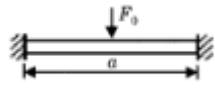
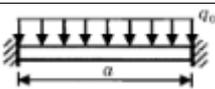
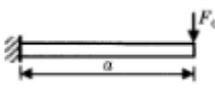
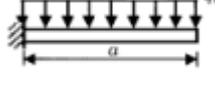
A partir das condições de contorno define-se c_1 e c_2 como, respectivamente, $\frac{(F_0 b)a^2}{16}$ e 0.

Por fim, ao substituir encontra-se a equação para elástica da viga.

$$w_o(x) = \frac{(F_0 b)a^3}{48 E_{xx}^b I_{yy}} \left[3 \left(\frac{x}{a} \right) - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right]$$

A tabela apresentada a seguir demonstra os resultados desse cálculo para demais combinações de apoio e carga aplicada nas vigas.

Tabela 1. Elásticas e Flexão Máximas de vigas laminadas.

Viga Laminada	Equação da Linha Elástica	Flecha e Momento Máx
	$\frac{c_1}{48} \left[3 \left(\frac{x}{a} \right) - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right]$	$w_{max} = \frac{c_1}{48}$ $M_{max} = -\frac{c_3}{4}$, centrais
	$\frac{c_2}{24} \left[\left(\frac{x}{a} \right) - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right]$	$w_{max} = \frac{5c_2}{384}$ $M_{max} = -\frac{c_4}{8}$, centrais
	$\frac{c_1}{48} \left[3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right]$	$w_{max} = \frac{c_1}{192}$, central $M_{max} = \frac{c_3}{8}$, em x=0
	$\frac{c_2}{24} \left[-\left(\frac{x}{a} \right) + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2$	$w_{max} = \frac{c_2}{384}$, central $M_{max} = \frac{c_4}{12}$, em x=0
	$\frac{c_1}{6} \left[3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right]$	$w_{max} = \frac{c_1}{3}$, em x=a $M_{max} = c_3$, em x=0
	$\frac{c_2}{24} \left[6 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right]$	$w_{max} = \frac{c_2}{8}$, em x=a $M_{max} = \frac{c_4}{2}$, em x=0

Sendo que e b a largura da lâmina:

$$c_1 = \frac{(F_0 b)a^3}{E_{xx}^b I_{yy}}, \quad c_2 = \frac{(q_0 b)a^4}{E_{xx}^b I_{yy}}, \quad c_3 = -(F_0 b)a \text{ e } c_4 = -(q_0 b)a^2.$$

Fonte: Reddy (2003)

Para melhor visualização do comportamento em um compósito e análise da influência da angulação da lâmina para a tensão, Reddy (2003) traçou dois gráficos de tensão por espessura de vigas simétricas, uma com angulações em (0/45/-45/90)s e outra (90/45/-45/0)s. Além disso, usou como padrão $F_0 = 1,0$, $b = 0,2$, $a =$

1,0 e $h = 0,1$ e as propriedades dos materiais respeitavam $E_2 = 1$, $\frac{E_1}{E_2} = 25$; $G_{12} = G_{13} = 0,5E_2$, $G_{23} = 0,2E_2$ e $\nu = 0,25$.

Em cada gráfico ele traça uma linha de referência de um material ortotrópico (8 camadas a 0°). Com isso, é possível realizar a comparação entre a angulação dentro de um mesmo compósito, ente o posicionamento de um laminado de mesma angulação em diferentes coordenadas e com um material ortotrópico.

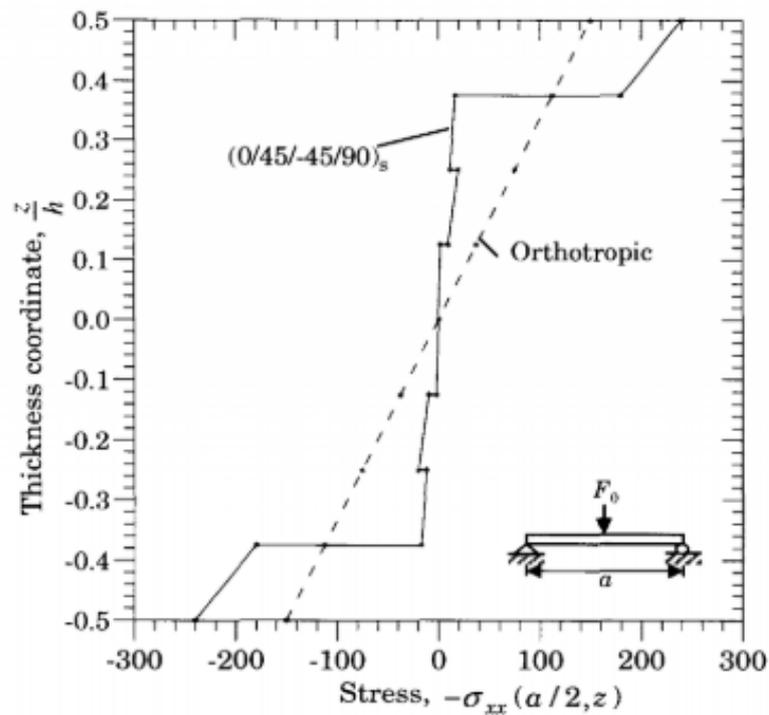


Figura 15. Gráfico tensão por espessura em viga laminada $(0/\pm 45/90)_s$ bi apoiada com carga pontual central.

Fonte: Reddy (2003)

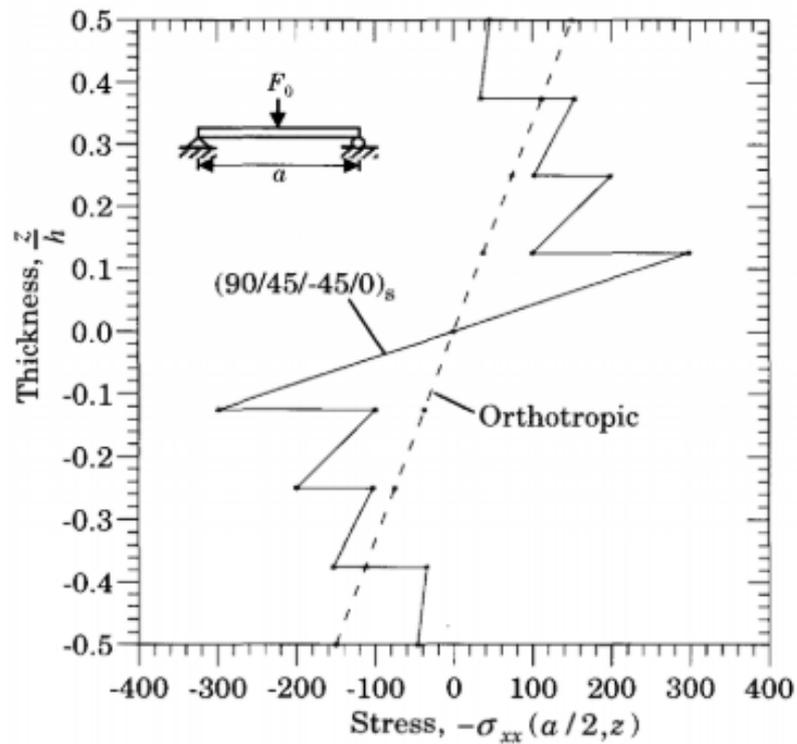


Figura 16. Gráfico tensão por espessura em viga laminada $(90/\pm 45/0)_s$ bi apoiada com carga pontual central.

Fonte: Reddy (2003)

Vamos primeiramente analisar o compósito laminar da figura 15. Como apresentado ele é composto por 8 camadas na seguinte ordem de laminação: 0° , 45° , -45° , 90° , 90° , -45° , 45° e 0° . As camadas e o plano médio foram evidenciados no gráfico e estão apresentadas na figura 17.

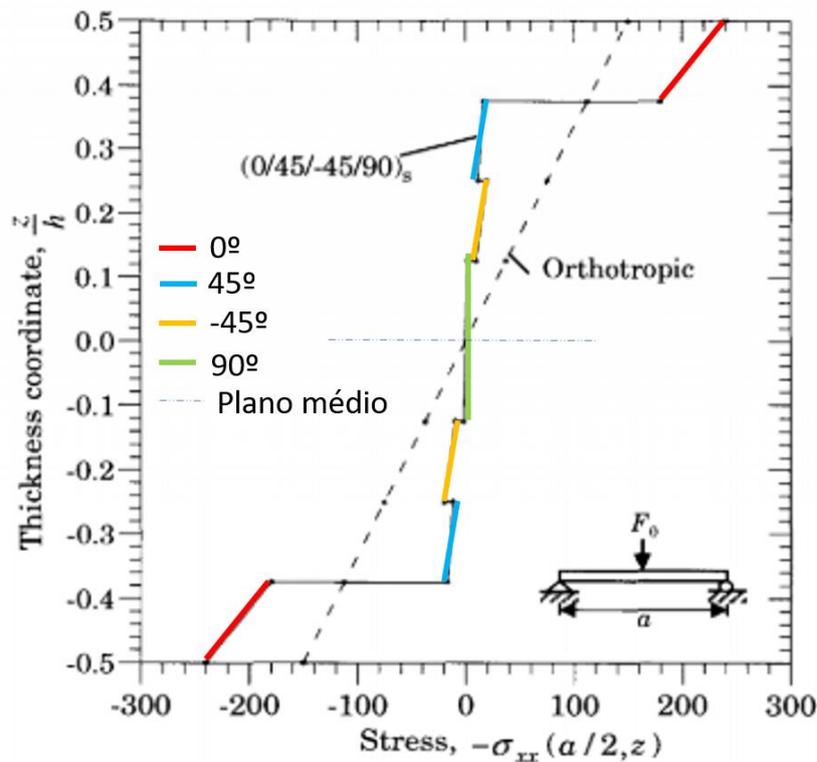


Figura 17. Gráfico $(0/\pm 45/90)_s$ adaptado para evidenciar as lâminas e suas angulações.

Fonte: Reddy (2003) – adaptado pela autora.

Pode-se observar que a tensão máxima ocorreu nas extremidades onde a angulação é de 0° . Além disso, a variação da tensão em cada camada de acordo com a espessura da mesma sofreu maior alteração em ângulos de módulos menores.

Como o compósito é simétrico em relação ao plano médio, as tensões também apresentam simetria, alternando, porém, o sentido.

Em comparação com o ortotrópico, as camadas centrais, de angulação 90° e $\pm 45^\circ$, apresentam tensões menores, porém isso se altera ao chegar nas camadas de 0° , as quais apresentam tensões maiores que do material ortotrópico.

O compósito laminar da figura 16, por sua vez, é composto por 8 camadas na seguinte ordem de laminação: 90° , 45° , -45° , 0° , 0° , -45° , 45° e 90° . As camadas e o plano médio foram evidenciados no gráfico e estão apresentadas na figura 18.

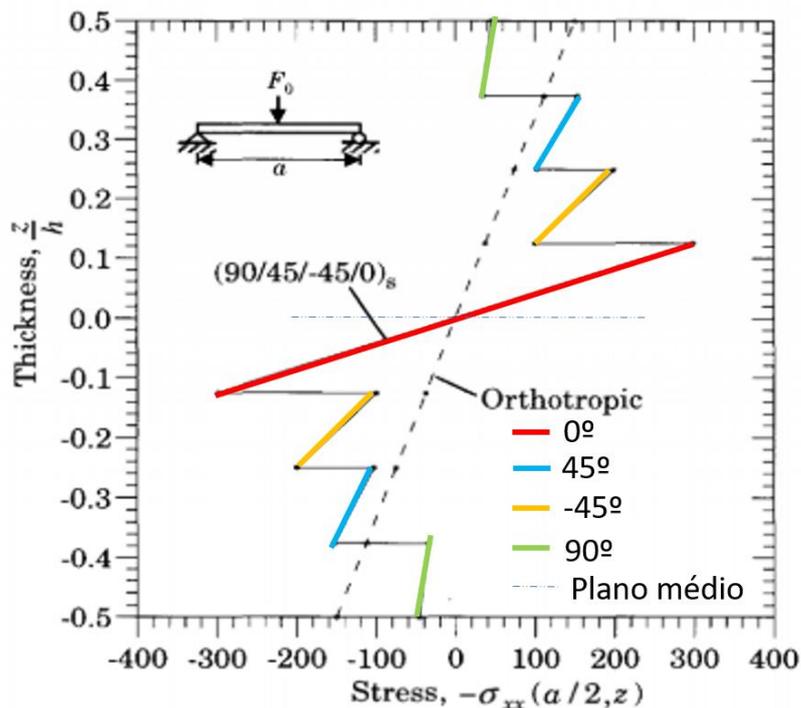


Figura 18. Gráfico $(90/\pm 45/0)_s$ adaptado para evidenciar as lâminas e suas angulações.

Fonte: Reddy (2003) – adaptado pela autora.

Pode-se observar que a tensão máxima ocorreu nas beiradas das camadas centrais, onde a angulação é de 0° . Além disso, a variação linear da tensão foi mais significativa nas camadas de módulos menores. Ou seja, o coeficiente angular foi maior na lâmina de angulação 0° e menor na de 90° .

Como o compósito é simétrico em relação ao plano médio, igualmente ao anterior, as tensões também apresentam simetria, alternando, porém, o sentido.

Em comparação com o ortotrópico, as camadas centrais, de angulação 0° e $\pm 45^\circ$, apresentam tensões maiores, porém isso se altera ao chegar nas camadas de 90° , as quais apresentam tensões menores que do material ortotrópico.

Em comparação com os gráficos das figuras 17 e 18, podemos concluir que as camadas com 0° são as de maior tensão, ou seja, a tensão máxima não está atrelada às extremidades (superior ou inferior), mas sim à composição das lâminas.

Para comparação com o material ortotrópico não se pode generalizar as diferenças de tensões, pois essas sempre vão variar de acordo com a ordenação das lâminas. Por exemplo, no primeiro gráfico, da figura 17, as tensões nas lâminas de $\pm 45^\circ$ foram inferiores às tensões da referência, o que se alterou para o gráfico da figura 18.

4. CONCLUSÕES

Para as caracterizações apresentadas a respeito dos materiais compósitos laminados, vale ressaltar que os resultados obtidos para as vigas laminadas são válidos para as simplificações aqui admitidas, considerando o estado plano de tensões. Alguns cuidados quando se tratar especificamente da borda livre devem ser tomados, pois nessa zona o estado de tensões se altera.

Na teoria clássica aqui estudada as tensões entre lâminas (σ_{xz} e σ_{zz}) são consideradas nulas ao usar as equações constitutivas. Contudo elas existem na realidade e podem apresentar discrepância com a realidade.

Usando os conceitos básicos da teoria da elasticidade e da teoria dos compósitos foi possível fazer aplicações dos laminados na engenharia, como em vigas. Para esse uso foram usados casos clássicos e o emprego analítico. É necessário, contudo, fazer tratamentos numéricos para outras finalidades.

REFERÊNCIAS

- [1] REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells - Theory and Analysis**. 2. ed. Crc Press, 2003. p. 855.
- [2] SOARES, Prof. Márcio R. F.. **Materiais Compósitos Aspectos Gerais e Aplicações**. Universidade de Caxias do Sul - RS, 2017. 74 slides.
- [3] BATISTA, Ana C. de M. C. et al. **Estudo da Integridade Estrutural em Laminados Compósitos Poliméricos**. 22o CBECiMat - Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais. Natal - RN: Centro de Tecnologia, Campus Universitário UFRN, 2016. 10 p.
- [4] ROCHA, Gabriel Lopes da; AGUIAR, Adair Roberto. **Modelo elástico-linear de sólido poroso transversalmente isotrópico**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 15, n. 65, p.53-56, 2013.
- [5] SOUZA, Leôncio de A.. **Aplicações de Materiais Compósitos na Construção Civil**. Revista Perspectivas Online: Exatas e Engenharias - Anais do VI CICC, Campos dos Goytacazes - RJ, v. 9, n. 22, p. 1, 2018.
- [6] MOREIRA, Anabela Mendes. **Materiais de Construção I: Materiais Compósitos** Tomar - Portugal: Instituto Politécnico de Tomar - Escola Superior de Tecnologia, 2009. p. 12.
- [7] REZENDE, Mirabel C.; BOTELHO, Edson C. **O Uso de Compósitos Estruturais na Indústria Aeroespacial**. Polímeros: Ciência e Tecnologia, São Carlos, v. 10, n. 2, p. 7, 2000.
- [8] RIUL, Cassius. **Desenvolvimento de compósitos estruturais de politetrafluoretileno (PTFE) com fibras contínuas**. 2009. 123 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- [9] ALMEIDA, Prof. Sérgio Frascino M. de. **Mecânica de Estruturas de Materiais Compósitos**. Universidade de São Paulo, 2017. 203 slides.
- [10] COELHO, Prof. Antonio Carlos Vieira. **Unidade 19 - Materiais Compósitos**. Universidade de São Paulo, PMT 3100 - Fundamentos de Ciência e Engenharia dos Materiais, 2017. 69 slides.