UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin

MARCOS PAULO DE OLIVEIRA

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A DIFERENCIAÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS

Campinas
2023

MARCOS PAULO DE OLIVEIRA

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A DIFERENCIAÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS

Dissertação apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, na área de Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof. Dr.ª Alessandra Rodrigues de Almeida
Coorientador: Prof. Dr. Carlos Miguel da Silva Ribeiro

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO MARCOS PAULO DE OLIVEIRA, ORIENTADO PELA PROFESSOR DOUTORA ALESSANDRA RODRIGUES DE ALMEIDA E COORIENTADO PELO PROFESSOR DOUTOR CARLOS MIGUEL DA SILVA RIBEIRO

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Maria Graciele Trevisan - CRB 8/7450

OL4c
Oliveira, Marcos Paulo de, 1995-
Conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre a diferenciação de figuras geométricas planas e espaciais / Marcos Paulo de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Alessandra Rodrigues de Almeida.
Coorientador: Carlos Miguel da Silva Ribeiro.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Modelo do conhecimento especializado do professor de matemática. 2. Conhecimento especializado do professor de matemática. 3. Geometria plana. I. Almeida, Alessandra Rodrigues de, 1974-. II. Ribeiro, Carlos Miguel da Silva, 1978-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Prospective teachers' specialized knowledge on differentiation of plane and space figures
Palavras-chave em inglês:
Mathematics teacher's specialised knowledge model
Mathematics teacher's specialised knowledge
Plane geometry
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática
Titulação: Mestre em Ensino de Ciências e Matemática
Banca examinadora:
Alessandra Rodrigues de Almeida [Orientador]
Laura Letícia Ramos Rifo
Eric Flores Medrano
Data de defesa: 16-05-2023
Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-3174-884X
- Currículo Lattes do autor: https://lattes.cnpq.br/6531681410860483

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Física Gleb Wataghin

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A DIFERENCIAÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS

MARCOS PAULO DE OLIVEIRA

COMISSÃO EXAMINADORA:

Data: 16/05/2023

Prof.ª Dr.ª Alessandra Rodrigues de Almeida (Presidente - Orientadora)

Prof.ª Dr.ª Laura Letícia Ramos Rifo – Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Eric Flores Medrano - Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

A Ata da Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, em especial, a minha mãe Gislaine e a minha avó Santina por terem me dado todo o apoio necessário quando decidi fazer graduação em outra cidade.

Agradeço ao Arnaldo que presenciou de perto o processo, me deu suporte no âmbito pessoal e me ajudou também com conselhos profissionais.

Aos amigos próximos que, pelo simples contato ou simples presença, me ajudaram a continuar seguindo neste caminho.

Aos meus orientadores: Alessandra, com seu amplo conhecimento em diversas áreas da educação, e Miguel, com seu conhecimento profundo na área e rigor na pesquisa, e a ambos pela orientação e paciência nestes anos.

Aos diversos professores da Unicamp que contribuíram com minha formação como professor e como pessoa e foram responsáveis por me proporcionar uma formação crítica e humanizada, dentre os quais, a professora Laura Rifo. Em especial, agradeço também ao professor Dario Fiorentini que me abriu as portas para conhecer a pesquisa na área de educação matemática.

Aos grupos de pesquisa Prapem e CIEspMat, cujas discussões foram de grande importância para delimitar os caminhos da pesquisa bem como entender os entornos dela. Aos colegas destes grupos de pesquisa pelos comentários, pelas revisões e pela ajuda prestada neste processo.

Aos membros da banca, pela leitura detalhada e pelos caminhos apontados desde a qualificação.

Ao Pecim pelo apoio dado com suas disciplinas e pelos docentes, discentes e funcionários.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Esta pesquisa tem como foco o conhecimento especializado de futuros professores de matemática no tema figuras geométricas, tanto planas quanto espaciais. Apresenta-se como questão de pesquisa: que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre a diferenciação de figuras geométricas planas e espaciais em um contexto de rotação e revolução de figuras geométricas? Com esta questão de pesquisa investiga-se o conhecimento matemático dos futuros professores associado ao conceito figural formado de figuras geométricas planas e espaciais e discutem-se estes conceitos a partir de contextos que envolvem a rotação e revolução destas figuras. Utilizam-se as figuras formadas a partir de uma revolução para discutir, entre outros aspectos, a dimensão da figura formada e descreve-se o conhecimento das propriedades destas figuras que é revelado no processo. Esta pesquisa utiliza a conceitualização do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) como fundamentação teórica para entendimento do conhecimento do professor e construção de Tarefas para a Formação, bem como modelo analítico para delimitar a análise de tal conhecimento. Para responder à questão de pesquisa, foi conceitualizada e implementada uma Tarefa a 19 futuros professores em uma disciplina de formação inicial do 6.º semestre da licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado de São Paulo. Da tarefa, foram coletadas as produções escritas e gravações de áudio e vídeo dos dois momentos da resolução: pequenos grupos e discussão plenária. A análise das informações provenientes dessa tarefa foi realizada a partir das categorias *do subdomínio Knowledge of Topics* (KoT) do modelo MTSK. Como resultados, verificou-se que os futuros professores revelaram diferentes conhecimentos sobre propriedades para definir figuras geométricas; ligadas às grandezas que podem ser associadas a essas figuras (como área e volume); características das fronteiras destas figuras; e dimensão do espaço em que estas figuras estão contidas, e discutir quais propriedades preponderavam sobre as outras para definir quais figuras eram planas ou espaciais. Revelam também conhecimento sobre tipos de definições, exemplos, representações e outros elementos auxiliares para o tópico de rotação de figuras geométricas, e também propriedades, definições e reconhecimento de figuras formadas por revolução neste tópico.

Palavras-chave: MTSK. Conhecimento do professor. Figuras geométricas planas. Figuras geométricas espaciais. Rotação e revolução de figuras geométricas.

ABSTRACT

This master's research focuses on the specialized knowledge of prospective mathematics teachers on the topic of plane and space geometric figures. The main research question is: what mathematic specialized knowledge is revealed by prospective mathematics teachers about the differentiation of plane and space geometric figures in a context of rotation and revolution of geometric figures? From that research question, we investigate the mathematical knowledge of the prospective teachers associated with the figural concept formed by plane and space geometric figures, and we discuss these concepts from contexts that involve the rotation and revolution of these figures. We use the figures formed from a revolution to discuss, among other aspects, the dimension of the formed figure, and we describe the knowledge of the properties of these figures that are revealed in the process. We adopted the conceptualization of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) as a theoretical foundation for understanding the teacher's knowledge and construction of tasks, as well as an analytical model to delimit our category of analysis of such knowledge. To answer the research question, a task was applied to 19 prospective teachers in an initial training course for the 6th semester of the Mathematics degree at a public university in the state of São Paulo. From the task, written productions and audio and video recordings of the two moments of the resolution were collected: small groups and plenary discussion. The analysis of the information productions coming from the task was carried out from the categories of the subdomain Knowledge of Topics (KoT) of the MTSK model. As results obtained, prospective teachers were able to reveal different properties to define geometric figures, linked to the magnitudes that we can associate with these figures (such as area and volume), characteristics of the boundaries of these figures, and the dimension of the space where these figures are contained, and to discuss which properties prevailed over the others to define which figures were flat or spatial. It was also possible to reveal knowledge about types of definitions, examples, representations and other auxiliary elements for the topic of rotation of geometric figures, and also properties, definitions and recognition of figures formed by revolution in this topic.

Keywords: MTSK. Teacher knowledge. Plane geometric figures. Space geometric figures. Rotation and revolution of geometric figures.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CIEspMat – Grupo de Pesquisa & Formação com foco no Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor de e que Ensina Matemática

KoT – Knowledge of Topics

KSM – Knowledge of the Structure of Mathematics

KPM – Knowledge of practices in mathematics

KFLM – Knowledge of Features of Learning Mathematics

KMT – Knowledge of Mathematics Teaching

KMLS – Knowledge of Mathematics Learning Standards

MK – Mathematical Knowledge

MKT – Mathematical knowledge for teaching

MTSK – Mathematics Teachers' Specialized Knowledge

PCK – Pedagogical Content Knowledge

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

TF – Tarefas Formativas

TpF – Tarefa para a Formação

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conhecimento do professor tem sido o foco de pesquisas em Educação, especialmente em virtude dos estudos desenvolvidos por Shulman (1986, 1987). Ressalta-se que tais estudos discutem dimensões gerais do conhecimento do professor; no entanto, pesquisas atuais têm buscado especificar os domínios do conhecimento desse profissional relacionado a diferentes áreas do conhecimento, como é o caso da Matemática (ver, por exemplo, BALL; THAMES; PHELPS, 2008; TURNER; ROWLAND, 2011; CARRILLO, et al., 2018).

Considerando que, dentre um conjunto de fatores controláveis, aquele que mais impacta nos resultados dos alunos é o conhecimento do professor (ver, por exemplo, ROCHOFF, 2008; CARNOY; ARENDS, 2012), torna-se necessário melhor entender o conhecimento do professor sobre determinado tópico com vistas a permitir desenhar e implementar formas de desenvolver esse conhecimento de modo a impactar positivamente no conhecimento, entendimento e raciocínios matemáticos dos alunos. Considerando como um objetivo da prática do professor a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos, é essencial uma mudança de foco na prática do professor o que requer e implica, portanto, uma mudança de foco na formação de professores (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021).

A formação de professores especialistas no Brasil, tradicionalmente, deixa de lado os conhecimentos pedagógicos, focando o conhecimento dos conteúdos específicos em cada disciplina - também, em particular, na disciplina de matemática (GATTI, 2010; FIORENTINI, 2012). No entanto, consideramos que esses conhecimentos estão correlacionados, sendo o conhecimento pedagógico específico de cada disciplina baseado no conhecimento do conteúdo da mesma (SHULMAN, 1986; BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Considerando que algumas das dificuldades do professor de matemática estão ligadas à sua formação inicial (FIORENTINI, 2013), a nossa pesquisa é voltada para a formação inicial de professores de matemática e busca entender melhor o conteúdo desse conhecimento dos futuros professores.

Shulman (1986) não delimitou as dimensões de conhecimento do professor de uma determinada disciplina escolar, por exemplo a matemática e, apesar de algumas das dimensões consideradas situarem-se em cada disciplina (a saber, conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular), nos seus trabalhos, Shulman não focou essas especificidades das áreas de conhecimento. No entanto, trabalhos posteriores de outros grupos focam as especificidades do conhecimento e prática profissional do professor com relação a cada disciplina que têm de lecionar. Diferentes conceitualizações têm surgido a respeito de conhecimento específico para cada disciplina escolar (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; TURNER; ROWLAND, 2011; CARRILLO, et al., 2018).

O *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) foi conceitualizado considerando os domínios Subject Matter Knowledge (SMK) e Pedagogical Content Knowledge (PCK) e aborda a especificidade do conhecimento do professor para ensinar os conteúdos matemáticos, considerando também a especificidade do conhecimento pedagógico do conteúdo. Esses domínios de conhecimento - específicos do ensino de matemática - foram organizados em três subdomínios que constituem cada domínio – SMK e PCK.

Ainda na perspectiva de discutir o conhecimento especializado do professor de e que ensina matemática, o *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) surge como um refinamento do modelo teórico do MKT por algumas razões, como a pouca clareza na delimitação de alguns domínios do SMK, que distinguiam o conhecimento geral e o conhecimento especializado na matemática (FLORES MEDRANO et al., 2013).

Esta pesquisa está fundamentada no modelo teórico *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* — MTSK[1] (CARRILLO et al., 2018), que foi desenvolvido a partir de modelos anteriores refinando algumas especificidades que ainda não estavam claras em tais modelos. Nesta pesquisa, o MTSK é utilizado com caráter teórico para a conceitualização do conhecimento do professor; metodológico, cujos domínios são usados para a construção de tarefas formativas (TF) para investigar tal conhecimento (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021) e, ainda, como modelo analítico.

Dessa forma, abordamos nesta pesquisa o conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre tópicos matemáticos delimitados à Geometria, considerando a importância deste tema, que, tradicionalmente, é pouco abordado em sala

[1] Optamos por manter a nomenclatura em inglês uma vez que esta é uma conceitualização do conhecimento professor divulgada e reconhecida internacionalmente e sua tradução poderia desvirtuar não apenas o sentido, mas, essencialmente, o entendimento dos conteúdos de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

de aula (LORENZATO, 1995). Isso gera um ciclo em que o professor não conhece a fundo os tópicos a serem ensinados, o que torna este tema, por consequência, necessário de investigações em pesquisas em educação matemática.

Na década de 1990, pesquisas em Geometria apontavam que seus tópicos eram deixados em segundo plano nas escolas - algumas vezes, não eram abordados pelos professores em sala de aula; em outras, eram trabalhados de formas mecânicas e algebrizadas (PAVANELO, 1993; LORENZATO, 1995). Mais recentemente, há indicações que o maior problema no ensino de Geometria continua sendo a falta da abordagem da Geometria nas escolas (LOVIS; FRANCO, 2015), gerando dificuldades para os alunos devido à pouca familiaridade com os tópicos. Na década de 1990, já se apontava como um caminho para superar deficiências no ensino de Geometria o investimento em formações iniciais e continuadas de professores (PAVANELO, 1993; LORENZATO, 1995).

No que cabe à formação de professores, torna-se um problema conciliar o conhecimento intuitivo dos alunos em Geometria com os novos conceitos e definições pretendidas pelos professores (VASCONCELLOS, 2008). Dessa forma, é importante que a formação de professores foque o conhecimento dos professores para que, nos tópicos de Geometria, ele seja capaz de desenvolver a percepção geométrica, o raciocínio geométrico e a linguagem geométrica (LORENZATO, 1995).

Clements e Battista (1992) também apontam o estudo dos objetos espaciais, suas relações e transformações como um conhecimento fortemente ligado ao raciocínio espacial, e responsável por desenvolver, entre outras habilidades, intuições espaciais sobre o mundo real e a leitura e interpretação de argumentos matemáticos. Conforme Freudenthall (1973), a Geometria tem seus dois níveis: o nível axiomático, mais “elevado” e formalmente estruturado, e o nível mais elementar, que serve para compreendermos o lugar em que vivemos, permitindo-nos conhecer, conquistar e explorar. Dessa forma, ela permite ao mesmo tempo um estudo da estrutura matemática de forma precisa e sistemática e também um entendimento do meio físico que nos envolve. As figuras geométricas e suas relações assumem papel fundamental no desenvolvimento das habilidades matemáticas associadas à Geometria.

É comum que a Geometria Espacial seja introduzida nas escolas após a Geometria Plana, e esta transição passa por alguns problemas (VASCONCELLOS, 2008). No plano, conseguimos construir e manipular objetos bidimensionais e fazer mais facilmente modelos que representem com fidelidade os planos, retas, polígonos e outras figuras planas, com isso conseguindo concretizar as noções abstratas da Geometria Plana; já no espaço, encontramos mais dificuldade para representar os objetos tridimensionais e, geralmente, recorremos às projeções bidimensionais dos objetos, que distorcem ângulos ou tamanhos dos objetos, dificultando saber quando os elementos estão na mesma linha de projeção (CARVALHO, 2005).

Por esta razão, o tratamento da Geometria espacial na escola ocorre de forma menos intuitiva, já que não conseguimos visualizar, ao mesmo tempo, todos os detalhes das figuras (CARVALHO, 2005). E, complementarmente, a Geometria tem sido usada para trabalhar o rigor na matemática, envolvendo argumentação lógica e demonstrações, a partir de alguns postulados para favorecer este formalismo (FREUDENTHALL, 1973).

Trabalhos anteriores com o foco no conhecimento do professor discutem majoritariamente figuras geométricas planas (CLIMENT; CARREÑO; RIBEIRO, 2014; ESCUDERO-DOMÍNGUEZ; CARRILLO, 2014). Desse modo, optamos por focar nossos estudos na discussão tanto de figuras geométricas planas quanto das espaciais, na tentativa de ampliar trabalhos sobre o conhecimento do professor sobre o tema.

Os tópicos que abrangem figuras geométricas são abordados ao longo de todos os anos escolares nos documentos oficiais brasileiros (BRASIL, 2018). Desde os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), os conteúdos de Geometria são apontados como responsáveis por promover aos alunos “um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1997, p. 55).

Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), os tópicos a respeito das figuras geométricas são abordados desde os Anos Iniciais, por meio do reconhecimento de objetos do mundo físico e, progressivamente, nomeação destas figuras e comparação de suas características (BRASIL, 2018). A partir do terceiro ano, é indicado como habilidade que os alunos relacionem prismas, pirâmides, cilindro e cones com suas respectivas planificações para, a partir destas representações, poderem comparar as características das figuras nos dois anos seguintes (BRASIL, 2018). Dessa forma, nos Anos Iniciais, espera-se que os alunos entrem em contato com os conceitos de cubo, bloco retangular, prisma, pirâmide, cone, cilindro e esfera. Já nos Anos Finais do Ensino

Fundamental, são enfatizadas as relações entre vértices, faces e arestas de figuras e o desenvolvimento da visão espacial. Nessa etapa, também é intensificado o trabalho com o volume das figuras geométricas espaciais, iniciando com o cálculo do volume dos blocos retangulares. A ênfase é maior com relação às medidas, notadamente volume e capacidade, que não será o nosso foco; porém, todo o conhecimento sobre o reconhecimento, características e planificação destas figuras é primordial para construir as noções de volume.

Uma revisão na literatura brasileira produzida nos últimos 10 anos nas revistas de estratos superiores[2] da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) da área de educação resultou em 57 trabalhos que abordavam o tema Geometria. A partir de uma análise dos resumos desses trabalhos, chegamos a 17 artigos que abordavam figuras geométricas espaciais. Quatro deles tinham o foco no conhecimento de professores (DUMONT; BAIRRAL, 2008; NIETO, BAIRRAL, 2013; BARROS; SAMPAIO, 2014; LOVIS; FRANCO, 2015).

Dumont e Bairral (2008) investigam o conhecimento profissional mobilizado por professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ao ensinar tópicos de Geometria como planificação, poliedros e corpos redondos, destacando aspectos atitudinais, estratégicos e geométricos desse conhecimento. Nieto e Bairral (2013) investigam formas de definição de poliedro por futuros professores de matemática em um ambiente virtual de aprendizagem, destacando a importância de espaços para se construir definições em Geometria e, a partir disso, mobilizar conhecimento de representação, conceituação e visualização de objetos geométricos. Barros e Sampaio (2014) investigaram o conhecimento matemático de futuros professores da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental em alguns tópicos de Geometria e constataram dificuldades na identificação de conceitos como polígonos, figuras espaciais, e paralelismo. Lovis e Franco (2015) investigam concepção de professores de matemática sobre Geometria e constataram que boa parte dos professores veem a importância da Geometria associada a sua aplicabilidade no cotidiano e aplicações em outros contextos.

Apesar do pouco foco no conhecimento de professores, alguns artigos trouxeram aspectos importantes a serem considerados em um estudo sobre figuras geométricas, por

---

[2] Consideramos estratos superiores as revistas com classificação A1, A2, B1 e B2 – Qualis Capes 2016.

exemplo: da importância de se fazer diferentes representações de um mesmo conceito, perceber as suas características, possíveis transições entre representações e uso da linguagem escrita para descrever conceitos (DUVAL; THADEU, 2012), e, em particular para o tópico de figuras geométricas, a importância das representações de figuras geométricas espaciais em um plano (SEMMER; SILVA; NEVES, 2013; SOUZA; GALVÃO; SOUZA, 2014), bem como a diferenciação de figuras geométricas planas e figuras geométricas espaciais (VASCONCELLOS, 2008).

A partir do levantamento das pesquisas anteriores a respeito do conhecimento do professor em Geometria e aspectos que são importantes para abordagem de conceitos geométricos, estabelecemos como foco desta pesquisa investigar o conhecimento especializado associado aos tópicos de figuras geométricas planas e figuras geométricas espaciais, suas particularidades e diferenças. Para isso, nos situamos em um contexto de formação inicial de professores de matemática e focamos o conhecimento revelado pelos futuros professores a partir da seguinte questão de pesquisa:

> *Que conhecimento matemático é revelado por futuros professores de matemática sobre a diferenciação de figuras planas e figuras espaciais em um contexto de rotação e revolução de figuras geométricas?*

Com o objetivo de responder à questão global, elaboramos as subquestões de pesquisa:

(i) Que conhecimento matemático revelam futuros professores de matemática no tópico de figuras geométricas planas e espaciais?

(ii) Que conhecimento matemático revelam futuros professores de matemática nos tópicos de rotações e revoluções de figuras geométricas?

(iii) Que conhecimento matemático é revelado por futuros professores de matemática sobre as características de figuras planas e espaciais percebidas através de rotação e revolução de figuras?

No Capítulo 1, apresentamos a fundamentação teórica para discutir os conceitos das figuras geométricas, bem como o conhecimento sobre este tópico. No capítulo seguinte, apresentamos as escolhas metodológicas, incluindo a discussão sobre as tarefas utilizadas na pesquisa, bem como a metodologia de análise do conhecimento revelado pelos futuros professores. Na sequência, no capítulo 3, apresentamos os resultados da pesquisa e fazemos a sua discussão. Ao final, apresentamos as conclusões, uma resposta para a questão de pesquisa e deixamos algumas questões em aberto que surgiram com esta pesquisa.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

OS CONCEITOS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

A Geometria opera com entidades mentais que não possuem correspondentes no mundo físico (FISCHBEIN, 1993; PARZYSZ, 1988). Nós conseguimos obter objetos no mundo físico que expressam características de um cubo, uma esfera, um quadrado, um círculo, mas esses objetos são resultado de puras definições matemáticas. Além disso, no nosso mundo só existem objetos tridimensionais (FISCHBEIN, 1993), sendo necessárias algumas aproximações para a representação de objetos bi e unidimensionais.

As imagens mentais são importantes componentes para a constituição do conceito de objetos geométricos, pois permitem a visualização e manipulação de suas características (TALL; VINNER, 1991; FISCHBEIN, 1993). Estas imagens mentais podem estar em maior ou menor grau com as definições dos objetos geométricos. A forma como as imagens mentais e as definições matemáticas se relacionam podem ser compreendidas de diferentes formas, considerando os estudos realizados por diferentes pesquisadores (TALL; VINNER, 1991; FISCHBEIN, 1993; DUVAL, 2004).

Tall e Vinner (1991) usam da imagem do conceito e definição do conceito para construir conceitos matemáticos (não somente em Geometria). O termo imagem do conceito é usado para designar toda a estrutura cognitiva associada a um conceito, que pode incluir imagens mentais, que representam propriedades ou processos relacionados aos conceitos, e é construída ao longo dos anos (TALL; VINNER, 1991). Um exemplo da imagem do conceito de uma pirâmide é a imagem mental que as pessoas formam sobre a mesma ao ser evocado o seu nome: elas geralmente são retas e tem como faces laterais triângulos isósceles. A definição do conceito é formada pelas definições formais, expressa de forma verbal pela pessoa, variando também o grau de formalidade de definição (TALL; VINNER, 1991). Alguns indivíduos podem ter sua definição conceitual nula ou não associada à imagem conceitual, atribuindo-lhe assim um menor sentido. Tomando o exemplo anterior das pirâmides, é possível que alguém não saiba formular a definição formal dela, mas ainda assim tenha uma imagem mental sobre este conceito e consiga identificar uma pirâmide quando a vê.

Já Fischbein traz a ideia de conceitos figurais, que são imagens completamente controladas pelas suas definições (FISCHBEIN, 1993). Esses conceitos também geram imagens mentais associadas a eles, que refletem características como formato, posição e tamanho, além das qualidades conceituais, como idealidade, abstração e generalização. Um conceito figural seria a união entre aspectos conceituais e aspectos figurais (imagens mentais e representações destas figuras). Dessa forma, o que Tall e Vinner (1988) trazem sobre imagem do conceito é importante para a construção das imagens mentais dos conceitos figurais, e a definição do conceito é importante para se construir os aspectos conceituais das figuras geométricas. Um conceito figural ideal corresponde com a sua definição conceitual, enquanto a imagem mental do seu conceito corresponde à sua imagem conceitual (FISCHBEIN, 1993).

A imagem mental do conceito de cubo, por exemplo, pode envolver os exemplos de imagens associados a este nome, como um dado, ou um cubo mágico, a construção das arestas de um cubo feita com canudos, ou também características destas figuras, como a de que as faces duas a duas são paralelas.

Para a construção dos conceitos das figuras geométricas, faz-se importante discutir as representações dessas figuras, tanto materiais quanto mentais, que ocorrem de forma não hierarquizada, de forma que as representações materiais constroem e vão sendo modificadas pelas representações mentais que o sujeito faz e vice-versa (DUVAL, 2004). A apreensão conceitual se dá de forma mais completa quanto mais temos representações diversas do mesmo objeto (DUVAL, 2004, 2012).

As representações ditas semióticas são aquelas feitas por meio de algum signo e são importantes, porque são acessíveis aos nossos sentidos, visto que por meio delas ocorre o processo de apreensão conceitual (DUVAL, 2002; DUVAL; THADEU, 2012). Elas não são simples externalizações de representações mentais, mas é por meio delas que ocorre o desenvolvimento de tais representações mentais.

Se, por um lado, várias representações são importantes para construir uma imagem mais ampla do conceito; por outro, é importante distinguir um conceito de suas representações. Um objeto matemático não está acessível à percepção humana, pois não faz parte dos objetos ditos reais, ou físicos, mas é por meio dessas representações materiais que a apreensão desses conceitos se torna possível (DUVAL, 2002; DUVAL; THADEU, 2012).

O termo representação material também faz referência às representações semióticas (PARZYSZ, 1988). Apesar de o autor entender de forma diferente as relações entre representações mentais e materiais em relação à Duval (pois acredita que as representações mentais precedem as materiais, que são apenas uma externalização delas), ele apresenta explicitamente alguns tipos de representações possíveis.

Dentre as representações materiais, existem as representações próximas e as representações distantes (PARZYSZ, 1998). As representações próximas são aquelas que possuem a mesma dimensão que a figura e que mostram mais características da figura. As representações distantes são aquelas que possuem dimensão inferior à da figura, mostrando menos características da figura. Para figuras planas, as representações próximas são os desenhos bidimensionais destas figuras, e não há representações distantes. Para as figuras espaciais, as representações próximas são os modelos tridimensionais destas figuras (como um cubo construído com madeira), e as representações distantes são os desenhos destas figuras num plano.

O autor tem como foco a mudança de dimensões entre as figuras, abordando a problemática de representações de figuras geométricas com dimensões menores que a figura em si (PARZYSZ, 1998). Essas representações (distantes e próximas, para figura planas e figuras espaciais) são importantes, pois diferenciam a figura geométrica, algo abstrato, de representações materiais.

Um tipo específico de representações distantes das figuras espaciais são as ditas planificações de figuras espaciais, que são representações de suas fronteiras em um plano. Para isso, faz-se uma desconstrução dimensional das fronteiras das figuras espaciais, sendo as mesmas representadas em um plano de forma que seja possível dispor esta representação como a fronteira da figura original (SOUZA; MORETTI; ALMOULOUD, 2019).

Duval e Moretti (2012) acrescentam a importância da língua natural como uma forma de representação dos objetos matemáticos bem como para consolidar as representações anteriores. Todas as representações são parciais e, por isso, é importante conhecer o uso de várias representações e saber transitar corretamente entre as representações possíveis. Portanto, para fazermos uma investigação sobre conhecimento de futuros professores neste tópico, utilizaremos de registros de representação semiótica para acessar o conhecimento dos futuros professores.

A definição de um conceito é formada pelas palavras usadas para descrever um determinado conceito, e pode ter um maior ou menor grau de formalidade, assim como ter, ou não, ligação com a imagem do conceito que é estabelecido pela pessoa (TALL; VINNER, 1991; FISCHBEIN, 1993). Segundo Vinner (2002), uma definição deve ser uma descrição minimal, que não exiba mais características além das necessárias para definir um conceito (que não tenha características que podem derivar de outras). Como por exemplo, definir que um retângulo é um paralelogramo com quatro ângulos retos e lados opostos paralelos não é uma descrição minimal, porque ser paralelogramo e possuir lados opostos paralelos descrevem a mesma característica e, portanto, não corresponde a uma definição matematicamente válida.

Não existe uma única forma de construir definições em Matemática. Em particular, na Geometria, podemos, por exemplo, selecionar um subconjunto de propriedades do objeto, de forma que todas as outras propriedades podem ser deduzidas a partir desta ou então derivando-as a partir de outros conceitos, excluindo, generalizando, especializando ou adicionando propriedades ao primeiro (DE VILLIERS, 1998).

Podemos construir uma definição listando um conjunto de características que definem unicamente o objeto em questão, ou então, de outra forma, partindo de uma outra definição dada e acrescentando ou excluindo características, generalizando ou especializando uma definição anterior. A primeira dessa forma corresponde à definição descritiva (DE VILLIERS, 1998) em que elegemos um conjunto de características mínimas que definem a figura em questão, por exemplo se falamos que uma pirâmide é uma figura espacial construída a partir de um polígono e um vértice fora da base deste polígono, em que unimos cada um dos vértices do polígono a este ponto, e consideramos que a pirâmide é o espaço delimitado por esta construção. Por outro lado, podemos ter a definição construtiva, que se faz a partir de outras definições já existentes, acrescentando ou excluindo propriedades, como o exemplo de definir pirâmide a partir da definição de um poliedro, dizendo que é um poliedro que possui somente uma base e cujas faces laterais são triangulares.

Apesar de as pesquisas em Educação Matemática discutirem amplamente as definições matemáticas (ver, por exemplo VINNER, 2002; MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2002; VAN DORMOLEN; ZASLAVSKY, 2003), não há consenso sobre o que é uma definição, mas podemos listar alguns atributos que são necessários para produzir uma definição (ESCUDERO et al., 2014). Estes atributos são:

(i) Hierarquização – corresponde ao uso de termos primitivos (que não necessitam de uma definição) ou de termos que já foram utilizados antes;
(ii) não circularidade, relacionado ao anterior, que consiste em não usar o próprio conceito em sua definição;
(iii) a não ambiguidade, que é a definição descrever uma classe única de objetos;
(iv) a não contradição, que significa que, em uma definição, não pode estarem presentes uma característica e a sua negação;
(v) a invariância sob mudança de representação, que diz que as definições devem descrever um objeto independente da representação usada;
(vi) a equivalência, que é a possibilidade de criação de mais de uma definição para o mesmo objeto;
(vii) a elegância, que é escolher entre as possíveis definições aquela que usa menos palavras, ou menos símbolos, ou conceitos mais básicos;
(viii) minimalidade, que é uma não redundância das características;
(ix) e a degeneração, que são exemplos dos conceitos que não fazem parte da ideia intuitiva do conceito.

Dessa forma, ao investigar o conhecimento de futuros professores sobre definições matemáticas, faz-se necessário desenvolver e proporcionar que se formulem definições e discutam os atributos das definições.

Para construir as definições, levantaremos aspectos tratados por matemáticos e pela psicologia da educação. Algumas considerações sobre figura são descritas em uma tradução de “os elementos” de Euclides, em que se apresenta a definição de figura como “o que é contido por alguma ou algumas fronteiras” (EUCLIDES, 2009, p. 97). O mesmo autor descreve fronteira como “aquilo que é extremidade de algo ou alguma coisa” (EUCLIDES, 2009, p. 97). Essa descrição traz a característica de que figuras geométricas devem ser limitadas e, dessa forma, possuir uma fronteira.

A fronteira da figura será constituída de formas distintas dependendo da dimensão que ela possuir. Dessa forma, é importante determinar a dimensão da figura, e faremos isso determinando o espaço mínimo em que a figura pode ser contida: se só pode ser contida no espaço tridimensional, é uma figura tridimensional; se pode ser contida em um único plano, é bidimensional e se pode ser contida em uma reta, é unidimensional.

Assumimos nesta definição que o espaço em que vivemos possui três dimensões e, dessa forma, definiremos somente figuras com até três dimensões (LIMA, 2007b).

Em questão de nomenclatura, usaremos figuras geométricas planas (ou somente figuras planas) e figuras geométricas espaciais (ou somente figuras espaciais) para as figuras geométricas que são bidimensionais e tridimensionais, respectivamente, e, por falta de outra nomenclatura, chamaremos as figuras com uma dimensão de unidimensionais. Portanto, os nomes “planas” e “espaciais” são a terminologia associada a estas figuras, enquanto “bidimensionais” e “tridimensionais” são características de estas figuras possuírem duas ou três dimensões espaciais. Podemos ainda considerar, com as características descritas, que um segmento de reta seja uma figura unidimensional. Dessa forma, a fronteira das figuras unidimensionais é formada por dois pontos, a fronteiras das figuras planas é formada por linhas, e a fronteira das figuras espaciais é formada por superfícies.

Para além de determinar a dimensão das figuras, precisamos determinar se a figura é constituída pela sua fronteira, ou pela fronteira e o seu interior, o que é de fato o conceito figural (FISCHBEIN, 1993). Por exemplo, a circunferência é uma representação da fronteira de um círculo com as mesmas medidas, porém estes são objetos geométricos diferentes. No entanto, para outras figuras planas normalmente esta diferenciação não é feita, e isso compromete a unicidade das definições de cada uma dessas figuras (FISCHBEIN, 1993; VODUŠEK; LIPOVEC, 2014). Por exemplo, um quadrado pode representar tanto quatro segmentos de reta de mesmo comprimento que formam ângulos retos entre si, quanto uma região do plano que possui como fronteira uma linha poligonal com as características descritas. forma como entendemos figuras planas terá implicações posteriormente com relação ao que corresponderá das figuras espaciais, pois a forma como é entendido o quadrado implica diferentes entendimentos de um prisma retangular – incluir ou não o interior das faces, ou incluir apenas as arestas.

Nesta pesquisa, optamos por considerar figuras geométricas constituídas pela sua fronteira e seu interior, por considerar que desta forma as figuras apresentam melhor características próprias à dimensão que possuem, mas a mesma pode ser definida como objetos constituídos somente pela sua fronteira. Usualmente, utilizam-se os termos “preenchido” e “não preenchido”, mas deveria ser empregado “figuras formadas pela sua fronteira e interior" ou "figuras formadas apenas pela fronteira"[3]. Cabe ressaltar que não faremos um julgamento de estar certo ou errado caso uma figura geométrica seja definida somente pela sua fronteira, mas, pela necessidade de se definir uma das formas, escolheremos uma delas e descreveremos as características das figuras geométricas a partir desta escolha.

Utilizamos a nomenclatura "figura geométrica" para nos referirmos aos objetos geométricos que satisfazem todas as características anteriores e, em caso mais geral, chamamos de objetos geométricos. São exemplos de objetos que não formam figuras propriamente ditas, mas podem ser partes delas: linhas curvas, superfícies curvas, um conjunto de faces da fronteira de uma figura espacial.

Outro aspecto a se considerar é diferenciar as figuras geométricas de suas representações (DUVAL, 2012). Portanto, ao considerarmos que o círculo é uma figura geométrica, a circunferência é a representação de sua fronteira. Já se a circunferência fosse a figura geométrica, então o círculo seria uma representação do espaço delimitado pela circunferência. Para figuras espaciais, temos ainda mais representações, pois muitas vezes são exibidas construções feitas de madeira, de papel, ou com canudos. Um exemplo de representação de figuras espaciais que é constituída pela sua fronteira e pelo seu interior é a representação de uma pirâmide maciça feita de madeira. Uma construção de papel com o mesmo formato seria um exemplo de representação da sua fronteira (que neste caso são as suas faces). Uma construção com canudos da mesma pirâmide seria uma representação de suas arestas, que são parte da sua fronteira.

Assumindo que para cada ente podemos apresentar distintas definições que sejam equivalentes, fica óbvio que não existe uma única forma de definir figura. Consideramos que uma figura geométrica é um objeto geométrico que possui uma fronteira. Uma figura unidimensional é uma figura que existe uma única reta que contém esta figura, ou também uma figura que está contida em uma reta e possui um comprimento. Uma figura plana é uma figura que existe um único plano que contém esta figura, que também pode ser descrito como uma figura que está contida em um plano e possui uma área, e também como um conjunto de pontos que estão contidos em um único plano e possuem uma área diferente de zero. Uma figura espacial é uma figura contida em um único espaço, ou seja, uma figura que não está contida em um único plano e ocupa, necessariamente, volume –

[3] Em duas dimensões, um exemplo típico desta diferenciação é a de círculo e circunferência.

que pode ser também considerada a partir de um conjunto de pontos que definem um volume diferente de zero.

Para ilustrar as diferentes possibilidades, a depender do conceito que se assume para figuras planas e espaciais, podemos ter: (i) se considerarmos que figuras planas estão contidas em um plano e não são preenchidas, enquanto figuras espaciais não estão contidas em um plano e definem um volume, um cubo oco é uma figura espacial e suas faces são representações da região delimitada pelos quadrados que compõem a face; (ii) se considerarmos que figuras planas estão contidas em um plano e são preenchidas, enquanto figuras espaciais não estão contidas em um plano, definem um volume, e são também preenchidas, então um cubo oco representará a fronteira de uma figura espacial (usualmente representada por 6 quadrados[4]), enquanto suas faces quadradas serão cada uma figura plana; ou (iii) se considerarmos que figuras planas são uma superfície (que pode não estar contida em um único plano), um conjunto de 2 ou mais faces desse cubo seria uma figura plana.

Existem ainda as definições de superfície, como “aquilo que tem somente comprimento e largura” (EUCLIDES, 2009, p. 97) e sólido geométrico como “algo que possui comprimento, largura e altura” (EUCLIDES, 2009, p. 97). Dessa forma, superfície não é o mesmo que definimos por figura plana, pois podem existir, por exemplo, superfícies curvas, como a superfície de uma esfera, que não são objetos bidimensionais (e, portanto, não são figuras planas), mas são superfícies; no entanto a definição de sólido geométrico é o mesmo que definimos como figuras espaciais.

As partes da imagem do conceito e da definição de um conceito que podem entrar em conflito com outras partes dos mesmos são chamadas de fatores potenciais de conflito (TALL; VINNER, 1991). Ao abordar esses fatores, precisamos mobilizar o conhecimento sobre aquele conceito para obter uma resposta para tal conflito. Estes conflitos são importantes para construir ou fazer a correspondência entre as imagens e definições dos conceitos.

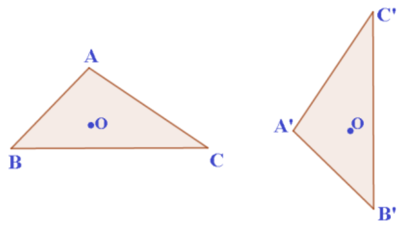
Nesta pesquisa, usaremos figuras geradas por meio de revolução, usualmente denominadas de sólidos de revolução, para levantar o fator de conflito da dimensão da figura que será formada por meio de revolução (VASCONCELLOS, 2008; ANDRADE; MONTECINO, 2011). Os sólidos de revolução são usualmente abordados no Brasil a

[4] Para uma discussão associada a outras possibilidades consultar, por exemplo, Meireles (2021)

partir do Ensino Médio, e mais amplamente estudados no Ensino Superior em disciplinas como as de cálculo de múltiplas variáveis (DANTAS; MATHIAS, 2017), focando seu estudo em determinar o valor do volume de regiões formadas dessa forma. No contexto desta pesquisa, este tópico será discutido para investigar as características das figuras formadas, como por exemplo, estarem contidas em um plano ou não, serem abertas ou fechadas, definirem uma área ou definirem um volume. Para isso, usaremos a conexão entre figuras formadas por revolução e rotação de figuras geométricas, de forma que a revolução pode ser entendida como uma união de todas as posições possíveis para a rotação de uma figura no espaço tridimensional.

Nessa perspectiva, fazemos conjuntamente o estudo de rotação para melhor compreender essa semelhança. As transformações geométricas são construções geométricas que preservam certas propriedades em relação à sua construção original (WAGNER, 2007), tais como tamanho, ângulos e orientação. A rotação é um tipo de transformação que leva uma imagem inicial a uma nova posição de forma que cada ponto correspondente entre a imagem inicial e a imagem rotacionada forma um mesmo ângulo a partir de uma origem comum (RESENDE; QUEIROZ, 2008). Dessa forma, os elementos necessários para fazer uma rotação são um ângulo e uma origem. É necessário também de um sentido para o giro, mas este pode ser representado, por exemplo, admitindo-se ângulos negativos e positivos para representar giros no sentido anti-horário e horário, respectivamente.

Figura 1: Exemplo de rotação no plano



Fonte: Autores (2022).

Observamos que as imagens iniciais e finais da rotação possuem pontos que representam a mesma parte da figura, e estes pontos são ditos homólogos. Os pontos homólogos são nomeados de forma a evidenciar que são pontos correspondentes, como

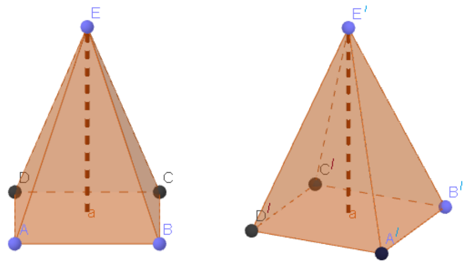
A e A’, e B e B’ na Figura anterior, mas que também fazem a diferenciação entre as figuras iniciais e finais (figura transformada) da rotação.

Assim, duas propriedades da rotação são: as imagens iniciais e finais serem congruentes e a rotação, uma isometria (transformação geométrica em que as imagens iniciais e finais são congruentes).

Nestes casos em que existe um plano que contém ambas as imagens iniciais e finais da rotação, dizemos que é uma rotação no plano (RESENDE; QUEIROZ, 2008). Nesse tipo de rotação a origem é formada por um ponto – centro de rotação – e rotacionamos figuras com dimensão no máximo igual a dois.

Há também a possibilidade de rotacionarmos no espaço tridimensional, no qual a origem da rotação (também chamada de eixo) é formada por uma reta (WAGNER, 2007). Nesse caso, podemos também rotacionar figuras espaciais.

Figura 2: Exemplo de rotação no espaço

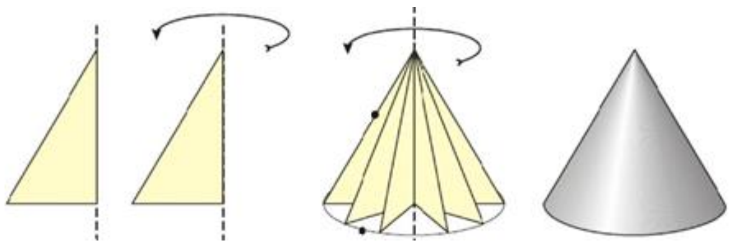


Fonte: Autores (2022).

A partir de uma rotação no espaço também formamos uma figura congruente à figura inicial, fato que, por vezes, é confundido com a revolução de figuras geométricas. A revolução de figuras pode ser relacionada com a rotação no espaço, unindo todas as possíveis imagens formadas por um mesmo eixo de rotação no espaço e criando uma nova figura, que pode, ou não, ter uma dimensão maior que a figura original.

A revolução de figuras ocorre somente no espaço tridimensional, em torno de um eixo. Considera-se uma figura sendo rotacionada em torno desse eixo, em todas as suas posições possíveis, formando uma nova figura composta pela união de todas estas imagens (DOLCE; POMPEO, 1995). Portanto, a revolução pode ser entendida como uma união de todas as possíveis posições da imagem final da rotação de uma figura no espaço. Um exemplo de revolução de figura plana é inserido abaixo:

Figura 3: Exemplo de geração de um cone por revolução de um triângulo retângulo



Fonte: Dolce e Pompeo (1995)

Ao fazer a revolução de uma determinada figura, podemos obter como resultado uma superfície curva, uma figura espacial ou a fronteira de uma figura espacial (como no caso do exemplo anterior de fazermos a revolução dos dois lados do triângulo que não coincidem com o eixo de revolução), sendo assim uma forma possível de investigar estes tipos de figuras. Verificamos também que o único elemento necessário para a revolução é um eixo e que este é outro fator que a distingue da rotação no espaço, onde também é necessário ao menos um ângulo.

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR SOBRE FIGURAS GEOMÉTRICAS

O nosso foco da pesquisa é analisar o conhecimento do professor, então é essencial discutir o que se entende por conhecimento do professor nesta perspectiva. A conceitualização do MSTK[5] (CARRILLO et al., 2018) considera todo o conhecimento do professor de matemática como especializado. O modelo é composto pelos domínios *Mathematical Knowledge* (MK) e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), cada um subdividido em três subdomínios, além de considerar *Beliefs*, que correspondem às crenças e concepções quanto à matemática e ao ensino de matemática.

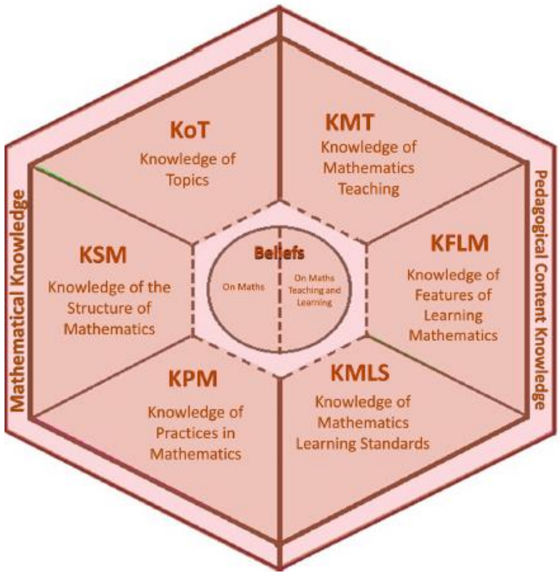
O modelo MTSK conceitualiza o conhecimento do professor para cada tópico matemático. Dessa forma, precisamos também delimitar o(s) tópico(s) que será(serão)

---

[5] Optamos por manter a nomenclatura em inglês, uma vez que esta é uma conceitualização do conhecimento professor divulgada e reconhecida internacionalmente e sua tradução poderia desvirtuar não apenas o sentido, mas, essencialmente, o entendimento dos conteúdos de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa

descrito(s) o conhecimento. Descreveremos o conhecimento do professor para o tópico "figura geométrica", que é abordado nesta pesquisa, e também para os tópicos "rotações de figuras geométricas" e "revolução de figuras geométricas", que se referem aos tópicos que são contextos nos quais será discutido o conceito de figura geométrica.

Figura 4: O modelo MTSK



Fonte: (CARRILLO *et al*., 2018, p. 241)

Os domínios MK e PCK são divididos em três subdomínios cada, os quais são descritos a seguir.

O subdomínio *Knowledge of Topics* (KoT) inclui o conhecimento do que e de que forma o professor conhece o tópico matemático a ser ensinado (Neste caso, é esperado um entendimento mais amplo e mais profundo do professor em relação ao que é esperado dos alunos). Envolve o conhecimento das diferentes definições possíveis para cada tópico, bem como as condições necessárias e suficientes para gerar tais definições. Também inclui o conhecimento das diferentes representações relacionadas ao tópico, dos procedimentos associados a este tópico e também dos fenômenos relacionados ao tópico que podem gerar conhecimento matemático. Está contemplado no KoT conhecer definições de figuras planas, de figuras espaciais, de rotações, procedimentos para se realizar uma rotação além de saber características destes conceitos.

Uma das categorias é *definitions, properties and foundation*. Neste trabalho, sentimos a necessidade de organizar a apresentação dos resultados e a discussão desta categoria em subcategorias, em função do detalhamento que foi requerido, tal como em

Policastro (2021); esta separação não tem a intenção de modificar as categorias sugeridas pelo modelo, mas sim melhor descrever o conhecimento presente nesta categoria. Dessa forma, consideramos, separadamente, a subcategoria *definitions* e a subcategoria *properties and foundations*. Consideramos que o conhecimento de uma propriedade de uma figura geométrica é o conhecimento de uma característica que pode estar presente tanto em todos os tipos de figuras quanto em um tipo específico de figura. O conhecimento sobre definições é aquele necessário para construir definições de cada tipo de figura, bem como para reconhecer exemplos e contraexemplos de cada definição.

Figuras geométricas são objetos geométricos delimitados. Então, ao professor, cumpre um conhecimento das propriedades deste tópico associado a conhecer que figuras geométricas são limitadas e possuem uma fronteira (EUCLIDES, 2009); conhecer os diferentes tipos de fronteira, de acordo com a dimensão da figura: figuras unidimensionais possuem pontos como fronteira, figuras planas possuem fronteiras formadas por linhas, e figuras espaciais possuem fronteiras formadas por superfícies.

Um conhecimento sobre definição associado a este tópico é determinar se as figuras são constituídas exclusivamente pela sua fronteira ou pelo espaço delimitado por sua fronteira. Tal fundamento está associado ao fato de que as definições devem descrever um único objeto matemático (VINNER, 2002), sem gerar ambiguidades e especificar o conceito figural que está sendo considerado (FISCHBEIN, 1993). Assim, precisamos delimitar se figuras planas, como os polígonos, são constituídas somente pela linha poligonal que o define, ou se inclui o seu interior e também se a figura espacial, como o cubo, contém somente a sua fronteira (as faces), ou também o seu interior.

Outro conhecimento nesta categoria de figuras geométricas é conhecer em qual “espaço mínimo” a figura está contida. Um segmento de reta, por exemplo, está contido em um plano, e mais ainda, existe uma reta que contém este segmento, então o “espaço mínimo” que contém esse segmento é uma reta. Da mesma forma, uma figura plana está contida no espaço tridimensional, mas sempre existe um plano que contém essa figura e, portanto, figuras planas estão contidas em um plano. Além de conhecer a existência de uma reta, plano ou espaço que a contenha, também é necessário o conhecimento de sua unicidade. Ao afirmarmos que existe uma reta que contém um objeto matemático, este objeto pode ser um segmento de reta, mas também pode ser um ponto ou conjunto de pontos; se existe uma única reta que contém este objeto matemático, ele será somente a própria reta, ou um segmento dela. Da mesma forma, se existe um plano que contém uma figura, esta figura pode ser uma figura plana ou uma figura unidimensional, mas, se existe um único plano que contém a figura, então, ela só pode ser uma figura plana.

Faz parte desta categoria o conhecimento associado às grandezas que podem ser medidas nessas figuras. Podemos associar um comprimento a uma figura unidimensional. Para figuras planas, podemos associar uma área, entendendo-a como a quantidade de superfície ocupada pela figura (LIMA et al., 2011), independentemente da forma como a figura está definida: se a figura for constituída somente pela fronteira, esta define uma área e, se a figura for constituída também pelo interior, ela possui uma área e sua fronteira a define. Dessa forma, também associamos um volume às figuras espaciais, sendo este a quantidade de espaço que é ocupado pela figura (LIMA et al., 2011). Caso a figura seja somente a fronteira, ela define um volume e, caso ela seja a fronteira e o interior, ela possui um volume.

No caso específico das figuras espaciais, podemos também associar uma medida no espaço que é delimitado pela figura, mas não faz parte dela. Assim, quando uma figura que é constituída somente pela fronteira define um volume, podemos também dizer que ela possui capacidade. De forma contrária, se a figura possui volume, e todo o seu espaço interior faz parte da figura, dizemos que ela não possui capacidade (ou possui capacidade igual a zero).

Podemos ainda fazer uma desconstrução dimensional, isto é, considerar elementos que possuem dimensão menor em cada figura (SOUZA; MORETTI; AUMOULOUD, 2019) e associar comprimentos às figuras planas, associando-os às linhas que definem a sua fronteira, e também associar comprimentos e áreas a figuras espaciais, associando as áreas à sua fronteira, e comprimentos nos casos específicos de as fronteiras serem constituídas por partes planas.

Nos tópicos de rotações e revoluções de figuras geométricas, é conhecimento nesta categoria as propriedades destas transformações: conhecer que a rotação é uma isometria, conhecer que a distância de cada ponto da figura rotacionada ou que sofre revolução até o eixo é mantida fixa.

Também faz parte do conhecimento associado às definições de rotações de figuras, como conhecer condições necessárias e suficientes para realizar estas transformações: uma rotação no espaço necessita de uma origem (eixo) e um ângulo, uma revolução precisa apenas de uma origem. Além disso, também faz parte das definições conhecer os tipos de rotações, como rotações de figuras no plano ou no espaço.

Outra categoria é *phenomenology and applications*, que se refere ao conhecimento matemático que pode ser gerado entendendo figuras geométricas ou transformações geométricas como um fenômeno. Envolve conhecer que figuras geométricas podem ser construídas pela união de vários pontos, ou várias linhas, ou várias superfícies, ou como um subconjunto do plano (no caso das figuras planas) ou do espaço tridimensional (no caso das figuras espaciais). No caso das rotações e revoluções, faz parte do conhecimento incluído nesta categoria, conhecer que a revolução tem a natureza de formar uma nova imagem (não congruente à imagem inicial) e que possui uma dimensão maior. Já no caso da rotação, inclui conhecer que o fenômeno associado mantém na figura transformada as mesmas propriedades da figura original.

Da categoria *procedures* faz parte o conhecimento envolvido em conhecer o processo de formação de figuras específicas, por exemplo, as figuras formadas por revolução. Envolve, por exemplo, conhecer que um triângulo pode gerar, por revolução, um cone ou que um retângulo pode gerar um cilindro, e conhecer em que condições estas figuras são formadas. Esta categoria inclui conhecer os procedimentos para ser fazer uma rotação ou revolução, bem como conhecer as figuras que são formadas após cada transformação.

Outra categoria é *register of representation*, que inclui todo o conhecimento do professor relativo aos tipos de representações de figuras geométricas. Primeiramente, é necessário diferenciar figuras que são representáveis das que não são (PARZYSZ, 1988). Objetos infinitos, como retas, planos e o próprio espaço, por vezes, são representados como segmentos de reta, quadriláteros ou cubos respectivamente, causando uma ambiguidade quando representamos essas figuras. Portanto, é necessário usar uma notação diferente para a representação dessas figuras, como quando são usados o símbolo de reticências ou uma seta nos extremos de segmentos de reta para representar retas.

Além disso, diferenciar as figuras de suas representações (DUVAL, 2012) é um conhecimento que cumpre ao professor por forma a poder fazer uso adequado dos registros de representação. As figuras geométricas em si são objetos matemáticos abstratos, ou seja, não existem no mundo real. Qualquer representação semiótica é uma aproximação no mundo real de algo com as características presentes nestas figuras. Dessa forma, um quadrado é um objeto matemático abstrato, que pode ser representado com um desenho, ou uma descrição verbal, e todas essas são representações dessa ideia. Da mesma forma com figuras espaciais, um desenho de um cubo, ou um material concreto com o formato de um cubo são representações desse objeto matemático.

Essa diferenciação também depende da forma como definimos as figuras. Por exemplo, se definimos um quadrado como uma região de um plano cujas fronteiras são formadas por 4 lados de mesmo comprimento que formam ângulos retos com os seus consecutivos, então uma linha poligonal congruente à que contorna esta figura representa a fronteira do quadrado, e não o quadrado em si. Ao contrário, se definirmos um quadrado como uma linha poligonal simples e fechada, formada por quatro lados congruentes que formam ângulos retos com os seus consecutivos, o preenchimento desta figura representa a região do plano que é delimitada por este quadrado.

Para figuras espaciais vale o mesmo. Se a figura espacial for uma figura preenchida, por exemplo, o cubo, então as faces deste cubo representarão sua fronteira . Já se o cubo não for preenchido, o cubo preenchido cuja fronteira é congruente a este representa o espaço delimitado pelo cubo. Além disso, uma construção somente com as arestas de um cubo é a representação delas (que formam parte da fronteira).

Representar as figuras de cada forma possível e transitar entre estas representações também é um conhecimento nesta categoria. Uma forma de representação importante é em língua natural, ou seja, representação verbal das características das figuras (DUVAL, 2012).

Para figuras planas, também é possível fazer sua representação por meio de desenho, e este é um conhecimento para este tipo de figura (PARZYSZ, 1988). Para figuras espaciais, há também a possibilidade de serem representadas por desenho, mas este apresenta somente uma perspectiva da figura (PARZYSZ, 1988).

O uso de materiais manipuláveis também é um conhecimento sobre representações de figuras, pois qualquer material concreto é tridimensional, e então quando usamos materiais para representar figuras planas ou unidimensionais algumas características devem ser evidenciadas.

Quando uma figura plana é representada nas faces de uma figura espacial, é importante verbalizar que não temos uma figura plana, mas que a face da figura espacial tem o formato de uma figura plana, por exemplo, a face do cubo tem o formato de um quadrado (mas não apontar para um cubo e dizer que temos um quadrado). Por vezes, também são usadas figuras espaciais que possuem uma das dimensões muito menores que as outras, como quando utilizamos uma folha de papel para representar um retângulo. Nesse caso, é importante diferenciar que temos um objeto tridimensional em que uma das faces possui o formato de retângulo, desconsiderando a menor dimensão (espessura da folha).

O uso de materiais também ocorre para figuras unidimensionais, pois segmentos de reta por vezes são representados com varetas, canudos e outros materiais (que possuem uma dimensão muito maior que as outras duas). Nesse caso, deve ficar claro que consideramos o lado de maior comprimento para representar o segmento de reta e estamos ignorando as outras duas dimensões deste recurso.

Também sobre materiais manipuláveis, é comum que as representações sejam usadas e desenhadas posteriormente. Um conhecimento importante também é usar de representações condizentes às características representadas nos modelos concretos, como atentar se as figuras planas são constituídas somente pela fronteira ou preenchidas, e também quais partes das figuras espaciais são representadas pelo modelo concreto.

O subdomínio *Knowledge of Structure of Mathematics* (KSM) descreve o conhecimento sobre as conexões entre os diferentes tópicos matemáticos. Essas conexões podem ser baseadas em uma simplificação ou aumento da complexidade, ou também conexões auxiliares, em que um tópico é usado como parte de um processo maior, e conexões transversais, que envolvem ideias presentes a vários tópicos. O KSM envolve conhecer conexões entre os tópicos figuras geométricas e rotações, por exemplo, determinar características de figuras geométricas rotacionadas, como conhecer que a figura possui um volume ou uma área, ou que a figura rotacionada pode ser contida em um plano.

O subdomínio *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM) inclui o conhecimento sobre a prática do professor de matemática, entendendo a prática como um termo amplo, entendida como qualquer atividade matemática que se constitui como pilar na criação matemática e tem sustentação lógica que permite abstrair regras desta atividade (FLORES-MEDRANO, 2016). Isto inclui o conhecimento do professor em práticas como formas de proceder, estratégias para resolver problemas, o papel da abstração e generalização na matemática e o papel das definições. Portanto, faz parte deste subdomínio o conhecimento dos atributos de uma definição, como a minimalidade, a não sobreposição e a hierarquização (ESCUDERO et al., 2014), e também sobre as diferentes formas de produzir definições, como a descritiva, ou a priori, criada a partir de um conjunto de características, ou a construtiva, ou a posteriori, criada a partir de outras definições existentes (DE VILLIERS, 1998).

Em relação ao PCK, embora não seja o foco da pesquisa, fazemos uma breve descrição dos seus subdomínios. Temos o subdomínio *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM), que é o conhecimento acerca do processo de aprendizagem de alunos sobre o tópico matemático. Inclui o conhecimento sobre teorias de aprendizagem matemática, pontos fracos e fortes na aprendizagem matemática daquele tópico, sobre formas como os alunos interagem com o tópico e aspectos emocionais na aprendizagem matemática. Está neste subdomínio, por exemplo, conhecer que uma dificuldade de aluno no tópico rotações é visualizar a figura formada ou que, para o tópico de figuras geométricas, é diferenciar figuras constituídas, ou não, pelo seu interior.

O subdomínio *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) consiste no conhecimento sobre o ensino de matemática, estando dessa forma intimamente conectado ao KFLM. Inclui o conhecimento de teorias de aprendizagem matemática, uso de recursos, bem como conhecimento sobre estratégias, técnicas, tarefas e exemplos relacionados ao tópico. Por exemplo, é um conhecimento deste domínio tarefas e exemplos para se ensinar os tópicos figuras geométricas e rotações.

O subdomínio *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS) consiste no conhecimento de como os tópicos matemáticos devem ser abordados ao longo dos anos escolares. Inclui o conhecimento sobre os resultados de aprendizagem dos tópicos, bem como o sequenciamento destes além de níveis conceituais e procedimentais esperados para cada etapa escolar.

CAPÍTULO 2: CONTEXTO E MÉTODO

Esta pesquisa visa responder à questão “Que conhecimento matemático é revelado por futuros professores de matemática sobre a diferenciação de figuras planas e espaciais em um contexto de rotação e revolução de figuras geométricas?” Realizamos uma pesquisa de cunho qualitativo, com o objetivo de compreender de forma profunda a realidade investigada. Utilizamos, para alcançar esta compreensão, a metodologia de estudo de caso (STAKE; 2005, ANDRÉ, 2013). O estudo de caso em questão é do tipo instrumental, pois o objetivo da pesquisa é descrever o conhecimento especializado do futuro professor e, a partir do caso em si, levantar hipóteses acerca do conhecimento do professor (STAKE; 2005). No entanto, entendemos que as informações que foram analisadas não são generalizáveis, mas que o caso ajudará a formular hipóteses acerca do tópico de estudo.

O contexto da pesquisa foi uma disciplina de formação inicial do curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade pública do estado de São Paulo. A disciplina teve como objetivo promover o conhecimento especializado dos futuros professores em vários tópicos matemáticos que se relacionam com a prática matemática futura do professor, e é prevista para o 7.º semestre do curso.

A coleta das informações ocorreu no segundo semestre de 2018 e participavam da disciplina 19 futuros professores. Houve a participação do pesquisador como estagiário docente (PED) e a disciplina foi ministrada em conjunto com seu coorientador e outra docente da mesma universidade.

A particularidade do caso se dá pelo fato de a disciplina ter por objetivo proporcionar o desenvolvimento do conhecimento especializado dos futuros professores por meio de Tarefas para a Formação (TpF) elaboradas para este fim (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021). A coleta de informações ocorreu em três aulas nas quais o foco foi o conhecimento dos futuros professores no âmbito das figuras geométricas planas e espaciais. As TpF se configuram também como um dos instrumentos de coleta de informações desta pesquisa.

As Tarefas para a Formação (TpF) são conceitualizadas com base no modelo MTSK com o objetivo específico de aceder e desenvolver o conhecimento especializado dos (futuros) professores em determinados tópicos. Formam parte do que se denomina de

Tarefa Formativa que integra a Tarefa para a Formação; o documento do professor associado a essa TpF e o documento do formador (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021). A Tarefa para a Formação apresenta as questões que foram propostas aos professores na sessão formativa; o documento do professor discute o conhecimento matemático especializado que se objetiva desenvolver ao longo da formação e, no documento do formador, encontram-se as formas de articular os conceitos propostos na tarefa, com as indicações de documentos oficiais sobre os tópicos.

Para a referida formação foram elaboradas e aplicadas três TpF, sendo que cada uma delas abordava questões específicas para desenvolver o conhecimento especializado sobre figuras geométricas. A primeira tarefa focou a diferenciação de figuras planas e espaciais através de rotações; a segunda abordou a representação de figuras espaciais em um plano e a terceira tarefa focou a definição de uma figura espacial (a pirâmide). Para esta pesquisa, utilizamos somente a primeira dessas tarefas como fonte de informações.

Descrevemos a primeira tarefa "figuras espaciais e rotações". Esta tarefa é dividida em três Partes: a primeira envolve o conhecimento matemático especializado dos futuros professores sobre o tópico específico sem um contexto prévio; a segunda assume como ponto de partida uma tarefa para alunos de um determinado ano escolar, buscando desenvolver o conhecimento matemático e pedagógico especializado do conteúdo e a terceira parte foca a sua atenção no conhecimento especializado mobilizado ao interpretar as produções doe alunos e propor um feedback construtivo para os raciocínios e formas de pensar matematicamente apresentadas (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014; RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021).

Antes da aplicação das TpF no contexto da pesquisa, estas foram aplicadas em outros contextos como uma versão preliminar com o objetivo de analisar previamente se as respostas obtidas respondiam aos objetivos desta investigação. Caso contrário, elas seriam reformuladas para a aplicação na coleta de informações. A tarefa foi aplicada a 12 estudantes do quarto ano do curso de licenciatura em Matemática em uma aula de 100 minutos de uma disciplina de Metodologia de Ensino em uma universidade privada.

A TpF "figuras espaciais e rotações" também foi discutida no grupo CIEspMat[6], com o objetivo de verificar se as respostas correspondiam aos objetivos

[6] CIEspMat (Grupo de Pesquisa & Formação sobre o Conhecimento Interpretativo e Especializado de professores de e que ensinam matemática) https://ciespmat.com.br/

estabelecidos e também para propor alterações considerando os objetivos gerais da tarefa e de cada uma das questões. Discutimos em um grupo de sete formadores por duas horas, e, após a discussão, percebemos que a tarefa estava mais focada no conhecimento matemático para definir uma rotação e pouco relacionada à definição de figuras planas e espaciais. Com isso, as questões da primeira parte da tarefa foram alteradas para dialogar melhor com os objetivos.

A TpF tem o objetivo formativo de desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores relativamente à diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais por meio de transformações geométricas. A primeira parte teve por objetivo discutir o conhecimento matemático para: construir uma descrição para figuras planas e para figuras espaciais (KoT - propriedades do tópico figuras geométricas), descrever quais figuras podemos rotacionar e quais são as condições necessárias e suficientes para realizar uma rotação no plano e no espaço tridimensional (KoT - definições do tópico rotações) e descrever características do resultado de uma rotação (KoT -procedimentos do tópico rotações). Tais objetivos eram abordados nas questões que estão apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 1: Questões da Parte 1 da TpF *"figuras espaciais e rotações"*

Parte Preliminar
1a) O que são figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos.
1b) O que são figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplos.
2a) Podemos rotacionar figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos.
2b) Podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplos.
2c) Para os dois itens anteriores, responda:
(i) de quais elementos precisamos para fazer uma rotação;
(ii) o que é formado a partir da rotação.

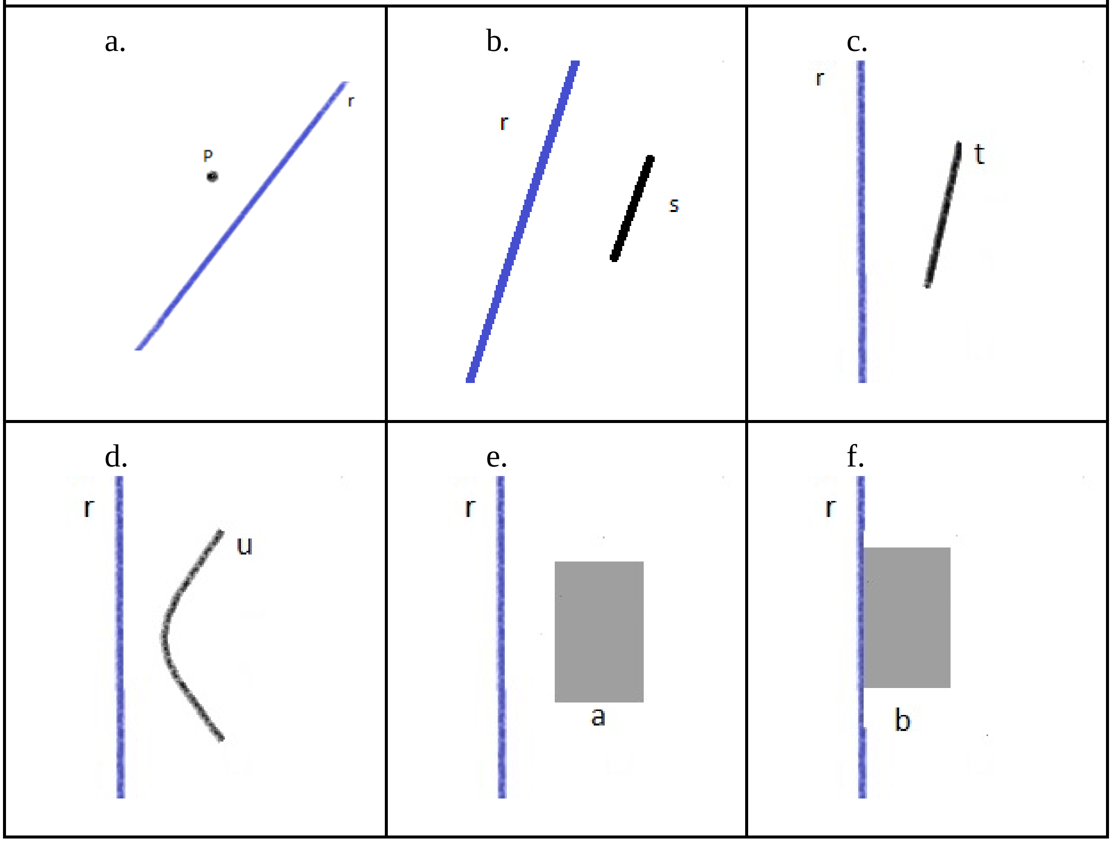
Fonte: acervo da pesquisa.

A Parte I da tarefa exibia uma tarefa proposta para 7.º ano do Ensino Fundamental, associada ao objeto de conhecimentos “simetrias de translação, rotação e reflexão” e habilidade EF07MA21: “Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 309).

Figura 5: Parte I da TpF, Tarefa para os alunos

Tarefa: Vamos Rotacionar?

Em cada um dos itens abaixo, represente a figura formada a partir de todas as imagens formadas pela rotação a partir do eixo “r”:



Fonte: acervo da pesquisa.

A partir desta tarefa para os alunos, propôs-se a discussão do conhecimento pedagógico do conteúdo: dificuldades de alunos do resolver a tarefa (KFLM - pontos fracos e fortes na aprendizagem matemática do tópico de rotações) e possíveis produções incorretas de alunos para a tarefa (KFLM - formas de interação dos alunos no tópico rotações). Em relação ao conhecimento matemático, a tarefa foi ponto de partida para aceder e desenvolver o conhecimento dos futuros professores relativamente a reconhecer figuras espaciais construídas a partir de uma rotação (KoT definições de figuras geométricas) e descrever condições em que uma figura espacial é formada a partir de uma rotação (KoT definições de figuras geométricas). Tais objetivos eram cumpridos com as perguntas apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 2: Questões para os futuros professores na Parte I da TpF

Parte I

3) Quais podem ser as principais dificuldades para resolver a tarefa anterior de alunos:

- Do 7º ano do ensino fundamental?
- Do 2º ano do Ensino Médio?

4) Esboce duas produções incorretas de alunos para algum dos itens da tarefa “Vamos Rotacionar”, uma de alunos do 7ºano, e outra de alunos do 2ºano do Ensino Médio.

5) Qual(is) da(s) figura(s) anteriores são tridimensionais? Justifique.

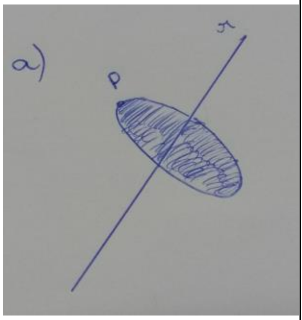
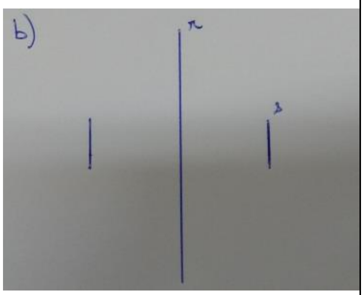
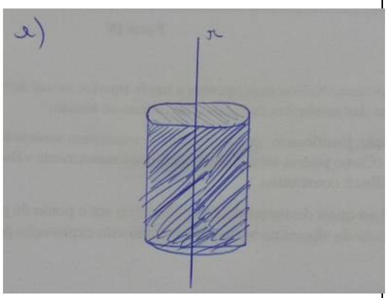
6) Em geral, quando a figura formada por uma rotação é espacial? Justifique.

Fonte: acervo da pesquisa.

A Parte II da TpF trouxe um conjunto de produções para a tarefa dos alunos “Vamos rotacionar?” e teve por objetivo discutir os conhecimentos matemáticos revelados pelos futuros professores associados a: diferenciar figuras com interior preenchido e não preenchido a partir de rotações (KoT características do resultado do tópico rotações) e também discutir o conhecimento das conexões entre uma rotação no espaço e uma reflexão no plano (KSM conexões entre os tópicos de rotações e reflexões).

Figura 6: Parte II da TpF

7) O professor Sérgio aplicou a tarefa “Vamos rotacionar?” com seus alunos do 7.º ano, e obteve algumas produções mostradas a seguir.

Aline	**João**	**Matheus**
		

Para cada uma das produções, indique:
a) Qual foi o raciocínio empregado pelo aluno, e se ele é matematicamente adequado ou não.
b) Forneça um *feedback* construtivo aos alunos (mais do que dizer se está correto ou incorreto, ao professor, cumpre dar sentido às resoluções dos alunos de modo que possa, posteriormente, auxiliá-los na construção do seu conhecimento matemático)

Fonte: acervo da pesquisa.

A implementação da TpF para a coleta das informações ocorreu em uma aula de quatro horas. Ela foi aplicada em dois momentos: no primeiro, os estudantes resolviam a tarefa em trios, com duração aproximada de uma hora e 20 minutos. O restante do tempo foi destinado à discussão em grande grupo. No primeiro momento da resolução da tarefa, houve a formação de cinco grupos.

As informações coletadas são provenientes de: (i) produções escritas dos futuros professores à TpF proposta, que foram posteriormente transcritas; (ii) gravações em áudio e vídeo das discussões dos pequenos grupos e da discussão plenária da tarefa.

A análise das informações foi feita com foco no conhecimento do professor com base no modelo de conhecimento especializado do MTSK (CARRILLO et al., 2018), no domínio do conhecimento matemático MK. Os áudios e vídeos da dinamização das tarefas foram transcritos de forma integral, sendo os vídeos usados para complementar as ações e movimentos que não são perceptíveis com os áudios (RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2012). As transcrições foram analisadas antes da análise conjunta com as produções escritas. Elas foram organizadas em três colunas, a primeira com a numeração, a segunda, com o nome da pessoa que estava falando e a terceira com a transcrição da fala.

A transcrição foi numerada linha a linha, com a numeração composta por duas componentes: durante as discussões em grupos pequenos são organizadas no formato [a.b] , em que “a” é o número do grupo (de 1 a 5) e “b” é o número da linha da transcrição daquele grupo. Nas discussões da sessão plenária, a numeração ocorre com PL.c para a TpF figuras espaciais e rotações, em que “c” é o número da linha da transcrição. Assim, a numeração 3.25 indica a 25.ª linha de transcrição do terceiro grupo, e a numeração PL15 indica a 15.ª linha de transcrição da sessão plenária. A numeração dos grupos de 1 a 5 foi feita de forma aleatória.

Quadro 3: Exemplo de transcrição

Linha	**Nome**	**Transcrição**
1.1	Paula	Figuras bidimensionais... é que têm duas dimensões.
1.2	Gabriela	Duas dimensões.
1.3	Paula	Significa que ela não sai do papel? É um jeito de falar?
1.4	Juliano	Sim, está contida em um plano.
1.5	Paula	Isso, pode ser?
1.6	Gabriela	Pode ser.
1.7	Paula	Como que escreve?

1.8	Juliano	Figura bidimensional… é figura que está contida em um único
1.9		plano.

Fonte: acervo da pesquisa.

Foram usados parênteses para descrever ações dos futuros professores ou completar alguma ideia que não foi totalmente verbalizada na fala do futuro professor; para designar ações os trechos eram colocados em linhas diferentes da fala do futuro professor e, para explicar uma fala, os parênteses eram inseridos na mesma linha. O símbolo (...) é usado quando há alguma interrupção na discussão. Foi utilizado “formador” e “formadora” para designar as participações do professor da disciplina e “pesquisador” para designar o autor deste trabalho.

Após este tratamento das transcrições, estas foram organizadas em um arquivo de texto, separadas por grupo e por questão e tratadas juntamente às produções escritas. Tais produções escritas foram reunidas por meio de imagens digitalizadas e complementadas por transcrições do conteúdo escrito dessas imagens. Assim, o arquivo possuía, em ordem, as resoluções escritas e transcrições de Grupo 1 à questão 1A da tarefa, resoluções escritas e transcrições de Grupo 2 à questão 1A da tarefa, sucessivamente, até as respostas do Grupo 5, e, em seguida, as respostas da questão 1B, 2A, 2B, 2C, até a questão 7 da tarefa e transcrição da discussão plenária.

Nesse arquivo, fizemos a identificação do conhecimento revelado pelos futuros professores e identificação da categoria a qual pertence este conhecimento. Junto à identificação do conhecimento revelado, usamos um conjunto de acrônimos para identificar a categoria do modelo MTSK a qual este conhecimento pertence, e que também identifica o subdomínio de conhecimento. Uma tabela com os acrônimos usados nesta pesquisa é apresentada abaixo:

Quadro 4: Acrônimos usados nas categorias do modelo MTSK

<table>
<tr><th>Subdomínios</th><th colspan="2">Categoria</th><th>Acrônimo</th></tr>
<tr><td rowspan="5">KoT</td><td rowspan="3">Definitions, properties and foundations</td><td>Definitions</td><td>KoTd (1,2, 3...)</td></tr>
<tr><td>Properties</td><td>KoTp</td></tr>
<tr><td>Foundations</td><td>KoTf</td></tr>
<tr><td colspan="2">Registers of representation</td><td>KoTr</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procedures</td><td>KoTpc</td></tr>
</table>

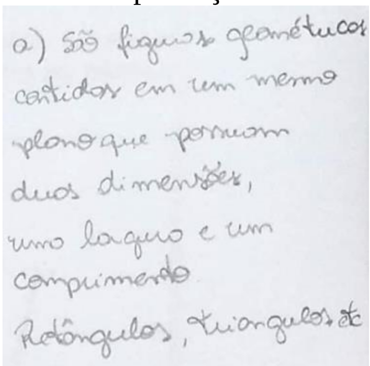
	Phenomenology and applications	KoTph

Fonte: acervo da pesquisa.

Assim, junto à identificação do conhecimento revelado, identificamos o acrônimo que representa a categoria na qual este conhecimento está situado. Trazemos um exemplo na figura abaixo da identificação do conhecimento uso dos acrônimos na produção escrita e transcrição.

Figura 7: Identificação do conhecimento revelado.

Imagem 1: Conhecimento revelado na produção escrita do Grupo 1 para a questão 1A.


a) São figuras geométricas contidas em um mesmo plano que possuam duas dimensões, uma largura e um comprimento
Retângulos, triângulos etc

a) São Figuras geométricas contidas em um mesmo plano que possuam duas dimensões, uma largura e um comprimento. Retângulos, triângulos etc.

Conhecimento revelado:

Conhecer que figuras planas estão contidas em um único plano [contidas em um mesmo plano] – KoTp.
Conhecer que figuras planas possuem duas dimensões espaciais [duas dimensões, uma largura e um comprimento] – KoTp.
Conhecer que retângulo é um exemplo de figura plana [retângulos] – KoTd.
Conhecer que triângulo é um exemplo de figura plana [triângulos] – KoTd.

Imagem 2: Conhecimento revelado na transcrição do Grupo 1 para a questão 1A.

Linha	**Nome**	**Transcrição**
1.1	Paula	Figuras bidimensionais... é que têm duas dimensões.
1.2	Gabriela	Duas dimensões.
1.3	Paula	Significa que ela não sai do papel? É um jeito de falar?
1.4	Juliano	Sim, está contida em um plano.
1.5	Paula	Isso, pode ser?
1.6	Gabriela	Pode ser.
1.7	Paula	Como que escreve?
1.8 1.9	Juliano	Figura bidimensional… é figura que está contida em um único plano.

Conhecimento revelado:

Conhecer que figuras planas possuem duas dimensões espaciais [1.1; 1.2] – KoTp. Conhecer que figuras planas estão contidas em um plano [1.3; 1.4] – KoTp. Conhecer que figuras planas estão contidas em um único plano [1.8-1.9] – KoTp.

Fonte: acervo da pesquisa.

No exemplo anterior, vemos conhecimento no tópico de figuras geométricas, somente. Quando é revelado conhecimento nos outros tópicos da tarefa, realizamos a análise desta mesma forma, separando o conhecimento revelado em função dos tópicos.

Feito o processo de identificação do conhecimento revelado, agrupamos a descrição deste conhecimento em um outro arquivo, a fim de criar os descritores de conhecimento (ZAKARYAN; RIBEIRO, 2018). Tais descritores têm por objetivo sintetizar uma classe de conhecimento de um mesmo tipo, bem como permitir buscar e verificar estes descritores de conhecimento em outros contextos. No trecho exemplificado no quadro 6, surgiram os seguintes descritores de conhecimento.

Quadro 5: Exemplificação dos descritores de conhecimentos

Conhecimento	**Descritor**
Conhecer que figuras planas estão contidas em um plano (KoTp). Conhecer que figuras planas estão contidas em um único plano (KoTp).	KoTp1: Conhecer que existe um único plano que contém uma figura plana.
Conhecer que figuras planas possuem duas dimensões espaciais (KoTp).	KoTp2: Conhecer que o espaço ocupado por uma figura plana tem dimensão igual a 2.
Conhecer que o retângulo é um exemplo de figura plana. Conhecer que o triângulo é um exemplo de figura plana.	KoTd1: Conhecer exemplos de figuras planas.

Fonte: acervo da pesquisa.

Ao final da identificação de conhecimento revelado em uma questão por todos os grupos foi sintetizado o conhecimento com os descritores. Verificamos, desta forma, em cada fase deste processo, se o conhecimento revelado já é descrito por um dos descritores criados e, caso não seja, foram criados novos descritores que permitiram englobar este conhecimento.

Nesta etapa, foi construído um quadro diferente para cada um dos tópicos da tarefa, para proporcionar a síntese e organização dentro de cada tópico. No exemplo anterior, apresentamos um quadro referente ao tópico de figuras geométricas.

Para a discussão plenária tivemos um passo anterior de tratamento das transcrições, que envolveu a definição de episódios fenomenologicamente coerentes (RIBEIRO et al., 2012). Tais episódios são períodos determinados da transcrição, com um início e um final, e que possuem um objetivo de discussão específico. A finalidade da divisão em episódios é facilitar a discussão conjunta da sessão plenária com a resolução das questões das tarefas nos pequenos grupos, aproximando os momentos com objetivo semelhantes em cada uma das partes.

O Quadro 7 traz um exemplo da transcrição de parte de um episódio com a identificação do conhecimento associado a ele.

Quadro 6: Identificação de conhecimento na discussão plenária.

Objetivo: discutir as definições de figuras planas e espaciais		
PL.137	Pesquisador	Bom, pensando nas figuras em si, como vocês definiram as
PL.138		figuras bidimensionais e tridimensionais?

PL.141	Juliano	Figuras bidimensionais a gente falou que seriam figuras contidas
PL.142		em um único plano. Figuras tridimensionais seria a negação disso.
PL.143	Paula	Só que a gente deu mais características, ele só falou..., mas, tipo,
PL.144		figura plana ela vai ter comprimento e largura, e aí no outro ela não
PL.145		consegue ser posta apenas em um plano e ela tem comprimento,
PL.146		largura e altura.

PL.167	Alberto	A gente falou que é um conjunto de pontos, eles estão contidos
PL.168		todos no mesmo plano, mas na verdade eu achei melhor do jeito que
PL.169		ela falou, que dá para você... tem um plano que eles estão todos no
PL.170		mesmo, como se fosse uma folha, que se tivesse duas dimensões eu
PL.171		posso passar outros planos aqui, mas existe um que está em todos eles.
PL.172		E as fronteiras deles delimitam uma área. O que eu tinha pensado, se
PL.173		você pegar um ponto aqui.. você tem o plano, se pegar um ponto aqui,
PL.174		um aqui, um lá, um lá, um longe do outro, isso é uma figura? A gente
PL.175		pensou que não, tem que ter um contorno, assim, e ter uma área.
Conhecimento revelado: Conhecer que figuras planas estão contidas em um único plano [PL.141-142] – KoTp. Conhecer que figuras planas possuem duas dimensões espaciais [PL.144; PL.169-PL170] – KoTp.		

Conhecer que figuras espaciais não estão contidas em um único plano [PL.144-PL.145] – KoTp. Conhecer que figuras espaciais possuem três dimensões espaciais [PL.145-PL146] – KoTp. Conhecer que figuras planas possuem uma fronteira [PL.172; PL.175] - KoTp Conhecer que a fronteira de figura planas delimita uma área [PL.172; PL.175] – KoTp.

Fonte: acervo da pesquisa

Ao final da identificação do conhecimento revelado na tarefa plenária novamente nós analisávamos se o conhecimento era descrito pelos descritores existentes e, caso contrário, eram criados novos descritores de conhecimento. O quadro 8 mostra os novos descritores criados para descrever o conhecimento revelado que não era descrito pelos anteriores.

Quadro 7: Novos descritores a partir do episódio da sessão plenária

Conhecimento	**Descritor**
Conhecer que figuras espaciais não estão contidas em um único plano	KoTp3: Conhecer que existe um único espaço que contém uma figura espacial. Conhecer que não existe um plano que contém uma figura espacial.
Conhecer que figuras espaciais possuem três dimensões espaciais	KoTp4: Conhecer que o espaço ocupado por uma figura plana tem dimensão igual a 3.
Conhecer que figuras planas possuem uma fronteira	KoTp5: Conhecer que figuras são delimitadas.
Conhecer que a fronteira de figura planas delimita uma área	KoTp6: Conhecer que a fronteira de uma figura plana delimita uma área.

Fonte: acervo da pesquisa.

A apresentação das informações é feita de acordo com as questões da tarefa, discutindo em cada questão o conhecimento revelado pelos grupos e o conhecimento revelado durante a discussão plenária que é relacionado com o objetivo daquela questão, organizados de acordo com a particularidade de cada questão. Identificamos o conhecimento revelado em cada grupo, priorizando análise do conhecimento que sintetizado por descritores que ainda não foram discutidos anteriormente. Dessa forma, suprimimos discussões de um mesmo tipo de conhecimento quando aparecem em vários momentos da tarefa.

CAPÍTULO 3: ANÁLISE E DISCUSSÃO

Estruturamos este capítulo em duas partes que correspondem à estrutura da tarefa: inicialmente, a discussão dos grupos de 2 a 3 integrantes, organizados pelas questões da tarefa e, depois, a discussão plenária.

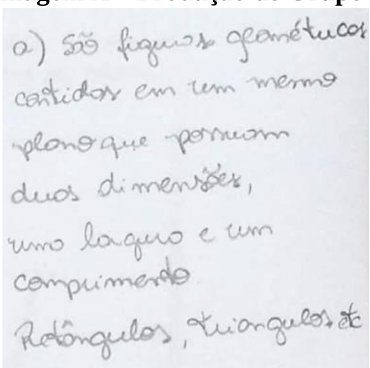
DISCUSSÃO NOS GRUPOS

Questão 1A: O que são figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos

Iniciamos a discussão sobre figuras planas a partir de grupos em cujas produções não foi possível explicitar qual conceito figural foi empregado para estas figuras. Trazemos a resposta do Grupo 1 à questão 1a) da tarefa:

Figura 8: Produção do Grupo 1 à questão 1A “O que são figuras geométricas bidimensionais?”

Imagem A – Produção do Grupo 1


a) São figuras geométricas contidas em um mesmo plano que possuam duas dimensões, uma largura e um comprimento. Retângulos, triângulos etc

a) São figuras geométricas contidas em um mesmo plano que possuam duas dimensões, uma largura e um comprimento. Retângulos, triângulos etc.

Quadro A – Transcrição da discussão do Grupo 1

Linha	Nome	Transcrição
1.15	Paula	Mas… eu não sei se é uma problematização desnecessária,
1.16		mas uma reta é uma figura geométrica?
1.17	Juliano	Sim
1.18	Paula	Então, mas aí… mas uma reta não é bidimensional, este é o
1.19		meu questionamento.
1.20	Gabriela	Uma reta acho que não.
1.27	Juliano	Mas olhando por este lado também, uma reta pode estar
1.28		contida em vários planos. Uma reta pode descer assim,
1.29		[faz um gesto, indicando uma possível direção da reta]
1.30		cortar outros planos, entendeu?

Fonte: acervo da pesquisa.

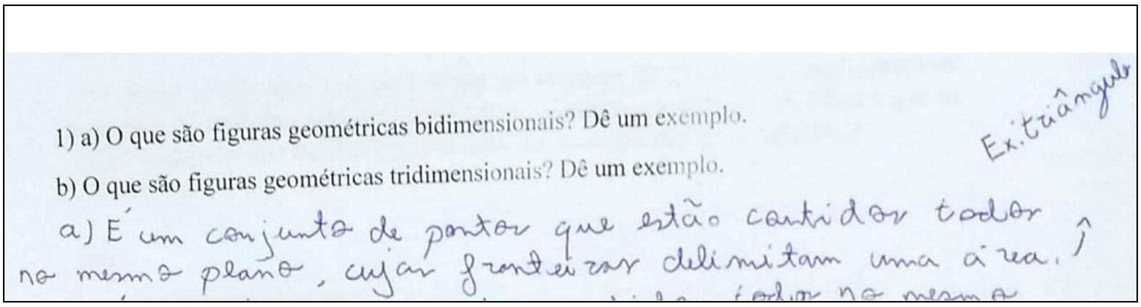
Os futuros professores revelam conhecer que figuras geométricas estão “contidas em um plano” (imagem A), revelando, assim, conhecer a propriedade de figuras planas (KoTp1: conhecer que figuras planas estão contidas em um plano), associada à existência de um plano que as contém (EUCLIDES, 2009). Revelam também conhecer que as figuras geométricas possuem “duas dimensões, uma largura e um comprimento” (imagem A), mas não tornam explícita a necessidade de que sejam exatamente duas (KoTp2: conhecer que figuras planas possuem duas dimensões).

É essencial que, além de existir um plano que contenha a figura, que este plano seja único e este é um conhecimento especializado do professor, pois sem essa unicidade do plano existem outros elementos que estão contidos em um plano, mas não são uma figura plana como é o caso da reta. O grupo não revela explicitamente conhecer a unicidade do plano, mas acrescenta uma característica que exclui o caso da reta – possuir comprimento e largura. Ao não explicitar a unicidade do plano que contém as figuras planas, descreve também as figuras que estão contidas em um plano, mas não apenas em um, como as faces de uma figura espacial, como o cubo, mas ainda assim não exclui as faces de uma figura espacial geométrica.

Durante a discussão revelam um conhecimento associado a um contraexemplo de figura plana – a reta (1.18-1.19; 1.28). Consideramos este um contraexemplo de figura plana, pois a reta é um exemplo de algo que não é uma figura plana, pois isso pressupõe que figuras planas são limitadas (EUCLIDES, 2009), o que não é o caso da reta. Dessa forma, revelam um conhecimento de um contraexemplo de figuras planas (KoTd1: conhecer que a reta é um contraexemplo de figuras planas apesar de existir em 2D).

O grupo 4 também aborda características semelhantes às discutidas pelo Grupo 1.

Figura 9: Produção do Grupo 4 para a questão “O que são figuras bidimensionais”


1) a) O que são figuras geométricas bidimensionais? Dê um exemplo.
b) O que são figuras geométricas tridimensionais? Dê um exemplo.
Ex. triângulo
a) É um conjunto de pontos que estão contidos todos no mesmo plano, cujas fronteiras delimitam uma área.

a) É um conjunto de pontos que estão contidos todos no mesmo plano, cujas fronteiras delimitam uma área. Ex: triângulo.

Fonte: acervo da pesquisa.

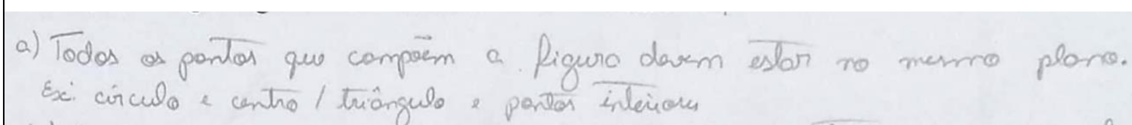
O Grupo 4 revela também conhecer que figuras planas possuem uma fronteira (EUCLIDES, 2009) (KoTp3: conhecer que figuras planas possuem uma fronteira) e que a fronteira das figuras planas delimita uma área (LIMA, 2011), revelando conhecimento sobre estas propriedades das figuras (Kotp4: conhecer que a fronteira das figuras planas delimita uma superfície com área). Notemos que a noção de uma figura plana possuir uma área, empregada pelo Grupo 4, está ligeiramente diferente da noção de possuir duas dimensões lineares, empregada pelo Grupo1, pois esta última está relacionada à dimensão do espaço ocupado pela figura, ou mesmo a quantidade de vetores linearmente independentes necessários para gerar este espaço (LIMA, 2020), enquanto possuir uma área remete a uma superfície (EUCLIDES, 2009; LIMA, 2011), que não necessariamente estão contidas em um único plano.

Em relação ao conceito figural formado pelos futuros professores sobre figuras planas, não fica explícito se o grupo considera que estas figuras são formadas somente pela sua fronteira ou também pelo seu interior. Para o Grupo 1, as duas propriedades reveladas (estar contido em um plano e possuir comprimento e largura) são válidas para estes dois tipos de figuras. Para o Grupo 4, a propriedade revelada (a fronteira delimita uma área) também não restringe a uma das opções, pois não indica que a figura "possui uma área" (ou seja, que é constituída por uma superfície que pode ser medida), somente que sua fronteira delimita uma área, cuja superfície pode ou não fazer parte da figura.

Os próximos grupos explicitam em suas respostas um determinado conceito figural para as figuras planas, sendo diferentes em cada um dos casos.

Figura 10: Produções do Grupo 4 para a questão "O que são figuras geométricas bidimensionais"?

Imagem 1: Produção do Grupo 2


a) Todos os pontos que compõem a figura devem estar no mesmo plano. Ex: círculo e centro / triângulo e pontos interiores

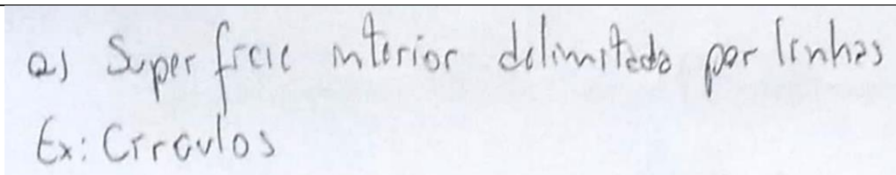
a) Todos os pontos que compõem a figura devem estar no mesmo plano, Ex: círculo e centro/ triângulo e pontos interiores.

Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam um conhecimento da característica de que existe um plano que contém uma figura plana ("Todos os pontos [...] devem estar no mesmo plano"), conhecendo uma propriedade das figuras planas, e também revelam conhecer exemplos deste tipo de figura (KoTd2: conhecer exemplos de figuras planas, como sejam o círculo, triângulo). Nestes exemplos, o grupo indica que o conceito de figuras planas é o de figuras constituídas somente por suas fronteiras, pois, nos exemplos, diferenciam os pontos interiores da figura de sua fronteira, dando a entender que os pontos interiores (do triângulo) não fazem parte da figura em si.

Já o Grupo 3 descreveu uma figura plana com características de suas fronteiras, explicitando o conceito destas figuras.

Figura 11: Resposta do grupo 3 à questão "O que são figuras geométricas bidimensionais"?



Superfície interior delimitada por linhas. Ex.: círculo.

Fonte: acervo da pesquisa.

O grupo revela conhecer que figuras geométricas possuem uma fronteira (EUCLIDES, 2009), e, em adicional, ao afirmar que figuras planas são delimitadas por linhas, revelam um conhecimento sobre as fronteiras de cada uma dessas figuras (KoTp5: conhecer que a fronteira de uma figura plana é delimitada por linhas). É diferente dizer que a fronteira das figuras planas (o que usualmente chamamos de lados) constituída somente por segmentos de retas ou por linhas, no geral, pois, no primeiro caso, temos somente polígonos, e não outros tipos de figuras.

Cabe uma observação de que o grupo não limita que figuras planas precisam estar contidas em um plano, mas sim que sejam superfícies (KoTp6: conhecer que figuras planas são superfícies), podendo assim que uma superfície não plana também seja uma figura plana para este grupo.

Por outro lado, ao afirmarem que figuras planas são uma "superfície interior", o grupo delimita a figura como sendo formada pelas suas fronteira e interior (KoTd3:

conhecer que figuras planas são formadas pela sua fronteira e seu interior), assim definindo figuras planas de uma forma não ambígua (VODUŠEK; LIPOVEC, 2014), revelando um conhecimento sobre definições matemáticas.

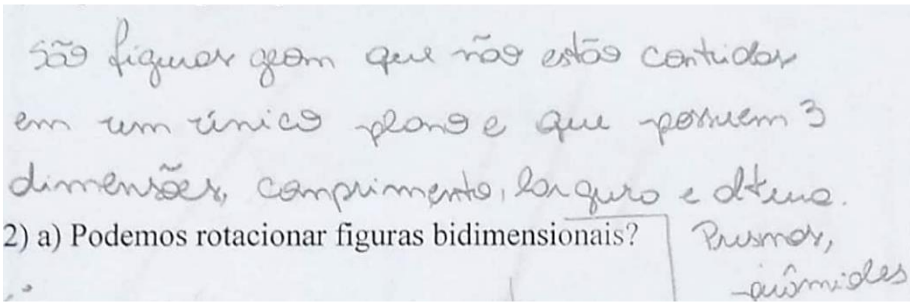
Dessa forma, a partir das propriedades elencadas, o grupo revela um conhecimento associado a que o conceito figural de figuras planas está associado às figuras constituídas pela sua fronteira e interior, visto que figuras planas são um subconjunto de uma superfície (que é preenchida), e é constituída pelo interior da fronteira dessa figura.

Questão 1B: O que são figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplos

Para esta questão fazemos a organização anterior, de discutir os grupos que não evidenciam o conceito de figuras planas, seguidos dos que o evidenciam. Trazemos primeiramente a resposta do Grupo 1 a esta questão, junto a uma discussão do grupo relacionando-a com a descrição de figura plana apresentada anteriormente.

Figura 12: Resposta do Grupo 1 à questão “O que são figuras geométricas tridimensionais”?

Imagem A – Produção escrita do grupo 1


são figuras geom que não estão contidas em um único plano e que possuem 3 dimensões, comprimento, largura e altura.
2) a) Podemos rotacionar figuras bidimensionais?
Prismas, pirâmides

São figuras geom que não estão contidas em um único plano e que possuem 3 dimensões, comprimento, largura e altura. Prismas, pirâmides.

Quadro A – Transcrição da discussão do Grupo 1

Linha	Nome	Transcrição
1.53	Paula	B. Tridimensionais. Sai do papel, vai para o espaço.
1.54	Juliano	São figuras geométricas contidas em um espaço (riem).
1.55	Paula	Mas aí contida num espaço não faz sentido, porque uma reta
1.56		está no espaço, o ponto está no espaço. Não é só isso…
1.57		Entendi o problema que você tinha falado antes. Acho que a
1.58		ideia que faltou foi a negação, são figuras geométricas contidas
1.59		em um mesmo plano…
1.60	Juliano	Deveria ser inteiramente contidas em um mesmo plano.

1.61 1.62	Paula	É, ela está toda no plano. Mas não dá para falar que ela está no espaço.
1.63 1.64	Juliano	Então a figura que está no espaço não está contida inteiramente no mesmo plano. Não consigo conter um sólido.

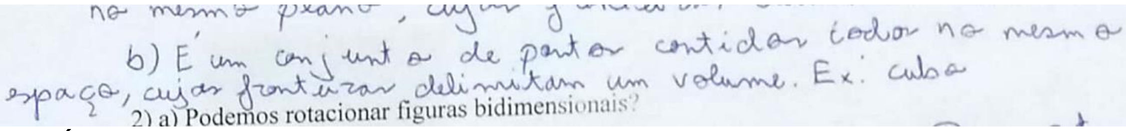
Fonte: acervo da pesquisa.

De forma semelhante à questão anterior, o grupo revela conhecer que uma figura espacial não está contida em um espaço (“não estão contidas em um único plano” – Figura 10), e também que as figuras espaciais possuem três dimensões lineares (“possuem 3 dimensões, comprimento, largura e altura” – Figura 10). Tais aspectos remetem a propriedades de figuras espaciais. A primeira delas que a figura está contida em um espaço e não pode estar contida em um único plano, pois se fosse seria uma figura plana (KoTp7: conhecer que figuras espaciais não estão contidas em um único plano). A segunda diz respeito à dimensão do espaço que contém a figura, que é exatamente três (KoTp8: conhecer que figuras espaciais possuem três dimensões).

A propriedade de não estar contida em um plano é mais complexa, porque, no nosso mundo físico, desconhecemos a existência de outros espaços tridimensionais (LIMA et al., 2011), mas a efeito de definição, falta dizer que o espaço que contém uma figura tridimensional é único, a fim de excluir objetos unidimensionais e bidimensionais desta descrição. O que não está contido em um único plano são todos os objetos com dimensão diferente de 2, porque objetos unidimensionais estão contidos em mais de um plano, e objetos tridimensionais (ou com mais dimensões) não estão contidas em um único. A propriedade seguinte (“possuem 3 dimensões, comprimento, largura e altura” – Figura 5) que garante que a dimensão da figura é igual a três. Assim como ocorreu para figuras planas, na descrição do grupo para figuras espaciais não se delimitou que figuras geométricas são finitas, não excluindo todo o espaço tridimensional desta descrição. Da mesma forma, também não delimitam se as figuras são compostas somente pela fronteira ou pela fronteira e o interior.

O Grupo 4 também apresentou uma resposta com propriedades semelhantes às das figuras planas e não evidenciou o conceito figural de figuras espaciais:

Figura 13: Produção do Grupo 4 para a questão “O que são figuras tridimensionais?”



b) É um conjunto de pontos contidos todos no mesmo espaço, cujas fronteiras delimitam um volume. Ex.: cubo.

Fonte: acervo da pesquisa.

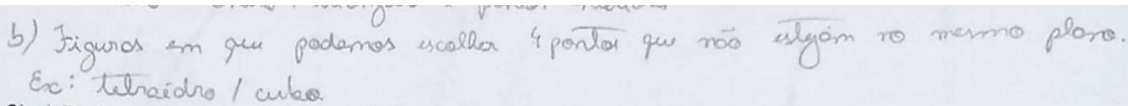
Os futuros professores revelam conhecer, de forma análoga a figuras planas, que as figuras espaciais possuem uma fronteira (EUCLIDES, 2009) e que esta delimita um volume (LIMA, 2011), revelando conhecer estas duas propriedades de figuras espaciais (KoTp9: conhecer que a fronteira das figuras espaciais delimita uma região com volume definido).

Da mesma forma como para as figuras planas, não está explícito se as figuras espaciais são formadas somente pela fronteira ou também pelo seu interior. As propriedades reveladas pelo Grupo 1 (não estar contido em um plano e possuir comprimento, largura e altura) e pelo Grupo 4 (todos os pontos estarem em um mesmo plano e a fronteira delimitar um volume) permitem tanto figuras formadas por superfícies, por exemplo, um cubo formado somente pelos seis quadrados de sua fronteira ou figuras com um interior preenchido, por exemplo, um cubo todo preenchido. Ainda é possível, a depender da forma como é entendido o conceito de figuras planas, que a fronteira das figuras espaciais seja constituída somente por linhas (como no modelo de um cubo constituído somente pelas suas arestas).

Os Grupos 2 e 4 também mostram descrições de figuras espaciais a partir dos pontos que constituem estas figuras:

Figura 14: Produção do Grupo 2 para a questão “O que são figuras geométricas tridimensionais”?

Imagem 1 – Produção do Grupo 2



b) Figuras em que podemos escolher 4 pontos que não estejam no mesmo plano. Ex: tetraedro/cubo.

Quadro A: Trecho da transcrição do Grupo 2

2.17	Mário	É isso que estou tentando melhorar a ideia. Se ambos têm uma figura
2.18		tridimensional, você pode encontrar conjuntos de quatro pontos que
2.19		não estão no mesmo plano. Que, por outro lado, se você tem um
2.20		tetraedro, se você pegar os pontos do triângulo da base eles estão no
2.21		mesmo plano, mas sempre é possível encontrar pontos em outro lugar

2.22		no tetraedro, que não estão os quatro no mesmo plano. Eu acho que é
2.23		um bom critério para você dizer que está na terceira dimensão.

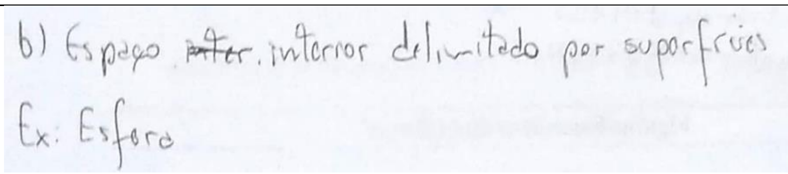
Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores também revelam conhecer a propriedade de que figuras espaciais não estão contidas em um plano (KoTp7) e conhecer exemplos de figuras espaciais (KoTd4: conhecer exemplos de figuras espaciais). Para expressar que não existe um plano que contém uma figura espacial, os futuros professores mostram uma condição mínima para que os pontos não possam estar contidos em um plano, que é existir 4 pontos (pertencentes à figura) que não estejam em um mesmo plano.

Porém, diferentemente do caso das figuras planas, o grupo não evidencia se o conceito de figuras espaciais é constituído somente pela fronteira ou também pelo seu interior.

O Grupo 3 traz uma descrição para figuras espaciais com propriedades de mesma natureza das que foram trazidas para figuras planas.

Figura 15: Resposta do Grupo 3 à questão 1b) “O que são figuras geométricas tridimensionais”?


b) Espaço ~~inter~~. interior delimitado por superfícies
Ex: Esfera

Espaço interior delimitado por superfícies. Ex.: esfera.

Linha	Nome	Transcrição
3.40	Pedro	O que é uma casca?
3.41	Carlos	A casca não é uma superfície... não é uma figura geométrica
3.42		tridimensional.
3.43	Pedro	É, então, a casca não seria uma figura plana
3.44	Carlos	É aberta.

Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam conhecer que figuras geométricas espaciais possuem uma fronteira, e a fronteira das figuras espaciais são delimitadas por superfícies (KoTp10: conhecer que a fronteira de figuras espaciais é formada por superfícies). De forma análoga como aconteceu com figuras planas, considerar que as fronteiras das figuras espaciais são superfícies, e não somente planos, permite que sejam classificadas como figuras espaciais outras figuras além de poliedros, como esferas e cilindros.

Ao afirmarem que figuras planas são uma “superfície interior” e que as espaciais são um “espaço interior”, delimitam que consideram a figura como sendo formada pelas suas fronteira e interior (VODUŠEK; LIPOVEC, 2014), relevando um conhecimento sobre a definição destas figuras (KoTd5: conhecer que as figuras geométricas são formadas pela sua fronteira e seu interior). Dessa forma, este grupo também evidencia qual é o conceito figura considerado para figuras espaciais.

Os objetos denominados pelo grupo como “cascas”, que constituem a fronteira de figuras espaciais, não podem ser considerados figuras espaciais, da forma como estão aqui definidas pelo grupo, pois apesar não existir um único plano que contém estas figuras (eles estarem no espaço), elas não delimitam uma região do espaço, como as figuras espaciais fazem. Isso será percebido pelo grupo ao longo da discussão da tarefa.

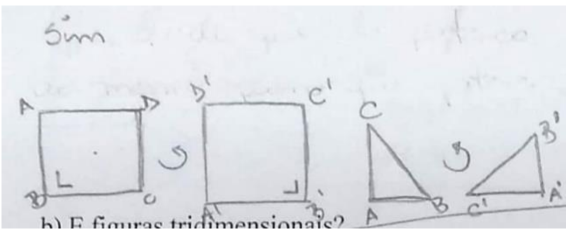
Na produção do grupo para figuras planas (“Superfície interior delimitada por linhas” – Figura 4), não ficou delimitado que figuras planas precisam estar contidas em um plano, em um espaço euclidiano bidimensional (LIMA, 2020); então, a figura plana poderia estar contida em um espaço de dimensão maior que dois. Esse problema não ocorre para a descrição de figuras espaciais (“Espaço interior delimitado por superfícies”), pois estas figuras estão contidas em um espaço de dimensão 3, e não mais que isso, tornando, assim, a descrição do grupo uma definição completa para figuras espaciais.

Questão 2A: podemos rotacionar figuras bidimensionais? Dê exemplos.

No item A da questão 2, alguns dos grupos trataram a rotação de figuras planas como restrita a rotações no plano (Grupos 1, 2 e 5). Trazemos o exemplo da resposta do Grupo 1.

Figura 16: Respostas do Grupo 1 à questão 2a), “Podemos rotacionar figuras planas?”

Imagem A: Resposta escrita do Grupo 1



Sim (desenho)

Quadro A: Trecho da transcrição do Grupo 1

Linha	Nome	Transcrição
1.75	Paula	Ok. Podemos rotacionar figuras bidimensionais?
1.76	Juliano	Rotacionar tipo só rodar?
1.77	Gabriela	Mas será que não é rodar assim?
1.82	Juliano	Podemos. Desde que ela continue no plano. Se a gente pode
1.83		rodar vetores.
1.84	Paula	Podemos rotacionar ela desde que a rotação seja no mesmo
1.85		plano em que ela já pertencia inicialmente.
1.86	Juliano	Aham, desde que ela continue no mesmo plano.

Fonte: acervo da pesquisa.

O grupo revela conhecer que o fenômeno da rotação está relacionado ao ato de girar (1.77) e também que, na rotação de figura plana em um plano, as imagens iniciais e finais na rotação pertencem a este mesmo plano (1.84–1.86), mostrando conhecimento desta propriedade (KoTph1: conhecer que a rotação está ligada ao ato de girar; KoTp11: conhecer que as imagens iniciais e finais de uma rotação no plano estão em um mesmo plano). Matematicamente, podemos afirmar que existe um plano que contém as imagens iniciais e finais da rotação de uma figura plana em um plano (RESENDE; QUEIROZ, 2008).

Os futuros professores revelam conhecer a rotação no plano de um quadrado e conhecer a rotação no plano de um triângulo, revelando conhecer exemplos deste tipo de rotação (KoTd6: conhecer exemplos de rotação de figuras planas no plano).

Além disso, revelam conhecimento sobre algumas notações necessárias para a representação desta rotação: a representação das imagens iniciais e finais da rotação são feitas de forma separada, sem sobreposição; há o uso de notação para nomear os vértices das imagens do quadrado e do triângulo (quadrados ABCD e A’B’C’D’, e triângulo ABC e A’B’C’) indicando notações diferentes antes e após a rotação, mas que relacionam os vértices correspondentes destas figuras (KoTr1: conhecer uma notação para representar os vértices correspondentes de figuras planas em uma rotação no plano); e revelaram também conhecer o uso de uma seta que indique o sentido e dar ideia de movimento para esta transformação geométrica ((RESENDE; QUEIROZ, 2008). Dessa forma, os futuros professores revelam conhecer diversas características necessárias para representar a rotação no plano por meio de um desenho (KoTr2: conhecer uma notação para representar o movimento de giro em uma rotação no plano).

O Grupo 2 também revela o mesmo conhecimento de uma rotação no plano e revela conhecer exemplos de rotações de figuras planas.

Figura 17: Trecho da transcrição do Grupo 2 à questão "Podemos rotacionar figuras bidimensionais?".

Linha	Nome	Transcrição
2.36	Mário	Dê um exemplo de rotação. ó, eu adoro assim, e que são coisas da
2.37		escola, você tem um triângulo equilátero, se você rotacionar ele 60º
2.38		você encontra outros três pontos que são de um hexágono, por
2.39		exemplo, a estrela de Davi né. É uma rotação.
[...]		
2.44	Mário	Você vira de cabeça para baixo, na verdade. Não precisa nem virar
2.45		de cabeça para baixo, basta 60º mesmo. Esse vem para baixo, esse
2.46		vem para cá e esse vem para cá, e fica a estrela de Davi. É uma
2.47		rotação.
[...]		
2.53	Mário	O quadrado se você rotacionar 45º você encontra os outros 4 pontos
2.54		que são do octógono.
[...]		
2.57	Mário	Vai dobrando, de três passa para seis.

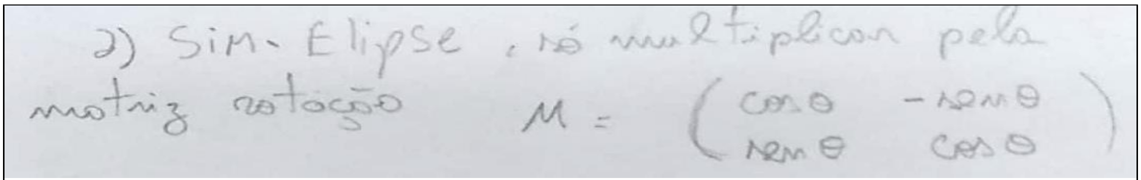
Fonte: Acervo da pesquisa.

Este futuro professor revela conhecer a rotação no plano de um triângulo equilátero (39-40), evidenciando o conhecimento de um exemplo deste tipo de rotação (KoTd7: conhecer o exemplo da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano). Apesar de não mencionar explicitamente, considera esta rotação a partir do centro do triângulo equilátero, e, dessa forma, ao rotacionar 60º, os vértices encontram-se em uma bissetriz do ângulo central da figura inicial – o que leva a formar um hexágono regular. O futuro professor revela conhecer que, sendo a rotação efetuada desta forma, os vértices dos triângulos iniciais e finais formam um hexágono (KoTpc1: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano).

Nas linhas 41 e 42, revela conhecer o exemplo da rotação no plano de um quadrado por um ângulo de 45º - quando o centro de rotação é a interseção das diagonais (KoTd8: conhecer um exemplo da rotação de 45º de um quadrado no plano). Ao identificar que os vértices do quadrado inicial, transformados pela rotação, formam um octógono, revela também um conhecimento sobre características do resultado desta rotação (KoTpc2: conhecer o resultado da rotação de 45º de um quadrado no plano). Quando o futuro professor identifica que a quantidade de vértices "vai dobrando, de três passa para seis" (58), ele analisa um padrão que ocorre ao rotacionar figuras regulares e faz uma generalização (KoTpc3: conhecer que ao unir os vértices das imagens iniciais e finais de figuras planas regulares rotacionadas obtemos nova figura regular com o dobro de vértices).

O Grupo 5 também associa a rotação de figuras planas no plano e faz uma referência da Geometria Analítica para abordar esta rotação.

Figura 18: Produção do Grupo 5 para a pergunta “Podemos rotacionar figuras bidimensionais?”


2) Sim. Elipse, só multiplicar pela matriz rotação $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2) Sim. Elipse, só multiplicar pela matriz rotação. (Matriz)

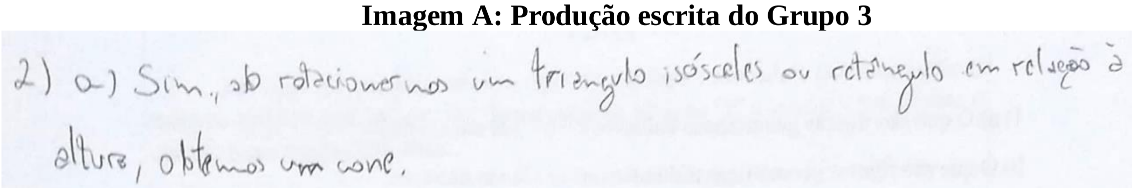
Fonte: Acervo da pesquisa

Os futuros professores revelam conhecer o exemplo da elipse como figura que pode ser rotacionada, evidenciando um conhecimento acerca de exemplos de figuras planas que podem ser rotacionadas (KoTd9: conhecer que a elipse é uma figura plana que pode ser rotacionada), e fazem alusão a uma matriz de rotação, que é um recurso que pode ser utilizado quando se tem um sistema de referência, como o plano cartesiano, para se estabelecer coordenadas e fazer transformações, como a rotação (DELGADO et al., 2013) e, dessa forma, fazem o uso de um sistema de referência para auxiliar na existência da rotação (KoTp12: conhecer que a rotação pode ser feita através de um sistema de referência como o plano cartesiano, a partir de uma matriz de rotação).

Já o Grupo 3 revelou conhecimento acerca de revolução de figuras planas nesta questão. Tal conhecimento foi adequado à revolução de figuras planas, porém não diz respeito à rotação destas figuras.

Figura 19: Produção do Grupo 3 para a pergunta “Podemos rotacionar figuras bidimensionais?”.

Imagem A: Produção escrita do Grupo 3


2) a) Sim, ao rotacionarmos um triângulo isósceles ou retângulo em relação à altura, obtemos um cone.

Sim, ao rotacionarmos um triângulo isósceles ou retângulo em relação à altura, obtemos um cone.

Quadro A: Trecho da transcrição do Grupo 4

Linha	Nome	Transcrição
3.59	Carlos	Por isso eu pensei em paraboloides e hiperboloides

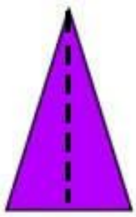
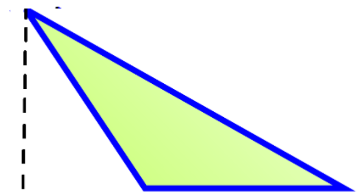
3.60	Pedro	Acho que você pode.
3.61	Carlos	Se você rotacionar um círculo, dá uma esfera.
3.62	Pedro	Aí depende de como você rotaciona.
3.63	Carlos	[inaudível]
3.64	Pedro	Não, não, tipo sei lá, se você rotacionar um círculo no próprio plano
3.65		não vai mudar em nada. Agora se você girar o círculo ao eixo...
[...]		
3.76	Carlos	Rotacionar um triângulo vira um cone.
3.77	Pedro	É.
3.78		[Carlos escreve a resposta]
3.79	Pedro	Um triângulo retângulo.
3.80		[Carlos escreve a resposta]
3.81	Carlos	Não precisa ser retângulo.
3.82	Pedro	Para dar o cone... precisa ser retângulo.
3.83	Carlos	Não, precisa ser isósceles só.
3.84	Pedro	Não, não, precisa ter uma linha reta, senão não consegue rotacionar
3.85		de um jeito que vai virar um cone.
3.86	Carlos	Qualquer triângulo isósceles funciona.
3.87	Pedro	Girando um cone? Ah, entendi. Se você rotacionar em relação à
3.88		altura, e não em relação ao eixo. Sim. Verdade.

Fonte: Acervo da pesquisa

Os futuros professores deste grupo revelam conhecer alguns exemplos de revolução de figuras: que a revolução de um círculo pode gerar uma esfera (3.61); que a revolução de um círculo pode gerar o próprio círculo (3.64), e também que paraboloides e hiperboloides podem ser construídos a partir da revolução de uma figura plana (3.59), evidenciando conhecer exemplos de figuras que podem ser geradas a partir de revolução (DOLCE; POMPEO, 2009), revelando um conhecimento sobre figuras que podem ser geradas desta forma (KoTd10: conhecer exemplos de figuras que podem ser geradas a partir da revolução de uma figura plana). Como o grupo denomina por rotação (linhas 3.61 e 3.64) a revolução de figuras planas, entendemos que há um equívoco quanto ao significado de rotação, pois não está empregado aqui como uma transformação que mantém as características da figura e altera sua posição (RESENDE; QUEIROZ, 2008), mas sim como transformação que constrói uma nova figura (DOLCE; POMPEO, 2009).

O grupo também discutiu sobre a revolução de um triângulo a partir de sua altura (3.76-3.88), abordando quais as características necessárias para que o triângulo gerasse um cone de revolução. Inicialmente, o grupo revelou conhecer que a revolução de um triângulo retângulo a partir de uma de suas alturas gera um cilindro (3.79) e, depois, revelam conhecer que o mesmo também é válido para triângulos isósceles (3.83). Porém, tal fato não é válido para todos os triângulos isósceles, somente os que possuem todos os ângulos menores que 90º, pois, neste caso, a altura em relação a qualquer lado é interna ao triângulo, enquanto no caso de ter um ângulo maior que 90º a altura pode ser externa ao triângulo, e, nesse caso, a revolução em torno da altura deste lado não gera um cone, como podemos ver na figura a seguir.

Figura 20: Representação da altura de triângulos isósceles.

Imagem 1: Triângulo isósceles acutângulo	Imagem 2: Triângulo isósceles obtusângulo.
	

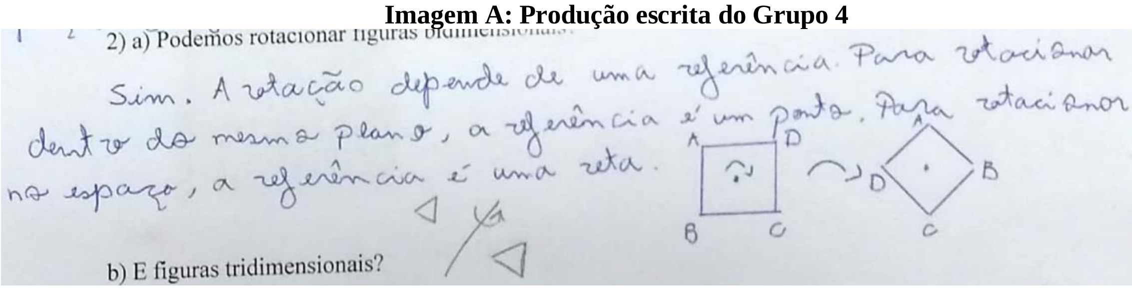
Fonte: acervo da pesquisa.

Assim, o grupo revela conhecer o resultado da revolução de um triângulo retângulo e um triângulo isósceles acutângulo em torno de sua altura, revelando um conhecimento sobre o procedimento da revolução de figuras planas (KoTpc4: conhecer que o resultado da revolução de um triângulo pode ser um cone). Também é evidenciado um conhecimento sobre a classificação de triângulos em relação aos lados e em relação a ângulos (DOLCE; POMPEO, 2009), revelando conhecer uma conexão auxiliar à revolução de figuras planas.

O Grupo 4 foi um dos que não restringiu a rotação de figuras planas a um plano e, ao pensar nos possíveis tipos de rotação, evidenciou elementos necessários para a realização dessas rotações.

Figura 21: Produção do Grupo 4 para a pergunta "Podemos rotacionar figuras planas?"

Imagem A: Produção escrita do Grupo 4



Sim. A rotação depende de uma referência. Para rotacionar dentro do mesmo plano, a referência é um ponto. Para rotacionar no espaço, a referência é uma reta.

Quadro A: Trecho da transcrição do Grupo 4

Linha	Nome	Transcrição

4.14	Alberto	E dá tanto para rotacionar no plano, né, quanto dá para rotacionar no
4.15		espaço. Daí tipo, você tem um plano e faz a revolução.
[...]		
4.21	Alberto	O que eu pensei é, por exemplo, você tem esse plano aqui, pega
4.22		esse eixo aqui e forma um cilindro, está ligado?
[...]		
4.37	Alberto	É que não está falando de revolução, só está falando do rodar.

Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores evidenciam conhecimento de condições necessárias para rotação no plano (Imagem A) revelando conhecer que é necessário estabelecer um ponto como origem para a rotação de figuras planas em um plano (RESENDE; QUEIROZ, 2008), evidenciando conhecimento sobre a definição desta rotação (KoTd11: conhecer que a origem da rotação no plano é um ponto). Ao darem um exemplo deste tipo de rotação, os futuros professores revelam conhecimento de notações adequadas para representar esta rotação, desenhando separadamente as posições iniciais e finais da rotação e nomeando os vértices da figura rotacionada (BLANCO, et al., 2019) evidenciando um conhecimento sobre representações de figuras planas em um plano (KoTr3: conhecer uma notação para a representação de rotação de figuras planas).

Ao discorrer sobre a rotação de figuras planas em um plano, o grupo não mencionou explicitamente a necessidade de se estabelecer um ângulo para a rotação (RESENDE; QUEIROZ, 2008), o que tornaria a definição completa da rotação, e em relação à representação no plano, o grupo não distinguiu os vértices da imagem inicial e da imagem final da rotação, por exemplo com A’, B’, C’ e D’ (BLANCO et al., 2019).

Em relação à rotação de figuras planas no espaço (Imagem A), o grupo revela conhecer que é uma condição necessária para realizar esta rotação uma reta como origem para a rotação (RESENDE; QUEIROZ, 2008), conhecendo parte da definição desta rotação (KoTd12: conhecer que a origem de uma rotação no espaço é uma reta) e revela também conhecer uma representação no plano para a rotação de um triângulo no espaço (KoTr3: conhecer uma representação para rotação de figuras planas no espaço).

No entanto, antes de finalizar a resposta sobre rotação de figuras planas no espaço, o grupo confunde esta rotação com a revolução de figuras planas no espaço (4.14-4.15; 4.21-4.22), tomando isto como sinônimo de rotação de figura plana no espaço. Dessa forma, na imagem A e linhas 4.21-4.22, eles revelam conhecer a existência da revolução de figuras planas, de uma condição necessária para a sua existência, que é uma reta como origem, e também um exemplo de revolução de um, formando um cilindro retângulo

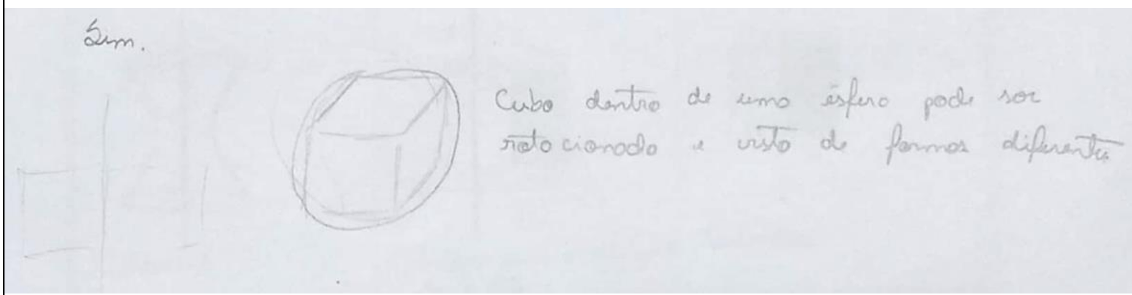
(DOLCE; POMPEO, 1995), revelando conhecimento sobre a definição de revolução de figuras planas (KoTd13: conhecer a revolução de figuras planas; KoTp13: conhecer que a origem para revolução de figuras planas é uma reta; KoTpc5: conhecer que a revolução de um retângulo pode gerar um cilindro).

Questão 2B: Podemos rotacionar figuras tridimensionais? Dê exemplos.

Relativamente à questão “Podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo”, este grupo apresenta um exemplo da rotação de um cubo:

Figura 20. Produções do Grupo 2 para a pergunta “Podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo”.

Imagem A: Produção escrita do Grupo 2



Sim. Cubo dentro de uma esfera pode ser rotacionado e visto de formas diferentes.

Quadro B: Transcrição da discussão do Grupo 2

2.80	Mário	Você pode imaginar o cubo dentro da esfera, e você pode mudar os
2.81		vértices dele de lugar sobre a esfera.
2.82	Paula	Está rotacionando no centro, né?

Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam conhecer um exemplo (Imagem A) deste tipo de rotação (KoTd14: conhecer exemplos de rotação no espaço de figuras espaciais) e explicitam que a rotação tem de possuir um centro de rotação – a origem – e que aqui corresponde ao centro do quadrado (82) – interseção das diagonais (KoTp14: conhecer que a rotação possui uma origem). Dessa forma, o grupo revela conhecer que o cubo dentro de uma esfera pode rotacionar, mas que esta rotação não possui uma imagem única, podem mudar a posição a cada rotação diferente, pois a rotação no espaço não está unicamente definida a partir de um ponto.

Os futuros professores também revelaram um conhecimento acerca de rotações associado a serem isometrias e construírem imagens congruentes às iniciais ao dizer que os vértices mudam de lugar sobre a esfera (2.80) – mas não alterando a figura, revelando conhecer esta propriedade (KoTp15: conhecer que a imagem final de uma rotação é congruente à imagem inicial).

As condições necessárias para se realizar uma rotação de figuras espaciais também são discutidas pelo Grupo 4.

Figura 21: Transcrição do Grupo 4 à questão “Podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais?”

Linha	Nome	Transcrição
4.85	Antônio	Figuras tridimensionais é a mesma coisa, você consegue rotacionar
4.86		a partir de um ponto, linha, ou até a partir de um plano você consegue
4.87		rotacionar, você pode pegar um plano de referência e rotacionar a
4.88		partir de um plano. Uma figura tridimensional.
[...]		
4.98	Antônio	É que no caso você teria que pegar um dos lados do cubo, na
4.99		verdade. Fixa um dos lados do cubo e fica rodando aqui. É seria
4.100		praticamente a mesma coisa que pegar uma reta no meio e girar.
[...]		
4.127	Antônio	Acho que a dúvida, na real, é na referência, a rotação ela existe a
4.128		partir de uma referência, assim como no plano. Seria importante você
4.129		dizer que com a rotação você produz outra figura, na verdade, é
4.130		sempre outra figura, não é a mesma. Por exemplo, você deu esse
4.131		ponto, ABCD, você rotaciona, vai ter outra figura, vai ser
4.132		completamente diferente. Com a rotação você faz outra figura,
4.133		sempre, independente dos graus de rotação. Você consegue rotacionar
4.134		a partir de um ponto e os graus de rotação, você mede a rotação a
4.135		partir dos graus.
4.136	Alberto	Só a de 360 [graus] que é a mesma, né.
4.137	Antônio	Múltiplos de 360, ou dois pi.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam conhecer elementos necessários para fazer uma rotação de figuras espaciais (4.86), pode ser um ponto, uma reta, ou um plano (DOLCE; POMPEO, 2009), evidenciando um conhecimento sobre condições necessárias para definir uma rotação (KoTd15: conhecer que a origem da rotação no espaço é uma reta; KoTd16: conhecer que é possível realizar uma rotação no espaço em torno de um ponto). No entanto, a rotação não é válida em todos os casos: quando a origem é um ponto, a rotação não é unicamente definida somente com um ângulo (DOLCE; POMPEO, 2009). Os futuros professores percebem que a rotação a partir de um plano não é possível uma vez que a situação que imaginavam era equivalente à rotação em torno de uma reta (4.99). Dessa forma, eles revelam conhecer que um eixo é uma condição necessária para rotacionar uma figura espacial. É necessário ainda estabelecer um ângulo para definir uma rotação, o que é revelado em seguida (4.133-4.134), revelando outra condição necessária (KoTd17: conhecer que é necessário definir um ângulo para a rotação no espaço).

Em resposta final à questão, o Grupo 1 apresenta um exemplo de rotação no espaço de figuras espaciais, mas, durante a discussão do grupo, houve o levantamento de figuras formadas por resolução como exemplo de rotação de figuras espaciais, ligando tais figuras ao resultado da revolução de figuras planas no espaço.

Figura 22: Transcrição do Grupo 1 à pergunta "Podemos rotacionar figuras tridimensionais?"

Linha	Nome	Transcrição
1.118	Paula	Pode girar a gente pode, é que dependendo do eixo que a
1.119		gente pegar a gente vai... é que a figura permanece a mesma, só
1.120		vai mudar a posição dela no espaço.
[...]		
1.125	Paula	Mas essa aqui, "desde que ela pertença ao mesmo plano que
1.126		pertencia originalmente" não é verdade, porque a gente pode tirar
1.127		ela do plano, a única coisa é que ela vai pertencer a um outro
1.128		plano. Mas a gente rotacionou ela, não rotacionou?
[...]		
1.148	Juliano	Eu pensei agora nos sólidos de revolução, você tem uma
1.149		figura plana, você gira ela e forma um sólido.
1.150	Paula	E isso também é rotacionar, não é?
1.151	Juliano	É rotacionar.

Fonte: Acerto da pesquisa.

Neste trecho, os futuros professores revelam conhecer que é necessário um eixo para realizar a rotação de uma figura espacial (1.118) e também que a imagem final da rotação mantém as características de tamanho e ângulos desta figura (1.119), revelando conhecer uma propriedade de uma rotação no espaço, e o fato de a rotação ser uma isometria (RESENDE; QUEIROZ, 2008), respectivamente, revelando um conhecimento sobre propriedades de uma rotação de figuras espaciais (KoTp16: conhecer que a origem da rotação no espaço é uma reta; KoTp17: conhecer que as imagens finais e iniciais de uma rotação são congruentes).

Ao refletir sobre a necessidade de as imagens iniciais e finais da rotação estarem em um mesmo plano, os futuros professores revelam conhecer a possibilidade de uma rotação no espaço em que a imagem final pertenceria a outro plano em relação à imagem inicial (1.127-1.128). Isso revela um conhecimento sobre os tipos possíveis de rotação (RESENDE; QUEIROZ, 2008), sendo um conhecimento sobre a definição da rotação (KoTd18: conhecer a rotação de figuras planas no espaço).

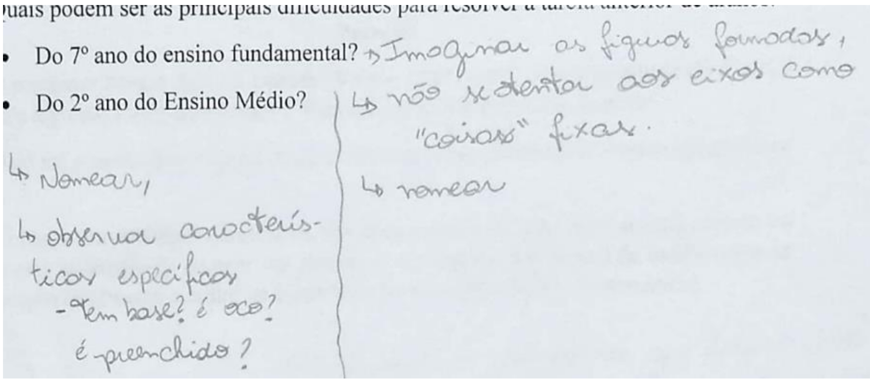
O grupo também revela conhecer a existência dos sólidos de revolução (1.148), que seriam um caso particular de figuras geradas por revolução que possuem interior preenchido (VODUŠEK, LIPOVEC, 2014) e que acontece com a revolução de uma figura plana, em relação a um eixo não coplanar a esta figura (DOLCE; POMPEO, 2009) - embora isso não tenha sido mencionado explicitamente - revelando um conhecimento sobre a existência deste tipo de transformação (KoTd13: conhecer a revolução de figuras planas). Em adicional, ao revelar que a figura formada é um sólido (1.149), revela um conhecimento sobre a característica da figura formada a partir da revolução (KoTpc6: conhecer que a revolução de figuras planas pode gerar um sólido).

Questão 3: Quais podem ser as principais dificuldades para resolver a tarefa "Vamos rotacionar".

Nesta questão, ao apontarem possíveis erros de alunos para a tarefa "Vamos rotacionar?", os futuros professores abordaram aspectos tanto dos tópicos de figuras geométricas quanto do tópico de revolução de figuras geométricas. Vamos primeiramente abordar os grupos que revelaram conhecimento acerca de figuras geométricas.

Figura 23: Produções dos Grupos à pergunta 3 "Quais podem ser as dificuldades de alunos ao resolverem a tarefa 'Vamos rotacionar?'?".

Imagem A: Produção escrita do Grupo 1


uais podem ser as principais dificuldades para resolver a tarefa

- Do 7º ano do ensino fundamental? → Imaginar as figuras formadas,
- Do 2º ano do Ensino Médio? ↳ não se atentar aos eixos como "coisas" fixas.

↳ Nomear,
↳ observar caracterís-ticas específicas
- Tem base? é oco? é preenchido?

↳ nomear

Quadro A: Transcrição da discussão do Grupo 1

Linha	Nome	Transcrição
1.535 1.536 1.537	Gabriela	Eu também acho, será que eles iam pensar: "nossa, mas se está girando o ponto (item "a"), mas está ficando vazado", é uma circunferência, ou se ele só iria fazer um círculo também.
1.549 1.550 1.551	Paula	Isso, exatamente. Já o segundo ano do médio, acho que a dificuldade seria eles perceberem que pode ficar um buraco no meio... (item "e") acho que principalmente isso.

Quadro B: Transcrição da discussão do Grupo 2

Linha	Nome	Transcrição
2.286	Mário	de repente eles ainda não sabem que é um cilindro, e eles não
2.287		sabem o que diferencia um cilindro de um tronco de cone um pouco
2.288		diferente.
2.289	Júlia	É, esses dois (imagens “b” e “c”) por exemplo eles diriam a mesma coisa
2.290		não é. Esse aqui (imagem “e”) acho que também, diriam a mesma coisa
2.291		(que a imagem “f”).

Quadro C: Transcrição da discussão do Grupo 3

Linha	Nome	Transcrição
3.327	Pedro	É, mas não tanta. Essa aqui (item “d”), é esquisita de olhar, é uma casca
3.328		muito torta, não tem casca em cima, não tem volume...

Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores do Grupo 1 revelam conhecer a diferenciação de figuras planas preenchidas e não preenchidas (Imagem A - Figura 23), ou figuras “vazadas” (Quadro A – Figura 23), conhecer a diferenciação de figuras espaciais preenchidas ou não (Imagem A), revelando conhecer a diferenciação de figuras constituídas somente pela fronteira e figuras constituídas pela fronteira e seu interior (VODUŠEK; LIPOVEC, 2014), um conhecimento ligado a definição de figuras geométricas (KoTd19: conhecer a diferenciação entre figuras constituídas somente pela sua fronteira ou pela sua fronteira e interior), e conhecer que algumas das figuras formadas na tarefa “Vamos rotacionar?” são abertas - “tem base” (Imagem A – Figura 23), revelando conhecer o que são figuras abertas, (LIMA, 2007a), sendo um conhecimento sobre definições destas figuras (KoTd20: reconhecer exemplos de figuras abertas).

Também é evidenciado o conhecimento de que a revolução de um retângulo é um cilindro vazado (DOLCE; POMPEO, 2009), no item “e” da tarefa “Vamos rotacionar?”, revelando um conhecimento sobre característica do resultado de uma revolução (KoTpc7: conhecer que a revolução de um retângulo pode ser um cilindro vazado). Este conhecimento embasa o reconhecimento de figuras que não são convexas (LIMA, 2007a), evidenciando que reconhecem este tipo de figura (KoTd21: conhecer exemplos de figuras não convexas). Dessa forma, alguns conhecimentos sobre características do resultado de revolução de algumas figuras permitiram evidenciar conhecimentos no tópico de figuras geométricas.

O Grupo 2 revela conhecer que a revolução de um segmento de reta forma um cilindro (DOLCE; POMPEO, 2009), no item “b” da tarefa “Vamos rotacionar?” (2.286-2.288) e também conhecer que a revolução de um segmento de reta forma um tronco de cone (DOLCE; POMPEO, 2009), no item “c” da tarefa “Vamos rotacionar?” (2.286-2.288), revelando um conhecimento sobre características de resultado de uma revolução (KoTpc7: conhecer que a rotação de segmento de reta paralelo ao eixo de revolução pode formar parte da superfície de um cilindro; KoTpc8: conhecer que a revolução de um segmento de reta não paralelo ao eixo de revolução pode formar parte da superfície de um tronco de cone). Rigorosamente, o mais correto é dizer que as figuras formadas são superfícies laterais de cilindro e de tronco de cone, fato que o grupo revelou conhecer durante a resolução da tarefa “Vamos rotacionar?”, apesar de não deixar explícito neste momento. Assim como o grupo anterior, isso embasa o conhecimento em diferenciar um cilindro de um tronco de cone, revelando um conhecimento sobre exemplo de figuras espaciais e a diferenciação entre elas (KoTd4: conhecer exemplos de figuras espaciais).

O grupo revela conhecer que a revolução de uma linha forma uma superfície curva e aberta (DOLCE; POMPEO, 2009) no item “d” da tarefa “Vamos rotacionar?” (3.327), evidenciando conhecer característica da revolução de uma linha curva (KoTpc9: conhecer o resultado da revolução de uma linha curva e aberta sem interseção com o eixo de revolução). Com isso revela conhecer a diferenciação entre uma figura formada somente pela fronteira (“casca”) e pela fronteira e o interior (VODUŠEK, LIPOVEC, 2014), conhecer a diferença entre uma figura aberta (“não tem casca em cima”) e fechada (LIMA, 2007a) e também reconhecer figuras que não possuem um volume (LIMA, 2011), mostrando um conhecimento respectivamente em reconhecer figuras preenchidas, figuras abertas e figuras que não possuem um volume (KoTd19: conhecer diferenciação entre figuras constituídas pela sua fronteira e pela sua fronteira e interior, KoTd20: conhecer exemplos de figuras abertas; KoTd22: conhecer exemplos de figuras que possuem volume definido).

Abordando ambos os tópicos de figuras geométricas e revolução de figuras geométricas, o Grupo 4 discute sobre o uso de modelos tridimensionais para a representação algumas situações.

Quadro 9: Transcrição da discussão do Grupo 4 para a pergunta “Quais podem ser as principais dificuldades para resolver a tarefa ‘Vamos rotacionar?’?”

Linha	Nome	Transcrição
4.430 4.431 4.432 4.433	Antônio	É, o que é uma figura plana? A régua é uma figura plana. O que é uma figura tridimensional? Uma caneta. Aí generaliza agora, fala o que é uma figura plana, está contida no plano, é a maior definição que consigo dar.
4.522	Antônio	Não, mas a ideia da furadeira é muito boa. Você pode fazer muita

4.523		coisa com a furadeira. Você pode prender na furadeira o bagulho assim,
4.524		aí você gira e vai fazer a figura. Mas é muito da hora.
4.525	Gabriel	Outra coisa é amarrar uma pedra num barbante e girar. Tirando que
4.526		não é um ponto fixo que você está rodando, mas se você considerasse
4.527		que fosse um ponto fixo e o negócio ficasse rodando você ia ver que
4.528		um ponto e outro ponto formam um círculo.

Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam conhecer que uma régua pode ser usada para representar uma figura plana (4.430) e que uma caneta (4.431) pode ser usada para representar uma figura espacial (PARZYSZ, 1988), revelando um conhecimento sobre representações de figuras planas e espaciais por meio de modelos tridimensionais (KoTr4: conhecer a representação de uma figura plana por meio de modelo tridimensional; KoTr5: conhecer a representação de uma figura espacial por meio de um modelo tridimensional).

Ao usarmos estes modelos fazemos adaptações, pois todos os objetos existentes no mundo real possuem três dimensões e, para representarmos figuras com dimensões menores, precisamos desprezar algumas dessas dimensões. Ao representarmos um retângulo com uma régua, ou com uma folha de papel, estamos desprezando a espessura da folha, que, apesar de pequena, existe e é diferente de zero. O problema que encontramos é o de definirmos e explicitarmos a dimensão que é desprezada e a que não é desprezada, pois uma caneta poderia também ser utilizada para representar um segmento de reta, já que a sua espessura é menor que o comprimento. Portanto, as representações por modelos tridimensionais apresentam esse tipo de problema (PARZYSZ, 1988).

O grupo também revela conhecer que podemos usar uma furadeira para representar a revolução de figuras (4.522-4.545), evidenciando um conhecimento de representação de revolução de figuras por meio de modelos tridimensionais (KoTr6: conhecer a representação da revolução de figuras geométricas por meio de uma furadeira). Salvo as considerações anteriores, este tipo de representação apresenta a origem de rotação (na furadeira), a figura que está sendo revolucionada presa a furadeira e também possibilita a visualização da imagem que será formada, pois o movimento rápido da figura permite que visualizemos o formato tridimensional da figura formada, por meio da união de cada uma das posições infinitesimais possíveis.

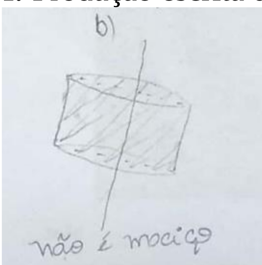
Já o uso de uma pedra amarrada em um barbante possui os problemas de o eixo de revolução não ser fixo, como relatado pelo Grupo (4.525-4.528) e também a sensação de movimento não é tão precisa quanto de uma furadeira. O Grupo 1 aborda isso em sua discussão, pois relata que uma possível dificuldade é reconhecer que a origem da revolução é fixa – “eixos como “coisas” fixas” (Imagem A), revelando conhecer esta propriedade de revolução de figuras geométricas (KoTp18: conhecer que a origem da revolução de figuras geométricas é fixa). Enquanto a furadeira se limita a representar figuras que têm interseção ao eixo de revolução, o fio permite que representemos figuras sem interseção, porém é necessário fazer a distinção do que é formado a partir do movimento da pedra amarrada na ponta (a circunferência) e o que é formado a partir do movimento do barbante (o interior do círculo), sendo necessário fazer essa distinção (FISCHBEIN, 1993).

Questão 4: Esboce duas produções incorretas que alunos para algum dos itens da tarefa “Vamos rotacionar?”.

Nesta questão, os futuros professores novamente revelaram conhecimento em ambos os tópicos de figuras geométricas e revolução de figuras geométricas. Primeiramente, abordaremos o conhecimento revelado no tópico de figuras geométricas:

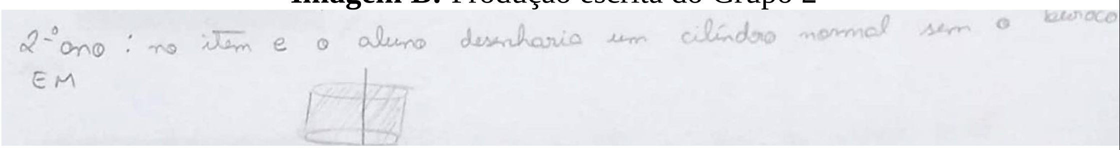
Figura 22: Produção dos Grupos 1, 2 e 4 para a questão “Esboce duas produções incorretas (...)”

Imagem A: Produção escrita do Grupo 1



b) (desenho) não é maciço

Imagem B: Produção escrita do Grupo 2



2º ano EM: no item e o aluno desenharia um cilindro normal sem o buraco (desenho)

Quadro A: Transcrição da discussão do Grupo 4

4.561	Antônio	Sexto ano talvez é isso aqui, acho que essa aqui seria a pior. Talvez
4.562		fosse feito um cilindro normal, sem ser preenchido, sem a falha né.

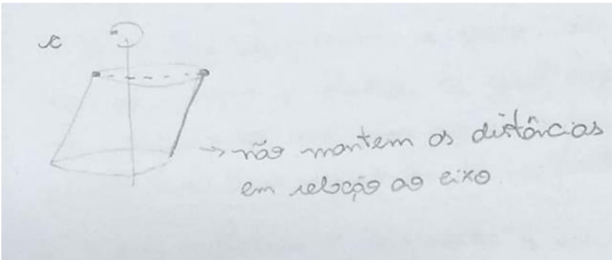
Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores do Grupo 1 mostram uma característica associada à diferenciação entre figuras constituídas somente pela sua fronteira ou também pelo interior (FISCHBEIN, 1993), revelando conhecer esta diferenciação (KoTd19: conhecer a diferenciação entre figuras constituídas somente pela sua fronteira ou pela fronteira e interior). Os futuros professores dos Grupos 2 e 4 também diferenciaram figuras que possuem parte "vazada" em seu interior (KoTd21: conhecer exemplos de figuras não convexas).

Houve também discussão de aspectos associados à revolução de figuras geométricas.

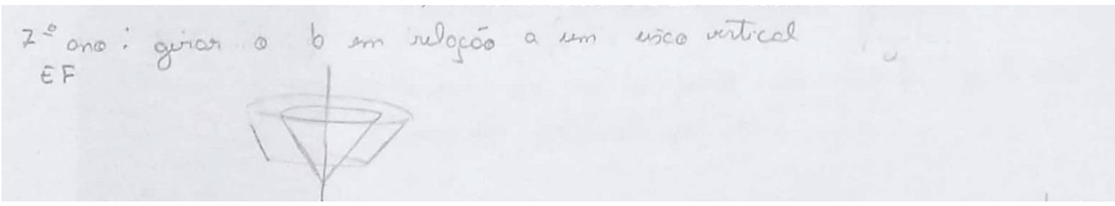
Figura 23: Produção dos Grupos 1, 2 e 3 para a questão "Esboce duas respostas incorretas (...)"

Imagem A: Produção escrita do Grupo 1



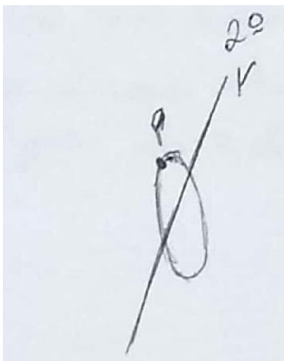
c) (desenho) não mantém as distâncias em relação ao eixo.

Imagem B: Produção escrita do Grupo 2



7º ano EF: girar o b em relação a um eixo vertical

Imagem C: Produção escrita do Grupo 3



Quadro A: Trecho da transcrição do Grupo 3

3.361	Pedro	Um erro que eu tive, de talvez achar que isso aqui
3.362		não seria perpendicular ao 'r' (imagem "a").

Fonte: Acervo da pesquisa.

Nas imagens A e B, os futuros professores abordam que um possível erro dos alunos é refazer a revolução não mantendo a distância entre a figura e o eixo. Dessa forma, revelam conhecer que a distância entre a figura e o eixo de revolução é mantida (DOLCE; POMPEO, 2011), conhecendo assim essa propriedade (KoTp18: conhecer que a distância entre a figura geométrica e o eixo de revolução é mantida).

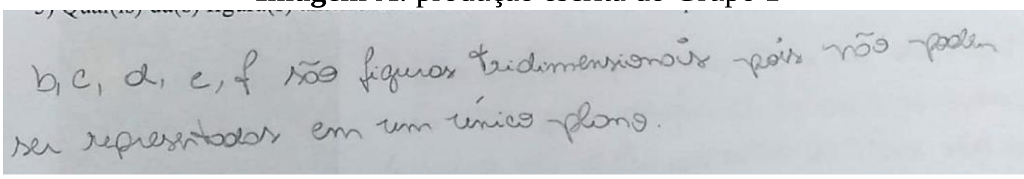
Os futuros professores do Grupo 3, de forma semelhante, abordam uma característica que também provém das distâncias entre os pontos das figuras e o eixo de revolução não ser mantido, mas evidenciando dessa vez que o plano que contém a figura plana formada (no caso da revolução de um ponto) não é perpendicular ao eixo. Dessa forma, evidenciam conhecer esta propriedade também (KoTp19: conhecer que o plano que contém a figura plana formada pela revolução de um ponto é perpendicular ao eixo de revolução).

Questão 5: Qual(is) da(s) figura(s) anteriores [formadas na tarefa "Vamos rotacionar?] são tridimensionais? Justifique.

As respostas desta questão estiveram, na sua maioria, relacionadas aos conceitos de figuras planas e espaciais que os grupos revelaram na questão 1. Os grupos que não especificaram qual o conceito de figura plana ou espacial consideraram que todas as figuras formadas entre os itens "b" e "f" da tarefa "Vamos rotacionar?" geraram figuras tridimensionais. Como exemplo destes grupos, trazemos as respostas do Grupo 1.

Figura 24: Produção do Grupo 1 à questão "Quais das figuras formadas na tarefa "Vamos rotacionar?" são tridimensionais?".

Imagem A: produção escrita do Grupo 1


b, c, d, e, f são figuras tridimensionais pois não podem ser representados em um único plano.

B, c, d, e, f são figuras tridimensionais pois não podem ser representadas em um único plano.

Quadro A: Trecho da transrição do Grupo 1

Linha	Nome	Transcrição

1.742 1.743 1.744	Paula	Essa daqui (letra b) vai ter comprimento, largura e altura, só que na verdade ela só vai ter altura e comprimento, porque se a gente abrir ela é uma casca. Ela é bidimensional, não é?
1.751 1.752 1.753 1.754 1.755	Juliano Paula Juliano Paula Juliano	Mas isso não é uma figura tridimensional? Então, eu não sei. É isso que quero ver. Claro que é. Só por ser a casca? Mas você consegue colocar isso desse jeito que está no plano?
1.769 1.770 1.771 1.772 1.773 1.774 1.775 1.776	Paula Juliano Paula Juliano Paula	A gente pode justificar com a mesma justificativa que tinha dado antes, porque não pode ser expressa em apenas um plano. Pode. Não, uma figura tridimensional não pode ser expressa em apenas um plano. Mas a casca pode. Não pode não, porque a casca está fechada, você teria que abrir a casca, aí deixa de ser o que ele é. (...)

Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam conhecer que as superfícies laterais de cilindro não possuem volume, mas possuem uma área definida (1.742-1.743), revelando o conhecimento de que superfícies possuem uma área definida (LIMA, 2011), configurando uma propriedade sobre superfícies (KoTp20: conhecer que uma superfície possui uma área definida). Algumas destas superfícies, que estão no espaço, por vezes, são confundidas com figuras planas por definirem uma área, apesar de não estarem contidas em um único plano e poderem, em alguns casos, serem planificados. Os futuros professores conhecem que quando planificamos uma figura, ou a superfície de uma figura, temos uma representação diferente da figura original (1.775-1.776), revelando um conhecimento sobre representações, ao diferenciar um objeto espacial de sua planificação (KoTr7: conhecer a diferenciação entre uma figura geométrica e a sua planificação). O grupo apresentou sua resposta ao relembrar da propriedade KoTp1 (conhecer que figuras planas estão contidas em um plano) e, a partir disso, classificaram todas as figuras que não são possíveis de conter em um plano como figuras espaciais. Tal classificação foi coerente com a definição dada na questão 1, pois tanto figuras espaciais constituídas pela sua fronteira quando pela sua fronteira e interior eram consideradas como figuras espaciais, e não foi feita nenhuma consideração quanto às figuras serem abertas ou não convexas.

O Grupo 2 acrescentou uma característica àquelas dadas na questão 1 para responder à questão 5.

Quadro 8: Transcrição da discussão do Grupo 2 à questão “Quais das figuras formadas na tarefa “Vamos rotacionar?” são tridimensionais?”

Linha	Nome	Transcrição
373	Mário	Para mim tudo é tridimensional, mas eu acho que ele quer dizer o que
374		tem volume, ou que tem área. Porque se é uma superfície lateral isso
375		aqui só tem área, né.
(...)		
392	Paula	A figura “e” e “f” né?
393	Mário	É, "e" e "f". Foi assim que tem volume, são objetos com volume.

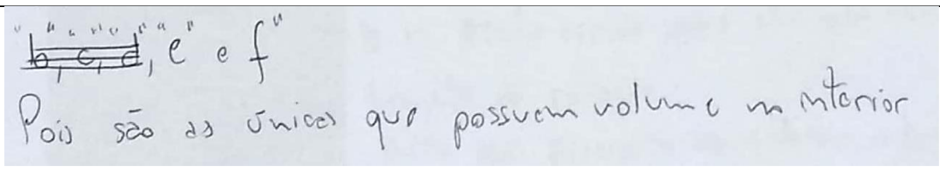
Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam conhecer que as figuras formadas são algo tridimensional (KoTd23: conhecer exemplos de objetos tridimensionais) e que uma “superfície lateral” possui uma área definida (KoTp20: conhecer que uma superfície possui uma área definida). Além disso, acrescentam que uma figura espacial deve possuir volume (LIMA, 2011), revelando mais uma propriedade de figuras espaciais (KoTp21: conhecer que figuras espaciais possuem um volume definido). Além disso, eles identificam as figuras “e” e “f” como figuras que possuem volume, conhecendo assim exemplos deste tipo de figura (KoTd22: conhecer exemplos de figuras que possuem um volume definido). Dessa forma, nesse momento da discussão do grupo, eles consideram que o conceito de figuras espaciais é de que são constituídas pela sua fronteira e interior. No entanto, vale ressaltar que, na resposta escrita do grupo, voltaram a considerar as figuras “b”, “c” e “d” como espaciais devido ao conceito explicitado anteriormente.

De forma semelhante, o Grupo 3, que havia explicitado este conceito para figuras espaciais também considerou somente as duas últimas figuras como espaciais.

Figura 25: Produção do Grupo 3 referente à questão “Quais das figuras formadas na tarefa “Vamos rotacionar?” são tridimensionais?”

Imagem A: Produção escrita do grupo 3



~~“b”, ”c”, ”d”,~~ ”e” e “f” Pois são as únicas que possuem volume no interior.

Quadro B: Parte da transcrição da discussão do Grupo 3

Linha	Nome	Transcrição
395	Carlos	É que depende também, isso aqui é tridimensional mais ou menos,
396		isso aqui não tem volume.
397	Pedro	Não tem volume. É tridimensional porque está inscrito no "xyz".
398	Carlos	Tipo assim, uma folha dobrada, é tridimensional ou bidimensional?
399	Pedro	Como a gente define... volta na nossa primeira. Nossa primeira...
400	Carlos	Verdade...
401	Pedro	Espaço interno delimitado por superfícies... então uma Figura
402		Geométrica Tridimensional é um espaço... puts, nossa, complicado.

Fonte: acervo da pesquisa.

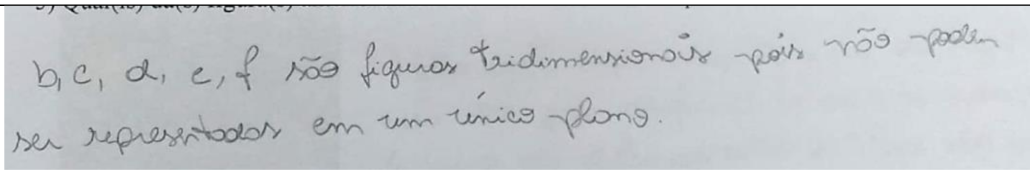
O grupo discute que, com exceção da imagem “a” da tarefa “Vamos rotacionar?”, todas as outras seriam tridimensionais, porque não existe um plano que possa conter tais figuras. Porém, quando retomam à descrição do grupo de que figuras espaciais são um “espaço interior delimitado por superfícies”, as imagens “b”, “c” e “d” deixam de ser consideradas figuras espaciais, porque não são figuras, apesar de serem tridimensionais. Tais figuras não são delimitadas, pois não definem um espaço interior à fronteira e um espaço exterior à fronteira e, por isso, não são figuras geométricas, como uma consequência de KoTp3 (conhecer que figuras geométricas possuem uma fronteira). Assim, o grupo revela reconhecer exemplos de figuras que possuem volume definido (KoTd22: conhecer exemplos de figuras que possuem um volume definido).

Questão 6: Em geral, quando a figura formada por uma rotação é espacial? Justifique.

Os conceitos explicitados para figuras planas e espaciais também reverberaram na questão 6 em que os futuros professores deveriam elencar características para a figura gerada por revolução ser tridimensional. De modo geral, os grupos que não explicitaram o conceito de figuras espaciais consideraram que basta que a figura não seja somente um ponto para que possa gerar uma figura espacial.

Figura 26: Produção do Grupo 1 referente à questão “Em geral, quando uma figura formada por rotação é espacial?”

Imagem A: Produção escrita do Grupo 1


b, c, d, e, f são figuras tridimensionais pois não podem ser representados em um único plano.

b, c, d, e, f são figuras tridimensionais pois não podem ser representadas em um único plano.

Quadro A: Trechos da transcrição da discussão do Grupo 1

Linha	Nome	Transcrição
1.742	Paula	Essa daqui (letra b) vai ter comprimento, largura e altura, só que na
1.743		verdade ela só vai ter altura e comprimento, porque se a gente
1.744		abrir ela é uma casca. Ela é bidimensional, não é?
1.751	Juliano	Mas isso não é uma figura tridimensional?
1.752	Paula	Então, eu não sei. É isso que quero ver.
1.753	Juliano	Claro que é.
1.754	Paula	Só por ser a casca?
1.755	Juliano	Mas você consegue colocar isso desse jeito que está no plano?
1.769	Paula	A gente pode justificar com a mesma justificativa que tinha
1.770		dado antes, porque não pode ser expressa em apenas um plano.
1.771	Juliano	Pode.
1.772	Paula	Não, uma figura tridimensional não pode ser expressa em
1.773		apenas um plano.
1.774	Juliano	Mas a casca pode.
1.775	Paula	Não pode não, porque a casca está fechada, você teria que
1.776		abrir a casca, aí deixa de ser o que ele é. (...)

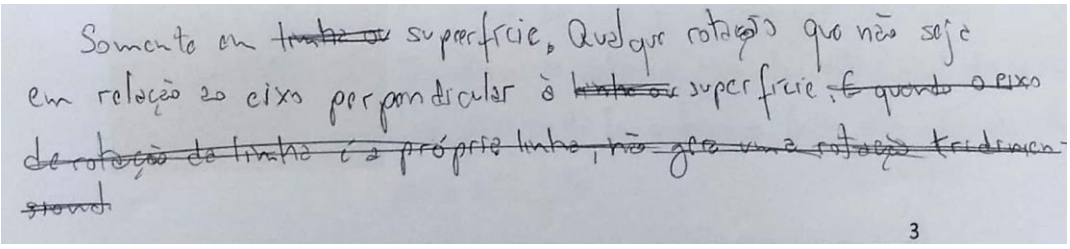
Fonte: acervo da pesquisa.

Os futuros professores revelam que conhecer que as superfícies laterais de cilindro não possuem volume, mas possuem uma área definida (1.742-1.743), mostrando reconhecer exemplos deste tipo de figura (KoTd24: conhecer exemplos de figuras que possuem uma área definida). Algumas destas superfícies, que estão no espaço, por vezes são confundidas com figuras planas por definirem uma área, apesar de não estarem contidas em um único plano e poderem, em alguns casos, serem planificados. Porém, os futuros professores demonstram conhecer que, quando planificamos uma figura ou a superfície de uma figura, temos uma representação diferente da figura original (1.775-1.776), revelando um conhecimento sobre representações, conseguindo diferenciar um objeto espacial de sua planificação (KoTr7: conhecer a diferenciação entre uma figura geométrica e a sua planificação). Porém, o grupo apresentou sua resposta ao relembrar o fundamento KoTp1 relativo a conhecer que as figuras planas estão contidas em um plano (1.755; 1.769-1.770).

O Grupo 3 restringiu as figuras que seriam espaciais após a revolução.

Figura 27: Produção do Grupo 3 para a questão “Em geral, quando uma figura formada por rotação é espacial?”

Figura A: Produção escrita do Grupo 3



Somente em ~~linha ou~~ superfície. Qualquer rotação que não seja em relação ao eixo perpendicular à ~~linha ou~~ superfície. ~~E quando o eixo de rotação da linha é a própria linha, não gera uma rotação tridimensional.~~

Quadro A: Trecho da transcrição da discussão do Grupo 3

Linha	**Nome**	**Transcrição**
3.487	Carlos	Eu lembrei aqui o negócio do canudo, você já viu?
3.488	Pedro	O do quê?
3.489	Carlos	Se o canudo é bidimensional ou tridimensional.
3.490	Pedro	Nunca vi esse negócio.
3.491	Carlos	Se o canudo é bidimensional, porque ele é só uma figura dobrada.
3.492		Porque se ele tivesse volume seria tridimensional, porque para ser
3.493		tridimensional precisa ter volume.
3.494	Pedro	Caramba, figura é uma palavra "mó" perigosa

Fonte: acervo da pesquisa

Os futuros professores revelam conhecer que é necessário girar uma figura plana que não esteja em um plano não perpendicular ao eixo de revolução para gerar uma figura espacial (DOLCE; POMPEO, 2011), mostrando conhecer uma condição necessária para formar uma figura espacial a partir da revolução (KoTd25: conhecer que para formar uma figura espacial por revolução, é necessário girar uma figura plana que esteja situada em um plano não perpendicular ao eixo de revolução). Também que é necessário que figuras possuam um volume para serem consideradas figuras espaciais (KoTp21) e, dessa forma, um objeto no formato de um canudo seria um não exemplos de figura espacial (KoTd25: conhecer exemplos do que não seria uma figura espacial).

DISCUSSÃO PLENÁRIA

Um primeiro episódio da discussão plenária discutiu as condições necessárias para se realizar uma rotação no espaço. Nesta parte da discussão, os futuros professores levantaram a possibilidade de não haver um eixo de rotação.

Figura 28: Transcrição do trecho da discussão plenária sobre condições necessárias para uma rotação no espaço.

Linha	Nome	Transcrição
PL.16	Pesquisador	Bom, e em 3D?
PL.17	Gabriel	Um ângulo e uma reta.
PL.18	Paula	Ou pode ser um ponto também, não pode?
(...)		
PL.24	Paula	Então, um ponto você pode girar de todas as formas, não é?
(...)		
PL.26	Alberto	Eu acho que se fizer isso primeiro você está pegando...
PL.27		primeiro você usa de referência uma reta, depois você gira nela
PL.28		(gesticula com os braços fazendo uma rotação sobre um eixo na
PL.29		direção do seu braço estendido à frente do corpo).
PL.30		Depois você usa outra reta de referência, daí você gira nela
PL.31		(muda a posição do braço, ficando horizontal à frente do corpo).

Fonte: acervo da pesquisa

Em um segundo episódio da discussão plenária, o pesquisador debatia com os futuros professores as possíveis definições para figuras planas e espaciais. Neste episódio, houve dois trechos em que houve conhecimento revelado de forma diferente das discussões anteriores dos grupos. No primeiro dos trechos, há uma discussão acerca da diferenciação entre uma figura que possui comprimento e largura e uma figura que possui uma área associada.

Quadro 9: Transcrição do trecho da discussão plenária sobre as noções comprimento e largura.

PL160	Pesquisador	Aí você falou de comprimento e largura. Aí, bom, sei lá, se eu pego,
PL161		sei lá, um círculo (desenha um círculo na lousa), onde está o
PL162		comprimento e a largura?
PL163	Paula	Eu posso pensar no espaço que ela ocupa num plano. Sei lá,
PL164		eu posso colocar que ela tem um espaço... (inaudível)
PL165	Gabriel	... na área.
PL166	Paula	É. A região determinada.
PL167	Mário	Envolver por um retângulo ou envolver por um paralelepípedo.

Fonte: acervo da pesquisa

Um círculo, embora não possua sua fronteira formada por linhas retas, como nos polígonos, podemos associar estas duas medidas lineares no sentido de que para “cobrir” toda a região que o círculo ocupa (LIMA, 2011). Uma figura somente com “um comprimento” associado não cobriria por completo o círculo; então, é necessário haver mais uma dimensão, que tem associado “outro comprimento”, uma outra dimensão para conseguir cobrir o círculo, ou como é dito por Mário (PL167), é preciso haver um retângulo para “cobrir” o círculo, e não somente uma reta. Dessa forma, o futuro professor revela conhecer que as figuras planas possuem duas dimensões lineares (KoTp2).

Da mesma forma, ocorre com a circunferência, da qual podemos determinar “comprimentos” e “larguras”, mas não possuem uma área, mostrando que a noção de possuir comprimento e largura está ligado ao conhecimento de estar contido em um único plano e não de possuir uma área.

Em um segundo trecho deste episódio, um futuro professor que foi integrante do Grupo 4 complementa a sua resposta sobre o que são figuras planas.

Quadro 10: Transcrição do trecho da discussão plenária sobre continuidade

Linha	Nome	Transcrição
PL.223	Alberto	A gente falou que é um conjunto de pontos, eles estão contidos
PL.224		todos no mesmo plano, mas na verdade eu achei melhor do jeito que
PL.225		ela falou, que dá para você... tem um plano que eles estão todos no
PL.226		mesmo, como se fosse uma folha, que se tivesse duas dimensões eu
PL.227		posso passar outros planos aqui, mas existe um que está em todos eles.
PL.228		E as fronteiras deles delimitam uma área. O que eu tinha pensado, se
PL.229		você pegar um ponto aqui... você tem o plano, se pegar um ponto aqui,
PL.230		um aqui, um lá, um lá, um longe do outro, isso é uma figura? A gente
PL.231		pensou que não, tem que ter um contorno, assim, e ter uma área.

Fonte: acervo da pesquisa

O futuro professor reafirma conhecer que figuras planas possuem uma fronteira (KoTp3) e que a fronteira das figuras planas define uma área (KoT4), e acrescenta que os pontos que constituem as figuras não podem ter espaços entre eles (PL228-PL230), revelando a ideia de que os pontos que constituem a figura plana são contínuos no plano onde ela está contida (LIMA, 2007a), revelando tal conhecimento (KoTp22).

No episódio a seguir, um dos futuros professores levanta a discussão se a superfície lateral de um cilindro é uma figura espacial.

Quadro 11: Discussão plenária sobre superfícies curvas TF1.

PL.186 PL.187 PL.188 PL.189 PL.190 PL.191	Mário	Eu fiquei numa certa dúvida porque, por exemplo, considerar que a casca de um cone, de um tronco de cone, a superfície lateral é bidimensional só porque só tem área, não tem um volume, para mim é falso, porque a gente definiu o tridimensional sempre que você puder pegar 4 pontos que não estejam num plano. E que haja continuidade também.
PL.192	Gabriel	É que a casca do cone dá para você cortar ela e planificar né.
PL.193	Paula	Então, mas e aí eu posso planificar um cubo, que também...…
PL.194	Mário	Mas aí é planificar, não é a mesma figura.
PL.195 PL.196	Gabriel	Então, por mais que ela esteja no espaço, ela não tem dimensão de, sei lá...
PL.197	Mário	Ela não tem volume.
PL.198	Paula	Ela não é sólida.
PL.199 PL.200	Mário	Ela não tem volume, só tem área, mas ela é uma figura tridimensional para mim.
PL.201	Paula	Porque ela não pertence a um plano.
PL.202	Gabriel	Para mim é um plano no espaço, sabe. É um plano no espaço.

Fonte: produzido pelo autor.

Para as figuras espaciais, podemos ter as representações das fronteiras destas figuras, formadas por um conjunto de superfícies, e uma representação da figura em si, que inclui o interior dela. No caso do cone, a sua superfície é formada por figuras que podem ser todas representadas por um conjunto de figuras planas, que podem ser planificadas (SOUZA; MORETTI; AUMOULOUD, 2019); algumas figuras como a esfera não podem ser. Tais representações determinam um volume e, então, dizemos que possuem uma capacidade. As definições de figuras espaciais podem considerar figuras com volume ou figuras com capacidade (não ambos simultaneamente). Enquanto Mário e Júlia, durante as discussões em grupo, definem que qualquer objeto tridimensional é uma figura espacial, como a superfície lateral do cone, Gabriel define que as figuras espaciais possuem um volume e revela conhecer que a fronteira das figuras espaciais determina um volume (KoTp21), e como a superfície lateral do cone não define um volume sozinha, não é uma figura espacial. Já Mário e Júlia revelam desta forma que a propriedade de não existir um plano que contém uma figura geométrica (KoTp7) é preponderante para definir uma figura espacial.

Em um episódio posterior, é levantada pelo formador a questão das possíveis planificações de um cilindro para se discutir as propriedades de dimensão e grandezas associadas às figuras.

Quadro 12: Discussão plenária sobre planificação de um cilindro.

PL.237 PL.238 PL.239 PL.240	Formador	Vou tentar ajudar ou "desajudar". O que é isto? [pega e exibe uma folha de papel cortada no formato de uma possível planificação da superfície de um cilindro] [Formador coloca a folha sobre a mesa, de forma a ficar sobre um

PL.241		único plano]
PL.248	Gabriel	Isso pode ser a planificação de um cilindro.
PL.249	Paula	Pode ser a planificação.
PL.250	Formador	É 3 dimensões ou 2 dimensões.
PL.251	Vários	Duas.
PL.272	Formador	Se eu pegar esta coisa, vamos imaginar que eu estou a pegar
PL.273		aquelas duas e estou a colocar aqui (pega uma folha de papel,
PL.274		representando a superfície lateral de um cilindro, e dobra no formado
PL.275		de um cilindro, e pede para imaginar que tenham dois círculos
PL.276		completando a superfície dele). O que é que eu tenho aqui?
PL.277	Paula	Um cilindro.
PL.278	Alberto	A casca de um cilindro.
PL.279	Mário	A casca de um cilindro.
PL.280	Formador	Tenho a casca de um cilindro. Tenho volume ou não tenho volume?
PL.281	Alberto	Tem
PL.282	Paula	Tem
PL.283	Gabriel	Delimita um volume, mas não tem volume.
PL.284	Mário	Delimita um volume, que é diferente de ser um sólido. Não é um
PL.285		sólido, é superfície.

Fonte: produzido pelo autor.

Os futuros professores revelam conhecer que a fronteira do cilindro delimita um volume (KoTp9), mas tal volume não pertence à figura, então ela delimita um volume, e não o possui. Neste exemplo, temos um conjunto de figuras planas (possuem área), um retângulo e dois círculos, que podem ser organizadas no espaço de uma forma que delimitem uma região interior, com o formato de um cilindro, formando sua fronteira. Dessa forma, o conjunto de figuras planas podem construir algo que defina um volume, mas não algo que tenha volume, e dizemos que esta representação possui uma capacidade.

Podemos ver, desta forma, um exemplo de que um conjunto de figuras planas forma, no máximo, a fronteira de uma superfície espacial, mostrando que figuras de dimensões maiores não são somente uma união de figuras de dimensões menores. Entendemos que o estudo das planificações das figuras espaciais é importante para o desenvolvimento de representações mentais e permite explorar características das fronteiras das figuras espaciais, mas, ao conceitualizar as figuras, precisamos diferenciar que a planificação feita de uma figura espacial não é uma figura espacial e que o conjunto de figuras planas que formam a planificação (quando é possível fazê-la) não constituem uma figura espacial, formando apenas a fronteira dela.

Esta diferença é percebida quando associamos figuras às grandezas que podem ser medidas através delas: figuras unidimensionais definem um comprimento, figuras planas definem uma área e figuras espaciais definem um volume. Embora existam relações que permitam calcular a área de uma figura a partir de alguns comprimentos, e o volume a partir de comprimentos e/ou área, uma união finita de regiões que possuem uma área não forma uma região que delimita um volume.

As representações das fronteiras das figuras espaciais são também importantes, pois permitem discutir a planificação da superfície das figuras espaciais, que também deve ser diferenciada das figuras em si.

Quadro 13: Discussões plenárias sobre planificações.

PL.263	Gabriel	Isso é a casca do cilindro, porque o cilindro em si ele tem
PL.264		volume, isso aqui não.
PL.265	Mário	Mas isso é um retângulo.
PL.266	Alberto	Isso não é a casca do cilindro, são dois círculos…
PL.267	Vários	E um retângulo.
PL.268		(...)
PL.269	Gabriel	Mas então, se você dobrar e "coisar"...
PL.270	Paula	Então, mas é essa a questão, você está deformando a figura.
PL.271		Você está transformando-a em outra coisa.

Fonte: produzido pelo autor

Os futuros professores revelam conhecer que a planificação é uma representação da fronteira de uma figura espacial (KoTr6), ao diferenciarem a planificação da fronteira da figura (PL263). Eles reconhecem que a figura espacial possui um volume e, dessa forma, a fronteira da figura determina um volume (PL264), mas que a representação da planificação não possui tais características, pois é um objeto plano.

Por outro lado, também diferenciam a planificação das figuras planas em si, pois a planificação da fronteira de um cilindro pode ser constituída de um retângulo e dois círculos, porém estas figuras devem ser dispostas de uma forma específica para que consigam formar a figura original (SOUZA; MORETTI; AUMOULOUD, 2019) e diferenciam das figuras planas nesse aspecto (KoTr7).

Nestes exemplos, são feitas as distinções entre o objeto em si e uma alteração deste objeto para que ele possa estar contido em um único plano. As características dos objetos não serão as mesmas das duas situações, pois por exemplo a planificação da fronteira de uma pirâmide só terá capacidade quando for “montada” e formar a fronteira da mesma.

CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve como questão principal "*Que conhecimento matemático é revelado por futuros professores de matemática sobre a diferenciação de figuras planas e figuras espaciais em um contexto de rotação e revolução de figuras geométricas*"? Tal questão foi abordada a partir das seguintes subquestões:

(i) Que conhecimento matemático revelam futuros professores de matemática na conceituação de figuras planas e espaciais?

(ii) Que conhecimento matemático revelam futuros professores de matemática sobre rotações e revoluções de figuras geométricas?

(iii) Que conhecimento matemático é revelado por futuros professores de matemática sobre as características de figuras planas e espaciais percebidas através de rotação e revolução de figuras?

Passamos às respostas destas subquestões, iniciando pela primeira, a partir do conhecimento revelado no tópico de figuras geométricas. O conhecimento revelado pelos futuros professores encontra-se sintetizado no quadro a seguir, sendo agrupado por subdomínios do MTSK.

Quadro 14: Conhecimento revelado no tópico de figuras geométricas.

Subdomínio	**Categoria**	**Descritores de conhecimento**
KoT	**Definitions, Properties and foundations**	KoTp1: conhecer que figuras planas estão contidas em um plano
		KoTp2: conhecer que figuras planas possuem duas dimensões
		KoTp3: conhecer que figuras planas possuem uma fronteira
		Kotp4: conhecer que a fronteira das figuras planas delimita uma superfície com área
		KoTp5: conhecer que a fronteira de uma figura plana é delimitada por linhas
		KoTp6: conhecer que figuras planas são superfícies
		KoTp7: conhecer que figuras espaciais não estão contidas em um único plano
		KoTp8: conhecer que figuras espaciais possuem três dimensões
		KoTp9: conhecer que a fronteira das figuras espaciais delimita uma região com volume definido
		KoTp10: conhecer que a fronteira de figuras espaciais é formada por superfícies
		KoTp20: conhecer que uma superfície possui uma área definida

		KoTp21: conhecer que figuras espaciais possuem um volume definido
		KoTp22: os pontos que constituem a figura plana são contínuos no plano onde a figura está contida
		KoTd1: conhecer um contraexemplo de figuras planas
		KoTd2: conhecer exemplos de figuras planas
		KoTd3: conhecer que figuras planas são formadas pela sua fronteira e seu interior
		KoTd4: conhecer exemplos de figuras espaciais
		KoTd5: conhecer que as figuras geométricas são formadas pela sua fronteira e seu interior
		KoTd19: conhecer a diferenciação entre figuras constituídas somente pela sua fronteira ou pela sua fronteira e interior
		KoTd20: reconhecer exemplos de figuras abertas
		KoTd21: conhecer exemplos de figuras não convexas
		KoTd22: conhecer exemplos de figuras que possuem volume definido
		KoTd23: conhecer exemplos de objetos tridimensionais
		KoTd24: conhecer exemplos de figuras que possuem uma área definida
		KoTd25: conhecer exemplos do que não seria uma figura espacial
	Register of representation	KoTr4: conhecer a representação de uma figura plana por meio de modelo tridimensional
		KoTr5: conhecer a representação de uma figura espacial por meio de um modelo tridimensional
		KoTr6: conhecer que a planificação é uma representação da fronteira de uma figura espacial

Fonte: acervo da pesquisa

Na subcategoria *properties,* foram encontrados 13 descritores de conhecimento associados ao espaço em que as figuras planas e espaciais estão contidas e o fato de serem objetos limitados (EUCLIDES, 2009), e também relacionadas às grandezas que podem ser associadas a cada tipo destas figuras (LIMA et al., 2011). Dessa forma, foi possível estabelecer, independentemente do conceito figural abordado, que a fronteira de uma figura plana determina uma região com uma área (não nula), e a fronteira da figura espacial determina uma região com volume (não nulo). Na subcategoria *definitions*, foram encontrados 12 descritores de conhecimento associados ao conceito figural das figuras planas e espaciais (como definir se são abertas ou fechadas, se são preenchidas ou não preenchidas), bem como identificação de exemplos e contraexemplos de figuras com determinadas características (como figuras planas, figuras convexas e figuras abertas).

Desta forma, foi possível explicitar o conceito empregado em cada grupo para descrever figuras planas e espaciais, alguns grupos ao descrevê-las espontaneamente; já outros, a partir do momento em que se depararam com representações de partes destas figuras.

Na categoria *register of representation*, foram encontrados 3 descritores do conhecimento associados ao uso de modelos tridimensionais para representar figuras geométricas planas e espaciais (PARZYSZ, 1988), bem como à possibilidade de planificação da fronteira de figuras espaciais (SOUZA; MORETTI; AUMOULOUD, 2019).

A partir deste tópico, podemos perceber a relevância da pesquisa em descrever o conhecimento da categoria *definitions, properties and foundations* do KoT, o que é de suma importância para tópicos ainda pouco explorados em pesquisas com foco no conhecimento do professor, mas que também sugere necessidade de investigações com foco em outras categorias e subdomínios para um melhor entendimento deste tópico.

Para responder à subquestão (ii) de pesquisa, faz-se necessário discutir o conhecimento revelado nos tópicos de rotação de figuras geométricas e revolução de figuras geométricas, os quais foram organizados no quadro a seguir.

Quadro 15: Conhecimento revelado nos tópicos de rotação e revolução de figuras geométricas.

Tópico: Rotação de figuras geométricas		
Subdomínio	**Categoria**	**Descritores de conhecimento**
KoT	**Definitions, Properties and foundations**	KoTp11: conhecer que as imagens iniciais e finais de uma rotação no plano estão em um mesmo plano
		KoTp12: conhecer que a rotação pode ser feita através de um sistema de referência como o plano cartesiano, a partir de uma matriz de rotação
		KoTp14: conhecer que a rotação possui uma origem
		KoTp15: conhecer que a imagem final de uma rotação é congruente à imagem inicial
		KoTp16: conhecer que a origem da rotação no espaço é uma reta
		KoTd6: conhecer exemplos de rotação de figuras planas no plano
		KoTd7: conhecer o exemplo da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano

		KoTd8: conhecer um exemplo da rotação de 45º de um quadrado no plano
		KoTd9: conhecer que a elipse é uma figura plana que pode ser rotacionada
		KoTd11: conhecer que a origem da rotação no plano é um ponto
		KoTd12: conhecer que a origem de uma rotação no espaço é uma reta
		KoTd14: conhecer exemplos de rotação no espaço de figuras espaciais
		KoTd16: conhecer que é possível realizar uma rotação no espaço em torno de um ponto
		KoTd17: conhecer que é necessário definir um ângulo para a rotação no espaço
		KoTd18: conhecer a rotação de figuras planas no espaço
	Phenomenology and applications	KoTph1: conhecer que a rotação está ligada ao ato de girar
	Register of representation	KoTr1: conhecer uma notação para representar os vértices correspondentes de figuras planas em uma rotação no plano
		KoTr2: conhecer uma notação para representar o movimento de giro em uma rotação no plano
		KoTr3: conhecer uma representação para rotação de figuras planas no espaço
	Procedures	KoTpc1: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano
		KoTpc2: conhecer o resultado da rotação de 45º de um quadrado no plano
		KoTpc3: conhecer que ao unir os vértices das imagens iniciais e finais de figuras planas regulares rotacionadas obtemos nova figura regular com o dobro de vértices
Tópico: Revolução de figuras geométricas		
Subdomínio	**Categoria**	**Descritores de Conhecimento**
KoT	**Definitions, Properties and foundations**	KoTp13: conhecer que a origem para revolução de figuras planas é uma reta;
		KoTp17: conhecer que a origem da revolução de figuras geométricas é fixa
		KoTp18: conhecer que a distância entre a figura geométrica e o eixo de revolução é mantida
		KoTp19: conhecer que o plano que contém a figura plana formada pela revolução de um ponto é perpendicular ao eixo de revolução
		KoTd10: conhecer exemplos de figuras que podem ser geradas a partir da revolução de uma figura plana

		KoTd13: conhecer a revolução de figuras planas
	Procedures	KoTpc4: conhecer que o resultado da revolução de um triângulo pode ser um cone.
		KoTpc5: conhecer que a revolução de um retângulo pode gerar um cilindro
		KoTpc6: conhecer que a revolução de figuras planas pode gerar um sólido
		KoTpc7: conhecer que a revolução de um retângulo pode ser um cilindro vazado
		KoTpc8: conhecer que a revolução de um segmento de reta não paralelo ao eixo de revolução pode formar parte da superfície de um tronco de cone
		KoTpc9: conhecer o resultado da revolução de uma linha curva e aberta sem interseção com o eixo de revolução

Fonte: acervo da pesquisa.

No tópico de rotação de figuras geométricas, encontramos 22 descritores de conhecimento, dos quais quatro foram na categoria *properties*, indicando o conhecimento das características de rotação, como ser uma isometria (RESENDE, QUEIROZ, 2008). Na categoria *definitions*, foram encontrados 10 descritores tratando sobre exemplos de figuras que podem ser rotacionadas e condições necessárias para se realizar uma rotação (WAGNER, 2007).

Completando o subdomínio KoT, foi encontrado um descritor na categoria *phenomenology and applications* associado à natureza do ato de rotacionar; na categoria *register of representation*, temos três descritores acerca de notações usadas para representar uma rotação e, na categoria *procedures*, temos outros dois descritores sobre o resultado final da rotação em alguns exemplos dados.

No tópico de revolução de figuras geométricas, encontramos 12 descritores de conhecimento, todos no subdomínio do KoT. Na categoria *properties*, foram encontrados quatro descritores acerca da relação da figura com o eixo de revolução. Na categoria *definitions*, identificamos dois descritores relativos a conhecer exemplos e reconhecer um exemplo de revolução de figuras (VINNER, 2002). E, na categoria *procedures*, encontramos7 descritores, principalmente associados a reconhecer a figura formada por revolução (DOLCE; POMPEO, 1995)

Assim como no tópico de figuras geométricas, houve uma concentração dos descritores nas categorias do subdomínio KoT, ressaltando também uma necessidade de ampliar as investigações para outros subdomínios, mas, por outro lado, reforçando a importância desse subdomínio para iniciar as descrições do conhecimento especializado para estes tópicos ainda pouco explorados com essa perspectiva de investigação.

Para responder à terceira questão de pesquisa (iii) Que conhecimento matemático é revelado por futuros professores de matemática sobre as características de figuras planas e espaciais percebidas através de rotação e revolução de figuras? foi possível observar que a revolução de figuras geométricas teve seu papel notadamente nas discussões da Parte I da tarefa e discussão plenária, quando houve a discussão principalmente em dois focos: (i) a alteração das propriedades que definem figuras planas e espaciais, como nos Grupo 2 (Quadro 9) e Grupo 3 (Figura 23), em que houve necessidade de acrescentar a característica que figuras espaciais definem um volume (KoTp21) para reconhecer este tipo de figura, ou que objetos abertos, como a superfície lateral de um cone ou um cilindro, não configuram em si como uma figura espacial, mas sim uma representação de parte da fronteira de uma; e (ii) o uso de exemplos não convencionais para fomentar a discussão dos conceitos de figuras planas e espaciais, como no Grupo 1 (Figura 22) e parte da discussão plenária (quadros 13, 14 e 15), quando foi possível verificar que superfícies abertas não estão descritas na definição de figuras planas do Grupo 1 (que considerava como condição necessária estar contido em um plano – Figura 6), bem como foi responsável por propiciar a discussão entre a possibilidade de a fronteira de uma figura espacial, ou parte dela, ser planificável e, por conta disso, ser uma figura plana ou espacial, a depender do conceito figural considerado.

Dessa forma, foi possível perceber que a relação entre os tópicos de figuras geométricas e revolução de figuras geométricas também permite discutir amplamente o conhecimento do professor associado aos conceitos destas figuras (FISCHBEIN, 1993; VODUŠEK; LIPOVEC, 2014), atingindo de forma satisfatória o terceiro objetivo desta pesquisa.

Ressaltamos também a potencialidade do modelo MTSK como modelo teórico para a construção de tarefas com foco em desenvolver e analisar o conhecimento especializado do professor, e como ferramenta analítica para identificar e explicitar o conhecimento especializado do professor nos tópicos matemáticos abordados, bem como a contribuição do uso de descritores de conhecimento para tal descrição e refinamento (ZAKARYAN; RIBEIRO, 2018; RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021).

Algumas questões que emergiram do trabalho e permitem uma investigação futura sobre o conhecimento especializado nestes tópicos são:

(i) Como se caracteriza o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) para o tópico de figuras geométricas?

(ii) Quais as conexões entre as propriedades utilizadas para caracterizar figuras planas e figuras espaciais?

(iii) Como se dá o processo de definição de figuras geométricas específicas, como cubos, pirâmides e esferas?

(iv) Quais são as condições necessárias e suficientes para se realizar cada tipo de rotação de figuras geométricas?

REFERÊNCIAS

ANDRADE, M.; MONTECINO, A. La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. Actas del XIII CIAEM-IACME, 2011.

ANDRÉ, M. E. D. A. Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional. Brasília: Liber Livros, 2008. 68 p. (Série Pesquisa: Vol. 13).

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. . Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n.5, p.389–407, 2008.

BARROS, R. M. O.; SAMPAIO, H. R. O conhecimento matemático sobre os descritores "espaço e forma" de licenciandos em um curso de pedagogia na modalidade a distância: resultados parciais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 3, n. 4, p. 203-222, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 10 volumes, 1997.BRASIL, 1997

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2018.

CARNOY, Martin; ARENDS, Fabian. Explaining mathematics achievement gains in Botswana and South Africa. **Prospects**, v. 42, n. 4, p. 453-468, 2012.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Matheatics Education**, p. 236–256, 2018.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Geometry and spatial reasoning. **Handbook of research on mathematics teaching and learning,** v. 420, p. 464, 1992.

CLIMENT, N.; CARREÑO, E.; RIBEIRO, M. Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. 2014.

DANTAS, Sérgio Carrazedo; MATHIAS, Carmen Vieira. Formas de revolução e cálculo de volume. **Ciência e Natura**, v. 39, n. 1, p. 142-155, 2017.

DE VILLIERS, M. To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1998, Durban. **Anais**… v.. 2, p. 248-255, 1998.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria analítica. Rio de Janeiro: **SBM**, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Geometria espacial, posição e métrica. **Coleção Fundamentos de Matemática Elementar**, v. 10, 1995.

DUMONT, Armando Horta; BAIRRAL, Marcelo Almeida. Um estudo com professoras ensinando poliedros e corpos redondos em sua turma de 4ª série/A study with teachers teaching polyhedron and round bodies in their 4th grade classes. **Acta Scientiae**, v. 10, n. 1, p. 68-83, 2008.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Peter Lang, 2004.

DUVAL, R., MORETTI Trad M. T. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

ESCUDERO-DOMÍNGUEZ, A.; CARRILLO, J. Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. 2014. **Investigación en educación matemática**. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, p. 267 - 276, 2014, Salamanca.

ESCUDERO, I. M.; GAVILÁN, J. M.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 17, n. 1, p. 7-32, 2014.

EUCLIDES, A. Elementos. Ed. UNESP, tradução e introdução de Irineu Bicudo, São Paulo, 2009.

FIORENTINI, Dario. Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, 2012.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T.C. C.. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, p. 917-938, 2013.

FISCHBEIN, E., “The Theory of figural concepts”, **Educational Studies in Mathematics**, 24, pp. 139-162, 1993.

FLORES MEDRANO, E. et al. A theoretical review of specialised content knowledge. 2013.

FLORES-MEDRANO, E. Conocimiento de la práctica matemática (KPM). **Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva**, p. 30-34, 2016.

FREUDENTHAL, H. Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel, 1973.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, v. 31, p. 1355-1379, 2010.

GOMES, A. Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores, 2012.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers’ MKT when interpreting pupils’ productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, Aarhus, n. 3-4, v. 19, p. 135-150, 2014.

LIMA, E. L. Análise real: funções de uma variável. **IMPA, Coleção Matemática Universitária**, v. 13, 2007a.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2007b.

LIMA, E. L. et al. **Medida e forma em geometria**. IMPA/VITAE, 2011.

LIMA, E. L.. **Álgebra linear**. 2020.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, v. 3, p. 3-13, jan./jun. 1995.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S.. Geometrias: as concepções de um grupo de professores de matemática. In: **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática**. 2015.

MAMONA-DOWNS, J. Accessing Knowledge for Problem Solving. In I. Vakalis, D. Hughes-Hallet, et al. (Compilers), **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (At the Undergraduate Level)**, Crete Univ., Iraklion, Greece. New York: John Wiley 2002.

MEIRELES, D. M. **Conhecimento especializado de futuros professores da Educação Infantil e Anos Iniciais no âmbito da planificação de figuras geométricas espaciais**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática—Brasil: Universidade de Campinas, 2021.

NIETO, R. Z.; BAIRRAL, M. A. " Poliedro é um sólido, correto?": um estudo com graduandos interagindo em um chat sobre a definição de poliedro. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 19, p. 73-88, 2013.

PARZYSZ, Bernard. “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational studies in mathematics**, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Zetetiké, Campinas, SP, v. 1, n. 1, p. 7–18, 1993.

POLICASTRO, M. **Conhecimento especializado do professor nos tópicos de divisão e do tema de Medida: abordagem para uma teorização de conexões matemáticas**. Tese de Doutorado em Educação Matemática—Brasil: Universidade de Campinas, 2021.

RESENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Editora da UNICAMP, 2008

RIBEIRO, M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. Cognições e tipo de comunicação do Professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 15(1), P. 93-121, 2012.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A. R.; MELLONE, M. Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. **PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** v.14, p.1 - 32, 2021.

RIBEIRO, M.; GIBIM, G.; ALVES, C. A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: Discussão de Tarefas para a Formação e o

Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-24, 24 mar. 2021.

SEMMER, Simone; DA SILVA, Sani de Carvalho Rutz; NEVES, Marcos Cesar Danhoni. Anamorfose no ensino de geometria. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 3, p. 61-86, 2013.

SOUZA, V. H. G.; GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, W. R. S. REPRESENTAÇÕES BIDIMENSIONAIS DE FIGURAS TRIDIMENSIONAIS: UM ESTUDO COM A VISUALIZAÇÃO. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 7, n. 1, 2014.

SOUZA, R. N. S., MORETTI, M. T., ALMOULOUD, S. A. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas The learning of Geometry focusing on dimensional deconstruction of forms. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.** v. 21, n. 1, p. 322-346, 2019.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, v. 15, n. 2, p. 4-1, 1986.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review,** Harvard, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

STAKE, R. Qualitative Case Studies. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.). . **The sage Handbook of Qualitative Research**. 2ª ed. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2005. p. 443–466.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics wiht particular reference to limits and continuity. **Educational Studes in Mathematics**, v. 12, p. 151–169, 1981.

TURNER, F.; ROWLAND, T. The knowledge quartet as an organizing framework for developing and deepenening teacher´s knowledge. In: ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Eds.). . **Mathematical knowledge in teaching.** Dordrecht: Springer, 2011. v. 50p. 195–212.

VAN DORMOLEN, J.; ZASLAVSKY, O. The many facets of a definition: The case of periodicity. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 22, n. 1, p. 91-106, 2003.

VASCONCELLOS, M. A diferenciação entre figuras geométricas não-planas e planas: o conhecimento dos alunos das séries iniciais do ensino fundamental e o ponto de vista dos professores. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 16, n. 2, 2008. VASCONCELLOS, 2008

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Ed.). . **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2002. p. 65–81.

VODUŠEK, Helena Bezgovšek; LIPOVEC, Alenka. The square as a figural concept. **Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 48, p. 430-448, 2014.

WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. Q. **Construções geométricas**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

ZAKARYAN, D.; RIBEIRO, M. Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. **Research in Mathematics Education**, v. 21, n. 3, p. 1–19, 2018.

ZAZKIS, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of a square. **Educational Studies in Mathematics**, v. 69, n. 2, p. 131–148, 1 out. 2008.

APÊNDICES

APENDICE A – TpF “figuras espaciais e rotações”

Figuras Espaciais e Rotações

Parte I

1) a) O que são figuras geométricas bidimensionais? Dê um exemplo.

b) O que são figuras geométricas tridimensionais? Dê um exemplo.

2) a) Podemos rotacionar figuras bidimensionais?

b) E figuras tridimensionais?

c) Para os dois itens anteriores, responda:

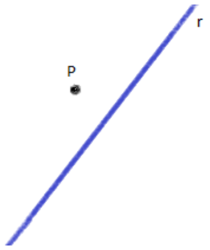
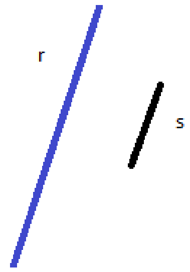
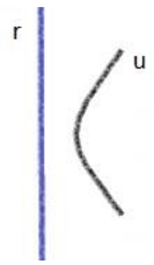
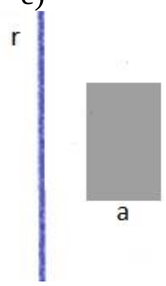
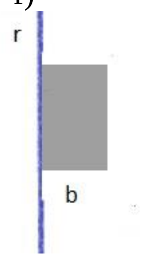
- De quais elementos precisamos para fazer uma rotação?
- O que foi formado a partir da rotação das figuras acima?

Parte II

Considere a tarefa seguinte e resolva-a como você mesmo:

Tarefa: Vamos Rotacionar?

Em cada um dos itens abaixo, represente a figura formada a partir de todas as imagens geradas pela rotação das figuras a partir do eixo “r” e descreva, por escrito, o que são essas figuras formadas:

a)  	b)  	c) 
d)  	e)  	f) 

3) Quais podem ser as principais dificuldades para resolver a tarefa anterior de alunos:

- Do 7º ano do ensino fundamental?
- Do 2º ano do Ensino Médio?

4) Esboce duas produções incorretas de alunos para algum dos itens da tarefa “Vamos Rotacionar”, uma de alunos do 7ºano, e outra de alunos do 2ºano do Ensino Médio.

5) Qual(is) da(s) figura(s) anteriores são tridimensionais? Justifique.

6) Em geral, quando a figura formada por uma rotação é espacial? Justifique.

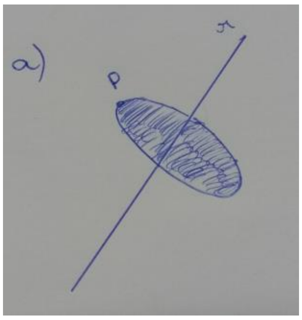
Parte III

7) O professor Sérgio aplicou a tarefa “Vamos rotacionar?” com seus alunos do 7ºano, e obteve algumas resoluções mostradas a seguir. Para cada uma das respostas, escreva:

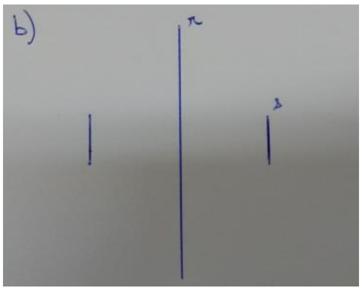
a) Qual foi o raciocínio empregado pelo aluno, e se ele é matematicamente adequado ou não.

b) Forneça um *feedback* construtivo aos alunos (mais do que dizer se está correto ou incorreto ao professor cumpre dar sentido às resoluções dos alunos de modo a que os possa posteriormente auxiliar na construção do seu conhecimento matemático)

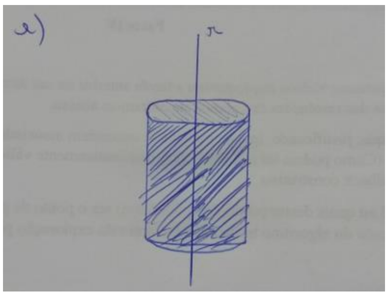
Aline



João



Matheus



ANEXOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Conhecimento Especializado de Futuros Professores de Matemática sobre Figuras Geométricas Espaciais
Marcos Paulo De Oliveira
Número do CAAE: 00803018.9.0000.8142

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

O objetivo geral do projeto é investigar o conhecimento especializado do futuro professor de matemática ao conceitualizar Figuras Geométricas Espaciais. Formulamos 3 objetivos secundários de acordo com os subdomínios do modelo MTSK considerados na pesquisa para nos ajudar a responder ao objetivo principal: (1) Investigar o conhecimento especializado revelado os futuros professores na diferenciação entre figuras planas e espaciais através de transformações geométricas; (2) Investigar o conhecimento especializado revelado por futuros professores para representar de diferentes formas as figuras espaciais num plano; (3)Investigar o conhecimento especializado revelado por futuros professores ao construir e definir pirâmides e cones.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: participar da aplicação de 3 tarefas sobre o tema Figuras Geométricas Espaciais. As informações será coletada por meio da aplicação das tarefas desenhadas para desenvolver o conhecimento especializado nos tópicos.

As tarefas abordam os seguintes temas: 1) a diferenciação entre figuras planas e espaciais através de transformações geométricas; 2) discutir diferentes representações de figuras espaciais num plano; 3) construir e definir pirâmides e cones. Utilizaremos gravações de áudio e vídeo da resolução e socialização das tarefas e as produções escritas dos futuros professores, bem como anotações do pesquisador.

Desconfortos e riscos:

Você **não** deve participar deste estudo se não quiser que suas gravações e tarefas não sejam usadas na pesquisa. A pesquisa não apresenta riscos previsíveis para os sujeitos. A fim de manter o sigilo a pessoa, usaremos nomes fictícios para todos os participantes.

Benefícios:

Com este estudo buscamos aprimorar as perspectivas de discussão do conhecimento matemático especializado na formação inicial dos professores, buscando identificar tópicos mais problemáticos no que diz respeito às figuras geométricas espaciais. Visamos neste processo o aprimoramento das tarefas para a formação de professores com a perspectiva de desenvolver os subdomínios do conhecimento do professor ligados à prática matemática e ao conhecimento sobre a aprendizagem de alunos. Além disso, buscamos investigar quando o conhecimento pedagógico do conteúdo sobre os conteúdos são construídos na formação inicial dos professores, visando perspectivar uma articulação maior entre conhecimento matemático e conhecimento pedagógico do conteúdo na formação inicial de professores de matemática.

Acompanhamento e assistência:

O pesquisador fará o acompanhamento durante todo o semestre da disciplina com participantes da pesquisa. Os dados coletados na pesquisa serão armazenados com o pesquisador por, pelo menos, cinco anos após a finalização da mesma e disponíveis para acesso aos sujeitos participantes.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Os nomes usados na pesquisa serão fictícios e as filmagens e gravações de voz realizados na pesquisa não serão divulgados.

Ressarcimento e Indenização:

Você terá a garantia ao direito a indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Marcos Paulo De Oliveira, pelo telefone (18)996328535, ou pelo e-mail marcosp_oliveira_@hotmail.com.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais (CEP-CHS) da UNICAMP das 08:30hs às 11:30hs e das 13:00hs as 17:00hs na Av. Betrand Russell, 801, 2º Piso, Bloco C, Sala 5, CEP 13083-865, Campinas – SP; telefone 19 3521-6836 ; e-mail: cepchs@reitoria.unicamp.br .

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP).

O papel do CEP é avaliar e acompanhar os aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos. A Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP), tem por objetivo desenvolver a regulamentação sobre proteção dos seres humanos envolvidos nas pesquisas. Desempenha um papel coordenador da rede de Comitês de Ética em Pesquisa (CEPs) das instituições, além de assumir a função de órgão consultor na área de ética em pesquisas

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do (a) participante:

____

Contato telefônico:

____

e-mail (opcional):

____

____ Data: ____/_____/______.

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

____ Data: ____/_____/______.

(Assinatura do pesquisador)