



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy - Aplicações em Biomatemática.

Moiseis dos Santos Ceconello

Doutorado em Matemática Aplicada

Orientador: **Rodney Carlos Bassanezi**

Coorientador: **Adilson J. V. Brandão**

Trabalho financiado pelo CNPq

Campinas - SP
Fevereiro de 2010

Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy - Aplicações em Biomatemática

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Moiseis dos Santos Ceconello** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de fevereiro de 2010.



Prof. Dr. **Rodney Carlos Bassanezi**
Orientador



Prof. Dr. **Adilson J. V. Brandão**
Coorientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice (UFU)
Prof. Dr. Claudio José Von Zuben (UNESP - Rio Claro)
Prof. Dr. Marat Rafikov (UFABC)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8 / 8509

Ceconello, Moiseis dos Santos

C323s Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy - aplicações em biomatemática/Moiseis dos Santos Ceconello-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientadores : Rodney Carlos Bassanezi; Adilson José Vieira Brandão.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos sistemas dinâmicos. 2. Conjuntos difusos. 3. Biomatemática. 4. Espaços métricos. 5. Órbitas periódicas. I. Bassanezi, Rodney Carlos. II. Brandão, Adilson José Vieira. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Dynamical systems in fuzzy metric spaces – applications in biomathematics

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Theory of dynamical systems. 2. Fuzzy sets. 3. Biomathematics. 4. Metric spaces. 5. Periodic orbits.

Área de concentração: Biomatemática

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (UFABC)
Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice (UFU)
Prof. Dr. Claudio José Von Zuben (UNESP – Rio Claro)
Prof. Dr. Marat Rafikov (UFABC)

Data da defesa: 19/02/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 19 de fevereiro de 2010 e aprovada

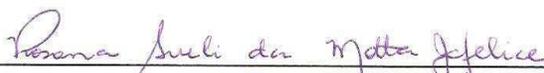
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



Prof(a). Dr(a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS



Prof(a). Dr(a). ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE



Prof(a). Dr(a). CLAUDIO JOSÉ VON ZUBEN



Prof(a). Dr(a). MARAT RAFIKOV

Para os meus pais.

Agradecimentos

Ao meu orientador Rodney pela amizade, orientação e companheirismo durante todos esses anos. Sou imensamente grato pelo voto de confiança.

Ao meu coorientador Adilson pela valiosa contribuição na elaboração deste trabalho.

Aos membros da banca pelas inúmeras sugestões que, certamente, contribuíram para a melhoria do trabalho.

Ao Paulinho e ao Geraldo, pois, juntamente com o Rodney, me possibilitaram esta conquista.

Ao Elias pela amizade e pelas caronas.

Aos meus amigos Olivaine, Stella, Mariana, Denise, Roy, Sabrina, Luiz Rafael, Jefferson, Bruno e Gabriel.

Agradecimentos especiais para a Chrys pelo carinho e compreensão.

E agradeço também meus familiares pelo fundamental apoio.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos ferramentas de análise qualitativa para sistemas dinâmicos definidos sobre o espaço formado pelos conjuntos fuzzy com α - níveis compactos e não vazios.

São propostas condições para existência de pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy cuja função de pertinência é sobrejetiva, generalizando alguns resultados já conhecidos. Os fluxos fuzzy considerados aqui são determinados pela extensão de Zadeh aplicada em soluções de equações diferenciais autônomas.

São obtidos também condições para a existência de pontos e órbitas periódicas para o fluxo fuzzy. Em particular, demonstramos um teorema tipo Poincaré-Bendixson para tais fluxos gerados por equações autônomas bidimensionais.

A análise qualitativa desenvolvida é aplicada em sistemas dinâmicos fuzzy provenientes de modelos significativos da Biomatemática.

Palavras chave: Sistemas dinâmicos; conjuntos fuzzy; biomatemática; espaços métricos; órbitas periódicas.

Abstract

In this work we develop some tools for qualitative analysis of dynamical systems defined on the metric space of fuzzy sets with compact and nonempty α - cuts.

Conditions are offered for the existence of equilibrium points for the flow whose fuzzy membership function is surjective, generalizing some results already known. Fuzzy flows considered here are determined by Zadeh's extension applied in solutions of autonomous differential equations.

We also obtained conditions for the existence of periodic points and periodic orbits for the fuzzy flow. In particular, we demonstrate a theorem like Poincaré-Bendixson for such flows generated by two-dimensional autonomous equations.

The qualitative analysis results are applied to fuzzy dynamic systems from meaningful models of Biomathematics.

Key words: Dynamical Systems; fuzzy sets; biomathematics; metric spaces; periodic orbits.

Sumário

Introdução	1
1 Equações autônomas e fluxos em espaços métricos	9
1.1 Introdução	9
1.2 Equações diferenciais autônomas	10
1.2.1 Soluções de equilíbrio	11
1.2.2 Soluções periódicas	17
1.3 Conjuntos atratores e convergência uniforme	27
1.4 Fluxos em espaços métricos	33
2 Conceitos básicos em lógica fuzzy	35
2.1 Introdução	35
2.2 Subconjuntos fuzzy	36
2.3 O subespaço $\mathcal{E}(X)$	41
2.4 Projeções em espaços métricos fuzzy	54
2.5 Conclusão	62
3 Fluxos fuzzy: pontos de equilíbrio e estabilidade	63
3.1 Introdução	63
3.2 Fluxos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$	64
3.3 Pontos de equilíbrio fuzzy	66
3.3.1 Parâmetros Fuzzy	77
3.4 Sobre o espaço de fase do fluxo fuzzy	84
3.5 Conclusão	89

4	Órbitas periódicas fuzzy e conjuntos invariantes	91
4.1	Introdução	91
4.2	Órbitas periódicas fuzzy	92
4.3	Conjuntos invariantes e atratores em $\mathcal{E}(U)$	114
4.4	Órbitas periódicas para fluxos em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$	127
4.5	Conclusão	130
5	Projeções e outras propriedades dos fluxos fuzzy	131
5.1	Introdução	131
5.2	Projeção do fluxo fuzzy	132
5.2.1	Parâmetros e condição inicial fuzzy	132
5.2.2	Projeção sobre os eixos coordenados	139
5.3	O fluxo fuzzy e a equação do transporte	143
5.4	Conclusão	147
6	Biomatemática e os fluxos fuzzy	149
6.1	Introdução	149
6.2	Modelos unidimensionais	150
6.2.1	Efeito Allee demográfico	150
6.2.2	Modelo Logístico generalizado	154
6.2.3	Modelo de von Bertalanffy generalizado	156
6.3	Modelos bidimensionais com condição inicial fuzzy	159
6.3.1	Modelo de Lotka - Volterra	159
6.3.2	Modelo de Holling - Tanner	161
6.4	Modelos com três variáveis de estado	163
6.4.1	Modelo de epidemiologia <i>SIR</i>	163
6.4.2	Dois predadores e uma presa	166
6.5	Conclusão	171
	Conclusão	173
	Referências Bibliográficas	175

Introdução

A modelagem matemática de fenômenos naturais, por meio de sistemas dinâmicos, pode estar sujeita a incertezas inerentes aos parâmetros das equações que descrevem tais fenômenos. Por exemplo, em problemas de dinâmica populacional nem sempre é possível saber exatamente a quantidade de indivíduos ou a capacidade suporte em uma determinada região. Também nem sempre é possível, por dificuldade técnica ou falta de informação, incorporar todas as leis necessárias para descrever o fenômeno estudado. Desta forma, a subjetividade é um importante fator que deve ser considerado na modelagem matemática.

Para fenômenos modelados por equações diferenciais, existem algumas alternativas de modelagem clássica que contemplam incertezas inerentes aos parâmetros e condições iniciais. Dentre as mais importantes se destacam as equações diferenciais estocásticas e a teoria de inclusões diferenciais.

O surgimento da teoria dos conjuntos fuzzy proposto por Zadeh (1965) trouxe novas ferramentas que possibilitam a incorporação de subjetividade em modelos que descrevem fenômenos reais, onde faltam informações sobre as leis ou há incertezas nos parâmetros do modelo que descrevem tal fenômeno. As subjetividades incorporadas através dos conjuntos fuzzy não necessariamente coincidem com as subjetividades via probabilidade (Nguyen, 1997). Neste trabalho nos limitamos ao estudo de problemas com subjetividades modeladas por conjuntos fuzzy. Desta forma, os adjetivos *fuzzy* e *subjetivo* são usados como sinônimos.

O desenvolvimento da teoria dos conjuntos fuzzy deu origem às equações diferenciais fuzzy, inicialmente introduzidas por Kandel e Byatt (1981). A partir de então, autores como Kaleva (1987) e Seikkala (1987) adotam o conceito de H - diferenciabilidade, desenvolvida por Puri e Ralescu (1983) a partir da derivada de Hukuhara para funções que

associam para cada ponto um conjunto, no estudo das equações diferenciais fuzzy.

As soluções de equações diferenciais fuzzy obtidas por meio da H - derivada apresentam a indesejável capacidade de aumentar a subjetividade quando o tempo cresce. Mesmo para o simples problema de decaimento radioativo, o diâmetro do suporte da solução fuzzy diverge quando $t \rightarrow \infty$ (Kaleva, 1987). Segundo Diamond (2000), esta formulação não é capaz de reproduzir o rico comportamento das equações diferenciais determinísticas tais como periodicidade, estabilidade e bifurcação, sendo assim inapropriada para a modelagem de problemas reais.

O estudo das equações diferenciais fuzzy pode também ser feito através da teoria de inclusões diferenciais. As soluções obtidas por esta abordagem, sugerida inicialmente por Hüllermeier (1997), são capazes de apresentar periodicidade, estabilidade e bifurcação (Vorobiev e Seikkala, 2002).

Há ainda uma terceira alternativa para o estudo de equações diferenciais fuzzy que consiste em considerar a extensão de Zadeh da solução da equação diferencial determinística. Tal extensão é denominada solução fuzzy da equação diferencial. Soluções fuzzy obtidas através da extensão de Zadeh sobre as soluções determinísticas foram discutidas inicialmente em Oberguggenberger e Pittschmann (1999) e Buckley e Feuring (2000). Este último trabalho tem uma comparação entre as soluções obtidas por diferentes definições de derivadas de funções fuzzy.

Mais recentemente, Mizukoshi (2004) estudou algumas propriedades das soluções fuzzy obtidas via extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_o \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

De acordo com Mizukoshi (2004), a solução fuzzy gerada pela equação acima satisfaz as propriedades de um semigrupo e portanto, tal solução pode ser vista como um fluxo sobre o conjunto formado por subconjuntos fuzzy de U . Mizukoshi (2004) também mostra que os subconjuntos fuzzy (ou pontos fuzzy) cuja função de pertinência são as funções características de pontos de equilíbrio da equação acima, são pontos estacionários para o fluxo fuzzy. Assim, os pontos de equilíbrio determinísticos para o fluxo determinístico determinam pontos de equilíbrio fuzzy para o fluxo fuzzy. Além disso, Mizukoshi (2004) mostra que sob certas condições a solução fuzzy, obtida pela extensão de Zadeh da solução determinística, coincide com a solução fuzzy obtida por inclusões diferenciais.

Em nosso trabalho, procuramos desenvolver ferramentas que tornem a análise qualitativa para soluções fuzzy, obtidas por extensão de Zadeh de soluções determinísticas, mais abrangente. Buscamos condições para existência e estabilidade de pontos de equilíbrio fuzzy cuja função de pertinência não é necessariamente a função características de pontos de equilíbrio determinísticos. Além disso, estudamos a existência e estabilidade de órbitas periódicas para o fluxo fuzzy. As generalizações de alguns resultados apresentado por Mizukoshi (2004) bem como os novos resultados que obtivemos são essenciais para o estudo de soluções fuzzy geradas por equações autônomas, como apresentaremos no Capítulo 6.

Segue abaixo uma descrição das informações contidas em cada um dos 6 capítulos deste trabalho.

O Capítulo 1 contém as principais ferramentas de análise qualitativa para solução de equações diferenciais autônomas e fluxos em espaços métricos. As condições para existência de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas estão nas Seções 1.2.1 e 1.2.2. A estabilidade de conjuntos invariantes bem como algumas condições para a convergência uniforme do fluxo determinístico são apresentadas na Seção 1.3. Além disso, na Seção 1.4 apresentamos alguns resultados de análise qualitativa para fluxos definidos sobre um espaço métrico qualquer. Este capítulo de resultados clássicos poderia ser dispensado se não fossem as frequentes chamadas em nossos resultados nos capítulos seguintes.

As principais definições e alguns importantes resultados sobre a teoria dos conjuntos fuzzy são apresentados no Capítulo 2 deste trabalho. Além de algumas definições, propriedades e operações com conjuntos fuzzy, na Seção 2.2 apresentamos uma versão generalizada do Teorema da Representação para subconjuntos fuzzy de um conjunto X . O Teorema da Representação, inicialmente proposto por Negoita e Ralescu (1975), é uma importante ferramenta para definições e operações com conjuntos fuzzy de X . Uma generalização deste teorema é apresentada em Ralescu (1992). Mais recentemente, Saidi e Jaballah (2008) estudaram algumas condições necessárias e suficientes que associam para cada família de subconjuntos de X um único subconjunto fuzzy de X . No entanto, em ambos os casos, os autores consideram que o 0 - nível de um subconjunto fuzzy de X é o próprio X . Na Proposição 2.2, mostramos que o teorema da representação também é válido para espaços topológicos, no qual o 0 - nível é definido como sendo o fecho do suporte do subconjunto fuzzy.

Na Seção 2.3, estudamos as principais propriedades do conjunto $\mathcal{E}(X)$. Este conjunto é

formado pelos subconjuntos fuzzy de X cujos α - níveis são compactos. Na Proposição 2.6, mostramos que $\mathcal{E}(X)$ determina um espaço métrico completo quando X é um espaço métrico completo. Nesta seção, apresentamos também o teorema de Nguyen generalizado para espaços topológicos. Assim como na versão original do teorema de Nguyen, apresentado primeiramente em Nguyen (1978), Fullér e Keresztfalvi (1991) também consideram que o 0 - nível de um subconjunto fuzzy de X é o próprio X . A demonstração de que o teorema de Nguyen é válido para o caso em que $X = \mathbb{R}^n$ e o 0 - nível é o fecho do suporte pode ser encontrada em Barros et al. (1997). Na Proposição 2.7 apresentamos a generalização deste resultado para espaços topológicos. Ainda nesta seção, mostramos que a extensão de Zadeh de uma função contínua é uma aplicação contínua quando X é um espaço métrico localmente compacto. Estes resultados, como os demais apresentados no Capítulo 2, são fundamentais para operações com conjuntos fuzzy e, em nosso caso específico, para a análise de soluções fuzzy.

Na Seção 2.4, mostramos ainda que a extensão de Zadeh da projeção ortogonal sobre os subespaços de \mathbb{R}^n pode ser vista como uma projeção sobre subespaços de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

No Capítulo 3 desenvolvemos ferramentas para análise qualitativa de fluxos fuzzy. Temos com principal objetivo generalizar algumas condições propostas por Mizukoshi (2004) e propor novas ferramentas para melhor compreender o comportamento assintótico de tais fluxos fuzzy. Para isso, estudamos condições para existência e estabilidade de pontos de equilíbrio não crisp.

No Exemplo 3.1 mostramos que o fluxo fuzzy gerado pelo modelo de epidemiologia SI (Murray, 2002) pode apresentar pontos de equilíbrio fuzzy cuja função de pertinência é sobrejetiva. Assim, as condições apresentadas por Mizukoshi (2004) podem ser generalizadas para tornar a análise qualitativa mais abrangente. Os procedimentos utilizados para mostrar a existência de tais pontos de equilíbrio para o Exemplo 3.1 podem ser aplicados em fluxos fuzzy gerados por equações autônomas quaisquer. As hipóteses que garantem a existência de pontos de equilíbrio fuzzy com função de pertinência sobrejetiva são sintetizadas no Teorema 3.6.

Na Proposição 3.8 mostramos como determinar pontos de equilíbrio para soluções fuzzy de equações que dependem de parâmetros incertos.

Na Subseção 3.4 do Capítulo 3 apresentamos uma breve discussão que diz respeito ao espaço de fase do fluxo fuzzy.

No Capítulo 4 estudamos o comportamento periódico da solução fuzzy. A periodicidade do fluxo fuzzy é analisada na Seção 4.2 daquele capítulo. Como ilustramos no Exemplo 4.1, o fluxo fuzzy gerado por uma simples equação diferencial linear pode apresentar periodicidade e assim, buscamos inicialmente condições para a existência de pontos periódicos para o fluxo fuzzy. Os Teoremas 4.1, 4.2 e 4.5 caracterizam, de diferentes maneiras, os pontos periódicos fuzzy. Através destes teoremas, vemos que a existência de pontos periódicos para o fluxo determinístico é uma condição necessária e suficiente para a existência de pontos periódicos, crisp ou não, para o fluxo fuzzy. Cada ponto periódico fuzzy gera uma órbita periódica para o fluxo fuzzy e a estabilidade de tais órbitas periódicas fuzzy são também estudadas na Seção 4.2. Cada órbita periódica determinística gera um conjunto de pontos periódicos fuzzy que é invariante, fechado e limitado. Denominamos este conjunto por conjunto periódico fuzzy. No Teorema 4.9 mostramos a relação existente entre a estabilidade de órbitas periódicas determinísticas e a estabilidade dos conjuntos periódicos fuzzy formados por tais órbitas determinísticas. Ainda na Seção 4.2, mostramos que a existência de órbitas periódicas determinísticas assintoticamente estáveis é condição suficiente para a convergência do fluxo fuzzy para uma órbita periódica fuzzy.

Com o objetivo de tornar a análise qualitativa do fluxo fuzzy mais abrangente, ainda no Capítulo 4, estudamos a existência e a estabilidade de conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy. Alguns dos resultados que desenvolvemos na Seção 4.3 generalizam os resultados das seções anteriores. Em alguns casos, como no modelo fuzzy presa - predador do tipo Lotka - Volterra, estes resultados são essenciais para a análise qualitativa da solução fuzzy.

Para finalizar o Capítulo 4, na Seção 4.4 restringimos a análise qualitativa para fluxos fuzzy gerados por equações autônomas bidimensionais. Os resultados desenvolvidos nas seções anteriores são utilizados para mostrar uma afirmação semelhante ao teorema de Poincaré - Bendixson para o fluxo fuzzy.

No Capítulo 5 apresentamos algumas outras propriedades do fluxo fuzzy. Na Seção 5.2 do Capítulo 5 tratamos da projeção, em subespaços do domínio, do fluxo fuzzy gerado por uma equação autônoma. Em particular, estudamos a projeção do fluxo fuzzy sobre os eixos coordenados. Através das projeções sobre os eixos coordenados é possível observar o comportamento, ao longo do tempo, do fluxo fuzzy gerado por sistemas de equações autônomas para dimensões $n \geq 2$.

Na Seção 5.3 estudamos a relação existente entre a função de pertinência do fluxo

fuzzy e a solução da equação diferencial parcial

$$u_t + f(x)u_x = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times U,$$

com condição inicial $u_o : U \rightarrow U$. Mais precisamente, na Proposição 5.4 mostramos que função de pertinência do fluxo fuzzy é a solução da equação parcial acima, quando $u_o(x)$ é a função de pertinência do estado inicial do fluxo fuzzy.

Para todos os resultados desenvolvidos nos Capítulos 3, 4 e 5, apresentamos exemplos para ilustrar a aplicação da teoria desenvolvida e enfatizar as condições em que tais resultados podem ou não ser aplicados.

No Capítulo 6 aplicamos as ferramentas de análise qualitativa desenvolvida nos Capítulos 3, 4 e 5 no estudo de fluxos fuzzy gerados por algumas importantes equações da Biomatemática. Consideramos neste capítulo modelos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

Na Seção 6.2 analisamos qualitativamente os fluxos fuzzy gerados pelo modelo que descreve o efeito Allee e os modelos logístico generalizado e von Bertalanffy generalizado. Inicialmente, a análise é feita sob a hipótese de incerteza envolvida apenas na condição inicial. Em seguida, consideramos também o caso em que os parâmetros também são fuzzy.

Os fluxos fuzzy gerados pelos modelos bidimensionais de Lotka - Volterra e Holling - Tanner são estudados na Seção 6.3. Para estes modelos, consideramos apenas os casos em que a condição inicial é fuzzy.

Como sabemos, a solução determinística do modelo presa - predador de Lotka - Volterra é periódica para qualquer condição inicial. Isto é, todo ponto do domínio do fluxo determinístico é um ponto periódico. A grande dificuldade na análise do fluxo fuzzy gerado pelo modelo de Lotka - Volterra, reside no fato de que distintas órbitas periódicas determinísticas apresentam distintos períodos. Assim, embora para determinadas condições iniciais fuzzy o fluxo fuzzy também apresente periodicidade, de maneira geral, não podemos dizer que um ponto no domínio do fluxo fuzzy seja periódico.

O comportamento do fluxo determinístico gerado pelo modelo presa - predador de Holling - Tanner depende da condição inicial e dos parâmetros. Para certos valores de parâmetros, o fluxo determinístico converge globalmente para um ponto de equilíbrio não nulo. Neste caso, o fluxo fuzzy também admite um ponto de equilíbrio fuzzy globalmente

assintoticamente estável. O fluxo determinístico pode também apresentar uma ou mais órbitas periódicas sendo ao menos uma delas assintoticamente estável. Assim, a convergência do fluxo fuzzy para órbitas periódicas fuzzy pode depender da condição inicial tomada.

Para finalizar o Capítulo 5, apresentamos na Seção 6.4 dois modelos tridimensionais: o modelo de epidemiologia *SIR* e um modelo para a interação entre uma presa e dois predadores. Em ambos, consideramos apenas o caso em que a condição inicial é fuzzy. O fluxo fuzzy gerado por tais modelos admite pontos de equilíbrio cuja função de pertinência é sobrejetiva.

Para todos os modelos analisados no Capítulo 5 apresentamos simulações numéricas para ilustrar graficamente o comportamento do fluxo fuzzy gerado por tais modelos. Para os modelos bidimensionais e tridimensionais fazemos uso dos resultados sobre projeções desenvolvidos nos Capítulos 2 e 5.

Capítulo 1

Equações autônomas e fluxos em espaços métricos

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos as principais definições e resultados que são fundamentais para descrever o comportamento das soluções de equações diferenciais autônomas, definidas sobre algum subconjunto aberto U de \mathbb{R}^n , com a evolução do tempo. Os principais conceitos de análise qualitativa, tais como pontos de equilíbrio, órbitas periódicas e conjuntos invariantes são apresentados neste capítulo. Também apresentamos alguns importantes resultados de análise qualitativa para sistemas dinâmicos definidos sobre um espaço métrico qualquer.

As condições para existência de solução bem como os conceitos de soluções de equilíbrio e soluções periódicas estão apresentados na Seção 1.2 a seguir. Também apresentamos o teorema de Poincaré - Bendixson que garante a existência de soluções periódicas para certas equações autônomas bidimensionais.

Na seção 1.3 consideramos conjuntos invariantes de uma forma geral. A estabilidade para conjuntos invariantes e a definição de conjuntos atratores também são apresentadas nesta seção. Além disto, apresentamos também alguns resultados sobre convergência uniforme para fluxos determinísticos.

Na Seção 1.4 estudamos algumas propriedades de fluxos definidos sobre espaços métricos quaisquer.

A motivação para termos inserido este capítulo neste trabalho é simplesmente para facilitar a leitura dos demais capítulos, onde obtemos resultados, via extensão de Zadeh de fluxos determinísticos, que generalizam de alguma forma os resultados deste capítulo.

1.2 Equações diferenciais autônomas

Consideremos aqui o problema de valor inicial determinado pela equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_o, \quad (1.1)$$

para alguma função f definida sobre um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com imagem em \mathbb{R}^n e condição inicial $x_o \in U$. O conjunto U em geral é denominado *espaço de fase*.

Para enfatizar a dependência com relação à condição inicial, usualmente, a solução da Equação (1.1) é denotada por $\varphi_t(x_o)$. Isto é, se definirmos $x(t) = \varphi_t(x_o)$ então, $x'(t) = f(x(t))$ e $x(0) = x_o$.

Para que exista solução única para a equação autônoma acima, em geral é necessário impor alguma restrição à função f .

Teorema 1.1 (Existência e Unicidade). *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e suponha que $f \in C^k(U)$ ($k \geq 1$). Então, para cada $x_o \in U$ existe um intervalo $I_{x_o} = (t_1, t_2)$, contendo $t = 0$, tal que a solução $\varphi_t(x_o)$ de (1.1) existe, é única e além disso é de classe C^k .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Hartman (1964) ou em Birkhoff (1966). No caso de f depender de algum parâmetro $p_o \in \mathbb{R}^m$ e $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k , então a solução $\varphi_t(x_o, p_o)$ também é de classe C^k .

Dizer que $\varphi_t(x_o)$ é solução da Equação (1.1) é equivalente a dizer que $\varphi_t(x_o)$ satisfaz

$$\varphi_t(x_o) = x_o + \int_0^t f(x(s))ds,$$

para todo $x_o \in U$ e $t \in I_{x_o}$.

Estamos interessados aqui em analisar o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$ e portanto, de agora em diante, estamos assumindo que $\varphi_t(x_o)$ esteja definida para todo $x_o \in U$ e $t \geq 0$. Sob algumas hipóteses, o intervalo de existência de solução garantido pelo Teorema 1.1, pode ser estendido de modo que a solução passa a existir para todo $t \in \mathbb{R}$

(Hirsch e Smale, 1974). Em particular, se f está definida para todo o \mathbb{R}^n e é limitada, então a solução existe para todo $t \in \mathbb{R}_+$ (Robinson, 1999).

Para cada $x_o \in U$, o subconjunto do espaço de fase definido por

$$\gamma(x_o) = \{\varphi_t(x_o) \in U : t \geq 0\}.$$

é chamado de *órbita* ou *trajetória* do ponto x_o pelo solução φ_t . O ω - limite é o conjunto

$$\omega(x_o) = \{y \in U : \varphi_{t_n}(x_o) \rightarrow y \text{ quando } t_n \rightarrow \infty\}.$$

É importante notar que se a órbita $\gamma(x_o)$ de um ponto $x_o \in U$ está contida em um subconjunto compacto então $\omega(x_o)$ é um conjunto não vazio e fechado em \mathbb{R}^n (Hale e Koçak, 1991).

Pela unicidade com relação à condição inicial, a solução $\varphi_t(x_o)$ da equação autônoma (1.1) define uma aplicação φ que, para cada par $(t, x_o) \in \mathbb{R}_+ \times U$, associa o valor $\varphi_t(x_o)$, ou seja:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ \times U &\rightarrow U \\ (t, x_o) &\rightarrow \varphi_t(x_o). \end{aligned}$$

Para todo $x_o \in U$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$, a aplicação φ assim definida satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_o) &= x_o; \\ \varphi_{t+s}(x_o) &= \varphi_t(\varphi_s(x_o)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por esta razão, a família de aplicações $\varphi_t : U \rightarrow U$, $t \in \mathbb{R}_+$, é frequentemente denominada na literatura como *semifluxo* ou *sistema dinâmico* gerado pela equação autônoma (Hirsch e Smale, 1974; Hale, 1988; Hale et al., 1991; Milani e Kokscha, 2005).

1.2.1 Soluções de equilíbrio

Em alguns casos a solução $\varphi_t(x_o)$ da equação (1.1) pode ser facilmente encontrada. Por exemplo, se $x_e \in U$ é tal que $f(x_e) = 0$ então a função constante $\varphi_t(x_e) \equiv x_e$ é solução para a Equação (1.1) com condição inicial $x_o = x_e$.

Soluções constantes como essa desempenham um papel fundamental na análise quali-

tativa das equações diferenciais. Tais soluções são denominadas por *soluções de equilíbrio* e, claramente, a órbita $\gamma(x_e)$ de uma solução de equilíbrio é o *ponto de equilíbrio* x_e .

Definição 1.1. Um ponto $x_e \in U$ é um *ponto de equilíbrio* para a Equação (1.1) se $f(x_e) = 0$. A solução constante $\varphi_t(x_e) \equiv x_e$ é denominada *solução de equilíbrio*.

Um ponto de equilíbrio deve, no entanto, satisfazer algum critério de estabilidade para que possa fazer algum sentido relevante em aplicações como modelos de fenômenos biológicos, físicos, químicos, etc.

A análise de *estabilidade* se encarrega de compreender o comportamento das soluções cuja condição inicial está próxima do ponto de equilíbrio.

Definição 1.2. Um ponto de equilíbrio $x_e \in U \subset \mathbb{R}^n$ é *estável* se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $\|x_o - x_e\| < \delta$ temos $\|\varphi_t(x_o) - x_e\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Se além disso existe $r > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|x_o - x_e\| < r$ temos que $\|\varphi_t(x_o) - x_e\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então x_e é *assintoticamente estável*.

Um ponto de equilíbrio é *instável* quando não é estável.

A análise de estabilidade de um ponto de equilíbrio x_e pode ser feita por meio da linearização de (1.1), isto é, da matriz jacobiana do campo vetorial f da Equação (1.1), que será denotada aqui por $Df(x_e)$. Ou seja, a natureza da estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser feita analisando o comportamento da equação linear determinada pela matriz jacobiana do campo vetorial no ponto x_e . Um ponto de equilíbrio é denominado *hiperbólico* quando a parte real dos autovalores de $Df(x_e)$ é não nula.

Os dois resultados a seguir fornecem um critério para identificar a natureza da estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico. As demonstrações desses teoremas podem ser encontradas em Hirsch e Smale (1974) ou Hale e Koçak (1991).

Teorema 1.2. *Seja $x_e \in U \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio hiperbólico e suponha que a parte real dos autovalores de $Df(x_e)$ sejam negativas. Então existe uma vizinhança $V \subset U$ de x_e tal que:*

- a) $\varphi_t(x_o)$ está definido para todo $x_o \in V$;
- b) *Existem constantes positivas b e B tais que*

$$\|\varphi_t(x_o) - x_e\| \leq B\|x_o - x_e\| e^{-bt}$$

para todo $x_o \in V$ e $t \geq 0$.

Portanto, se a parte real dos autovalores da matriz $Df(x_e)$ são negativas, então o ponto de equilíbrio x_e é um ponto assintoticamente estável. Um ponto de equilíbrio com parte real dos autovalores negativa é também denominado um ponto *atrator exponencial*.

A análise dos autovalores da jacobiana do campo vetorial f também pode ser útil para identificar pontos de equilíbrio que são instáveis.

Teorema 1.3. *Seja $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio da equação (1.1). Se ao menos um dos autovalores de $Df(x_e)$ possui parte real positiva então o ponto de equilíbrio x_e é instável.*

Segue diretamente dos Teoremas 1.2 e 1.3 que um ponto de equilíbrio hiperbólico é assintoticamente estável ou é instável.

O Teorema 1.2, apesar de garantir a existência de uma região que é atraída pelo ponto de equilíbrio assintoticamente estável, não indica como obter tal região, uma vez que não são levadas em consideração as características do campo $f(x)$ da equação (1.1).

Em muitas aplicações porém, pode ser interessante saber qual é essa *região de atração* (Robinson, 1999). Isto é, qual o conjunto $A(x_e) \subset U$ tal que se $x_o \in A(x_e)$ então a solução $\varphi_t(x_o)$ converge para x_e quando $t \rightarrow \infty$. Uma maneira de obter uma melhor estimativa para a região de atração de um fluxo gerado por uma equação autônoma é através do conceito de *funções de Liapunov*.

Definição 1.3. Sejam x_e um ponto de equilíbrio da Equação (1.1) e V um conjunto aberto em \mathbb{R}^n contendo x_e . Uma função $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é denominada *função de Liapunov* para a solução $\varphi_t(x_o)$ se $L(x_e) = 0$, $L(x) > 0$ para todo $x \in V$ e $\dot{L}(x) \leq 0$ para qualquer que seja $x \in V - \{x_e\}$. A função L é chamada de *função de Liapunov estrita* se $\dot{L}(x) < 0$ para todo $x \in U - \{x_e\}$.

Na definição acima,

$$\dot{L}(x) = \frac{dL(x)}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \nabla L(x) = f(x) \cdot \nabla L(x).$$

A ideia das funções de Liapunov é generalizar o Teorema 1.2, uma vez que outras funções além da norma podem ser utilizadas para verificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio. A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em Hirsch e Smale (1974).

Teorema 1.4. *Seja x_e um ponto de equilíbrio para a equação (1.1). Dado $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo x_e temos que:*

- a) *Se $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov então x_e é estável;*
- b) *Se $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov estrita então x_e é assintoticamente estável.*

A dificuldade em aplicar o método de Liapunov reside no fato de que nem sempre é fácil obter uma função que satisfaça a Definição 1.3. Por outro lado, em certas ocasiões, não é possível determinar a natureza da estabilidade de um ponto de equilíbrio pela análise dos autovalores de $Df(x_e)$. O exemplo a seguir ilustra justamente a limitação da aplicação do Teorema 1.2.

Exemplo 1.1 (Modelo de Lotka - Volterra). Na tentativa de explicar as variações no número de indivíduos de duas espécies de peixes em uma interação do tipo presa - predador, o matemático italiano V. Volterra propôs, em 1926, um modelo levando em consideração as seguintes hipóteses (Bassanezi e Ferreira Jr, 1988; Murray, 2002):

- a) Na ausência de predadores a variação da população de presas é proporcional à própria população;
- b) Na ausência de presas a população de predadores decresce proporcionalmente à sua população;
- c) A variação relativa de crescimento da população de presas diminui linearmente em relação à população de predadores;
- d) A variação relativa de crescimento da população de predadores cresce linearmente com relação à população de presas.

Estas hipóteses podem ser sintetizadas num sistema autônomo bidimensional dado pelas equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 - rx_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -bx_2 + sx_1x_2, \end{cases}$$

onde os parâmetros a , r , b e s são reais positivos.

O sistema de equações acima assume como soluções de equilíbrio os pontos $x_e = (0, 0)$ e $y_e = (b/s, a/r)$. A derivada obtida pela linearização em torno da origem é dada pela matriz

$$Df(x_e) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

que tem autovalores a e s , ambos positivos. Portanto, pelo Teorema 1.3 o ponto de equilíbrio x_e é instável.

Para o ponto de equilíbrio y_e , a matriz da parte linear é

$$Df(y_e) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{rb}{s} \\ \frac{as}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda = \pm i\sqrt{ab}$. Uma vez que a parte real dos autovalores de $Df(y_e)$ não satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2, nada podemos afirmar com relação à natureza da estabilidade do ponto de equilíbrio não nulo.

Porém, para esse exemplo consideremos a função $L : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(x_1, x_2) = \frac{b}{\beta} \left(\frac{\beta x_1}{b} - \ln \frac{s x_1}{b} - 1 \right) + \frac{a}{s} \left(\frac{r x_2}{a} - \ln \frac{r x_2}{a} - 1 \right)$$

cuja derivada com relação ao tempo na direção da solução do sistema é:

$$\begin{aligned} \dot{L}(x, y) &= \frac{dx}{dt} \cdot \nabla L(x) \\ &= f(x_1, x_2) \cdot \nabla L(x_1, x_2) \\ &= \left(1 - \frac{b}{s x_1} \right) (x_1 - r x_1 x_2) + \left(\frac{r}{s} - \frac{a}{s x_2} \right) (-b x_2 + s x_1 x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que V pode ser escolhido de forma que $L(x_1, x_2) \geq 0$ para todo $(x_1, x_2) \in V$ e assim, com base no Teorema 1.4, podemos concluir que o ponto de equilíbrio não nulo é estável. Não se pode afirmar porém se o ponto de equilíbrio $(b/s, a/r)$ é ou não assintoticamente estável.

Para compreendermos um pouco mais o comportamento da solução do modelo de Lotka - Volterra, eliminamos a variável independente, através da regra da cadeia, e analisamos a solução da equação diferencial

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1(a - rx_2)}{x_2(sx_1 - b)}$$

cuja solução implícita, com relação à t ,

$$x_2^a e^{-rx_2} - cx_1^{-b} e^{sx_1} = 0$$

pode ser obtida por separação de variáveis. Por continuidade, podemos concluir que a órbita da solução para cada condição inicial (x_{01}, x_{02}) é um subconjunto fechado em \mathbb{R}_+^2 . A expressão acima nos mostra que o ponto de equilíbrio não nulo é estável, mas não assintoticamente estável. \square

Como mencionado anteriormente, a análise de estabilidade pelo método de Liapunov permite obter uma estimativa para a região de atração $A(x_e)$ de um ponto assintoticamente estável x_e .

Dizemos que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é *invariante* pelo fluxo φ_t quando, para qualquer $x_o \in S$, a órbita γ está contida em S , ou seja, $\gamma(x_o) \subset S$ para todo $x \in S$.

Teorema 1.5. *Seja $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Liapunov estrita e seja $P \subset U$ vizinhança fechada de x_e . Se P é invariante então x_e é assintoticamente estável e P está contido na região de atração $A(x_e)$.*

Exemplo 1.2. Consideremos o fluxo gerado pelo sistema de equações autônomas

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_2(x_3 - 1), & x_1(0) = x_{01}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1(x_3 - 1), & x_2(0) = x_{02}, \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_3^3, & x_3(0) = x_{03}, \end{cases}$$

cujo único ponto de equilíbrio é a origem, isto é, $x_e = (0, 0, 0)$. A linearização do sistema acima no ponto de equilíbrio fornece como matriz jacobiana

$$Df(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e seus autovalores são $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm i\sqrt{2}$.

Observe que, neste caso, não é possível aplicarmos o Teorema 1.2, uma vez que a parte real dos autovalores de $Df(x_e)$ é nula e portanto, não satisfaz a hipótese. Logo, nada podemos concluir sobre a natureza da estabilidade da origem.

Consideremos agora a função $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$. Para essa função temos que:

$$\begin{aligned} \dot{L}(x) &= \frac{dx}{dt} \cdot \nabla L(x) \\ &= f(x_1, x_2, x_3) \cdot \nabla L(x_1, x_2, x_3) \\ &= 4x_1x_2(x_3 - 1) - 4x_1x_2(x_3 - 1) - 2x_3^4 \\ &= -2x_3^4 \end{aligned}$$

e portanto, $L(x_1, x_2, x_3)$ é uma função de Liapunov estrita definida em todo \mathbb{R}^3 . Dessa forma, podemos concluir, pelo Teorema 1.4, que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Se tomarmos $P = \mathbb{R}^3$, então P satisfaz as hipóteses do Teorema 1.5 e portanto, temos que a região de atração neste caso é todo o espaço tridimensional. \square

1.2.2 Soluções periódicas

Além das soluções de equilíbrio, as soluções de equações autônomas podem também apresentar um comportamento periódico, como vimos no modelo de Lotka - Volterra. Assim como as soluções de equilíbrio, as soluções periódicas também são importantes na análise qualitativa. No que segue, faremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados relativos às tais soluções periódicas

Definição 1.4. Dizemos que $p \in U$ é um *ponto periódico* de período τ , ou ainda, um *ponto τ - periódico*, para o fluxo φ_t quando existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_\tau(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para todo $t < \tau$.

Vale observar que se $y = \varphi_s(p)$, $s < \tau$, então

$$\varphi_\tau(y) = \varphi_\tau(\varphi_s(p)) = \varphi_{\tau+s}(p) = \varphi_s(\varphi_\tau(p)) = \varphi_s(p) = y$$

e portanto, y também é um ponto τ -periódico. Por outro lado, para todo $t > \tau$, podemos decompor $t = n\tau + s$, com $0 \leq s < \tau$ e $n \in \mathbb{N}$, e assim temos

$$\varphi_t(p) = \varphi_{n\tau+s}(p) = \varphi_s(\varphi_{n\tau}(p)) = \varphi_s(p).$$

Por estas propriedades, soluções que admitem pontos periódicos são *soluções periódicas* e a órbita $\gamma(p)$ de um ponto periódico é um subconjunto fechado em \mathbb{R}^n , que denominamos *órbita fechada* ou *órbita periódica*.

Pelo o que foi mostrado acima, uma órbita $\gamma(p)$ determinada por um ponto periódico $p \in U$ é o conjunto

$$\gamma(p) = \bigcup_{t \in [0, \tau)} \varphi_t(p).$$

A órbita $\gamma(p)$ e o ω -limite, $\omega(p)$, de um ponto τ -periódico $p \in \mathbb{R}^n$ são os mesmos. De fato, pois se $y \in \omega(p)$, então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow y$; como a órbita de um ponto periódico é um conjunto fechado então $y \in \gamma(p)$. Por outro lado, se $y \in \gamma(p)$, temos então que $y = \varphi_s(p) = \varphi_{s+n\tau}(p)$ para algum $0 \leq s < \tau$ e para todo $n \in \mathbb{N}$; assim, definindo $t_n = s + n\tau$ temos que $t_n \rightarrow \infty$ e $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow y$ e portanto, $y \in \omega(p)$.

Exemplo 1.3. Consideremos o sistema bidimensional dado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + \mu x_1(k - x_1^2 - x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \mu x_2(k - x_1^2 - x_2^2). \end{cases} \quad (1.3)$$

Através da mudança de variáveis $x_1(t) = r(t) \cos \theta(t)$ e $x_2(t) = r(t) \sin \theta(t)$, obtemos as equações

$$-r \sin \theta + \mu r \cos \theta (k - r^2) = \frac{dr}{dt} \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} r \sin \theta$$

$$r \cos \theta + \mu r \sin \theta (k - r^2) = \frac{dr}{dt} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} r \cos \theta$$

e assim, temos o sistema desacoplado equivalente ao primeiro, em coordenadas polares, dado pelas equações

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r(k - r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1, \end{cases} \quad (1.4)$$

cuja solução é:

$$r(t) = \frac{r_o \sqrt{k}}{[r_o^2 + (k - r_o^2) e^{-2\mu t}]^{1/2}},$$

$$\theta(t) = t + \theta_o.$$

Uma análise da expressão $r(t)$ indica que, quando $t \rightarrow \infty$, temos $r(t) \rightarrow \sqrt{k}$ para todo $r_o > 0$. Como consequência disto, para qualquer condição inicial não nula $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a trajetória da solução $\varphi_t(x_o, y_o)$ da Equação (1.3) se aproxima da circunferência centrada na origem e com raio \sqrt{k} .

Qualquer ponto em \mathbb{R}^2 da forma $(\sqrt{k} \cos \xi, \sqrt{k} \sin \xi)$, com $0 \leq \xi < 2\pi$, é um ponto 2π - periódico e portanto, a equação (1.3) admite uma solução periódica de período 2π . A órbita da solução periódica, neste caso, é o conjunto formado pelos pontos que estão na circunferência de raio \sqrt{k} centrada na origem, isto é, $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$. \square

O exemplo que acabamos de apresentar, mostra que a solução determinada por qualquer condição inicial não nula se aproxima da solução periódica quando $t \rightarrow \infty$. Como as soluções de equilíbrio, a análise de soluções com condições iniciais próximas de uma órbita fechada, é importante para se determinar o comportamento destas soluções com a evolução do tempo.

Definição 1.5. Uma órbita periódica $\gamma \subset U$ é *estável* quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(x_o, \gamma) < \delta$, então $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. A órbita é *assintoticamente estável* quando é estável e existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(x_o, \gamma) < r$ implica que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Dizemos que a órbita é *instável* quando não é estável.

A distância usada na definição acima é a distância entre ponto e conjunto induzida pela norma em \mathbb{R}^n , isto é, dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e um subconjunto não vazio A

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Vale notar que, sendo a norma uma aplicação contínua e a órbita γ de uma solução periódica um conjunto fechado, então o ínfimo na igualdade acima é assumido para algum $\bar{y} \in \gamma$ (Kreyszig, 1978).

De acordo com a Definição 1.5, a órbita periódica

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\},$$

determinada pela solução periódica do Exemplo 1.3, é uma órbita assintoticamente estável.

Dizemos que um ponto $x_o \in U \subset \mathbb{R}^n$ possui *período assintótico* $\tau \in \mathbb{R}$ quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_{t+\tau}(x_o) - \varphi_t(x_o)\| = 0.$$

Os pontos periódicos são exemplos triviais de pontos que possuem período assintótico. O próximo teorema garante que os pontos que estão em alguma vizinhança de uma órbita periódica possuem período assintótico. A demonstração pode ser encontrada em Hirsch e Smale (1974).

Teorema 1.6. *Seja γ uma órbita periódica assintoticamente estável de período $\tau > 0$. Então existe uma vizinhança V de γ tal que cada ponto de V possui período assintótico τ .*

Em outras palavras, embora nem todos os pontos da vizinhança V sejam pontos periódicos, as soluções geradas por tais pontos se tornam periódicas quando $t \rightarrow \infty$. Uma das maneiras de determinarmos a natureza da estabilidade de uma órbita τ -periódica é através da análise dos autovalores da derivada da solução $D\varphi_\tau(p)$, onde p é um ponto qualquer da órbita. O resultado a seguir é importante do ponto de vista teórico pois fornece um critério para determinar quando uma órbita é assintoticamente estável. Do ponto de vista prático, porém, torna-se limitado uma vez que em geral não temos a solução da equação (1.1).

Teorema 1.7. *Sejam γ uma órbita τ - periódica para a equação (1.1) e $p \in \gamma$. Suponha que $n - 1$ autovalores do operador linear $D\varphi_\tau(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sejam menores do que 1 em valor absoluto. Então γ é assintoticamente estável.*

A condição sobre os autovalores imposta no teorema anterior é mais forte do que estabilidade assintótica. Neste caso, uma órbita que satisfaz o teorema acima é denominada *atrator periódico*.

Podemos ver diretamente da solução da equação (1.3) que, dado um ponto $p_o \in \mathbb{R}^2$ com coordenadas polares (ρ_o, θ_o) , o ponto periódico de coordenadas polares $\bar{p} = (\sqrt{k}, \theta_o) \in \gamma$ é o único que satisfaz $\|\varphi_t(p_o) - \varphi_t(\bar{p})\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Essa propriedade não é um caso particular da solução de (1.3). Todas as soluções que são atraídas por um atrator periódico γ estão em fase com γ segundo o teorema a seguir, cuja demonstração está em Hirsch e Smale (1974).

Teorema 1.8. *Seja $\gamma \subset U$ um atrator periódico. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) = 0$ então existe um único $z \in \gamma$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(z)\| = 0$.*

Quando uma solução satisfaz a propriedade acima, dizemos que $\varphi_t(x_o)$ está *em fase* com a solução periódica que determina a trajetória periódica γ .

Teorema de Poincaré - Bendixson

Embora as soluções periódicas desempenhem um papel importante na análise qualitativa de equações diferenciais, e de fluxos de uma maneira mais geral, encontrar tais soluções pode não ser uma tarefa fácil. Porém, a análise qualitativa restrita aos fluxos definidos no espaço bidimensional tem como importante ferramenta a teoria de Poincaré - Bendixson.

Definição 1.6. Uma órbita periódica $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ é chamada de *ciclo limite* quando existe um ponto $x_o \in \mathbb{R}^2 - \gamma$ tal que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Apesar de apresentar soluções periódicas, o modelo de Lotka - Volterra não possui ciclo limite.

Uma órbita periódica $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada e, pelo teorema da curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 - \gamma = R_1 \cup R_2$ com R_1 e R_2 disjuntos e conexos tendo γ como fronteira. Um desses

conjuntos, digamos R_1 , é limitado e é denominado *região interior* de γ ; R_2 é o *região exterior* de γ (Hartman, 1964).

O teorema de Poincaré - Bendixson, que enunciaremos a seguir, fornece um critério para a existência de ciclos limites, e portanto soluções periódicas, para fluxos bidimensionais. Este teorema é uma das principais ferramentas para análise de ciclos limites de fluxos definidos sobre uma região $U \subset \mathbb{R}^2$.

Ressaltamos aqui que uma órbita periódica de um fluxo é a imagem de uma solução periódica. Isto é, γ é uma órbita periódica se não contém pontos de equilíbrio e temos $\varphi_\tau(x_o) = x_o$ para algum $x_o \in \gamma$, $\tau > 0$.

Teorema 1.9 (Poincaré - Bendixson). *Seja $\omega(x_o)$ o ω - limite de um ponto $x_o \in \mathbb{R}^2$ para o fluxo bidimensional $\varphi_t(\cdot)$. Se $\omega(x_o)$ é um conjunto não vazio, compacto e não contém ponto de equilíbrio, então $\omega(x_o)$ é uma órbita periódica.*

De maneira geral, o procedimento para determinar se o fluxo apresenta uma órbita periódica é encontrar uma região compacta, invariante e que não contém ponto de equilíbrio ou apresenta um ponto de equilíbrio instável. Uma forma mais geométrica de interpretação do teorema de Poincaré - Bendixson para estabelecer a existência de órbitas periódicas é a seguinte: se a trajetória, ou a órbita, para uma determinada condição inicial é limitada e não se aproxima de um ponto de equilíbrio, então a órbita é periódica ou se aproxima de uma órbita periódica quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 1.10. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e $x_o \in K$. Se K é invariante então $\omega(x_o) \subset K$ é um ponto de equilíbrio ou é um ciclo limite.*

Ciclos limites podem apresentar estabilidade em apenas uma das regiões R_1 ou R_2 .

Exemplo 1.4. Consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^2, \\ \frac{d\theta}{dt} = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Escrevendo em coordenadas polares, o sistema acima torna-se:

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)^2, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

Quando $r_o < 1$, temos que $r(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $r_o > 1$ então $r(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Desta forma, o fluxo gerado pela solução da Equação (1.5) converge para o ciclo limite, que é a circunferência de raio $r = 1$ centrada na origem, apenas quando a condição inicial está no interior de γ . Neste caso, γ é assintoticamente estável pelo interior. \square

Se γ é um ciclo limite, então existe uma região aberta e invariante $V \subset R_1$ ($V \subset R_2$) tal que para toda condição inicial $x_o \in V$ temos $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ (Hirsch e Smale, 1974).

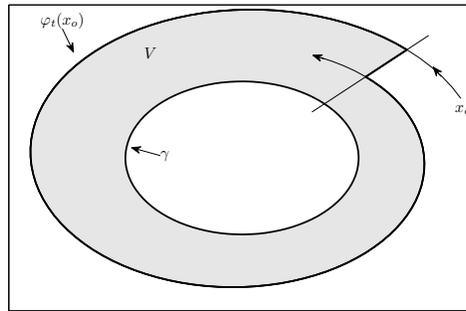


Figura 1.1: Região de atração *exterior* do ciclo limite γ .

A estabilidade de uma órbita periódica no plano é caracterizada pelo teorema a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em Hartman (1964).

Teorema 1.11. *Sejam $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ uma órbita periódica para o fluxo bidimensional e $x_o \in \mathbb{R}^2$ um ponto não periódico no exterior (interior). Então,*

- *γ é estável pelo exterior (interior) se, e somente se, $\gamma = \omega(x_o)$ ou, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma órbita periódica γ_ε no exterior (interior) tal que $\text{dist}(\gamma, \gamma_\varepsilon) < \varepsilon$;*
- *γ é assintoticamente estável pelo exterior (interior) se, e somente se, $\gamma = \omega(x_o)$.*

Por este teorema, um ciclo limite é uma órbita assintoticamente estável com vizinhança tomada em alguma região R_1 ou R_2 .

Muitas vezes é mais simples mostrar que o fluxo bidimensional não possui órbitas periódicas. Consideremos a equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1.6)$$

no qual $x = (x_1, x_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ e $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Teorema 1.12 (Critério de Bendixson). *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e simplesmente conexo. Se a expressão*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

é identicamente não nula em D e possui sinal contante, então o fluxo bidimensional gerado por (1.6) não admite órbita periódica em D .

No caso em que f é linear, é possível mostrar através do Critério de Bendixson que o fluxo bidimensional, embora possa apresentar soluções periódicas, não possui ciclos limites. Com efeito, se $\varphi_t(x_o)$ é uma solução periódica da equação linear, então $c\varphi_t(x_o)$ é também uma solução periódica para a equação linear para todo $c \neq 0$. Assim, todo ponto do domínio é periódico.

O critério de Bendixson é um caso particular do critério de Dulac.

Teorema 1.13 (Critério de Dulac). *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e simplesmente conexo e $B : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se*

$$\operatorname{div}(Bf) = \frac{\partial(Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Bf_2)}{\partial x_2}$$

é não nulo e possui sinal constante então o fluxo bidimensional gerado por (1.6) não admite órbita periódica em D .

No exemplo a seguir, utilizamos o Teorema 1.10 para mostrar a existência de um ciclo limite para o modelo presa - predador de Holling - Tanner.

Exemplo 1.5 (Modelo de Holling - Tanner). O modelo presa - predador de Holling - Tanner apresenta algumas características que o deixam um pouco mais aplicável do que

o modelo de Lotka - Volterra, sendo a principal delas, a presença de uma capacidade suporte para a população de presas na ausência de predadores.

Representando por $x_1(t)$ a população de presas e $x_2(t)$ a de predadores, a dinâmica da interação é guiada pelas equações:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1\left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \left(\frac{m}{x_1 + d}\right)x_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = sx_2\left(1 - b\frac{x_2}{x_1}\right), \end{cases} \quad (1.7)$$

onde b, d, k, r e s são constantes reais positivas. Do modelo acima ressaltamos os seguintes aspectos biológicos:

- a) Na ausência de predador, a dinâmica populacional das presas segue o modelo logístico com capacidade suporte k e razão de crescimento intrínseca r .
- b) A constante m pode ser interpretada como sendo o número máximo de presas que podem ser capturadas pelo predador por unidade de tempo;
- c) O parâmetro d está relacionado com a capacidade da presa evitar a predação. Quanto maior a capacidade da presa de evitar o ataque dos predadores, maior será o valor de d .
- d) A população de predadores cresce logisticamente com razão intrínseca s e capacidade suporte proporcional à população de presas. Quanto maior a razão $x_2(t)/x_1(t)$, menor será o número de presas disponíveis para cada predador e isso influencia negativamente no crescimento populacional dos predadores;
- e) O parâmetro b é a razão entre a quantidade de presas e predadores quando as populações se encontram no estado de equilíbrio.

Prosseguimos agora com a análise qualitativa para mostrar que, sob certas condições, este modelo apresenta ao menos um ciclo limite assintoticamente estável. Os pontos de equilíbrio para o sistema acima são $x_e = (0, 0)$, $y_e = (k, 0)$ e $z_e = (z, z/b)$ onde z é a raiz positiva da equação

$$z^2 - \left(k - d - \frac{mk}{rb}\right)z - kd = 0.$$

Consideremos $f(x_1)$, $g(x_1)$ e $h(x_1)$ definidas respectivamente por

$$f(x) = \frac{r}{k}(k - x_1), \quad g(x_1) = \frac{mx_1}{x_1 + d}, \quad h(x_1) = \frac{x_1 f(x_1)}{g(x_1)}.$$

Para os pontos de equilíbrio x_e e y_e temos, respectivamente, as matrizes

$$Df(x_e) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad Df(y_e) = \begin{pmatrix} kf'(k) & g(k) \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, os autovalores são r e s , ambos positivos. No segundo caso, um dos autovalores é $s > 0$. Consequentemente, ambos pontos de equilíbrio são instáveis. Para o ponto z_e , temos

$$Df(z_e) = \begin{pmatrix} g(z)h'(z) & -g(z) \\ \frac{s}{b} & -s \end{pmatrix}$$

e neste caso o ponto $z_e = (z, z/b)$ será assintoticamente estável quando

$$s - g(z)h'(z) > 0.$$

É possível mostrar que o conjunto compacto $K = [0, k] \times [0, k/b]$ é positivamente invariante para o fluxo $\varphi_t(x_o, y_o) = (x_1(t), x_2(t))$ (Cecconello, 2006) de modo que, para qualquer condição inicial $(x_{01}, x_{02}) \in K$, temos que $\omega(x_{01}, x_{02})$ é um subconjunto fechado contido em K e portanto, compacto. Se o ponto de equilíbrio z_e é instável, então o teorema de Poincaré - Bendixson garante a existência de um ciclo limite para o modelo dado pela Equação (1.7). \square

Os fluxos unidimensionais, isto é, o caso em que a equação (1.1) é unidimensional, apresentam algumas propriedades particulares que ajudam na análise qualitativa. Por exemplo, não é difícil verificar que fluxo determinístico φ_t é monótono com relação à t . Além disso, pela unicidade da solução, temos também a monotonocidade com relação à condição inicial, de modo que se $x_o < y_o$ então $\varphi_t(x_o) < \varphi_t(y_o)$ para qualquer que seja $t \geq 0$ (Hale e Koçak, 1991).

Ainda para fluxos unidimensionais vale o resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Hartman (1964).

Proposição 1.14. *Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as soluções das respectivas equações*

$$x' = f(t, x) \quad \text{e} \quad y' = g(t, y)$$

com condições iniciais $x_0 = y_0$. Se para todo (t, z) vale a desigualdade

$$f(t, z) \leq g(t, z)$$

então temos $x(t) \leq y(t)$ para todo $t \geq 0$.

1.3 Conjuntos atratores e convergência uniforme

Na análise qualitativa para soluções de equações diferenciais autônomas, os conjuntos invariantes desempenham papel importante para compreender o comportamento de um fluxo com a evolução no tempo. Como já mencionamos anteriormente, um conjunto $S \subset U$ é *invariante* quando $\gamma(x_0) \subset S$ para todo $x_0 \in S$. Segue disso, que S é invariante se, e somente se $\varphi_t(S) = S$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

No contexto de sistemas dinâmicos, dizemos que um conjunto $M \subset X$ *atrai* um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, pelo fluxo φ_t , se $\text{dist}(\varphi_t(B), M) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. A distância entre dois conjuntos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\text{dist}(U, V) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} d(u, v).$$

Pela definição acima, dizer que um conjunto M atrai um conjunto B é equivalente a dizer que M atrai *uniformemente* todas as órbitas com estado inicial em B , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \{ \text{dist}(\varphi_t(x_0), M) : x_0 \in B \} = 0.$$

A *região de atração* de um conjunto M é o conjunto $A(M)$ definido por

$$A(M) = \{x_0 \in U : \text{dist}(\varphi_t(x_0), M) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}.$$

O conjunto M é denominado *atrator* se existe um aberto $V \supset M$ tal que $V \subset A(M)$. Se M é atrator e atrai subconjuntos compactos da região de atração $A(M)$, então M é um

atrator uniforme.

A definição de estabilidade para conjuntos invariantes é semelhante à Definição 1.5 de estabilidade para órbitas periódicas. Isto é, um conjunto invariante S é *estável* quando para toda vizinhança V de S , existe uma vizinhança V' de S tal que $\varphi_t(V') \subset V$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Quando S é estável e além disso existe uma vizinhança W tal que S atrai pontos de W então, S é um conjunto assintoticamente estável.

O próximo resultado relaciona os conceitos de estabilidade assintótica e atração uniforme. A demonstração pode ser encontrada em Bhatia e Szegö (1967).

Teorema 1.15. *Seja M compacto e invariante. Então M é assintoticamente estável se, e somente se, M é um atrator uniforme.*

Como consequência disto, os pontos de equilíbrio e órbitas periódicas assintoticamente estáveis são conjuntos que atraem conjuntos compactos contidos em sua região de atração. Destacamos aqui duas importantes consequências do teorema acima para futuras referências.

Corolário 1.16. *Sejam $x_e \in U \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e $A(x_e) \subset U$ sua região de atração. Então, dados $\varepsilon > 0$ e um compacto $K \subset A(x_e)$, existe $T(K, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|\varphi_t(x_o) - x_e\| < \varepsilon$$

para todo $x_o \in K$ e $t > T(K, \varepsilon)$.

Corolário 1.17. *Sejam $\gamma \in U$ uma órbita periódica assintoticamente estável e $A(\gamma) \subset U$ sua região de atração. Então, dados $\varepsilon > 0$ e um compacto $K \subset A(\gamma)$, existe $T(K, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) < \varepsilon$$

para qualquer que seja $x_o \in K$ e $t > T(K, \varepsilon)$.

Para finalizar esta seção, apresentamos abaixo alguns importantes resultados sobre convergência uniforme que também serão utilizados na sequência deste trabalho. A demonstração apresentada aqui para o teorema de Dini é uma adaptação da apresentada em Rudin (1964).

Teorema 1.18 (Dini). *Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Se a sequência de funções contínuas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ converge pontualmente para um função contínua $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ e além disso $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona então f_n converge uniformemente para f .*

Prova: Para todo $x \in \mathbb{K}$ seja $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$ e consideremos a sequência de conjuntos $E_n \subset \mathbb{K}$ definida por $E_n = \{x \in \mathbb{K} : g_n(x) < \varepsilon\}$ para um dado $\varepsilon > 0$. Desde que $f(x)$ e $f_n(x)$ são contínuas então $g_n(x)$ é contínua e portanto E_n é aberto $\forall n$. Por hipótese $g_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ de modo que $\mathbb{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Além disso, desde que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona, $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto temos que $E_n \subseteq E_{n+1}$. Por ser compacto, \mathbb{K} admite uma subcobertura finita e conseqüentemente temos $\mathbb{K} = E_N$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Provamos assim, que para qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g_N(x) < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{K}$. Como $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente temos que $g_n(x) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e $x \in \mathbb{K}$. Logo temos a convergência uniforme. ■

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que uma função $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ converge uniformemente, em A , para um função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ quando: para todo $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - g(x)\| < \varepsilon,$$

para todo $t > T$ e $x \in A$.

Baseado nessa definição de convergência uniforme, podemos provar que o resultado anterior também é válido quando temos uma família de funções parametrizada por $t \in \mathbb{R}_+$. Neste caso, dizer que $f : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente, em $\mathbb{K} \subset X$, para $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ significa dizer que, dado $\varepsilon > 0$, existe T_ε tal que para todo $t > T_\varepsilon$ temos

$$|f(t, x) - g(x)| < \varepsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{K}$.

Proposição 1.19. *Seja $f : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $\mathbb{K} \subset X$ compacto. Se $f(t, x)$ converge pontualmente para uma função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando $t \rightarrow \infty$ e $f(t, x)$ é monótona em t então f converge uniformemente, em \mathbb{K} , para g quando $t \rightarrow \infty$.*

Prova: Tomemos a sequência $t_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Assim temos que $f(t_n, x)$ converge pontualmente para $g(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ e além disso a sequência $(f(t_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona.

Pelo Teorema de Dini, para um dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(t_n, x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ e $x \in \mathbb{K}$. Por ser monótona com relação a t , temos então $|f(t, x) - g(x)| < \varepsilon$ para qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$ e $t > t_N$, o que prova a afirmação. ■

A Proposição 1.19 garante que se $\varphi_t(x_o, p_o)$, com $p_o \in \mathbb{R}^m$, converge para um ponto de equilíbrio x_e quando $t \rightarrow \infty$, então essa convergência é uniforme, já que os fluxos unidimensionais são monótonos com relação à t .

Exemplo 1.6 (von Bertalanffy). Consideremos o fluxo $\varphi_t(x_o, a, b, c)$ gerado pela equação

$$\frac{dx}{dt} = ax^c - bx, \quad x(0) = x_o,$$

onde a , b e c são constantes reais positivas. Em termos dos parâmetros, o ponto de equilíbrio assintoticamente estável é dado pela expressão

$$x_e(a, b, c) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-c}}.$$

Qualquer que seja a condição inicial $x_o > 0$ e parâmetros a , b e $c < 1$ positivos, temos que $\varphi_t(x_o, a, b, c)$ converge de maneira monótona para $x_e(a, b, c)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Consideremos o conjunto

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1, x_2, x_3, x_4 > 0\}.$$

A Proposição 1.19 garante então que, para qualquer compacto $K \subset A$, a convergência é uniforme. Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que para todo $t > T$ vale

$$|\varphi_t(x_o, a, b, c) - x_e(a, b, c)| < \varepsilon,$$

para todo $(x_o, a, b, c) \in K$. □

Em algumas equações, a convergência para o ponto de equilíbrio pode depender da condição inicial. Para enfatizar, admitimos a existência de uma função $x_e : A \subset U \rightarrow U$ que para cada $x_o \in A$ associa o ponto de equilíbrio $x_e(x_o) \in U$ para qual a solução $\varphi_t(x_o)$ converge quando $t \rightarrow \infty$. Isto é, para cada $x_o \in A$ temos $\varphi_t(x_o) \rightarrow x_e(x_o)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Proposição 1.20. *Sejam $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $K \subset A$ compacto e $x_e : A \rightarrow U$ uma função contínua. Suponha que $\varphi_t(x_o)$ converge (pontualmente) para $x_e(x_o)$, para todo $x_o \in A$, quando $t \rightarrow \infty$. Se $x_e(x_o)$ é assintoticamente estável então φ_t converge uniformemente em K para $x_e : A \rightarrow U$.*

Prova: Sejam $\varepsilon > 0$ dado e $x_o \in K$. Como $x_e(x_o)$ é assintoticamente estável, então existe $\delta_{x_o} > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(y_o) - x_e(x_o)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $y_o \in B(x_e(x_o), \delta_{x_o})$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Por hipótese, $\varphi_t(x_o) \rightarrow x_e(x_o)$ e portanto, existe $t_{x_o} \geq 0$ tal que $\|\varphi_t(x_o) - x_e(x_o)\| < \delta_{x_o}$ para todo $t > t_{x_o}$. Pela continuidade de φ_t e da aplicação $x_e : A \rightarrow U$ em $x_o \in A$, existe $\eta_{x_o} > 0$ tal que

$$\|\varphi_{t_{x_o}}(z_o) - x_e(x_o)\| < \delta_{x_o} \quad \text{e} \quad \|x_e(z_o) - x_e(x_o)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $z_o \in B(x_o, \eta_{x_o})$.

A primeira desigualdade implica que $\varphi_{t_{x_o}}(z_o) \in B(x_e(x_o), \delta_{x_o})$ e então, vale que

$$\|\varphi_t(\varphi_{t_{x_o}}(z_o)) - x_e(x_o)\| = \|\varphi_{t+t_{x_o}}(z_o) - x_e(x_o)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Pela segunda desigualdade, temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi_t(z_o) - x_e(z_o)\| &\leq \|\varphi_t(z_o) - x_e(x_o)\| + \|x_e(x_o) - x_e(z_o)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_{x_o}$ e $z_o \in B(x_o, \eta_{x_o})$.

Agora, a união das vizinhanças $B(x_o, \eta_{x_o})$, $x_o \in K$, forma um cobertura aberta para o conjunto compacto K . Assim, existe $x_{oi} \in K$, $1 \leq i \leq n < \infty$, tal que

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_{oi}, \eta_{x_{oi}}) \subseteq \bigcup_{x_o \in K} B(x_o, \eta_{x_o}).$$

Seja $T = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_{x_{oi}}\}$. Se $x_o \in K$, então $x_o \in B(x_{oi}, \eta_{x_{oi}})$ para algum $1 \leq i \leq n$ de modo que

$$\|\varphi_t(x_o) - x_e(x_o)\| < \varepsilon$$

para todo $t > T$, o que prova a afirmação. ■

Podemos provar também que se o fluxo $\varphi_t(x_o, p_o)$ gerado pela equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p_o), \quad x(0) = x_o, \quad (1.8)$$

converge para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável $x_e(p_o) \in U$, então essa convergência também é uniforme. Em geral, a convergência pode depender da condição inicial e não apenas do parâmetro $p_o \in P$. Portanto, vamos enfatizar isto colocando o ponto de equilíbrio em função da condição inicial e do parâmetro. Isto é, $x_e : U \times P \rightarrow U$ é a função que para cada par (x_o, p_o) associa o ponto de equilíbrio $x_e(x_o, p_o)$ para o qual o fluxo $\varphi_t(x_o, p_o)$ converge quando $t \rightarrow \infty$.

Proposição 1.21. *Sejam $A \subset U \times P$, $x_e : A \rightarrow U$ contínua e $K \subset A$ um conjunto compacto. Suponha que $\varphi_t(x_o, p_o) \rightarrow x_e(x_o, p_o)$ para todo $(x_o, p_o) \in A$ quando $t \rightarrow \infty$. Se $x_e(x_o, p_o)$ é assintoticamente estável então, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que*

$$\|\varphi_t(x_o, p_o) - x_e(x_o, p_o)\| < \varepsilon$$

para todo $(x_o, p_o) \in K$ e $t > T$.

Da Equação (1.8) podemos associar o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, p_o), & x(0) = x_o, \\ \frac{dp}{dt} = 0, & p(0) = p_o, \end{cases} \quad (1.9)$$

e assim o parâmetro p_o de (1.8) pode ser visto como uma condição inicial da Equação 1.9. A solução para este sistema, em termos da solução de (1.8), é o fluxo $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$ definido por

$$\begin{aligned} \psi_t : U \times P &\rightarrow U \times P \\ (x_o, p_o) &\rightarrow (\varphi_t(x_o, p_o), p_o), \end{aligned}$$

no qual $P \subset \mathbb{R}^m$.

Neste caso, $y_e(x_o, p_o) = (x_e(x_o, p), p_o)$ é um ponto de equilíbrio para ψ_t se, e somente se, $x_e(x_o, p_o)$ é um ponto de equilíbrio para $\varphi_t(x_o, p_o)$ e vale também o seguinte resultado.

Proposição 1.22. *Sob as hipóteses da Proposição 1.21, dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que*

$$\|\psi_t(x_o, p_o) - y_e(x_o, p_o)\| < \varepsilon$$

para todo $(x_o, p) \in K$ e $t > T$.

1.4 Fluxos em espaços métricos

Na seção anterior apresentamos os principais resultados em análise qualitativa para fluxos gerados pelas soluções de equações diferenciais autônomas. De maneira geral, dizemos que uma família de aplicações contínuas definidas sobre o espaço métrico completo (X, d)

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ \times X &\rightarrow X \\ (t, x_o) &\rightarrow \varphi_t(x_o) \end{aligned}$$

é um *sistema dinâmico* quando satisfaz

$$\varphi_0(x_o) = x_o;$$

$$\varphi_t(\varphi_s(x_o)) = \varphi_{t+s}(x_o),$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$. O conjunto X é denominado *espaço de fase* do sistema dinâmico. No caso de $X \subset \mathbb{R}^2$, então X é dito ser o *plano de fase*.

Nesta seção apresentamos alguns resultados importantes de fluxos contínuos definidos em um espaço métrico (X, d) como ferramenta de análise qualitativa. Vale ressaltar que esses resultados também são válidos para os fluxos gerados por equações diferenciais autônomas.

Como anteriormente, a órbita de um ponto $x_o \in X$ é o subconjunto no espaço de fase definido por

$$\gamma(x_o) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \varphi_t(x_o) = \{\varphi_t(x_o) : t \in \mathbb{R}_+\}$$

e para um subconjunto $B \subset X$ temos $\gamma(B) = \bigcup_{x_o \in B} \gamma(x_o)$.

A órbita $\gamma(x_o)$ é denominada *órbita periódica* se existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_{t+\tau}(x_o) = \varphi_t(x_o)$. O menor número $\tau > 0$ para o qual essa propriedade é satisfeita é o *período* da órbita (Chueshov, 2002).

O ω - limite de um subconjunto $B \subset X$, é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \varphi_t(B)}.$$

Segue da definição acima que, para $x_o \in X$, temos $y \in \omega(x_o)$ quando existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi_{t_n}(x_o) \rightarrow y$.

Observemos que, se para algum $t > 0$ temos $\varphi_t(x_o) = y$, isto é, y está na órbita de x_o , então $\omega(x_o) = \omega(y)$, uma vez que $\varphi_{t_n}(y) = \varphi_{t_n}(\varphi_t(x_o)) = \varphi_{t+t_n}(x_o)$.

Sob certas hipóteses, o ω - limite é um conjunto invariante pelo sistema dinâmico.

Proposição 1.23. *Se $A \subset X$ é tal que $\omega(A)$ é compacto e atrai A , então $\omega(A)$ é invariante.*

Vale ressaltar aqui que se x_e é um ponto de equilíbrio para um fluxo φ_t gerado por uma equação autônoma, então $\omega(x_e) = \{x_e\}$ e portanto invariante.

Em algumas situações, ainda mais pode ser dito a respeito do ω - limite de um subconjunto de X .

Proposição 1.24. *Se A é um subconjunto não vazio de X tal que $\gamma(A)$ está contido em um compacto então $\omega(A)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai A . Além disso, se A é conexo então $\omega(A)$ também é conexo. Se $\omega(A)$ está contido no interior de A então $\omega(A)$ é assintoticamente estável.*

Se um conjunto compacto K é invariante pela aplicação φ_t então $\gamma(A)$ está contido em K para qualquer subconjunto $A \subset K$. Logo, pela proposição acima o ω - limite é não vazio e compacto e além disso $\omega(A)$ está contido em K . Essa proposição pode ser aplicada juntamente com o teorema de Poincaré - Bendixson para garantir a existência de ciclos limites para equações autônomas bidimensionais, como no caso do Exemplo 1.5.

Os fundamentos básicos da teoria de sistemas dinâmicos em espaços métricos apresentados aqui podem ser encontrados em referências como Hale (1988), Hale et al. (1991), Robinson (1999), Chueshov (2002), Milani e Kokschi (2005).

Capítulo 2

Conceitos básicos em lógica fuzzy

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns importantes resultados sobre a teoria dos subconjuntos fuzzy necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos deste trabalho. Dentre outras coisas, mostramos que algumas propriedades já conhecidas para os subconjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n também são válidas em espaços mais gerais.

Na Seção 2.2 introduzimos o conceito de subconjunto fuzzy de um conjunto X bem como algumas definições, propriedades e operações com subconjuntos fuzzy. Ainda na Seção 2.2, mostramos que o Teorema de Representação de Negoita - Ralescu (Diamond e Kloeden, 1994; Ralescu, 1992; Negoita e Ralescu, 1975) pode ser generalizado para o caso em que X é um espaço topológico arbitrário.

Na Seção 2.3, consideramos o conjunto $\mathcal{E}(X)$ formado pelos subconjuntos fuzzy de um espaço métrico X cujos α - níveis são compactos. Inicialmente, introduzimos uma métrica em $\mathcal{E}(X)$ e então mostramos que este espaço métrico é completo quando X é completo. Mostramos ainda que o Teorema de Nguyen (Nguyen, 1978; Fullér e Keresztfalvi, 1991; Barros, 1997; Román-Flores et al., 2001) é também válido em certos espaços topológicos.

Para finalizar este capítulo, na Seção 2.4 estudamos algumas propriedades da aplicação obtida pela da extensão de Zadeh da projeção ortogonal em espaços euclidianos.

2.2 Subconjuntos fuzzy

O conceito de conjunto fuzzy foi primeiramente introduzido por L. A. Zadeh em um artigo publicado em 1965 (Zadeh, 1965). Desde então, as aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy são amplas e abrangem áreas tanto de interesse estritamente matemático (Diamond e Kloeden, 1994; Nguyen e Walker, 2000) como em matemática aplicada e engenharia (Klir e Yuan, 1995; Barros e Bassanezi, 2006).

Antes de introduzirmos formalmente o conceito de subconjunto fuzzy vamos fazer algumas observações essenciais sobre a teoria clássica de conjuntos.

Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos de um conjunto X . Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ definimos a *função característica* $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ de A por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

É possível mostrar que o conjunto $\mathcal{C}(X)$ de todas as funções características com domínio em X é isomorfo ao conjunto $\mathcal{P}(X)$ (Negoița e Ralescu, 1975).

A ideia de conjunto fuzzy estabelecida por Zadeh, consiste em “ampliar” a imagem das funções características para todo o intervalo $[0, 1]$. Assim, cada subconjunto fuzzy F de X é caracterizado por uma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$, denominada *função de pertinência*, que associa para cada $x \in X$ o *grau de pertinência* $\mu_F(x)$ de x em F .

Definição 2.1. Seja X um conjunto não vazio. Um subconjunto fuzzy F de X é um subconjunto $\{(x, \mu_F(x)) : x \in X\}$ não vazio de $X \times [0, 1]$ para alguma função $\mu_F : X \rightarrow [0, 1]$.

O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de X será denotado aqui por $\mathcal{F}(X)$.

Embora a terminologia mais apropriada seja dizer que F é um subconjunto fuzzy de X , em muitas ocasiões, dizemos apenas que F é conjunto fuzzy, ficando implícita a existência de um conjunto X onde está definida a função de pertinência de F .

Se $A \in \mathcal{P}(X)$, isto é, $A \subset X$, então $\{(x, \chi_A(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto não vazio de $X \times [0, 1]$. Pela Definição 2.1, o subconjunto A determina um subconjunto fuzzy de X que será identificado aqui, com abuso de notação, por χ_A . Para uma melhor distinção,

o subconjunto fuzzy χ_A será denominado aqui, como na língua inglesa, um subconjunto *crisp* de X .

As operações de união e intersecção entre subconjuntos fuzzy são extensões das operações para subconjuntos de X , quando vistas por meio das funções de pertinência. Embora essas operações possam ser generalizadas de várias maneiras por meio dos conceitos de *t - norma* e *t - conorma* (Nguyen e Walker, 2000). Seguimos as mesmas definições apresentadas em Zadeh (1965).

Definição 2.2. Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X . A união, intersecção e complemento são subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$ cujas funções de pertinências são respectivamente:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Dado um subconjunto fuzzy A em $\mathcal{F}(X)$ definimos, para cada $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto $[A]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em A é ao menos α . O conjunto $[A]^\alpha \subset X$ é denominado α - *nível* de A e é definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \text{para } \alpha \in (0, 1]$$

O 0 - nível de um subconjunto fuzzy A é definido por

$$[A]^0 = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha = \overline{\text{supp}(A)}$$

onde $\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ é o suporte do subconjunto fuzzy A .

Dois subconjuntos fuzzy de um conjunto X são iguais quando as funções de pertinência são iguais, isto é,

$$A = B \iff \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X.$$

A igualdade entre conjuntos fuzzy pode também ser caracterizada por meio dos α - níveis. Neste caso, os conjuntos são iguais quando os α - níveis coincidem para todo $\alpha \in (0, 1]$ (Barros e Bassanezi, 2006).

Nos dois próximos resultados, mostramos que existe uma importante relação entre um subconjunto fuzzy de um conjunto X e seus α - níveis. Estes resultados são uma generalização, para espaços X quaisquer com estrutura topológica (Ferreira et al, 2010), de resultados já bem conhecidos no caso em que $X = \mathbb{R}^n$. As demonstrações apresentadas nas proposições a seguir são, portanto, apenas adaptações das ideias apresentadas em Ralescu (1992), Diamond e Kloeden (1994) ou Negoita e Ralescu (1975).

Proposição 2.1. *Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto fuzzy de X . Se μ_A é semicontínua superiormente, então valem as seguintes propriedades:*

a) $[A]^\alpha$ é um subconjunto fechado em X , para todo $\alpha \in [0, 1]$;

b) $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$ se $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$;

c) $[A]^\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [A]^\beta$ para todo $\alpha \in (0, 1]$;

d) O conjunto $\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha$ é denso em $[A]^0$.

Prova: O item (a) segue diretamente do fato de μ_A ser semicontínua superiormente e o item (b) é evidente pela definição de α - níveis.

Para provar o item (c), tomemos $\alpha \in (0, 1]$. Por (b) temos que para todo $\alpha < \beta$ valem que $[A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$ e portanto $\bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [A]^\beta \subseteq [A]^\alpha$. Por outro lado, se $x \in [A]^\alpha$ então temos $\mu_A(x) \geq \alpha$, o que implica que para todo $\beta < \alpha$ temos $\mu_A(x) \geq \alpha > \beta$ e portanto $x \in [A]^\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Assim, $x \in \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [A]^\beta$. Portanto a inclusão contrária está provada e consequentemente vale o item (c).

O item (d) segue diretamente da definição de 0 - nível. ■

A recíproca da Proposição 2.1 também é verdadeira. O Teorema de Representação de Negoita - Ralescu (Negoita e Ralescu, 1975) associa, para cada família de subconjuntos de \mathbb{R}^n satisfazendo as propriedades (a)–(d), um único subconjunto fuzzy de \mathbb{R}^n cujos α - níveis coincidem com os elementos da família de conjuntos dada. Na Proposição 2.2 a seguir, mostramos que esta propriedade também é válida quando X é um espaço topológico qualquer. Novamente, a demonstração para o caso em que X é um espaço topológico

segue as linhas gerais da demonstração proposta em Negoita e Ralescu (1975) para o caso em que $X = \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.2. *Seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ uma família de subconjuntos de um espaço topológico X satisfazendo:*

- a) A_α é um subconjunto fechado em X , para todo $\alpha \in [0, 1]$;
- b) $A_\beta \subseteq A_\alpha$ se $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$;
- c) $A_\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta$ para todo $\alpha \in (0, 1]$;
- d) O conjunto $\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha$ é denso em A_0 .

Então existe um único subconjunto fuzzy A de X com μ_A semicontínua superiormente tal que $[A]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Prova: Consideremos o subconjunto fuzzy A de X com função de pertinência definida por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \sup\{\beta : x \in A_\beta\}, & \text{se } x \in A_0, \\ 0, & \text{se } x \notin A_0. \end{cases}$$

Tomemos arbitrariamente $\alpha \in (0, 1]$. Para todo $x \in A_\alpha$, temos que $x \in A_0$ pelo item (b), e além disso $\sup\{\beta : x \in A_\beta\} \geq \alpha$; de fato pois, caso contrário, existiria um $\gamma \in [0, \alpha)$ tal que $x \notin A_\gamma \supseteq A_\alpha$, o que é um absurdo. Portanto, $\mu_A(x) \geq \alpha$ e consequentemente temos $A_\alpha \subseteq [A]^\alpha$.

Para a inclusão contrária, vamos separar a prova em dois casos. Seja $x \in [A]^\alpha$:

Caso I: Suponha que $\sup\{\beta : x \in A_\beta\} > \alpha$. Sob esta hipótese, existe $\gamma \in (\alpha, 1]$ com $x \in A_\gamma \subseteq A_\alpha$ o que, novamente pelo item (b), implica em $x \in A_\alpha$.

Caso II: Suponha que $\sup\{\beta : x \in A_\beta\} = \alpha$. Neste caso, para todo $\beta \in [0, \alpha)$ existe um real $\beta_0 \in (\beta, \alpha]$ tal que $x \in A_{\beta_0}$, o que pelo item (b) implica que $x \in A_\beta$, para todo

$\beta \in [0, \alpha)$. Assim, pelo item (c), temos que $x \in \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta = A_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Portanto, temos que $[A]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Agora,

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha} = A_0,$$

onde a última igualdade vale pelo item (d). Logo, temos que $[A]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Pelo que acabamos de provar e também pelo item (a), temos que o conjunto

$$\{x \in X : \mu_A(x) < \alpha\} = X - [A]^\alpha$$

é aberto em X . Logo, μ_A é semicontínua superiormente.

Para provarmos que é único, vamos supor que existe um subconjunto fuzzy B tal que $[B]^\alpha = A_\alpha$. Então pelo que mostramos, $[B]^\alpha = [A]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, $B = A$ e a afirmação está provada. ■

Em muitos casos pode ser necessário estender o domínio de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$. Notemos que para cada subconjunto $A \subset X$, a aplicação f define o subconjunto $f(A) \subset Y$. Supondo agora que A seja um subconjunto fuzzy X , isto é $A \in \mathcal{F}(X)$, então precisamos determinar como será a imagem induzida pela aplicação f sobre A . A forma como essa imagem é caracterizada pode ser feita através do *Princípio da Extensão* proposto por Zadeh (1965), conforme definição a seguir.

Definição 2.3 (Princípio da Extensão de Zadeh). Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e A um subconjunto fuzzy de X . A *extensão de Zadeh* $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ é a aplicação cuja imagem $\hat{f}(A)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{a \in f^{-1}(y)} \mu_A(a) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, um subconjunto $A \subset X$ determina o conjunto fuzzy χ_A de X cuja função de pertinência é a função característica de A . A imagem de χ_A através da

extensão \hat{f} de uma função f coincide com o conjunto fuzzy $\chi_{f(A)}$ definido por $f(A)$. Isto é, $\hat{f}(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. De fato, a definição acima garante que $\hat{f}(\chi_A)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\hat{f}(\chi_A)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in f(A), \\ 0 & \text{se } y \notin f(A). \end{cases}$$

que é a função característica de $f(A)$. Logo, $\hat{f}(\chi_A) = \chi_{f(A)}$. Em particular, para todo $x \in X$ vale $\hat{f}(\chi_{\{x\}}) = \chi_{\{f(x)\}}$.

2.3 O subespaço $\mathcal{E}(X)$

Para a aplicação que faremos na sequência desse trabalho, restringimos nossa análise aos subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjunto compactos e não vazios em X , isto é,

$$\mathcal{E}(X) = \{A \in \mathcal{F}(X) : \forall \alpha \in [0, 1], [A]^\alpha \text{ é compacto e não vazio}\}.$$

Os subconjuntos fuzzy que estão em $\mathcal{E}(X)$ serão denotados por letras minúsculas em negrito para diferenciar dos elementos de X .

Dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(Y)$, $Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(X)$ através da função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{u}}}(x) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{u}}(x) & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \notin Y. \end{cases} \quad (2.1)$$

Segue diretamente da definição acima que $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, de modo que podemos identificar $\mathcal{E}(Y)$ como um subconjunto de $\mathcal{E}(X)$. Com abuso de notação, podemos dizer então que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Por outro lado, dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência $\mu_{\bar{\mathbf{u}}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x)$ para todo $x \in Y$. Como anteriormente, vamos ter $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ e novamente podemos dizer que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Os subconjuntos, no sentido clássico, do conjunto $\mathcal{E}(X)$ serão representados aqui por letras maiúsculas em negrito. Por exemplo, dado $Y \subset X$, representaremos por $\mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ o subconjunto formado pelos elementos de $\mathcal{E}(X)$ cujos α - níveis são subconjuntos de Y . Isto é,

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X) : [\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]\}.$$

Dados os pontos $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(X)$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(Y)$ podemos definir um ponto $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(X \times Y)$ com função de pertinência $\mu_{\mathbf{z}} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \min\{\mu_{\mathbf{x}}(x), \mu_{\mathbf{y}}(y)\}.$$

O conjunto fuzzy \mathbf{z} é denominado *produto cartesiano fuzzy* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} . De maneira geral, o produto cartesiano fuzzy pode ser generalizado por meio do conceito de *t - norma*.

Uma *t - norma* é uma aplicação $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Elemento neutro: $\Delta(1, x) = x$;
- b) Comutativa: $\Delta(x, y) = \Delta(y, x)$;
- c) Associativa: $\Delta(x, \Delta(y, z)) = \Delta(\Delta(x, y), z)$;
- d) Monótona: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $\Delta(x, y) \leq \Delta(u, v)$.

Alguns exemplos de operações que satisfazem as propriedade acima são:

- *t - norma* do produto:

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \mu_{\mathbf{x}}(x)\mu_{\mathbf{y}}(y).$$

- *t - norma* de Lukasiewicz:

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \max\{\mu_{\mathbf{x}}(x) + \mu_{\mathbf{y}}(y) - 1, 0\}.$$

- t - norma drástica:

$$\mu_{\mathbf{z}}(x, y) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{x}}(x) & \text{se } \mu_{\mathbf{y}}(y) = 1, \\ \mu_{\mathbf{y}}(y) & \text{se } \mu_{\mathbf{x}}(x) = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O conjunto dos pontos $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(X \times Y)$ cujas funções de pertinência são definidas a partir das funções de pertinência de \mathbf{x} e \mathbf{y} por alguma t - norma, em particular para uma das quatro maneiras acima expostas, será denotado aqui por $\mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(Y)$. Claramente, para cada t - norma, temos que $\mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(Y) \subset \mathcal{E}(X \times Y)$. Para enfatizar, denotamos um elemento \mathbf{z} em $\mathcal{E}(X) \times \mathcal{E}(Y)$ determinado através de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(X)$ e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(Y)$ por $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Isto é, a notação $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ indica que a função de pertinência $\mu_{\mathbf{z}} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ de \mathbf{z} é definida pelas funções de pertinência de \mathbf{x} e \mathbf{y} através de uma t - norma.

As propriedades (a)–(d) da Proposição 2.1 que provamos na seção anterior também são válidas para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{E}(X)$.

Corolário 2.3. *Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$, então $\mu_{\mathbf{u}}$ é semicontínua superiormente e valem os itens (a)–(d) da Proposição 2.1.*

Prova: Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ então os α - níveis são compactos e portanto fechados de modo que o conjunto $A_\alpha = \{x \in X : \mu_{\mathbf{u}}(x) < \alpha\} = X - [\mathbf{u}]^\alpha$ é aberto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dado $y \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V_y inteiramente contida em $A_{\mu_{\mathbf{u}}(y) + \varepsilon}$. Logo, $\mu_{\mathbf{u}}(x) < \mu_{\mathbf{u}}(y) + \varepsilon$ para todo $x \in V_y$ o que implica que $\mu_{\mathbf{u}}$ é semicontínua superiormente.

■

Assim como anteriormente, a Proposição 2.2 também pode ser igualmente provada quando temos uma família de subconjuntos compactos de X satisfazendo as propriedades (a) – (d).

Corolário 2.4. *Se $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ é uma família de subconjuntos compactos satisfazendo as propriedades (a) - (d) da Proposição 2.2, então existe um único $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ tal que $[\mathbf{u}]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Prova: Pela proposição anterior existe um subconjunto fuzzy de X cujos α - níveis coincidem com os subconjuntos em \mathcal{A} que, por hipótese, são compactos. Logo, esse subconjunto

está em $\mathcal{E}(X)$. ■

Para as aplicações de conjuntos fuzzy feitas nas seções subsequentes, precisamos definir uma estrutura de espaços métricos em $\mathcal{E}(X)$. Podemos definir uma métrica sobre $\mathcal{E}(X)$ por meio da métrica de Hausdorff para subconjuntos compactos de X . Em Diamond e Kloeden (1994) são discutidas algumas propriedades dos espaços $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ para distintas métricas, em particular, para métricas definidas a partir da métrica de Hausdorff.

Seja $\mathcal{K}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos compactos não vazios do espaço métrico (X, d) . Dados dois conjuntos A, B em $\mathcal{K}(X)$ a distância entre eles pode ser definida por:

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$$

A distância entre conjuntos definida acima é uma *pseudométrica* (Kreyszig, 1978) para $\mathcal{K}(X)$, uma vez que $\text{dist}(A, B) = 0$ se, e somente se, $A \subseteq B$, não necessariamente valendo a igualdade. No entanto, *distância de Hausdorff* entre $A, B \in \mathcal{K}(X)$ definida por

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\} \\ &= \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\} \end{aligned}$$

é uma métrica para o conjunto $\mathcal{K}(X)$, de modo que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é um espaço métrico. Vale ainda que se (X, d) é um espaço métrico completo, então $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é também um espaço métrico completo (Aliprantis e Border, 2005).

Através da métrica de Hausdorff d_H , podemos definir uma métrica para o conjunto $\mathcal{E}(X)$, que denotaremos aqui por d_∞ . Dados dois pontos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}(X)$ a distância entre \mathbf{u} e \mathbf{v} é definida por

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}]^\alpha, [\mathbf{v}]^\alpha).$$

Não é difícil mostrar que a distância definida acima satisfaz as propriedades de uma métrica e assim, $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico.

Dado um conjunto $Y \subset X$, consideremos os conjuntos

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(X) : [\mathbf{x}]^0 \subset Y\}$$

e $\mathcal{E}(Y)$. Essencialmente, os elementos de \mathbf{Y} e $\mathcal{E}(Y)$ se diferem apenas pelo domínio da função de pertinência. Sejam d_∞^1 a restrição da métrica d_∞ ao conjunto $\mathbf{Y} \subset \mathcal{E}(X)$ e d_∞^2 definida como acima para o conjunto $\mathcal{E}(Y)$.

Proposição 2.5. *Seja $Y \subset X$. Os espaços métricos (\mathbf{Y}, d_∞^1) e $(\mathcal{E}(Y), d_\infty^2)$ são isométricos.*

Prova: Dado um ponto $\mathbf{u} \subset Y \subset \mathcal{E}(X)$ com função de pertinência $\mu_{\mathbf{u}} : X \rightarrow [0, 1]$, seja $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência $\mu_{\bar{\mathbf{u}}} : Y \rightarrow [0, 1]$ que associa para cada $y \in Y$ o valor $\mu_{\mathbf{u}}(y)$. Isto é, $\mu_{\bar{\mathbf{u}}}$ é a restrição da função de pertinência de \mathbf{u} ao conjunto $Y \subset X$.

Seja $T : \mathbf{Y} \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ tal que para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}$, $T(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{u}}$. A aplicação T é injetiva, pois se $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então existe $y \in Y$ tal que $\mu_{\mathbf{u}}(y) \neq \mu_{\mathbf{v}}(y)$ e conseqüentemente $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$.

Tomemos $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ e consideremos $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ definido por meio da função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{u}}(x) = \begin{cases} \mu_{\bar{\mathbf{u}}}(x) & \text{se } x \in Y, \\ 0 & \text{se } x \notin Y. \end{cases}$$

Segue diretamente disso que $[\mathbf{u}]^\alpha \subset Y$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e portanto $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}$. Além disso, $T(\mathbf{u}) = \bar{\mathbf{u}}$. Logo, $T : \mathbf{Y} \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ é uma aplicação sobrejetiva e conseqüentemente, T é uma bijeção entre os conjuntos \mathbf{Y} e $\mathcal{E}(Y)$.

Pela forma como a bijeção T foi construída, não é difícil ver que $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [T(\mathbf{u})]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}$. Temos então que,

$$d_\infty^2(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([\bar{\mathbf{u}}]^\alpha, [\bar{\mathbf{v}}]^\alpha) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([\mathbf{u}]^\alpha, [\mathbf{v}]^\alpha) = d_\infty^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Y}$.

Logo, \mathbf{Y} e $\mathcal{E}(Y)$ são isométricos e a afirmação está provada. ■

O espaço métrico $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ apresenta a importante propriedade de ser completo quando (X, d) é completo. A demonstração apresentada aqui tem como base a apresentada em Diamond e Kloeden (1994) para o espaço $(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$.

Proposição 2.6. *Se (X, d) é um espaço métrico completo então $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico completo.*

Prova: Seja $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $k, n > N$ temos $d_\infty(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k) < \varepsilon$ e conseqüentemente $d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, [\mathbf{u}_k]^\alpha) < \varepsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Mas isto implica que, para todo $\alpha \in [0, 1]$, $\{[\mathbf{u}_k]^\alpha\}_{k=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $(\mathcal{K}(X), d_H)$ e portanto converge para, digamos, $A_\alpha \in \mathcal{K}(X)$. Mais do que isso, a convergência é uniforme em α pois:

$$\begin{aligned} d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha) &\leq d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}_n]^\alpha) + d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, A_\alpha) \\ &< \varepsilon + d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, A_\alpha). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Essa desigualdade vale para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $n, k > N(\varepsilon)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ temos que $d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha) \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $k > N(\varepsilon)$.

Mostramos agora que a família $\mathcal{A} = \{A_\alpha \in \mathcal{K}(X) : \alpha \in [0, 1]\}$ satisfaz as propriedades (a)–(d) da Proposição 2.2 de modo que, pelo Corolário 2.4, existe um único $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ tal que $[\mathbf{u}]^\alpha = A_\alpha$. Uma vez que A_α é compacto, o primeiro item claramente é satisfeito. Seja agora $0 < \alpha \leq 1$ e tomemos $\beta \in [0, \alpha)$. Então temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_\alpha, A_\beta) &\leq \text{dist}(A_\alpha, [\mathbf{u}_k]^\alpha) + \text{dist}([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}_k]^\beta) + \text{dist}([\mathbf{u}_k]^\beta, A_\beta) \\ &\leq d_H(A_\alpha, [\mathbf{u}_k]^\alpha) + d_H([\mathbf{u}_k]^\beta, A_\beta) \end{aligned}$$

já que $\text{dist}([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}_k]^\beta) = 0$ pois $[\mathbf{u}_k]^\alpha \subseteq [\mathbf{u}_k]^\beta$. Portanto, quando $k \rightarrow \infty$ temos $\text{dist}(A_\alpha, A_\beta) \rightarrow 0$ e conseqüentemente $A_\alpha \subseteq A_\beta$ para todo $\beta \in [0, \alpha)$, o que prova o item (b).

Desde que $\mathbf{u}_k \in \mathcal{E}(X)$, para todo $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, temos

$$[\mathbf{u}_k]^\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [\mathbf{u}_k]^\beta$$

pelo item (c) da Proposição 2.1. Usando a desigualdade triangular, temos então que:

$$\begin{aligned} d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta, A_\alpha\right) &\leq d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta, \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [\mathbf{u}_k]^\beta\right) + d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [\mathbf{u}_k]^\beta, [\mathbf{u}_k]^\alpha\right) + \\ &\quad + d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha) \\ &= d_H\left(\bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta, \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} [\mathbf{u}_k]^\beta\right) + d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, A_\alpha) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in (0, 1]$ fixo. Desde que $[\mathbf{u}_k]^\alpha \rightarrow A_\alpha$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, então as duas parcelas na soma acima convergem para zero, e assim temos que

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta$$

o que prova o item (c). Para o item (d), novamente podemos usar a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} d_H(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}, A_0) &\leq d_H(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}, \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [\mathbf{u}_k]^\alpha}) + d_H(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [\mathbf{u}_k]^\alpha}, [\mathbf{u}_k]^0) + \\ &\quad + d_H([\mathbf{u}_k]^0, A_0) \\ &= d_H(\overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}, \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [\mathbf{u}_k]^\alpha}) + d_H([\mathbf{u}_k]^0, A_0) \end{aligned}$$

pelo mesmo argumento usado anteriormente. Logo,

$$A_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}$$

e provamos o item (d). Portanto, existe $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ satisfazendo $[\mathbf{u}]^\alpha = A_\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$, de modo que por (2.2) temos que $d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) \leq \varepsilon$ para todo $k > N(\varepsilon)$ e $\alpha \in [0, 1]$. Logo, $d_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) \leq \varepsilon$ e portanto $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é completo. ■

Na sequência desta seção, analisamos algumas propriedades das funções obtidas por meio do Princípio da Extensão de Zadeh aplicado em funções definidas sobre espaços de Hausdorff. Como veremos, as extensões sobre esses espaços compartilham propriedades similares às extensões de funções definidas sobre \mathbb{R}^n .

O teorema de Nguyen fornece uma importante relação entre os α - níveis da imagem de um subconjuntos fuzzy e a imagem de seus α - níveis por uma função $f : X \times Y \rightarrow Z$. De acordo com Nguyen (1978), para todo $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$[\hat{f}(\mathbf{c})]^\alpha = f([\mathbf{c}]^\alpha) = f([\mathbf{a}]^\alpha, [\mathbf{b}]^\alpha),$$

no qual $\mathbf{a} \in \mathcal{E}(X)$, $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(Y)$ e $\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é dado pela t - norma do mínimo se, e somente

se,

$$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} \min\{\mu_a(x), \mu_b(y)\}$$

é atingido para todo $z \in Z$. Quando f é contínua e $X = Y = Z = \mathbb{R}$, Nguyen mostra ainda que o supremo é sempre atingido e portanto, vale a identidade entre os α - níveis. Fullér e Keresztfalvi (1991) mostram que o teorema de Nguyen continua válido quando \mathbf{c} é definido por alguma t - norma contínua superiormente. No entanto, ambos os trabalhos consideram que $[\mathbf{a}]^0 = X$ e $[\mathbf{b}]^0 = Y$.

Para o 0 - nível como estamos considerando neste trabalho, é bem conhecido que o teorema de Nguyen também é válido quando $X = \mathbb{R}^n$ (Barros, 1997; Barros et al., 1997). Na próxima proposição, mostramos que o teorema ainda continua válido para espaços topológicos de Hausdorff.

Teorema 2.7. *Sejam X e Y espaços de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ está bem definida e vale*

$$[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha) \quad (2.3)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$.

Prova: Primeiramente ressaltamos que

$$f([\mathbf{u}]^\alpha) \subseteq [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha \quad (2.4)$$

pois se $y \in f([\mathbf{u}]^\alpha)$ então existe $x \in [\mathbf{u}]^\alpha$ tal que $y = f(x)$. Logo, pela Definição 2.3, temos $y \in [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$.

Para a inclusão contrária, tomemos $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$. Para mostrar que $\hat{f}(\mathbf{u})$ está em $\mathcal{E}(Y)$, basta provar que os α - níveis $[\hat{\mathbf{u}}]^\alpha$ são compactos e não vazios para cada $\alpha \in [0, 1]$. Mas, para isto é suficiente provar a identidade (2.3), uma vez que função contínua leva compacto em compacto.

Para provarmos a identidade (2.3) devemos notar que sendo f contínua então $f^{-1}(\{y\})$ é um conjunto fechado em X para qualquer $y \in Y$. Desde que $[\mathbf{u}]^0$ é compacto, então $f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0 \subset X$ é um subconjunto fechado de $[\mathbf{u}]^0$ e portanto compacto.

Suponha que $\alpha > 0$. Tomemos então $y \in [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha$. Por definição, temos que

$$\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mu_{\mathbf{u}}(x) \geq \alpha > 0,$$

e portanto, existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tal que $u(x) > 0$, isto é, $f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0 \neq \emptyset$. Isto também implica que

$$\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mu_{\mathbf{u}}(x) = \sup_{x \in f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0} \mu_{\mathbf{u}}(x)$$

Desde que $\mu_{\mathbf{u}}(x)$ é semicontínua superiormente e $f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0$ é compacto, então existe $x \in f^{-1}(\{y\}) \cap [\mathbf{u}]^0$ tal que $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \mu_{\mathbf{u}}(x) \geq \alpha$, ou seja, temos $y = f(x)$ com $x \in [\mathbf{u}]^\alpha$. Logo, podemos concluir que $y \in f([\mathbf{u}]^\alpha)$ e conseqüentemente $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha \subseteq f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.

No entanto, desde que $[\mathbf{u}]^\alpha \subseteq [\mathbf{u}]^0$, vale que $f([\mathbf{u}]^\alpha) \subseteq f([\mathbf{u}]^0)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$ de modo que então temos

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([\mathbf{u}]^\alpha) \subseteq f([\mathbf{u}]^0)$$

e conseqüentemente

$$[\hat{f}(\mathbf{u})]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([\mathbf{u}]^\alpha)} \subseteq f([\mathbf{u}]^0)$$

já que $f([\mathbf{u}]^0)$ é um conjunto fechado. Logo, $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha \subseteq f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ o que juntamente com a inclusão (2.4) prova a afirmação. ■

Em muitos casos não podemos garantir que a aplicação $f : X \rightarrow Y$ seja contínua em todo o domínio X , mas apenas em um subconjunto $A \subset X$. Para este caso, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.8. *Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja contínua em $A \subset X$. Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ é tal que $[\mathbf{u}]^\alpha \subset A$, então $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Prova: Sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\mathbf{u}]^0 \subset A$ e $f_A : A \rightarrow Y$ a restrição de f ao conjunto A , isto é, para todo $x \in A$ temos $f_A(x) = f(x)$. Consideremos também $\mathbf{v} \in \mathcal{E}(A)$ tal

que $\mu_v(x) = \mu_u(x)$ para todo $x \in A$. Desde que $\mu_u(x) = 0$ para todo $x \in X - A$, então $[\mathbf{v}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A proposição anterior garante que a aplicação $\hat{f}_A : \mathcal{E}(A) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ satisfaz

$$[\hat{f}_A(\mathbf{v})]^\alpha = f_A([\mathbf{v}]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Seja agora $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}}(y) = \begin{cases} \mu_{\hat{f}_A(\mathbf{v})}(y) & \text{se } y \in f(A), \\ 0 & \text{se } y \notin f(A). \end{cases}$$

Pela forma como \mathbf{y} está definido, valem as seguintes igualdades:

$$[\mathbf{y}]^\alpha = [\hat{f}_A(\mathbf{v})]^\alpha = f_A([\mathbf{v}]^\alpha) = f([\mathbf{v}]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Agora, se $y \in f(A)$, então temos:

$$\mu_{\mathbf{y}}(y) = \mu_{\hat{f}_A(\mathbf{v})}(y) = \sup_{f_A(x)=y} \mu_{\mathbf{v}}(x).$$

Desde que, para todo $x \in A$ temos $f_A(x) = f(x)$ e $\mu_{\mathbf{v}}(x) = \mu_{\mathbf{u}}(x)$ então

$$\sup_{f_A(x)=y} \mu_{\mathbf{v}}(x) = \sup_{\substack{f(x)=y \\ x \in A}} \mu_{\mathbf{u}}(x) = \sup_{f(x)=y} \mu_{\mathbf{u}}(x) = \mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y),$$

uma vez que para $x \in X - A$ vale $\mu_{\mathbf{u}}(x) = 0$. De onde podemos concluir que $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \mu_{\mathbf{y}}(y)$ para todo $y \in f(A)$.

Se $y \in Y - f(A)$ então $\mu_{\mathbf{y}}(y) = 0$. Por outro lado, não existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e como consequência $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = 0$. Assim, vale a igualdade $\mu_{\hat{f}(\mathbf{u})}(y) = \mu_{\mathbf{y}}(y)$ para todo $y \in Y$ de onde concluimos que $\mathbf{y} = \hat{f}(\mathbf{u})$. Logo, temos $[\hat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o que prova a proposição. ■

Como vemos em Barros et al. (1997), algumas propriedades da aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

são preservadas pelo princípio da extensão de Zadeh. Uma das principais propriedades é a continuidade. Isto é, se f é contínua então a aplicação \hat{f} também é contínua. Como veremos mais adiante, a extensão de Zadeh \hat{f} de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ também é contínua quando X é um espaço métrico localmente compacto. Os próximos dois lemas são para auxiliar na demonstração desta afirmação.

Lema 2.9. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e $C \in \mathcal{K}(X)$. A aplicação $\tilde{f} : \mathcal{K}(C) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ definida por $\tilde{f}(A) = \{f(a) : a \in A, A \in \mathcal{K}(C)\}$ é uniformemente contínua na métrica de Hausdorff.*

Prova: Desde que f é uma aplicação contínua, então para todo $A \in \mathcal{K}(C)$ temos $f(A) \in \mathcal{K}(Y)$. Portanto, a aplicação \tilde{f} está bem definida. Sabemos também que f é uniformemente contínua em C , uma vez que C é compacto.

Dessa forma, sob a hipótese de $C \in \mathcal{K}(X)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x, y \in C$ com

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Tomemos então $A, B \in \mathcal{K}(C)$ tal que $d_H(A, B) < \delta$. Isto implica que

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) < \delta \quad \text{e} \quad \text{dist}(B, A) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) < \delta$$

e conseqüentemente temos que para todo $x \in A$ e $y \in B$, existem $a_y \in A$ e $b_x \in B$ tal que:

$$d(x, b_x) < \delta \quad \text{e} \quad d(y, a_y) < \delta.$$

Pela continuidade uniforme de f em C , isto implica que:

$$\tilde{d}(f(x), f(b_x)) < \varepsilon \quad \text{e} \quad \tilde{d}(f(y), f(a_y)) < \varepsilon.$$

Segue diretamente dessas desigualdades que:

$$\text{dist}(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \tilde{d}(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

$$\text{dist}(\tilde{f}(B), \tilde{f}(A)) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \tilde{d}(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Logo, concluímos que

$$d_H(A, B) < \delta \Rightarrow \tilde{d}_H(\tilde{f}(A), \tilde{f}(B)) \leq \varepsilon,$$

o que prova a afirmação. ■

Lema 2.10. *Seja X um espaço métrico localmente compacto. Se $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em $\mathcal{E}(X)$ então existe $K \in \mathcal{K}(X)$ tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\mathbf{u}_n]^0 \subseteq K$$

para algum $N \in \mathbb{N}$.

Prova: Seja $V([\mathbf{u}]^0, \varepsilon)$ a vizinhança de $[\mathbf{u}]^0$ definida por

$$V([\mathbf{u}]^0, \varepsilon) = \{x \in X : \text{dist}(x, [\mathbf{u}]^0) < \varepsilon\}.$$

Como o conjunto X é localmente compacto, então existe $\delta > 0$ tal que $\overline{V([\mathbf{u}]^0, \delta)}$ é compacto (Aliprantis e Border, 2005).

Por hipótese, \mathbf{u}_n converge para \mathbf{u} na métrica d_∞ . Assim, para o $\delta > 0$ acima, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, temos que

$$d_\infty(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}_n]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta.$$

Em particular, temos que $d_H([\mathbf{u}_n]^0, [\mathbf{u}]^0) < \delta$ para todo $n \geq N$. Mas isto implica que, para todo $n \geq N$,

$$[\mathbf{u}_n]^0 \subset \overline{V([\mathbf{u}]^0, \delta)} = \{x \in X : \text{dist}(x, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta\}$$

Seja então

$$K = [\mathbf{u}_1]^0 \cup [\mathbf{u}_2]^0 \cup \dots \cup [\mathbf{u}_{N-1}]^0 \cup \overline{V([\mathbf{u}]^0, \delta)}.$$

O conjunto K definido acima é compacto e portanto pertence a $\mathcal{K}(X)$. Além disso, não

é difícil ver que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\mathbf{u}_n]^0 \subseteq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Provemos agora que a extensão de Zadeh de uma aplicação contínua em um espaço métrico localmente compacto também é contínua.

Proposição 2.11. *Sejam (X, d) e (Y, \tilde{d}) espaços métricos e X localmente compacto. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ também é contínua.*

Prova: Seja $\{\mathbf{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(X)$ uma sequência convergente para \mathbf{u} . Vamos mostrar que $\hat{f}(\mathbf{u}_k) \rightarrow \hat{f}(\mathbf{u})$ quando $k \rightarrow \infty$.

Pelo Lema 2.10 podemos escolher um compacto $C \subset X$ tal que

$$\bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\mathbf{u}_p]^\alpha \subseteq C.$$

Agora, o Lema 2.9 garante que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para $A, B \in \mathcal{K}(C)$ temos

$$d_H(A, B) < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}_H(f(A), f(B)) < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Desde que \mathbf{u}_k converge para \mathbf{u} na métrica d_∞ , então existe $K_\delta \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > K_\delta$ vale

$$d_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta_\varepsilon.$$

Portanto, para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $k > K_\delta$, temos por (2.5) que

$$d_H([\mathbf{u}_k]^\alpha, [\mathbf{u}]^\alpha) < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}_H(f([\mathbf{u}_k]^\alpha), f([\mathbf{u}]^\alpha)) < \varepsilon,$$

já que $[\mathbf{u}_k]^\alpha$ e $[\mathbf{u}]^\alpha$ estão em $\mathcal{K}(C)$ pelo Lema 2.10. Logo, pela Proposição 2.7

$$\begin{aligned} \tilde{d}_\infty(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{d}_H([f(\mathbf{u}_k)]^\alpha, [f(\mathbf{u})]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{d}_H(f([\mathbf{u}_k]^\alpha), f([\mathbf{u}]^\alpha)) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que \hat{f} é contínua. ■

Vale também a recíproca da proposição acima.

Proposição 2.12. *Suponha que (X, d) e (Y, \tilde{d}) sejam espaços métricos e seja $\hat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ a extensão de Zadeh de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$. Se \hat{f} é contínua então f é contínua.*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}(X)$ temos

$$d_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < \delta \Rightarrow \tilde{d}_\infty(\hat{f}(\mathbf{u}), \hat{f}(\mathbf{v})) < \varepsilon.$$

Tomemos $x, y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$. Então $\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}} \in \mathcal{E}(X)$ e vale que

$$d_\infty(\chi_{\{x\}}, \chi_{\{y\}}) = d(x, y) < \delta.$$

Portanto

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) = \tilde{d}_\infty(\hat{f}(\chi_{\{x\}}), \hat{f}(\chi_{\{y\}})) < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de f . ■

2.4 Projeções em espaços métricos fuzzy

Consideremos a aplicação $P_n : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ associa o ponto $P_n(x, y) = (x, 0)$.

Desde que podemos caracterizar \mathbb{R}^n como um subconjunto de \mathbb{R}^{n+m} através da identificação com o subconjunto $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, então a aplicação P_n pode ser vista como a projeção de \mathbb{R}^{n+m} sobre o conjunto \mathbb{R}^n . Por esse motivo, dizemos que x é a projeção, em \mathbb{R}^n , do ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Observemos que um ponto (u, v) está na imagem de P_n se, e somente se, $v = 0$. Além disso, $P_n(u, y) = (u, 0)$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$. Desta forma, dado um ponto $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$, com função de pertinência $\mu_{\mathbf{z}} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow [0, 1]$, a imagem $\hat{P}_n(\mathbf{z})$, obtida pela extensão de

Zadeh da projeção P_n , tem como função de pertinência

$$\mu_{\hat{P}_n(\mathbf{z})}(x, y) = \begin{cases} \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{z}}(x, v) & \text{se } y = 0, \\ 0 & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Podemos definir um ponto $\bar{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ por meio da função de pertinência

$$\mu_{\bar{x}}(x) = \mu_{\hat{P}_n(\mathbf{z})}(x, 0) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{z}}(x, v).$$

Neste caso, a função de pertinência de $\hat{P}_n(\mathbf{z})$ torna-se:

$$\mu_{\hat{P}_n(\mathbf{z})}(x, y) = \min\{\mu_{\bar{x}}(x), \chi_{\{0\}}(y)\}.$$

Assim, a aplicação $\hat{P}_n : \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$, obtida pela extensão de Zadeh de P_n , que para cada $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ associa o ponto $\hat{P}_n(\mathbf{z}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \times \chi_{\{0\}}$ pode ser vista como uma projeção de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, uma vez que este pode ser identificado com o subconjunto $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \times \chi_{\{0\}}$. Igualmente à projeção P_n , não é difícil ver que a aplicação \hat{P}_n também satisfaz:

$$\hat{P}_n(\hat{P}_n(\mathbf{z})) = \hat{P}_n(\mathbf{z}).$$

Baseado nisso, podemos definir a projeção de $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ como sendo o ponto $\bar{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ com função de pertinência

$$\mu_{\bar{x}}(x) = \sup_{a \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{z}}(x, a). \quad (2.6)$$

De modo análogo, podemos querer encontrar a projeção de $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Neste caso, devemos considerar a extensão de Zadeh da projeção $P_m : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ associa o ponto $P_m(x, y) = (0, y)$. Desde que $P_m(x, u) = (0, u)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a imagem $\hat{P}_m(\mathbf{z})$ tem função de pertinência

$$\mu_{\hat{P}_m(\mathbf{x})}(x, y) = \begin{cases} \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{x}}(u, y) & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Assim, definimos a projeção $\bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ de $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ através da função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{y}}}(y) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{z}}(u, y). \quad (2.7)$$

Nos exemplos a seguir procuramos esclarecer os conceitos aqui apresentados.

Exemplo 2.1. Sejam $\mathbf{a} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$. Podemos definir $\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{c}}(x, y) = \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(y)\}.$$

A imagem de \mathbf{c} pela aplicação \hat{P}_n , neste caso, tem como função de pertinência:

$$\mu_{\hat{P}_n(\mathbf{c})}(x, y) = \begin{cases} \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} & \text{se } y = 0, \\ 0 & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Desde de que $\min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} \leq \mu_{\mathbf{a}}(x)$ então

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} \leq \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Como $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$, então existe $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mu_{\mathbf{b}}(v) = 1$. Assim, a projeção $\bar{\mathbf{x}}$ de \mathbf{c} sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tem função de pertinência:

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \min\{\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)\} = \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Na Figura 2.1 podemos ver as funções de pertinência de $\mathbf{c} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, definido a partir de \mathbf{a} e $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, e sua projeção sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, respectivamente.

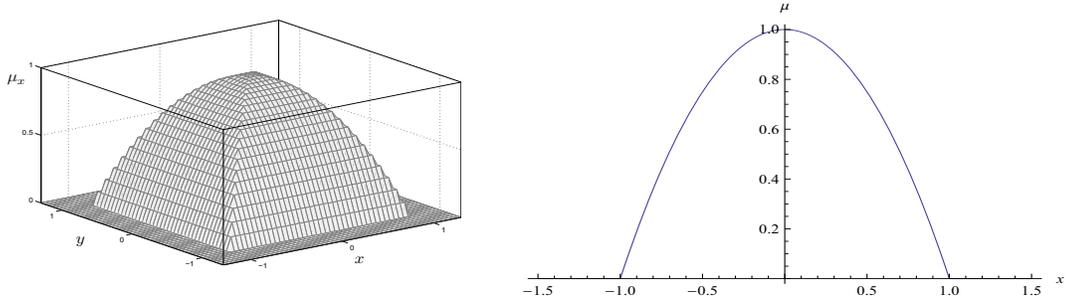


Figura 2.1: Funções de pertinência de \mathbf{c} e \mathbf{a} respectivamente.

Com argumento semelhante podemos mostrar que $\mathbf{b} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ é a projeção de \mathbf{c} em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$.

Podemos ainda definir $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ através da t -norma do produto, isto é,

$$\mu_{\mathbf{c}}(x, y) = \mu_{\mathbf{a}}(x)\mu_{\mathbf{b}}(y).$$

A projeção de \mathbf{c} em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tem como função de pertinência:

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{x}}(x, v) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{a}}(x)\mu_{\mathbf{b}}(v) = \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Por outro lado, a projeção em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ tem função de pertinência:

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{x}}(u, y) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{a}}(u)\mu_{\mathbf{b}}(y) = \mu_{\mathbf{b}}(y).$$

Analogamente, podemos mostrar que as projeções de $\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ para qualquer t -norma Δ são, respectivamente, \mathbf{a} e \mathbf{b} . Primeiramente, para qualquer t -norma Δ , vale

$$\Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(y)) \leq \Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), 1) = \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Assim,

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)) \leq \mu_{\mathbf{a}}(x).$$

Porém, o supremo é atingido se tomarmos $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mu_{\mathbf{b}}(v) = 1$. Logo, a projeção de $\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \Delta(\mu_{\mathbf{a}}(x), \mu_{\mathbf{b}}(v)) = \mu_{\mathbf{a}}(x),$$

para qualquer t - norma Δ . □

Exemplo 2.2. Consideremos $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ determinado pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}}(x, y) = \max\{1 - x^2 - 2y^2, 0\}.$$

Para este caso, temos as projeções $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ determinadas respectivamente por:

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} \mu_{\mathbf{x}}(x, v) = \max\{1 - x^2, 0\},$$

$$\mu_{\bar{\mathbf{y}}}(y) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \mu_{\mathbf{x}}(u, y) = \max\{1 - 2y^2, 0\}.$$

Na Figura 2.2 podemos ver as funções de pertinência de \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{x}}$ respectivamente.

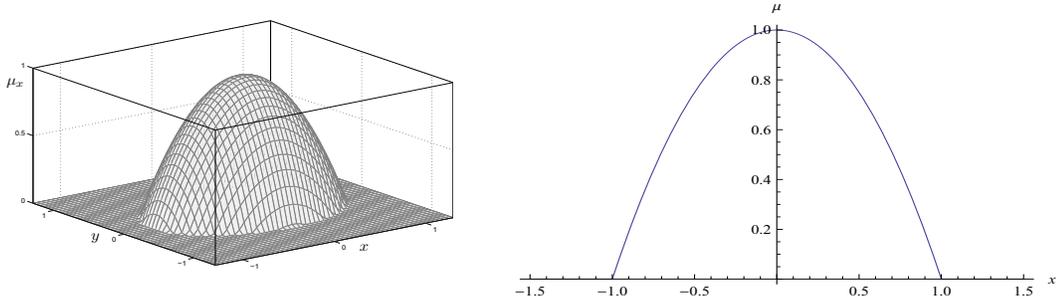


Figura 2.2: Funções de pertinência de \mathbf{x} e $\bar{\mathbf{x}}$ respectivamente. □

A distância entre as projeções $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ dos pontos \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ é sempre limitada pela distância entre \mathbf{x} e \mathbf{y} . De fato, para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos:

$$\begin{aligned} \text{dist}([\mathbf{x}]^\alpha, [\mathbf{y}]^\alpha) &= \sup_{a \in [\mathbf{x}]^\alpha} \inf_{b \in [\mathbf{y}]^\alpha} \|a - b\| \\ &= \sup_{(a_1, a_2) \in [\mathbf{x}]^\alpha} \inf_{(b_1, b_2) \in [\mathbf{y}]^\alpha} \sqrt{\|a_1 - b_1\|^2 + \|a_2 - b_2\|^2} \\ &\geq \sup_{(a_1, a_2) \in [\mathbf{x}]^\alpha} \inf_{(b_1, b_1) \in [\mathbf{y}]^\alpha} \sqrt{\|a_1 - b_1\|^2} \\ &= \sup_{a_1 \in [\bar{\mathbf{x}}]^\alpha} \inf_{b_1 \in [\bar{\mathbf{y}}]^\alpha} \sqrt{\|a_1 - b_1\|^2} \\ &= \text{dist}([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha, [\bar{\mathbf{y}}]^\alpha). \end{aligned}$$

Podemos provar também que $\text{dist}([\mathbf{y}]^\alpha, [\mathbf{x}]^\alpha) \geq \text{dist}([\bar{\mathbf{y}}]^\alpha, [\bar{\mathbf{x}}]^\alpha)$. Portanto,

$$d_\infty(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \leq d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

A projeção $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ de um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ ainda satisfaz uma outra propriedade métrica importante em se tratando de projeções. A saber, a projeção $\bar{\mathbf{p}}$ é o ponto que minimiza a distância entre o ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ e o conjunto $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, este último, visto como um subconjunto de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Proposição 2.13. *A projeção $\bar{\mathbf{p}}$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$ é tal que*

$$d_\infty(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} d_\infty(\mathbf{p}, \mathbf{z}).$$

Prova: Primeiramente, observemos o abuso de notação no enunciado. A expressão $d_\infty(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ só faz sentido pois podemos ver $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ como um subconjunto de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$. Desde que, $[\mathbf{p}]^\alpha \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $[\bar{\mathbf{p}}]^\alpha \subset \mathbb{R}^n$, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{n+m}$ temos

$$\|x - y\| = \sqrt{\|x - y_1\|^2 + \|y_2\|^2},$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha) &= \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \inf_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2} \\ &= \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|y_2\|. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\text{dist}([\bar{\mathbf{p}}]^\alpha, [\mathbf{p}]^\alpha) = \sup_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2}.$$

Agora, desde que $x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$, então $(x, z) \in [\mathbf{p}]^\alpha$ para algum $z \in \mathbb{R}^m$, de onde temos a desigualdade:

$$\text{dist}([\bar{\mathbf{p}}]^\alpha, [\mathbf{p}]^\alpha) = \sup_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2} \leq \|z\| \leq \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|y_2\|.$$

Assim, a distância de Hausdorff entre $[\mathbf{p}]^\alpha$ e $[\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$ neste caso é:

$$d_H([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha) = \max\{\text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha), \text{dist}([\bar{\mathbf{p}}]^\alpha, [\mathbf{p}]^\alpha)\} = \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha).$$

Seja agora $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{q} \neq \bar{\mathbf{p}}$. Isto implica que $[\mathbf{q}]^\alpha \neq [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$, para algum $\alpha \in [0, 1]$. Consequentemente, existe $y = (y_1, y_2) \in [\mathbf{p}]^\alpha$ tal que $y_1 \notin [\mathbf{q}]^\alpha$ ou existe $z_1 \in [\mathbf{q}]^\alpha$ tal que $z = (z_1, z_2) \notin [\mathbf{p}]^\alpha$, para todo $z_2 \in \mathbb{R}^m$. Isto é, $z_1 \notin [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha$. Para o primeiro caso, temos que

$$\sqrt{\|x - y_1\|^2 + \|y_2\|^2} > \|y_2\|$$

para todo $x \in [\mathbf{q}]^\alpha$. Para o segundo, segue diretamente da propriedade de projeção a desigualdade

$$\|z_1 - y\| = \sqrt{\|z_1 - y_1\|^2 + \|y_2\|^2} > \|y_2\|,$$

para todo $y = (y_1, y_2) \in [\mathbf{p}]^\alpha$. Dessa forma, em ambos os casos vamos ter que

$$\begin{aligned} \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\mathbf{q}]^\alpha) &= \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \inf_{x \in [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha} \sqrt{\|y_1 - x\|^2 + \|y_2\|^2} \\ &\geq \sup_{y \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|y_2\| \\ &= \text{dist}([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha). \end{aligned}$$

Logo, temos que $d_H([\mathbf{p}]^\alpha, [\mathbf{q}]^\alpha) \geq d_H([\mathbf{p}]^\alpha, [\bar{\mathbf{p}}]^\alpha)$. Assim, podemos concluir que para todo $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $d_\infty(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq d_\infty(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})$, o que prova a afirmação. ■

De modo análogo, podemos definir projeções de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U \times P)$ em $\mathcal{E}(U)$ e $\mathcal{E}(P)$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ e $P \subset \mathbb{R}^m$. Neste caso, o supremo nas funções de pertinência (2.6) e (2.7) é tomado sobre os conjuntos P e U , respectivamente e as propriedades métricas mostradas anteriormente continuam válidas.

Podemos ainda considerar a projeção $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de um ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ no i -ésimo eixo coordenado, isto é, $\pi_i(x) = x_i$. Como anteriormente, a extensão de Zadeh da projeção π_i define a aplicação $\hat{\pi}_i : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ que vamos denominar por a i -ésima projeção $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Assim, dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, a i -ésima projeção de \mathbf{x} sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto \mathbf{x}_i com função de pertinência dada por:

$$\mu_{\mathbf{x}_i}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x_i = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x). \quad (2.8)$$

Novamente, se $\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ é definido através do produto cartesiano fuzzy então vale que a i -ésima projeção de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto \mathbf{a}_i . Para simplificar, consideremos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mu_{\mathbf{x}}(x, y, z) = \Delta(\Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)), \mu_{\mathbf{a}_3}(z)).$$

Das propriedades de t -norma, vale

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)), \mu_{\mathbf{a}_3}(z)) &\leq \Delta(\Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)), 1) \\ &= \Delta(\mu_{\mathbf{a}_1}(x), \mu_{\mathbf{a}_2}(y)) \\ &\leq \mu_{\mathbf{a}_2}(y), \end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Assim, a segunda projeção de \mathbf{x} sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto \mathbf{x}_2 cuja função de pertinência é:

$$\mu_{\mathbf{x}_2}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x_2 = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x).$$

Pela desigualdade anterior, temos que

$$\mu_{\mathbf{x}_2}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x_2 = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x) \leq \mu_{\mathbf{a}_2}(a).$$

Tomando \bar{x} e \bar{z} tal que $\mu_{\mathbf{a}_1}(\bar{x}) = \mu_{\mathbf{a}_3}(\bar{z}) = 1$, a igualdade no supremo é atingida e, conseqüentemente,

$$\mu_{\mathbf{x}_2}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ x_2 = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x) = \mu_{\mathbf{a}_2}(a).$$

Por indução se prova o caso geral, em que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

α - níveis das projeções

Através da expressão (2.6) podemos determinar os α - níveis da projeção $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ de um ponto $\mathbf{z}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$. Com efeito, se $\mu_{\tilde{\mathbf{x}}}(x) \geq \alpha$ então existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mu_{\mathbf{z}}(x, y) \geq \alpha$ de modo que $(x, y) \in [\mathbf{z}]^\alpha$. A recíproca também é verdadeira, pois, se $\mu_{\mathbf{z}}(x, y) \geq \alpha$ então, por (2.6), $\mu_{\tilde{\mathbf{x}}}(x) \geq \alpha$. Assim, concluímos que:

$$x \in [\tilde{\mathbf{x}}]^\alpha \iff (x, y) \in [\mathbf{z}]^\alpha \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^m,$$

ou ainda

$$[\tilde{\mathbf{x}}]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in [\mathbf{z}]^\alpha\}. \quad (2.9)$$

Desde que a aplicação π_i é contínua, podemos usar o Teorema 2.7 para mostrar que a i - ésima projeção $\mathbf{x}_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tem α - níveis:

$$[\mathbf{x}_i]^\alpha = \{a \in \mathbb{R} : x \in [\mathbf{x}]^\alpha, x_i = a\}. \quad (2.10)$$

2.5 Conclusão

Neste capítulo apresentamos as principais definições e os principais resultados sobre a teoria dos subconjuntos fuzzy, muitos deles nos serão úteis mais adiante. Destacamos aqui três importantes generalizações que obtivemos de resultados já conhecidos e que são fundamentais em aplicações de conjuntos fuzzy.

Em primeiro lugar, mostramos que o teorema da representação de Negoita - Ralescu continua válido para subconjuntos fuzzy de um espaço topológico de Hausdorff. Utilizando o teorema da representação generalizado, mostramos que o conjunto formado pelos subconjuntos fuzzy de um espaço métrico X é completo quando X é um espaço métrico completo. Finalmente, mostramos que o teorema de Nguyen também é válido para funções contínuas definidas sobre espaços métrico localmente compactos.

Além disso, definimos e estudamos algumas propriedades de projeções de subconjuntos fuzzy sobre subespaços apropriados.

Capítulo 3

Fluxos fuzzy: pontos de equilíbrio e estabilidade

3.1 Introdução

Nosso objetivo neste capítulo consiste em desenvolver ferramentas de análise qualitativa para o fluxo fuzzy, obtido por meio de extensão de Zadeh aplicada sobre a condição inicial do fluxo determinístico, gerado por uma equação diferencial autônoma.

Mizukoshi (2004) investigou algumas propriedades do fluxo fuzzy gerado por uma solução determinística. Como sabemos, os pontos de equilíbrio determinísticos determinam pontos de equilíbrio crisp para o fluxo fuzzy. Além disto, a estabilidade de um ponto de equilíbrio determinístico coincide com a estabilidade de um ponto de equilíbrio crisp. Estes resultados desenvolvidos por Mizukoshi (2004), são apresentados aqui sem a demonstração.

Para tornar a análise qualitativa mais abrangente, buscamos generalizar os resultados sobre pontos de equilíbrio crisp para o fluxo fuzzy. Na Seção 3.3 apresentamos algumas condições sob as quais o fluxo fuzzy pode admitir pontos de equilíbrio com função de pertinência sobrejetiva sobre $[0,1]$. Quando os parâmetros são fuzzy, mostramos que, sob certas condições, o fluxo fuzzy pode admitir pontos de equilíbrio não crisp (Proposição 3.8).

Na Subseção 3.4 apresentamos uma breve discussão que diz respeito ao espaço de fase do fluxo fuzzy.

3.2 Fluxos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$

Como vimos no primeiro capítulo, uma família de aplicações $\varphi_t : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}_+$, definida sobre um espaço métrico X em que φ_0 é a identidade e $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$, é denominado um sistema dinâmico (fluxo ou semifluxo) sobre o espaço métrico X .

No capítulo 2, vimos que o conjunto $\mathcal{E}(X)$, formado pelos subconjuntos fuzzy de X com suporte compacto, define um espaço métrico com a métrica d_∞ induzida através da métrica de Hausdorff sobre os conjuntos compactos de X . Denominaremos por sistema dinâmico fuzzy, ou fluxo fuzzy, os sistema dinâmicos definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(X)$.

Definição 3.1. Seja $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$, $t \in \mathbb{R}_+$, uma família de aplicações contínuas. Se

- a) $\hat{\varphi}_0 = I$;
- b) $\hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_s = \hat{\varphi}_{t+s}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$,

então dizemos que a família de aplicações $\hat{\varphi}_t$ é um *sistema dinâmico fuzzy* (ou fluxo fuzzy).

Neste capítulo, desenvolvemos algumas ferramentas de análise qualitativa para os fluxos fuzzy definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Mais precisamente, consideramos aqui uma classe especial de fluxos fuzzy que são obtidos pela extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas.

Definição 3.2. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_o \in U$. Dizemos que $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, $t \in \mathbb{R}_+$, é uma *solução fuzzy* para a Equação (3.1) quando $\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_o\}}) = \chi_{\{\varphi_t(x_o)\}}$, onde $\varphi_t : U \rightarrow U$ é a solução da equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_o. \quad (3.1)$$

Seja então $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo gerado pela Equação (3.1) e consideremos a aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, obtida pela extensão de Zadeh de φ_t . Estamos interessados em desenvolver uma análise assintótica do solução fuzzy e portanto, consideramos aqui apenas as equações cujas soluções $\varphi_t : U \rightarrow U$ estejam definidas para todo $t \geq 0$ (ou $t \in \mathbb{R}$).

A continuidade da aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, com relação ao estado inicial x_o , é assegurada pela Proposição 2.12. No entanto, a proposição que provaremos a seguir revela

a dependência contínua de $\hat{\varphi}_t$ com relação à condição inicial. Este resultado nos será útil mais adiante.

Proposição 3.1. *Seja $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ a solução fuzzy de (3.1). Para todo \mathbf{x}_o e \mathbf{y}_o em $\mathcal{E}(U)$ vale*

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)) \leq d_\infty(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o) e^{Kt}, \quad (3.2)$$

para alguma constante $K > 0$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

Prova: Para $x_o, y_o \in U$, o fluxo determinístico (3.1) satisfaz a desigualdade

$$\|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(y_o)\| \leq \|x_o - y_o\| e^{Kt}$$

para alguma constante positiva K (Hirsch e Smale, 1974).

Sejam então $\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U)$. Para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos que :

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha)) &= \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y_o \in [\mathbf{y}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(y_o)\| \\ &\leq \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y_o \in [\mathbf{y}_o]^\alpha} \|x_o - y_o\| e^{Kt} \\ &\leq \text{dist}([\mathbf{x}_o]^\alpha, [\mathbf{y}_o]^\alpha) e^{Kt}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos $\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) \leq \text{dist}([\mathbf{y}_o]^\alpha, [\mathbf{x}_o]^\alpha) e^{Kt}$ e, portanto,

$$d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha)) \leq d_H([\mathbf{x}_o]^\alpha, [\mathbf{y}_o]^\alpha) e^{Kt}.$$

Logo, pela definição da métrica d_∞ , temos a desigualdade

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)) \leq d_\infty(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o) e^{Kt}$$

e a proposição está provada. ■

Algumas propriedades da extensão de Zadeh do fluxo determinístico, gerado por uma equação autônoma, foram inicialmente estabelecidas em Mizukoshi (2004) e Mizukoshi et al. (2009). Por exemplo, Mizukoshi (2004) demonstra que a família de aplicações $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, $t \in \mathbb{R}_+$, é um sistema dinâmico sobre $\mathcal{E}(U)$:

Proposição 3.2. *Seja $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo determinístico do problema (3.1). Então a aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ satisfaz as condições:*

$$a) \hat{\varphi}_0(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o;$$

$$b) \hat{\varphi}_{t+s}(\mathbf{x}_o) = \hat{\varphi}_t \circ \hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_o),$$

para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Por essa propriedade, a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ de um fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ é uma solução fuzzy, de acordo com a Definição 3.2.

Como a família de aplicações $\hat{\varphi}_t$ define um fluxo sobre $\mathcal{E}(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, então podemos usar as ferramentas apresentadas na Seção 1.4 para compreender o comportamento $\hat{\varphi}_t$ ao longo do tempo. Além do mais, todas as afirmações feitas para fluxos em espaços métricos são verdadeiras para o fluxo fuzzy. No entanto, neste capítulo buscamos relacionar o comportamento das soluções fuzzy e determinística da Equação (3.1).

De agora em diante, os termos *solução fuzzy* e *fluxo fuzzy*, implicitamente, requerem a existência de uma solução (ou fluxo) determinística, gerado por uma equação diferencial autônoma determinística, sobre a qual aplicamos a extensão de Zadeh.

3.3 Pontos de equilíbrio fuzzy

Similarmente ao caso clássico, podemos definir o conceito de ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$ como sendo um ponto invariante pelo fluxo fuzzy. Os pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy serão denominados aqui por *pontos de equilíbrio fuzzy*.

Definição 3.3. Dizemos que $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}(U)$ é um *ponto de equilíbrio fuzzy* $\hat{\varphi}_t$ quando

$$\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$$

para todo $t \geq 0$.

Podemos caracterizar um ponto de equilíbrio fuzzy por meio dos α - níveis. Se \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio fuzzy então vale a igualdade

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = [\mathbf{x}_e]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

Em uma primeira tentativa de caracterizar pontos de equilíbrio fuzzy, Mizukoshi (2004) encontrou a seguinte equivalência cuja demonstração será omitida aqui.

Proposição 3.3. *Seja $x_e \in U$. Então x_e é um ponto de equilíbrio para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$.*

Assim como no caso determinístico, queremos saber qual o comportamento do fluxo fuzzy quando a condição inicial está próxima de um ponto de equilíbrio. Para isso, precisamos definir o conceito de estabilidade para pontos de equilíbrio em $\mathcal{E}(U)$.

Definição 3.4. Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}(U)$ é *estável* se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $d_\infty(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_e) < \delta$ temos $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Se além disso existe $r > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ satisfazendo $d_\infty(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_e) < r$ temos que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então \mathbf{x}_e é *assintoticamente estável*.

O ponto de equilíbrio é *instável* quando não é estável.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy cuja função de pertinência são funções características dos pontos de equilíbrio de (3.1), como caracterizados na proposição anterior, também foram estabelecidos por Mizukoshi (2004).

Proposição 3.4. *Sejam $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio para (3.1) e $\hat{\varphi}_t$ o fluxo fuzzy associado ao fluxo determinístico φ_t . Então valem as seguintes afirmações:*

- a) x_e é estável para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é estável para $\hat{\varphi}_t$;
- b) x_e é assintoticamente estável para φ_t se, e somente, se $\chi_{\{x_e\}}$ é assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$.

No Capítulo 1 vimos que um ponto de equilíbrio x_e é atrator exponencial quando a parte real dos autovalores da matriz jacobiana $Df(x_e)$ é negativa. Neste caso, existe uma vizinhança V de x_e tal que

$$\|\varphi_t(x_o) - x_e\| \leq B\|x_o - x_e\| e^{-bt},$$

com $b, B > 0$, para todo $x_o \in V$ e $t \geq 0$. De maneira análogo, podemos fazer a seguinte estimativa de decrescimento para um ponto de equilíbrio fuzzy:

Proposição 3.5. *Seja $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio atrator exponencial. Então existem constantes C e b positivas e uma vizinhança $V \subset \mathcal{E}(U)$ de $\chi_{\{x_e\}}$ tal que*

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \chi_{\{x_e\}}) \leq C e^{-bt}$$

para todo $t \geq 0$ e $\mathbf{x}_o \in V$.

Prova: Sejam $B, b > 0$ e V a vizinhança garantida pela Proposição 1.2 e definimos $V = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset V\}$. Seja

$$C = B \sup_{x \in V} \|x - x_e\|.$$

Uma vez que V é limitado então, $C < \infty$.

Por um lado, para todo $\mathbf{x}_o \in V$, temos que:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), x_e) &= \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - x_e\| \\ &\leq \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} B \|x_o - x_e\| e^{-bt} \\ &\leq C e^{-bt} \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_e, \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) &= \inf_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - x_e\| \\ &\leq \inf_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} B \|x_o - x_e\| e^{-bt} \\ &\leq C e^{-bt}. \end{aligned}$$

Logo, $d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), x_e) \leq C e^{-bt}$ e conseqüentemente vale

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \chi_{\{x_e\}}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), x_e) \leq C e^{-bt},$$

o que prova a afirmação. ■

Como mencionamos na Introdução, a extensão de Zadeh de um fluxo determinístico pode apresentar pontos de equilíbrio com função de pertinência assumindo valores em todo intervalo $[0, 1]$, ao invés de apenas funções características como garantidas pela

Proposição 4.1.

No exemplo abaixo analisamos um modelo para transmissão de doenças infecciosas para ilustrar a ocorrência de tais pontos de equilíbrio.

Exemplo 3.1 (Modelo SI). O mais simples modelo que explica o comportamento de doenças infecciosas causadas por vírus ou bactérias é dado pelo seguinte sistema de equações (Bassanezi e Ferreira Jr, 1988):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI, & S(0) = S_o > 0, \\ \frac{dI}{dt} = rSI, & I(0) = I_o > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Na equação acima, r é uma constante positiva, $S(t)$ é a variável que representa a quantidade de indivíduos suscetíveis à doença enquanto que $I(t)$ é a quantidade de indivíduos infecciosos. Desde que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0,$$

então não há variação da população e, deste modo, temos que $I(t) + S(t) = I_o + S_o = N_o$.

O fluxo determinístico $\varphi_t = (\varphi_t^{(1)}, \varphi_t^{(2)})$ gerado por este modelo é dado pelas funções:

$$S(t) = \varphi_t^{(1)}(S_o, I_o) = N_o \left(1 - \frac{I_o}{I_o + S_o e^{N_o r t}} \right);$$

$$I(t) = \varphi_t^{(2)}(S_o, I_o) = \frac{N_o I_o}{I_o + S_o e^{N_o r t}}.$$

O sistema (3.3) está em equilíbrio quando $I = 0$ ou $S = 0$. Como estamos supondo condições iniciais não nulas e $S(t)$ decrescente, então o fluxo determinístico $\varphi_t(S_o, I_o)$ gerado pela solução de (3.3) converge para o ponto de equilíbrio $x_e = (0, I_o + S_o)$ quando $t \rightarrow \infty$. Vale ressaltar que o ponto de equilíbrio depende da escolha das condições iniciais para infecciosos e suscetíveis. Isto é, o ponto de equilíbrio pode ser visto como uma função das condições iniciais $x_e : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, que para cada (S_o, I_o) associa o valor

$$x_e(S_o, I_o) = (0, I_o + S_o).$$

Como $S(t)$ e $I(t)$ são monótonas, a Proposição 1.19 garante que dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(S_o, I_o) - x_e(S_o, I_o)\| < \varepsilon,$$

para todo $t > T$ e (S_o, I_o) em um conjunto compacto K .

Supondo que a condição inicial (S_o, I_o) é fuzzy, então devemos considerar o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ determinado a partir da solução determinística $\varphi_t(S_o, I_o)$. Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$, os α - níveis de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ são os conjuntos

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha) = \{\varphi_t(S_o, I_o) : (S_o, I_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\}.$$

Como $[\mathbf{x}_o]^0$ é um conjunto compacto, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(S_o, I_o) - x_e(S_o, I_o)\| < \varepsilon,$$

para todo $t > T$ e $(S_o, I_o) \in [\mathbf{x}_o]^0$. Desta forma, definindo o conjunto

$$A_\alpha = \{x_e(S_o, I_o) : (S_o, I_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\}$$

e escrevendo $y = (S, I)$, temos que:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\hat{\varphi}_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A_\alpha) &= \sup_{y_1 \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y_2 \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(y_1) - x_e(y_2)\| \\ &\leq \sup_{y_1 \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(y_1) - x_e(y_1)\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $t > T$. De modo análogo podemos mostrar que $\text{dist}(A_\alpha, [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha) \leq \varepsilon$ de modo que $d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, A_\alpha) \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t > T$. Desde que $x_e(S_o, I_o)$ é uma função contínua, então a imagem $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$ pela extensão de Zadeh $\hat{x}_e : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ é tal que

$$[\mathbf{x}_e]^\alpha = x_e([\mathbf{x}_o]^\alpha) = \{x_e(S_o, I_o) : (S_o, I_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} = A_\alpha$$

de onde podemos concluir então que

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) \leq \varepsilon,$$

para todo $t > T$. Logo, uma vez que $\hat{\varphi}_t$ é um fluxo sobre o espaço métrico $(\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2), d_\infty)$, a Proposição 1.23 garante que \mathbf{x}_e é invariante. Portanto, $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$.

Para um ponto qualquer $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ o ponto de equilíbrio fuzzy $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$ tem função de pertinência dada por:

$$\mu_{\mathbf{x}_e}(S, I) = \begin{cases} \sup_{S_o} \mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I - S_o) & \text{se } S = 0, \\ 0 & \text{se } S \neq 0. \end{cases}$$

Na Figura 3.1 temos a representação gráfica da solução $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ para alguns valores de t . A condição inicial para esta figura é dada pela função de pertinência:

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I_o) = \max\{1 - 0.01(S_o - 80)^2 - 0.25(I_o - 5)^2, 0\}.$$

Para esta condição inicial, o ponto de equilíbrio fuzzy tem função de pertinência:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{x}_e}(S, I) &= \min\{\chi_{\{0\}}(S), \sup_{S_o} \mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I - S_o)\} \\ &= \min\{\chi_{\{0\}}(S), \mu_{\mathbf{x}_o}(\bar{S}, I - \bar{S})\}, \end{aligned}$$

com

$$\bar{S} = \frac{I - 4.68}{1.004}.$$

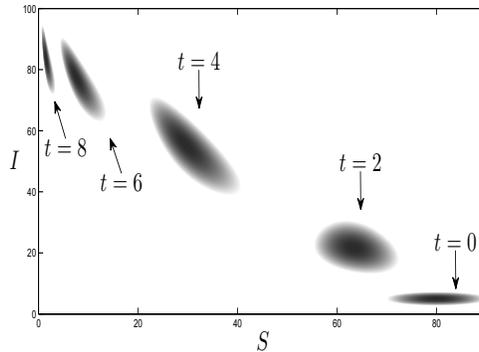


Figura 3.1: $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ para diferentes valores de tempo.

Na Figura 3.1, como nas demais que aparecem neste trabalho, usamos o sistema de cores RGB para representar graficamente a solução fuzzy de uma equação diferencial fuzzy. No sistema de cores RGB, cada cor é expressa por uma combinação de três valores, considerado aqui estarem no intervalo $[0,1]$. Podemos portanto, considerar cada cor como uma função $\text{RGB}(x, y, z)$, com $x, y, z \in [0, 1]$, onde $\text{RGB}(0, 0, 0)$ representa a cor preta enquanto que $\text{RGB}(1, 1, 1)$ representa a cor branca.

Assim, dada um $\alpha \in [0, 1]$ a região no plano delimitada pelo α - nível $\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)$ é preenchida com a cor $\text{RGB}(1 - \alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha)$. Se $\alpha = 0$ então a região delimitada por $\varphi_t([\mathbf{x}_o]^0)$ é preenchida com a cor branca, ao passo que se $\alpha = 1$ então a região delimitada por $\varphi_t([\mathbf{x}_o]^1)$ é preenchida com a cor preta. Desta forma, quanto maior for o grau de pertinência de um ponto x , mais escura será a sua cor.

Na prática, fazemos uma partição

$$0 = \alpha_o < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_n = 1$$

no intervalo $[0, 1]$ e, para cada α_i , usamos a igualdade $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)$ para determinamos o conjunto $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^{\alpha_i}$. Quanto maior o valor de α_i , mais escura é cor usada para preencher a região delimitado pelo conjunto $[\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)]^{\alpha_i}$. \square

O exemplo anterior nos mostra a convergência da solução para um ponto de equilíbrio fuzzy que não é função característica de nenhum subconjunto de \mathbb{R}^2 . A questão que surge então é como podemos caracterizar tais pontos de equilíbrio de modo que a análise qualitativa se torne mais abrangente, incluindo pontos de equilíbrio fuzzy cuja função de pertinência não é a função característica de subconjuntos do espaço de fase. A resposta para essa questão é dada pela proposição seguinte.

Devemos destacar aqui três importantes características do exemplo anterior. Primeiramente, podemos observar que o ponto de equilíbrio para o qual a solução do sistema de equações (3.3) converge, depende da condição inicial do escolhida. Para enfatizar esta característica, definimos o ponto de equilíbrio como uma função cujas entradas são os valores de S_o e I_o . Isto é, $x_e : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é a função que para cada $(S_o, I_o) \in \mathbb{R}_+^2$ associa o ponto de equilíbrio $x_e(S_o, I_o)$. Em segundo lugar, o fluxo determinístico $\varphi_t : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ converge de maneira uniforme para $x_e : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ em subconjuntos compactos contido em \mathbb{R}_+ . Finalmente, pelo fato de $x_e(S_o, I_o)$ ser uma função contínua, o ponto de equi-

líbrio fuzzy para o qual o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ converge, é determinado pela extensão de Zadeh $\hat{x}_e : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ da aplicação $x_e(S_o, I_o)$.

De maneira geral, se o fluxo determinístico apresentar as três características acima descritas então podemos mostrar a existência de pontos de equilíbrio fuzzy não crisp. No teorema seguinte, por convergência uniforme queremos dizer que: o fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ converge uniformemente, em $K \subset A$, para $x_e : A \rightarrow U$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(x_o) - x_e(x_o)\| < \varepsilon,$$

para todo $t > T$ e $x_o \in K$.

Teorema 3.6. *Sejam $x_e : A \rightarrow U$ contínua, $A \subseteq U$, $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$ e $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$. Sob essas condições temos:*

- a) *Se $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ para todo $x \in A$ então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \geq 0$;*
- b) *Se $\varphi_t : U \rightarrow U$ converge uniformemente, em $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$, para $x_e : A \rightarrow U$ quando $t \rightarrow \infty$, então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para \mathbf{x}_e e $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

Prova: a) Desde que $x_e : A \rightarrow U$, a extensão de Zadeh \hat{x}_e tem como domínio o conjunto $\mathcal{E}(A)$. Portanto, estamos cometendo um abuso de notação ao definirmos $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$. Na verdade, $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{y}_o)$ onde $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(A)$ com $[\mathbf{y}_o]^\alpha = [\mathbf{x}_o]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Desde que x_e é contínua em A e temos $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$ então vale que:

$$[\mathbf{x}_e]^\alpha = [\hat{x}_e(\mathbf{y}_o)]^\alpha = x_e([\mathbf{y}_o]^\alpha) = x_e([\mathbf{x}_o]^\alpha).$$

O primeiro item é imediato, uma vez que

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = \{\varphi_t(x_e(x)) : x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\}.$$

Por hipótese, temos $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ para todo $x \in A$. Assim,

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \{x_e(x) : x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} = x_e([\mathbf{x}_o]^\alpha) = [\mathbf{x}_e]^\alpha,$$

o que prova a afirmação.

b) Para provar o segundo item, precisamos mostrar que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $\alpha \in [0, 1]$. Sob a hipótese da convergência uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $t > T$ e $x \in A$. Desta forma temos,

$$\begin{aligned}
\text{dist}([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) &= \sup_{a \in [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \inf_{b \in [\hat{x}_e(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \|a - b\| \\
&= \sup_{a \in \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)} \inf_{b \in x_e([\mathbf{x}_o]^\alpha)} \|a - b\| \\
&= \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(y)\| \\
&\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Por outro lado, vale também que:

$$\begin{aligned}
\text{dist}([\mathbf{x}_e]^\alpha, [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha) &= \sup_{a \in [\hat{x}_e(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \inf_{b \in [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \|a - b\| \\
&= \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(y) - x_e(x)\| \\
&\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Assim, $d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) \leq \varepsilon$, de onde concluímos que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \leq \varepsilon$ para todo $t > T$.

Logo, $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e, como $\hat{\varphi}_t$ é um fluxo definido sobre o espaço métrico $\mathcal{E}(U)$, a Proposição 1.23 então garante que \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio. ■

Em outras palavras, o teorema que acabamos de demonstrar afirma que se a solução determinística $\varphi_t(x_o)$ converge uniformemente para a função $x_e(x_o)$, então a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para a extensão de Zadeh $\hat{x}_e(x_o)$. Isto é,

$$\varphi_t(x_o) \xrightarrow{u} x_e(x_o), \quad x_o \in A \quad \implies \quad \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \hat{x}_e(\mathbf{x}_o), \quad [\mathbf{x}_o]^0 \subset A, \quad (3.4)$$

onde a notação \xrightarrow{u} indica a convergência uniforme em A de $\varphi_t : U \rightarrow U$ para $x_e : A \rightarrow U$.

Exemplo 3.2. Consideramos novamente o modelo SI apresentado no Exemplo 3.1. Podemos supor que a quantidade total de indivíduos seja conhecida. Seja N esta quantidade de indivíduos. Neste caso, a condição inicial fuzzy não pode ser tomada arbitrária pois existe no restrição número de indivíduos. Assim, devemos tomar apenas condições iniciais fuzzy cuja soma de suscetíveis e infectados seja N . Equivalentemente, as condições fuzzy devem estar sobre o segmento de reta que liga os pontos $(0, N)$ e $(N, 0)$.

Uma vez que a solução determinística $\varphi_t(S_o, I_o)$ converge uniformemente para o ponto de equilíbrio $x_e(S_o, I_o) = (0, S_o + I_o)$, então, de acordo com o item (b) do teorema anterior, a solução fuzzy converge para a extensão de Zadeh de $x_e(S_o, I_o)$. Se a condição inicial fuzzy $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ é correlacionada, então $S_o + I_o = N$ para todo $(S_o, I_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha$ de modo que

$$\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o) = \chi_{\{(0, N)\}}$$

é o ponto de equilíbrio fuzzy para o qual a solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge quanto $t \rightarrow \infty$.

A Figura 5.3, na página 143, são as projeções da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, para o caso em que a condição inicial tem α - níveis contidos sobre o segmento de reta que liga os pontos $(0, N)$ e $(N, 0)$. \square

Em algumas aplicações, a função $x_e : A \rightarrow U$ pode não ser contínua em todos os pontos de A . Neste caso, de acordo com a Proposição 2.8, a afirmação acima continua válida quando $[\mathbf{x}_o]^\alpha$ está contido em algum subconjunto em que x_e seja contínua. No caso de x_e não ser contínua em algum ponto de $[\mathbf{x}_o]^0$, então a convergência uniforme exigida no item (b) não ocorre, e portanto a convergência do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ para o ponto de equilíbrio pode não acontecer.

Exemplo 3.3. A equação de crescimento logístico

$$\frac{dx}{dt} = rx(k - x)$$

determina o fluxo unidimensional $\varphi_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dado por

$$\varphi_t(x_o) = \frac{kx_o}{x_o + (k - x_o)e^{-rt}},$$

cujos pontos de equilíbrio são $x_e = k > 0$ e $y_e = 0$.

Consideremos a função $x_e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, onde $x_e(z) = k$ se $z > 0$ e $x_e(0) = 0$. Claramente x_e não é contínua em $z = 0$ e temos $\varphi_t(x_e(z)) = x_e(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}_+$. O item (a) do Teorema 3.6 garante que se $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ é tal que $[\mathbf{x}_o]^0 \subset \mathbb{R}_+^*$, então $\chi_{\{k\}} = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$ e além disso $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para $\chi_{\{k\}}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(z) = \max\{1 - (3/k)z, 0\}.$$

Neste caso, $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_e}(z) = \max\{\chi_{\{0\}}(z), \chi_{\{k\}}(z)\}.$$

Como $[\mathbf{x}_e]^\alpha = \{0, k\}$ então,

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = \{\varphi_t(x_o) : x_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha\} = [\mathbf{x}_e]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e portanto, \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$. Agora, $[\mathbf{x}_e]^1 = \{0, k\}$ enquanto que $[\mathbf{x}_o]^1 = 0$, de onde temos que $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^1 = 0$ para todo $t > 0$. Logo, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ não converge para \mathbf{x}_e . \square

As Proposições 3.3 e 3.4, que estabelecem as relações entre os pontos de equilíbrio do fluxo determinístico e os pontos de equilíbrio crisp para o fluxo fuzzy, podem ser vistas como casos particulares do Teorema 3.6.

Ressaltamos aqui que se um ponto de equilíbrio $x_e \in U$ é assintoticamente estável para o fluxo determinístico, então x_e atrai conjuntos compactos contidos na região de atração $A(x_e)$ segundo o Corolário 1.16.

Corolário 3.7. *Sejam $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio para φ_t e $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$. Então,*

- a) $\chi_{\{x_e\}}$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$;
- b) Se x_e é assintoticamente estável e $[\mathbf{x}_o]^0$ está contido na região de atração de x_e então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \chi_{\{x_e\}}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Para o primeiro item, basta tomar $A = U$ e definir $x_e : U \rightarrow U$ por $x_e(x) = x_e$ para todo $x \in U$.

Para o segundo, sejam $A = A(x_e)$ e $x_e : A \rightarrow U$ definida por $x_e(x) = x_e$. Temos assim que $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ e $\hat{x}_e(\mathbf{x}_o) = \chi_{\{x_e\}}$ para qualquer $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$. Além do mais, de acordo com o Corolário 1.16, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(x_o) - x_e\| < \varepsilon$$

para todo $t > T$ e $x_o \in [\mathbf{x}_o]^0$. Portanto, basta aplicarmos o Teorema 3.6 com $A = A(x_e)$ e $x_e(x) = x_e$ para todo $x \in A(x_e)$. ■

3.3.1 Parâmetros Fuzzy

Consideremos agora o caso em que a equação autônoma é da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p_o), \quad x(0) = x_o, \quad (3.5)$$

onde, novamente, $x_o \in U$ é a condição inicial, $f : U \times P \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função continuamente diferenciável e $p_o \in P$ é o vetor de parâmetros da equação.

Da Equação (3.5) podemos definir a equação autônoma em \mathbb{R}^{n+m}

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, p), & x(0) = x_o, \\ \frac{dp}{dt} = 0, & p(0) = p_o, \end{cases} \quad (3.6)$$

de modo que os parâmetros da Equação (3.5) formam, juntamente com x_o , a condição inicial da Equação (3.6). Assim, se $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$ é o fluxo gerado pela Equação (3.5), então

$$\begin{aligned} \psi_t : U \times P &\rightarrow U \times P \\ (x_o, p_o) &\rightarrow (\varphi_t(x_o, p_o), p_o) \end{aligned}$$

é o fluxo determinístico da Equação (3.6). Isto é, a projeção da solução da Equação (3.6) sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ é a solução da Equação (3.5).

Desta forma, quando consideramos parâmetros de uma equação autônoma como a Equação (3.5) são parâmetros fuzzy, aplicamos a extensão de Zadeh sobre o fluxo gerado pela Equação (3.6). Esta estratégia de considerar os parâmetros como condição inicial de um sistema com dimensão superior pode ser encontrada em Oberguggenberger e Pittschmann (1999) e Mizukoshi (2004).

Quando estamos tratando com incertezas nos parâmetros, a extensão $\hat{\psi}_t$ está definida sobre o espaço $\mathcal{E}(U \times P)$. Em se tratando de aplicações, às vezes podemos considerar as subjetividades separadamente em x_o e p_o . Ou seja, consideramos à priori $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ e $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(P)$. Portanto, podemos definir $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ a partir de alguma t - norma estabelecida na Seção 2.3. Mas ressaltamos que os resultados obtidos neste capítulo são para pontos definidos em $\mathcal{E}(U \times P)$ de uma forma geral. Na Seção 3.4 apresentamos um discussão mais detalhada sobre o espaço de fase do fluxo fuzzy.

No exemplo a seguir consideramos que a condição inicial e a capacidade suporte do modelo exponencial assintótico são incertas. Desta forma, devemos seguir o procedimento indicado acima para incorporar a capacidade suporte na condição inicial e então aplicar a extensão de Zadeh sobre o fluxo ψ_t . Neste exemplo, mostramos também que o fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t$ admite um ponto de equilíbrio cuja função de pertinência é sobrejetiva em $[0, 1]$.

Exemplo 3.4. Consideremos a solução determinística $\varphi_t(x_o, k_o)$ da equação

$$\frac{dx}{dt} = \beta(k_o - x), \quad x(0) = x_o. \quad (3.7)$$

Se considerarmos que o parâmetro k_o da Equação (3.7) é parcialmente conhecido, então a extensão de Zadeh, neste caso, é aplicada sobre a solução da equação associada

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \beta(k - x), & x(0) = x_o, \\ \frac{dk}{dt} = 0, & k(0) = k_o, \end{cases} \quad (3.8)$$

gerando o fluxo bidimensional

$$\psi_t(x_o, k_o) = (k_o + (x_o - k_o)e^{-\beta t}, k_o) \quad (3.9)$$

para algum $\beta > 0$ fixo. Vale observar que a solução acima converge para o ponto $(k_o, k_o) \in \mathbb{R}^2$, quando $t \rightarrow \infty$, qualquer que seja a condição inicial (x_o, k_o) em \mathbb{R}^2 e, portanto, o ponto de equilíbrio do sistema (3.8) depende da condição inicial. O ponto de equilíbrio é dado pela função $y_e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que para cada (x_o, k_o) associa o ponto $y_e(x_o, k_o) = (k_o, k_o)$. Assim, desde que $y_e = (k_o, k_o)$ é um ponto de equilíbrio estável para a Equação (3.8), as Proposições 3.3 e 3.4 garantem que $\chi_{\{y_e\}}$ é um ponto de equilíbrio estável para o fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t$.

Observamos que se $K \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto compacto então, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que $\|\psi_t(x_o, k_o) - (k_o, k_o)\| < \varepsilon$ para todo $t > T$ e $(x_o, k_o) \in K$. Isto é, $\psi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ converge uniformemente para $y_e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 .

O Teorema 3.6 garante então que, para qualquer condição inicial fuzzy $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, a solução fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio fuzzy \mathbf{y}_e . Mais do que isso, pelo Teorema 3.6 o ponto de equilíbrio para o qual a solução fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge é a imagem de \mathbf{y}_o pela extensão de Zadeh da aplicação $y_e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, isto é, $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$.

Consideremos a condição inicial fuzzy $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ com função de pertinência dada por

$$\mu_{\mathbf{y}_o}(x, y) = \max\{1 - 2(x - 3)^2 - 2(y - 1)^2, 0\}.$$

Os α - níveis neste caso, são os círculos de raio $\sqrt{(1 - \alpha)/2}$. Isto é,

$$[\mathbf{y}_o]^\alpha = \{(x, y) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq (1 - \alpha)/2\}.$$

A Figura 3.2 - (a) é uma representação gráfica da evolução dos α - níveis de \mathbf{y}_o através do fluxo fuzzy. Fixado um instante t , a imagem de \mathbf{y}_o é o ponto $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$, cujos α - níveis satisfazem a igualdade

$$[\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)]^\alpha = \psi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha) \tag{3.10}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

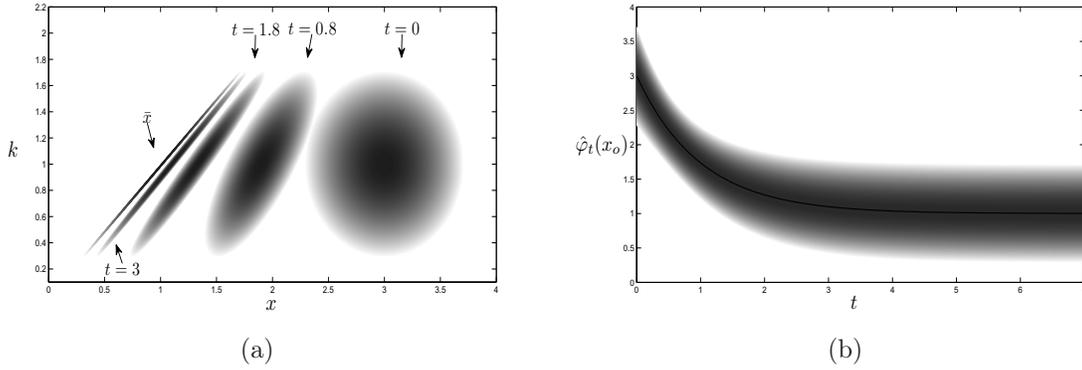


Figura 3.2: (a) - Evolução de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$. (b) - Evolução da projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$.

A interpretação da Figura 3.2 é análoga à apresentada no modelo SI. Isto é, fazemos uma partição

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_n = 1$$

no intervalo $[0, 1]$ e, para cada α_i , usamos igualdade (3.10) para determinar o conjunto $[\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)]^{\alpha_i}$. Quanto maior o valor de α_i , mais escura é cor usada para preencher o conjunto $[\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)]^{\alpha_i}$. Podemos também interpretar o gráfico na Figura 3.2 como sendo as curvas de níveis da função de pertinência $\mu_{\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)}(x, y)$ no plano cartesiano (x, k) .

Um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ está na imagem de y_e se, e somente se, $a = b$. Além do mais, $y_e(a, b) = (b, b)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Assim, o ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$ da solução fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$, é determinado pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, y) = \begin{cases} \sup_{a \in \mathbb{R}} \mu_{\mathbf{y}_o}(a, y) = \mu_{\mathbf{y}_o}(3, y) & \text{se } x = y, \\ 0 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

□

Embora a hipótese de convergência uniforme necessária no Teorema 3.6 possa parecer muito restritiva e de difícil verificação, uma vez que em geral não é possível determinar a solução de uma equação diferencial não linear, em alguns casos no entanto, esta hipótese é

sempre verificada. Por exemplo, a convergência uniforme pode ocorrer quando a equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p_o) \quad (3.11)$$

possui pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis para p_o assumindo valores em um determinado conjunto $P \subset \mathbb{R}^m$.

A existência dos pontos de equilíbrio da Equação 3.11, em geral, depende apenas do parâmetro $p_o \in P$. No entanto, a convergência da solução determinística $\varphi_t(x_o, p_o)$ para o ponto de equilíbrio pode depender da escolha da condição inicial x_o . Sendo assim, vamos considerar aqui a função $x_e : U \times P \rightarrow U$ que para cada (x_o, p_o) associa o ponto de equilíbrio $x_e(x_o, p_o)$. Isto é, $x_e(x_o, p_o)$ é tal que $\varphi_t(x_e(x_o, p_o), p_o) = x_e(x_o, p_o)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$

Desta forma, se $x_e(x_o, p_o)$ é um ponto de equilíbrio para o fluxo $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$, gerado pela Equação 3.11, então a equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, p), & x(0) = x_o, \\ \frac{dp}{dt} = 0, & p(0) = p_o, \end{cases} \quad (3.12)$$

tem como ponto de equilíbrio

$$y_e(x_o, p_o) = (x_e(x_o, p_o), p_o) \in U \times P.$$

O fluxo determinístico ψ_t gerado pela Equação (3.12), em termos do fluxo φ_t da equação (3.11), é dado por

$$\begin{aligned} \psi_t : U \times P &\rightarrow U \times P \\ (x_o, p_o) &\rightarrow (\varphi_t(x_o, p_o), p_o). \end{aligned}$$

A Proposição 1.22 assegura que se $\varphi_t(x_o, p_o)$ converge para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável $x_e(x_o, p_o)$, para todo (x_o, p_o) em um aberto $A \subset U \times P$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\psi_t(x_o, p_o) - y_e(x_o, p_o)\| < \varepsilon$$

para todo (x_o, p_o) em um compacto $K \subset A$ e $t > T$. Isto é, $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$ converge uniformemente, em K , para $y_e : U \times P \rightarrow U \times P$ quando $t \rightarrow \infty$.

Para este caso então podemos usar o Teorema 3.6 para provar a seguinte afirmação.

Proposição 3.8. *Sejam $A \subset U \times P$ um conjunto aberto, $y_e : A \rightarrow U \times P$ contínua, $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ com $[\mathbf{y}_o]^0 \subset A$ e $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$. Suponha que $\varphi_t(x_o, p_o) \rightarrow x_e(x_o, p_o)$ para todo $(x_o, p_o) \in A$ quando $t \rightarrow \infty$. Se $x_e(x_o, p_o)$ é assintoticamente estável então $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e .*

Prova: Sob estas hipóteses, o Corolário 1.22 garante que o fluxo associado $\psi_t : [\mathbf{y}_o]^0 \rightarrow U \times P$ converge uniformemente para $y_e : [\mathbf{y}_o]^0 \rightarrow U \times P$. Logo, pelo segundo item (b) do Teorema 3.6, temos que $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$ quando $t \rightarrow \infty$. ■

No exemplo a seguir, aplicamos a proposição acima para mostrar a existência de um ponto de equilíbrio fuzzy para o modelo de Von Bertalanffy generalizado.

Exemplo 3.5. Consideremos a solução determinística $\varphi_t(x_o, a_o, b, c)$ determinada pela equação

$$\frac{dx}{dt} = a_o x^c - bx.$$

O ponto de equilíbrio para este fluxo, é dado por

$$x_e(x_o, a_o, b, c) = \begin{cases} \left(\frac{a_o}{b}\right)^{\frac{1}{1-c}} & \text{se } x_o > 0, \\ 0 & \text{se } x_o = 0. \end{cases}$$

é assintoticamente estável para todo a_o, b e c positivos, $c < 1$.

Mantendo b e c contantes, consideremos que a incerteza esteja tanto na condição inicial x_o quanto no parâmetro a_o . Desta forma, obtemos o fluxo associado $\psi_t : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, definido por $\psi_t(x_o, a_o) = (\varphi_t(x_o, a), a_o)$ cujo ponto de equilíbrio é dado por $y_e(x_o, a_o) = (x_e(x_o, a_o), a_o)$.

O fluxo determinístico $\varphi_t(x_o, a_o)$ converge para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável $x_e(x_o, a_o)$ para todo $(x_o, a_o) \in A$, onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x, y > 0\}$. Além

disso, a aplicação $y_e : A \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ que associa para cada $(x_o, a) \in A$ o ponto de equilíbrio $y_e(x_o, a) = (x_e(x_o, a_o), a_o)$ é contínua em A .

A Proposição 3.8 garante então que a solução fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge, na métrica d_∞ , para $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$, para todo $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ com $[\mathbf{y}_o]^0 \subset A$.

A imagem de $y_e : A \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é o conjunto $Im(y_e) = \{(x, a) \in \mathbb{R}_+^2 : a = bx^{1-c}\}$ e portanto, a função de pertinência do ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e é dada por

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, a) = \begin{cases} \sup_{u \in \mathbb{R}_+} \mu_{\mathbf{y}_o}(u, a) & \text{se } a = bx^{1-c}, \\ 0 & \text{se } a \neq bx^{1-c}. \end{cases}$$

Figura 3.3 - (a) é a representação gráfica da evolução dos α - níveis pelo fluxo ψ_t para $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ definido por

$$\mu_{\mathbf{y}_o}(x, a) = \max\{1 - 2(x - 2)^2 - 50(a - 1)^2, 0\}.$$

Para este exemplo, o ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ é dado pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, a) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{y}_o}(2, a) & \text{se } a = bx^{1-c}, \\ 0 & \text{se } a \neq bx^{1-c}. \end{cases}$$

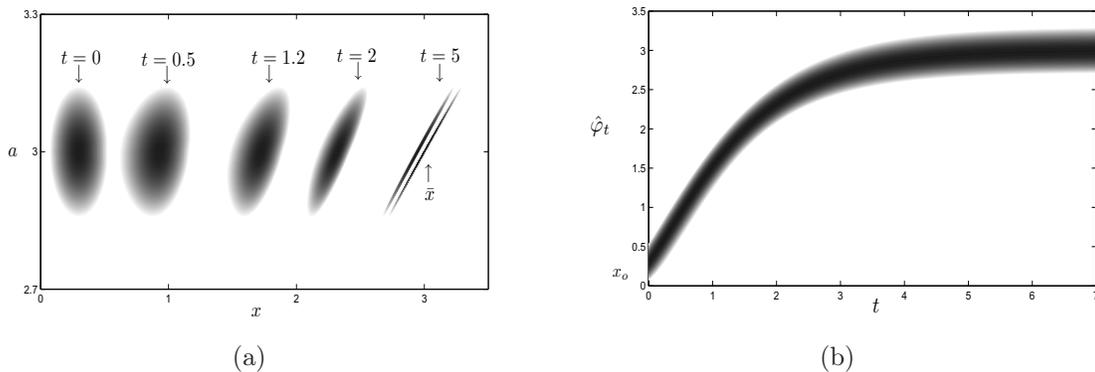


Figura 3.3: (a) - Evolução de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$. (b) - Evolução da projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

A aplicação da Proposição 3.8 para o caso em que os demais parâmetros do modelo de von Bertalanffy são incertos é feita de maneira análoga. Neste caso, devemos acrescentar tais parâmetros como condição inicial de um sistema de equações aumentado. No Capítulo 5, fazemos a análise para o caso geral e apresentamos a representação gráfica da solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado. \square

Mais do que fornecerem condições para a existência de pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy, o Teorema 3.6 e a Proposição 3.8 também fornecem uma maneira simples de determinar tais pontos de equilíbrio. Como vimos, os pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy podem ser obtidos por meio da extensão de Zadeh da função que para cada condição inicial associa o ponto de equilíbrio para o qual a solução determinística converge. No último capítulo, consideramos os resultados desta seção para obter pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy aplicados em algumas importantes equações diferenciais da Biomatemática.

Antes de prosseguirmos em busca de mais resultados, consideramos algumas importantes informações referentes ao espaço de fases do fluxo fuzzy.

3.4 Sobre o espaço de fase do fluxo fuzzy

Suponha que o espaço de fase $U \subset \mathbb{R}^n$, do fluxo determinístico gerado pela Equação (3.1), seja o produto cartesiano de subconjuntos $U_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Para simplificar a análise, consideremos o caso particular em que $n = 2$. Isto é,

$$U = U_1 \times U_2.$$

Poderia surgir a dúvida de que o espaço de fase do fluxo fuzzy é o conjunto

$$\mathcal{E}(U_1) \times \mathcal{E}(U_2),$$

para alguma t - norma. Ou ainda, poderia surgir o questionamento de qual a razão de não considerarmos tal espaço neste trabalho. A razão é simples! Para que a aplicação $\hat{\varphi}_t$ satisfaça as propriedades de fluxo, que são importantes aqui, conforme Proposição 3.2, é necessário considerarmos como domínio o conjunto $\mathcal{E}(U)$. Isto acontece pois, dada uma condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U_1) \times \mathcal{E}(U_2)$, em geral, não temos $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{E}(U_1) \times \mathcal{E}(U_2)$ para

todo $t \in \mathbb{R}_+$. Desta forma, a composição necessária no item (b) da Proposição 3.2 não está bem definida. Para mais esclarecimento, consideramos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.6. Seja $\varphi_t = (\varphi_t^{(1)}, \varphi_t^{(2)})$ o fluxo determinístico gerado pelo modelo SI , apresentado no Exemplo 3.1. Fixamos $T > 0$. Como as componentes $\varphi_t^{(1)}$ e $\varphi_t^{(2)}$ são contínuas, então para qualquer conjunto da forma $K = [a, b] \times \{I_o\}$, $a < b$, temos que $\varphi_T^{(1)}(K)$ e $\varphi_T^{(2)}(K)$ são intervalos contidos em \mathbb{R}_+ . Sejam A_1 e A_2 estes intervalos. Uma análise sobre as expressões das componentes

$$\varphi_t^{(1)}(S_o, I_o) = N_o \left(1 - \frac{I_o}{I_o + S_o e^{N_o r t}} \right) \quad \text{e} \quad \varphi_t^{(2)}(S_o, I_o) = \frac{N_o I_o}{I_o + S_o e^{N_o r t}},$$

$N_o = S_o + I_o$, nos permite concluir que estes intervalos são não *degenerados*, isto é, os intervalos A_1 e A_2 não são conjuntos unitários, para $T > 0$. Não é difícil ver que $\varphi_T(K) \subseteq A_1 \times A_2$. Vamos mostrar que existe $(x, y) \in A_1 \times A_2$ porém $(x, y) \notin \varphi_T(K)$ de modo que $\varphi_T(K)$ está estritamente contido em $A_1 \times A_2$. Desde que $\varphi_T^{(1)}(a, I_o) \in A_1$ e $\varphi_T^{(2)}(b, I_o) \in A_2$, então o ponto $(\varphi_T^{(1)}(a, I_o), \varphi_T^{(2)}(b, I_o)) \in A_1 \times A_2$. Porém, não existe $S_o \in [a, b]$ que satisfaça simultaneamente

$$\varphi_T^{(1)}(S_o, I_o) = \varphi_T^{(1)}(a, I_o) \quad \text{e} \quad \varphi_T^{(2)}(S_o, I_o) = \varphi_T^{(2)}(b, I_o).$$

Com isso, concluímos que não podemos ter $\varphi_T(K) = A_1 \times A_2$.

A Figura 3.4 mostra geometricamente a discussão apresentada neste exemplo.

Sejam agora $\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ e definimos $\mathbf{z}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ pela t -norma do mínimo. Podemos escolher \mathbf{x}_o e \mathbf{y}_o de tal forma que, para algum $\alpha \in [0, 1]$, temos:

$$[\mathbf{z}_o]^\alpha = [\mathbf{x}_o]^\alpha \times [\mathbf{y}_o]^\alpha = [a, b] \times \{I_o\}.$$

Pelo que acabamos de apresentar, temos que:

$$[\hat{\varphi}_T(\mathbf{z}_o)]^\alpha = \hat{\varphi}_T([\mathbf{z}_o]^\alpha) \neq A_1 \times A_2.$$

Assim, podemos concluir que $\hat{\varphi}_T(\mathbf{z}_o)$ não é um produto cartesiano fuzzy, pela t -norma do mínimo. Conseqüentemente, temos que $\hat{\varphi}_T(\mathbf{z}_o) \notin \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$. Isto é, mesmo para t -norma do mínimo, a aplicação $\hat{\varphi}_t$, gerada pelo modelo SI , não é um fluxo sobre

$\mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

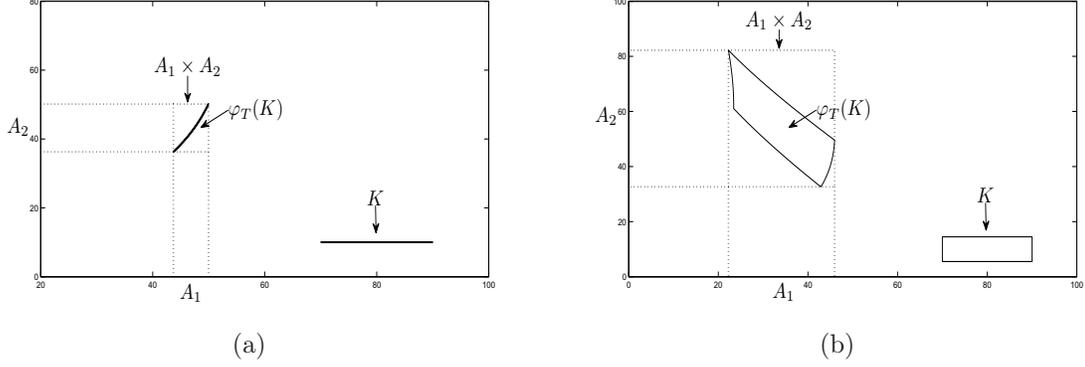


Figura 3.4: (a) - $\varphi_T(K)$ com $K = [a, b] \times \{I_o\}$; (b) - $\varphi_T(K)$ com $K = [a, b] \times [c, d]$.

□

Situação análoga ocorre quando estamos considerando incertezas nos parâmetros de uma equação. Como apresentamos anteriormente, a extensão de Zadeh é aplicada sobre o fluxo determinístico ψ_t , gerado pela Equação (3.12). Novamente, para que a aplicação $\hat{\psi}_t$ satisfaça as propriedades de um fluxo, é necessário considerarmos o espaço de fase $\mathcal{E}(U \times P)$ ao invés de $\mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(P)$. Para mostrar que $\hat{\psi}_{t+s} = \hat{\psi}_t \circ \hat{\psi}_s$ basta mostrar que, para todo $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$, temos:

$$[\hat{\psi}_{t+s}(\mathbf{y}_o)]^\alpha = [\hat{\psi}_t(\hat{\psi}_s(\mathbf{y}_o))]^\alpha, \quad (3.13)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Pelo teorema de Nguyen, vale a seguinte igualdade:

$$[\hat{\psi}_{t+s}(\mathbf{y}_o)]^\alpha = \hat{\psi}_{t+s}([\mathbf{y}_o]^\alpha) = \{\psi_{t+s}(x_o, p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\}.$$

Seja $\mathbf{z} = \hat{\psi}_s(\mathbf{y}_o) \in \mathcal{E}(U \times P)$ e, pelo teorema de Nguyen, vale $[\mathbf{z}]^\alpha = \hat{\psi}_s([\mathbf{y}_o]^\alpha)$. Logo, temos que:

$$[\hat{\psi}_t(\hat{\psi}_s(\mathbf{y}_o))]^\alpha = [\hat{\psi}_t(\mathbf{z})]^\alpha = \psi_t([\mathbf{z}]^\alpha) = \psi_t(\psi_s([\mathbf{y}_o]^\alpha)).$$

Agora, usando a propriedade de fluxo válida para $\hat{\psi}_t$, temos então:

$$\begin{aligned}\psi_t(\psi_s([\mathbf{y}_o]^\alpha)) &= \{\psi_t(\psi_s((x_o, p_o))) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\} \\ &= \{\psi_{t+s}(x_o, p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\}.\end{aligned}$$

Com isso, provamos a igualdade (3.13), o que mostra que $\hat{\psi}_t$ é um fluxo sobre $\mathcal{E}(U \times P)$. Obviamente se \mathbf{y}_o é dado por alguma t - norma, isto é, $\mathbf{y}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$, então vale também o que acabamos de mostrar, pois $\mathbf{y}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o) \in \mathcal{E}(U \times P)$.

Função de pertinência do ponto de equilíbrio fuzzy

Algumas considerações sobre a função de pertinência do ponto de equilíbrio fuzzy são necessárias. Seja $y_e : A \rightarrow U \times P$, com $A \subset U \times P$, a aplicação que para cada $(x_o, p_o) \in A$ associa o ponto de equilíbrio do fluxo determinístico $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$ gerado pela equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, p), & x(0) = x_o, \\ \frac{dp}{dt} = 0, & p(0) = p_o. \end{cases} \quad (3.14)$$

Com vimos anteriormente, para cada $(x_o, p_o) \in A$ o ponto de equilíbrio é da forma

$$y_e(x_o, p_o) = (x_e(x_o, p_o), p_o) \quad (3.15)$$

onde $x_e : A \rightarrow U$ para cada $(x_o, p_o) \in A$ associa o ponto de equilíbrio $x_e(x_o, p_o)$, para o qual converge a solução $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$ da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p_o), \quad x(0) = x_o. \quad (3.16)$$

Observamos que há uma diferença sutil entre o domínio de $y_e : A \rightarrow U \times P$ e do fluxo determinístico ψ_t . Em geral, a função y_e não está definida ou não é contínua em todo o domínio $U \times P$. Neste caso, a extensão de Zadeh da aplicação $y_e : A \rightarrow U \times P$, $A \subset U \times P$, é a aplicação \hat{y}_e com domínio $\mathcal{E}(A)$ enquanto que o domínio da fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t$ é o conjunto $\mathcal{E}(U \times P)$. No entanto, dado um ponto $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ com α - níveis contidos em A ,

podemos definir $\mathbf{z}_o \in \mathcal{E}(A)$ tal que $[\mathbf{y}_o]^\alpha = [\mathbf{z}_o]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, temos que

$$[\mathbf{y}_e]^\alpha = [\hat{y}_e(\mathbf{z}_o)]^\alpha = y_e([\mathbf{z}_o]^\alpha) = y_e([\mathbf{y}_o]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, quando $y_e : A \rightarrow U \times P$ é contínua em A . Com isto, cometemos um abuso de notação e dizemos que $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$, ao invés de $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{z}_o)$, para enfatizar a dependência do ponto de equilíbrio pela condição inicial.

Suponha aqui que as hipóteses da Proposição 3.8 são satisfeitas. Seja $Im(x_e)$ e $Im(y_e)$ o conjunto imagem de $x_e : A \rightarrow U$ e $y_e : A \rightarrow U \times P$, respectivamente. Por (3.15), um ponto $x \in Im(x_e)$ se, e somente se, $(x, p) \in Im(y_e)$ para algum $p \in P$.

Consideramos então a condição inicial $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$. Para todo $(x, p) \in Im(y_e)$, a função de pertinência $\mu_{\mathbf{y}_e} : U \times P \rightarrow [0, 1]$ do ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{y}_e}(x, p) &= \sup_{y_e(x_o, p_o) = (x, p)} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p_o) \\ &= \sup_{\substack{x_e(x_o, p_o) = x \\ p_o = p}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p_o) \\ &= \sup_{\substack{x_o \in U \\ x_e(x_o, p) = x}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $(x, p) \notin Im(y_e)$ então $\mu_{\mathbf{y}_e}(x, p) = 0$. Assim, se $\mu_{\mathbf{y}_e} : U \times P \rightarrow [0, 1]$ é a função de pertinência da condição inicial \mathbf{y}_o , então a função de pertinência do ponto de equilíbrio é dada por:

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, p) = \begin{cases} \sup_{x_o \in U} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p) & \text{se } x = x_e(x_o, p), \\ 0 & \text{se } x \neq x_e(x_o, p). \end{cases} \quad (3.17)$$

Em alguns casos, é possível determinar um conjunto $A \subset U$ no qual a convergência para o ponto de equilíbrio não depende da condição inicial x_o , mas apenas do parâmetro p_o . Ou seja, $\varphi_t(x_o, p_o)$ converge para $s(p_o) = x_e(x_o, p_o)$ para qualquer $(x_o, p_o) \in A$. Neste caso, se x está na imagem de x_e então $x_e(x_o, p_o) = x$ para todo x_o . Assim, se $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$

tem função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}_o}(x, p) = \Delta(\mu_{\mathbf{x}_o}(x), \mu_{\mathbf{p}_o}(p)),$$

onde $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$, $\mathbf{p}_o \in \mathcal{E}(P)$ e Δ é uma t - norma, então

$$\sup_{\substack{x_o \in U \\ x_e(x_o, p) = x}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p) = \sup_{\substack{x_o \in U \\ x_e(x_o, p) = x}} \Delta(\mu_{\mathbf{x}_o}(x), \mu_{\mathbf{p}_o}(p)) = \mu_{\mathbf{p}_o}(p),$$

pois existe $x_o \in U$ tal que $\mu_{\mathbf{x}_o}(x_o) \geq \mu_{\mathbf{p}_o}(p)$. Portanto, a função de pertinência do ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e , neste caso, é:

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, p) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{p}_o}(p) & \text{se } x_e(x_o, p) = x, \\ 0 & \text{se } x_e(x_o, p) \neq x. \end{cases}$$

Do ponto de vista de aplicações em modelagem de fenômenos, a discussão acima garante que a subjetividade na condição inicial não influencia no ponto de equilíbrio do sistema. O ponto de equilíbrio neste caso, é unicamente determinado pela subjetividade envolvida nos parâmetros da Equação (3.16).

3.5 Conclusão

Neste capítulo mostramos alguns resultados que garantem a existência de pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy.

No Teorema 3.6 mostramos que, sob certas hipótese, o fluxo fuzzy pode convergir para um ponto de equilíbrio fuzzy não crisp. O mesmo teorema também fornece uma maneira relativamente simples de determinar o ponto de equilíbrio para o qual a solução fuzzy converge quando $t \rightarrow \infty$. Em outras palavras, o Teorema 3.6 afirma que se a solução determinística converge para uma função, que para cada condição inicial associa o ponto de equilíbrio, então a solução fuzzy converge para a extensão de Zadeh desta função (veja a relação em (3.4)). Mostramos também que alguns resultados sobre pontos de equilíbrio já conhecidos são casos particulares deste teorema.

Através do Teorema 3.6, mostramos que quando a solução determinística depende de parâmetros, então a solução fuzzy pode admitir pontos de equilíbrio não crisp. Este resultado é apresentado na Proposição 3.8.

Capítulo 4

Órbitas periódicas fuzzy e conjuntos invariantes

4.1 Introdução

No capítulo anterior, mostramos as hipóteses que garantem a convergência da solução fuzzy para um ponto de equilíbrio não crisp. Mostramos também que estes resultados generalizam alguns resultados já conhecidos sobre a existência de pontos de equilíbrio fuzzy.

Em modelos que descrevem a interação entre presa e predador frequentemente aparecem soluções determinísticas periódicas. Tais soluções são importantes para compreensão da dinâmica populacional das espécies envolvidas na interação.

Por esta razão, neste capítulo buscamos determinar condições para a existência de pontos periódicos para o fluxo fuzzy. Na Seção 4.2 caracterizamos os pontos periódicos fuzzy e órbitas periódicas fuzzy. Ainda na mesma seção, definimos o conceito de estabilidade para órbitas periódicas fuzzy e investigamos a relação existente entre a estabilidade de órbitas periódicas determinísticas e órbitas periódicas fuzzy.

Na Seção 4.3 buscamos alguns resultados para conjuntos invariantes e atratores de uma maneira geral. Assim como no caso de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas, apresentamos condições necessárias e suficientes para existência de conjuntos atratores e invariantes para o fluxo fuzzy.

Para finalizar este Capítulo, na Seção 4.4 consideramos os fluxos fuzzy gerados por

equações diferenciais autônomas bidimensionais. Baseados nos resultados desenvolvidos nas seções anteriores, apresentamos uma versão do teorema de Poincaré - Bendixson para os fluxos fuzzy provenientes de soluções determinísticas bidimensionais.

4.2 Órbitas periódicas fuzzy

Embora os resultados apresentados no capítulo anterior sejam capazes de incorporar pontos de equilíbrio fuzzy não crisp, e portanto mais gerais do que os apresentados em Mizukoshi (2004) e Mizukoshi et al. (2009), eles ainda não são suficientes para uma análise qualitativa completa do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

Por exemplo, vimos no Capítulo 1 que as soluções das equações autônomas podem apresentar periodicidade e essas soluções periódicas são também importantes para compreendermos o comportamento da solução determinística $\varphi_t(x_o)$ com a evolução no tempo. Alguns estudos de pontos periódicos e conjuntos atratores para sistemas dinâmicos fuzzy discretos podem ser encontrados em Bassanezi et al. (2000), Barros (1997) e Souza (2001).

Com o objetivo de tornar a análise qualitativa do fluxo fuzzy gerado por equações diferenciais mais completa, demonstramos, no que segue desta seção alguns, resultados relacionados aos pontos e órbitas periódicas para o fluxo fuzzy.

Relembremos aqui que um ponto $p \in U$ é τ - periódico para o fluxo determinístico quando $\varphi_\tau(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para todo $t \in (0, \tau)$. Ou, equivalentemente, $p \in U$ possui período $\tau > 0$ se

$$\tau = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : \varphi_s(p_o) = p_o, s > 0\}.$$

Baseado nesta ideia podemos definir periodicidade para pontos em $\mathcal{E}(U)$.

Definição 4.1. Dizemos que um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto τ - periódico para o fluxo fuzzy quando

$$\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \quad \text{e} \quad \hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}, \quad t \in (0, \tau).$$

Podemos ainda caracterizar os pontos periódicos do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ por meio de seus α - níveis, isto é, $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto τ - periódico para $\hat{\varphi}_t$ quando

$$\varphi_\tau([\mathbf{p}]^\alpha) = [\mathbf{p}]^\alpha \quad \text{e} \quad \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) \neq [\mathbf{p}]^\alpha, \quad t \in (0, \tau)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 4.1 (Existência de pontos periódicos). O sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, & x_1(0) = x_{01}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1, & x_2(0) = x_{02}, \end{cases}$$

determina o fluxo $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi_t(x_{01}, x_{02}) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} x_{02} \\ -x_{01} \end{pmatrix} \sin t.$$

A solução acima é 2π - periódica uma vez que para todo $p = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ temos $\varphi_{2\pi}(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para todo $t \in (0, 2\pi)$. Vale notar que, para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|\varphi_t(x_{01}, x_{02})\|_2^2 = x_{01}^2 + x_{02}^2$$

e portanto, a órbita periódica γ determinada por $\varphi_t(p)$ é a circunferência centrada na origem, de raio $\|p\|_2$.

Consideremos agora um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ tal que $[\mathbf{p}]^1 = \{p\}$, isto é, $[\mathbf{p}]^1$ é unitário. Então o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ obtido pela extensão de φ_t satisfaz $\hat{\varphi}_{2\pi}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ e $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$ para todo $t \in (0, 2\pi)$. De fato, usando a caracterização por α - níveis temos:

$$[\hat{\varphi}_{2\pi}(\mathbf{p})]^\alpha = \varphi_{2\pi}([\mathbf{p}]^\alpha) = \{\varphi_{2\pi}(p_o) : p_o \in [\mathbf{p}]^\alpha\} = [\mathbf{p}]^\alpha$$

e também, para $t \in (0, 2\pi)$,

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})]^1 = \varphi_t([\mathbf{p}]^1) = \{\varphi_t(p_o) : p_o \in [\mathbf{p}]^1\} \neq [\mathbf{p}]^1,$$

e portanto $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$. Logo, o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ possui pontos periódicos. \square

Os conceitos de órbita e conjunto limite para fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$, são análogos aos definidos para fluxos em espaços métricos. A *órbita fuzzy* $\gamma(\mathbf{x}_o) \subset \mathcal{E}(U)$ de um estado inicial

$\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$, é definida como sendo o subconjunto no espaço de fase $\mathcal{E}(U)$ definido por

$$\gamma(\mathbf{x}_o) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) = \{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{E}(U) : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Se $\mathbf{B} \subset \mathcal{E}(U)$ então o ω - *limite fuzzy* é definido por

$$\omega(\mathbf{B}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})}.$$

Em particular, quando o conjunto \mathbf{B} é unitário, o ω - limite fuzzy de $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ é o conjunto

$$\omega(\mathbf{x}_o) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}.$$

O adjetivo *fuzzy* está usado aqui simplesmente pelo fato dos conjuntos $\gamma(\mathbf{x}_o)$ e $\omega(\mathbf{B})$ estarem contidos em $\mathcal{E}(U)$.

Como no caso determinístico, vale também que se $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(U)$ está na órbita $\gamma(\mathbf{p})$ determinada por um ponto periódico \mathbf{p} , isto é, $\mathbf{q} = \hat{\varphi}_s(\mathbf{p})$ para algum $s > 0$, então \mathbf{q} é um ponto periódico com o mesmo período de \mathbf{p} . De fato, pois supondo que \mathbf{p} seja τ - periódico e $\mathbf{q} = \hat{\varphi}_s(\mathbf{p})$ para algum $s \in (0, \tau)$, temos então as igualdades a seguir que são válidas em decorrência das propriedades de fluxo:

$$\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{q}) = \hat{\varphi}_\tau(\hat{\varphi}_s(\mathbf{p})) = \hat{\varphi}_s(\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{p})) = \hat{\varphi}_s(\mathbf{p}) = \mathbf{q}.$$

Por outro lado, se $t > \tau$ então podemos escrever $t = n\tau + s$, $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0, \tau)$ de modo que valem as seguintes igualdades

$$\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_s(\hat{\varphi}_{n\tau}(\mathbf{p})) = \hat{\varphi}_s(\mathbf{p}).$$

Com isso, concluímos que se $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto de período $\tau > 0$ então, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, vale que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_s(\mathbf{p})$ para algum $s \in [0, \tau)$. Além disso, podemos concluir também que $\hat{\varphi}_{t+\tau}(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})$.

Assim, a órbita $\gamma(\mathbf{p})$ da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})$ obtida por um ponto periódico é uma

órbita periódica no conjunto $\mathcal{E}(U)$ e temos

$$\gamma(\mathbf{p}) = \{\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) : t \geq 0\} = \bigcup_{s \in [0, \tau)} \hat{\varphi}_s(\mathbf{p}).$$

Segue diretamente das considerações feitas acima que as órbitas periódicas $\gamma(\mathbf{p})$ e $\gamma(\mathbf{q})$ são as mesmas, isto é, $\gamma(\mathbf{p}) = \gamma(\mathbf{q})$, se $\mathbf{q} = \hat{\varphi}_s(\mathbf{p})$ para algum $s \in \mathbb{R}_+$.

Para não haver confusão, denominaremos uma órbita periódica $\gamma(\mathbf{p}) \subset \mathcal{E}(U)$ por *órbita periódica fuzzy* e a representaremos por ζ .

Assim como uma órbita periódica determinística γ é um conjunto invariante para o fluxo determinístico φ_t , a *órbita periódica fuzzy* $\zeta \subset \mathcal{E}(U)$ definida acima, também possui a propriedade de ser invariante pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$, ou seja, $\hat{\varphi}_t(\zeta) = \zeta$ para qualquer $t \geq 0$. Além do mais, a órbita ζ é um subconjunto (sequencialmente) compacto em $\mathcal{E}(U)$ uma vez que a sequência $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \zeta$ determina uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \tau]$ de modo que $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em $[0, \tau]$. Logo, $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge em ζ .

Através da caracterização de pontos periódicos por meio de α - níveis é possível provar que a extensão de Zadeh do fluxo determinístico preserva a periodicidade de um ponto. Resultado semelhante vale para pontos periódicos de sistemas dinâmicos fuzzy discretos (Bassanezi et al., 2000).

Teorema 4.1. *Um ponto $p \in U$ é periódico de período τ para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{p\}}$ é um ponto periódico de período τ para $\hat{\varphi}_t$.*

Prova: Notemos que $[\hat{\varphi}_t(\chi_{\{p\}})]^\alpha = \{\varphi_t(p)\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, temos que $[\hat{\varphi}_\tau(\chi_{\{p\}})]^\alpha = \{p\}$ e $[\hat{\varphi}_t(\chi_{\{p\}})]^\alpha \neq \{p\}$ para todo $t \in (0, \tau)$ de modo que a afirmação está provada. ■

Assim, podemos então concluir que o fluxo fuzzy admite pontos periódicos, consequentemente, órbitas periódicas fuzzy $\gamma(\chi_{\{p\}})$, sempre que o fluxo determinístico possuir solução periódica. Desde que $\hat{\varphi}_t(\chi_{\{p\}}) = \chi_{\{\varphi_t(p)\}}$ então a órbita periódica fuzzy $\gamma(\chi_{\{p\}})$ de um ponto periódico $\chi_{\{p\}}$, é o conjunto crisp χ_γ , onde γ é a órbita determinística do ponto periódico $p \in U$.

Embora a proposição anterior garanta a existência de pontos periódicos para o fluxo fuzzy, no Exemplo 4.1 mostramos que todo $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é um ponto 2π - periódico. Bus-

camos então um resultado que nos forneça um critério para obtermos pontos periódicos que não sejam apenas crisp e portanto, de uma forma mais geral do que o Teorema 4.1.

Teorema 4.2. *Suponha que $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ seja uma órbita τ - periódica para o fluxo determinístico φ_t e seja $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Se $[\mathbf{p}]^\alpha$ é conexo para algum $\alpha \in [0, 1]$ e $[\mathbf{p}]^0 \subset \gamma$, então \mathbf{p} é um ponto τ - periódico para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.*

Prova: Para provar esse resultado usamos a caracterização de pontos periódicos por α - níveis. Desde que $[\mathbf{p}]^\alpha \subset \gamma$, então todo ponto $p \in [\mathbf{p}]^\alpha$ é τ - periódico para o fluxo determinístico e portanto,

$$\begin{aligned}\varphi_\tau([\mathbf{p}]^\alpha) &= \{\varphi_\tau(p) : p \in [\mathbf{p}]^\alpha\} \\ &= \{p : p \in [\mathbf{p}]^\alpha\} \\ &= [\mathbf{p}]^\alpha.\end{aligned}$$

Antes de provar que $\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) \neq [\mathbf{p}]^\alpha$ para todo $t \in [0, \tau)$, mostraremos que φ_t é injetiva para $t \in [0, \tau)$. Com efeito, suponha que existam $0 < s_1 < s_2 < \tau$ tal que $\varphi_{s_1}(p) = \varphi_{s_2}(p)$. Pelas propriedades de fluxo, temos que $\varphi_{s_1}(p) = \varphi_{s_2-s_1}(\varphi_{s_1}(p))$ o que implica que $\varphi_{s_1}(p)$ possui período $s_2 - s_1 < \tau$. Mas isso é um absurdo pois $\varphi_{s_1}(p) \in \gamma$ é τ - periódico.

Desde que $[\mathbf{p}]^\alpha \subset \gamma$ é conexo, então

$$[\mathbf{p}]^\alpha = \bigcup_{t \in [s_1, s_2]} \varphi_t(p)$$

para algum $p \in \gamma$ e $[s_1, s_2] \subset [0, \tau)$. Suponha então que $\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) = [\mathbf{p}]^\alpha$ para algum $t \in [0, \tau)$. Isto implica que existe $s \in [s_1, s_2]$ tal que

$$\varphi_t(\varphi_{s_1}(p_o)) = \varphi_{s_1}(\varphi_t(p_o)) = \varphi_s(p_o)$$

e pela injetividade que provamos acima, $s = s_1$. Novamente usando as propriedades de sistema dinâmico podemos concluir que $\varphi_t(\varphi_{s_1}(p_o)) = \varphi_{s_1}(p_o)$ e portanto $\varphi_{s_1}(p_o) \in \gamma$ possui período $t < \tau$, o que é um absurdo.

Logo, $\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) \neq [\mathbf{p}]^\alpha$ para todo $t \in [0, \tau)$ e a afirmação está provada. ■

Como consequência imediata do Teorema 4.2, vale a seguinte afirmação para os pontos

$\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{p}]^0 \subset \gamma$ que possuem 1 - nível unitário, uma vez que todo conjunto unitário é conexo.

Corolário 4.3. *Seja \mathbf{p} com $[\mathbf{p}]^0 \subset \gamma$. Se $[\mathbf{p}]^1 = \{p\}$ então \mathbf{p} é um ponto periódico para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.*

A hipótese de \mathbf{p} possuir alguma α - nível conexo, embora não seja necessária para provar que $\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, é necessária para mostrar que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$ para $t \in [0, \tau)$.

Exemplo 4.2. Tomemos $p \in \gamma$ e seja $q = \varphi_{\tau/2}(p) \in \gamma$. Consideremos então $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ definido pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{p}}(x) = \max\{\chi_{\{p\}}(x), \chi_{\{q\}}(x)\}.$$

Os α - níveis para o ponto \mathbf{p} definido acima são iguais ao conjunto $\{p, q\} \subset \gamma$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Através da caracterização por α - níveis temos que

$$\varphi_\tau([\mathbf{p}]^\alpha) = \varphi_\tau(\{p, q\}) = \{p, q\} = [\mathbf{p}]^\alpha.$$

Por outro lado, temos também que

$$\varphi_{\tau/2}([\mathbf{p}]^\alpha) = \varphi_{\tau/2}(\{p, q\}) = \{p, q\} = [\mathbf{p}]^\alpha,$$

uma vez que $\varphi_{\tau/2}(q) = \varphi_{(\tau/2+\tau/2)}(p) = p$ e $\varphi_{\tau/2}(p) = q$. Como isso, temos então que $\hat{\varphi}_{\tau/2}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ e isso implica que \mathbf{p} possui período $\tau/2$. \square

Na realidade, qualquer $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ cujos α - níveis são subconjuntos de uma órbita τ - periódica satisfaz $\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ e, portanto, é um ponto periódico. No entanto, como vimos no Exemplo 4.2, um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{p}]^\alpha \subset \gamma$, em geral, possui período $\tau_{\mathbf{p}} < \tau$.

Proposição 4.4. *Sejam $\gamma \in U$ uma órbita determinística τ - periódica e $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{p}]^\alpha \subset \gamma$ então \mathbf{p} é um ponto $\tau_{\mathbf{p}}$ - periódico para o fluxo fuzzy e vale $\tau = n\tau_{\mathbf{p}}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Como $[\mathbf{p}]^\alpha \subset \gamma$, então temos que $\varphi_\tau([\mathbf{p}]^\alpha) = [\mathbf{p}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ de modo que $\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Logo, \mathbf{p} é um ponto periódico.

Seja $\tau_{\mathbf{p}} > 0$ o período de \mathbf{p} . Então, temos que $\hat{\varphi}_{\tau_{\mathbf{p}}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ e consequentemente $\hat{\varphi}_{\tau + \tau_{\mathbf{p}}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Logo, $\tau + \tau_{\mathbf{p}} = k\tau_{\mathbf{p}}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\tau = (k - 1)\tau_{\mathbf{p}}$ o que prova a afirmação. ■

Embora o Teorema 4.2 caracterize pontos periódicos não crisp em $\mathcal{E}(U)$, ainda não foi possível caracterizar pontos cujos α - níveis não estão contidos em órbitas periódicas determinísticas, como os apresentados pelo Exemplo 4.1. A proposição a seguir fornece condições para existência de pontos periódicos para o fluxo fuzzy.

Teorema 4.5. *Sejam $A \subset U$ tal que todo $x \in A$ é τ - periódico e $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{p}]^\alpha$ é convexo e $[\mathbf{p}]^0 \subset A$, então \mathbf{p} é τ - periódico.*

Prova: Novamente podemos usar a caracterização de pontos periódicos por α - níveis. Desde que $[\mathbf{p}]^\alpha \subset A$, então

$$\begin{aligned}\varphi_\tau([\mathbf{p}]^\alpha) &= \{\varphi_\tau(p) : p \in [\mathbf{p}]^\alpha\} \\ &= \{p : p \in [\mathbf{p}]^\alpha\} \\ &= [\mathbf{p}]^\alpha.\end{aligned}$$

O teorema do ponto fixo de Brouwer assegura que se a função $f : C \rightarrow C$, $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto e convexo, é contínua então f possui um ponto fixo. Isto é, existe $c \in C$ tal que $f(c) = c$ (Rudin, 1964).

Portanto, se $[\mathbf{p}]^\alpha$ é convexo para algum $\alpha \in [0, 1]$, então a igualdade $\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) = [\mathbf{p}]^\alpha$ para $t \in (0, \tau)$ implicaria na existência de um ponto $p \in [\mathbf{p}]^\alpha$ tal que $\varphi_t(p) = p$. Mas isso contraria a hipótese de $p \in [\mathbf{p}]^\alpha \subset A$ ser τ - periódico. ■

Aqui também podemos considerar os pontos em $\mathcal{E}(U)$ cujo 1 - nível é unitário.

Corolário 4.6. *Sejam $A \subset U$ tal que todo $x \in A$ é τ - periódico e $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{p}]^0 \subset A$ e $[\mathbf{p}]^1 = p$ então \mathbf{p} é τ - periódico.*

Uma vez que o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ pode apresentar periodicidade, seguimos então para a análise de estabilidade das soluções periódicas fuzzy. Analogamente ao caso determinístico, queremos compreender o que acontece com as soluções fuzzy determinadas por condições iniciais próximas à uma órbita periódica fuzzy ζ . Como uma órbita periódica

fuzzy é um subconjunto de $\mathcal{E}(U)$, essa proximidade é determinada pela distância entre ponto e conjunto, como na Seção 1.2.

Com abuso de notação, a distância entre ponto e conjunto será sempre denotada por $\text{dist}(x, A)$, com x e A em \mathbb{R}^n ou $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, sendo $\mathbf{A} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, a distância entre um ponto $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e o conjunto \mathbf{A} é dado por

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{A}} d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

enquanto que para $A \subset \mathbb{R}^n$, a distância entre $x \in \mathbb{R}^n$ e A é

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Com o objetivo de estudar o comportamento da extensão $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, vamos definir o conceito de estabilidade e estabilidade assintótica para uma órbita periódica fuzzy ζ .

Definição 4.2. Seja $\zeta \subset \mathcal{E}(U)$ uma órbita periódica fuzzy para $\hat{\varphi}_t$. Dizemos que ζ é *estável* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(\mathbf{x}, \zeta) < \delta$ então $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \zeta) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. A órbita é *assintoticamente estável* quando é estável e existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(\mathbf{x}, \zeta) < r$ implica que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \zeta) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

O exemplo a seguir mostra que o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ pode admitir órbitas periódicas fuzzy que são estáveis.

Exemplo 4.3. Como vimos no Exemplo 4.1, todo ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ determina uma órbita 2π - periódica para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ obtido pelo fluxo determinístico

$$\varphi_t(x_o, y_o) = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} y_o \\ -x_o \end{pmatrix} \text{sen } t,$$

no qual $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$.

Seja $\zeta_{\mathbf{p}}$ a órbita periódica fuzzy determinada por $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ e consideremos $\varepsilon > 0$ dado. Seja agora $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\text{dist}(\mathbf{q}, \zeta_{\mathbf{p}}) < \varepsilon$. Isso implica que existe $\mathbf{p}_o \in \zeta_{\mathbf{p}}$ tal que $\text{dist}(\mathbf{q}, \zeta_{\mathbf{p}}) = d_\infty(\mathbf{q}, \mathbf{p}_o) < \varepsilon$.

Desde que, para todo $p, q \in \mathbb{R}^2$, temos $\varphi_t(p) - \varphi_t(q) = \varphi_t(p - q)$ e também $\|\varphi_t(p)\| = \|p\|$, então vale:

$$\begin{aligned}
\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{q}]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}_o]^\alpha)) &= \sup_{q \in [\mathbf{q}]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|\varphi_t(q) - \varphi_t(p)\| \\
&= \sup_{q \in [\mathbf{q}]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|\varphi_t(q - p)\| \\
&= \sup_{q \in [\mathbf{q}]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|q - p\| \\
&= \text{dist}([\mathbf{q}]^\alpha, [\mathbf{p}_o]^\alpha).
\end{aligned}$$

De modo análogo podemos concluir que $\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{p}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{q}]^\alpha)) = \text{dist}([\mathbf{p}_o]^\alpha, [\mathbf{q}]^\alpha)$, de modo que temos

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}_o), \hat{\varphi}_t([\mathbf{q}]^\alpha)) = d_\infty(\mathbf{p}_o, \mathbf{q}) < \varepsilon.$$

Agora, como $\mathbf{p}_o \in \zeta_{\mathbf{p}}$ então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}_o) \in \zeta_{\mathbf{p}}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e portanto temos que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{q}), \zeta_{\mathbf{p}}) < \varepsilon$.

Dessa forma, para qualquer ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ a órbita periódica fuzzy $\zeta_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é uma órbita estável para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$. A órbita $\zeta_{\mathbf{p}}$ porém não é assintoticamente estável pois, para qualquer $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ temos que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{q}), \zeta_{\mathbf{p}}) = \text{dist}(\mathbf{q}, \zeta_{\mathbf{p}}) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. \square

Mais adiante veremos que, sob certas condições, o fluxo fuzzy pode também admitir órbitas periódicas que são assintoticamente estáveis.

A próxima afirmação é essencial para estudo de estabilidade de órbitas periódicas fuzzy.

Lema 4.7. *Seja $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset A \subset U\}$. Se $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(U)$ então vale a desigualdade*

$$\text{dist}(\mathbf{y}, A) \leq \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{A})$$

para todo $\mathbf{y} \in [\mathbf{y}]^0$.

Prova: Pela definição da métrica de Hausdorff, temos que $d_H([\mathbf{y}]^\alpha, [\mathbf{x}]^\alpha) \geq \text{dist}([\mathbf{y}]^\alpha, [\mathbf{x}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, de modo que temos $d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq \text{dist}([\mathbf{y}]^\alpha, [\mathbf{x}]^\alpha)$. Consequentemente, vale então que:

$$\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{A}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \text{dist}([\mathbf{y}]^0, [\mathbf{x}]^0).$$

Agora, $\text{dist}([\mathbf{y}]^0, [\mathbf{x}]^0) \geq \text{dist}(y, [\mathbf{x}]^0)$ para qualquer que seja $y \in [\mathbf{y}]^0$, e assim temos

$$\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{A}) \geq \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} \text{dist}(y, [\mathbf{x}]^0).$$

Desde que $[\mathbf{x}]^0 \subset \mathbf{A}$, então $\text{dist}(y, [\mathbf{x}]^0) \geq \text{dist}(y, A)$. Portanto, vale a desigualdade

$$\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{A}) \geq \text{dist}(y, A)$$

para todo $y \in [\mathbf{y}]^0$ e a afirmação está provada. ■

O Teorema 4.2 garante que, sendo $\gamma \subset U$ uma órbita periódica para φ_t , então qualquer ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ com α - níveis contidos em γ é um ponto periódico para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$. Consideramos então o conjunto $\gamma \subset \mathcal{E}(U)$ formado pelos pontos $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U)$ cujos α - níveis estão contidos em γ , isto é,

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\}.$$

De maneira geral, não podemos garantir que cada ponto em γ seja τ - periódico, se a órbita determinística γ possui período $\tau > 0$. O Exemplo 4.2 nos mostra que

$$\inf\{s \in \mathbb{R}_+ : \hat{\varphi}_s(\mathbf{p}) = \mathbf{p}, s > 0\} < \tau.$$

Por outro lado, para todo ponto $\mathbf{p} \in \gamma$ vale a igualdade $\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Assim, se γ é uma órbita determinística τ - periódica, então

$$\sup_{\mathbf{p} \in \gamma} \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : \hat{\varphi}_s(\mathbf{p}) = \mathbf{p}, s > 0\} = \tau.$$

A recíproca também é verdadeira. Isto é, se a igualdade acima é verdadeira para o conjunto γ , definido a partir de uma órbita periódica determinística γ , então γ possui período τ . De fato, se γ possui período $\tau_o < \tau$ teríamos que

$$\sup_{\mathbf{p} \in \gamma} \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : \hat{\varphi}_s(\mathbf{p}) = \mathbf{p}, s > 0, \mathbf{p} \in \gamma\} = \tau_o < \tau,$$

o que é um absurdo. Com argumento análogo se mostra que não podemos ter $\tau_o > \tau$.

Pelas relações entre o período da órbita determinística γ e o conjunto γ acima apresentadas, vamos dizer que γ é um *conjunto periódico fuzzy* gerado pela órbita determinística γ . Devemos ressaltar que, embora qualquer ponto em γ seja periódico, γ não é necessariamente uma órbita periódica. De fato, pois para nenhum \mathbf{x}_o com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset \gamma$ temos $\gamma(\mathbf{x}_o) = \gamma$. Isto é, γ não é a órbita de nenhum ponto periódico fuzzy.

É importante notar também que, para qualquer que seja $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{p}]^\alpha$ contido em uma órbita periódica determinística γ , a órbita periódica fuzzy $\gamma(\mathbf{p}) \subset \mathcal{E}(U)$ definida por \mathbf{p} é tal que:

$$\bigcup_{s \in [0, \tau)} [\hat{\varphi}_s(\mathbf{p})]^\alpha = \bigcup_{s \in [0, \tau)} \varphi_s([\mathbf{p}]^\alpha) = \gamma.$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Proposição 4.8. *Se γ é uma órbita periódica determinística então o conjunto*

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\}$$

é um conjunto fechado, limitado e invariante pelo fluxo fuzzy.

Prova: Desde que γ é um subconjunto compacto em \mathbb{R}^n , que é completo, então γ é um subespaço completo em \mathbb{R}^n . Assim, a Proposição 2.6 garante que $\mathcal{E}(\gamma)$ é um espaço métrico completo.

A Proposição 2.5 garante que γ e $\mathcal{E}(\gamma)$ são isométricos e portanto toda sequência de Cauchy em γ possui limite em γ . Logo, γ é completo em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e consequentemente fechado (Kreyszig, 1978).

Como γ é limitado então, existe $r > 0$ tal que $\|x - y\| < r$ para todo $x, y \in \gamma$. Segue diretamente da definição de d_∞ que $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \gamma$ e portanto, γ é limitado.

O fato de γ ser invariante pelo fluxo determinístico φ_t , garante que $\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha) \subset \gamma$ para todo $\mathbf{x}_o \in \gamma$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Portanto, $\hat{\varphi}_t \in \gamma$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ o que prova que γ é invariante pelo fluxo fuzzy. ■

Como todo ponto \mathbf{x}_o em γ é um ponto periódico, então, de acordo com o que foi discutido anteriormente, a órbita periódica fuzzy $\gamma(\mathbf{x}_o)$, gerada por $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, é um conjunto compacto. Como o conjunto periódico fuzzy γ é invariante, então $\gamma(\mathbf{x}_o) \subset \gamma$.

Uma vez que o conjunto periódico fuzzy $\gamma \subset \mathcal{E}(U)$ definido por

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\}$$

é invariante, então é importante compreendermos o comportamento do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ quando as condições iniciais estão próximas de γ . O próximo teorema mostra a relação existente entre a estabilidade da órbita determinística γ e do conjunto periódico γ .

Teorema 4.9. *Sejam γ uma órbita periódica para φ_t com período $\tau > 0$ e*

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\}$$

o conjunto periódico fuzzy determinado por γ . Então:

a) γ é estável para φ_t se, e somente se, γ estável para $\hat{\varphi}_t$;

b) γ é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, γ assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$.

Prova: *a) (\Rightarrow)* Suponha que γ seja uma órbita estável para φ_t . Pela definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(x, \gamma) < \delta$ então $\text{dist}(\varphi_t(x), \gamma) \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Seja agora $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ satisfazendo $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < \delta$ e vamos mostrar que, para todo $t \geq 0$, $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) < \varepsilon$. Pelo Lema 4.7 temos então que $\text{dist}(x, \gamma) < \delta$ para todo $x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha$ com $\alpha \in [0, 1]$, e conseqüentemente $\text{dist}(\varphi_t(x), \gamma) < \varepsilon$. Isto porém implica, para um $t > 0$ fixo, existe $\bar{y}_x \in \gamma$ tal que $\|\varphi_t(x) - \bar{y}_x\| < \varepsilon$ para todo $x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Definimos então para todo $\alpha \in (0, 1]$ o conjunto

$$A_\alpha = \overline{\bigcup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \bar{y}_x}$$

e para $\alpha = 0$ definimos

$$A_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}.$$

Desde que $\inf_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - y\| < \varepsilon$ para todo $y \in A_\alpha$, com $\alpha \in (0, 1]$, vale então que

$$\text{dist}(A_\alpha, \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) = \sup_{y \in A_\alpha} \inf_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - y\| \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, vale também que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A_\alpha) &= \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y \in A_\alpha} \|\varphi_t(x) - y\| \\ &\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - \bar{y}_x\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

e portanto $d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A_\alpha) \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Desde que $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$, o Teorema 2.1 garante que $[\mathbf{x}_o]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\mathbf{x}_o]^\alpha}$. Dessa forma, se $x \in [\mathbf{x}_o]^0$ então existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{supp}(\mathbf{x}_o)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Agora, para cada x_n existe $\bar{y}_{x_n} \in A_0$ tal que $\|\varphi_t(x_n) - \bar{y}_{x_n}\| < \varepsilon$ e isto implica que $\text{dist}(\varphi_t(x_n), A_0) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade da função $f(x) = \text{dist}(x, A)$ e de φ_t com relação a condição inicial, temos que $\text{dist}(\varphi_t(x), A_0) \leq \varepsilon$ para todo $x \in [\mathbf{x}_o]^0$, de onde temos que $\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^0), A_0) \leq \varepsilon$. Com argumento semelhante podemos mostrar que também temos $\text{dist}(A_0, \varphi_t([\mathbf{x}_o]^0)) \leq \varepsilon$ de modo que vale

$$d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A_\alpha) \leq \varepsilon \tag{4.1}$$

para qualquer que seja $\alpha \in [0, 1]$.

Mostramos agora que a família $\{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ construída acima satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.

De fato, os itens (a) e (d) seguem diretamente da definição de A_α e A_0 respectivamente. Uma vez que $[\mathbf{x}_o]^\alpha \subseteq [\mathbf{x}_o]^\beta$ para todo $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, então vale também que $A_\alpha \subseteq A_\beta$ e portanto o item (b) também é satisfeito.

Pelo o que acabamos de provar, se $a \in A_\alpha$ então $a \in A_\beta$ para qualquer que seja $\beta \in [0, \alpha)$, de onde concluímos que

$$A_\alpha \subseteq \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta.$$

Por outro lado, se $a \in \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} A_\beta$ então $a \in A_\beta$ para todo $\beta \in [0, \alpha)$. Mas então existe

uma sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A_\beta$ tal que $y_n \rightarrow a$, para todo $\beta \in [0, \alpha)$. Assim, existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcap_{\beta \in [0, \alpha)} = [\mathbf{x}_o]^\alpha$ tal que $\bar{y}_{x_n} = y_n \rightarrow a$. Desde que $\bar{y}_{x_n} = y_n \in A_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a \in A_\alpha$ e o item (c) está provado.

Com isso, o Teorema 2.2 garante que existe $\mathbf{y} \in \gamma$ tal que $[\mathbf{y}]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ de onde temos que

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), [\mathbf{y}]^\alpha) \leq \varepsilon$$

por (4.1). Consequentemente, temos que

$$\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) = \inf_{\mathbf{y} \in \gamma} \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \leq \varepsilon.$$

A forma como $\mathbf{y} \in \gamma$ foi construído depende de $t > 0$ fixado arbitrariamente no início, isto é, para cada $t \geq 0$ existe $\mathbf{y}_t \in \gamma$ tal que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}_t) \leq \varepsilon$. Consequentemente $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) \leq \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ o que prova que γ é estável para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

a)(\Leftarrow) Desde que γ é estável, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < \delta$ implica em $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Agora, se $\text{dist}(x_o, \gamma) < \delta$ então $\text{dist}(\chi_{\{x_o\}}, \gamma) < \delta$ de modo que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_o\}}), \gamma) < \varepsilon$. Pelo Lema 4.7 temos então que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) < \varepsilon$ o que prova a recíproca do primeiro item.

Provemos agora o segundo item da afirmação.

b)(\Rightarrow) Seja $\varepsilon > 0$. Como, por hipótese, γ é assintoticamente estável então γ é estável e existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, se $x_o \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $\text{dist}(x_o, \gamma) < r$. Desde que γ é estável, o item anterior então garante que γ é estável e precisamos mostrar que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ próximo de γ .

Suponha que $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < r$. Como $[\mathbf{x}_o]^0$ é um conjunto compacto, então, pelo Corolário 1.16, existe $T > 0$ tal que

$$\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^0), \gamma) < \varepsilon$$

para todo $t > T$. Ou seja, para todo $x \in [\mathbf{x}_o]^0$ temos que $\text{dist}(\varphi_t(x), \gamma) < \varepsilon$ para todo $t > T$. Em particular temos $\text{dist}(\varphi_t(x), \gamma) < \varepsilon$ para $x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha \subseteq [\mathbf{x}_o]^0$.

Assim, como no item (a), podemos construir $\mathbf{y}_t \in \gamma$ satisfazendo $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}_t) \leq \varepsilon$ de modo que a desigualdade

$$\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) = \inf_{\mathbf{y} \in \gamma} \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \leq \varepsilon$$

vale para todo $t > T$ e $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < r$. Isto prova que para $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ satisfazendo $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < r$. Portanto, γ é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

b)(\Leftarrow) Por hipótese, γ é estável e existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < r$ então $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

O item (a) garante que γ é estável para o fluxo φ_t . Se para $x_o \in \mathbb{R}^n$ temos $\text{dist}(x_o, \gamma) < r$, então

$$\text{dist}(\chi_{\{x_o\}}, \gamma) \leq \inf_{\chi_{\{y\}} \in \gamma} d_\infty(\chi_{\{y\}}, \chi_{\{x_o\}}) = \inf_{y \in \gamma} \|y - x_o\| < r$$

e portanto vale que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_o\}}), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ de modo que pelo Lema 4.7 temos então que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0$. Logo, γ é assintoticamente estável para o fluxo determinístico φ_t e a recíproca está provada. ■

O teorema que acabamos de provar fornece uma importante relação entre a estabilidade de uma órbita periódica determinística e do conjunto periódico fuzzy determinado a partir destas órbitas. Para o caso bidimensional por exemplo, o teorema de Poincaré - Bendixson pode ser usado para determinar a existência de órbitas assintoticamente estáveis para o fluxo determinístico e, como consequência, podemos mostrar também que o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ apresenta periodicidade.

A extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t$ também preserva algumas outras propriedades dos fluxos determinísticos, como por exemplo, a propriedade de um ponto possuir periodicidade assintótica.

Usando a ideia de fluxos determinísticos, um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ possui período assintótico τ quando temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_\infty(\hat{\varphi}_{t+\tau}(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) = 0.$$

Como veremos, se uma órbita periódica fuzzy é assintoticamente estável no sentido da Definição 4.2, então existe uma vizinhança da órbita cujos pontos possuem periodicidade

assintótica.

Proposição 4.10. *Suponha que o conjunto periódico fuzzy γ seja assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$ com período τ . Então existe uma vizinhança $\mathbf{V} \subset \mathcal{E}(U)$ contendo γ tal que cada ponto de \mathbf{V} possui período assintótico τ .*

Prova: Como por hipótese γ é assintoticamente estável, então existe $r > 0$ tal que se $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < r$ então $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Seja então $\mathbf{V} \subset \mathcal{E}(U)$ formado pelos pontos $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ tal que $\text{dist}(\mathbf{x}_o, \gamma) < r$. Suponha que $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ e seja $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(U)$. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ com relação a condição inicial assegura que existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que se $d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{z}) < \delta$ então, $d_\infty(\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{y}), \hat{\varphi}_\tau(\mathbf{z})) < \varepsilon$.

Seja então $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$. Desde que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}), \gamma) \rightarrow 0$, então existem $T \geq 0$ e $\mathbf{z}_t \in \gamma$ tal que, para todo $t > T$, vale $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}), \mathbf{z}_t) < \delta$ e portanto temos

$$d_\infty(\hat{\varphi}_{t+\tau}(\mathbf{p}), \mathbf{z}_t) = d_\infty(\hat{\varphi}_\tau(\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})), \hat{\varphi}_\tau(\mathbf{z}_t)) < \varepsilon,$$

pois $\mathbf{z} \in \gamma$ e então $\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Pela desigualdade triangular, temos então que:

$$\begin{aligned} d_\infty(\hat{\varphi}_{t+\tau}(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) &\leq d_\infty(\hat{\varphi}_{t+\tau}(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_\tau(\mathbf{z}_t)) + d_\infty(\hat{\varphi}_\tau(\mathbf{z}_t), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) \\ &= d_\infty(\hat{\varphi}_{t+\tau}(\mathbf{p}), \mathbf{z}_t) + d_\infty(\mathbf{z}_t, \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) \\ &< \varepsilon + \delta \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ possui período assintótico τ e a afirmação está provada. ■

O significado da afirmação acima é que a solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, determinado por $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ próximo de uma trajetória periódica assintoticamente estável, se comporta como órbita periódica com a evolução no tempo. Isto é intuitivo, uma vez que as órbitas periódicas assintoticamente estáveis são conjuntos atratores para o fluxo $\hat{\varphi}_t$.

Conforme o Teorema 1.8 na Seção 1.2, quando a órbita periódica determinística γ é um atrator periódico as soluções determinísticas $\varphi_t(x_o)$ tais que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ apresentam a propriedade de estar em fase com a solução periódica γ . Isto é, existe um único $z(x) \in \gamma$ tal que $\|\varphi_t(x) - \varphi_t(z(x))\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

A aplicação $z : V \rightarrow \gamma$, $V \subset U$, que associa para cada $x \in V$ o único ponto $z(x) \in \gamma$ garantido pelo Teorema 1.8, é uma aplicação contínua. De fato, pois pela desigualdade

triangular temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_t(z(y)) - \varphi_t(z(x))\| &\leq \|\varphi_t(z(y)) - \varphi_t(y)\| + \|\varphi_t(y) - \varphi_t(x)\| + \\ &\quad + \|\varphi_t(x) - \varphi_t(z(x))\| \end{aligned}$$

Tomemos agora uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ tal que $x_n \rightarrow x$ e suponha que z não seja contínua. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ tal que $\|\varphi_t(z(x_n)) - \varphi_t(z(x))\| \geq \varepsilon$. Por hipótese, $\varphi_t(x_n) \rightarrow \varphi_t(z(x_n))$ para todo x_n quando $t \rightarrow \infty$. Então, existe $T > 0$ tal que $\|\varphi_T(z(x_n)) - \varphi_T(x_n)\| < \varepsilon/3$ e também $\|\varphi_T(x) - \varphi_T(z(x))\| < \varepsilon/3$. Portando, temos que

$$\|\varphi_T(x_n) - \varphi_T(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{3},$$

de modo que $\varphi_T(x_n)$ não converge $\varphi_T(x)$ quando $n \rightarrow \infty$, o que é um absurdo pela continuidade de φ_t com relação condição inicial.

A extensão de Zadeh $\hat{z} : \mathcal{E}(V) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ da aplicação $z : V \rightarrow \gamma \subset U$ definida acima, associa para cada $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(V)$ o ponto $\mathbf{y} = \hat{z}(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{E}(U)$ cujos α -níveis são subconjuntos da órbita periódica γ .

Baseado na continuidade da aplicação $z : V \rightarrow \gamma$, mostramos na proposição abaixo que o fluxo fuzzy também apresenta a propriedade de estar em fase com uma solução periódica fuzzy, desde que a órbita periódica determinística γ seja atratora.

Proposição 4.11. *Sejam γ um atrator periódico para o fluxo determinístico, $V \subset U$ aberto e $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset V$. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) = 0$ para todo $x_o \in V$ então existe um único ponto periódico $\mathbf{p} \in \gamma$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Prova: Por hipótese, γ é um atrator periódico e $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) = 0$ e como provamos acima, a aplicação $z : V \rightarrow \gamma$ tal que $\|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(z(x_o))\| \rightarrow 0$ é contínua. Além do mais, pelo Corolário 1.17 a convergência é uniforme em $x \in [\mathbf{x}_o]^0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe T_ε tal que para todo $t > T_\varepsilon$ temos $\|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(z(x_o))\| < \varepsilon$ para todo $x_o \in [\mathbf{x}_o]^0$.

(*Existência*). Desde que $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ e $[\mathbf{x}_o]^0 \subset V$ então existe $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(V)$ tal que $[\bar{\mathbf{x}}]^\alpha = [\mathbf{x}_o]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Seja $\hat{z} : \mathcal{E}(V) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ a extensão de Zadeh de z e definamos $\mathbf{p} = \hat{z}(\bar{\mathbf{x}})$. Pela continuidade de z , temos então que $[\mathbf{p}]^\alpha = z([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha) \subset \gamma$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Assim, pela Proposição 4.2, $\mathbf{p} \in \gamma$ é um ponto periódico para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$. Agora, para todo

$\alpha \in [0, 1]$ e $t > T_\varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) &= \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(p)\| \\ &\leq \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(z(x_o))\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, vale também que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha), \varphi_t([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha)) &= \sup_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \inf_{x_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(p)\| \\ &\leq \sup_{y_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \|\varphi_t(y_o) - \varphi_t(z(y_o))\| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde concluimos que $d_H(\varphi_t([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t > T_\varepsilon$. Assim,

$$d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, [\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})]^\alpha) = d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) = d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) \leq \varepsilon.$$

Logo, para todo $t > T_\varepsilon$ temos

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) \leq \varepsilon$$

de modo que a existência está provada.

(*Unicidade*). Suponha que existe um ponto τ -periódico $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(U)$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{q})) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Temos assim que,

$$d_\infty(\hat{\varphi}_s(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_s(\mathbf{q})) \leq d_\infty(\hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{x}_o)) + d_\infty(\hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{q}))$$

para todo $s \in [0, \tau]$. Agora, tomando o limite em n na desigualdade acima temos

$$d_\infty(\hat{\varphi}_s(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_s(\mathbf{q})) = 0$$

e, conseqüentemente, $\hat{\varphi}_s(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_s(\mathbf{q})$. Como essa igualdade é válida para todo $s \in [0, \tau]$,

então temos em particular que $\hat{\varphi}_0(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_0(\mathbf{q})$. Dessa forma, concluímos que $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ o que prova a unicidade. ■

Exemplo 4.4. Consideremos o fluxo determinístico bidimensional dado no Exemplo 1.3 por

$$\varphi_t(x_o, y_o) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)), \quad (4.2)$$

onde as funções $r(t)$ e $\theta(t)$ são, respectivamente, dadas por

$$r(t) = \frac{r_o \sqrt{k}}{[r_o^2 + (k - r_o^2) e^{-2\mu t}]^{1/2}},$$

$$\theta(t) = t + \theta_o,$$

com (r_o, θ_o) sendo a coordenada polar de (x_o, y_o) .

Notemos que para todo $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ vale que $\|\varphi_t(x_o, y_o)\| = r(t)$. Tomando $p = (x_o, y_o)$ tal que $r_o^2 = \|p\|^2 = k$, temos então que $\|\varphi_t(x_o, y_o)\| = \sqrt{k}$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Assim, p determina a órbita periódica

$$\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = k\} = \{(\sqrt{k}, \theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Para todo $p_o = (x_o, y_o) = (r_o \cos \theta_o, r_o \sin \theta_o) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, temos que $r(t) \rightarrow \sqrt{k}$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(p_o), \gamma) = 0$. Desde que a órbita γ é assintoticamente estável, o item (b) do Teorema 4.9 garante que o conjunto periódico fuzzy

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\}$$

é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

Dado $p_o = (r_o \cos \theta_o, r_o \sin \theta_o) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, o ponto $p = (\sqrt{k} \cos \theta_o, \sqrt{k} \sin \theta_o)$ é o único na órbita periódica γ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(p_o) - \varphi_t(p)\| = 0$. Podemos expressar essa relação por meio da função $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \gamma$ que associa para cada $p_o = (x_o, y_o) = (r_o \cos \theta_o, r_o \sin \theta_o) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, o ponto periódico $p = (\sqrt{k} \cos \theta_o, \sqrt{k} \sin \theta_o)$.

Consideremos agora $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ com $[\mathbf{p}]^0 \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Desde que $\varphi_t(p_o)$ converge para $z(p_o)$ para todo $p_o \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, a Proposição 4.11 garante que existe um único ponto $\mathbf{p} \in \gamma$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Mais do que isso, a proposição garante que

o ponto que satisfaz essa propriedade é a imagem de \mathbf{x}_o pela aplicação \hat{z} , obtida através da extensão de Zadeh de z .

Em termos de coordenadas polares, a função z pode ser expressa pela aplicação $h(r, \theta) = (\sqrt{k}, \theta)$. Isto é, a imagem de um ponto $p_o = (r_o \cos \theta_o, r_o \sin \theta_o)$ pela aplicação z é o ponto $z(p_o)$ com coordenada polares (\sqrt{k}, θ_o) .

Para ilustrar a aplicação da Proposição 4.11, tomemos $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \max\{1 - 2(x - 1)^2 - 2(y - 2)^2, 0\}.$$

Os α - níveis de \mathbf{x}_o neste caso são os círculos de raio $\sqrt{(1 - \alpha)/2}$. Isto é,

$$[\mathbf{x}_o]^\alpha = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq (1 - \alpha)/2\}$$

Em termos das coordenadas polares, o ponto \mathbf{x}_o faz corresponder o ponto $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi))$ com função de pertinência dada por

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{y}_o}(r, \theta) &= \mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) \\ &= \mu_{\mathbf{x}_o}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \max\{4r(\cos \theta + 2 \sin \theta) - 2r^2 - 9, 0\}. \end{aligned}$$

Desde que de $h(r, \theta) = (\sqrt{k}, \theta)$ para todo $r > 0$, então a imagem \mathbf{y}_o pela extensão de Zadeh \hat{h} é o ponto $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi))$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{q}}(r, \theta) = \begin{cases} \sup_{s>0} \mu_{\mathbf{y}_o}(s, \theta) & \text{se } r = \sqrt{k}, \\ 0 & \text{se } r \neq \sqrt{k}. \end{cases}$$

Agora, o supremo da expressão acima é atingido quando $s = \cos \theta + 2 \sin \theta$ de modo que temos:

$$\mu_{\mathbf{q}}(r, \theta) = \begin{cases} \max\{2(\cos \theta + 2 \sin \theta)^2 - 9, 0\} & \text{se } r = \sqrt{k}, \\ 0 & \text{se } r \neq \sqrt{k}, \end{cases}$$

Agora, sendo $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, a imagem de \mathbf{x}_o por \hat{z} é o

ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ dado pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{p}}(x, y) = \begin{cases} \max\{2r^{-1}(x + 2y)^2 - 9, 0\} & \text{se } x^2 + y^2 = k, \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \neq k, \end{cases}$$

De acordo com a Proposição 4.11, o ponto $\mathbf{p} \in \gamma$ dado pela função de pertinência acima, é o único ponto 2π - periódico em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ que satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\infty}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{p}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) = 0.$$

□

Quando a órbita periódica determinística γ é assintoticamente estável para o fluxo φ_t então, pelo o item (b) Proposição 4.9, o conjunto periódico γ é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy. No entanto, vimos no exemplo acima que é possível determinar uma órbita periódica fuzzy contida em γ que atrai $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$. Isto é, podemos determinar um subconjunto próprio de γ que atrai a solução fuzzy.

Mais geralmente, sob as hipóteses da Proposição 4.11, para cada condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ existe um único ponto $\mathbf{p} \in \gamma$ que satisfaz $d_{\infty}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Desde que \mathbf{p} é um ponto periódico, a órbita $\gamma(\mathbf{p})$ gerada pelo fluxo fuzzy é uma órbita periódica fuzzy. Além disso,

$$\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma(\mathbf{p})) \leq d_{\infty}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Como veremos na proposição a seguir, quando o conjunto periódico $\gamma \subset \mathcal{E}(U)$ é assintoticamente estável, existe uma órbita periódica fuzzy contida em γ que atrai o fluxo fuzzy. A existência desta órbita periódica fuzzy depende da condição inicial tomada. Com isso, provamos que é possível determinar um conjunto estritamente contido em γ que atrai a solução fuzzy. Provamos também que este conjunto é uma órbita periódica fuzzy.

Geometricamente, a afirmação a seguir garante que a órbita de um fluxo fuzzy se aproxima de uma órbita periódica quando o conjunto periódico γ é assintoticamente

estável. No teorema a seguir, $A(\gamma)$ é a região de atração de γ . Isto é,

$$A(\gamma) = \{x_o \in U : \text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}.$$

Teorema 4.12. *Sejam γ uma órbita periódica determinística assintoticamente estável e $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A(\gamma)$ então $\omega(\mathbf{x}_o) \subset \gamma$ é uma órbita periódica fuzzy.*

Prova: Como $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A(\gamma)$, pelo Teorema 4.9, temos $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e então, $\omega(\mathbf{x}_o) \subset \gamma$. Vamos mostrar que $\omega(\mathbf{x}_o)$ é uma órbita periódica fuzzy, isto é, $\omega(\mathbf{x}_o) = \gamma(\mathbf{y})$ para algum ponto periódico $\mathbf{y} \in \gamma$.

Seja $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x}_o)$. Por definição, existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \rightarrow 0$. Para simplificar a notação, seja $\mathbf{x}_n = \hat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_o)$. Como \mathbf{y} é um ponto periódico, dado $\varepsilon > 0$, existem $N > 0$ e $\eta > 0$ tal que se $n > N$ então $d_\infty(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \leq \varepsilon$ para todo $s \in (t_n - \eta, t_n + \eta)$ e $d_\infty(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \geq \varepsilon$ para todo $s \in (t_n + \eta, t_{n+1} - \eta)$.

Agora, pela desigualdade triangular temos

$$d_\infty(\hat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{t_n + \tau}(\mathbf{x}_o)) \leq d_\infty(\hat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \hat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_o)) + d_\infty(\hat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{t_n + \tau}(\mathbf{x}_o)).$$

Pela Proposição 4.10 $d_\infty(\hat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{t_n + \tau}(\mathbf{x}_o)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, existe $N_o > 0$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{t_n + \tau}(\mathbf{x}_o)) < \varepsilon/2$ de modo que

$$d_\infty(\hat{\varphi}_{t_n + \tau}(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \leq d_\infty(\hat{\varphi}_{t_n + \tau}(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_o)) + d_\infty(\hat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) < \varepsilon.$$

Portanto, temos que $t_n + \tau \in (t_{n+1} - \eta, t_{n+1} + \eta)$, isto é, $t_{n+1} - t_n \leq \tau + \eta$ para todo $n > N_o$.

Pela continuidade do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ com relação à condição inicial, mais precisamente pela desigualdade (3.2) na Proposição 3.1, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_\infty(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_\infty(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_n), \hat{\varphi}_s(\mathbf{y})) < \varepsilon, \quad \forall s \leq \tau + \eta.$$

Consideremos $N > 0$ tal que $d_\infty(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \delta$ e $t > t_N$. Tomemos $n > N$ tal que $t_n \leq t \leq$

t_{n+1} . Então, como $t - t_n < \tau + \eta$,

$$\begin{aligned} \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \gamma(\mathbf{y})) &\leq d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{t-t_n}(\mathbf{y})) \\ &= d_\infty(\hat{\varphi}_{t-t_n}(\mathbf{x}_n), \hat{\varphi}_{t-t_n}(\mathbf{y})) < \varepsilon \end{aligned}$$

e a proposição está demonstrada. ■

Como provamos no Teorema 4.9, se uma órbita determinística é assintoticamente estável então o conjunto periódico é também assintoticamente estável. O teorema que acabamos de demonstrar é equivalente a afirmar que, para cada condição inicial fuzzy na região de atração da órbita determinística, existe uma órbita periódica fuzzy, estritamente contida no conjunto periódico, que atrai a solução fuzzy.

Nas aplicações em modelos de Biomatemática que faremos no Capítulo 5, esta afirmação vai ser útil para mostrar a existência de órbitas periódicas para o fluxo fuzzy gerado pelo modelo de Holling - Tanner.

4.3 Conjuntos invariantes e atratores em $\mathcal{E}(U)$

Nas seções anteriores estabelecemos condições para que o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ admita pontos de equilíbrio fuzzy ou mesmo órbitas periódicas fuzzy. Como mostramos, tanto os pontos de equilíbrio quanto as órbitas periódicas fuzzy são conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy. Os conjuntos invariantes desempenham papel fundamental no estudo do comportamento assintótico dos sistemas dinâmicos (Milani e Koksich, 2005).

Nosso objetivo nesta seção é caracterizar os conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy bem como estudar o comportamento de órbitas periódicas cujo estado inicial está próximo de tais conjuntos.

Os conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica para conjuntos invariantes no espaço $\mathcal{E}(U)$ estão estabelecidos, para espaços métricos gerais, na Seção 1.4 do Capítulo 1.

Na Proposição 4.8, provamos que o conjunto

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset \gamma\}$$

é um conjunto fechado, limitado e invariante pelo fluxo fuzzy. Desde que a órbita periódica

γ é um conjunto invariante para o fluxo determinístico, estamos então interessados em saber se podemos obter uma relação semelhante para um conjunto invariante qualquer.

Proposição 4.13. *Seja $S \subset U$ e consideremos $\mathbf{S} \subset \mathcal{E}(U)$ definido por*

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset S\}.$$

O conjunto S é invariante por φ_t se, e somente se, o conjunto \mathbf{S} é invariante pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

Prova: (\Rightarrow) Vamos supor que $\mathbf{x}_o \in \mathbf{S}$. Devemos mostrar que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \in \mathbf{S}$, ou seja, $\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha) \subset S$, para todo $\mathbf{x}_o \in \mathbf{S}$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Por hipótese, S é invariante e então $\varphi_t(x_o) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $x_o \in S$. Agora, desde que $[\mathbf{x}_o]^\alpha \subset S$ então

$$\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha) = \{\varphi_t(x_o) : x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} \subset S,$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Logo, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \in \mathbf{S}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, o que prova a primeira parte.

(\Leftarrow) Seja $x_o \in S$. Desde que \mathbf{S} é invariante e $\chi_{\{x_o\}} \in \mathbf{S}$ então, $\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_o\}}) \in \mathbf{S}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Logo, $\varphi_t(\{x_o\}) \subset S$ e portanto S é invariante. \blacksquare

Seja então $\omega(B)$ o ω - limite determinado pelo fluxo determinístico e consideremos o conjunto $\omega(B) \subset \mathcal{E}(U)$ definido por

$$\omega(B) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^\alpha \subset \omega(B)\}.$$

Como caso particular da afirmação anterior, temos a seguinte a relação entre o ω - limite $\omega(B)$ e o conjunto acima definido.

Corolário 4.14. *O conjunto $\omega(B)$, $B \subset U$, é invariante por φ_t se, e somente se, o conjunto $\omega(B)$ é invariante pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.*

A Proposição 4.13 é importante pois estabelece condições para obtermos conjuntos invariantes para o fluxo fuzzy obtido pela extensão de Zadeh de um fluxo determinístico.

Uma vez que $\hat{\varphi}_t$ é um fluxo no espaço métrico $(\mathcal{E}(U), d_\infty)$, então as Proposições 1.23 e 1.24 na Seção 1.4 podem ser utilizadas para se obter conjuntos invariantes em $\mathcal{E}(U)$.

No entanto, por exigirem compacidade da órbita do fluxo como hipótese tais proposições podem dificultar a análise qualitativa em se tratando de órbitas em $\mathcal{E}(U)$.

De maneira geral não podemos garantir que o conjunto $\omega(B)$ seja um conjunto compacto (Román-Flores, 1998). No entanto, $\omega(B)$ é um conjunto fechado e limitado. Com efeito, $\omega(B)$ é um conjunto compacto em \mathbb{R}^n e, conseqüentemente, $\omega(B)$ é subespaço completo de \mathbb{R}^n . A Proposição 2.6 garante então que $\omega(B)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{E}(U)$. Desde que $\omega(B)$ é limitado então $\omega(B)$ também é limitado.

Se um conjunto $S \subset U$ é invariante para o fluxo determinístico então $\chi_S \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto de equilíbrio para o fluxo fuzzy (Mizukoshi, 2004). De fato, pois, $[\chi_S]^\alpha = S$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e então, pela caracterização por α - níveis, temos

$$[\varphi_t(\chi_S)]^\alpha = \varphi_t([\chi_S]^\alpha) = \varphi_t(S) = S = [\chi_S]^\alpha.$$

No entanto, o exemplo a seguir mostra que nem sempre o ponto de equilíbrio χ_S apresenta propriedades interessantes de estabilidade.

Exemplo 4.5. Consideremos o fluxo determinístico $\varphi_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido para cada $x_o \in \mathbb{R}_+$ por

$$\varphi_t(x_o) = \frac{kx_o}{x_o + (k - x_o)e^{-rt}}.$$

O conjunto $[0, k] \subset \mathbb{R}_+$ é um subconjunto invariante pelo fluxo determinístico e então, $\chi_{[0,k]}$ é um ponto de equilíbrio para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ obtido pela extensão de Zadeh de φ_t .

Embora $[0, k]$ seja um conjunto atrator para φ_t , o ponto de equilíbrio $\chi_{[0,k]}$ não atrai nenhum ponto de $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$. De acordo com o item (b) do Teorema 3.6, para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset \mathbb{R}_+ - \{0\}$, temos $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \chi_{\{k\}}$ quando $t \rightarrow \infty$. \square

Assim como na Proposição 4.9, estamos também interessados em saber se existe alguma relação envolvendo a estabilidade dos conjuntos invariantes $S \subset U$ e $\mathbf{S} \subset \mathcal{E}(U)$. Antes porém, precisamos mostrar que os conjuntos assintoticamente estáveis possuem a propriedade de atrair subconjuntos compactos de uma vizinhança.

Lema 4.15. *Se $S \subset U$ é um conjunto assintoticamente estável então existe uma vizinhança $S \subset W \subset U$ tal que S atrai conjuntos compactos contidos em W .*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$ consideremos a vizinhança $V = \{x \in U : \text{dist}(x, S) < \varepsilon\}$ de S . Por hipótese, existe uma vizinhança V' de S tal que $\varphi_t(V') \subset V$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Existe

também uma vizinhança W de S tal que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), S) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, para todo $x_o \in W$. Mas isto implica que existe $t_{x_o} > 0$ tal que $\varphi_t(x_o) \in V'$ para todo $t > t_{x_o}$. Pela continuidade de φ_t com relação a condição inicial, existe $\delta_{x_o} > 0$ tal que $\varphi_{t_{x_o}}(y_o) \in V'$ para todo $y_o \in B(x_o, \delta_{x_o})$. Portanto, $\varphi_t(y_o) \in V$ para todo $t > t_{x_o}$ e $y_o \in B(x_o, \delta_{x_o})$.

Seja $K \subset W$ é um conjunto compacto. A união de todas as bolas abertas $B(x_o, \delta_{x_o})$, $x_o \in K$, forma uma cobertura aberta para K de modo que então podemos cobrir um número finito dessas bolas abertas. Isto é, existe $x_{oi} \in K$, $1 \leq i \leq n < \infty$, tal que

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_{oi}, \delta_{x_{oi}}) \subseteq \bigcup_{x_o \in K} B(x_o, \delta_{x_o}).$$

Seja $T = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_{x_{oi}}\}$. Se $x_o \in K$, então $x_o \in B(x_{oi}, \delta_{x_{oi}})$ para algum $1 \leq i \leq n$ de modo que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), S) < \varepsilon$ para todo $t > T$. Logo,

$$\text{dist}(\varphi_t(K), S) = \sup_{x_o \in K} \text{dist}(\varphi_t(x_o), S) \leq \varepsilon$$

e a afirmação está provada. ■

Para a estabilidade do conjunto invariante $\mathbf{S} \subset \mathcal{E}(U)$ temos o seguinte teorema.

Teorema 4.16. *Seja $S \subset U$ um conjunto invariante para o fluxo determinístico e consideremos o conjunto $\mathbf{S} \subset \mathcal{E}(U)$ definido por*

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset S\}.$$

Sob essas condições temos:

- a) S é estável para φ_t se, e somente se, \mathbf{S} estável para o $\hat{\varphi}_t$;
- b) S é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, \mathbf{S} assintoticamente estável para $\hat{\varphi}_t$.

Prova: a) (\Rightarrow) Dado $\varepsilon > 0$, consideremos a vizinhança $\mathbf{V} \subset \mathcal{E}(U)$ de \mathbf{S} definida por

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{S}) < \varepsilon\}.$$

Para mostrar que \mathbf{S} é estável, precisamos encontrar uma vizinhança \mathbf{V}' de \mathbf{S} tal que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{V}') \subset \mathbf{V}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Por hipótese, para a vizinhança $V = \{x \in U : \text{dist}(x, S) < \varepsilon\}$ de S existe uma vizinhança V' tal que $\varphi_t(V') \subset V$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Consideremos então o conjunto

$$\mathbf{V}' = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset V'\}.$$

Seja $\mathbf{x} \in \mathbf{V}'$. Para todo $x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, temos que $\varphi_t(x) \in V$. Isto porém implica que, para um $t > 0$ fixo, existe $\bar{y}_x \in S$ tal que $\|\varphi_t(x) - \bar{y}_x\| < \varepsilon$ para todo $x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Definimos então para todo $\alpha \in (0, 1]$ o conjunto

$$A_\alpha = \overline{\bigcup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \bar{y}_x}$$

e para $\alpha = 0$ definimos

$$A_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} A_\alpha}.$$

Desde que $\inf_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - y\| < \varepsilon$ para todo $y \in A_\alpha$, com $\alpha \in (0, 1]$, vale então que

$$\text{dist}(A_\alpha, \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) = \sup_{y \in A_\alpha} \inf_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - y\| \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, vale também que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A_\alpha) &= \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y \in A_\alpha} \|\varphi_t(x) - y\| \\ &\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - \bar{y}_x\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

e portanto $d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A_\alpha) \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Desde que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U)$, o Teorema 2.1 garante que $[\mathbf{x}_o]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [\mathbf{x}_o]^\alpha}$. Dessa forma, se $x \in [\mathbf{x}_o]^0$ então existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{supp}(\mathbf{x})$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Agora, para cada x_n existe $\bar{y}_{x_n} \in A_0$ tal que $\|\varphi_t(x_n) - \bar{y}_{x_n}\| < \varepsilon$ e isto implica que $\text{dist}(\varphi_t(x_n), A_0) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade da função $f(x) = \text{dist}(x, A)$ e de φ_t com relação a condição inicial, temos que $\text{dist}(\varphi_t(x), A_0) \leq \varepsilon$ para todo $x \in [\mathbf{x}_o]^0$, de onde temos que

$\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^0), A_0) \leq \varepsilon$. Com argumento semelhante podemos mostrar que também temos $\text{dist}(A_0, \varphi_t([\mathbf{x}_o]^0)) \leq \varepsilon$ de modo que vale

$$d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A_\alpha) \leq \varepsilon \quad (4.3)$$

para qualquer que seja $\alpha \in [0, 1]$.

A família $\{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ construída acima, que é análoga à família construída na Proposição 4.9, satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2 e portanto, existe $\mathbf{y}_t \in \mathbf{S}$ tal que $[\mathbf{y}_t]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Mas, por (4.3), isto implica então que

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \mathbf{y}_t) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), [\mathbf{y}_t]^\alpha) \leq \varepsilon.$$

Consequentemente

$$\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \mathbf{S}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}} d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \leq \varepsilon$$

e então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Como $\mathbf{x} \in \mathbf{V}'$ foi escolhido de maneira arbitrária, então vale que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{V}') \subset \mathbf{V}$ o que prova a primeira parte do item (a).

a)(\Leftarrow) Dado $\varepsilon > 0$, consideremos a vizinhança $V = \{x \in U : \text{dist}(x, S) < \varepsilon\}$ de S . Desde que \mathbf{S} é estável, então para a vizinhança $\mathbf{V} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{S}) < \varepsilon\}$ de \mathbf{S} existe uma vizinhança \mathbf{V}' tal que $\varphi_t(\mathbf{x}_o) \in \mathbf{V}$ para todo $\mathbf{x}_o \in \mathbf{V}'$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

Consideremos então $V = \{x \in U : \chi_{\{x\}} \in \mathbf{V}'\}$. O Lema 4.7 garante que, para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\text{dist}(\varphi_t(x_o), S) \leq \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_o\}}), \mathbf{S}) < \varepsilon,$$

e assim, $\varphi_t(x_o) \in V$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $x_o \in V'$. Logo, $\varphi_t(V') \subset V$ e a recíproca está provada.

Provemos agora o segundo item da afirmação.

b)(\Rightarrow) Como, por hipótese, S é assintoticamente estável então S é estável e existe uma vizinhança W de S tal que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), S) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, se $x_o \in W$. O item anterior garante que \mathbf{S} é estável e precisamos mostrar que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{S}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para \mathbf{x}_o na vizinhança $\mathbf{W} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset W\}$.

Seja $\mathbf{x}_o \in \mathbf{W}$. Dado $\varepsilon > 0$, o Lema 4.15 garante que existe $T > 0$ tal que

$$\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^0), S) < \varepsilon$$

para todo $t > T$ e $\alpha \in [0, 1]$. Assim, para todo x_o em $[\mathbf{x}_o]^\alpha$, temos que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), S) < \varepsilon$. Dessa forma, com procedimento análogo ao do item (a), podemos construir $\mathbf{y}_t \in \mathbf{S}$ tal que

$$\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{S}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}} \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \leq \varepsilon$$

para todo $t > T$.

Isto prova que para $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{S}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo $\mathbf{x}_o \in \mathbf{W}$. Portanto, \mathbf{S} é um conjunto assintoticamente estável para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

b)(\Leftarrow) Por hipótese, \mathbf{S} é estável e existe uma vizinhança \mathbf{W} de \mathbf{S} tal que $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{S}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

O item (a) garante que S é estável para o fluxo φ_t . Consideremos então a vizinhança

$$V = \{x \in U : \chi_{\{x\}} \in \mathbf{W}\}$$

de S e tomemos $x_o \in W$. O Lema 4.7 garante que, para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\text{dist}(\varphi_t(x_o), S) \leq \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\chi_{\{x_o\}}), \mathbf{S}) \rightarrow 0.$$

Logo, S é assintoticamente estável para o fluxo determinístico φ_t e a recíproca está provada. ■

O Teorema 4.9 pode ser vista como um caso particular da proposição acima.

Como definimos no Capítulo 1, um conjunto $\mathbf{A} \subset \mathcal{E}(U)$ atrai um conjunto $\mathbf{B} \subset X$ pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ se $\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A})$ quando $t \rightarrow \infty$, onde

$$\begin{aligned} \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) &= \sup_{\mathbf{y} \in \hat{\varphi}_t(\mathbf{B})} \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} d_\infty(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &= \sup_{\mathbf{x}_o \in \mathbf{B}} \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{A}} d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Como anteriormente, dados os conjuntos $A, B \subset U$, definimos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathcal{E}(U)$ respectivamente por

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset A\} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset B\}.$$

Proposição 4.17. *Sejam A e B subconjuntos de U . O conjunto A atrai B pelo fluxo determinístico φ_t se, e somente se, \mathbf{A} atrai \mathbf{B} pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.*

Prova: (\Rightarrow) Suponha que A atraia B pelo fluxo determinístico. Segue da definição de distância que, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t(C), A) &= \sup_{x_o \in C} \inf_{y \in A} \|\varphi_t(x_o) - y\| \\ &\leq \sup_{x_o \in B} \inf_{y \in A} \|\varphi_t(x_o) - y\| \\ &= \text{dist}(\varphi_t(B), A) < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $t > T$ e $C \subset B$. Isto é, A atrai qualquer subconjunto C contido em B . Em particular, dado $\mathbf{x}_o \in \mathbf{B}$ vale a desigualdade

$$\text{dist}(\varphi_t(x_o), A) \leq \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), A) < \varepsilon$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t > T$. Como anteriormente, para cada $t > T$ podemos construir $\mathbf{y}_t \in \mathbf{A}$ tal que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}_t) \leq \varepsilon$ e, conseqüentemente,

$$\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{A}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{A}} d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{y}) \leq \varepsilon.$$

Logo, para todo $t > T$ temos

$$\text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) = \sup_{\mathbf{x}_o \in \mathbf{B}} \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{A}) \leq \varepsilon,$$

o que prova a primeira parte.

(\Leftarrow) Por outro lado, se \mathbf{A} atrai \mathbf{B} então existe $T > 0$ tal que $\text{dist}(\varphi_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) < \varepsilon$ para

todo $t > T$, $\varepsilon > 0$ dado. O Lema 4.7 garante que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t(x_o), A) &\leq \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{A}) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x}_o \in \mathbf{B}} \text{dist}(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{A}) \\ &= \text{dist}(\varphi_t(\mathbf{B}), \mathbf{A}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\text{dist}(\varphi_t(B), A) = \sup_{x \in B} \text{dist}(\varphi_t(x_o), A) \leq \varepsilon,$$

o que prova que A atrai B pelo fluxo determinístico φ_t . ■

Como consequência do que acabamos de demonstrar, podemos estabelecer o seguinte resultado entre o $\omega(A)$ de um fluxo determinístico e o conjunto

$$\omega(A) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset \omega(A)\}$$

Corolário 4.18. *O conjunto $\omega(A)$ atrai $A \subset U$ pelo fluxo determinístico φ_t se, e somente se, $\omega(A)$ atrai $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset A\}$ pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.*

Os resultados que acabamos de demonstrar podem ser vistos como generalizações dos resultados obtidos nas seções anteriores para pontos de equilíbrio e órbitas periódicas para o fluxo fuzzy. Em particular, generaliza o Teorema 3.6 e a Proposição 3.8. No entanto, em se tratando de ponto de equilíbrio fuzzy, o Corolário 4.18 apenas especifica o conjunto invariante $\omega([\mathbf{x}_o]^0)$ que contém o ponto de equilíbrio. Por outro lado, o Teorema 3.6 e 3.8 fornecem informações mais precisas uma vez que podemos identificar os pontos de equilíbrio. Vejamos esta diferença mais detalhadamente nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.6. No Exemplo 3.5 vimos que o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax^c - bx, & x(0) = x_o, \\ \frac{da}{dt} = 0, & a(0) = a_o, \end{cases}$$

tem ponto de equilíbrio não nulo dado por $y_e(x_o, a_o) = (x_e(x_o, a_o), a_o)$ onde

$$x_e(x_o, a_o) = \left(\frac{a_o}{b}\right)^{\frac{1}{1-c}}.$$

Se $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ com $[\mathbf{y}_o]^\alpha \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$, a Proposição 3.8 garante que o fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ tem ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \hat{S}(\mathbf{y}_o)$.

Para este exemplo, $\omega([\mathbf{y}_o]^0)$ é o conjunto $S([\mathbf{y}_o]^0)$. De acordo com a Proposição 4.18, o ponto \mathbf{y}_o é atraído pelo conjunto

$$\omega([\mathbf{y}_o]^0) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) : [\mathbf{x}_o]^\alpha \subset S([\mathbf{y}_o]^0)\},$$

através de $\hat{\psi}_t$, do qual \mathbf{x}_e faz parte. □

A Proposição 4.18 pode ser aplicada em ocasiões em que as hipóteses da Proposição 3.8 não são satisfeitas.

Exemplo 4.7. Consideremos novamente o fluxo determinístico $\varphi_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido para cada $x_o \in \mathbb{R}_+$ por

$$\varphi_t(x_o) = \frac{kx_o}{x_o + (k - x_o)e^{-rt}},$$

cujos pontos de equilíbrio são dados por $x_e(x_o) = k > 0$, se $x_o > 0$, e $x_e(0) = 0$. Claramente s não é contínua em $x_o = 0$ de modo que não podemos aplicar o Teorema 3.6 para encontrar o ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ quando $0 \in [\mathbf{x}_o]^0$.

Para ilustrar, tomemos $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(z) = \max\{1 - (3/k)z, 0\}.$$

Não é difícil ver que $\omega([\mathbf{x}_o]^0) = [0, k]$ atrai $[\mathbf{x}_o]^0$ por φ_t . Logo, a Proposição 4.18 garante que o conjunto

$$\omega([\mathbf{x}_o]^0) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) : [\mathbf{x}_o]^\alpha \subset [0, k]\}$$

atrai \mathbf{x}_o pelo fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$. Além disso, o Teorema 4.16 garante que o conjunto $\omega([\mathbf{x}_o]^0)$ é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy.

Por outro lado, se $0 \notin \mathbf{x}_o$ temos que $\omega([\mathbf{x}_o]^0) = k$ atrai $[\mathbf{x}_o]^0$ pelo fluxo determinístico φ_t . Assim, de acordo com o Corolário 4.18, o conjunto $\omega([\mathbf{x}_o]^0) = \chi_{\{k\}}$ atrai \mathbf{x}_o pelo fluxo

fuzzy $\hat{\varphi}_t$. □

Exemplo 4.8 (Vários períodos). Consideremos o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x_1(0) = x_{01}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x_2(0) = x_{02}. \end{cases}$$

A solução deste sistema determina o fluxo bidimensional $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi_t(x_{01}, x_{02}) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \cos(r_o t) + \begin{pmatrix} -x_{02} \\ x_{01} \end{pmatrix} \text{sen}(r_o t),$$

com $r_o = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2}$. Cada condição inicial $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ determina uma órbita $2\pi r_o^{-1}$ -periódica estável, $\gamma(x_{01}, x_{02})$. Como $\|\varphi_t(x_{01}, x_{02})\| = r_o$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ então as órbitas periódicas $\gamma((x_{01}, x_{02}))$ são as circunferências centradas na origem e com raio r_o .

É importante ressaltar que o período, neste caso, depende da condição inicial. Os únicos pontos que possuem o mesmo período são aqueles que estão sobre a mesma órbita periódica. Isto é, se p_o e q_o possuem período $\tau > 0$ então, $q_o = \varphi_s(p_o)$ para algum $s \in [0, \tau)$.

Dado um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, o Teorema 4.1 garante que se os pontos cujos α -níveis conexos estão sobre uma órbita $\gamma(x_{01}, x_{02})$, então esses pontos são periódicos para fluxo fuzzy com periodicidade igual a de (x_{01}, x_{02}) . Além disso, O Teorema 4.9 garante que o conjunto

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset \gamma(x_{01}, x_{02})\}$$

é estável para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ obtido pela extensão de Zadeh do fluxo determinístico acima.

Embora cada ponto em \mathbb{R}^2 seja periódico, de maneira geral não podemos fazer uso do Teorema 4.5 para garantir a existência de pontos periódicos para o fluxo fuzzy. Se os α -níveis de $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ são convexos então $[\mathbf{p}]^\alpha$ não está contido em nenhuma órbita $\gamma(x_{01}, x_{02})$. Isto porém implica que existem pontos em $[\mathbf{p}]^\alpha$ com períodos distintos e portanto, uma das hipóteses do Teorema 4.5 não é satisfeita.

Vamos fazer agora uma análise do fluxo fuzzy por meio das ferramentas desenvolvidas

nesta seção.

Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto. Definimos então o conjunto S como sendo a órbita de K pelo fluxo determinístico φ_t , isto é, $S = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \varphi_t(K)$. Desde que cada ponto $(x_{01}, x_{02}) \in K$ determina uma órbita periódica para o fluxo fuzzy, então temos que:

$$S = \bigcup_{(x_{01}, x_{02}) \in K} \gamma(x_{01}, x_{02}).$$

O Conjunto S é invariante para o fluxo determinístico de modo que a Proposição 4.13 garante que o conjunto fuzzy

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}_o]^\alpha \subset S\}$$

é invariante pelo fluxo fuzzy.

O conjunto S é estável para o fluxo determinístico. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $p_o = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\text{dist}(p_o, S) < \varepsilon$. Mas isto implica que existe $q_o \in S$ tal que $\|p_o - q_o\| < \varepsilon$. Desde que as órbitas $\gamma(p_o)$ e $\gamma(q_o)$ são circunferências centradas na origem com raios $\|p_o\|$ e $\|q_o\|$ então a distância entre as órbitas é constante e menor do que ε . Isto é $\text{dist}(\gamma(p_o), \gamma(q_o)) < \varepsilon$ e portanto S é estável. Dessa forma, o Teorema 4.16 garante que \mathbf{S} é um conjunto estável para o fluxo fuzzy.

Seja $a > b$ constantes positivas e consideremos o conjunto compacto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, a \leq x \leq b\}.$$

A órbita gerada por esse conjunto compacto é a região compreendida entre as circunferências centradas na origem com raios a e b , respectivamente. Mais precisamente,

$$S = \gamma(K) = \bigcup_{t \in [0, 2\pi a^{-1}]} \varphi_t(K) = \bigcup_{x_{01} \in [a, b]} \gamma(x_{01}, 0).$$

Pelo que acabamos de apresentar acima, o conjunto $\mathbf{S} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, formado pelos pontos de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ cujos α -níveis estão contidos em S , é um conjunto invariante e estável para o fluxo fuzzy.

Tomemos $\mathbf{x}_o \in \mathbf{S}$ com $[\mathbf{x}_o]^0 = K$. Desde que \mathbf{S} é invariante então, $\varphi_t(\mathbf{x}_o) \in \mathbf{S}$ para

todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Através da expressão $r_o^{-1}2\pi$, podemos ver que o período de cada ponto $(x_{01}, x_{02}) \in K$ depende apenas de x_{01} . Assim, denotando o período de $(x_{01}, 0)$ por $\tau(x_{01})$, temos a seguinte relação:

$$\tau(x_{01}) = \frac{a}{x_{01}}\tau(a).$$

Dado $T > 0$, os únicos pontos $(x_{01}, x_{02}) \in K$ tais que $\varphi_T(x_{01}, x_{02}) = (x_{01}, x_{02})$ são os pontos para os quais $(T/\tau(x_{01})) \in \mathbb{N}$. Como $a \leq x_{01} \leq b$ e $\tau(a) \geq \tau(x_{01}) \geq \tau(b)$, isto significa que

$$\frac{T}{\tau(x_{01})} \in \left[\frac{T}{\tau(a)}, \frac{T}{\tau(b)} \right] \cap \mathbb{N} \iff \frac{x_{01}T}{a\tau(a)} \in \left[\frac{T}{\tau(a)}, \frac{bT}{a\tau(a)} \right] \cap \mathbb{N}.$$

Desde que existe somente um número finito de pontos em K que satisfazem a restrição acima imposta, então para todo $T > 0$ temos que $\varphi_T([\mathbf{x}_o]^0) \neq [\mathbf{x}_o]^0$.

Com isso podemos concluir que, embora todos pontos em K sejam periódicos, \mathbf{x}_o não é um ponto periódico para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

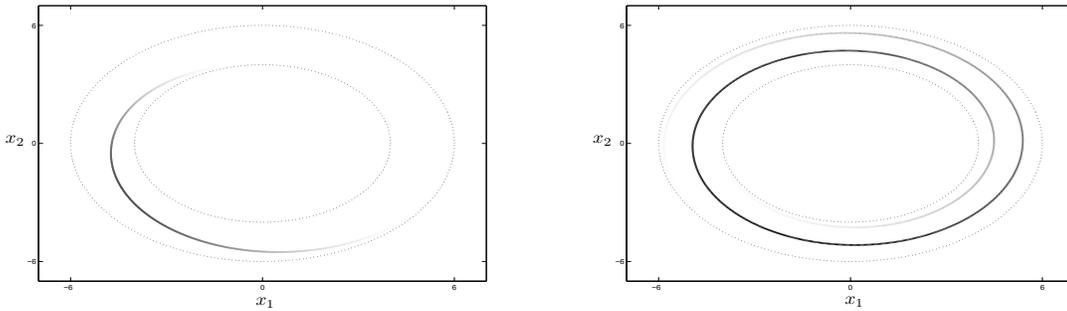


Figura 4.1: Função de pertinência de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ para $t = 2$ e $t = 7$.

A Figura 4.1, é a função de pertinência de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ para $t = 2$ e $t = 7$. A condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é o produto cartesiano fuzzy entre o ponto $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, com função de pertinência dada por

$$\mu_{\mathbf{x}_1}(x) = \max\{(x - 4)(6 - x), 0\}$$

e o conjunto fuzzy $\mathbf{x}_2 = \chi_{\{0\}}$. Isto é,

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \min\{\mu_{\mathbf{x}_1}(x), \chi_{\{0\}}(y)\}.$$

□

4.4 Órbitas periódicas para fluxos em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$.

Para sistemas de equações autônomas bidimensionais, o teorema de Poincaré - Bendixson garante que o ω - limite, $\omega(x_o)$, de uma órbita limitada $\gamma(x_o)$ é um ponto de equilíbrio ou uma órbita periódica. No entanto, a análise se torna mais complexa quando queremos determinar o ω - limite de um conjunto $B \subset \mathbb{R}_+$, isto é, $\omega(B)$. A Proposição 1.24 garante que quando a órbita $\gamma(B)$ está contida em um conjunto compacto, então $\omega(B)$ é um compacto, não vazio, invariante e atrai B pelo fluxo determinístico. Entretanto, não podemos afirmar que $\omega(B)$ seja uma órbita periódica. Isto portanto, limita nossa busca por órbitas periódicas para o fluxo fuzzy. Isto é, nem sempre vamos poder afirmar que $\omega(\mathbf{x}_o)$ é uma órbita periódica ou um ponto de equilíbrio para fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$

Exemplo 4.9 (Duas órbitas periódicas). O sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -(1+r)x_2 + x_1(r^2 - 1)(4 - r^2), & x_1(0) = x_{01}, \\ \frac{dx_2}{dt} = (1+r)x_1 + x_2(r^2 - 1)(4 - r^2), & x_2(0) = x_{02}, \end{cases}$$

com $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, determina um fluxo bidimensional $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que possui duas órbitas periódicas. Escrevendo o sistema acima em coordenadas polares, é possível mostrar que as órbitas periódicas são as circunferências centradas na origem e com raios 1 e 2, respectivamente:

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}; \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}.$$

A órbita γ_1 é instável enquanto que γ_2 é assintoticamente estável. Além disso, o sistema acima tem a origem como ponto de equilíbrio assintoticamente estável. De acordo com os

resultados apresentados nesse capítulo, o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ gerado pelo sistema de equação acima tem $\mathbf{x}_e = \chi_{\{(0,0)\}}$ como ponto de equilíbrio assintoticamente e os conjuntos

$$\gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset \gamma_1\} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset \gamma_2\}$$

como invariantes. O Teorema 4.9 garante que γ_1 é um conjunto periódico instável enquanto que γ_2 é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy.

O conjunto $A(x_e) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1\}$ é a região de atração para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_e . Desta forma, se $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A(x_e)$ então $\varphi_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \mathbf{x}_e$ quanto $t \rightarrow \infty$, isto é, $\omega(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_e$.

Por outro lado, o teorema de Poincaré - Bendixson também garante que o conjunto $A(\gamma_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 1\}$ é a região de atração da órbita periódica assintoticamente estável γ_2 . Logo, se $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A(\gamma_2)$ então $\text{dist}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), \gamma_2) \rightarrow 0$ quanto $t \rightarrow \infty$. Neste caso, pelo Teorema 4.12 podemos afirmar que $\omega(\mathbf{x}_o)$ é uma órbita periódica fuzzy.

Agora, suponha que \mathbf{x}_o é tal que $[\mathbf{x}_o]^0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$. Para simplificar, consideremos o caso em que $[\mathbf{x}_o]^0$ está contido no círculo delimitado por γ_2 . Como $\varphi_t([\mathbf{x}_o]^0)$ é limitado, então $\omega([\mathbf{x}_o]^0)$ é não vazio, compacto e atrai $[\mathbf{x}_o]^0$. No entanto, o conjunto $\omega([\mathbf{x}_o]^0)$ não é nenhuma das órbitas periódicas γ_1 ou γ_2 .

Através do Corolário 4.18, podemos apenas concluir que o conjunto $\omega([\mathbf{x}_o]^0) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ atrai o $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$. □

Teorema 4.19. *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e invariante pelo fluxo determinístico. Se K não contém pontos de equilíbrio então o conjunto*

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : [\mathbf{x}]^0 \subset K\} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$$

contém uma órbita periódica fuzzy.

Prova: Desde que K é compacto e invariante e não contém pontos de equilíbrio então o teorema de Poincaré - Bendixson garante que $\omega(x_o)$ é uma órbita periódica determinística contida em K . A existência de órbitas periódicas fuzzy é uma consequência imediata da Proposição 4.5. De fato, como $\omega(x_o)$ é uma órbita periódica, se $\mathbf{x}_o \in \mathbf{K}$ possui α - níveis convexos e $[\mathbf{x}_o]^0 \subset \omega(x_o)$ então \mathbf{x}_o é um ponto periódico. Assim, a órbita $\gamma(\mathbf{x}_o)$ gerada

por \mathbf{x}_o através do fluxo fuzzy é uma órbita periódica fuzzy e está contida em \mathbf{K} , o que prova a afirmação. ■

Embora o Teorema 4.19 garanta a existência de órbitas periódicas fuzzy, nada podemos dizer com relação ao comportamento de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ para uma condição inicial qualquer em \mathbf{K} . No caso de existir uma órbita periódica determinística $\gamma \in K$ assintoticamente estável, então o Teorema 4.9 garante a existência de um conjunto periódico γ assintoticamente estável em \mathbf{K} . Assim, as condições iniciais $\mathbf{x}_o \in \mathbf{K}$ que estão na região de atração $A(\gamma)$ são atraídas por alguma órbita periódica fuzzy. No entanto, para condições iniciais fora da região de atração $A(\gamma)$ não existe uma maneira geral de determinar o comportamento de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$.

Os resultados obtidos nas seções anteriores podem ser utilizados para provar uma afirmação semelhante ao teorema de Poincaré - Bendixson, para o fluxo fuzzy obtido pela extensão de Zadeh de uma solução determinística.

Teorema 4.20. *Sejam $K \subset U$ um conjunto compacto e invariante, x_e o único ponto de equilíbrio em K e $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$. Se x_e é instável então existe uma região $A \subset K$ tal que para $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para uma órbita periódica fuzzy.*

Prova: Por hipótese, o conjunto compacto K é invariante e possui um único ponto de equilíbrio instável. Desta forma, o teorema de Poincaré - Bendixson garante a existência de ao menos um ciclo limite, digamos γ , contido em K . Além disso, o Teorema 1.11 garante que γ é assintoticamente estável pelo interior ou exterior. Seja então A a região de atração de γ , isto é, $A = A(\gamma)$.

O Teorema 4.9 garante então que o conjunto periódico fuzzy γ é assintoticamente estável e atrai os pontos $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ cujos α - níveis estão em $A(\gamma)$. Como consequência, pelo Teorema 4.12 podemos afirmar que se $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$, então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para uma órbita periódica fuzzy contida em γ . Logo, está provada a afirmação. ■

Em uma interpretação geométrica, se a órbita do fluxo fuzzy não se aproxima de um ponto de equilíbrio, então a órbita fuzzy é atraída por uma órbita periódica fuzzy. Porém, diferentemente do caso determinístico, essa atração não ocorre para todo \mathbf{x}_o com suporte em K . Isto acontece pois não podemos garantir a existência de uma única órbita periódica determinística em K . Como veremos no Capítulo 5, o modelo de Holling - Tanner pode

admitir duas ou mais soluções periódicas.

4.5 Conclusão

Neste capítulo estudamos a existências de pontos periódicos para o fluxo fuzzy. Este estudo nos retornou os Teoremas 4.1, 4.2 e 4.5 que caracterizam, de diferentes maneira, os pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy. Mostramos que a existência de órbitas periódicas determinísticas assegura a existência de conjuntos periódicos invariantes para o fluxo fuzzy cuja estabilidade coincide com a estabilidade da órbita determinística. Este resultado está sintetizado no Teorema 4.9. No Teorema 4.12 mostramos que quando o fluxo determinístico admite uma órbita assintoticamente estável, então a solução fuzzy converge para um órbita periódica que está contida no conjunto periódico definido pela órbita determinística.

No Teorema 4.16 estabelecemos condições para a estabilidade de conjuntos invariantes pelo fluxo fuzzy. Este teorema é importante pois generaliza alguns resultados anteriores e pode ser aplicado em situações onde os demais resultados não se aplicam.

Finalmente, analisamos fluxos fuzzy gerados por fluxos determinísticos bidimensionais. O Teorema 4.19 fornece condições para existência de órbitas periódicas fuzzy para o fluxo fuzzy enquanto que o Teorema 4.20 garante a convergência da solução fuzzy para órbitas periódicas fuzzy. Estes dois resultados são versões análogas ao teorema de Poincaré - Bendixson para fluxos determinísticos.

Capítulo 5

Projeções e outras propriedades dos fluxos fuzzy

5.1 Introdução

Como vimos no Capítulo 3, os parâmetros de uma equação podem ser incorporados na condição inicial de um sistema aumentado de equações e assim, as incertezas nos parâmetros é considerada através da extensão de Zadeh do fluxo gerado pelo sistema aumentado. No entanto, esta estratégia não acrescenta nenhuma informação adicional no que diz respeito a dinâmica da equação.

Na Seção 5.2 analisamos algumas propriedades da projeção, em subespaços apropriados, do fluxo fuzzy gerado por tais equações aumentadas. Mostramos que a projeção da solução fuzzy da equação aumentada é a extensão de Zadeh da solução determinística da equação original.

Além disso, exploramos também algumas propriedades da projeção do fluxo fuzzy sobre os eixos coordenados. As projeções sobre os eixos coordenados são importantes pois facilitam a visualização gráfica da solução fuzzy de equações com dimensão $n \geq 2$.

Na Seção 5.3 deste capítulo analisamos a relação existente entre a função de pertinência do fluxo fuzzy, gerado pela solução de uma equação autônoma, e a solução de uma equação diferencial parcial de primeira ordem, a equação do transporte.

5.2 Projeção do fluxo fuzzy

5.2.1 Parâmetros e condição inicial fuzzy

No capítulo anterior resolvemos o problema de incluir a incerteza dos parâmetros de uma dada equação autônoma usando a estratégia de considerar o parâmetro como a condição inicial de uma equação com dimensão superior à original. Mais precisamente, dada uma equação autônoma que depende de um vetor de parâmetros $p_o \in P \subset \mathbb{R}^m$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p_o), \quad x(0) = x_o \quad (5.1)$$

definimos a equação aumentada associada

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x, p), \quad x(0) = x_o, \\ \frac{dp}{dt} = 0, \quad p(0) = p_o, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

e assim o vetor de parâmetros $p_o \in P$ agora faz parte da condição inicial. Desta forma, a extensão de Zadeh $\hat{\psi}_t : \mathcal{E}(U \times P) \rightarrow \mathcal{E}(U \times P)$ do fluxo $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$ gerado pela Equação (5.2) incorpora as incertezas da condição inicial e parâmetros da Equação (5.1).

Uma vez que a solução $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$ gerada pela Equação (5.1) é contínua na condição inicial e nos parâmetros, então a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U \times P) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ de $\varphi_t(x_o, p)$ está bem definida e, de acordo com a Proposição 2.7, para todo $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ temos:

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha).$$

Do ponto de vista das aplicações, é importante saber qual o comportamento do fluxo determinístico sobre o espaço de fase $U \subset \mathbb{R}^n$ da Equação (5.1) ao invés do espaço $U \times P \subset \mathbb{R}^{n+m}$ da equação aumentada Equação (5.2), uma vez que as componentes do fluxo $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$, que estão em $P \subset \mathbb{R}^m$, não apresentam nenhuma informação adicional. É importante observar que se $P_n : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção canônica de \mathbb{R}^{n+m}

sobre \mathbb{R}^n então, para todo $y_o = (x_o, p_o)$, vale

$$P_n(\psi_t(y_o)) = P_n(\varphi_t(x_o, p_o), p_o) = \varphi_t(y_o).$$

De modo análogo ao caso determinístico, podemos também estar interessados apenas no comportamento do fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t : \mathcal{E}(U \times P) \rightarrow \mathcal{E}(U \times P)$ sobre o espaço de fase $\mathcal{E}(U)$. As projeções definidas no Capítulo 2 podem então ser usadas para obtermos o comportamento do fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t$ sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$. Assim como no caso determinístico, queremos saber se existe alguma relação entre a projeção de $\hat{\psi}_t$ sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$ e a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U \times P) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ da solução da Equação (5.1).

Proposição 5.1. *A aplicação $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U \times P) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, dada pela extensão de Zadeh de $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$, é a projeção sobre $\mathcal{E}(U)$ do fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t : \mathcal{E}(U \times P) \rightarrow \mathcal{E}(U \times P)$.*

Prova: Seja $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ e fixemos $t \geq 0$. Para provar a afirmação, basta mostrar que se \mathbf{y} é a projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ sobre $\mathcal{E}(U)$ então vale a igualdade $\mathbf{y} = \hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$.

Para simplificar, seja $Im(\varphi_t)$ o conjunto imagem de $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$. Por definição, a função de pertinência de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$ é dada por

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)}(x) = \begin{cases} \sup_{\substack{(x_o, p_o) \\ \varphi_t(x_o, p_o) = x}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p_o) & \text{se } x \in Im(\varphi_t) \\ 0 & \text{se } x \notin Im(\varphi_t). \end{cases} \quad (5.3)$$

Seja $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(U)$ a projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ sobre $\mathcal{E}(U)$. Pela definição de projeção (Capítulo 2, página 55), a função de pertinência de $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(U)$ é definida por

$$\mu_{\mathbf{y}}(x) = \sup_{p \in P} \mu_{\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)}(x, p)$$

Agora, como $\psi_t(x_o, p_o) = (\varphi_t(x_o, p_o), p_o)$, então $x \in Im(\varphi_t)$ se, e somente se, $(x, p) \in Im(\psi_t)$ para algum $p \in P$. Assim, para todo $x \in Im(\varphi_t)$, a função de pertinência de

$\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ é:

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)}(x, p) &= \sup_{\psi_t(x_o, y) = (x, p)} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, y) \\ &= \sup_{\substack{\varphi_t(x_o, y) = x \\ y = p}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, y) \\ &= \sup_{\substack{x_o \in U \\ \varphi_t(x_o, p) = x}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p).\end{aligned}$$

Se $x \notin \text{Im}(\varphi_t)$ então $(x, p) \notin \text{Im}(\psi_t)$ para todo $p \in P$ e assim, $\mu_{\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)}(x, p) = 0$.

Mas então, a projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ sobre $\mathcal{E}(U)$ tem função de pertinência

$$\sup_{p \in P} \mu_{\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)}(x, p) = \sup_{p \in P} \sup_{\substack{x_o \in U \\ \varphi_t(x_o, p) = x}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p) = \sup_{\substack{(x_o, p) \\ \varphi_t(x_o, p) = x}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p).$$

Agora, por definição, o ponto $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o) \in \mathcal{E}(U)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)}(x) = \sup_{\substack{(x_o, p) \\ \varphi_t(x_o, p) = x}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p).$$

Logo, para todo $x \in U$, vale a igualdade

$$\mu_{\mathbf{y}}(x) = \sup_{p \in P} \mu_{\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)}(x, p) = \mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)}(x),$$

o que prova a afirmação. ■

A demonstração da proposição pode ainda se feita através dos α - níveis. De fato, devemos mostrar que

$$\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o) = \hat{P}_n(\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o))$$

para todo $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Usando a continuidade das aplicações P_n e ψ_t , temos então

$$\begin{aligned}[\hat{P}_n(\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o))]^\alpha &= P_n(\hat{\psi}_t([\mathbf{y}_o]^\alpha)) = \{P_n(\hat{\psi}_t(y_o)) : y_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} \\ &= \{P_n(\varphi_t(x_o, p_o), p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\} \\ &= \{\varphi_t(x_o, p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\} \\ &= \varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha),\end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. A igualdade acima conclui a prova a proposição.

Como dissemos na Introdução deste trabalho, Buckley e Feuring (2000) definem a solução fuzzy para as equações diferenciais fuzzy através da extensão de Zadeh aplicada sobre soluções determinísticas. Diferentemente do proposto por Oberguggenberger e Pittschmann (1999) e Mizukoshi (2004), quando a equação depende de parâmetros, como a Equação (5.1), a solução fuzzy proposta por Buckley e Feuring é obtida por extensão de Zadeh do fluxo determinístico $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U \times P) \rightarrow \mathcal{E}(U)$. Desta forma, a Proposição 5.1 assegura que a solução fuzzy de Buckley e Feuring é a projeção da solução fuzzy que estamos considerando neste trabalho.

Considerar a subjetividade nos parâmetros da Equação (5.1) contribui para um aumento na incerteza, no sentido que veremos a seguir, do fluxo fuzzy. Fixado uma parâmetro $\bar{p} \in P$ e dada uma condição inicial fuzzy \mathbf{x}_o , os α - níveis do fluxo fuzzy gerado pela Equação (5.1) são os conjuntos

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha = \{\varphi_t(x_o, \bar{p}) : x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\}.$$

Por outro lado, se os α - níveis de $\mathbf{p}_o \in \mathcal{E}(P)$ contém \bar{p} então, pela Proposição 5.1, temos:

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)]^\alpha = \{\varphi_t(x_o, p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha \times [\mathbf{p}_o]^\alpha\}.$$

Disto, não é difícil ver que temos

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha \subseteq [\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)]^\alpha. \quad (5.4)$$

Projeção do ponto de equilíbrio

No Capítulo 2 mostramos que a distância entre as projeções $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$, dos pontos \mathbf{x} e $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$, é sempre limitada pela distância entre \mathbf{x} e \mathbf{y} , isto é,

$$d_\infty(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \leq d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Desta forma, se $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para um ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e \in \mathcal{E}(U \times P)$ quando $t \rightarrow \infty$ então a projeção $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto $\bar{\mathbf{y}}$ que é a projeção do ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e .

Sob as hipóteses da Proposição 3.8 no Capítulo 3, o ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e para o fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t$, gerado pela equação associada (5.2), pode ser determinado pela extensão de Zadeh da aplicação $y_e : U \times P \rightarrow U \times P$. Tal aplicação, associa para cada (x_o, p) o ponto de equilíbrio

$$y_e(x_o, p) = (x_e(x_o, p), p),$$

no qual $x_e(x_o, p)$ é o ponto de equilíbrio para a Equação 5.1. Ainda de acordo com o que foi discutido no Capítulo 3, dada uma condição inicial \mathbf{y}_o , o ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$ tem função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, p) = \begin{cases} \sup_{x_o \in U} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p) & \text{se } x_e(x_o, p) = x \\ 0 & \text{se } x_e(x_o, p) \neq x \end{cases}$$

Por definição, a projeção de \mathbf{y}_e sobre $\mathcal{E}(U)$ tem função de pertinência

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x}}(x) &= \sup_{p \in P} \mu_{\mathbf{y}_e}(x, p) \\ &= \sup_{\substack{(x_o, p) \\ x = x_e(x_o, p)}} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, p) \\ &= \mu_{\hat{x}_e(\mathbf{y}_o)}(x). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Através da igualdade 5.5, juntamente com a Proposição 5.1, para $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$, as projeções do fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ e do ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$, podem facilmente ser obtidas por meio da extensão de Zadeh da solução $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$ e do ponto de equilíbrio $x_e(x_o, p)$ da Equação (5.1), respectivamente.

Exemplo 5.1. No Exemplo 3.7, consideramos o caso em que o parâmetro k_o na equação

$$\frac{dx}{dt} = \beta(k_o - x)$$

é um parâmetro fuzzy. Para a equação acima, a solução $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, em termos de x_o e k_o , é dada por

$$\varphi_t(x_o, k_o) = k_o + (x_o - k_o)e^{-\beta t}$$

e assim o fluxo bidimensional $\psi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para o caso em que o parâmetro é incorporado na condição inicial, é dado por

$$\psi_t(x_o, k_o) = (k_o + (x_o - k_o)e^{-\beta t}, k_o).$$

De acordo com a Proposição 5.1, a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ de φ_t é a projeção sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ do fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$. Para ilustrar, consideramos $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$. Por definição, temos que:

$$\hat{\varphi}_t([\mathbf{y}_o]^\alpha) = \{\varphi_t(x_o, p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\}.$$

Por outro lado, a projeção $\hat{P}_1(\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o))$ tem α - níveis dado por:

$$\begin{aligned} [\hat{P}_n(\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o))]^\alpha &= P_1(\psi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha)) \\ &= \{P_1(\psi_t(x_o, p_o)) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\} \\ &= \{P_1(\varphi_t(x_o, p_o), p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\} \\ &= \{\varphi_t(x_o, p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\}, \end{aligned}$$

de onde concluimos que $[\hat{P}_n(\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o))]^\alpha = \hat{\varphi}_t([\mathbf{y}_o]^\alpha)$ e, conseqüentemente,

$$\hat{P}_1(\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)) = \hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o).$$

Para toda condição inicial $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, mostramos que $\hat{\psi}_t$ converge para o ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e que é a extensão de Zadeh de $y_e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $y_e(x_o, k_o) = (k_o, k_o)$. Isto é, o ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e tem função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, k) = \min \left\{ \chi_{\{k\}}(x), \sup_{x_o} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, k) \right\}.$$

Em particular, se $\mathbf{y}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{k}_o)$ é o produto cartesiano fuzzy entre \mathbf{x}_o e $\mathbf{k}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, então a função de pertinência neste caso é dada por

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, k) = \sup_{x_o} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, k) = \sup_{x_o} \Delta(\mu_{\mathbf{x}_o}(x_o), \mu_{\mathbf{k}_o}(x)) = \mu_{\mathbf{k}_o}(x)$$

quando $x = k$ e $\mu_{\mathbf{y}_e}(x, k) = 0$ quando $x \neq k$.

Pela igualdade (5.5), a projeção $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ para este ponto de equilíbrio tem função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{k \in \mathbb{R}} \mu_{\mathbf{y}_e}(x, k) = \mu_{\mathbf{k}_o}(x)$$

e temos que $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o), \bar{\mathbf{x}}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Na Figura 3.2, na página 80, temos a representação gráfica da solução fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ e da projeção $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$. \square

Equações unidimensionais

Consideremos o caso em que a Equação (5.1) é unidimensional. Isto é, o campo de direções é uma função $f : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$, no qual $U \subset \mathbb{R}$ e $P \subset \mathbb{R}^m$. Desta forma, a Equação (5.2) associada que incorpora os parâmetros como condição inicial tem dimensão $m + 1$. Seja $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ e $\psi(x_o, p)$ a solução da Equação (5.2). De acordo com a Proposição 5.1, a projeção $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$, onde $\hat{\varphi}_t$ é a extensão de Zadeh da solução $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$ da Equação (5.1).

Fixado $t \in \mathbb{R}_+$, os α - níveis da projeção $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$, para o caso em que \mathbf{y}_o tem α - níveis conexos, são os intervalos $[y_m^\alpha(t), y_M^\alpha(t)]$, no qual

$$y_m^\alpha(t) = \min\{\varphi_t(x_o, p) : (x_o, p) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\};$$

$$y_M^\alpha(t) = \max\{\varphi_t(x_o, p) : (x_o, p) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\}.$$

Em alguns casos, quando $\mathbf{y}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$ é dado pela t - norma do mínimo com $[\mathbf{x}_o]^\alpha$ e $[\mathbf{p}_o]^\alpha$ conexos, as expressões para $y_m(t)$ e $y_M(t)$ são encontradas através de um método relativamente simples.

Proposição 5.2. *Sejam $[\mathbf{x}_o]^\alpha = [x_m^\alpha, x_M^\alpha]$ e $\mathbf{p}_o \in \mathcal{E}(P)$. Se existem $p_m^\alpha, p_M^\alpha \in [\mathbf{p}_o]^\alpha$ tal que*

$$f(x, p_m^\alpha) \leq f(x, p) \leq f(x, p_M^\alpha) \quad (5.6)$$

para todo $x \in U \subset \mathbb{R}$, então a projeção $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$ tem α - níveis dado por

$$y_m^\alpha(t) = \varphi_t(x_m^\alpha, p_m^\alpha) \quad \text{e} \quad y_M^\alpha(t) = \varphi_t(x_M^\alpha, p_M^\alpha)$$

Prova: De acordo com a Proposição 1.14, as desigualdades em (5.6) garantem que

$$\varphi_t(x_o, p_m^\alpha) \leq \varphi_t(x_o, p_o) \leq \varphi_t(x_o, p_M^\alpha)$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $x_o \in U \subset \mathbb{R}$. Sabemos ainda que $x_o < y_o$ implica em $\varphi_t(x_o, p_o) < \varphi_t(y_o, p_o)$. Assim, para todo $(x_o, p_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha \times [\mathbf{p}_o]^\alpha$ vale que

$$\varphi_t(x_m^\alpha, p_m^\alpha) \leq \varphi_t(x_o, p_o) \leq \varphi_t(x_M^\alpha, p_M^\alpha).$$

Desta forma, o mínimo e o máximo do conjunto

$$[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)]^\alpha = \{\varphi_t(x_o, p_o) : (x_o, p_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha \times [\mathbf{p}_o]^\alpha\}$$

são, respectivamente, atingidos nos pontos (x_m^α, p_m^α) e (x_M^α, p_M^α) . Logo, a afirmação está provada. ■

A proposição que acabamos de demonstrar fornece uma maneira prática de determinar os extremos dos intervalos dos α - níveis da projeção do fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Mesmo não sendo possível determinar a solução da Equação (5.1) é possível encontrar quais pontos no domínio determinam os extremos dos α - níveis.

De maneira análoga, podemos demonstrar que a Proposição 5.2 ainda continua verdadeira quando as desigualdades (5.6) são válidas em algum subconjunto invariante de $S \subset U \subset \mathbb{R}$.

5.2.2 Projeção sobre os eixos coordenados

Consideremos agora o caso em que a equação diferencial não depende de parâmetros. Isto é, $\varphi_t : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$ é o fluxo gerado pela equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_o.$$

Seja $\varphi_t^{(i)} : U \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção do fluxo determinístico no i - ésimo eixo coordenado,

isto é, $\varphi_t^{(i)}(x_o)$ é a solução que corresponde a equação

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x).$$

Como no caso determinístico, a extensão de Zadeh $\hat{\varphi}_t^{(i)} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ da i -ésima componente $\varphi_t^{(i)}$ é a i -ésima projeção da fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Proposição 5.3. *A aplicação $\hat{\varphi}_t^{(i)} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ é a i -ésima projeção do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.*

Prova: Seja $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$. Por definição, a i -ésima projeção de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ é o ponto $\mathbf{x}_i = \hat{\pi}_i(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o))$. Desde que a projeção é uma aplicação contínua, então vale que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_i]^\alpha &= \pi_i(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) = \{\pi_i(\varphi_t(x_o)) : x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} \\ &= \{\varphi_t^{(i)}(x_o) : x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} \\ &= \varphi_t^{(i)}([\mathbf{x}_o]^\alpha). \end{aligned}$$

Logo, $[\hat{\varphi}_t^{(i)}(\mathbf{x}_o)]^\alpha = [\mathbf{x}_i]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e a afirmação está provada. ■

Se o ponto de equilíbrio x_e do fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ depende da condição inicial $x_o \in U$, então o ponto de equilíbrio para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ é obtido pela extensão de Zadeh de $x_e : U \rightarrow U$. Seja $x_e^{(i)}(x_o)$ a i -ésima coordenada do ponto de equilíbrio x_e . De maneira análoga, podemos provar que a i -ésima projeção do ponto de equilíbrio fuzzy $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{E}(U)$ é o ponto $\bar{\mathbf{x}}_i = \hat{x}_e^{(i)}(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ onde $\hat{x}_e^{(i)} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ é a extensão de Zadeh de $x_e^{(i)} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Mais resumidamente, para $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$, vale a igualdade

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}_i}(x) = \mu_{\hat{x}_e^{(i)}(\mathbf{x}_o)}(x) \tag{5.7}$$

onde $\bar{\mathbf{x}}_i$ é a i -ésima projeção do ponto de equilíbrio fuzzy \mathbf{x}_e .

Exemplo 5.2. A equação autônoma

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, & x_1(0) = x_{01}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1, & x_2(0) = x_{02}, \end{cases}$$

determina o fluxo bidimensional $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_t = (\varphi_t^{(1)}, \varphi_t^{(2)})$, dado por:

$$\varphi_t^{(1)}(x_{01}, x_{02}) = x_{01} \cos t + x_{02} \sin t;$$

$$\varphi_t^{(2)}(x_{01}, x_{02}) = x_{02} \cos t - x_{01} \sin t.$$

Conforme a proposição anterior, as projeções do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ são as extensões de Zadeh das componentes $(\varphi_t^{(1)}$ e $\varphi_t^{(2)})$.

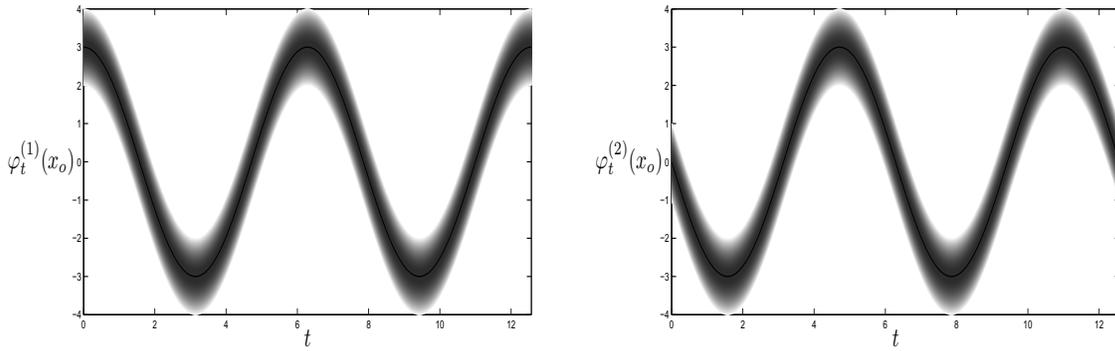


Figura 5.1: Evolução no tempo de $\varphi_t^{(1)}(\mathbf{x}_o)$ e $\varphi_t^{(2)}(\mathbf{x}_o)$ respectivamente.

Na Figura 5.1 temos a evolução no tempo da projeção da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre os eixos x e y respectivamente. A condição inicial \mathbf{x}_o tem função de pertinência dada por:

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \max\{1 - (x - 3)^2 - y^2, 0\}.$$

□

Exemplo 5.3. O fluxo determinístico gerado pelo modelo SI , Equação (3.3) no Exemplo 3.1, tem ponto de equilíbrio $x_e(S_o, I_o) = (0, S_o + I_o)$. Para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$, o fluxo fuzzy converge para o ponto de equilíbrio fuzzy $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$.

De acordo com a igualdade (5.7), as projeções do ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e sobre os eixos coordenados são obtidas pela extensão de Zadeh das componentes de x_e . Isto é, as projeções são, respectivamente, $\bar{\mathbf{x}}_1 = \chi_{\{0\}}$ e $\bar{\mathbf{x}}_2$, cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}_2}(I) = \sup_{S_o + I_o = I} \mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I_o) = \sup_{S_o} \mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I - S_o) \quad (5.8)$$

Pela Proposição 5.3, as projeções da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, do modelo SI são obtidas pela extensão de Zadeh das componentes $\varphi_t^{(1)}$ e $\varphi_t^{(2)}$, dadas por:

$$\varphi_t^{(1)}(S_o, I_o) = N_o \left(1 - \frac{I_o}{I_o + S_o e^{N_o r t}} \right); \quad \varphi_t^{(2)}(S_o, I_o) = \frac{N_o I_o}{I_o + S_o e^{N_o r t}}.$$

Para ilustrar, suponha que a força de infecção seja $r = 0.01$ e tomemos a condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ definida pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I_o) = \max\{1 - 0.01(S_o - 80)^2 - 0.25(I_o - 5)^2, 0\}.$$

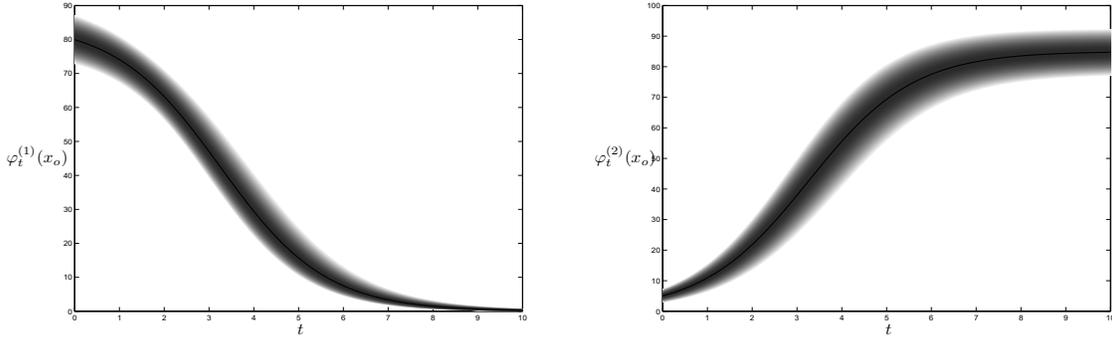


Figura 5.2: Evolução no tempo da projeção de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre os eixos S e I respectivamente.

A Figura 5.2 mostra a evolução das projeções $\hat{\varphi}_t^{(1)}(\mathbf{x}_o)$ e $\hat{\varphi}_t^{(2)}(\mathbf{x}_o)$ com a evolução no tempo. Observe que $\hat{\varphi}_t^{(1)}(\mathbf{x}_o)$ converge para $\bar{\mathbf{x}}_1 = \chi_{\{0\}}$ enquanto que $\hat{\varphi}_t^{(2)}(\mathbf{x}_o)$ converge para $\bar{\mathbf{x}}_2$ com função de pertinência dada como em (5.8).

Podemos ainda considerar que quantidade de indivíduos na população é conhecida, digamos, N . Neste caso, as variáveis S e I estão relacionadas pela igualdade. Como mostramos no Exemplo 3.2, sob esta hipótese, a solução fuzzy converge para o ponto de equilíbrio fuzzy $\chi_{\{(0,N)\}}$. Neste caso, as projeções $\hat{\varphi}_t^{(1)}(\mathbf{x}_o)$ e $\hat{\varphi}_t^{(2)}(\mathbf{x}_o)$ convergem para $\chi_{\{0\}}$ e $\chi_{\{N\}}$, respectivamente.

Na Figura 5.3 temos a representação gráfica das projeções da solução fuzzy $\varphi_t(\mathbf{x}_o)$,

para a condição inicial

$$\mu_{x_o}(S_o, I_o) = \begin{cases} \max\{1 - 0.01(S_o - 80)^2, 0\}, & \text{se } S_o + I_o = N, \\ 0 & \text{se } S_o + I_o \neq N. \end{cases}$$

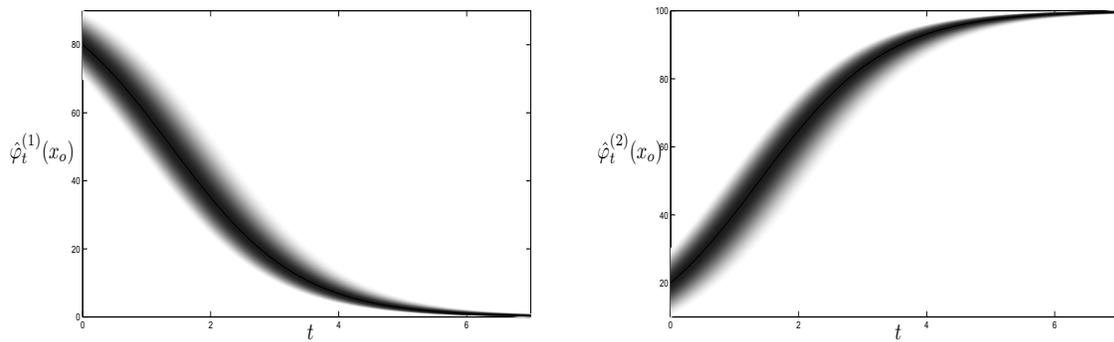


Figura 5.3: Evolução no tempo da projeção de $\hat{\varphi}_t(x_o)$ sobre os eixos S e I respectivamente.

□

5.3 O fluxo fuzzy e a equação do transporte

Nesta seção exploramos a relação que existe entre o fluxo fuzzy, obtido pela extensão de Zadeh do fluxo determinístico, e a solução de uma equação diferencial parcial de primeira ordem: a equação do transporte.

Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função contínua e considere o problema de valor inicial determinado pela equação diferencial autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_o, \tag{5.9}$$

e a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$\begin{cases} u_t + f(x)u_x = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times U, \\ u(0, x) = u_o(x), & x \in U, \end{cases} \quad (5.10)$$

em que $u_o : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e

$$f(x)u_x(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i}.$$

A solução $u : \mathbb{R}_+ \times U \rightarrow \mathbb{R}$ para a Equação (5.10) pode ser determinada através do método das características. Este método consiste em determinar trajetórias $x(t)$ nas quais a solução da Equação (5.10) é constante ao longo de $(t, x(t))$. Isto é, queremos encontrar a trajetória $x(t)$ tal que a aplicação $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $z(t) = u(t, x(t))$, seja constante para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Assim, se $u : \mathbb{R}_+ \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de (5.10), então

$$\frac{dz}{dt}(s) = u_t(s, x(s)) + \frac{dx}{dt}(s)u_x(s, x(s)) = u_t(s, x(s)) + f(x(s))u_x(s, x(s)) = 0$$

e portanto, comparando ambos os lados da igualdade, a trajetória $x(t)$ deve satisfazer a Equação (5.9).

Reciprocamente, se $\varphi_t(x_o)$ é solução da Equação (5.9) então temos que $u(t, \varphi_t(x_o)) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Em particular, essa igualdade vale para $t = 0$ de modo que temos $c = u(0, \varphi_0(x_o)) = u_o(x_o)$.

Desta forma, para determinar a solução da Equação (5.10) em um ponto $(t, x) \in (0, \infty) \times U$ necessitamos determinar $x_o \in U$ tal que $\varphi_t(x_o) = x$, ou seja, $x_o = \varphi_{-t}(x)$, e então

$$u(t, x) = u_o(\varphi_{-t}(x))$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Quando a condição inicial $u_o : U \rightarrow \mathbb{R}$ não é de classe C^1 então $u(t, x) = u_o(\varphi_{-t}(x))$ é denominada *solução fraca* para a Equação (5.10). Mais detalhes sobre o método das características podem se encontrados em Evans (1998).

Aqui estamos supondo que para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times U$ é possível determinar $x_o \in U$ tal

que $\varphi_t(x_o) = x$. Quando a solução da Equação (5.9) existe para todo $t \in \mathbb{R}$ então, pelas propriedades de fluxo, temos que $x_o = \varphi_{-t}(x)$.

Como veremos na proposição abaixo, se $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ é obtido através da extensão de Zadeh do fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$, gerado pela Equação (5.9), então a função de pertinência $\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)} : U \rightarrow [0, 1]$ é a solução da equação do transporte (5.10) com condição inicial $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$.

Proposição 5.4. *Sejam $\hat{\varphi}_t$ a extensão de Zadeh do fluxo determinístico φ_t gerado pela Equação (5.9), $u : \mathbb{R}_+ \times U \rightarrow \mathbb{R}$ a solução de (5.10) e $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$. Se $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$ então*

$$u(t, x) = \mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}(x)$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $x \in U$.

Prova: Suponha que $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$ para todo $x \in U$. O método das características apresentado acima nos permite encontrar a solução da Equação (5.10) em termos da condição inicial $u_o : U \rightarrow \mathbb{R}$. Mais especificamente, a solução em um ponto $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times U$ é dado por

$$u(t, x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(\varphi_{-t}(x)). \quad (5.11)$$

Por outro lado, a extensão de Zadeh aplicada sobre a condição inicial do fluxo determinístico φ_t determina o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$, cuja imagem de $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ no tempo t , tem como função de pertinência

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}(x) = \sup_{\varphi_t(x_o)=x} \mu_{\mathbf{x}_o}(x_o) = \mu_{\mathbf{x}_o}(\varphi_{-t}(x)), \quad (5.12)$$

com a última igualdade sendo válida pela unicidade da solução com relação à condição inicial.

Com isto, concluímos que vale a igualdade

$$u(t, x) = \mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}(x)$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times U$ e a afirmação está provada. ■

A Proposição 5.4 tem algumas importantes consequências. Primeiramente, ela nos

permite interpretar as soluções via extensão de Zadeh sobre a condição inicial como sendo um transporte determinado pelo campo vetorial f . Isso abre a possibilidade de utilizar técnicas de equações diferenciais parciais para compreendermos o comportamento do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$.

Em segundo lugar, a Proposição 5.4 nos permite explorar uma ampla classe de métodos voltados para se obter aproximações numéricas da solução de equações de conservação, como por exemplo a Equação (5.10) (LeVeque, 1992). Consequentemente, podemos utilizar tais métodos numéricos para obter uma aproximação para $\mu_{\varphi_t(\mathbf{x}_o)} : U \rightarrow [0, 1]$.

Exemplo 5.4. Consideremos o fluxo determinístico

$$\varphi_t(x_o) = k + (x_o - k)e^{-\beta t}$$

gerado pela equação unidimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \beta(k - x).$$

Dado $u_o : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a solução da equação diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t + \beta(k - x)u_x = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_o(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.13)$$

é dada por

$$u(t, x) = u_o(k + (x - k)e^{\beta t}).$$

Seja agora $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ com função de pertinência $\mu_{\mathbf{x}_o} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. De acordo com a Proposição 5.4, a função de pertinência de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ é a solução da equação diferencial parcial com $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$, isto é,

$$\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)} = \mu_{\mathbf{x}_o}(k + (x - k)e^{\beta t}).$$

Na Figura 5.4 temos o gráfico da função de pertinência $\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}$ para diferentes valores

de tempo. A condição inicial, neste caso, tem função de pertinência dada por:

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x) = \max\{1 - 0.01(x - 10)^2, 0\}.$$

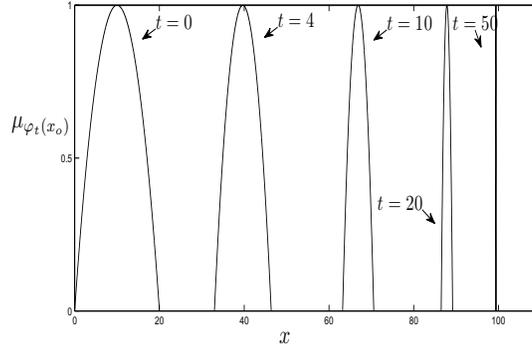


Figura 5.4: Função de pertinência de $\varphi_t(\mathbf{x}_o)$ para diferentes valores de t .

Pelos resultados apresentados no capítulo anterior, a solução fuzzy deste exemplo converge para o ponto de equilíbrio $\chi_{\{0\}}$, o que está de acordo como que podemos observar na Figura 5.4.

Entretanto, devemos ressaltar que a convergência não ocorre na métrica do supremo, para o conjunto das funções limitadas. De fato, para todo $t \in \mathbb{R}_+$ temos que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}(x) - \chi_{\{0\}}(x)| = 1.$$

Logo, não podemos ter a convergência da função de pertinência $\mu_{\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}$ para $\chi_{\{0\}}$, quando $t \rightarrow \infty$, pela métrica do supremo. \square

5.4 Conclusão

Neste capítulo estudamos projeções do fluxo fuzzy sobre subespaços apropriados do domínio. Na Proposição 5.1 mostramos que a projeção da solução fuzzy do sistema (5.2) é a extensão de Zadeh da solução determinística da Equação (5.1). Na Proposição 5.2, mostramos uma maneira relativamente simples de encontrar os α - níveis da extensão de Zadeh da solução determinística Equação (5.1), quando esta é unidimensional.

Na Proposição 5.3 mostramos que i - ésima projeção, sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, da solução fuzzy é a extensão de Zadeh da i - ésima coordenada da solução determinística.

Finalmente, na Proposição 5.4 mostramos que a função de pertinência da solução fuzzy é a solução de uma equação diferencial parcial, a equação do transporte.

Capítulo 6

Biomatemática e os fluxos fuzzy

6.1 Introdução

As ferramentas de análise qualitativa desenvolvidas nos capítulos anteriores, mais precisamente nos Capítulos 3 e 4, são utilizadas neste capítulo para estudar o comportamento assintótico de fluxos fuzzy gerados por alguns importantes modelos em Biomatemática.

Na Seção 6.2 analisamos o fluxo fuzzy gerado por três modelos unidimensionais: o modelo que descreve o efeito Allee, o modelo logístico generalizado e o modelo de von Bertalanffy generalizado. Em todos estes modelos, inicialmente estudamos o caso em que a subjetividade está somente na condição inicial e em seguida consideramos também o caso em que os parâmetros envolvidos nas equações são fuzzy.

Na Seção 6.3 analisamos o comportamento do fluxo fuzzy gerado pelos modelos presa - predador de Lotka - Volterra e Holling - Tanner. O modelo de Lotka - Volterra apresenta uma dificuldade adicional uma vez que as órbitas periódicas não são ciclos limites. Além disso, o período de cada órbita depende da condição inicial de modo que, em geral, não podemos garantir que a solução fuzzy seja periódica. Analisamos ainda o modelo de Holling - Tanner fuzzy e verificamos a existência de órbitas periódicas fuzzy para determinados valores de parâmetros. Neste caso, mostramos que a solução fuzzy pode apresentar periodicidade.

Para finalizar o capítulo, na Seção 6.4 analisamos o fluxo fuzzy gerado por dois modelos envolvendo três variáveis de estado. Primeiramente mostramos a existência de pontos de equilíbrio fuzzy com função de pertinência sobrejetiva para o modelo de epidemiologia

SIR. Em seguida, estudamos o fluxo fuzzy gerado por um modelo que descreve a interação entre dois predadores e uma única presa. Também neste caso, o fluxo fuzzy apresenta pontos de equilíbrio com função de pertinência sobrejetiva sobre o intervalo $[0,1]$.

6.2 Modelos unidimensionais

6.2.1 Efeito Allee demográfico

No modelo logístico para dinâmica populacional de uma espécie, a taxa de reprodução *per capita* é inversamente proporcional à quantidade de indivíduos na população. Isto ocorre ao se considerar que a disputa por espaço e por alimentos é menor para baixas densidades populacionais (Allee et al., 1949).

No entanto, quando a quantidade de indivíduos de uma espécie é pequena pode haver influência na reprodução. Devido à dificuldade em encontrar parceiros adultos, determinadas espécies reproduzem menos em baixas densidades populacionais. Com isso, na geração seguinte haverá menos adultos que, conseqüentemente, reproduzirão menos, levando a espécie à extinção (Courchamp et al., 2008). Para determinadas espécies, a agregação dos indivíduos no estágio larval é fundamental para a sobrevivência da espécie.

Desta forma, para certas espécies, a taxa de reprodução *per capita* é proporcional à quantidade de indivíduos para baixas densidades populacionais. A presença de um número mínimo de indivíduos, abaixo do qual a população vai à extinção, é denominado *efeito Allee demográfico*. De maneira geral, o *efeito Allee* descreve a situação em que a taxa de reprodução *per capita* diminui ou a taxa de mortalidade aumenta para baixas densidades populacionais (May e McLean, 2007).

Um dos modelos mais simples que incorpora tanto o *efeito Allee* quanto a capacidade suporte do ambiente é dado pela equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(\frac{x}{a} - 1\right), \quad x(0) = x_o > 0, \quad (6.1)$$

onde $r > 0$ é taxa de reprodução intrínseca, $k > 0$ é a capacidade suporte e $a \in (0, k)$ é o *limiar Allee*. Observemos que quando $x_o < a$ então a população vai para a extinção. Por outro lado, se $x_o \in (a, k)$ então a população aumenta e é limitada pela capacidade suporte k .

Os pontos de equilíbrio para a equação acima são: $x_e = 0$, $y_e = a$ e $z_e = k$. Os pontos de equilíbrio x_e e z_e são assintoticamente estáveis enquanto que y_e é instável.

Condição inicial fuzzy

Consideramos o caso em que a condição inicial da Equação (6.1) é fuzzy.

O fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ gerado pela Equação (6.1) tem como equilíbrio os pontos $\mathbf{x}_e = \chi_{\{0\}}$, $\mathbf{y}_e = \chi_{\{a\}}$ e $\mathbf{z}_e = \chi_{\{k\}}$ sendo \mathbf{x}_e e \mathbf{z}_e assintoticamente estáveis e \mathbf{y}_e instável (Proposição 3.4 no Capítulo 3). No entanto, somente a análise destes pontos de equilíbrio não é suficiente para explicar o comportamento do fluxo fuzzy ao longo do tempo.

Para todo $x_o \in (a, \infty)$ temos que $\varphi_t(x_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $z_e = k$. Mais do que isso, a Proposição 1.20 garante que o ponto de equilíbrio z_e atrai qualquer conjunto compacto contido em (a, ∞) . Assim, através do Teorema 3.6, podemos concluir que o fluxo fuzzy converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{z}_e = \chi_{\{k\}}$, para qualquer \mathbf{x}_o com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset (a, \infty)$. De maneira análoga podemos concluir que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \chi_{\{0\}}$ quando $t \rightarrow \infty$ para todo \mathbf{x}_o com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset [0, a)$.

Suponha agora que $[\mathbf{x}_o]^0 = [x_o, a]$, $x_o \in [0, a)$. Como $[0, a]$ é um conjunto invariante para o fluxo determinístico, a Proposição 4.13 garante que os α -níveis de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ estão em $[0, a]$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Uma vez que $\varphi_t(x_o) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e $\varphi_t([x_o, a])$ é um conjunto conexo para todo $t \in \mathbb{R}_+$, então, dado $y \in (0, a]$, existe $T \geq 0$ tal que $y \in \varphi_t([x_o, a])$ para todo $t > T$. Logo, $\lim_{t \rightarrow \infty} d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^0, [0, a]) = 0$. Isto implica que o suporte da solução fuzzy, para condições iniciais com suporte $[\mathbf{x}_o]^0 = [x_o, a]$, converge para o intervalo $[0, a]$.

Por outro lado, se $[\mathbf{x}_o]^0 = [a, x_o]$, $x_o \in (a, k]$ então a Proposição 4.13 garante que $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha$ está contido em $[a, k]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}_+$. De maneira análoga, podemos mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^0, [a, k]) = 0$. Neste caso, o suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge, na métrica de Hausdorff, para o conjunto $[a, k]$.

No caso de termos $[\mathbf{x}_o]^0 = [x_o, y_o]$ com $x_o < a < y_o$ então, pelo fato de $[0, k]$ ser invariante pelo fluxo determinístico, vale que $[\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha \subset [0, k]$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^0, [0, k]) = 0$. Assim, para condições iniciais com $[\mathbf{x}_o]^0 = [x_o, y_o]$, o suporte da solução fuzzy converge para $[0, k]$.

Através dos resultados desenvolvidos na Seção 4.3, podemos estabelecer as estabilidade

dos conjuntos invariantes:

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) : [\mathbf{x}]^0 \in [0, a]\}; \quad \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) : [\mathbf{x}]^0 \in [0, k]\};$$

$$\mathcal{S}_3 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) : [\mathbf{x}]^0 \in [a, k]\}.$$

No entanto, omitiremos a análise de estabilidade de tais conjuntos.

Incerteza sobre a condição inicial e limiar Allee

Para incorporarmos incerteza no limiar Allee, representado pelo parâmetro a , precisamos considerar o sistema aumentado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \left(\frac{x}{a_o} - 1\right), & x(0) = x_0 > 0, \\ \frac{da}{dt} = 0, & a(0) = a_o \in (0, k). \end{cases} \quad (6.2)$$

Para distinguir da solução da Equação (6.1), a solução da equação acima será denotada por $\psi_t(x_o, a_o)$.

A Equação (6.2) apresenta três pontos de equilíbrio que dependem do parâmetro a_o .

$$\begin{array}{ccc} x_e : \mathbb{R}_+^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_+^2 & & y_e : \mathbb{R}_+^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_+^2 & & z_e : \mathbb{R}_+^2 & \rightarrow & \mathbb{R}_+^2 \\ (x_o, a_o) & \rightarrow & (0, a_o), & & (x_o, a_o) & \rightarrow & (a_o, a_o) & & (x_o, a_o) & \rightarrow & (k, a_o) \end{array} \quad \text{e}$$

Dizer que o parâmetro a_o é incerto significa considerar a condição inicial da Equação (6.2) fuzzy. Seja $U = \mathbb{R}_+ \times I$, $I = (0, k)$, e consideramos o fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ gerado pela Equação (6.2). Fixamos $\mathbf{a}_o \in \mathcal{E}(I)$ e vamos estudar o comportamento assintótico de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ onde $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U)$ é da forma $\mathbf{y}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{a}_o)$ com $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$. Isto é, estamos considerando \mathbf{y}_o determinado a partir do produto cartesiano fuzzy entre $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ e $\mathbf{a}_o \in \mathcal{E}(I)$ por alguma t -norma.

De acordo com o Teorema 3.6, podemos determinar pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t$ pela extensão de Zadeh das funções x_e, y_e e z_e . Isto é,

$$\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{y}_o), \quad \mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o) \quad \text{e} \quad \mathbf{z}_e = \hat{z}_e(\mathbf{y}_o).$$

As funções de pertinência para cada um dos pontos de equilíbrio fuzzy acima são, respectivamente:

$$\mu_{\mathbf{x}_e}(x, a) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{a}_o}(a) & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \neq 0; \end{cases} \quad \mu_{\mathbf{y}_e}(x, a) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{a}_o}(a) & \text{se } x = a, \\ 0 & \text{se } x \neq a; \end{cases}$$

$$\mu_{\mathbf{z}_e}(x, a) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{a}_o}(a) & \text{se } x = k, \\ 0 & \text{se } x \neq k. \end{cases}$$

Como no modelo determinístico, a convergência $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ para um dos pontos de equilíbrio acima vai depender da escolha da condição inicial $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U)$. Uma vez que estamos considerando o parâmetro \mathbf{a}_o fixo e $\mathbf{y}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{a}_o)$ então a convergência vai depender apenas da escolha de \mathbf{x}_o .

Para simplificar a análise, suponha que $[\mathbf{a}_o]^0 = [a_1, a_2] \subset I$. Se $x_0 < a_1$ então $\varphi_t(x_o) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $x_0 > a_2$ então $\varphi_t(x_o) \rightarrow k$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, se $[\mathbf{x}_o]^0 \subset [0, a_1)$ a Proposição 3.8 assegura que $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{y}_o)$. Se $[\mathbf{x}_o]^0 \subset (a_2, \infty)$ então, pela mesma proposição, $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{z}_e = \hat{z}_e(\mathbf{y}_o)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Estamos também interessados aqui em saber a influência da subjetividade na dinâmica populacional dada pela Equação (6.2). Por este motivo, nos é conveniente observar o comportamento da projeção da solução fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$. Pela Proposição 5.1, para cada $t \in \mathbb{R}$, a projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ é o ponto $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$.

Ainda pelos resultados do capítulo anterior, a projeção dos pontos de equilíbrio \mathbf{x}_e , \mathbf{y}_e e \mathbf{z}_e em $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ são, respectivamente, os pontos

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \chi_{\{0\}}, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{a}_o \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{x}}_3 = \chi_{\{k\}}.$$

Desde que $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e quando $[\mathbf{x}_o]^0 \subset [0, a_1)$ então a projeção $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para $\chi_{\{0\}}$ quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $[\mathbf{x}_o]^0 \subset (a_2, \infty)$ então $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio \mathbf{z}_e e, conseqüentemente, a projeção $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para $\chi_{\{k\}}$ quando $t \rightarrow \infty$.

A Figura 6.1 mostra a evolução com o tempo do fluxo fuzzy gerado pelas Equações (6.1) e (6.2). O gráfico (a) é a evolução da solução fuzzy $\varphi_t(\mathbf{x}_o)$, isto é, quando apenas a condição

inicial é considerada fuzzy, para duas condições iniciais distintas $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ dadas pelas funções de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x) = \max\{1 - 0.04(x - 60)^2, 0\} \quad \text{e} \quad \mu_{\mathbf{x}_o}(x) = \max\{1 - 0.04(x - 40)^2, 0\}.$$

No item (b), temos a evolução da projeção da solução fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ gerado pela Equação (6.2). A condição inicial \mathbf{y}_o considerada, neste caso, é o produto cartesiano fuzzy entre \mathbf{x}_o e \mathbf{a}_o dado pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{a}_o}(x) = \max\{1 - 0.1(x - 50), 0\}.$$

Notamos que há uma diferença entre os α - níveis dos gráficos em (a) e (b). Isto acontece pois a subjetividade nos parâmetros contribui para um aumento da subjetividade na dinâmica populacional da espécie (veja (5.4) na página 135.)

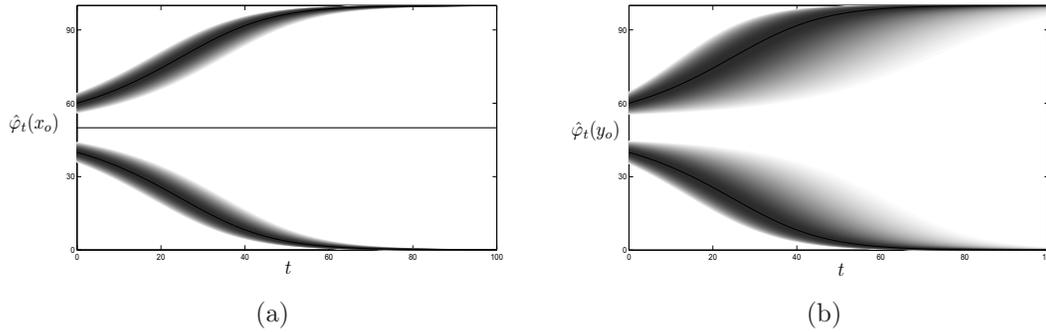


Figura 6.1: (a) - Evolução da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ da Equação (6.1) com $r = 0.1$, $k = 100$ e $a = 50$. (b) - Evolução da projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, com $r = 0.1$ e $k = 100$.

6.2.2 Modelo Logístico generalizado

O modelo logístico generalizado é dado pela equação

$$\frac{dx}{dt} = r_o x^{a_o} \left[1 - \left(\frac{x}{k_o} \right)^{b_o} \right]^{c_o}, \quad x(0) = x_o > 0, \quad (6.3)$$

no qual os parâmetros r_o, a_o, b_o, c_o e k_o são reais positivos. Notemos que, de maneira geral, quando o parâmetro $c_o > 0$ é um número racional, a Equação (6.3) pode não estar bem definida para $x_o > k_o$. Assim, consideramos aqui apenas o caso em que $c_o \in \mathbb{N}$.

Tsoularis (2002) apresenta uma relação da equação acima com outros modelos de crescimento inibidos como as equações de von Bertalanfy e Richards.

Assim como o modelo de crescimento logístico, a equação acima admite dois pontos de equilíbrio: $x_e = k_o$ e $y_e = 0$, sendo que este último é instável. O fluxo determinístico $\varphi_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ gerado pela Equação (6.3) converge para o ponto de equilíbrio $x_e = k_o$ para toda condição inicial $x_o \in (0, k_o)$. Além do mais, como $\varphi_t(x_o)$ é crescente com relação a t , então o ponto de equilíbrio x_e atrai conjuntos compactos contidos em $(0, k_o)$ para qualquer configuração dos parâmetros. A convergência para o caso em que $x_o > k_o$ depende fundamentalmente da escolha do parâmetro c_o . Se c_o é um número natural par, então a solução se afasta de $\chi_{\{k_o\}}$ enquanto que se $c_o \in \mathbb{N}$ é ímpar, então $\varphi_t(x_o) \rightarrow k_o$ quando $t \rightarrow \infty$, para todo $x_o > k_o$.

O fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ gerado pela equação acima tem $\chi_{\{0\}}$ e $\chi_{\{k_o\}}$ como pontos de equilíbrio. Assim como para o caso determinístico, o ponto de equilíbrio $\chi_{\{0\}}$ é instável. Se a condição inicial fuzzy \mathbf{x}_o é tal que $[\mathbf{x}_o]^0 \subset (0, k_o)$ então temos que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \chi_{\{k_o\}}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Incertezas sobre os parâmetros

Suponha que além de incertezas sobre a condição inicial desejamos também considerar as incertezas nos parâmetros $p_o = (r_o, a_o, b_o, k_o)$. Para que possamos fazer uso dos resultados apresentados nos capítulos anteriores devemos então considerar o fluxo determinístico $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$ gerado pela equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_o x^{a_o} \left[1 - \left(\frac{x}{k_o} \right)^{b_o} \right]^{c_o}, & x(0) = x_0 > 0, \\ \frac{dp}{dt} = 0, & p(0) = p_o = (r_o, a_o, b_o, k_o), \end{cases} \quad (6.4)$$

no qual

$$U \times P = \{(x_o, p_o) \in \mathbb{R}_+^5 : x_o, r_o, a_o, b_o \text{ e } k_o \text{ positivos}\}.$$

Somente para simplificar a análise, vamos supor que $c_o \in \mathbb{N}$ é ímpar.

Para todo $(x_o, p_o) = (x_o, r_o, a_o, b_o, k_o) \in U \times P$ o fluxo determinístico ψ_t converge para o ponto de equilíbrio $y_e = (k_o, r_o, a_o, b_o, k_o)$. Podemos então ver y_e como a função

$$\begin{aligned} y_e: U \times P &\rightarrow U \times P \\ (x_o, p_o) &\rightarrow (k_o, p_o). \end{aligned}$$

onde $p_o = (r_o, a_o, b_o, k_o)$.

Seja $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$. De acordo com a Proposição 3.8, temos que $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$. Se $\mu_{\mathbf{y}_o} : U \times P \rightarrow [0, 1]$ é a função de pertinência de \mathbf{y}_o então a função de pertinência do ponto de equilíbrio é

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, r, a, b, k) = \begin{cases} \sup_{x_o \in U} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, r, a, b, k) & \text{se } x = k, \\ 0 & \text{se } x \neq k. \end{cases}$$

Por definição, a projeção $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ deste ponto de equilíbrio tem função de pertinência

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{(r,a,b,k)} \mu_{\mathbf{y}_e}(x, r, a, b, k).$$

No entanto, desde que $\mu_{\mathbf{y}_e}(x, r, a, b, k) = 0$ se $x \neq k$, então

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{(r,a,b,k)} \mu_{\mathbf{y}_e}(x, r, a, b, k) = \sup_{(r,a,b)} \mu_{\mathbf{y}_e}(x, r, a, b, x).$$

Em termos da condição inicial \mathbf{y}_o , temos:

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \sup_{(x_o, r, a, b)} \mu_{\mathbf{y}_o}(x_o, r, a, b, x).$$

6.2.3 Modelo de von Bertalanffy generalizado

Como já apresentamos nos capítulos anteriores, o modelo de von Bertalanffy generalizado é dado pela equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = a_o x^{c_o} - b_o x, \quad x(0) = x_o > 0. \quad (6.5)$$

O ponto de equilíbrio para o fluxo gerado por esta equação é dado por

$$x_e(x_o) = \left(\frac{a_o}{b_o} \right)^{\frac{1}{1-c_o}}$$

que é assintoticamente estável para todo a_o, b_o e c_o positivos, $c_o < 1$. Para todo $x_o > 0$ o fluxo determinístico $\varphi_t(x_o)$ converge para o ponto de equilíbrio x_e .

Seja então o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ gerado pela equação acima, $U = \mathbb{R}_+^*$. De acordo com o Teorema 3.6, para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ temos que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \chi_{\{x_e\}}$.

Subjetividade nos parâmetros

No Exemplo 3.5 analisamos a Equação (6.5) considerando incertezas apenas no parâmetro $a_o > 0$. Suponha agora que tanto os parâmetros, $p_o = (a_o, b_o, c_o)$, quanto a condição inicial sejam subjetivos. Assim, devemos aplicar a extensão de Zadeh sobre o fluxo $\psi_t : U \rightarrow U$ gerado pela equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_o x^{c_o} - b_o x, & x(0) = x_o > 0, \\ \frac{dp}{dt} = 0, & p(0) = p_o = (a_o, b_o, c_o), \end{cases} \quad (6.6)$$

no qual $U = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w, x, y \text{ e } z \text{ positivos}\}$. O ponto de equilíbrio não nulo para o fluxo ψ_t é dado por $y_e(x_o, p_o) = (x_e(x_o, p_o), p_o)$, no qual

$$x_e(x_o, p_o) = x_e(x_o, a_o, b_o, c_o) = \left(\frac{a_o}{b_o} \right)^{\frac{1}{1-c_o}}. \quad (6.7)$$

Como $\varphi_t(x_o, p_o)$ converge para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável $x_e(x_o, p_o)$ para todo $(x_o, p_o) \in U$, então, pela Proposição 3.8, o fluxo fuzzy $\hat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \hat{y}_e(\mathbf{y}_o)$.

Considerando que $\mathbf{y}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$ então, de acordo com o que discutimos no Capítulo 3,

a função de pertinência do ponto de equilíbrio é dada por:

$$\mu_{\mathbf{y}_e}(x, a, b, c) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{p}_o}(a, b, c) & \text{se } a = bx^{1-c}, \\ 0 & \text{se } a \neq bx^{1-c}. \end{cases}$$

Podemos ainda determinar a projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$ sobre o subespaço $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$. Como vimos no Capítulo 4, tal projeção pode ser obtida pela extensão de Zadeh do fluxo $\varphi_t(x_o, p_o)$ gerado pela Equação (6.5). Isto é, se $\bar{\mathbf{y}}$ é a projeção de $\hat{\psi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R}_+^*)$ então $\bar{\mathbf{y}} = \hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o, \mathbf{p}_o)$. Desta forma, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, os α - níveis da projeção $\bar{\mathbf{y}}$ são os intervalos $[y_m^\alpha(t), y_M^\alpha(t)]$ no qual $y_m^\alpha(t)$ e $y_M^\alpha(t)$ são o mínimo e o máximo respectivamente do conjunto

$$[\bar{\mathbf{y}}]^\alpha = \{\varphi_t(x_o, a_o, b_o, c_o) : (x_o, a_o, b_o, c_o) \in [\mathbf{y}_o]^\alpha\}.$$

Scapim (2008) utiliza o fluxo fuzzy gerado pelo modelo de von Bertalanffy generalizado para estimativa de pesos de diferentes espécies de animais, considerando que apenas o parâmetro de alometria $c_o > 0$ é subjetivo.

Como discutido na Seção 5.2.1 do Capítulo 4, a projeção $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+)$ converge para o ponto $\bar{\mathbf{x}} = \hat{x}_e(\mathbf{y}_o)$ quando $t \rightarrow \infty$. A extensão de Zadeh da solução da aplicação (6.7), com $\mathbf{y}_o = (\chi_{\{x_o\}}, \chi_{\{a_o\}}, \chi_{\{b_o\}}, \mathbf{c}_o)$, tem função de pertinência:

$$\mu_{\bar{\mathbf{x}}}(x) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{c}_o}(\bar{c}) & \text{se } \exists \bar{c} \in (0, 1) \text{ tal que } x^{1-\bar{c}} = (a/b), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na Figura 6.2, temos as estimativas de peso para humanos e suínos, respectivamente. A condição inicial em ambos os casos é da forma $\mathbf{y}_o = (\chi_{\{x_o\}}, \chi_{\{a_o\}}, \chi_{\{b_o\}}, \mathbf{c}_o)$. Em (a), o parâmetro \mathbf{c}_o é o número fuzzy triangular $\mathbf{c}_o = (0.7340/0.7500/0.7623)$, $x_o = 3.5$, $a_o = 0.6328$ e $b_o = 0.3156$. Em (b) temos: $\mathbf{c}_o = (0.9787/0.9794/0.9799)$, $x_o = 1.5$, $a_o = 0.6813$ e $b_o = 0.6096$. Tanto em (a) quanto em (b) utilizamos escalas de tempo apenas para ilustrar o comportamento da solução fuzzy.

Em se tratando de aplicações de modelos unidimensionais, em muitas ocasiões, estamos interessados em determinar quando ocorre um crescimento máximo. Quando se aplica uma equação de crescimento inibido determinística como modelo de crescimento para peso de

animais de corte, o tempo de abate ideal é exatamente o ponto de inflexão da solução. De fato, se o animal for abatido antes há uma perda pois não foi atingido todo o potencial de ganho de peso. Se for abatido depois corre-se o risco de perder dinheiro na relação custo versus ganho de peso pois a partir do ponto de inflexão ocorre uma diminuição no ritmo de crescimento. Na prática os criadores abatem o animal num tempo maior do que o tempo de inflexão. Em Ceconello et al. (2008), estudamos modelos de crescimento inibido com o objetivo de determinar quando o suporte da solução fuzzy atinge a maior amplitude. Conforme resultados teóricos obtidos naquele trabalho estão de acordo com o que é feito na prática.

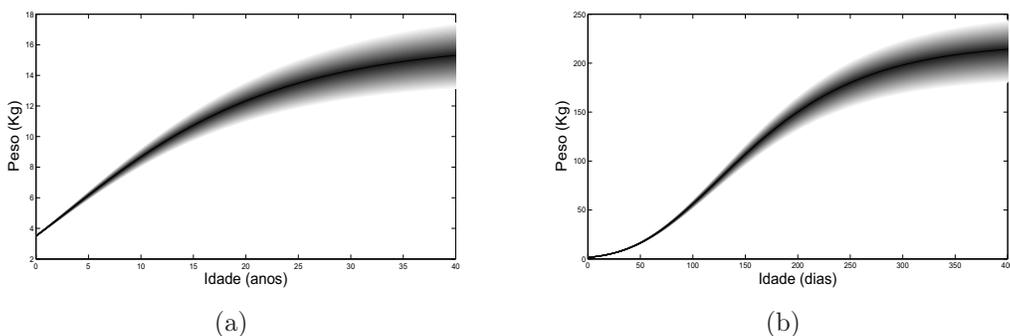


Figura 6.2: Soluções fuzzy para o modelo de von Bertalanffy generalizado considerando incerteza apenas no parâmetro de alometria.

6.3 Modelos bidimensionais com condição inicial fuzzy

6.3.1 Modelo de Lotka - Volterra

O modelo presa - predador clássico de Lotka - Volterra é dado pelo sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 - rx_1x_2, & x_1(0) = x_{01} > 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = -bx_2 + sx_1x_2, & x_2(0) = x_{02} > 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Como vimos no primeiro capítulo, para qualquer condição inicial, a solução $\varphi_t : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ da Equação 6.8 gera uma órbita periódica estável. O período de cada órbita periódica do modelo de Lotka - Volterra depende da condição inicial (Waldvogel, 1983).

Como a órbita periódica $\gamma(x_{01}, x_{02})$ é estável, então a Proposição 4.12 garante que o conjunto periódico $\gamma(x_{01}, x_{02})$ é estável para o fluxo fuzzy.

Embora cada ponto não nulo no quadrante positivo seja periódico, de maneira geral não podemos usar o Teorema 4.5 para garantir a existência de pontos periódicos para o fluxo fuzzy, uma vez que o período depende da condição inicial. Assim, a análise de comportamento do fluxo fuzzy gerado pelo modelo de Lotka - Volterra pode ser feita de maneira similar à apresentada no Exemplo 4.8.

A região $V \subset \mathbb{R}_+^2$ compreendida entre duas órbitas periódicas determinísticas distintas, γ_1 e γ_2 , é uma região invariante. Desta forma, a Proposição 4.13 garante que o conjunto V formado pelos pontos $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ com $[\mathbf{x}]^0$ contido em V , é um conjunto invariante pelo fluxo fuzzy. Como o conjunto V é limitado, então dada uma condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}_+^2$ com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset V$, temos que o conjunto $\omega([\mathbf{x}_o]^0)$ é compacto, invariante e atrai $\varphi_t([\mathbf{x}_o]^0)$. Logo, o Corolário 4.18 garante que o conjunto $\omega([\mathbf{x}_o]^0)$ atrai o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$.

Na Figura 6.3 temos a representação gráfica de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ nos instantes $t = 55$ e $t = 85$. A condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ é o produto cartesiano fuzzy entre

$$\mu_{\mathbf{x}'_o}(x) = \max\{0.25(x - 4)(8 - x), 0\}$$

e $\chi_{\{5\}}$, ou seja, $\mathbf{x}_o = (\mathbf{x}'_o, \chi_{\{5\}})$. Desta forma, estamos considerando que apenas a quantidade de presas é subjetiva. Tomamos tal condição inicial para simplificar a visualização de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ no espaço de fase.

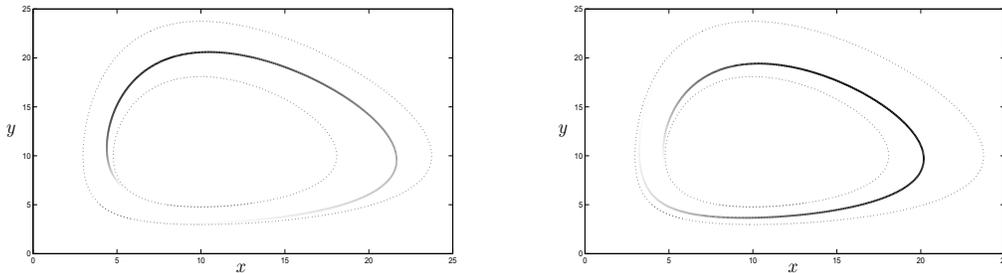


Figura 6.3: Gráfico de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ para $t = 55$ e $t = 85$.

6.3.2 Modelo de Holling - Tanner

No Exemplo 1.5 no Capítulo 1, apresentamos a análise qualitativa para o modelo presa - predador de Holling - Tanner. Este modelo apresenta algumas características que o tornam mais aplicável do que o modelos de Lotka - Voltera. As soluções do modelo de Holling - Tanner apresentam características que dependem apenas dos parâmetros da equação (Rai et al., 1991). Vimos que, sob certas configurações dos parâmetros, o modelo pode apresentar um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o qual a solução converge, para toda condição inicial. Quando o ponto de equilíbrio é instável, usamos o teorema de Poincaré - Bendixson para mostrar que a equação admite uma órbita periódica que atrai as órbitas das soluções com condições iniciais não nulas.

Nesta seção, fazemos uma análise qualitativa do modelo de Holling - Tanner quando as condições iniciais são incertas. Mostramos que o fluxo fuzzy gerado pela solução da equação

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1\left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \left(\frac{m}{x_1 + d}\right)x_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_2\left(1 - b\frac{x_2}{x_1}\right), \end{cases} \quad (6.9)$$

pode apresentar um ponto de equilíbrio assintoticamente estável ou uma órbita periódica.

Os pontos de equilíbrio para o modelo de Holling - Tanner são $x_e = (0, 0)$, $y_e = (k, 0)$ e $z_e = (z, z/b)$, onde z é a raiz positiva da equação

$$z^2 - \left(k - d - \frac{mk}{rb}\right)z - kd = 0.$$

Os dois primeiros são pontos de equilíbrio instáveis enquanto que a estabilidade de z_e vai depender da escolha dos parâmetros da Equação (6.9). Porém, o fato de z_e ser assintoticamente estável para determinados valores de parâmetros não significa que a Equação (6.9) não admite órbitas periódicas. Gasull et al. (1997) mostraram que quando z_e é assintoticamente estável, o modelo de Holling - Tanner pode apresentar ao menos duas órbitas periódicas, sendo ao menos uma delas assintoticamente estável.

Consideremos agora o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ gerado pela solução do modelo

de Holling - Tanner e seja $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$.

Como a origem é um ponto de equilíbrio instável para a equação acima, então o ponto de equilíbrio fuzzy $\mathbf{x}_e = \chi_{\{(0,0)\}}$ é instável para o fluxo fuzzy. Da mesma forma, temos também que o ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \chi_{\{(k,0)\}}$ é instável para $\hat{\varphi}_t$. Notemos no entanto que o fluxo determinístico $\varphi_t(x_{01}, x_{02})$ é atraído pelo ponto de equilíbrio $(k, 0)$ quando $x_{02} = 0$. Assim, o Teorema 3.6 garante que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio \mathbf{y}_e para todo \mathbf{x}_o satisfazendo $[\mathbf{x}_o]^0 \subset (0, \infty) \times \{0\}$.

Se o ponto de equilíbrio não nulo z_e é instável então o fluxo determinístico admite ao menos uma órbita periódica assintoticamente estável. Neste caso, o conjunto periódico fuzzy γ determinado pela órbita periódica determinística γ é uma conjunto assintoticamente estável. De acordo com a Proposição 4.12, se \mathbf{x}_o é tal que $[\mathbf{x}_o]^0$ está contido na região de atração $A(\gamma)$ da órbita periódica determinística então $\varphi_t(\mathbf{x}_o)$ converge para uma órbita periódica fuzzy que está contida no conjunto γ .

Quando o ponto de equilíbrio z_e é assintoticamente estável o ponto de equilíbrio fuzzy $\mathbf{z}_e = \chi_{\{(z_e, z_e/b)\}}$ é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy e atrai $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$ para qualquer \mathbf{y}_o com $[\mathbf{y}_o]^0$ contido na região de atração $A(z_e)$ de z_e . Se z_e é globalmente assintoticamente estável então a região de atração de z_e é o quadrante positivo do plano cartesiano, isto é, $A(z_e) = (0, \infty) \times (0, \infty)$. Neste caso, o ponto de equilíbrio fuzzy \mathbf{z}_e atrai globalmente o fluxo fuzzy.

Podemos ter também z_e assintoticamente estável e ao menos uma órbita periódica assintoticamente estável. Neste caso, se $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A(z_e)$ então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{z}_e = \chi_{\{z_e\}}$ quanto $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $[\mathbf{x}_o]^0$ está contido na região de atração $A(\gamma)$ da órbita periódica determinística γ então, pela Proposição 4.12, $\varphi_t(\mathbf{x}_o)$ converge para uma órbita periódica fuzzy que está contida no conjunto γ .

Para condições iniciais $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ fora das regiões de atração não existe uma maneira geral para a análise do comportamento de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ ao longo do tempo.

As Figuras 6.4 e 6.5 representam a evolução do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ com condição inicial \mathbf{x}_o dada pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \max\{1 - 0.05(x - 30) - 0.01(y - 220), 0\}.$$

Na Figura 6.4, os parâmetros para o modelo de Holling - Tanner são: $r = 0.2$; $k = 100$;

$m = 0.03$; $d = 20$; $a = 0.02$ e $b = 0.155$. Para estes parâmetros, o ponto de equilíbrio não nulo da equação Equação (6.9) é assintoticamente estável.

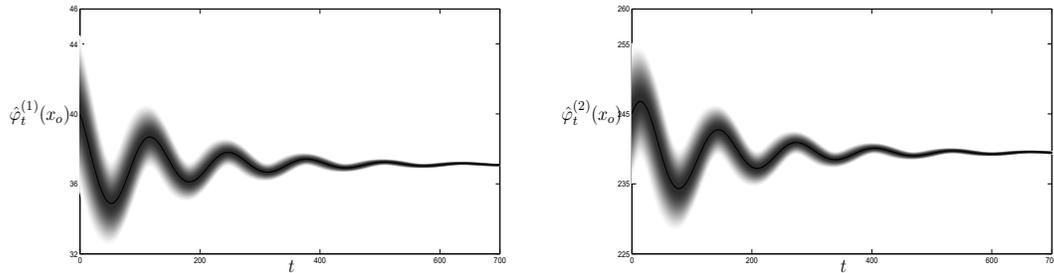


Figura 6.4: Evolução das projeções de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre os eixos x e y respectivamente.

No caso em que $b = 0.12$, o ponto de equilíbrio z_e é instável e a Equação (6.9) possui uma solução periódica e a órbita periódica γ gerada por esta solução é assintoticamente estável. Assim, o fluxo fuzzy converge para uma órbita periódica fuzzy. A Figura 6.5 ilustra a o comportamento das projeções de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ao longo do tempo.

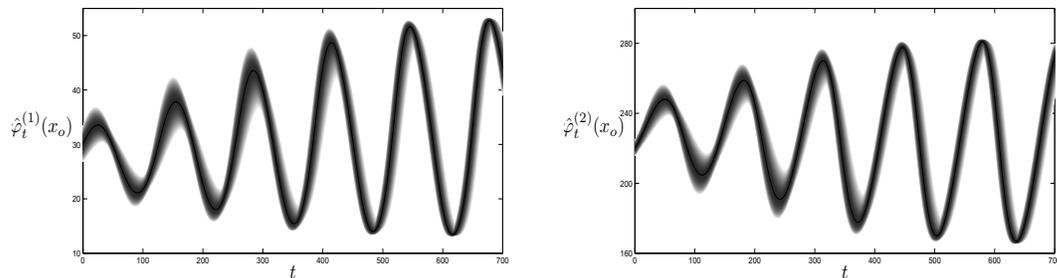


Figura 6.5: Evolução das projeções de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre os eixos x e y respectivamente.

6.4 Modelos com três variáveis de estado

6.4.1 Modelo de epidemiologia *SIR*

Considerado um dos primeiros modelos para explicar a disseminação de doenças infecciosas em uma população de indivíduos, o modelo proposto por Kermack e McKendrick (1927) assume que uma população de tamanho constante, $N > 0$, pode ser subdividida

em três distintas classes: Suscetíveis, S ; Infecciosos, I ; e Removidos, R . Os suscetíveis são indivíduos que estão sujeitos a contrair a doença quando em contato com os infecciosos. Os infecciosos são aqueles indivíduos portadores e com capacidade de transmitir a doença para os suscetíveis. Os indivíduos que após contraírem a doença adquirem imunidade e perdem a capacidade de transmissão da doença formam a classe dos removidos.

O modelo de Kermack e McKendrick, denominado modelo SIR , assume igual probabilidade para o encontro entre dois indivíduos quaisquer da população. Cada indivíduo na classe dos infecciosos é assumido poder transmitir a doença para rN indivíduos por unidade de tempo, onde $N > 0$ é o tamanho da população. Desde que a fração de encontro entre infecciosos e suscetíveis é (S/N) então $(rN)(S/N)I$ é quantidade de novos indivíduos infecciosos por unidade de tempo. Assumimos também que transferência de infecciosos para a classe dos removidos é proporcional à quantidade de infecciosos.

Denotando por $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ o número de indivíduos em cada uma das classes e levando em consideração as hipóteses acima, o modelo SIR é então

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI, & S(0) = S_o > 0, \\ \frac{dI}{dt} = rSI - aI, & I(0) = I_o > 0, \\ \frac{dR}{dt} = aI, & R(0) = R_o \geq 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

onde $r > 0$ é o taxa de infecção e $a > 0$ é a taxa de remoção dos infecciosos; $(1/a)$ é o período de tempo no estágio infeccioso ou o período de permanência da doença no organismo do indivíduo.

A questão chave em modelos de epidemiologia é identificar, a partir das condições iniciais e parâmetros, quando uma situação epidêmica ou endêmica pode ocorrer. Observamos que quando $S_o < (a/r)$ temos que

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = I_o(rS_o - a) < 0.$$

A equação dos suscetíveis garante que $S(t) \leq S_o$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e portanto

$$\frac{dI}{dt} = I(rS - a) < 0$$

para todo $t > 0$. Assim $I(t)$ é decrescente e $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, se $S_o > (a/r)$ então $I(t)$ cresce inicialmente e então dizemos que temos uma situação epidêmica. Como $S(t)$ decresce com o tempo então existe um T tal que $S(T) < (a/r)$.

Logo,

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=T} = I(T)(rS(T) - a) < 0$$

e isto implica que $I(t)$ é decrescente para $t > T$. Assim temos $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para quaisquer condições iniciais e parâmetros (Murray, 2002).

Observemos ainda que

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

de modo que $S(t) + I(t) + R(t) = S_o + I_o + R_o$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Consideremos agora incertezas nas condições iniciais S_o , I_o e R_o . Pelas análises apresentadas anteriormente, podemos concluir que o fluxo determinístico gerado pelo modelo SIR converge para o ponto de equilíbrio não trivial $x_e(S_o, I_o, R_o) = (0, 0, S_o + I_o + R_o)$ para todo $(S_o, I_o, R_o) \in A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z \geq 0\}$.

De acordo com o Teorema 3.6, para cada condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3)$ com α - níveis contidos no conjunto A , o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3) \rightarrow (\mathbb{R}_+^3)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3)$ que é a imagem de \mathbf{x}_o pela aplicação $\hat{x}_e : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3) \rightarrow (\mathbb{R}_+^3)$ obtida pela extensão de Zadeh de $x_e : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$. O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \hat{x}_e(\mathbf{x}_o)$ neste caso possui função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_e}(S, I, R) = \begin{cases} \sup_{S_o+I_o+R_o=R} \mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I_o, R_o), & \text{se } S = I = 0, \\ 0 & \text{se } S \neq 0 \text{ ou } I \neq 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

As projeções do ponto de equilíbrio sobre os eixos S , I e R são os pontos $\mathbf{x}_1 = \chi_{\{0\}}$, $\mathbf{x}_2 = \chi_{\{0\}}$ e

$$\mu_{\mathbf{x}_3}(R) = \sup_{S_o+I_o+R_o=R} \mu_{\mathbf{x}_o}(S_o, I_o, R_o).$$

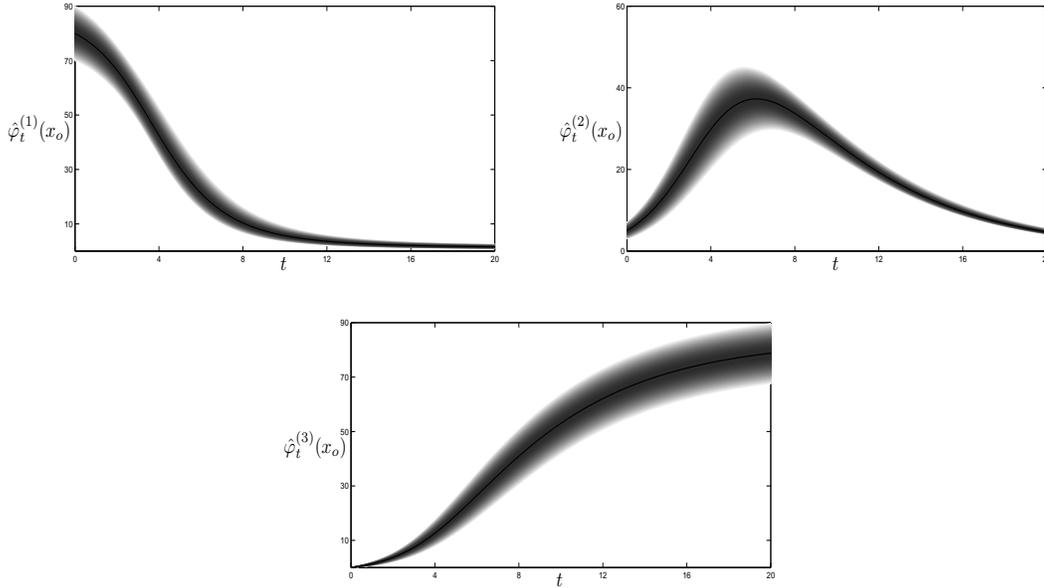


Figura 6.6: Evolução das projeções de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre os eixos S , I e R respectivamente.

A Figura 6.6 mostra a evolução com o tempo das projeções do fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$. Os parâmetros são $r = 0.01$ e $a = 0.2$. A condição inicial \mathbf{x}_o é o produto cartesiano fuzzy entre \mathbf{x}'_o e $\chi_{\{0\}}$ onde

$$\mu_{\mathbf{x}'_o}(S_o, I_o) = \max\{1 - 0.01(S_o - 80)^2 - 0.25(I_o - 5)^2, 0\}.$$

Isto é, $\mathbf{x}_o = (\mathbf{x}'_o, \chi_{\{0\}})$. Neste caso, estamos considerando incertezas apenas sobre a quantidade de suscetíveis e infecciosos.

Aqui também podemos supor conhecida a quantidade de indivíduos, isto é, a população possui N indivíduos. Neste caso, as variáveis S , I e R estão relacionadas por $S+R+I = N$. Tomando uma condição inicial fuzzy \mathbf{x}_o obedecendo esta relação, ou seja, $S_o+R_o+I_o = N$ para todo $(S_o, R_o, I_o) \in [\mathbf{x}_o]^\alpha$ a expressão (6.11) garante que a solução fuzzy converge para o ponto de equilíbrio $\chi_{\{(0,0,N)\}}$.

6.4.2 Dois predadores e uma presa

Nesta seção, vamos analisar um modelo proposto por Farkas (2001) que representa a dinâmica populacional entre duas espécies de predadores competindo por uma única

espécie de presa.

Seja $y(t)$ a quantidade de presas no instante t e denotemos por $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a quantidade dos dois predadores, respectivamente. As equações que determinam a relação entre a presa e os predadores são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right) - \frac{m_1 y}{a_1 + y} x_1 - \frac{m_2 y}{a_2 + y} x_2, \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{m_1 y}{a_1 + y} x_1 - d_1 x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{m_2 y}{a_2 + y} x_2 - d_2 x_2. \end{array} \right. \quad (6.12)$$

O sistema de equações acima sintetiza as seguintes hipóteses para as espécies envolvidas na interação:

- Na ausência de predadores, a dinâmica populacional das presas se comporta seguindo o modelo logístico com capacidade suporte $K > 0$ e taxa de crescimento intrínseco $r > 0$;
- Na ausência de presas, ambas as espécies predadoras decrescem com taxas de mortalidade intrínsecas $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$;
- Para cada predador existe uma taxa máxima de natalidade $m_i > 0$; a constante positiva a_i , ($i = 1, 2$), é a quantidade de presas necessárias para que a taxa de natalidade do predador seja a metade da natalidade m_i (resposta funcional do tipo Holling II. Ver May e McLean (2007));
- A competição entre as espécies predadoras ocorre de maneira indireta, isto é, os predadores competem apenas por consumirem a mesma presa.

Segue diretamente do sistema de equações (6.12) que a taxa de crescimento do predador i é nula quando

$$\frac{m_i y}{a_i + y} x_i - d_i x_i = 0 \quad \text{ou} \quad y = \lambda_i = \frac{a_i d_i}{m_i - d_i}.$$

Quando $y(t)$ é maior do que o valor λ_i , a taxa de crescimento do predador i é positiva. Em contrapartida, se a quantidade de presas é menor do que λ_i então a taxa de crescimento do predador i é negativa e temos um decrescimento na população de predadores. Para simplificar a análise, vamos considerar aqui apenas o caso particular em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Olhando para a primeira equação de (6.12) podemos observar que a presença de predadores limita a quantidade de presas em um valor menor do que a capacidade suporte K . Isto implica que se $\lambda \geq K$ então temos $y(t) < \lambda$ e os predadores são extintos. Obviamente, se a taxa máxima de natalidade m_i é menor do que a taxa de mortalidade d_i então também temos a extinção dos predadores. Assim, para que a coexistência das espécies vamos exigir que

$$m_i > d_i \quad (i = 1, 2) \quad \text{e} \quad 0 < \lambda < K.$$

Os pontos de equilíbrio para o sistema (6.12) são $x_e = (0, 0, 0)$, $y_e = (K, 0, 0)$ e o conjunto

$$R = \left\{ (y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^3 : y = \lambda, \frac{m_1 x_1}{a_1 + \lambda} + \frac{m_2 x_2}{a_2 + \lambda} = r \left(1 - \frac{\lambda}{K} \right) \right\}.$$

Isto é, R é formado pelo segmento de reta que liga os pontos

$$p_1 = \left(\lambda, 0, \gamma \frac{(a_2 + \lambda)(K - \lambda)}{m_2 K} \right) \quad \text{e} \quad p_2 = \left(\lambda, \gamma \frac{(a_1 + \lambda)(K - \lambda)}{m_1 K}, 0 \right).$$

Por linearização não é difícil ver que a origem é um ponto de equilíbrio instável. Para $K > \lambda$, o ponto de equilíbrio $(K, 0, 0)$ é instável enquanto que para se $K \geq \lambda$ então $(K, 0, 0)$ é assintoticamente estável. Uma análise detalhada da estabilidade dos pontos de equilíbrio do modelo acima pode ser encontrada em Farkas (2001); Sáez et al. (2006); Ferreira e de Oliveira (2004).

A estabilidade dos pontos de equilíbrio que estão em R depende do valor da capacidade suporte K . Se $\lambda < K < a_2 + 2\lambda$ então todos os pontos de equilíbrio em R são estáveis e todas as soluções com condição inicial em \mathbb{R}_+^3 convergem para algum ponto em R . Por outro lado, se $K > a_1 + 2\lambda$ então os pontos de equilíbrio em R são instáveis. Suponha agora que $K \in [a_2 + 2\lambda, a_1 + 2\lambda]$. De acordo com os resultados apresentados por Farkas (2001), existe um $p_K \in R$ tal que o conjunto R_l formado pelos pontos do segmento de reta

ligando p_1 e p_K é instável enquanto que o conjunto R_r formado pelos pontos do segmento de reta que liga p_K e p_2 é um conjunto que atrai as órbitas do sistema de equações (6.12) para toda condição inicial em \mathbb{R}_+^3 . Mais precisamente, $R = R_l \cup \{p_K\} \cup R_r$ nos quais

$$R_l = \{p \in \mathbb{R}_+^3 : p = (1-s)p_1 + sp_K, s \in [0, 1)\}$$

$$R_r = \{p \in \mathbb{R}_+^3 : p = (1-s)p_K + sp_2, s \in (0, 1]\},$$

e o fluxo φ_t gerado por (6.12) converge para R_r quando $t \rightarrow \infty$.

Consideremos agora a aplicação $x_e : A \rightarrow R$ que associa para cada $x_o \in \mathbb{R}^3$ o ponto $x_e(x_o) \in R$ para o qual o fluxo $\varphi_t(x_o)$ gerado pelo sistema de equações (6.12) converge. Embora não seja possível determinar a aplicação $x_e(x_o)$ podemos mostrar que $x_e(x_o)$ é contínua em

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Com efeito, suponha que x_e não é contínua em algum $x_o \in A$. Isto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que para alguma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ com $x_n \rightarrow x_o$ temos $\|x_e(x_n) - x_e(x_o)\| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para este ε , existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_T(x_n) - x_e(x_n)\| < \varepsilon/3 \quad \text{e} \quad \|\varphi_T(x_o) - x_e(x_o)\| < \varepsilon/3.$$

Como

$$\|x_e(x_n) - x_e(x_o)\| \leq \|\varphi_T(x_n) - x_e(x_n)\| + \|\varphi_T(x_n) - \varphi_T(x_o)\| + \|\varphi_T(x_o) - x_e(x_o)\|$$

então, $\|\varphi_T(x_n) - \varphi_T(x_o)\| > \varepsilon/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isso é um absurdo pois φ_t é contínua.

Consideremos agora o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3)$ obtido pela extensão de Zadeh do fluxo determinístico φ_t gerado pelo sistema de equações (6.12). Se $K \leq \lambda$ então os únicos pontos de equilíbrio para o sistema determinístico são $(0, 0, 0)$ e $(K, 0, 0)$. Logo, $\chi_{\{(0,0,0)\}}$ e $\chi_{\{(K,0,0)\}}$ são os pontos de equilíbrio do fluxo fuzzy. A Proposição 3.4 garante também que $\chi_{\{(0,0,0)\}}$ é um ponto de equilíbrio instável enquanto que $\chi_{\{(K,0,0)\}}$ é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy.

Suponha agora que $K \in (\lambda, a_2 + 2\lambda)$. Neste caso, além da origem e do ponto $(K, 0, 0)$

cada ponto em R é também um ponto de equilíbrio para o fluxo determinístico. Para este caso, tanto $\chi_{\{(0,0,0)\}}$ quanto $\chi_{\{(K,0,0)\}}$ são ponto de equilíbrio instáveis para o fluxo fuzzy. Desde que R é um conjunto invariante assintoticamente estável para φ_t as proposições 4.13 e 4.16 garantem que o conjunto

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3) : [\mathbf{x}]^0 \subset R\}$$

é um conjunto invariante e assintoticamente estável para o fluxo fuzzy.

Cada ponto $\mathbf{x}_e \in R$ é um ponto de equilíbrio para $\hat{\varphi}_t$. Com efeito, tomemos a função identidade $I : R \rightarrow R$. Isto é, para todo $x \in R$ temos $I(x) = x$. Como $\varphi_t(I(\bar{x})) = I(\bar{x})$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $\bar{x} \in R$, o item (a) do Teorema 3.6 garante que $\hat{\varphi}_t(\hat{I}(\mathbf{x}_e)) = \hat{I}(\mathbf{x}_e)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}$. Mas a extensão de Zadeh \hat{I} de $I : R \rightarrow R$ é identidade em \mathbf{R} . Logo, temos que

$$\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{x}_e \in \mathbf{R}.$$

Como mostramos, existe uma função contínua $x_e : A \rightarrow R$ tal que $\varphi_t(x_o) \rightarrow x_e(x_o)$ que associa para cada $x_o \in A$ o ponto de equilíbrio $x_e(x_o) \in R$ para o qual o fluxo determinístico converge. Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3)$ com suporte em A , o item (b) do Teorema 3.6 garante então que o fluxo fuzzy converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}$ que é a imagem de \mathbf{x}_o pela aplicação \hat{x}_e obtida pela extensão de Zadeh de $x_e : A \rightarrow R$.

Novamente podemos ver algumas diferenças entre a Proposição 4.16 e o Teorema 3.6. A Proposição 4.16 garante que o conjunto $\mathbf{R} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3)$ é um conjunto assintoticamente estável, isto é, $\text{dist}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{R}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, o Teorema 3.6 garante a existência de um ponto em $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}$ tal que $d_\infty(\varphi_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Com os mesmos argumentos usados anteriormente podemos concluir que quando $K \in [a_2 + 2\lambda, a_1 + 2\lambda]$ o conjunto \mathbf{R} também é um conjunto invariante para o fluxo fuzzy. Neste caso, o conjunto

$$\mathbf{R}_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^3) : [\mathbf{x}]^0 \subset R_r\}$$

é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy. Além disso, podemos também concluir que o fluxo fuzzy converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}_r$ que é a imagem de \mathbf{x}_o pela aplicação \hat{x}_e obtida pela extensão de Zadeh de $x_e : A \rightarrow R$.

O comportamento das projeções do fluxo fuzzy gerado pela Equação (6.12) está re-

presentado na Figura 6.7. A condição inicial \mathbf{x}_o tem função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y, z) = \max\{1 - (x - 7)^2 - (y - 12)^2 - (z - 10)^2, 0\}.$$

Os parâmetros para Equação (6.12) são: $r = 0.1$; $K = 10$; $a_1 = 20$; $m_1 = 0.09$; $d_1 = 0.01$; $a_2 = 10$; $m_2 = 0.1$ e $d_2 = 0.02$.

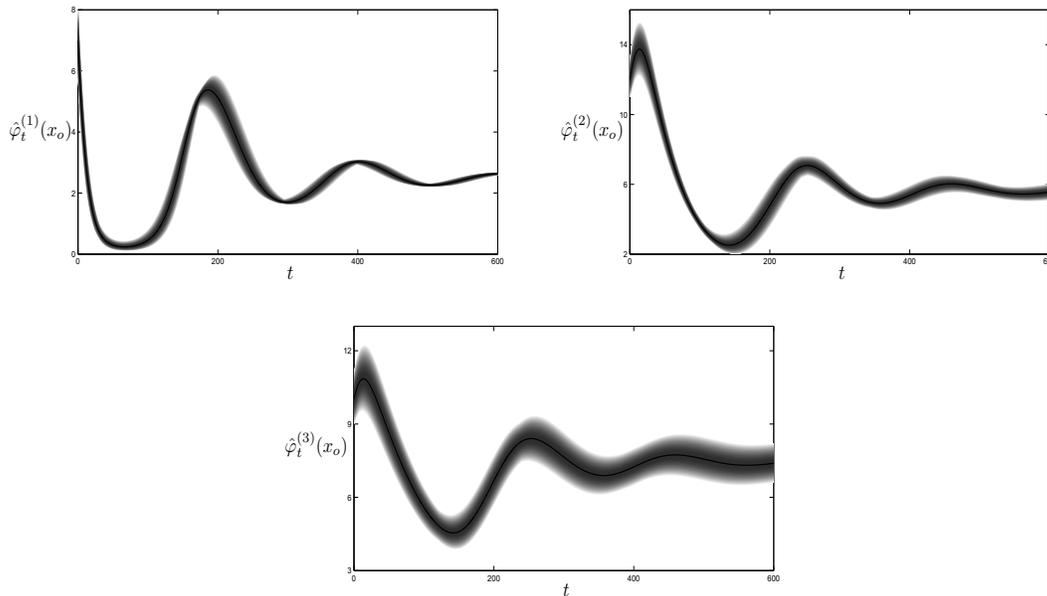


Figura 6.7: Evolução das projeções de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ sobre os eixos x , y e z respectivamente.

Como podemos ver na Figura 6.7, a solução fuzzy converge para um ponto de equilíbrio que não é crisp, conforme previsto pelos resultados teóricos.

6.5 Conclusão

As ferramentas de análise qualitativa desenvolvidas nos capítulos anteriores foram utilizadas neste capítulo para explicar o comportamento assintótico da solução fuzzy de diversos modelos.

Através do Teorema 3.6 e da Proposição 3.8 mostramos a existência de pontos de equilíbrio fuzzy não crisp para os modelos unidimensionais e tridimensionais. As Proposições 5.1

e 5.3 foram utilizadas para a construção da representação gráfica das projeções das soluções fuzzy.

Na análise qualitativa da solução fuzzy do modelo de Lotka - Volterra foram utilizados os resultados desenvolvidos na Seção 4.3. Mostramos também que sob certas condições, a solução fuzzy do modelo de Holling - Tanner converge para uma órbita periódica. A existência de órbitas periódicas para a solução fuzzy do modelo de Holling - Tanner é garantida pelos Teoremas 4.12 e 4.20.

Conclusão

Neste trabalho desenvolvemos alguns resultados fundamentais para a análise assintótica de soluções fuzzy de equações diferenciais. Tais soluções fuzzy são obtidas através da extensão de Zadeh de soluções determinísticas. Destacamos aqui alguns destes resultados.

No Capítulo 3 estudamos condições para existência de pontos de equilíbrio fuzzy. O Teorema 3.6 garante a existência e convergência da solução fuzzy para pontos de equilíbrio não crisp. O mesmo teorema também determina a função de pertinência do ponto de equilíbrio para o qual a solução fuzzy converge. Para o caso em que os parâmetros também são considerados incertos, a Proposição 3.8 garante a existência da solução fuzzy para pontos de equilíbrio não crisp.

Mostramos ainda que os resultados apresentados no Capítulo 3 generalizam alguns resultados sobre a existência de pontos de equilíbrio já conhecidos.

A periodicidade do fluxo fuzzy é estudada no Capítulo 4. Naquele capítulo, mostramos que a existência de pontos periódicos para o fluxo determinístico é uma condição necessária e suficiente para a existência de pontos periódicos para o fluxo fuzzy (Teoremas 4.1, 4.2 e 4.5). No Teorema 4.9, mostramos que a existência de órbitas periódicas determinísticas assegura a existência de conjuntos periódicos invariantes para o fluxo fuzzy cuja estabilidade coincide com a estabilidade da órbita determinística. Quando a órbita periódica determinística é assintoticamente estável, o Teorema 4.12 garante que para cada condição inicial fuzzy na região de atração da órbita determinística, existe uma órbita periódica fuzzy, estritamente contida no conjunto periódico definido pela órbita determinística, que atrai a solução fuzzy.

No Teorema 4.16 estabelecemos condições para a estabilidade de conjuntos invariantes pelo fluxo fuzzy. Como vimos pelos exemplos apresentados, este teorema é importante

pois generaliza alguns resultados anteriores e pode ser aplicado em situações onde os demais resultados não se aplicam.

Ainda no Capítulo 4, destacamos os Teoremas 4.19 e 4.20 para fluxos fuzzy gerados por equações bidimensionais. O primeiro deste teoremas fornece condições para existência de órbitas periódicas fuzzy para o fluxo fuzzy enquanto que o segundo, garante a convergência da solução fuzzy para órbitas periódicas fuzzy. Estes dois resultados são versões análogas ao teorema de Poincaré - Bendixson para fluxos determinísticos.

Do Capítulo 5 destacamos três resultados. As Proposições 5.1 e 5.3 tratam das projeções das soluções fuzzy sobre subespaços apropriados do espaço de fase. Além de consequências teóricas, tais resultados se mostraram importantes na elaboração de gráficos para a solução fuzzy de equações com várias variáveis. Na Proposição 5.4 mostramos que a função de pertinência da solução fuzzy é a solução da equação diferencial parcial, mais conhecida como equação do transporte. Esta proposição nos permite interpretar as soluções via extensão de Zadeh sobre a condição inicial como sendo um transporte determinado pelo campo vetorial da equação diferencial ordinária. Isto abre a possibilidade de utilizar técnicas de equações diferenciais parciais para compreendermos o comportamento do fluxo fuzzy.

Finalmente, no Capítulo 6, exploramos as ferramentas de análise qualitativa desenvolvidas nos capítulos anteriores para compreender o comportamento de soluções fuzzy de diversos modelos da Biomatemática. Alguns modelos unidimensionais bem como o modelo *SIR* e o modelo que descreve interação entre dois predadores e uma presa, apresentam pontos de equilíbrio não crisp. Já o modelo presa - predador de Holling - Tanner pode apresentar órbitas periódicas fuzzy.

Pelos resultados que obtivemos no decorrer deste trabalho podemos notar que, diferentemente das soluções fuzzy obtidas via H - derivada, as soluções fuzzy obtidas por extensão de Zadeh de soluções determinísticas apresentam características análogas às soluções determinísticas tais como, estabilidade de pontos de equilíbrio e soluções periódicas. Desta forma, acreditamos que as soluções fuzzy obtidas por extensão de soluções determinísticas devem também ser consideradas como uma ferramenta importante para estudos de modelos que envolvem incertezas.

Referências Bibliográficas

- Aliprantis, C. D. e Border, K. C. (2005). *Infinite Dimensional Analysis*. Springer, New York, 3rd edition.
- Allee, W. C., Emerson, O., Park, T., e Schmidt, K. (1949). *Principles of animal ecology*. Saunders, Philadelphia.
- Barros, L. C. (1997). *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP.
- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 de *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC.
- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (1997). On the continuity of the zadeh's extension. in "Seventh IFSA World Congress", Vol. II, Praga.
- Bassanezi, R. C., de Barros, L. C., e Tonelli, P. A. (2000). Attractors and asymptotic stability for fuzzy dynamical systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 113(3):473 – 483.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. HARBRA, São Paulo.
- Bhatia, N. P. e Szegö, G. P. (1967). *Dynamical Systems: Stability Theory and Applications*. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Spring - Verlag, New York.
- Birkhoff, G. D. (1966). *Dynamical Systems*, volume 9 de *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence.
- Buckley, J. J. e Feuring, T. (2000). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Systems*, 110(1):43–54.
- Cecconello, M. S. (2006). Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy. Master's thesis, IMECC - UNICAMP.

- Cecconello, M. S., Brandão, A. J. V., e Bassanezi, R. C. (2008). Sobre o ponto de inflexão em modelos de crescimento inibido com condição inicial fuzzy. *Biomatemática*, 18:81–98.
- Chueshov, I. D. (2002). *Introduction of the Theory of Infinite - Dimensional Dissipative Systems*. ACTA, Ukraine.
- Courchamp, F., Berec, L., e Gascoigne, J. (2008). *Allee effects in ecology and conservation*. Oxford University Press.
- Diamond, P. (2000). Stability and periodicity in fuzzy differential equations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8:583–590.
- Diamond, P. e Kloeden, P. (1994). *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. World Scientific, Singapore.
- Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*, volume 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society.
- Farkas, M. (2001). *Dynamical Models in Biology*. Academic Press, New York.
- Ferreira, J. C. M. (2010). Teorema de linearização para fluxos fuzzy. *Comunicação pessoal*.
- Ferreira, J. D. e de Oliveira, L. A. F. (2004). Hopf and zip bifurcation in a specific $n + 1$ -dimensional competitive system. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 8(1):1–18.
- Fullér, R. e Keresztfalvi, T. (1991). On generalization of nguyen’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 41(3):371 – 374.
- Gasull, A., Kooij, R. E., e Torregrosa, J. (1997). Limit Cycles in the Holling - Tanner Model. *Publicacions Matemàtiques*, 41:149–167.
- Hale, J. (1988). *Asymptotic Behavior of Dissipative System*, volume 25 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence.
- Hale, J. e Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcation*, volume 3 de *Text in Applied Mathematics*. Springer - Verlag, New York.
- Hale, J. K., Magalhães, L. T., e Oliva, W. M. (1991). *Dynamics in Infinite Dimensions*. Springer - Verlag, New York, 2 edition.
- Hartman, P. (1964). *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York.
- Hirsch, M. W. e Smale, S. (1974). *Differential, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, San Diego.

- Hüllermeier, E. (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5(2):117–137.
- Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, 24(3):301–318.
- Kandel, A. e Byatt, W. J. (1981). Fuzzy differential equations. in “Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society”, Tóquio.
- Kermack, W. O. e McKendrick, A. G. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 115:700–721.
- Klir, G. J. e Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*. Prentice Hall PTR, New Jersey.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley & Sons, New York.
- LeVeque, R. J. (1992). *Numerical Methods for Conservative Laws*. Lectures in Mathematics. Birkhäuser Verlag, 2 edition.
- May, R. e McLean, A. (2007). *Theoretical Ecology: Principles and Applications*. Oxford, New York, 3 edition.
- Milani, A. J. e Koksich, N. J. (2005). *An Introduction to Semiflows*. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall/CRC, New York.
- Mizukoshi, M. T. (2004). *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. PhD thesis, IMECC-UNICAMP.
- Mizukoshi, M. T., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2009). Stability of fuzzy dynamic systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(1):69–83.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction.*, volume 1. Springer, New York.
- Negoita, C. V. e Ralescu, D. A. (1975). *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. Wiley, New York.
- Nguyen, H. T. (1978). A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64:369–380.
- Nguyen, H. T. (1997). Fuzzy sets and probability. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):129 – 132.

- Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (2000). *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2nd edition.
- Oberguggenberger, M. e Pittschmann, S. (1999). Differential equations with fuzzy parameters. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 5:181–202.
- Puri, M. L. e Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Analysis and Applications*, 91:552–558.
- Rai, V., Kumar, V., e Pande, L. K. (1991). A new prey - predator model. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 21:261–263.
- Ralescu, D. A. (1992). A generalization of the representation theorem. *Fuzzy Sets Systems*, 51(3):309–311.
- Robinson, C. (1999). *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, New York, 2nd edition.
- Román-Flores, H. (1998). The of compactness $e(x)$. *Appl. Math. Lett*, 11(2):13–17.
- Román-Flores, H., Barros, L. C., e Bassanezy, R. C. (2001). A note on zadeh’s extensions. *Fuzzy Sets Systems*, 117:327–331.
- Rudin, W. (1964). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw - Hill, New York, 3rd edition.
- Sáez, E., Stange, E., e Szántó, I. (2006). Simultaneous zip bifurcation and limit cycles in three dimensional competition models. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 5(1):1–11.
- Saidi, F. B. e Jaballah, A. (2008). Uniqueness in the generalized representation by fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(16):2176 – 2184.
- Scapim, J. (2008). Modelo de von bertalanffy generalizado aplicado à curvas de crescimento animal. Master’s thesis, IMECC - UNICAMP.
- Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets Syst.*, 24(3):319–330.
- Souza, S. A. O. (2001). *Dissipatividade em Sistemas Dinâmicos Fuzzy Discretos*. PhD thesis, USP.
- Tsoularis, A. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*, 179(1):21–55.

- Vorobiev, D. e Seikkala, S. (2002). Towards the theory of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, 125(2):231–237.
- Waldvogel, J. (1983). The period in the volterra-lotka predator-prey model. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20:1264–1272.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.