



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

LUCAS ANGELO HERNANDES

**ISOMETRIAS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO
BRASIL E DO CANADÁ**

**ISOMETRIES IN COLLECTIONS OF MATHEMATICS TEXTBOOKS FROM BRAZIL
AND CANADA**

CAMPINAS - SP

2023

LUCAS ANGELO HERNANDES

ISOMETRIAS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO
BRASIL E DO CANADÁ

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
“Gleb Wataghin”, da Universidade Estadual de
Campinas, como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de Mestre em Ensino
de Ciências e Matemática, na Área de Ensino
de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Rúbia Barcelos
Amaral Schio.

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À
VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO, E
ORIENTADA PELA PROF.^A DRA. RÚBIA
BARCELOS AMARAL SCHIO.

CAMPINAS - SP

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

H43i Hernandez, Lucas Angelo, 1997-
Isometrias em coleções de livros didáticos de matemática do Brasil e do Canadá / Lucas Angelo Hernandez. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Rúbia Barcelos Amaral Schio.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Educação matemática. 2. Ensino fundamental. 3. Livros didáticos. 4. Isometria (Matemática). I. Amaral-Schio, Rúbia Barcelos. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Isometries in collections of mathematics textbooks from Brazil and Canada

Palavras-chave em inglês:

Mathematics education

Elementary school

Textbooks

Isometrics (Mathematics)

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Titulação: Mestre em Ensino de Ciências e Matemática

Banca examinadora:

Rúbia Barcelos Amaral Schio [Orientador]

Miriam Cardoso Utsumi

Beatriz Fernanda Litoldo

Data de defesa: 20-04-2023

Programa de Pós-Graduação: Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0002-0613-7430>

- Currículo Lattes do autor: <https://lattes.cnpq.br/8806922656126281>

COMISSÃO EXAMINADORA

DATA: 20/04/2023

Profª Drª Rúbia Barcelos Amaral Schio (Presidente e Orientadora)

IGCE – UNESP – Rio Claro (SP)

Profª Drª Miriam Cardoso Utsumi

PSIEM – Unicamp – Campinas (SP)

Profª Drª Beatriz Fernanda Litoldo

DECMT – UFTM – Uberaba (MG)

A Ata de defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação aos estudantes que tive a honra de ser professor e aos que ainda encontrarei pelo caminho. Ser professor é um sonho que realizo quando estou com vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Neide e Paulo, por todo amor e amparo nessa jornada e em toda a minha vida. Vocês estiveram ao meu lado em momentos muito difíceis vividos durante o mestrado, acompanharam de perto cada etapa e deram escuta aos desabafos que eu precisava fazer, sempre me ajudando a me curar das minhas inseguranças. Nas vezes em que eu quis desistir vocês seguraram a minha mão mostrando que estariam comigo em qualquer decisão que eu tomasse, mas nunca deixaram de dizer que acreditavam que eu conseguiria. Se eu consegui, é graças a vocês.

Agradeço à minha irmã, Jéssica, e à minha avó, Lourdes, que se mantiveram afetivamente presentes em mais essa trajetória. Já, mesmo você estando no Canadá nossa conexão não diminuiu. Obrigado por ser uma irmã tão parceira, por me ouvir, por me aconselhar e por me apoiar. Vó, você é fonte de inspiração e coragem. Obrigado por toda a força que você me mostrou.

Agradeço imensamente aos meus orientadores, Rúbia e Henrique. Eu não poderia ter uma orientadora melhor do que você, Rúbia. Obrigado por me ensinar tanto, pela generosidade em me aceitar como aluno e pela paciência com as minhas dificuldades. Para mim, você é exemplo de sensibilidade e excelência. Henrique, tudo isso começou por sua causa, desde a disciplina dada na graduação até a aposta de que eu poderia escrever um projeto de mestrado. Obrigado por confiar em mim mesmo quando eu não o fazia. No dia em que falei que não seria capaz de terminar o trabalho, você me disse que essa experiência me faria um professor melhor, porque agora eu entenderia o sentimento de alunos que queriam desistir de algo. Era o que eu precisava ouvir. Para sempre serei grato aos dois.

Agradeço à Bia, em quem encontrei uma veterana, uma orientadora e, o melhor de tudo, uma amiga. Obrigado por ceder seu tempo me ajudando com tanta dedicação e clareza. Dentre tantos dias difíceis vividos durante o mestrado, no pior deles foi a você que eu recorri. Com muito carinho você respondeu mensagens escritas em um momento de muita vulnerabilidade e me munuiu de forças para continuar. Obrigado por me ajudar a enxergar que a jornada era dura, mas que valeria a pena persistir. Você estava certa.

Agradeço às professoras da banca, Prof.^a Dra. Miriam Utsumi e, agora mais formalmente, Prof.^a Dra. Beatriz Litoldo, pela dedicação e assertividade em cada contribuição dada. Ter vocês como banca examinadora só aumentou o orgulho que eu sinto por este trabalho. Obrigado!

Agradeço ao grupo de pesquisa teorEMa – Interloquções entre Geometria e Educação Matemática – por me ensinar que a pesquisa acadêmica não é um caminho solitário. Aplaudo o empenho e a generosidade dos integrantes do grupo, vocês são inspiradores!

Agradeço ao meu namorado, Otávio, pela serenidade e torcida durante esses anos de mestrado. Foram muitos os momentos de desabafo que eu confiei em você para me tranquilizar. Obrigado por estar sempre ao meu lado.

Agradeço à minha grande amiga, Luana, por me acompanhar em todas as etapas da vida, inclusive nesta, e por dedicar tanta lealdade e paciência nessa amizade. Não há ninguém como você, no melhor sentido possível. Agradeço à Josi, por ser minha parceira de mestrado e graduação e por dividir comigo tantos momentos de apoio mútuo. Foram horas de ligações em que saí muito melhor do que cheguei. Você é uma referência para mim. Agradeço à Bri, que acompanhou momentos duros nesse percurso e que, com muita sensibilidade, sempre perguntou como estavam as coisas do “M”. Finalmente posso falar com mais leveza sobre o mestrado, obrigado por estar sempre por perto.

Agradeço às minhas madrinhas Nedir e Goreti que me encham de amor e carinho em todas as oportunidades, e agradeço à Liana, por toda positividade e acolhida. Vocês são muito especiais.

Agradeço aos amigos que ocupam um lugar de consideração único em meu coração. Felizmente para mim, a lista é grande: Phelipe, Prado, Amorim, Yasmin, Karol, Matheus, Marcela, Sidney, Isabela, Adriana, Emile, Ariane, Jheovany, Fred, Henrique, Daniel, Gabriel, Marcos, Bryan, Gabi, Mickey, Geraldo e Del.

Agradeço às comunidades escolares da E. E. Professor Antonio Vilela Junior e da E. E. Carlos Gomes pelas experiências maravilhosas vividas, em especial ao lado dos estudantes. Vocês me colocam em movimento e despertam a minha melhor versão. Aos colegas Rodrigo, Natália, Anete, Rose, Nara, Charles, Gabi, Matheus e Andreia, foi um prazer trabalhar com vocês. Agradeço à UNIVESP pela oportunidade engrandecedora de atuar como facilitador e orientador em cursos de Licenciatura.

Agradeço ainda a todos que torceram por mim e que contribuíram de alguma forma para a concretização desta etapa da minha vida. Obrigado!

“As viagens são assim, meu caro amigo, sabemos do seu propósito apenas depois de regressarmos.”

Mia Couto – O mapeador de ausências

RESUMO

O livro didático, dentre variadas definições, pode ser entendido como um material que é utilizado nos processos de ensino e de aprendizagem de um certo conhecimento. Diversos países do mundo possuem histórico de uso dos livros didáticos de Matemática na Educação Básica. Entre eles, estão o Brasil e o Canadá. Um conteúdo presente nos currículos de ambos os países são as Isometrias, tema da Geometria vinculado às Transformações Geométricas. Assim, essa pesquisa teve o objetivo central de compreender o tratamento sobre Isometrias dos livros didáticos de Matemática de uma coleção brasileira e outra canadense. Para tanto, a opção metodológica foi a abordagem qualitativa de pesquisa nas duas coleções de livros didáticos, sendo a brasileira oriunda do Programa Nacional do Livro e do Material Didático, edital de 2020, e a canadense da *Trillium List* publicada em 2005 e utilizada desde então. A análise considerou o desdobramento do conteúdo de Isometrias com relação às unidades de análise Conceituação, Exemplos e Tarefas. O referencial utilizado foi composto por matemáticos e educadores que desenvolveram trabalhos sobre as Isometrias com rigor conceitual e reflexões acerca do seu ensino. Os resultados produzidos envolveram a imprecisão do conceito de simetria, a aplicação das transformações em figuras ao invés de pontos, o delicado uso das cores nesse conteúdo e seu potencial estético, o modesto uso de vetores na translação, o ponto fixo das rotações e a questão da sobreposição no estudo das reflexões. Espera-se contribuir com considerações sobre a abordagem das Isometrias nos livros didáticos e a importância do conteúdo.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Fundamental; Livros Didáticos; Isometrias.

ABSTRACT

The textbook, among several definitions, can be understood as a material that is used in the teaching and learning processes of certain knowledge. Several countries in the world have a history of using Mathematics textbooks in Basic Education. Among them are Brazil and Canada. A content present in the curricula of both countries is Isometries, a Geometry theme linked to Geometric Transformations. Thus, this research had the main objective of understanding the treatment of Isometries in Mathematics textbooks from a Brazilian and a Canadian collection. To this end, the methodological option was the qualitative research approach in the two collections of textbooks, the Brazilian one coming from the Programa Nacional do Livro e do Material Didático, published in 2020, and the Canadian one from the Trillium List published in 2005 and used since then. The analysis considered the unfolding of the content of Isometries to the units of analysis Conceptualization, Examples and Tasks. The reference used was composed of mathematicians and educators who developed works on Isometries with conceptual rigor and reflections on their teaching. The results produced involved the imprecision of the concept of symmetry, the application of transformations in figures instead of points, the delicate use of colors in this content and its aesthetic potential, the modest use of vectors in translation, the fixed point of rotations and the question of layering in the study of reflections. It is expected to contribute with considerations on the approach of Isometries in textbooks and the importance of the content.

Keywords: Mathematical Education; Elementary School; Textbooks; Isometries.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Artigos publicados por década	45
--	----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Sistemas de educação brasileiro e canadense com relação à idade dos estudantes ...	30
Quadro 2 – Procedimentos metodológicos	65
Quadro 3 – Descrição das unidades de análise	66
Quadro 4 – Principais temáticas das dimensões de análise.....	66

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O matemático Felix Klein (1849 – 1925)	31
Figura 2 – Exemplo de situação em que a cor é considerada um critério de simetria.....	50
Figura 3 – Translação	55
Figura 4 – Rotação	56
Figura 5 – Reflexão em torno da reta r	57
Figura 6 – Reflexão com deslizamento	57
Figura 7 – Transformações Geométricas.....	58
Figura 8 – Demonstração da Proposição 4.1	59
Figura 9 – Exemplo de isometria própria (Translação).....	61
Figura 10 – Exemplo de isometria imprópria (Reflexão).....	61
Figura 11 – Coleção “A Conquista da Matemática”	65
Figura 12 – Coleção “ <i>Nelson Mathematics</i> ”	65
Figura 13 – Organização do texto da análise.....	69
Figura 14 – ‘Construindo Figuras Simétricas’ – CN1.....	75
Figura 15 – ‘Classificando Polígonos’ – CN2.....	76
Figura 16 – Tarefas – CN1	78
Figura 17 – Tarefa da ‘Revisão do Capítulo’ – CN1.....	79
Figura 18 – ‘Tarefa do Capítulo’ – CN1	80
Figura 19 – Tarefas do ‘Banco de Habilidades’ – CN2	81
Figura 20 – Tarefas da ‘Revisão do Capítulo’ – CN2	82
Figura 21 – ‘Matemática Curiosa’ – CN2	83
Figura 22 – Simetria – BR2.....	85
Figura 23 – Tipos de simetria – BR2	86
Figura 24 – Tarefas de simetria – BR2.....	88
Figura 25 – Glossário de translação – CN1.....	89
Figura 26 – Definição de orientação – CN1	90
Figura 27 – Motivação para o estudo de translações e notação – CN3.....	91
Figura 28 – ‘Revisão da Metade do Capítulo’ – CN3.....	92
Figura 29 – ‘Translações em um Sistema de Coordenadas’ – CN4.....	93
Figura 30 – Continuação da atividade guiada e <i>box</i> de dica de comunicação – CN4.....	94

Figura 31 – ‘Revisão da Metade do Capítulo’ – CN4.....	95
Figura 32 – ‘Transladando Figuras em Grades’ – CN1	96
Figura 33 – Exemplo de translação de pontos usando coordenadas – CN3.....	97
Figura 34 – Exemplo de determinação de translações usando soma de coordenadas – CN3 .	98
Figura 35 – Exemplo de translação de pontos usando soma de coordenadas – CN3.....	98
Figura 36 – Exemplo de determinação da imagem usando vetor de translação – CN4	99
Figura 37 – Exemplo de translação em um <i>software</i> de geometria dinâmica – CN4	100
Figura 38 – Tarefas de translação de figuras em grades – CN1	101
Figura 39 – Tarefa da ‘Revisão do Capítulo’ – CN1.....	102
Figura 40 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ – CN3.....	103
Figura 41 – Tarefas das seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ – CN3	104
Figura 42 – Tarefas das seções ‘Praticando’ e ‘Estendendo’ – CN3	105
Figura 43 – Tarefa 15 da seção ‘Praticando’ – CN3	106
Figura 44 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ – CN4.....	108
Figura 45 – Tarefas das seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ – CN4.....	109
Figura 46 – Tarefas das seções ‘Praticando’ e ‘Estendendo’ – CN4	109
Figura 47 – Seção de ‘Jogo Matemático’ – CN4	112
Figura 48 – ‘Tarefa do Capítulo’ – CN4	113
Figura 49 – Box ‘Saiba Que’ – BR2.....	114
Figura 50 – Discussão sobre translação – BR2	115
Figura 51 – Atividade de translação envolvendo tecnologia – BR2	116
Figura 52 – Discussão sobre translação – BR3	117
Figura 53 – Exemplo de translação – BR2.....	118
Figura 54 – Tarefas sobre translação – BR2	120
Figura 55 – Tarefas sobre translação com apoio do GeoGebra – BR2	121
Figura 56 – Tarefas de translação na seção de revisão – BR2	122
Figura 57 – Tarefas sobre translação – BR3	123
Figura 58 – Atividade sobre translação com apoio do GeoGebra – BR3	123
Figura 59 – Glossário de rotação – CN1	125
Figura 60 – Def de rotação, centro de rotação e dos sentidos horário e anti-horário – CN2	126
Figura 61 – Definição de simetria rotacional e da ordem de simetria rotacional – CN2	126
Figura 62 – ‘Perguntas Frequentes’ – CN2	127
Figura 63 – Definição de centro de rotação – CN3.....	128

Figura 64 – ‘Perguntas Frequentes’ – CN3	128
Figura 65 – ‘Perguntas Frequentes’ – CN4	129
Figura 66 – Exemplo de criação de padrão – CN1.....	130
Figura 67 – Exemplo de criação de logo – CN1	131
Figura 68 – Exemplo de rotação da cauda de um peixe – CN2	132
Figura 69 – Exemplo de rotação com centro fora da figura – CN2	132
Figura 70 – Exemplo de simetria rotacional – CN2.....	133
Figura 71 – Exemplo de rotação em um sistema de coordenadas – CN3	134
Figura 72 – Exemplos de rotação de pontos em um sistema de coordenadas – CN4	135
Figura 73 – Tarefa de criação de logo – CN1	135
Figura 74 – Tarefa de criação de logo com passo a passo – CN1.....	136
Figura 75 – Tarefa de criação de logo livre – CN1	136
Figura 76 – Tarefas com rotações da mesma figura em dois centros diferentes – CN2	137
Figura 77 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ após o exemplo da cauda do peixe – CN2.....	137
Figura 78 – Tarefas 6 e 7 da seção ‘Praticando’ – CN2.....	138
Figura 79 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ com o centro de rotação fora da figura – CN2...	139
Figura 80 – Tarefas da seção ‘Verificando’ com o centro de rotação fora da figura – CN2	139
Figura 81 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ de simetria rotacional – CN2	140
Figura 82 – Tarefas das seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ de simetria rotacional – CN2	140
Figura 83 – Tarefas 7 e 8 da seção ‘Praticando’ – CN2.....	141
Figura 84 – Seção ‘Matemática Curiosa’ – CN2.....	141
Figura 85 – Tarefa 9 da seção ‘Praticando’ – CN3	142
Figura 86 – Tarefa 12 da seção ‘Praticando’ – CN3	143
Figura 87 – Tarefa 15 da seção ‘Praticando’ de criação de logo – CN3.....	144
Figura 88 – Tarefa 3 da seção ‘Refletindo’ – CN4	144
Figura 89 – Tarefa 6 da seção ‘Praticando’ – CN4	144
Figura 90 – Tarefa 8 da seção ‘Praticando’ – CN4	145
Figura 91 – Tarefa 13 da seção ‘Estendendo’ – CN4.....	145
Figura 92 – Conceitos sobre rotação – BR2.....	146
Figura 93 – Definição de rotação – BR3.....	147
Figura 94 – Exemplo de rotação com tachinha e palito de sorvete – BR2.....	148
Figura 95 – Exemplo de rotação em uma grade quadriculada – BR3.....	148
Figura 96 – Exemplo de rotação de um triângulo – BR3.....	149

Figura 97 – Tarefas sobre a preservação das distâncias – BR2.....	151
Figura 98 – Tarefa sobre rotação com o centro fora da figura – BR2.....	151
Figura 99 – Tarefa de rotação envolvendo uma obra de arte – BR2.....	152
Figura 100 – Atividade sobre rotação com apoio do GeoGebra – BR2.....	152
Figura 101 – Tarefa 8c) da seção ‘Retomando o que Aprendeu’ – BR2	154
Figura 102 – Tarefa da seção ‘Pense e Responda’ – BR3.....	154
Figura 103 – Desafio da seção ‘Atividades’ – BR3	155
Figura 104 – Glossário de reflexão – CN3.....	156
Figura 105 – Reflexões em ‘Perguntas Frequentes’ – CN3	156
Figura 106 – Reflexões em ‘Perguntas Frequentes’ – CN4	157
Figura 107 – Exemplo de reflexão de um quadrilátero em torno de uma reta – CN3.....	158
Figura 108 – Ex. de reflexão de um triâng. no plano cartesiano em torno do eixo y – CN3	158
Figura 109 – Exemplo de duas reflexões sucessivas em torno dos eixos – CN4.....	159
Figura 110 – Exemplo de reflexão em torno da reta que passa pela origem e ponto – CN4.	160
Figura 111 – Tarefas que iniciam o conteúdo de reflexões – CN3	161
Figura 112 – Tarefa 8a) da seção ‘Praticando’ – CN3	162
Figura 113 – Tarefa 10 da seção ‘Praticando’ – CN3	162
Figura 114 – Tarefa 15 da seção ‘Praticando’ – CN3	163
Figura 115 – Tarefa 17 da seção ‘Estendendo’ – CN3.....	164
Figura 116 – Tarefas 1 e 2 da seção ‘Refletindo’ – CN4.....	165
Figura 117 – Tarefa 4 da seção ‘Verificando’ – CN4	165
Figura 118 – Tarefa 13 da seção ‘Estendendo’ – CN4.....	166
Figura 119 – Tarefa 14 da seção ‘Estendendo’ – CN4.....	166
Figura 120 – Reflexão em torno de uma reta como modelo de Isometria – BR2	167
Figura 121 – Reflexão em torno de um ponto como modelo de Isometria – BR2.....	169
Figura 122 – Definição de reflexão – BR2.....	170
Figura 123 – Definição de reflexão – BR3.....	171
Figura 124 – Exemplos ilustrativos de reflexão – BR2.....	172
Figura 125 – Exemplo ilustrativo de reflexão – BR3.....	172
Figura 126 – Tarefas da seção ‘Pense e Responda’ – BR2	173
Figura 127 – Tarefa 3 da seção ‘Atividades’ – BR2	174
Figura 128 – Tarefa 5 da seção ‘Atividades’ – BR2	174
Figura 129 – Tarefa 7 da seção ‘Retomando o que Aprendeu’ – BR2.....	175

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
INL	Instituto Nacional do Livro
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
MEC	Ministério da Educação
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PECIM	Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
SED	Secretaria de Educação Básica
USP	Universidade de São Paulo
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNESP	Universidade Estadual Paulista
PUCSP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	20
1.1 <i>Design</i> emergente e caminho percorrido	20
1.2 Pergunta de pesquisa e objetivos	23
1.3 Estrutura da dissertação	23
2 PRELIMINARES DA PESQUISA	25
2.1 O livro didático.....	25
2.2 Cenários locais – Brasil	27
2.3 Cenários locais – Canadá	29
2.4 As Transformações Geométricas e as Isometrias	31
3 REVISÃO DE LITERATURA.....	37
3.1 Pesquisas sobre livros didáticos.....	37
3.2 Pesquisas sobre livros didáticos de países diferentes.....	41
3.3 Pesquisas sobre Transformações Geométricas e Isometrias.....	45
4 REFERENCIAL MATEMÁTICO	53
4.1 Simetrias e Transformações Geométricas	53
4.2 Isometrias	54
4.2.1 Pontos fixos.....	58
4.2.2 Movimentos e Isometrias Próprias e Impróprias.....	60
5 METODOLOGIA.....	63
5.1 Pesquisa qualitativa	63
5.2 As coleções de livros didáticos da pesquisa	64
5.3 Procedimentos, unidades e dimensões de análise.....	66
6 ANÁLISE DOS DADOS	69
6.1 Coleção canadense	70
6.2 Coleção brasileira	72
6.3 Dimensão de análise – Simetria	72
6.3.1 Simetria – Coleção canadense.....	73
6.3.2 Simetria – Coleção brasileira	84
6.4 Dimensão de análise – Translação.....	89
6.4.1 Translação – Coleção canadense.....	89
6.4.2 Translação – Coleção brasileira	113
6.5 Dimensão de análise – Rotação.....	125
6.5.1 Rotação – Coleção canadense	125

6.5.2 Rotação – Coleção brasileira.....	146
6.6 Dimensão de análise – Reflexão	155
6.6.1 Reflexão – Coleção canadense.....	155
6.6.2 Reflexão – Coleção brasileira	167
7 CONCLUSÕES.....	176
7.1 Diálogo teórico.....	176
7.2 Reflexões analíticas	178
REFERÊNCIAS	181

1 INTRODUÇÃO

Para dar abertura a esta dissertação, este breve capítulo se divide em três momentos: o primeiro trata do meu percurso nesta pesquisa e do *design* emergente que se assumiu em sua concepção; o segundo elenca a pergunta de pesquisa e os objetivos do trabalho; e o terceiro apresenta a estrutura da dissertação.

1.1 *Design* emergente e caminho percorrido

Graduado em Licenciatura em Matemática e professor da rede pública estadual em exercício, iniciei este trabalho com a intenção de dar continuidade aos meus estudos, melhorar minha formação e ampliar meus conhecimentos na área de Educação Matemática, com uma pesquisa que envolvesse livros didáticos.

A trajetória de uma pesquisa pode ser bastante tortuosa. Goldenberg (1999, p. 11) afirma que “nenhuma pesquisa é totalmente controlável, com início, meio e fim previsíveis. A pesquisa é um processo em que é impossível prever todas as etapas”. Lidar com os obstáculos que surgem no caminho e estar preparado para alterar o que se vinha pensando faz parte do trabalho do pesquisador.

Lincoln e Guba (1985 *apud* ZULATTO, 2007, p. 88) consideram que a reestruturação da pesquisa é característica do *design* emergente. Já Araújo e Borba (2004, p. 35) declaram que “o *design* da pesquisa é emergente, ou seja, ele vai sendo construído à medida que a pesquisa se desenvolve e seus passos não podem ser rigidamente determinados *a priori*”.

Com isso em mente, passo agora a descrever um pouco do caminho percorrido para a conclusão deste trabalho. As primeiras ideias do projeto de pesquisa foram transformando-se devido à contribuição da orientação e do meu amadurecimento enquanto pesquisador. Busquei o alinhamento do projeto a partir das leituras realizadas, do contato com outros integrantes do grupo de pesquisa¹ e com o cenário brasileiro atual. Pelo motivo de muito cedo ter se percebido que o *design* emergente faria parte do estudo, e por acreditar que essa concepção foi bastante importante em todo o processo que resulta no presente trabalho,

¹ O grupo de pesquisa referido é o teorEMa, coordenado pela minha orientadora, Dra. Rúbia Barcelos Amaral Schio, em parceria com o Dr. Lucas Carato Mazzi.

optei por apresentar nesta seção um breve relato dos desdobramentos vividos no primeiro ano de mestrado para a escolha do tema de pesquisa.

O projeto, aprovado na seleção do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (PECIM), sofreu mudanças assim que se iniciou a pesquisa, em 2020. Na época, a ideia era desenvolver um guia norteador para professores de Matemática usarem no momento em que realizassem a escolha das coleções de livros didáticos aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), e que seriam utilizadas em suas escolas nos próximos anos. Esse interesse surgiu a partir da minha experiência na escola em que trabalhava, pois nela havia pouco rigor ou método envolvidos nessa decisão. Apesar de saber que tal guia poderia de fato contribuir para uma seleção mais acurada dos professores, notamos que não desejávamos que a minha pesquisa envolvesse a produção de um material, e junto com a orientadora pensamos em algo que fosse de interesse comum naquele momento.

Nessa primeira troca de escopo, algumas ideias foram sugeridas, como a análise de livros didáticos de países diferentes e a pesquisa com os materiais fornecidos pela rede pública estadual de São Paulo, já que eu trabalhava em escolas estaduais. No entanto, foi feito um esforço para me manter na direção do projeto inicial, então a nova proposta foi de oferecer um minicurso aos sábados para apresentar procedimentos de análise e comparação de livros didáticos para professores da Educação Básica, e neste processo observar suas concepções iniciais, o desenvolvimento da análise crítica dos professores durante o curso e suas conclusões após o minicurso. A pergunta de pesquisa não chegou a ser estabelecida e apenas os primeiros traços do projeto foram pensados, uma vez que tudo mudou devido à pandemia de COVID-19².

É praticamente impossível situar a trajetória de uma pesquisa que se iniciou em 2020, sem citar os obstáculos que essa pandemia sem precedentes gerou no meio do trabalho acadêmico, assim como em outros espaços. Tornou-se inviável manter projetos que envolvessem reunir pessoas, frequentar escolas ou qualquer outra dinâmica de estudo que colocasse de alguma maneira pesquisadores e participantes em risco. Quando percebemos que os encontros e contatos presenciais não retornariam tão cedo, descartamos a ideia de oferecer

² A pandemia de COVID-19 foi resultado da disseminação do novo coronavírus (SARS-CoV-2), que se iniciou no fim de 2019 e assolou todo o planeta, com uma estimativa de 670 milhões de infecções registradas e 6,5 milhões de mortos (fonte: <https://ourworldindata.org/coronavirus>). No Brasil, até abril de 2023 a doença ocasionou mais de 700 mil mortes e mudou para sempre o destino da população. Com esta breve menção, gostaria de expressar meu profundo pesar por todas as vidas perdidas e de sinalizar o aguardo por justiça pelos casos de omissão e irregularidades na gestão das autoridades responsáveis.

um minicurso, mesmo com a possibilidade de fazê-lo remotamente, pois entendemos que o momento que os professores viviam não seria oportuno para uma formação desse tipo, já que as escolas estavam buscando restabelecer o ensino de forma remota e os professores, em geral, estavam muito sobrecarregados, buscando se adaptar a essa nova realidade.

Mais uma vez com a tarefa de definir qual seria a pesquisa a desenvolver, retornamos à ideia de analisar e discutir livros didáticos de países diferentes. Devido à minha familiaridade com a língua inglesa, uma das condições para a escolha do país que participaria da pesquisa com os livros didáticos, além do Brasil, foi que o livro estivesse escrito em inglês. O desenho que foi se formando era o de analisar três coleções, cada uma sendo de um país diferente: Brasil, por ser meu país de origem e local da pesquisa; Estados Unidos, pela experiência que a orientadora possui com coleções estadunidenses; e Canadá, por ser uma grande potência em educação nas últimas décadas (SCHLEICHER, 2018; SOUZA, 2019)

Com o passar das semanas, a ideia amadureceu para analisar apenas duas coleções, uma brasileira e outra canadense, uma vez que estabelecer comparações e paralelos entre coleções tão distintas, oriundas de três culturas complexas e contextos específicos, seria um desafio arriscado para ser enfrentado por pesquisadores vindos de apenas um desses países, além do grande volume de material a ser analisado no período de um mestrado. Portanto, a pesquisa foi delimitada a uma análise de coleções do Brasil e do Canadá, dado que havíamos conseguido acessar uma coleção canadense que estava dentro do que se desejava neste trabalho, isto é, uma coleção na língua inglesa e consolidada em seu país.

Na sequência, foi feita uma análise prévia da coleção canadense e do que ela oferecia, uma vez que esse foi o meu primeiro contato com o material didático do país. Alguns conteúdos chamaram atenção, em especial o das Transformações Geométricas que preservam medidas, isto é, as Isometrias. Visto que documentos curriculares brasileiros, como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), têm dado indicativos de maior interesse por esse conteúdo matemático, logo se estabeleceu o foco no tema.

Como observado, o *design* emergente foi parte fundamental no desenvolvimento desta pesquisa. Não segui um roteiro preestabelecido assim que se iniciou este mestrado. Pensei e repensei os objetivos, que foram sendo construídos em paralelo à própria definição do foco da pesquisa, do material a ser investigado e dos procedimentos metodológicos que seriam adotados. Tais processos estão de acordo com o que Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2000, p. 147) dizem sobre essa maneira de delinear a pesquisa: “O foco e o *design* devem, então, emergir, por um processo de indução, do conhecimento do contexto e das múltiplas

realidades construídas”. A seguir, apresento qual é a pergunta de pesquisa e os objetivos deste trabalho.

1.2 Pergunta de pesquisa e objetivos

Após todo esse caminho percorrido, cheguei à seguinte pergunta de pesquisa: de que maneira as Isometrias estão presentes em Livros Didáticos de Matemática do Brasil e do Canadá?

Com relação aos objetivos, eles estão divididos em um objetivo geral e dois específicos. O objetivo geral é compreender o tratamento sobre Isometrias dos livros didáticos de Matemática do Brasil e do Canadá em coleções dos Anos Finais do Ensino Fundamental/*Elementary School*. O primeiro objetivo específico é identificar semelhanças e diferenças entre as coleções, de modo a estabelecer suas possíveis comparações. Por fim, o segundo objetivo específico é discutir possibilidades de aproveitamento/abordagem do tópico de Isometrias.

1.3 Estrutura da dissertação

Nesta seção, detalho como a dissertação está dividida e apresento os cinco capítulos que compõem o texto após este primeiro. O capítulo 2, denominado de Preliminares da Pesquisa, apresenta um panorama inicial dos principais pilares do trabalho, que são os objetos de pesquisa (livros didáticos), os contextos educacionais dos países das duas coleções (Brasil e Canadá) e o conteúdo matemático estudado (Isometrias).

O capítulo 3 – Revisão de Literatura – mostra quais pesquisas foram consideradas no mapeamento do contexto do tema e de que forma elas dialogam com o trabalho. A estrutura do texto segue a mesma divisão feita no capítulo 1, pensando nos livros didáticos, em seguida em pesquisas com livros didáticos de países diferentes e, por fim, no conteúdo matemático das Transformações Geométricas e Isometrias.

O capítulo 4 abriga o Referencial Matemático, onde se pode encontrar a base matemática utilizada na construção dos argumentos para a análise. O referencial matemático central escolhido foi a obra sobre Isometrias de Elon Lages Lima (LIMA, 1996). Juntam-se a ela algumas discussões sobre a Geometria Plana propostas por Euclides (BICUDO *et al.*, 2009) e Robin Hartshorne (HARTSHORNE, 2013).

O capítulo 5, sobre a Metodologia da Pesquisa, apresenta o caminho metodológico tomado por esta pesquisa. Nele, estão também o posicionamento desta pesquisa no paradigma qualitativo e a apresentação das dimensões e unidades de análise que foram estruturadas.

O capítulo 6 é o da Análise dos Dados, responsável por conter as descrições, interpretações e argumentos que o estudo dos livros didáticos gerou. Trechos relevantes para a análise das obras são reproduzidos no capítulo, com a intenção de revelar o que motivou as conclusões e os questionamentos encontrados no texto.

Concluindo a dissertação, as Conclusões são declaradas a partir de uma breve retomada de todo o trabalho, agora com uma visão ampla do estudo realizado e das discussões proporcionadas. O resgate da pergunta de pesquisa e dos objetivos também são apresentados e novas indagações são elencadas, a fim de indicar possíveis caminhos futuros de pesquisa.

2 PRELIMINARES DA PESQUISA

O presente trabalho é marcado pelo encontro de três objetos distintos que, juntos, formaram os pilares da investigação. O primeiro deles é o livro didático, que foi de fato um objeto concreto de análise, o material em que esta pesquisa se debruçou fisicamente, mas não apenas isso: o estudo do livro didático neste trabalho também envolveu seus significados subjetivos e simbólicos, seus fundamentos e suas influências. O segundo pilar é a origem destes livros didáticos, que, neste caso, é o Brasil e o Canadá. Em qualquer pesquisa que trate do contraste entre produções oriundas de países diferentes, as marcas culturais, sociais e políticas vêm à tona em múltiplos aspectos, o que fez com que este estudo fosse carregado por essa percepção. Por fim, o terceiro pilar é o conteúdo matemático que direcionou as discussões, isto é, as Isometrias, que estão inseridas no tema das Transformações Geométricas. Essa escolha mobilizou um aprofundamento no histórico e no desdobramento do conteúdo na educação.

Assim, este capítulo tem o papel de levantar um conjunto de discussões preliminares importantes para cada um dos pilares da pesquisa e está estruturado sob a seguinte ordem: O livro didático; Cenários Locais: Brasil e Canadá; e As Transformações Geométricas.

2.1 O livro didático

Muitas são as definições que podem ser encontradas sobre o que é livro didático. Uma que está de acordo com o que se compreendeu durante toda a pesquisa é a de Lajolo (1996). Segundo a autora, “para ser considerado didático, um livro precisa ser usado, de forma sistemática, no ensino-aprendizagem de um determinado objeto do conhecimento humano, geralmente já consolidado como disciplina escolar” (LAJOLO, 1996, p. 4). A autora também aponta que o livro didático é um instrumento específico e que pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares.

Diversas disciplinas escolares se beneficiam das vantagens de usar livros didáticos. Trata-se, portanto, de um material central nos processos de ensino e de aprendizagem. Neste trabalho, entendo o papel do livro didático em consonância com Choppin (2004), que atribui as seguintes funções essenciais à ele: a Função Referencial, que indica que o livro atua como um suporte dos conteúdos curriculares pretendidos para cada ano

escolar; a Função Instrumental, que se refere ao compilado de métodos de aprendizagem e atividades que estão elencados nos livros didáticos; a Função Ideológica e Cultural, que reconhece o potencial de influência na disseminação da língua, da cultura e dos valores de um grupo dominante a partir dos livros didáticos; e, por fim, a Função Documental, que entende o livro didático como desenvolvedor do espírito crítico do aluno, através do estudo de documentos em texto ou imagens (CHOPPIN, 2004).

Essas funções descritas pelo autor também estão presentes nos livros didáticos da disciplina de Matemática e, em diferentes medidas, são também as justificativas para o uso desse material nas escolas de todo o mundo. Como consta no Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2019, o livro também “capacita o(a) professor(a), contribui para a construção de conceitos e atitudes frente ao mundo e à matemática, auxilia na avaliação da aprendizagem dos alunos, colabora para implementação da Base Nacional Comum Curricular” (BRASIL, 2020, p. 15).

Valente (2009), em diálogo com Chervel (1990), afirma que “livro didático e educação matemática parecem ser elementos indissociáveis” (VALENTE, 2009, p. 143), uma vez que a história da disciplina escolar de Matemática sempre foi atravessada pelas obras didáticas de cada época e, portanto, permite que seja feita tal conexão: os livros didáticos apresentam métodos de aprendizagem, tipos de atividades e orientações didáticas aos professores que retratam o momento que se está no percurso da Educação Matemática. A importância e a forte presença de livros didáticos de Matemática na educação são temas bastante difundidos em trabalhos acadêmicos da área em todo o mundo e uma revisão de literatura sobre esse tópico é apresentada em um capítulo posterior na dissertação.

Dada a relevância que o livro didático de Matemática possui nos processos de ensino e aprendizagem em muitos países do mundo, é comum ver políticas públicas nacionais que de diferentes maneiras regulam a produção, a avaliação e a distribuição desses materiais didáticos, como, por exemplo, o PNLD no Brasil e a *Trillium List* no Canadá.

Saber que uma coleção de livros didáticos faz parte de um amplo contexto de documentos curriculares e de uma concepção de educação é fundamental para entender sua origem e o cenário em que ela está inserida. Assim, a próxima seção é dividida em duas partes que visam apresentar um breve relato das conjunturas brasileira e canadense no momento em que as obras analisadas neste estudo foram produzidas.

2.2 Cenários locais – Brasil

O Brasil possui uma longa história com livros didáticos, que tem como seus primeiros marcos os anos de 1929, com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL), e 1938, com a composição da Comissão Nacional do Livro Didático. Durante o decorrer do século XX, as políticas públicas relacionadas aos livros didáticos foram se consolidando, ao mesmo tempo em que o país aprimorava o alcance da Educação Básica, atravessando décadas sob os governos de uma ditadura militar e a consequente redemocratização, o que tornou instável toda a administração pública e seu progresso. Foi em 1985 que se criou o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD³) que, com toda a transformação ao longo da sua existência até o presente, se tornou um programa de excelência na seleção e distribuição gratuita de livros didáticos para os estudantes de escolas públicas de todo o Brasil (FERNANDES, 2011; ZAMBON; TERRAZZAN, 2013; FILGUEIRAS, 2015; MAZZI, 2018; BRASIL, 2020; MAZZI; AMARAL-SCHIO, 2021; LITOLDO, 2021).

As principais inovações trazidas pelo PNLD na época de sua criação foram: a decisão de enviar livros reutilizáveis ao invés dos consumíveis (o que significa que as obras começaram a ser transferidas de um aluno para o outro no decorrer de alguns anos definidos pelo Programa, antes de abrirem novo edital e aprovarem novas coleções para enviar) e a parceria com professores no momento da escolha de qual obra ou coleção seria selecionada para a escola a cada edição. Essas duas características decorrentes do PNLD estão preservadas até as edições atuais do programa.

O Programa alterna o segmento educacional que recebe novas edições de livros didáticos a cada quatro anos, proporcionando a distribuição de livros aos alunos da Educação Infantil, dos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. No entanto, apesar de a cada ano um segmento ser favorecido em especial, todas as etapas recebem livros anualmente para a reposição de obras faltantes ou danificadas.

Atualmente o PNLD é executado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), desde a inscrição das obras até a distribuição e reposição para as escolas. A avaliação pedagógica do programa é realizada pela Secretaria de Educação Básica (SEB), do Ministério da Educação (MEC), que há alguns anos estabelecia parcerias com universidades para a análise de aspectos didático-pedagógicos e metodológicos das obras, mas

³ Em 2017, o nome do programa foi alterado para Programa Nacional do Livro e do Material Didático, no entanto a sigla PNLD foi mantida.

que nas últimas edições tem definido instituições e especialistas de acordo com os critérios do edital de cada ano.

A coleção brasileira que faz parte desta pesquisa participou do PNLD (BRASIL, 2020). Isso quer dizer que o uso da coleção nas escolas do país começou a partir de 2020, mas sua publicação é registrada desde 2018, uma vez que as coleções aprovadas em uma edição do PNLD passam por uma sequência de etapas do programa até chegarem aos alunos, como a inscrição a partir dos editais, a avaliação das obras, a escolha pelos professores, entre outras.

Um documento importante de cada edição do Programa é o Guia do Livro Didático, que é enviado pelo MEC para as escolas. Além dele, de maneira extraoficial as editoras enviam as coleções, a fim de orientar os professores e gestores a fazerem uma escolha coerente com suas preferências, destacando os pontos marcantes de cada obra daquela edição. Esse processo ocorre no ano anterior ao do envio dos livros para os alunos. Assim, em 2019 as escolas receberam o livro do estudante e o manual do professor nas versões impressa e digital de cada coleção, além de uma ficha de avaliação para amparar os profissionais na análise e escolha das obras.

O PNLD (BRASIL, 2020) voltado para os Anos Finais do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º ano) foi marcado por ser o primeiro desse nível de ensino em que as obras precisaram estar de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), homologada em 2017. A Base é “um documento curricular nacional, de caráter normativo, que está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva” (BRASIL, 2020, p. 7). Esse documento elenca as competências e habilidades que devem ser trabalhadas desde a Educação Infantil até o Ensino Médio em cada disciplina escolar em todas as escolas brasileiras, públicas e privadas.

Na disciplina de Matemática, a Base se organiza em cinco Unidades Temáticas. São elas: Números, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, Álgebra e Geometria. O documento adota a Resolução de Problemas como uma proposta de metodologia de ensino, com a intenção de despertar o espírito investigativo e explorador dos estudantes (BRASIL, 2017).

Tendo apresentado brevemente o cenário brasileiro, o texto segue para uma exposição sobre o contexto educacional do Canadá, país de origem da segunda coleção analisada por esta pesquisa.

2.3 Cenários locais – Canadá

O Canadá é o segundo maior país do mundo em extensão territorial e se organiza politicamente em dez províncias e três territórios. A educação canadense também se divide dessa maneira, tendo cada província seu próprio Ministério da Educação. Assim, as províncias possuem autoridade para aprovar diferentes currículos e estruturar o sistema educacional com liberdade.

Por esse motivo, as etapas da Educação Básica canadense podem variar dependendo da província a que se referem. No entanto, mesmo levando em conta as particularidades de cada divisão administrativa no que diz respeito à educação, existe uma coerência dentro do país e um certo esforço por se manter em diálogo, para que, em situações de estudantes que mudam de uma província para outra, a regularização para a nova forma de organização seja facilitada.

A coleção analisada foi utilizada na província de Ontário, que engloba a capital do país, Ottawa, e se trata da província mais populosa do Canadá, de modo que, a partir deste momento, sempre que o texto se referir à “Educação no Canadá”, o leitor deve entender que está sendo considerada a província de Ontário e suas características.

Enquanto no Brasil temos a Educação Básica dividida em quatro etapas (Educação Infantil, Anos Iniciais do Ensino Fundamental, Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), no Canadá a divisão se dá em dois níveis: *Elementary* e *Secondary*. O primeiro deles começa com dois momentos não obrigatórios chamados de Jardim de Infância *Junior* e *Senior*. Depois disso, o nível *Elementary* dura 8 anos, o que corresponde quase diretamente aos dois segmentos do Ensino Fundamental brasileiro. O nível *Secondary* completa a formação dos alunos com mais 4 anos de estudo.

O Quadro 1 apresenta a comparação entre os sistemas de educação brasileiro e canadense com relação à idade dos estudantes.

Quadro 1 – Sistemas de educação brasileiro e canadense com relação à idade dos estudantes.

Idade dos Estudantes	Sistema Brasileiro		Sistema Canadense (Província de Ontário)			
17	3ª série	Ensino Médio	Grade 12	Secondary		
16	2ª série		Grade 11			
15	1ª série		Grade 10			
14	9º ano	Anos Finais do Ensino Fundamental	Grade 9			
13	8º ano		Grade 8	Intermediate	Elementary	
12	7º ano		Grade 7			
11	6º ano		Grade 6	Junior		
10	5º ano	Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Grade 5			
9	4º ano		Grade 4			
8	3º ano		Grade 3	Primary		
7	2º ano	Grade 2				
6	1º ano	Educação Infantil	Grade 1			
5	Pré-escola		Senior Pré	Pré-Elementary		
4	Pré-escola		Junior Pré			

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A coleção canadense analisada é utilizada na metade final do nível *Elementary*, ou seja, as *Grades* 5, 6, 7 e 8, enquanto a coleção brasileira é dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Desde 2002, a província de Ontário conta com um documento chamado *Trillium List*, que apresenta uma lista de coleções de livros didáticos de todas as disciplinas. Essas coleções foram aprovadas conforme alguns critérios do Ministério da Educação e, por isso, podem ser selecionadas para uso nas escolas. A lista é atualizada continuamente, à medida que novas coleções conseguem a aprovação.

Souza (2019) elencou os critérios para elegibilidade de uma coleção na *Trillium List*. São eles:

- 1 – Congruência com o currículo, ou seja, atender a um mínimo de 85% das expectativas do documento; 2 – Estar de acordo com as políticas do Ministério da Educação; 3 – As obras precisam ser manufaturadas no próprio

país e, sempre que possível, elaboradas por autores canadenses; 4 – Os livros didáticos precisam estar acompanhados de um guia do professor; 5 – Os livros didáticos precisam utilizar orientações canadenses (SOUZA, 2019, p. 57).

O documento ainda oferece critérios de avaliação das obras, como por exemplo a qualidade e a relevância do conteúdo, o uso de tecnologia, linguagem utilizadas e questões sociais como noções de responsabilidade ambiental e direitos humanos.

Publicada em 2004, a coleção canadense analisada nesta pesquisa figura entre as obras da *Trillium List* desde 2005 e pelos 15 anos seguintes seus livros didáticos de Matemática foram usados por professores e estudantes em toda a província de Ontário. Em 2020, um novo currículo foi adotado pelo Ministério da Educação, promovendo uma renovação das coleções aprovadas, uma vez que os critérios de seleção para a *Trillium List* foram atualizados. No entanto, apesar de saber que a coleção canadense analisada por este estudo já não está presente nas escolas atualmente (e sim novas versões dela), foi tomada a decisão de mantê-la na pesquisa, devido ao fato de ela ter sido utilizada por cerca de 15 anos nas escolas do Canadá e pela pesquisa já ter se iniciado na época em que as novas obras começaram a ser publicadas.

2.4 As Transformações Geométricas e as Isometrias

A história sobre a presença do conteúdo de Transformações Geométricas nos currículos escolares se remonta desde o final do século XIX. A figura chave que iniciou o destaque para esse conceito, propondo, entre outras ideias, seu estudo desde a formação básica, é, sem dúvidas, a de Felix Klein (Figura 1).

Figura 1 – O matemático Felix Klein (1849 – 1925).



Fonte: O'Connor e Robertson (2003).

Nascido na Alemanha, Klein foi um matemático que muito cedo apresentou contribuições para os estudos da Matemática pura e seu ensino. Aos 23 anos, assumiu o posto

de professor titular na Universidade de Erlangen (Alemanha) e, no seu discurso inaugural, propôs uma nova estruturação da Geometria aliada à Teoria de Grupos, mais especificamente aos grupos contínuos de transformações. Tal exposição oral se tornou famosa e passou a ser conhecida por Programa de Erlangen (TRÓPIA; FURTADO; BACCAR, 2020).

Klein defendia que as Transformações Geométricas eram uma generalização da noção de função. Além disso, partindo da ideia de movimento rígido, as Isometrias foram pela primeira vez encaradas como um grupo de transformações. Com preocupação pedagógica, Felix Klein difundiu uma noção que unificava a Geometria, indicando a importância de estudar o conteúdo das Transformações Geométricas nas escolas e, claro, nos cursos de formação de professores (MIORIM, 1998; MABUCHI, 2000; SILVA; PIETROPAOLO, 2014; BARROSO, 2018; TRÓPIA; FURTADO; BACCAR, 2020).

Para Klein (1891), a Geometria era uma só em essência, mas foi muito dividida no curso do seu rápido desenvolvimento, em uma série de teorias quase distintas, que na época estavam avançando em independência comparativa umas das outras. Klein acreditava que uma visão global da Geometria poderia beneficiar o olhar dos matemáticos. Para ele, o método projetivo abraçava toda a geometria, pois as teorias geométricas podiam ser unificadas através do conceito de grupo de simetrias. Cada geometria estudava seu espaço geométrico munido de um grupo de simetrias, considerando as propriedades do espaço que são invariantes em relação àquelas simetrias (TRÓPIA; FURTADO; BACCAR, 2020, p. 4-5).

A importância de Klein para o ensino e currículo de Matemática nas escolas não se encerrou por aí. O matemático protagonizou o Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática, que nos primeiros anos do século XX impactou a comunidade científica e reverberou em diferentes proporções nos currículos da disciplina por todo o mundo. O início desse Movimento foi dificultado pela Primeira Guerra Mundial (1914-1918) e em seguida pelo falecimento de Felix Klein, em 1925, mas as bases do pensamento já haviam sido consolidadas (MIORIM, 1998). Uma das conquistas dessa renovação no ensino foi a constituição da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática, que existiu com independência até 1952 e se tornou uma comissão oficial da União Internacional da Matemática a partir desse ano até os dias de hoje (KLEIN; MENGHINI; SCHUBRING, 2016).

Toda essa atividade científica em torno da estruturação do currículo de Matemática no início do século XX gerou e aumentou a necessidade de uma reforma no ensino da disciplina. No entanto, “as mudanças ocorridas durante as primeiras décadas de nosso século não chegaram a produzir os efeitos esperados” (MIORIM, 1998, p. 107). Apesar

de as ideias de Klein terem motivado sólidas discussões acerca de um afastamento da Geometria proposta por Euclides e da introdução das ideias de funções e dos grupos de Transformações Geométricas na Educação Secundária, o surgimento do Movimento da Matemática Moderna não instaurou essas propostas na prática (KLEIN; MENGHINI; SCHUBRING, 2016).

Entre as décadas de 1950 e 1960, as ideias do Movimento da Matemática Moderna começaram a ser discutidas no Brasil. Tratava-se de uma proposta internacional de reforma do currículo de Matemática, dando mais espaço à teoria de conjuntos e sua linguagem simbólica, ao formalismo das estruturas matemáticas e à abordagem dedutiva (BARROSO, 2018). O Movimento tentava aproximar o que se estudava em Matemática nas escolas do que era apresentado nas universidades, ocasionando um “distanciamento da prática e a uma acentuada separação entre Matemática pura e Matemática aplicada” (MIORIM, 1998, p. 109).

Miorim (1998) elabora que ambas as intenções de reforma visavam diminuir o afastamento entre a escola básica e o curso universitário, mas as maneiras propostas para essa finalidade foram bastante opostas. Enquanto Klein propusera uma abordagem mais intuitiva, prática e com forte destaque à Geometria, o que realmente se instalou nas escolas com o advento do Movimento da Matemática Moderna foi o rigor dos axiomas, conjuntos e estruturas.

No Brasil, Osvaldo Sangiorgi foi o principal intelectual a aderir ao Movimento da Matemática Moderna, produzindo materiais, dando entrevistas para a mídia e oferecendo cursos em universidades inspirados nessa reforma curricular da Matemática que ele havia conhecido em sua passagem pelos Estados Unidos (MIORIM, 1998; RODRIGUES, 2012; MATOS; SILVA, 2011). Sua coleção de livros didáticos “Matemática – Curso Moderno”, de 1964, foi muito bem recebida no cenário brasileiro, tida como um material inovador e que propunha fortes mudanças no ensino da disciplina.

Leme da Silva (2008), em seu estudo sobre o papel de Osvaldo Sangiorgi no Movimento da Matemática Moderna, diz que o sucesso da coleção garantiu uma nova edição em 1969, com algumas alterações na abordagem, na busca por ser um pouco mais dialógica com o aluno, uma vez que a primeira obra havia apresentado diversos conceitos prontos. Com relação ao conteúdo de Transformações Geométricas, a autora comenta que a obra de Sangiorgi possui forte influência da abordagem que era feita nos Estados Unidos, utilizando axiomas e postulados, diferentemente do que fora proposto por Klein (LEME DA SILVA, 2008).

Assim, com a influência de Sangiorgi na produção de livros didáticos de Matemática e seu breve tratamento das Transformações Geométricas, pode-se compreender qual foi a tendência adotada pelas obras nos anos posteriores e de que maneira os professores atuaram no ensino do conteúdo em sala de aula (RODRIGUES, 2012). Em retrospecto, é possível perceber que, apesar da promessa de renovar o currículo, “[...] a Matemática Moderna não conseguiu resolver o problema do ensino da disciplina. Ao contrário, agravou ainda mais a situação” (MIORIM, 1998, p. 115).

Ferreira (2008), em diálogo com Miorim (2005), observa que Sangiorgi trata o conteúdo das Transformações Geométricas em um apêndice, indicando uma recusa a abordar o tema no corpo do texto. Uma justificativa levantada por Ferreira (2008) é a de que o autor pode ter considerado o conteúdo pouco explorado pelos professores e que, portanto, não seria fundamental fazer o destaque no texto.

Amaral-Schio (2018) afirma que, no período pós-Matemática Moderna, entre as décadas de 1980 e 1990, os conteúdos de Geometria continuaram a aparecer nos últimos capítulos dos livros didáticos, levando o tema a ser desprezado caso os professores não conseguissem cumprir todo o currículo recomendado. A Geometria, então, começou a se tornar um problema tanto para alunos, quanto para professores.

A resposta ao Movimento da Matemática Moderna começa a chegar através dos Guias Curriculares de São Paulo, entre os anos de 1985 e 1992. Barroso (2018) descreve que professores das universidades paulistas USP, UNICAMP, UNESP e PUCSP⁴, juntamente com docentes da Educação Básica, se uniram para a elaboração dessas propostas curriculares. Algumas diferenças relevantes estão nas abordagens com uso de dobraduras, cotidiano, história da Matemática e atividades empíricas, embora a Geometria seguisse aparecendo no segmento final das obras (FERREIRA, 2008).

É então nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998) que a Geometria ganha mais espaço, a partir da proposta de um tratamento exploratório e computacional e com destaque para a contextualização, a visualização e o raciocínio no conteúdo. O assunto das Transformações Geométricas passa a ser mais valorizado (BARROSO, 2018). Sobre o conteúdo, os PCN (BRASIL, 1998) afirmaram:

O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de

⁴ Respectivamente, Universidade de São Paulo, Universidade Estadual de Campinas, Universidade Estadual Paulista e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo, as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas (BRASIL, 1998, p. 124).

No trecho citado acima, é possível perceber a forte conexão que o documento curricular propõe entre o estudo das Transformações Geométricas e as Isometrias. Apesar desse indicativo positivo, o que se observou é que o tema não chegou até as salas de aula, nem mesmo para a formação de professores, como diversos trabalhos apontaram (MABUCHI, 2000; RIPPLINGER, 2006; GOMES, 2012; BARROSO, 2018; MALCHER JUNIOR *et al.*, 2019).

Por fim, o documento curricular nacional em vigência no período deste trabalho é a BNCC (BRASIL, 2017). Nela, é possível ver o conteúdo das Transformações Geométricas sendo proposto desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, com o estudo das simetrias. Nos Anos Finais, o tema aparece com o aprofundamento das simetrias a partir das Isometrias e suas propriedades, além das homotetias e semelhanças de figuras planas. O indicativo que a Base deu ao prever o estudo das Transformações Geométricas mobilizou os autores de livros didáticos de Matemática a incluir o assunto em suas obras, não mais destinando apenas páginas de apêndice ou no final dos livros a ele, mas encarando como um conteúdo que deveria ser abordado nos livros e em sala de aula pelos professores.

Assim, é possível observar que as Transformações Geométricas constam na unidade temática Geometria da BNCC (BRASIL, 2017). O *site* do Guia do Livro Didático diz que, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, essa Unidade:

[...] tem como objetivo desenvolver o pensamento geométrico por meio do estudo de posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre figuras planas e espaciais, investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. O trabalho com as transformações geométricas e as habilidades de construção, representação e interdependência também deve ser contemplado (BRASIL, 2020).

A coleção brasileira analisada na presente pesquisa foi adaptada aos critérios da BNCC (BRASIL, 2017). Assim, este estudo pretende ampliar a compreensão que temos do tratamento das Transformações Geométricas, em especial as Isometrias, nos livros didáticos de Matemática do Brasil.

No Canadá, o Movimento da Matemática Moderna teve impacto na implementação de diversos documentos curriculares pelo país, no entanto, como indica

O'Shea (2003), a divisão em províncias da Educação Básica canadense torna difícil, senão impossível, falar do país sobre o assunto como um todo. Citando o trabalho de Russell *et al.* (1975), O'Shea afirma que na província de Ontário poucas mudanças foram observadas nas salas de aula, embora os documentos curriculares estivessem sofrendo alterações devido ao Movimento da Matemática Moderna que se espalhava por todo o mundo.

O pesquisador descreve que foi no período do Movimento da Matemática Moderna que o processo de criação de um currículo de Matemática deixou de ser sigiloso e passou a ser mais aberto e caracterizado por ampla consulta aos membros de comitês específicos da Educação Matemática. Com isso, mais debates locais sobre os rumos da Educação Matemática canadense começaram a acontecer, espaços em que os professores conquistaram maior participação formulando o currículo e, principalmente, discutindo sobre suas experiências de ensino dos temas matemáticos, o que promoveu um aumento na profissionalização docente no país (O'Shea, 2003).

Desse modo, as Preliminares da Pesquisa se encerram, tendo cumprido o objetivo de estabelecer um contexto dos principais pilares do trabalho e apresentar brevemente ao leitor quais foram os pontos de partida em cada um deles.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Conhecer o cenário encontrado pelo pesquisador no decorrer da pesquisa é fundamental para compreender as contribuições de seu estudo e posicioná-lo junto à comunidade científica. Para ele, essa tarefa é ainda mais importante: significa investigar outros trabalhos que se aproximam do seu em algum sentido e descobrir possibilidades de metodologia, referencial teórico e análise que podem ser úteis em sua trajetória.

Este capítulo tem o papel de apresentar um levantamento de artigos, dissertações, teses e publicações que contribuíram na contextualização da presente pesquisa. Tal busca bibliográfica se deu através da plataforma periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao se pesquisarem as palavras-chaves ‘livros didáticos de matemática’, ‘pesquisas com livros de países diferentes’, ‘transformações geométricas nos livros didáticos’ e ‘isometrias nos livros didáticos’. Essa revisão de literatura está organizada a partir dos seguintes temas de interesse: livros didáticos, livros didáticos de países diferentes, Transformações Geométricas e Isometrias.

3.1 Pesquisas sobre livros didáticos

O ponto de partida da revisão de literatura foi buscar pesquisas que envolvessem livros didáticos. Fan (2013) fornece uma análise crítica de questões contemporâneas e métodos da pesquisa de livros didáticos de Matemática. Ao remontar ao histórico desse campo de pesquisa, o autor afirma que desde a década de 1920 existem estudos analisando livros didáticos no meio científico. No cenário da Matemática, Fan (2013) destaca a importância do ICME-10 (*10th International Congress on Mathematical*), que ocorreu na Dinamarca em 2004 e contou com o primeiro Grupo de Discussão sobre livros didáticos. Desde então, o tema marcou presença em todas as edições do evento quadrienal.

Fan (2013) divide o interesse das pesquisas sobre livros didáticos em três grandes grupos: o primeiro, que se preocupa apenas com o livro didático em si (conteúdo, abordagem didática, tarefas, etc.); o segundo, que analisa a influência de outros fatores no desenvolvimento e produção dos livros didáticos (políticas públicas, documentos curriculares, avaliações, etc.); e o terceiro, que explora o impacto do livro didático em seu entorno (sala de aula, professores, estudantes, etc.).

No que se refere ao método dessas pesquisas, Fan (2013) apurou que existe a predominância de trabalhos baseados em análise de documentos sobre aqueles que utilizam métodos empíricos ou experimentais. Ele afirma que a maioria das pesquisas tem mantido seu foco “na discussão, no compartilhamento de experiências e na reflexão” (FAN, 2013, p. 773, tradução nossa) e que a análise de documentos é bem estabelecida e aceita como método de pesquisa, sendo que a comparação de livros didáticos de países diferentes tem um forte destaque nessa área.

Fan, Zhu e Miao (2013) fizeram um levantamento de artigos de periódicos, teses e publicações em anais de eventos sobre as pesquisas focadas em livros didáticos de Matemática para entender qual é o cenário atual de investigações tomando o livro didático como objeto de estudo. O estudo mostrou que esse tipo de pesquisa segue consolidado entre os educadores matemáticos, havendo cada vez mais trabalhos sendo realizados.

Os autores identificaram que os três maiores temas de interesse das pesquisas com livros didáticos são a análise dos materiais, a comparação de diferentes livros didáticos e a reflexão sobre o papel que eles cumprem no ensino e na aprendizagem, considerando a escola, os alunos e os professores. Sobre este último tema, vê-se uma forte presença do que o currículo pretende e implementa a partir da proposta e do uso dos livros didáticos.

No entanto, a maior porção de pesquisas está concentrada na análise e na comparação de livros didáticos (FAN; ZHU; MIAO, 2013). Na intenção de compreender as direções da pesquisa na área, os autores mapearam os cinco principais aspectos dos trabalhos classificados como análise e comparação de livros didáticos, apesar de observarem que muitos dos trabalhos envolviam mais de um aspecto.

O primeiro aspecto destacado é o da análise de conteúdos e tópicos da Matemática (FAN; ZHU; MIAO, 2013). Esse aspecto é explorado por pesquisas que se voltam para a maneira como um ou mais temas da Matemática são abordados nos livros didáticos ou para as diferenças entre livros didáticos no tratamento dos conteúdos matemáticos. Pesquisas desse tipo têm, entre outros, o potencial de apresentar uma análise aprofundada dos conteúdos matemáticos desejados e refletir sobre sua abordagem conceitual no livro didático.

O segundo aspecto é chamado por Fan, Zhu e Miao (2013) de pedagogia e cognição e contempla pesquisas preocupadas com o viés pedagógico do livro didático, seja nas tarefas propostas, no conteúdo matemático ou nas orientações para o professor, entre outros itens. Já o terceiro aspecto destacado pelos autores é o que eles chamam de gênero, etnia, equidade, cultura e valor e difere dos anteriores pois, enquanto estes se concentram nos

âmbitos teórico e pedagógico, no presente aspecto o foco das pesquisas parte de um olhar antropológico, geralmente pensando na influência que o livro didático exerce na leitura de mundo de quem o usa.

Fan, Zhu e Miao (2013) apresentam o quarto aspecto como sendo a comparação de livros didáticos de países diferentes, tema bastante presente nas pesquisas. O interesse em analisar livros didáticos de diferentes nacionalidades costuma residir na identificação de um possível perfil dos países em questão, no que diz respeito à produção de livros didáticos de Matemática ou ao conteúdo específico observado. São estudos que possuem a característica de buscar semelhanças e diferenças no tratamento da Matemática nos materiais didáticos. Por fim, o quinto aspecto é chamado pelos autores de conceitualização e questões metodológicas. Nesse conjunto estão representados os estudos que se debruçam sobre os modos de fazer pesquisa com livros didáticos, propondo novas metodologias e abordagens de levantamento e análise de dados.

A presente pesquisa dialoga com o primeiro aspecto apresentado pelos autores, uma vez que se dispõe a analisar um conteúdo específico de Matemática em coleções de livros didáticos. Além disso, este trabalho também se identifica com o quarto aspecto, devido ao fato de as coleções analisadas serem de países diferentes.

Após esse panorama geral do cenário das pesquisas voltadas para análise e comparação de livros didáticos, o texto segue com a apresentação de trabalhos que também envolvem livros didáticos e o tema da Geometria, dado que as Isometrias fazem parte dessa área da Matemática, e dão indicativos sobre processos metodológicos empregados e alguns resultados obtidos nesse tipo de pesquisa.

Bardini, Amaral-Schio e Mazzi (2019) investigaram os aspectos do cotidiano e a Geometria presente nos livros didáticos de Matemática. Três coleções dos Anos Iniciais foram analisadas e o que se observou é que existe uma relação entre o cotidiano e a Geometria nas obras, que buscavam conquistar o estudante a partir da sua identificação com as situações propostas, explorando os saberes que ele já possuía. O trabalho destaca a importância de os livros didáticos apresentarem tarefas com contexto da realidade no estudo da Geometria.

Litoldo (2021), em sua tese de doutorado, também se preocupou em investigar a contextualização das tarefas de Geometria nos livros didáticos. Aliado a esse propósito, a pesquisadora ainda observou os níveis de demanda cognitiva das tarefas e relacionou essas informações com a teoria da Oportunidade de Aprendizado (do inglês, *Opportunity-to-Learn*), que envolveu considerar que tipo de formação as tarefas analisadas estavam ofertando aos

estudantes, assumindo que eles estivessem orientados a resolvê-las. A autora realizou a pesquisa com uma coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovada pelo PNLD 2018 e sua definição de tarefa foi utilizada por esta dissertação.

Como um dos passos metodológicos, Litoldo (2021) se inspirou na estrutura de análise de livros didáticos proposta por Charalambous *et al.* (2010), empregando a Análise Horizontal e a Análise Vertical apresentadas pelos autores. Nas mais de 1.300 tarefas estudadas, a pesquisadora constatou que a grande maioria tinha como contextualização apenas situações puramente do universo da Matemática. Dentre aquelas que possuíam algum contexto da realidade, o número de tarefas identificadas com um contexto real foi praticamente insignificante, em comparação com as tarefas situadas na semirrealidade razoável. Como resultado, o estudo evidenciou que as tarefas presentes na coleção, em sua maioria, possuíam baixa demanda cognitiva, expondo os estudantes a situações sem conexão com a realidade e que exploravam a memorização.

Outra pesquisa que se preocupou em investigar como aspectos relacionados ao ensino de Matemática estão presentes nos livros didáticos foi a de Mazzi (2018). O pesquisador analisou sete coleções de livros didáticos de matemática do PNLD 2018, em busca de identificar a presença dos raciocínios dedutivo, indutivo, abdutivo e por analogia nas obras. O ponto de interesse residiu nos capítulos de Geometria. Os resultados da pesquisa mostraram que o raciocínio dedutivo é bastante presente nas obras, ao contrário dos raciocínios por analogia e abdutivo, sendo que esse último, que é aquele que abrange justificar o motivo de um fato ter ocorrido, é o mais ausente nas coleções. Os outros possuem alguma presença, seja nas seções expositivas ou de exercícios dos livros didáticos (MAZZI, 2018).

Somando-se ao cenário da pesquisa com livros didáticos de Matemática, Gonçalves (2022) realizou um estudo que envolveu entrevistas com professores e observação de suas aulas, investigando quais eram as crenças desses profissionais ao utilizar o livro didático. O modo de uso desse material é marcado pelo planejamento dos professores e suas experiências profissionais e pessoais acumuladas até então. A pesquisadora mostra que em muitos casos o livro didático é um porto seguro para os professores, embora mostre que a maneira como um professor utiliza o livro didático torna cada aula única, mesmo quando fazem uso do mesmo material. Além disso, a dissertação de Gonçalves (2022) adiciona uma informação que pode indicar uma característica do cenário brasileiro: o forte vínculo dos professores com o livro didático e sua utilização com pouca ou nenhuma reflexão crítica, o que reproduz erros presentes no material, uma vez que as obras podem apresentar falhas.

As contribuições que os trabalhos de Mazzi (2018) e Gonçalves (2022) trouxeram para esta pesquisa foram a discussão da baixa presença de propostas que demandam justificativas no cenário brasileiro (como será observado na análise) e a reflexão da importância do rigor conceitual nos livros didáticos, uma vez que o uso das obras pode se dar sem uma apropriação crítica por parte dos professores, pelos diversos motivos apontados pela pesquisadora.

3.2 Pesquisas sobre livros didáticos de países diferentes

Nesta seção, estabelece-se como foco as pesquisas com livros didáticos de Matemática que envolvem obras de mais de um país, uma vez que o presente trabalho também faz parte desse conjunto de pesquisas. No quarto aspecto destacado pelos autores Fan, Zhu e Miao (2013), foi visto que estabelecer comparações entre livros de países diferentes possui certa evidência dentro da pesquisa com livros didáticos.

Pepin e Haggarty (2001) analisaram o conteúdo geométrico de ângulos nas coleções mais vendidas da época na Alemanha, França e Inglaterra. A pesquisa contou com entrevistas a professores de escolas que utilizavam os livros didáticos em cada país, além da análise das obras. Os diferentes contextos e tradições locais foram observados, juntamente com algumas características gerais identificadas nos exemplares analisados, como, por exemplo, a estrutura de metodologia e de organização dos livros. No caso dos alemães, após uma breve noção principal e exemplos introdutórios, apresenta-se uma extensa lista de exercícios. Nos livros franceses, a proposta era mais variada, com a mescla de atividades dinâmicas e exercícios para praticar, visando a um aprofundamento progressivo do conceito. Por fim, os livros ingleses foram identificados como os mais tradicionais dentre os analisados, apresentando uma estrutura conhecida de conceito, exemplos e exercícios, distribuídos equilibradamente pelas obras.

Embora o trabalho de Pepin e Haggarty (2001) seja um exemplo de pesquisa que conseguiu conciliar a análise dos livros com uma pesquisa de campo, incluindo entrevistas com professores, sabe-se que as pesquisas comparativas que analisam livros de países diferentes enfrentam como obstáculo a questão da internacionalidade, dada a complexidade de ir até as escolas regionais e considerar os aspectos culturais de cada local. Charalambous *et al.* (2010) apontam que, apesar desse limitante, analisar livros de diferentes países pode revelar expectativas distintas de desempenho dos estudantes, evidenciando o quanto dos conceitos e

procedimentos matemáticos o material didático pretende que seja experienciado por eles, além de como isso pode acontecer.

Charalambous *et al.* (2010) fizeram uma pesquisa que comparou o tratamento do conteúdo de adição e subtração de frações em livros didáticos de Matemática de três países: Chipre, Irlanda e Taiwan. Ao todo, foram cinco coleções analisadas, respectivamente, 2, 2, 1. Os pesquisadores notaram semelhanças e diferenças no que diz respeito à sequência de apresentação do conteúdo, os exemplos resolvidos, as demandas cognitivas das tarefas e o tipo de resposta esperada dos alunos. Após descreverem exemplos de aproximação e distanciamento que encontraram na abordagem de adição e subtração de frações, os pesquisadores especularam sobre uma possível “assinatura dos livros didáticos”.

Definimos essa assinatura como as características distintivas uniformes nos livros didáticos de um determinado país. [...] Conjecturamos que padrões distintos podem ser observados nas características de livros didáticos encontrados em outros países; na medida em que essa suposição seja válida, equivaleria a uma assinatura distintiva de livro didático em um país. Se esta assinatura do livro didático existe, [...] a “assinatura do livro didático” influencia o ensino em um país (CHARALAMBOUS *et al.*, 2010, p. 146, tradução nossa).

Os autores colocam a assinatura dos livros didáticos como algo que precisa ser mais estudado, de modo que essa conjectura ainda é pouco considerada nas pesquisas com livros didáticos de países diferentes. A dificuldade em se avançar na proposição se dá, entre outros motivos, pela complexidade de fazer afirmações sobre toda a produção de livros didáticos de um país, de estabelecer generalizações culturais desse tipo a partir da análise específica e selecionada de uma ou mais coleções. Apesar disso, cada estudo que coloca em destaque o desenvolvimento de livros didáticos de um país é um passo a mais para entender se existe algum tipo de assinatura de livros didáticos ali, mesmo sabendo que tal esforço pode ser inesgotável.

Em dois trabalhos sobre a mesma pesquisa, Hong e Choi (2014a) fizeram uma contribuição na busca de uma assinatura de livros didáticos da Coreia do Sul e dos Estados Unidos, debruçando-se sobre a abordagem do tópico de equações quadráticas em livros didáticos de ambos os países. Os autores utilizaram as Análises Horizontal e Vertical propostas por Charalambous *et al.* (2010) e investigaram o conteúdo matemático e as demandas cognitivas das tarefas de cinco obras (duas sul-coreanas e três estadunidenses).

O que se observou foi que os livros didáticos sul-coreanos abordam alguns temas relacionados às equações quadráticas primeiro que os livros estadunidenses com relação à

idade dos estudantes, possibilitando que eles tivessem contato com os conceitos antes que os dos estadunidenses. Por outro lado, os autores identificaram que os livros estadunidenses proporcionam mais problemas que necessitam de justificativas e diferentes representações para serem solucionados do que os sul-coreanos, propondo, portanto, mais tarefas com alto nível de demanda cognitiva (HONG; CHOI, 2014b).

Choy, Lee e Mizzi (2015), utilizando a estrutura metodológica proposta por Charalambous *et al.* (2010), realizaram uma pesquisa exploratória que envolveu Alemanha, Cingapura e Coreia do Sul e investigaram como o conteúdo de vetor gradiente consta em um livro didático de Matemática de cada país. Na análise das tarefas, os autores utilizaram a abordagem da demanda cognitiva. Os resultados da pesquisa mostraram que, apesar de a educação ser uma área de destaque nos três países segundo os parâmetros internacionais, os livros didáticos analisados ainda poderiam ser melhorados, principalmente com relação a proporem mais tarefas em que se trabalhe com demonstrações matemáticas, dado que outros tipos de tarefas, como aquelas que envolvem procedimentos com conexão, já aparecem bem representados nas obras. Ao final do artigo, os autores afirmaram que a pesquisa com livros didáticos de países diferentes e a busca pela assinatura nos mesmos “pode fornecer uma representação dos pontos fortes e áreas de melhoria no desenvolvimento dos livros didáticos” (CHOY; LEE; MIZZI, 2015, p. 167, tradução nossa).

Em sua pesquisa sobre o conteúdo de simetrias e Transformações Geométricas em duas coleções de livros didáticos, uma do Japão e outra da Inglaterra, Takeuchi e Shinno (2019) usaram como critério de escolha da coleção a popularidade das obras em cada país, selecionando aquelas que figuravam entre as mais usadas nas escolas do território, semelhante ao que foi feito nesta dissertação. A investigação realizada pelos pesquisadores mostrou que a abordagem dos livros japoneses em simetrias e Transformações Geométricas é sustentada pelo ensino de demonstrações geométricas, enquanto o foco dos livros ingleses reside no estabelecimento de conexões com outras situações e conteúdo.

Os autores ainda comentam que estudos internacionais como o deles muitas vezes visam identificar semelhanças e diferenças entre os países em questão e que, levando em consideração os diferentes currículos que orientam a produção dos livros didáticos, o histórico em educação e a cultura de cada país, “os livros didáticos podem ser considerados a principal fonte empírica que permite compreender o que constitui um saber que será ensinado e como isso varia de país para país” (TAKEUCHI; SHINNO, 2019, p. 792, tradução nossa). Essa noção também fez parte da presente pesquisa, como visto nos objetivos já apresentados.

Estudos comparativos e análises internacionais também já foram feitos envolvendo o Brasil, o que contribui para essa busca pela compreensão das características dos livros didáticos de Matemática brasileiros. Amaral e Hollebrands (2017) analisaram seis livros didáticos, três brasileiros e três estadunidenses, sob o ponto de vista da contextualização, da Oportunidade de Aprendizado e do nível de demanda cognitiva das tarefas sobre o conteúdo de semelhança da Geometria Plana. Apesar de o número de tarefas sobre o tema ser maior nos livros estadunidenses, a proporção entre as tarefas de semelhança e o total de tarefas em cada obra foi bastante similar ao que as autoras observaram nos livros brasileiros, o que significa dizer que proporcionalmente falando não foi verificado uma disparidade expressiva nesse aspecto.

Um resultado importante da pesquisa de Amaral e Hollebrands (2017) foi a observação de que os livros didáticos brasileiros possuíam uma estrutura bastante parecida entre si, apresentando uma sequência de tópicos muito próxima. Como visto anteriormente, a pretensão de descrever as características da produção de livros didáticos de um país pode demandar uma dedicação impraticável de inúmeras análises. Mesmo assim, reparar em possíveis descrições das características dos livros didáticos de um país já representa um ganho científico e contribui para o estabelecimento de novas relações.

Sobre a demanda cognitiva, considerando as tarefas contextualizadas, as pesquisadoras identificaram uma baixa presença de problemas com contextualização real, o que influencia diretamente na dificuldade que os estudantes de ambos os países têm em se tornar melhores resolvidores de situações-problemas, ou seja, não estão sendo oportunizados os aprendizados referentes ao senso crítico e às competências de interpretação para os estudantes a partir dos livros didáticos analisados (AMARAL; HOLLEBRANDS, 2017).

Pensando na relação comparativa entre os livros didáticos do Brasil e do Canadá, dois trabalhos serão destacados. Silva, Guimarães e Oliveira (2021) analisaram atividades com tabelas do conteúdo de Estatística apresentadas em livros didáticos de matemática do Brasil e de Quebec/CA. As autoras concluíram que os livros de ambos os países na maioria das vezes usam tabelas como objeto de estudo, e que isso significa uma mudança positiva no cenário brasileiro, uma vez que anteriormente o papel atribuído às tabelas era o de dar suporte a outros conceitos abordados.

Já Souza (2019) realizou uma pesquisa sobre o conteúdo de construção geométrica em coleções dos Anos Finais do Ensino Fundamental do Brasil e do Canadá. Em sua análise documental, o autor investigou quatro coleções, duas delas brasileiras e as outras

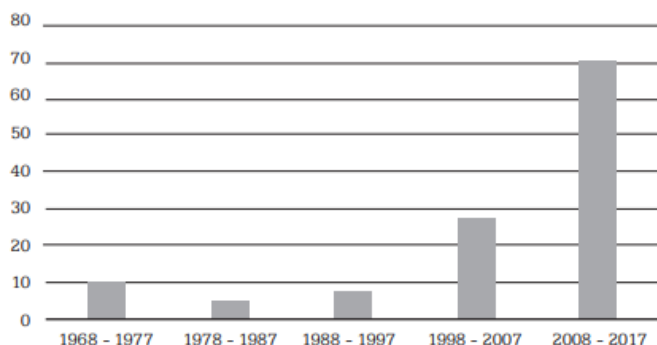
duas canadenses. Souza (2019) utilizou os documentos curriculares em vigência de cada país como referenciais do que esperava encontrar nas obras. Um dos resultados que seu trabalho alcançou foi a constatação de que, apesar de todas as coleções trabalharem em diversos momentos atividades com construções geométricas, apenas os temas circunferência e triângulos são propostos para construção em todos os livros analisados. A construção geométrica de outros objetos matemáticos, como ângulos, quadriláteros, reta perpendicular e retas paralelas, não foi solicitada em todas as coleções.

A dissertação de Souza (2019) também destaca uma diferença com relação às ferramentas que as coleções propõem na abordagem do conteúdo das construções geométricas: as coleções canadenses fazem uso da ferramenta geoplano, diferentemente das brasileiras, que, quando o fazem, é apenas citando e não propondo a sua utilização. Em geral, observa-se uma variedade maior de ferramentas sugeridas nas obras do Canadá. A contribuição de seu trabalho na presente pesquisa envolveu não apenas o tipo de pesquisa com livros didáticos do Brasil e do Canadá, mas também o tema da Geometria e suas conclusões acerca das ferramentas e dos materiais que estão mais presentes nas obras canadenses, assim como também se observou nesta dissertação.

3.3 Pesquisas sobre Transformações Geométricas e Isometrias

Como será apresentado no capítulo de Referencial Matemático, as Isometrias são Transformações Geométricas que preservam medidas. Assim, ao fazer a revisão de literatura, a busca por artigos e trabalhos acadêmicos que envolviam os tópicos das Transformações Geométricas e das Isometrias foi relevante para a pesquisa.

As pesquisas sobre Transformações Geométricas têm crescido nas últimas décadas. Delmondi e Pazuch (2018), em uma revisão sistemática da literatura, fizeram uma busca por artigos científicos em revistas da área de ensino classificadas com *Qualis A1* pelo portal WebQualis Capes e observaram que o número de publicações, entre os anos 2008 e 2017, encontradas com os descritores ‘geometria’, ‘isometria’, ‘transformações geométricas’, ‘transformações isométricas’ e ‘simetria’ teve um aumento significativo em comparação com as décadas anteriores, como pode ser observado pelo Gráfico 1.

Gráfico 1 – Artigos publicados por década.

Fonte: Delmondi e Pazuch (2018, p. 663).

Dentre os 70 trabalhos situados entre 2008 e 2017, os autores se debruçaram sobre 30, descartando aqueles que apresentavam apenas o descritor ‘geometria’, por se tratar de um tema mais amplo, que muitas vezes não possui relação direta com as Transformações Geométricas, foco de interesse da revisão realizada. Os artigos foram analisados e classificados segundo quatro unidades de análise, que podem ser lidas como as principais tendências de pesquisa em Transformações Geométricas e seu ensino atualmente, sendo elas: “a) Processos formativos, práticas docentes e conhecimentos do professor, b) Pensamento geométrico e relação com os estudantes, c) Conhecimentos geométricos e tecnológicos e d) Recursos didáticos e estratégias metodológicas” (DELMONDI; PAZUCH, 2018, p. 669). Diante dessa classificação, a presente dissertação provavelmente estaria situada na última unidade (item (d)), pois ela compreende pesquisas com livros didáticos, entretanto, também se entende que ela possui aproximações com as outras três unidades citadas.

Pensando no tema das Transformações Geométricas, um aspecto importante que aparece com regularidade nas pesquisas de ensino desse conteúdo é o conhecimento do professor e sua formação. Yanik (2011), em um estudo sobre os conhecimentos prévios de futuros professores de Matemática do Ensino Médio sobre o tópico, observou que, com relação ao conteúdo de translações, os futuros docentes tinham dificuldades em reconhecer, descrever, executar e representar a transformação. O pesquisador também identificou que os professores não relacionavam as translações com vetores.

Em outro trabalho com futuros professores, isto é, estudantes do último ano em um curso de Licenciatura em Matemática, realizado na Turquia, Turgut, Yenilmez e Anapa (2014) identificaram a dificuldade dos participantes com relação às rotações, no que diz

respeito a encontrar o centro e o eixo de rotação quando estes não eram fornecidos pela tarefa proposta.

Gomes (2012), por sua vez, investigou o conhecimento de Transformações Geométricas de futuras pedagogas em Portugal. Essa preocupação surgiu dado o contexto português em que o currículo prevê o início dos estudos do tema no ensino elementar, o que em linhas gerais corresponde aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental brasileiro. Portanto, o conteúdo aparece pela primeira vez sendo mediado por profissionais da Pedagogia, o que também ocorre no Brasil. O resultado do estudo alerta que a formação para ensinar as Transformações Geométricas nesse nível de ensino é bastante deficitária. A autora faz o destaque para as dificuldades encontradas pelas participantes em algumas Isometrias: nas reflexões, determinar mais de um eixo de simetria; nas translações, compreender os vetores; e, nas rotações, diferenciar das reflexões.

Já no Brasil, Barroso (2018), em sua tese sobre o conhecimento profissional para o ensino de Transformações Geométricas, investigou os conhecimentos de professores da Educação Básica em uma ação formativa referente ao conteúdo. Parte deles afirmou que não havia estudado o assunto em sua formação inicial. Os resultados obtidos revelaram que alguns não se lembravam dos nomes das Isometrias e não sabiam identificar quais simetrias estavam sendo representadas. A pesquisadora destacou que foi observada certa confusão conceitual, uma vez que os professores buscavam eixos de simetrias mesmo quando a Isometria apresentada era a rotação, indicando que associavam as simetrias como sinônimos das reflexões. Ela ainda sinalizou que “isto pode ser decorrente da ênfase dada a esse aspecto da simetria nos livros didáticos” (BARROSO, 2018, p. 238).

Mabuchi (2000) traz uma contribuição importante para a área de estudo do conhecimento dos professores em Transformações Geométricas. Após relatar que o assunto esteve presente nos currículos brasileiros há décadas, às vezes com mais, outras com menos relevância, a autora afirmou que este tema ainda não foi incorporado pelas práticas escolares, nem pela formação de professores. Em seu trabalho, a pesquisadora desenvolveu uma proposta com 34 professores de matemática sobre noções de Transformações Geométricas: uma série de dezenove atividades que exploravam as simetrias foi realizada pelos professores, divididos em nove grupos. Mesmo com a experiência de anos lecionando em escolas, muitos professores apresentaram procedimentos errados semelhantes aos de alunos do Ensino Fundamental ao realizar a atividade, revelando a dificuldade que possuem em posicionar o

eixo de simetria, em generalizar raciocínios e, principalmente, em justificar suas respostas. Sobre essa dificuldade em especial, a autora afirma:

Se, por um lado, a falta de domínio de alguns conhecimentos geométricos pode ser uma causa dessa dificuldade, por outro, podemos observar que a validação e justificativa não fazem parte das preocupações dos professores. Acostumados a um “ensino” em que os fatos matemáticos são “assim porque são”, eles não valorizam o processo de construção de conhecimentos, as relações entre eles, as explicações dos fatos (MABUCHI, 2000, p. 193).

Sabemos que os livros didáticos podem ter um papel muito importante no incentivo de justificativas de uma resolução, ajudando alunos e professores no processo de articular seus argumentos. No entanto, essa é uma habilidade que deve ser desenvolvida na formação profissional de professores, conscientizando-os da necessidade de saber justificar e oferecendo repertório para fazê-lo.

Falando agora mais especificamente sobre as Isometrias, Fontes e Fontes (2013) desenvolveram um estudo que tinha como objetivo verificar a presença das Isometrias nos livros didáticos de Matemática enviados pelo PNLD entre os anos de 2011 e 2013. O resultado da pesquisa mostrou que o conteúdo estava mais presente nos livros do 6º e 7º anos dos Anos Finais do Ensino Fundamental e que apenas uma coleção apresentava em todos os volumes. Na época, o documento curricular seguido eram os PCN (BRASIL, 1998), que já previa o ensino das Isometrias nessa etapa escolar, recomendando a abordagem nos quatro anos. Atualmente, com a BNCC (BRASIL, 2017) em vigor, o conteúdo é previsto no 7º e 8º anos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Considerando a história do tema, Rafael e Miranda (2018) afirmam que as Isometrias foram muitas vezes negligenciadas nas escolas por insegurança dos professores na hora de ensinar o assunto. Essa insegurança pode ser justificada pelo pouco ou nenhum contato que se tem com o conteúdo nos cursos de formação de professores, além das dificuldades que os alunos apresentam na Geometria como um todo (SENA; DORNELES, 2013; CHIRÉIA, 2013).

Ao analisar o conteúdo de simetrias de duas coleções de livros didáticos de Matemática do PNLD 2017, Rafael e Miranda (2018) notaram que o tema estava presente conforme os documentos curriculares nacionais e estaduais (no caso, Minas Gerais) determinavam e que a abordagem favorecia a contextualização e interdisciplinaridade das simetrias. No entanto, uma crítica que fizeram às obras foi sobre a ausência de situações em que os alunos fossem levados a “experimentar, conjecturar, argumentar, levantar hipóteses, formalizar e generalizar conceitos de Simetria” (RAFAEL; MIRANDA, 2018, p. 49). Essa

falta de tarefas que incentivam a articulação de justificativas, como já citado anteriormente, tem um efeito negativo em toda a prática escolar, tanto para os estudantes quanto para o professor, uma vez que não oportuniza ao leitor do livro didático possibilidades para exercitar sua criticidade e argumentação, que contribuiriam para a aprendizagem, como afirmam os pesquisadores.

Ainda pensando em como o conteúdo das Isometrias aparece nos livros didáticos de Matemática brasileiros, Sousa (2020) fez um estudo sobre a presença deste objeto matemático em três coleções dos Anos Finais do Ensino Fundamental. O autor detectou que, dos quatro tipos de simetrias, isto é, reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento, apenas os três primeiros estavam presentes nas coleções, também oriundas do PNLD 2017. O trabalho rendeu algumas observações sobre cada uma das três simetrias analisadas. No que diz respeito à reflexão, Sousa (2020) notou que esta é a Isometria mais presente nas obras e que seu tratamento possui forte conexão com as cores das figuras propostas, chegando a se tornar critério para identificação da simetria. Nas rotações, o destaque foi para o centro de rotação, que em algumas obras apareceu fora das figuras, e em outras apareceu dentro delas, não havendo ambas as possibilidades em uma mesma obra, o que limita o tratamento dessa simetria. Por fim, com relação às translações, foi observado um padrão repetitivo nas escolhas de direção e sentido propostas para a Isometria.

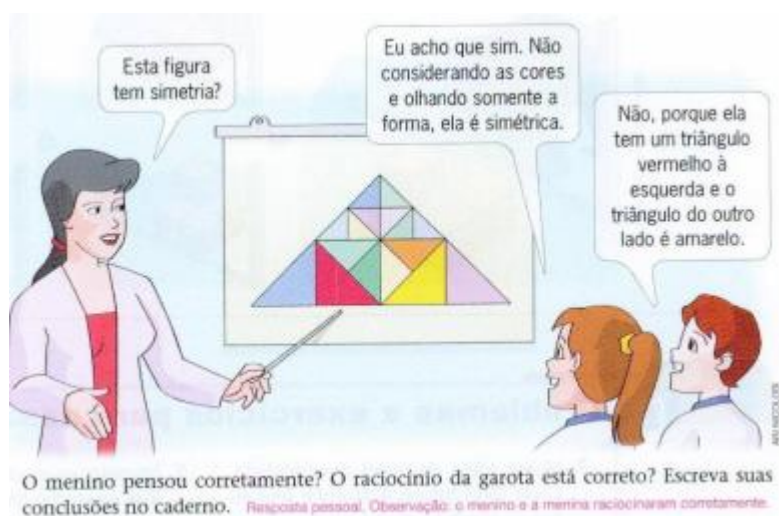
Sousa, Guimarães e Amaral-Schio (2021), com base em Santos (2010) e Fonseca (2013), evidenciaram o uso das cores no ensino das simetrias, em especial o das reflexões. Nos livros didáticos analisados por todos esses pesquisadores, o conteúdo das reflexões esteve bastante ligado às cores das figuras, levando-os a dizer que a cor parecia tomar qualidade geométrica, como se fosse uma propriedade que permitisse a identificação da presença ou não da Isometria, conforme exemplo mostrado abaixo. Sabemos que isso não está de acordo com os pressupostos geométricos, isto é, a cor não é uma propriedade geométrica e tal uso indevido ofusca as propriedades que são de fato geométricas e que deveriam ser estudadas.

Todavia, Fonseca (2013) reforça que as cores podem ser assumidas como critério de simetria nas escolas, e argumenta que:

Os livros didáticos de matemática para o ensino fundamental trazem a questão ao proporem atividades em que, implícita ou mesmo explicitamente inclui-se o critério de cor. Outro argumento é que um modelo mais amplo de simetria que permita o critério de cor representa uma ponte para interdisciplinaridade com as artes visuais (FONSECA, 2013, p. 78-79).

A Figura 2 apresenta um exemplo de como o autor usa a cor como critério de simetria.

Figura 2 – Exemplo de situação em que a cor é considerada um critério de simetria.



Fonte: Fonseca (2013, p. 79).

A Geometria independe das cores e suas propriedades devem ser compreendidas por si sós, embora diversas análises de livros didáticos mostrem o vínculo que se estabelece entre as cores e as simetrias (SANTOS, 2010; FONSECA, 2013; SOUSA, 2020). Durante a pesquisa, tal observação conduziu a pensar no potencial de sensação estética produzida pelo uso de cores no conteúdo das Isometrias, o que, como Fonseca (2013) ressalta, possibilita uma oportunidade de explorar a interdisciplinaridade do conceito. A Figura 2 mostra um exemplo disso.

Maciel, Rêgo e Carlos (2017) fizeram um estudo no qual as simetrias foram tema devido ao seu apelo estético, ilustrativo, decorativo e comunicativo. O trabalho investigou as possibilidades pedagógicas do uso de imagens fotográficas em livros didáticos de Matemática nos capítulos de simetria. Como resultado, os autores observaram que as obras fizeram “uso de uma grande quantidade de imagens, de uma maneira geral, e de fotografias, especificamente” (MACIEL; RÊGO; CARLOS, 2017, p. 361). Eles também afirmaram que, apesar de terem se deparado com uma forte presença de imagens fotográficas no tratamento das simetrias, o seu uso não foi sistemático e planejado, com vistas ao potencial dos meios imagéticos desse recurso.

A possibilidade de interdisciplinaridade que o conteúdo das simetrias tem com a arte é tema de diversos estudos acadêmicos. Esse potencial é bastante explorado também pelos livros didáticos, que, em diferentes medidas, propõem atividades que relacionam a arte e as Isometrias. O pesquisador Baptista (2014), em uma pesquisa sobre a arte contemporânea

no ensino das Transformações Geométricas, realizou um trabalho em uma escola com alunos da faixa etária do Ensino Fundamental brasileiro utilizando as obras de um artista contemporâneo – Nassos Daphnis – para sensibilizar os estudantes para o conteúdo das simetrias e dos padrões geométricos. Sobre seus resultados, diz:

[...] fica a certeza de que uma ação conjunta entre a Arte e a Geometria, associando elementos visuais e reais a ideias geométricas, não só, contextualiza os conhecimentos matemáticos como promove o amadurecimento do raciocínio, a autonomia intelectual, a criatividade e a imaginação dos alunos (BAPTISTA, 2014, p. 4).

Pensando na interdisciplinaridade com as artes visuais, Santos e Teles (2012) investigaram livros didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e mapearam as atividades que utilizavam diversas modalidades artísticas, como desenho, dobradura, padrões, gravuras, pintura e arquitetura. As pesquisadoras constataram que quase metade das tarefas utilizava desenho, enquanto o restante se dividia entre todas as outras modalidades citadas. O estudo mostrou que a interdisciplinaridade tem sido feita nos livros didáticos entre as simetrias e a arte, o que é um indicativo positivo para o ensino do conteúdo.

No entanto, com relação ao entendimento das propriedades das simetrias, Santos e Teles (2012) identificaram que as obras não apresentavam a formalização esperada, mantendo-se apenas nos aspectos intuitivos e pragmáticos das simetrias. Assim, as propriedades de preservação de medidas e da perpendicularidade de cada ponto em relação ao eixo de reflexão não eram destacadas.

Santos e Bicudo (2015) desenvolveram um curso de formação continuada com professores de Arte e de Matemática da Educação Básica, com foco no ensino das pavimentações do plano, tema interdisciplinar que contempla as duas áreas. No intuito de ampliar as possibilidades de ensino desse conteúdo geométrico, foram produzidas diversas peças de material concreto. Durante esse processo, as discussões entre os participantes e os formadores evidenciaram aspectos matemáticos e artísticos das pavimentações do plano. A atividade encorajou os professores a desejar estabelecer um contato mais próximo com outras áreas do conhecimento, especialmente entre a Arte e a Matemática devido ao curso desenvolvido. O trabalho das pesquisadoras mostra que atividades interdisciplinares para ensinar o conteúdo das Isometrias são muito relevantes e, para isso, os livros didáticos são bons meios para alcançar o professor e sua prática de ensino.

Já Oliveira (2016) ministrou um curso de extensão para professores de Matemática em que atividades sobre o conteúdo de Isometrias, em especial as reflexões,

foram propostas. Foram identificadas dificuldades e imprecisão na realização das tarefas. Uma das situações que exemplificam esse momento foi na realização de uma tarefa em que se pedia para refletir uma figura em torno de um eixo que a atravessava. Após algumas tentativas de resolver o exercício, foi relatado que os professores justificaram sua dificuldade pelo fato de a tarefa ser mais complexa porque os livros didáticos geralmente apresentam o eixo de reflexão como tangente ou mesmo fora da figura, e não quando ele atravessa a figura. A pesquisadora identificou que, durante o curso, os professores reconstruíram seus conhecimentos relacionados à reflexão e manifestaram a intenção de abordar o conteúdo em sala de aula.

Concluindo esta seção, vê-se que o conteúdo das Isometrias está presente nos currículos e livros didáticos (FONTES; FONTES, 2013; BRASIL, 2017; RAFAEL; MIRANDA, 2018), mas, como qualquer conteúdo e especialmente os que se relacionam com Geometria, em muitas situações não é abordado adequadamente na prática escolar (MABUCHI, 2000; SANTOS; TELES, 2012; OLIVEIRA, 2016; BARROSO, 2018). Além disso, observa-se uma lacuna na formação dos professores sobre este assunto, o que interfere nas condições de abordar as Isometrias com aptidão. Por fim, para a tarefa de ensinar as Isometrias, a literatura aponta que os livros didáticos podem contribuir ao propor o conteúdo com rigor matemático, atividades que demandem justificativas e o estabelecimento da interdisciplinaridade que dialoga tão bem com o tema.

4 REFERENCIAL MATEMÁTICO

O Referencial Matemático apresenta a bagagem teórica que foi utilizada na análise das coleções de livros didáticos dessa pesquisa. As discussões relacionadas à Matemática levantadas no capítulo de Análise estão fundamentadas nas definições apresentadas a seguir. Essa é a importância deste capítulo no trabalho: elucidar o que é o conteúdo das Isometrias e quais são seus principais aspectos relevantes para serem abordados na Educação Básica.

Nas páginas do Referencial as citações foram mantidas no texto sem recuo mesmo quando se estenderam por mais linhas que o recomendado para tal. A razão disso é uma escolha estética para que o capítulo tenha um padrão com definições, teoremas e proposições apresentados da mesma maneira.

4.1 Simetrias e Transformações Geométricas

A ideia de simetria está presente no mundo, na cultura e no conhecimento, como, por exemplo, na natureza, nas artes, na arquitetura e na Matemática. Ela assume papéis diferentes dependendo de em qual desses contextos está sendo abordada. Talvez por causa desse variado uso do termo ‘simetria’, o entendimento matemático coletivo desse conceito pode acabar não sendo rigorosamente bem formado por quem o utiliza.

Coloquialmente, a principal noção atrelada à simetria em Matemática é a ideia de reflexo, de espelhamento, de coisas iguais ao serem divididas ao meio por uma reta ou segmento. Trata-se da simetria axial. Este é um bom ponto de partida para entender o que é simetria, mas não é o único significado que iremos trabalhar aqui.

Podemos chamar de simetria aquilo que é preservado após uma transformação. Segundo Rohde (1997, p. 9), “a simetria é uma operação que mantém uma forma invariante”. Assim, na Geometria Euclidiana Plana, além da simetria axial, também chamada de reflexão em torno de uma reta, como veremos neste capítulo, existem outros tipos de simetria. Neves (2011, p. 12) diz que, ao falar sobre simetria, “o que mais nos importa não é o que se repete, e sim como se repete.” Então as simetrias também contemplam as rotações e as translações, que preservam ou repetem outras características, diferentes da reflexão.

Antes de ver como são definidas essas simetrias, é necessário entender que elas fazem parte de um certo grupo de funções no plano chamado de Transformações Geométricas. Vejamos o que queremos dizer com transformações (WAGNER, 1998):

Definição 1: “Uma transformação T no plano Π é uma função $T: \Pi \longrightarrow \Pi$ que associa a cada ponto A um outro ponto $A' = T(A)$. Portanto, chamaremos de A' a imagem de A por T . Da mesma forma, se F é uma figura (portanto um conjunto de pontos de Π) definiremos $F' = T(F)$ como conjunto das imagens dos pontos de F ” (WAGNER, 1998, p. 70).

4.2 Isometrias

Neste trabalho vamos nos debruçar sobre um conjunto especial de Transformações Geométricas do plano: as Isometrias. Para entendê-las, é necessário apresentar a definição geral de distância, isto é, em qualquer conjunto (LIMA, 1983):

Definição 2: “Uma métrica num conjunto M é uma função $d: M \times M \rightarrow R$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

$$d_1) d(x, x) = 0;$$

$$d_2) \text{ Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0;$$

$$d_3) d(x, y) = d(y, x);$$

$$d_4) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).” \text{ (LIMA, 1983, p. 6).}$$

No caso do R^2 , que é o conjunto que mais nos interessa nesse trabalho já que na Educação Básica do Brasil e do Canadá a abordagem das isometrias está vinculada ao plano, sabemos que dois pontos distintos determinam um segmento e, portanto, a distância será entendida como o comprimento desse segmento (LIMA, 1996):

Definição 3: “Admitimos que foi fixada uma unidade de comprimento e indicamos com $\overline{AB}$ o comprimento do segmento de reta AB . Escreveremos também $d(A, B)$ em vez de $\overline{AB}$ e diremos que se trata da distância do ponto A ao ponto B . Tem-se sempre $\overline{AB} \geq 0$, com $\overline{AB} = 0$ se, e somente se, $A = B$ ” (LIMA, 1996, p. 1).

Com a noção de que distância é o comprimento de um segmento de reta, podemos entender a definição de Isometria no plano:

Definição 4: “Uma *isometria* do plano Π é uma transformação $T: \Pi \longrightarrow \Pi'$ que preserva distâncias. Isto significa que, dados $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$ ” (LIMA, 1996, p. 13).

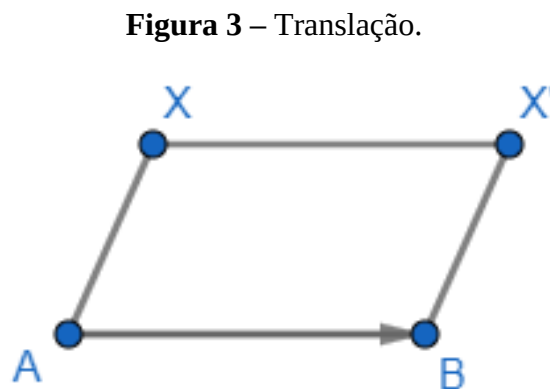
Assim temos que as Isometrias são aquelas transformações que mantêm iguais os comprimentos de todos os segmentos nos quais elas são aplicadas.

É pertinente aproveitar esse ponto da discussão e citar as homotetias, que se caracterizam exatamente por não manter os comprimentos dos segmentos envolvidos na transformação, causando uma ampliação ou redução das distâncias e preservando a medida dos ângulos envolvidos, conforme a definição abaixo.

Definição 5: “Fixado um ponto O no plano Π e dado um número real $k \neq 0$, a *homotetia de centro O e razão k* é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto $A' = H_{O,k}(A)$ tal que $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ ” (WAGNER 1998, p. 70).

A seguir, apresentaremos as diferentes Isometrias do plano com exemplos de cada transformação. O exemplo trivial de Isometria é a função identidade $I_d: \Pi \longrightarrow \Pi$. As definições a seguir serão apresentadas conforme Lima (1996).

Translação. “Sejam A, B pontos distintos do plano Π . A *translação* $T_{AB}: \Pi \longrightarrow \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados” (LIMA, 1996, p. 18). A Figura 3 ilustra a definição.



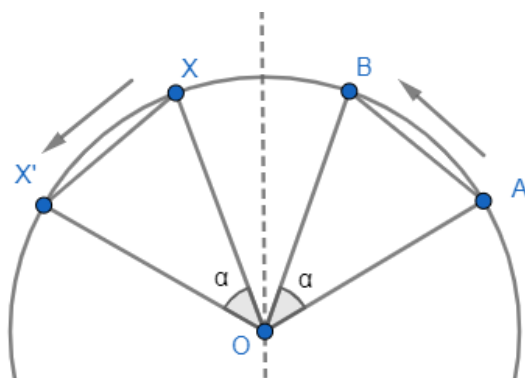
Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Esta definição de $T_{AB}(X)$ é aplicada apenas quando A, B e X não são colineares. O caso em que X pertence à reta AB é uma Isometria da reta, que pode ser estudada em Lima (1996). Além disso, na definição de T_{AB} , deve-se levar em conta a ordem em que são

mencionados os pontos A e B , afinal, a translação T_{BA} é diferente de T_{AB} . Temos que $T_{BA} = (T_{AB})^{-1}$.

Rotação. “Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O . A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha}: \Pi \longrightarrow \Pi$ assim definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que $d(X, O) = d(X', O)$, $X\hat{O}X' = \alpha$ e o “sentido de rotação” de A para B é o mesmo de X para X' ” (LIMA, 1996, p. 21), ilustrada pela Figura 4.

Figura 4 – Rotação.

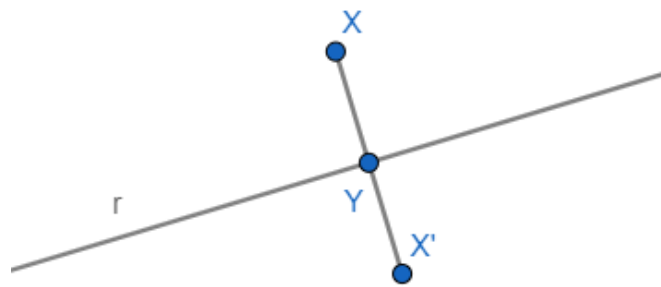


Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Na rotação, assim como na translação, a ordem que são mencionados os pontos A e B importa, pois altera o sentido de rotação. Podemos chamar de sentido horário (Figura 4, de B para A) e sentido anti-horário (Figura 4, de A para B) para distinguir os dois sentidos de rotação.

Reflexão em torno de uma reta. “Seja r uma reta no plano Π . A reflexão em torno da reta r é a função $R_r: \Pi \longrightarrow \Pi$ assim definida: $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r . Em outras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r . Então Y é o ponto médio do segmento XX' ” (LIMA, 1996, p. 16). A Figura 5 ilustra a isometria.

Figura 5 – Reflexão em torno da reta r .

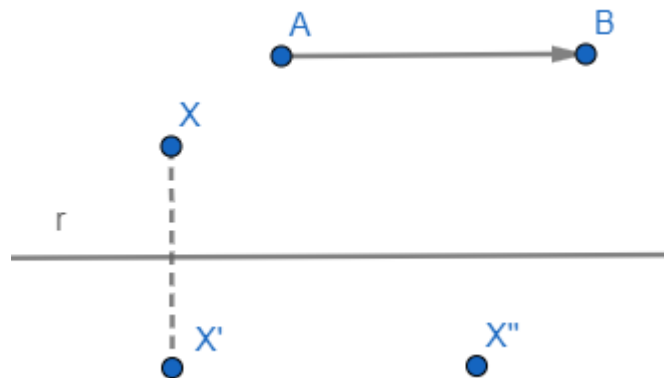


Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Reflexão com deslizamento. “Sejam $v = \overrightarrow{AB}$ um vetor não-nulo⁵ e r uma reta paralela a v no plano Π . A *reflexão com deslizamento*, determinada pelo vetor v e pela reta r , é a isometria $t = T_v \circ R_r: \Pi \longrightarrow \Pi$, obtida fazendo a translação T_v seguir-se à reflexão R_r ” (LIMA, 1996, p. 23).

Para ilustrar a definição, consideramos a reflexão do ponto X em torno da reta r , obtendo X' , e em seguida sua translação a partir do vetor $\overrightarrow{AB}$ que resultou no ponto X'' (Figura 6).

Figura 6 – Reflexão com deslizamento.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

A reflexão com deslizamento é a única das isometrias que utiliza a função composição em sua definição, por se tratar de uma isometria que só pode ser obtida a partir da

⁵ Um vetor não-nulo é um objeto matemático na forma de um segmento de reta que possui direção (a mesma da reta em que o segmento está contido), sentido (dado pelo sentido do movimento) e módulo (o comprimento do segmento).

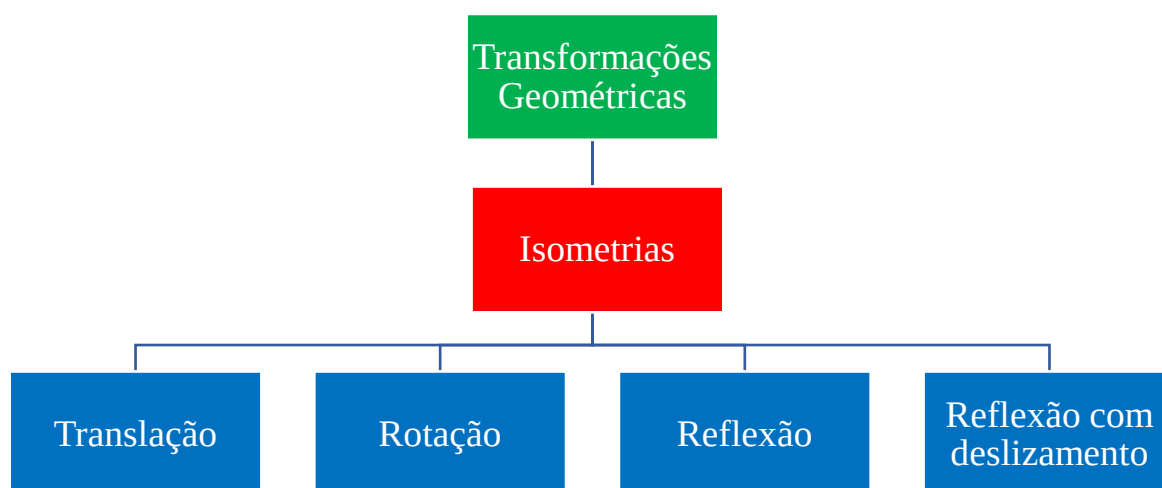
aplicação da reflexão seguida da translação ou vice-versa. Assim, a função composição atua como sendo essa sucessão de transformações, nesse caso de duas isometrias.

Por fim, temos o seguinte teorema, que faz a classificação de todas as Isometrias do plano:

Teorema 1: “Existem apenas quatro tipos de isometrias $T: \Pi \longrightarrow \Pi$ do plano Π , além da função identidade, a saber: translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento” (LIMA, 1996, p. 26).

Sendo assim, o esquema abaixo (Figura 7) organiza as informações acumuladas até aqui sobre as Transformações Geométricas estudadas.

Figura 7 – Transformações Geométricas



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Como foi apresentado no início do capítulo, as Isometrias são simetrias, pois elas preservam distâncias e seus nomes poderiam ser escritos como simetria de translação, simetria de rotação, simetria de reflexão e simetria de reflexão com deslizamento, embora neste trabalho se opte por referir-se a elas sem a palavra “simetria”, por razões de escrita. A seguir, é feita a discussão sobre os pontos fixos de cada Isometria.

4.2.1 Pontos fixos

Uma característica interessante de ser observada no estudo das Isometrias no plano é o número de pontos fixos dessas transformações. Revisitando cada uma das Isometrias apresentadas, temos que:

a) A translação T_{AB} não possui pontos fixos. Para todo $X \in \Pi$, com $T(X) = X'$, tem-se $d(X, X') = d(A, B)$.

b) A rotação $\rho_{O, \alpha}$ tem como único ponto fixo o centro de rotação, isto é, O , como diz a definição. Para todo $X \neq O$ em Π , com $\rho_{O, \alpha}(X) = X'$, tem-se $d(X, O) = d(X', O)$.

c) A reflexão em torno de uma reta R_r tem como pontos fixos os pontos da reta r , ou seja, os infinitos pontos $X \in r$ e, para todo $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ e com $Y \in r$, tem-se $d(X, Y) = d(X', Y)$.

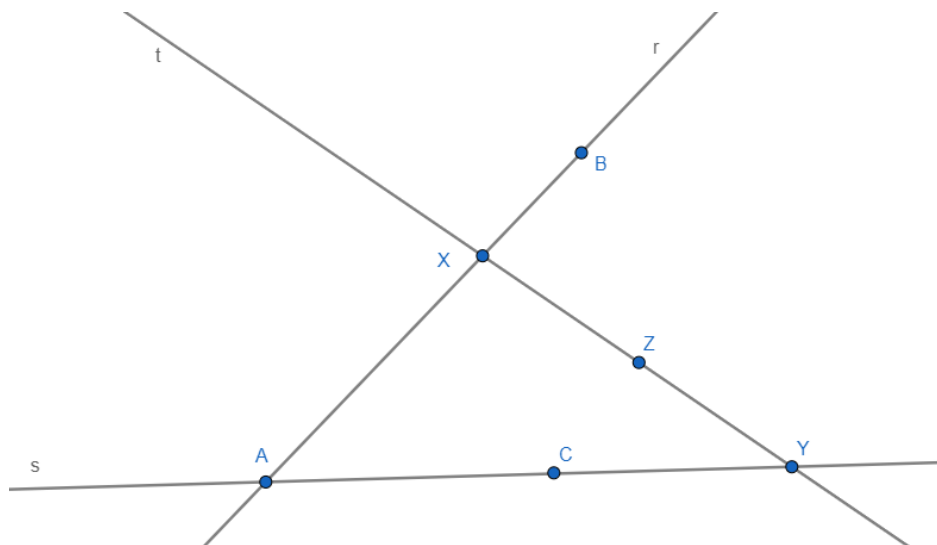
d) A reflexão com deslizamento $T_v \circ R_r$, assim como a translação T_{AB} , não possuem pontos fixos.

A partir da discussão sobre os pontos fixos das Isometrias, fazem-se algumas proposições que serão apresentadas a seguir. Consta também a demonstração da primeira proposição, de acordo com o que foi proposto por Lima (1996), para que o leitor veja qual é o raciocínio usado para esses resultados que classificam as Isometrias. Além disso, a apresentação da demonstração pode instigar professores a refletirem sobre a possibilidade de uso de algum trecho dela no ensino ou no incentivo ao seu estudo em sala de aula.

Proposição 1: “Se uma isometria $T: \Pi \longrightarrow \Pi$ possui três pontos fixos não colineares então $T = \text{identidade}$ ” (LIMA, 1996, p. 24).

Demonstração: Considere A, B e C pontos não colineares no plano Π , e que $T(A) = A, T(B) = B$ e $T(C) = C$. Sejam as retas $r = AB$ e $s = AC$, ilustradas pela Figura 8.

Figura 8 – Demonstração da Proposição 2.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

A imagem da reta r pela Isometria T é a reta que passa pelos pontos $T(A) = A$ e $T(B) = B$. Sendo assim, $T(r) = r$. Daí, a restrição $T|_r$ é uma isometria da reta r , com dois pontos fixos distintos A e B . Usando o resultado que diz que se uma Isometria na reta possui dois pontos fixos distintos então ela é a função identidade, tem-se $T(X) = X$ para todo $X \in r$. Da mesma forma se vê que $T(Y) = Y$, para todo ponto $Y \in s$. Seja agora um ponto Z qualquer do plano Π que não esteja nem em r nem em s , pois se estivesse T já seria a identidade. Daí, passa-se por Z uma reta t que corta r e s respectivamente nos pontos X e Y . Como $T(X) = X$ e $T(Y) = Y$, a conclusão é que T deixa fixos todos os pontos da reta t . Em particular, $T(Z) = Z$. Sendo Z um ponto qualquer do plano Π , temos que $T =$ identidade.

4.2.2 Movimentos e Isometrias Próprias e Impróprias

A aplicação dessas Isometrias em pontos, retas e figuras do plano geram o que chamamos de movimento, conforme a definição apresentada por Lima (1996):

Definição 6: “Um *movimento* no plano Π é uma coleção de isometrias $H_t: \Pi \longrightarrow \Pi$, uma para cada número real $t \in [0,1]$, tal que $H_0 =$ identidade e, para cada ponto $P \in \Pi$ fixado, o ponto $H_t(P)$ varia continuamente em função de t , quando t vai de 0 a 1” (LIMA, 1996, p. 30).

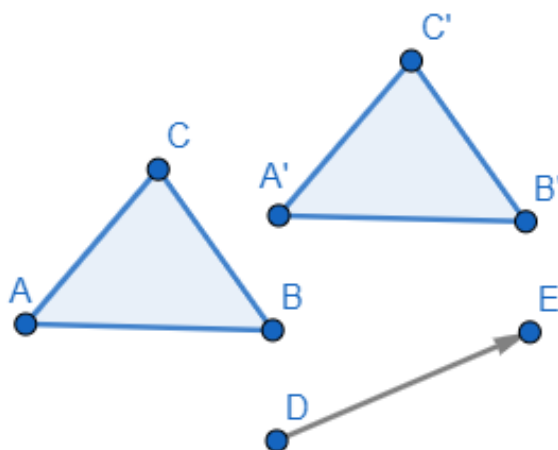
Ou seja, um movimento é formado por todos os estágios que os pontos passam desde a etapa inicial (H_0), em que o ponto ainda não começou a ser movimentado, até o resultado final (H_1), em que a transformação se completa. Uma palavra fundamental na definição de Lima é “continuamente”, que considera tudo o que se passa entre H_0 e H_1 sem sair do plano Π .

Usando essa ideia de movimento e, em especial, a noção de continuidade, podemos classificar as isometrias em dois tipos: própria e imprópria.

Definição 7: “Uma isometria $T: \Pi \longrightarrow \Pi$ chama-se própria quando existe um movimento $H_t: \Pi \longrightarrow \Pi$, $0 \leq t \leq 1$, tal que $H_1 = T$. Em outras palavras, uma isometria chama-se própria quando é a etapa final de um movimento. Por outro lado, a isometria T chama-se imprópria quando nenhum movimento no plano Π termina com T ” (LIMA, 1996, p. 31).

Assim, são chamadas de isometrias próprias aquelas que são concluídas a partir de um movimento contínuo dos pontos no plano (Figura 9).

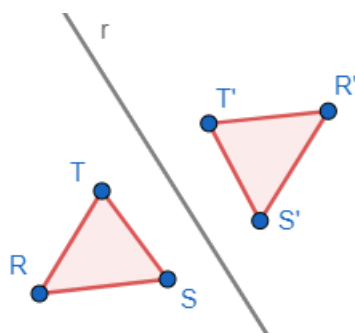
Figura 9 – Exemplo de isometria própria (Translação).



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Já as isometrias impróprias são as que não são completas com um movimento contínuo dos pontos no plano, isto é, os pontos precisam sair do plano de origem e retornar para completar a isometria (Figura 10).

Figura 10 – Exemplo de isometria imprópria (Reflexão).



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Outra maneira de definir essa classificação é a partir da noção de orientação.

Definição 8: “Orientar uma reta r significa escolher um sentido de percurso em r e chamá-lo de positivo. O sentido oposto será denominado negativo” (LIMA, 1996, p. 10).

Definição 9: “Diz-se que uma isometria $T: r \longrightarrow r$ preserva orientação (ou é própria) quando, dado qualquer par ordenado (X, Y) de pontos de r , o sentido de percurso $X \longrightarrow Y$ coincide com o sentido $X' \longrightarrow Y'$, onde $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$. Caso contrário, diz-se que T inverte orientação (ou que é imprópria)” (LIMA, 1996, p. 11).

As Figuras 9 e 10 podem ser usadas para a verificação da orientação dos pontos nos dois casos descritos acima: enquanto a orientação dos pontos transformados na Figura 9 é mantida, o sentido de orientação dos pontos da Figura 10 é invertido após a transformação. Desse modo, as isometrias apresentadas anteriormente se classificam da seguinte maneira: Translação e Rotação são próprias e Reflexão e Reflexão com Deslizamento são impróprias.

Euclides, em seu primeiro livro dos Elementos, traduzido por Irineu Bicudo (BICUDO *et al.*, 2009, p. 99), apresenta a seguinte noção comum: “coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si”. Séculos depois, essa declaração se tornou objeto das críticas às noções comuns feitas por diversos matemáticos, entre eles Hilbert (1862-1943), que levantaram problemas em alguns trechos dos Elementos. A noção comum em questão, que assume a ideia de sobreposição, não é justificada pelos postulados ou definições de Euclides. Portanto, apresentar a sobreposição como uma noção comum é considerado ‘forte’ demais para ser usado sem provas, pois a partir dela se assume um bom grupo de movimentos rígidos no plano.

Em seu livro sobre a Geometria Euclidiana, o matemático Robin Hartshorne (2013) comenta que Euclides utiliza essa noção comum em apenas duas proposições do primeiro volume dos Elementos e em nenhum outro lugar, o que pode significar que Euclides sabia que era uma afirmação pouco sustentável. De todo modo, Hilbert, em *The Foundations of Geometry* (1902), apresenta como um axioma a congruência de dois triângulos, no caso lado-ângulo-lado (LAL). Dessa maneira, fica permitido fazer movimentos rígidos no plano, o que é a mesma coisa que garantir que o plano é homogêneo, isto é, a geometria é a mesma em diferentes partes do plano.

Encerrando o Referencial Matemático, espera-se que o material levantado nas páginas anteriores tenha oportunizado para o leitor uma revisão do conteúdo das Isometrias e de suas principais características. A aplicação dessas transformações em pontos, o conceito de simetria, o uso de vetores nas translações, o ponto fixo das rotações e a questão da sobreposição e classificação de isometria imprópria da reflexão serão focos de interesse posteriormente no capítulo de Análise.

5 METODOLOGIA

O presente capítulo visa apresentar quais foram os fundamentos metodológicos, as coleções de livros didáticos utilizadas e os procedimentos empregados na realização dessa pesquisa, a começar pela metodologia da pesquisa qualitativa.

5.1 Pesquisa qualitativa

A pesquisa aqui desenvolvida possui uma abordagem qualitativa, uma vez que “esse modo de pesquisa dá destaque à descrição” (BICUDO, 2012, p. 122). Bogdan e Biklen (1994) elencaram algumas características da investigação qualitativa e comentaram que nem todos os estudos qualitativos as contemplam da mesma maneira. Fazem parte do presente trabalho as seguintes características:

[...] 2. A investigação qualitativa é descritiva; 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados indutivamente; 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47-50).

A característica que se relaciona com o tratamento investigativo a partir da descrição condiz com o que foi realizado nesta pesquisa. Nela, as descrições do que se observou demonstram o interesse pelo processo e pela análise indutiva, que busca chegar a uma reflexão sobre os significados dos dados produzidos.

Ainda segundo os mesmos autores, na pesquisa qualitativa “as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 50). Nesse cenário, o investigador assume que tudo o que é observado tem relevância e, portanto, pode representar uma constatação que aumenta a compreensão do objeto estudado.

Assim, a abordagem qualitativa pode levar o pesquisador a não apenas descrever o que se observou, mas também a refletir criticamente e a gerar conclusões sobre o objeto observado. O que move o estudo pode variar, pois a pesquisa qualitativa “trabalha com o universo de significados, motivações, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis” (MINAYO, 2002, p. 21-22).

Dado que o objetivo central desse trabalho é compreender o tratamento sobre isometrias dos Livros Didáticos de Matemática do Brasil e do Canadá em coleções dos Anos Finais do Ensino Fundamental/*Elementary School*, o paradigma qualitativo contribuiu para o que se pretendeu alcançar. Isso deu pois os dados produzidos surgiram da descrição do que se observou nas páginas que continham o conteúdo desejado e, em seguida, passaram pela interpretação, reflexão crítica e análise teórica feitas pelo pesquisador.

É importante destacar que adotar a pesquisa qualitativa não significa renunciar a dados quantitativos. Goldenberg (1999, p. 53) afirma que “a maior parte dos pesquisadores em ciências sociais admite, atualmente, que não há uma única técnica, um único meio válido de coletar os dados em todas as pesquisas” e que “os métodos qualitativos e quantitativos, nesta perspectiva, deixam de ser percebidos como opostos para serem vistos como complementares” (GOLDENBERG, 1999, p. 53). Como será observado mais à frente, neste trabalho há um levantamento quantitativo de particularidades como o número de tarefas dos livros didáticos selecionados para análise, pois se entende que, através desses dados, algumas reflexões, próprias da pesquisa qualitativa, podem ser realizadas.

5.2 As coleções de livros didáticos da pesquisa

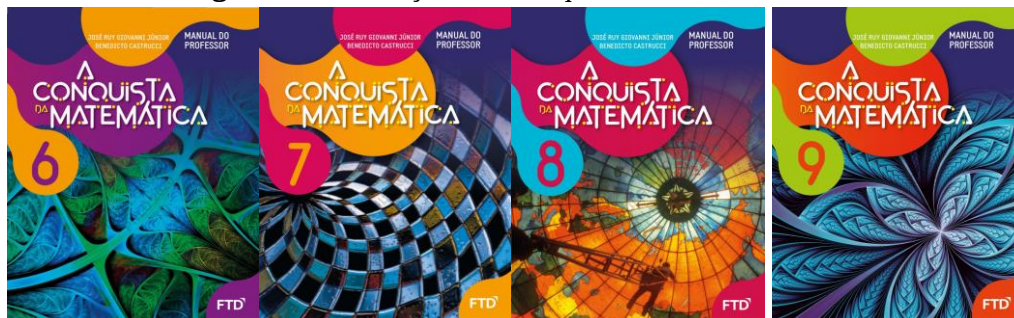
A etapa educacional escolhida foi a dos Anos Finais do Ensino Fundamental, pois é dessa etapa que tive acesso a coleções brasileiras mais recentes, aprovadas no PNLD de 2020. No Canadá essa fase é chamada de *Elementary School* e vai da *Grade 1* até a *Grade 8*. Os livros didáticos dos últimos quatro anos da *Elementary School* correspondem aos livros brasileiros que fizeram parte da análise.

A coleção brasileira analisada chama-se ‘A Conquista da Matemática’ (Figura 11), publicada em 2018 pela editora FTD Educação, com autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci. Aprovada no PNLD 2020, a coleção foi a mais escolhida pelos professores nessa edição do programa, alcançando praticamente 50% do total de livros distribuídos⁶. Assim, das onze coleções da disciplina de Matemática aprovadas no PNLD 2020, escolhi ‘A Conquista da Matemática’ pelo grande alcance que teve. Embora seja impossível eleger uma coleção como a representante brasileira de como os livros didáticos de Matemática são, atentei para o fato de que esta obra teve larga distribuição e que, por isso, era

⁶ Dado coletado da página dos dados estatísticos do PNLD 2020. Disponível em: <https://www.fn.de.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 18 ago. 2021.

a coleção de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental mais presente nas escolas públicas do país no período da pesquisa.

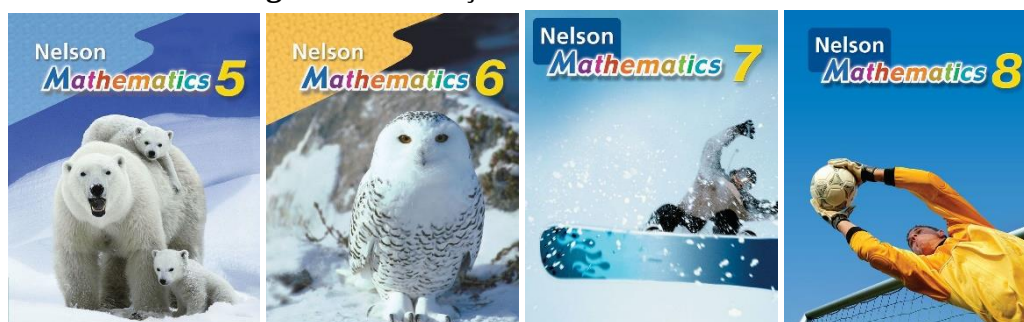
Figura 11 – Coleção ‘A Conquista da Matemática’.



Fonte: Livros de Giovanni e Castrucci, da esquerda para a direita (2018a; 2018b; 2018c; 2018d).

A coleção canadense escolhida para análise é a ‘*Nelson Mathematics*’, de 2004 (Figura 12), pela editora Nelson Canada, escrita por Marian Small e Mary Lou Kestell. Como explicado no capítulo de Preliminares, a educação no Canadá se divide em diversas províncias e territórios, cada uma com o seu próprio Ministério da Educação e legislações regionais. A coleção ‘*Nelson Mathematics*’ é usada na província de Ontário, a mais populosa do país. Essa coleção faz parte da *Trillium List*, uma lista dos livros aprovados pelo Ministério da Educação de Ontário. A escolha por essa coleção se deu, principalmente, pelo meu acesso aos livros, além de ser uma coleção considerada consolidada na educação canadense, dado que a licença para ela continuar sendo usada foi renovada duas vezes, permitindo que ela se mantivesse nas salas de aula por 15 anos desde a primeira aprovação.

Figura 12 – Coleção ‘*Nelson Mathematics*’.



Fonte: Livros de Small e Kestell, da esquerda para a direita: (2004a; 2004b; 2004c; 2004d).

Assim, tendo as coleções de livros didáticos sido apresentadas, a seção seguinte conta com a descrição dos procedimentos de análise, além das unidades e dimensões estabelecidas para a produção dos dados.

5.3 Procedimentos, unidades e dimensões de análise

Uma vez já expostos os fundamentos, o contexto e o objeto de pesquisa, o Quadro 1 mostra a sequência de procedimentos metodológicos realizados e os parágrafos que o sucedem procuram esmiuçar cada um deles.

Quadro 1 – Procedimentos metodológicos.

Escolha das coleções de livros didáticos para análise
Delimitação do <i>corpus</i> de análise
Reconhecimento do texto
Criação de dimensões de análise
Produção das descrições, interpretações e argumentos
Escrita da dissertação

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Como visto anteriormente, o texto da análise realizada é o livro didático de Matemática, mais especificamente as duas coleções indicadas. O *corpus* da análise é formado pelas páginas que envolvem o conteúdo de Isometrias, objeto matemático de interesse da pesquisa.

Após o processo de reconhecimento do texto, percebeu-se que os livros já possuíam certas divisões didáticas com relação às partes teóricas, exemplos, tarefas etc. Essa segmentação característica dos livros didáticos foi ao encontro fragmentação do texto analisado a fim de identificar focos de interesse que propiciassem a produção dos dados.

Assim, três unidades de análise foram estabelecidas. São elas: Conceituação, Exemplos e Tarefas. A Conceituação abrange passagens em que os autores apresentam definições e conceitos matemáticos, enquanto os Exemplos são aquelas propostas que possuem resolução no corpo do texto.

As tarefas serão definidas de acordo com Litoldo (2021):

[...] uma tarefa matemática, que será chamada a partir de agora apenas como tarefa, diz respeito a todo e qualquer tipo de proposta, ofertada por esses materiais [os Livros Didáticos], a ser resolvida pelo estudante (LITOLDO, 2021, p. 101).

Assumindo essa ideia de tarefa, um enunciado que é dividido em itens, como por exemplo, 1a), 1b) e 1c), foi contabilizado como três tarefas distintas, pois, apesar de

possuírem um mesmo enunciado inicial, existem três propostas sendo ofertadas para os estudantes realizarem e, portanto, três tarefas.

É importante destacar que, por se tratar de duas coleções diferentes, e com organizações próprias do seu texto, essas unidades se adaptaram a cada material analisado. O Quadro 2 detalha o que cada unidade contempla.

Quadro 2 – Descrição das unidades de análise.

Conceituação: trechos dos livros em que os autores se dedicam a definir um conceito ou explicar alguma ideia por meio de textos, imagens, diagramas etc.
Exemplos: propostas resolvidas pelos autores para exemplificar a aplicação de um conceito ou para servir de modelo na resolução das tarefas.
Tarefas: propostas para os estudantes realizarem envolvendo os conteúdos matemáticos estudados.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Em seguida foram definidas as dimensões a partir do referencial teórico matemático das Isometrias e do que se observou durante o reconhecimento do texto. As dimensões criadas foram: Simetria, Translação, Rotação e Reflexão. Como será reforçado mais a frente, a justificativa para a dimensão Simetria existir, mesmo que por si só ela não seja um tipo de Isometria, foi que ambas as coleções analisadas dedicam esforços abordando esse tópico isoladamente, o que foi fonte de dados relevantes para o seu entendimento e para a compreensão do conteúdo de Isometrias, assim como se objetivava com este trabalho. Por outro lado, a Isometria de reflexão com deslizamento não constituiu uma dimensão de análise devido à não ser abordada pelas coleções.

O Quadro 3 evidencia as dimensões de análise e algumas de suas temáticas, isto é, os principais pontos de análise dentro de cada dimensão.

Quadro 3 – Principais temas das dimensões de análise.

Simetria: uso das cores, uso de materiais, definição vinculada à reflexão.
Translação: vetores de translação, preservação da orientação.
Rotação: centro da rotação dentro ou fora da figura.
Reflexão: definição por ajustamento, simetria axial.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Após o reconhecimento do texto e a definição das dimensões, seguiram-se as etapas de produção de descrições, interpretações e argumentos da análise e sua escrita. O resultado da aplicação do método apresentado é o próximo capítulo. Nele, busca-se apresentar

as observações, comparações e interpretações trazendo os trechos dos livros didáticos que ajudaram a entender melhor o fenômeno proposto.

Esperamos, assim, que o capítulo seguinte comunique a análise da pesquisa desenvolvida e apresente uma contribuição para o estudo deste tema.

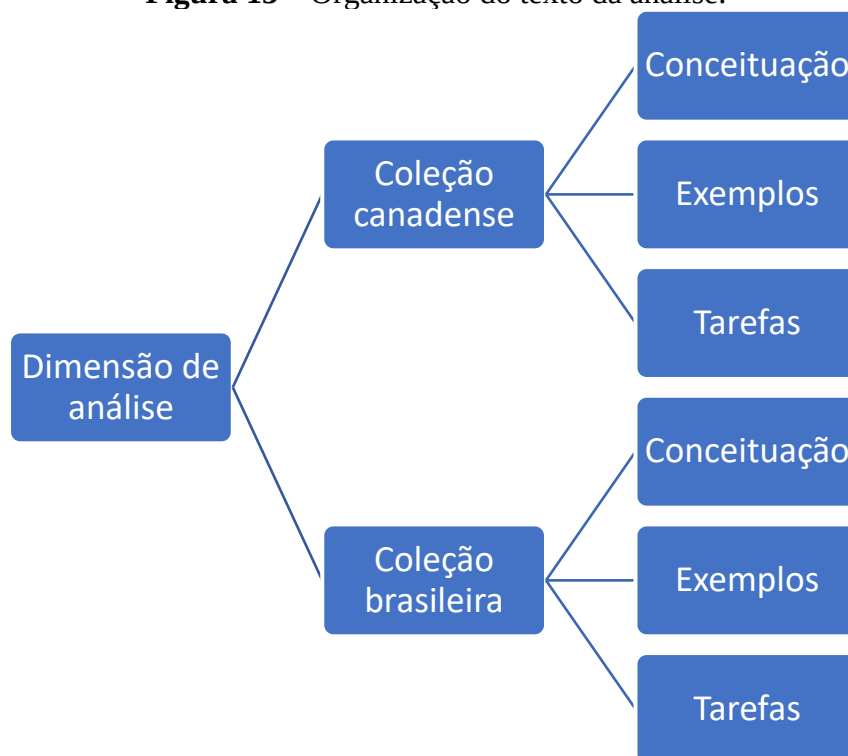
6 ANÁLISE DOS DADOS

Antes de começar, é necessário comentar sobre a realização da análise e sua apresentação nesse capítulo. A apresentação da análise começa pela coleção canadense e depois a coleção brasileira, apesar da ordem no texto até este momento ter sido a inversa. Essa decisão foi tomada devido ao volume de informações que a coleção canadense gerou ter sido superior ao da brasileira, até mesmo por ter mais páginas analisadas, o que fez com que a apresentação da análise ficasse mais rica começando pelos livros canadenses.

A cronologia das coleções foi respeitada dentro de cada dimensão de análise, isto é, ao tratar de translações, olhei para todo o desdobramento do conteúdo ao longo da coleção canadense e da coleção brasileira.

Assim, o texto se organiza da seguinte maneira: primeiramente está dividido nas quatro dimensões de análise (a ordem é: Simetria, Translação, Rotação, Reflexão). Na sequência, dentro de cada dimensão, a divisão se dá por país (primeiro apresentando a análise da coleção canadense e depois da coleção brasileira) e então, em cada coleção, se organizou segundo as unidades de análise (a ordem é: Conceituação, Exemplos e Tarefas), como indica a Figura 13. Em uma mesma unidade de análise, existem trechos de volumes diferentes de cada coleção, então a ordem cronológica das obras foi aproveitada para encadear os dados de maneira coerente.

Figura 13 – Organização do texto da análise.



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Em cada dimensão apresentam-se as descrições, as interpretações e os argumentos que o estudo gerou. Ao final dessa etapa, o capítulo se encerra com uma seção que determina as correspondências com o Referencial Matemático identificadas na análise, além de apresentar algumas reflexões analíticas feitas pelo pesquisador, que não serão chamadas de teóricas, mas que refletem pontos que foram sistematicamente observados durante a análise e que possuem relevância nas conclusões deste trabalho.

Um esclarecimento sobre a codificação das obras referenciadas também deve ser feito: os quatro volumes da coleção canadense possuem como título o número de acordo com a série escolar correspondente (os números são 5, 6, 7 e 8, conforme a *Elementary School* no Canadá), enquanto os volumes da coleção brasileira estão associados aos últimos quatro anos do Ensino Fundamental (os números são 6, 7, 8 e 9, de acordo com os Anos Finais do Ensino Fundamental no Brasil), o que gerou um descompasso na numeração, já que o volume 7 em uma coleção não correspondia ao volume 7 da outra, por exemplo. Desse modo, nessa análise se utilizou a notação CN1, CN2, CN3 e CN4 para se referir aos quatro volumes da coleção canadense e BR1, BR2, BR3 e BR4 para os volumes da coleção brasileira, a fim de facilitar o estabelecimento de relações entre as coleções e a compreensão do leitor.

Como pode ser conferido nas páginas em que se apresenta a análise de cada obra, em diversos momentos do texto são citados os nomes das seções dos livros, o que levou à necessidade de explicar de que maneira se estrutura cada coleção do ponto de vista dos *boxes* interativos e da identidade de cada uma. Assim, antes de iniciar as primeiras dimensões de análise, apresentamos um breve relato da estrutura de cada coleção, começando pela coleção canadense e, em seguida, a coleção brasileira.

6.1 Coleção canadense

Os livros CN1 e CN2 apresentam uma diagramação distinta da que é vista nos livros CN3 e CN4, mesmo fazendo parte da mesma coleção. Os dois primeiros possuem as letras maiores, mais figuras e cores, enquanto os dois últimos trazem uma ampla variedade de tarefas como ponto forte. Apesar dessas diferenças, a estrutura da coleção canadense possui um padrão, que está descrito abaixo.

As páginas de abertura dos capítulos são marcadas por duas seções: ‘Começando’ (que apresenta uma atividade guiada explorando algum tema central do capítulo) e ‘Você se lembra?’ (uma seção que elenca algumas tarefas e perguntas sobre conteúdos anteriores que serão importantes no estudo do capítulo que se inicia). Na sequência, o texto estabelece uma estrutura que começa com um exemplo na forma de explicação de um estudante, seguido de três seções de tarefas (‘Refletindo’, ‘Verificando’ e ‘Praticando’).

Esse ciclo ‘exemplo e três seções’ se repete conforme os temas vão aparecendo e compõe a maior parte dos livros, até que páginas especiais surgem, como a seção de ‘Revisão da Metade do Capítulo’ (que tem uma lista de tarefas para revisão dos conteúdos das páginas anteriores); ‘Perguntas Frequentes’ (um resumo do conteúdo em forma de perguntas e respostas); ‘Matemática Curiosa’ (podendo ser encarada como um pequeno desafio, a seção trata de uma tarefa guiada e geralmente mais divertida, que envolve algum conteúdo estudado até aquele momento no capítulo); ‘Jogo de Matemática’ (a seção propõe um jogo com regras que exploram as aprendizagens do capítulo até aquele momento); ‘Matemática Mental’ (explora cálculos mentais e conclusões que demandam apenas raciocínio lógico); e as ‘Imagens Mentais’ (uma seção que aparece poucas vezes, mas que visa trabalhar recursos visuais, com a análise de imagens, decomposição de partes de uma mesma figura, identificação de padrões, etc.).

No ciclo final dos capítulos, observam-se as seções chamadas de ‘Banco de Habilidades’ (que, através de tarefas, retoma as principais habilidades que foram trabalhadas nas partes anteriores do capítulo); ‘Banco de Problemas’ (uma seção com maior variedade de tarefas de cada parte anterior); e ‘Revisão do Capítulo’ (com a mesma intenção da ‘Revisão da Metade do Capítulo’, desta vez com todos os conteúdos apresentados).

As páginas especiais ao final dos capítulos são chamadas de ‘Tarefa do Capítulo’ (em que consta geralmente um desafio interdisciplinar e prático relacionado ao tema estudado) e a ‘Investigação Cruzada’ (uma atividade guiada com problemas contextualizados que envolvem o conteúdo do capítulo). Ao final de um conjunto de três ou quatro capítulos, os livros canadenses também apresentam uma ‘Revisão Cumulativa’, que inclui testes de múltipla escolha sobre os conteúdos de todos os capítulos contidos na revisão. A coleção ainda possui um glossário com alguns conceitos matemáticos nas últimas páginas de cada livro.

6.2 Coleção brasileira

A coleção brasileira possui uma estrutura de capítulos que começam com as páginas de abertura do capítulo, chamadas de ‘Abertura de Unidade’, nas quais são apresentados alguns textos e imagens que se relacionam com o conteúdo do capítulo, além de perguntas motivadoras do tema. Em seguida, inicia a abordagem dos conteúdos, que possui o formato de texto motivador e explicação com exemplos e figuras.

No decorrer desse texto, pode-se encontrar algumas seções, como, por exemplo: ‘Pense e Responda’ (que pretende indagar os estudantes e fazê-los refletirem sobre algum aspecto do conteúdo); ‘Saiba Que’ (seção que apresenta uma breve informação extra que a obra considera oportuna para aquele momento do livro); ‘Descubra Mais’ (que compila indicações de *sites* e livros para serem consultados); ‘Fórum’ (seção que tem uma proposta de levantar um debate entre a turma, para incentivar o desenvolvimento de argumentos sobre um tema); ‘Nós’ (esta seção propõe reflexões para serem realizadas em grupos, sobre valores relevantes para a sociedade). As seções de tarefas são chamadas de ‘Atividades’, e aparecem depois de algumas páginas do texto teórico, geralmente duas vezes por capítulo.

Já no final dos capítulos, as seções que podem ser encontradas são: ‘Por Toda a Parte’ (que destaca interdisciplinaridades da Matemática com outras áreas do conhecimento), ‘Educação Financeira’ (seção que apresenta algumas noções de Matemática Financeira e hábitos conscientes de consumo), ‘Tratamento da Informação’ (que busca apresentar dados estatísticos, tabelas, organização de dados, etc.), ‘Tecnologias’ (seção que propõe o uso de ferramentas tecnológicas para trabalhar o conteúdo estudado) e ‘Atualidades em Foco’ (que pretende mostrar o papel da matemática em temas atuais e de importância social).

Por fim, a obra ainda tem duas seções que possuem a intenção de revisar o que se aprendeu. São elas: ‘Um Novo Olhar’ (seção que apresenta um texto fazendo um panorama do que se viu no capítulo e com perguntas autoavaliativas para os alunos responderem) e ‘Retomando o que Aprendeu’ (que oferece mais tarefas de todo o conteúdo para os alunos praticarem).

6.3 Dimensão de análise – Simetria

A primeira dimensão de análise – Simetria – foi criada devido ao trabalho específico voltado para o tema que ambas as coleções realizam. Sabe-se que a ideia de

simetria está ligada à preservação de alguma característica, apesar de muitas vezes o conceito ser relacionado pelos autores de livros didáticos apenas à reflexão, como será abordado futuramente. Ambas as coleções apresentaram seções em seus livros que abordaram o tema Simetria, fazendo um destaque que é, em teoria, independente das Isometrias, o que levou à necessidade de analisar essas páginas com um olhar diferenciado, sem fazer o esforço de subdividir o tema da simetria em cada uma das Isometrias estudadas.

Apesar disso, é importante reforçar que o entendimento de simetria neste trabalho é mais amplo do que o que foi verificado nas coleções analisadas e está de acordo com Rohde (1997), como apresentado no referencial teórico. Aqui, portanto, apresenta-se a análise do que cada coleção enuncia apenas como simetria, sem especificar se é simetria de reflexão, simetria de rotação ou simetria de translação, embora seja observado o forte vínculo que as obras estabelecem entre a ideia de simetria e a simetria de reflexão, como será apontado e discutido nas páginas a seguir.

Desse modo, iniciaremos pela análise dessa dimensão na coleção canadense e, em seguida, na coleção brasileira.

6.3.1 Simetria – Coleção canadense

Na coleção canadense, o conteúdo de simetria aparece nos volumes CN1 e CN2. Em ambos os volumes, a simetria surge dentro de um capítulo chamado ‘Geometria 2D’. A seguir, apresentaremos o desenvolvimento desse tema em cada uma das três unidades de análise.

Conceituação

Esta unidade de análise mostrou que a coleção canadense não possui o foco de definir formalmente os conceitos no seu texto, uma vez que os livros possuem um direcionamento que trabalha os conceitos a partir de exemplos e tarefas. O conceito de simetria não é definido formalmente na obra CN1 (e em nenhuma outra posterior da coleção). O mais próximo de uma formalização acontece na seção ‘Glossário’ do livro do estudante em dois momentos diferentes: o primeiro deles surge no ‘Glossário’ do CN1, no qual entre diversos termos e conceitos matemáticos os autores apresentam o seguinte significado de eixo de simetria: “uma reta que divide uma figura 2D em metades que correspondem ao dobrar a

figura na reta de simetria” (SMALL; KESTELL, 2004a, p. 418, tradução nossa). É possível notar que o conceito é apresentado a partir da noção de dobra ou ajuste, como Euclides cita em sua obra, e que foi discutido no referencial teórico, devido às críticas que essa noção recebeu de diversos matemáticos.

O segundo momento em que a coleção se aproxima de definir simetria, ou de pelo menos um tipo de simetria, é no ‘Glossário’ do CN2, em que se encontra o significado de Simetria Rotacional: “uma figura que cabe exatamente em si mesma mais de uma vez em uma rotação completa tem simetria rotacional” (SMALL; KESTELL, 2004b, p. 460, tradução nossa). Aqui se percebe o foco na simetria de rotação, como o próprio nome Simetria Rotacional indica. Assim, as páginas que abordam esse conteúdo serão analisadas na dimensão da Rotação, uma vez que a obra deixou explícito que se referia à rotação nessa conceituação.

Assim, o conceito de simetria independente das Isometrias não é apresentado pela coleção canadense.

Exemplos

Na unidade de análise Exemplos, citarei dois momentos em que a simetria apareceu. Os exemplos apresentados nem sempre oferecem a resolução completa da questão trabalhada. Em um subcapítulo chamado ‘Construindo Figuras Simétricas’ (Figura 14), em que o objetivo apresentado pelos autores era ‘construir figuras 2D com uma reta de simetria’, é possível acompanhar um exemplo da atividade que está sendo pedida para o aluno por meio de duas imagens que mostram o que ele deve realizar.

Figura 14 – ‘Construindo Figuras Simétricas’ – CN1.

CHAPTER 7
1

Constructing Symmetrical Shapes

Goal Construct 2-D shapes with one line of symmetry.

Alain's Symmetry Puzzle

I made a puzzle by hiding the left half of a symmetrical picture.

You will need

- grid paper
- a transparent mirror
- a ruler
- a protractor

? How can you use symmetry to complete Alain's picture?

- Complete Alain's picture on grid paper. Use the grid to draw a matching side so that the picture is symmetrical.
- Check for symmetry using a transparent mirror. Check again by folding the paper along the **line of symmetry**.
- Mark a point on one half of the picture.
- Use a transparent mirror to find the matching point on the other half of the picture.
- Connect the two matching points.
- Measure the distance from each point to the line of symmetry.
- Measure angle G made by the line of symmetry and the **line segment** joining the two matching points.
- Mark three more pairs of matching points.

190

Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 190).

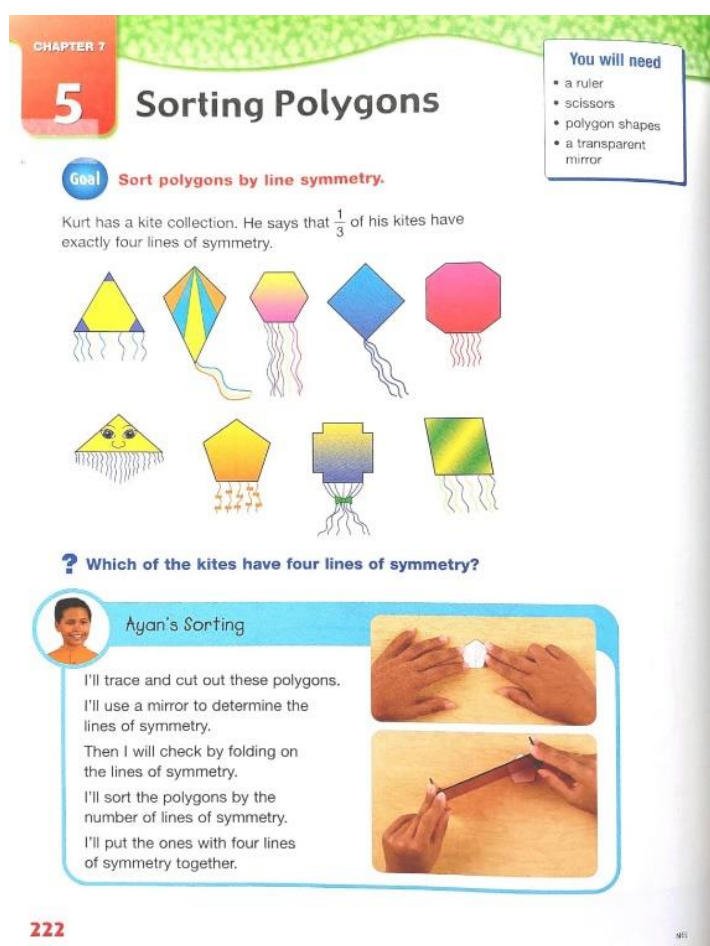
É importante notar os diferentes dispositivos que o texto do livro didático propõe para que o aluno verifique a simetria. No passo B do exemplo, a obra sugere que o aluno utilize o material espelho transparente e depois use o método de dobrar o papel no eixo de simetria, para ver se as figuras ficam ajustadas corretamente. Entre os passos C e G, os autores sugerem uma verificação mais formal, sustentada pelas ideias de preservação de distância e de ângulo, utilizando régua e transferidor. As imagens na lateral acompanham o texto e contribuem na visualização do que está sendo orientado aos alunos.

O exemplo, que evidencia as características isométricas da simetria, em momento algum faz a formalização desse conceito. As conclusões ficam a cargo do acompanhamento do exemplo, podendo o professor ou os próprios estudantes escreverem o que a atividade guiada proporcionou de ganhos teóricos, mas o texto didático não compila essa informação.

Na sequência, algumas perguntas motivam os alunos a formalizar a Isometria da simetria independentemente do uso de papel quadriculado, espelho transparente ou dobradura, e depois a praticar essa habilidade em três novas figuras, utilizando qualquer uma das maneiras de verificação da simetria (as tarefas serão analisadas na unidade de análise correspondente). Novamente, o livro não apresenta as conclusões conceituais, deixando essa função para o professor e os alunos.

O segundo momento em que se identificou um exemplo que envolvia simetria está presente no volume CN2, em um subcapítulo chamado ‘Classificando Polígonos’ (Figura 15). O objetivo que consta no livro é ‘classificar polígonos a partir dos eixos de simetria’. Está ligado a uma parte anterior do livro em que já havia apresentado que o número de eixos de simetria é considerado uma propriedade que pode ser usada na descrição e classificação de polígonos.

Figura 15 – ‘Classificando Polígonos’ – CN2.



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 222).

A proposta envolve classificar as pipas (os polígonos) de acordo com o número de eixos de simetria que possuem. A atividade reforça novamente a verificação da simetria através do espelho transparente ou do ajustamento a partir da dobra, deixando de trabalhar com as medidas de distâncias e ângulos, como pode ser observado no *box* da classificação de Ayan (Figura 15).

Um destaque importante a ser feito sobre essa página é com relação ao uso das cores nos polígonos. Mencionado na revisão de literatura, Fonseca (2013) cita esse uso das cores e da sensação estética que elas produzem no tema das Isometrias, em especial nas simetrias e reflexões. Em diversos momentos a coleção canadense fez essa proposta de maneira positiva: explorou figuras coloridas e empregou esse recurso com caráter funcional na Matemática, isto é, trazendo informações relevantes para o ensino.

No entanto, na Figura 15 vemos um exemplo oposto disso: o modo como se propõe o uso das cores pode prejudicar o aprendizado e confundir o estudante. O gradiente de cor, em especial, é o recurso que mais atrapalha na identificação da simetria, uma vez que cria subfiguras que podem alterar a percepção de quantos eixos de simetria cada polígono possui.

Note-se que o objetivo apresentado pelos autores é fazer classificações a partir dos eixos de simetria, mas a escolha de direções dentro da figura sofre a intervenção de uma propriedade não matemática: as cores. O gradiente de cor faz com que os polígonos sejam naturalmente lidos com uma certa direção privilegiada e, em casos como o hexágono, o pentágono e o dodecágono côncavo da Figura 15, tal aspecto pode levar ao apagamento de diversos eixos de simetria.

Tarefas

Com relação à unidade de análise Tarefas, a dimensão de Simetria é a que menos teve tarefas dentre as analisadas na coleção canadense. Isso ocorreu porque as simetrias não possuem seções que tenham o propósito de trabalhar o conteúdo com exclusividade: sempre estão associadas a alguma outra ideia, como, por exemplo, a construção de figuras simétricas e a classificação de polígonos a partir do número de eixos de simetria.

Dentre as 34 tarefas encontradas sobre simetrias, apresentaremos a seleção de algumas que se destacaram na análise dos livros, começando com a seção ‘Refletindo’ (Figura 16).

Figura 16 – Tarefas – CN1.

Reflecting

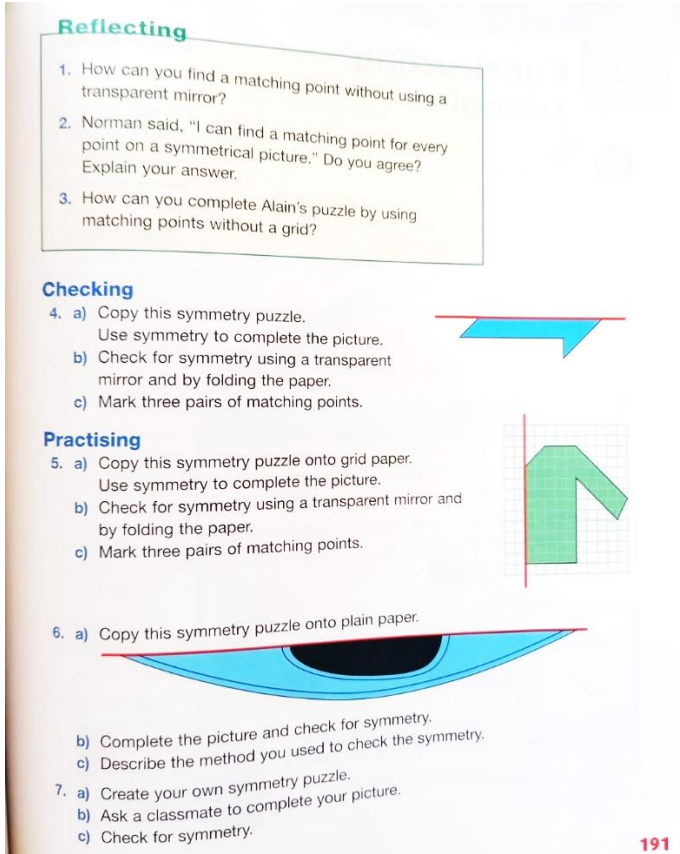
1. How can you find a matching point without using a transparent mirror?
2. Norman said, "I can find a matching point for every point on a symmetrical picture." Do you agree? Explain your answer.
3. How can you complete Alain's puzzle by using matching points without a grid?

Checking

4. a) Copy this symmetry puzzle.
Use symmetry to complete the picture.
b) Check for symmetry using a transparent mirror and by folding the paper.
c) Mark three pairs of matching points.

Practising

5. a) Copy this symmetry puzzle onto grid paper.
Use symmetry to complete the picture.
b) Check for symmetry using a transparent mirror and by folding the paper.
c) Mark three pairs of matching points.
6. a) Copy this symmetry puzzle onto plain paper.
b) Complete the picture and check for symmetry.
c) Describe the method you used to check the symmetry.
7. a) Create your own symmetry puzzle.
b) Ask a classmate to complete your picture.
c) Check for symmetry.



Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 191).

A seção ‘Refletindo’, como o nome indica, possui o caráter de promover o pensamento através de indagações que devem ser respondidas com argumentos que demonstrem o entendimento do estudante sobre a atividade realizada. As tarefas exigem arguições dissertativas, ou seja, convidam o aluno a expressar suas reflexões em respostas discursivas por escrito.

Na Figura 16, a primeira tarefa da seção visa que o aluno conclua que pode encontrar pontos simétricos com o uso da régua e do transferidor, ou apenas usando a observação, em casos em que o papel quadriculado permita a visualização exata das medidas. A segunda tarefa estimula que o estudante estenda esse raciocínio para qualquer ponto em uma figura simétrica, enquanto a terceira finaliza a seção excluindo o papel quadriculado, fazendo com que a conclusão da atividade seja que basta garantir que as distâncias e os ângulos com relação ao eixo de simetria de pontos correspondentes sejam os mesmos para afirmar que existe simetria.

As tarefas demandam que os alunos reflitam sobre as propriedades da simetria, generalizem ideias e articulem tudo isso em argumentos que respondam as perguntas. A

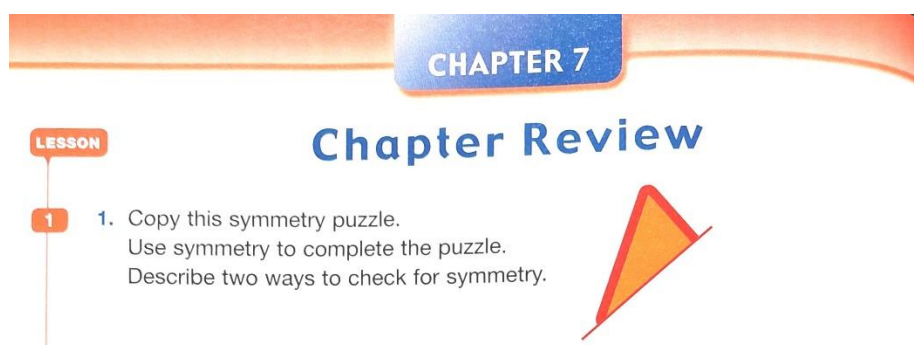
progressão de conclusões que a sequência de tarefas proporciona oportuniza uma evolução coerente das propriedades isométricas da simetria.

Na sequência, tem-se as seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’, que trazem tarefas alternando o uso do papel quadriculado, a direção do eixo de simetria e o formato da figura – indo de polígonos a imagens arredondadas, incentivando as três formas de verificação da simetria que foram apresentadas no exemplo. Por fim, as três últimas tarefas pedem que os alunos criem suas próprias figuras simétricas e que as troquem entre si, identificando a simetria nas figuras uns dos outros.

Sobre as tarefas citadas no parágrafo anterior, apesar de fazerem perguntas semelhantes, as figuras vão adicionando novas camadas ao conteúdo, propondo experiências com e sem o uso do papel quadriculado, com figuras poligonais e não poligonais, que possuem ou não subfiguras internas, até que seja conferida para o estudante a autonomia de criar sua própria figura com simetria.

Presente na seção de ‘Revisão do Capítulo’, a Figura 17 apresenta a tarefa que resgata o que foi aprendido no subcapítulo relacionado à simetria.

Figura 17 – Tarefa da ‘Revisão do Capítulo’ – CN1.



Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 214).

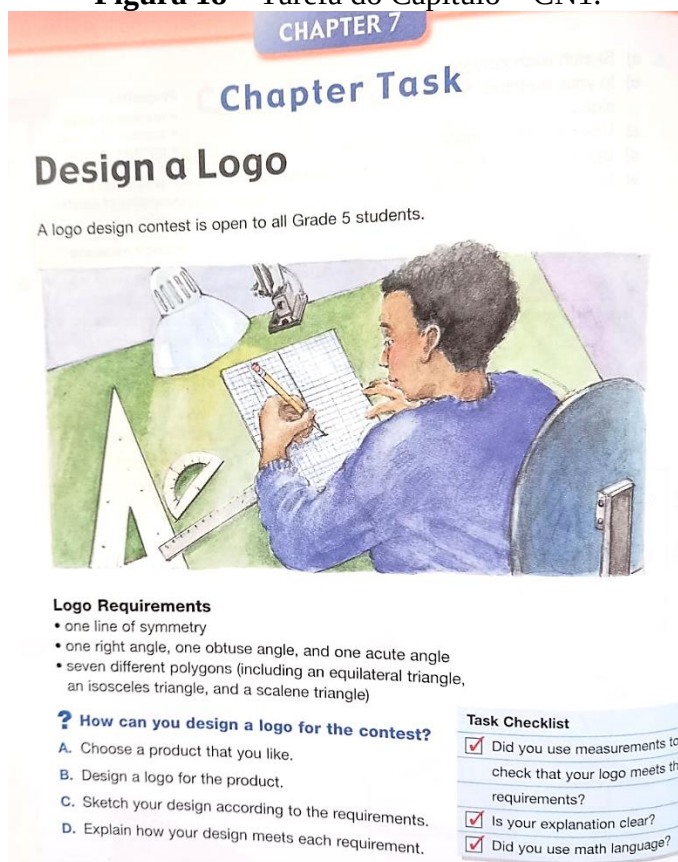
Note-se que a estrutura do enunciado da tarefa é bastante similar à que foi apresentada durante o capítulo, com exceção da última instrução: pede-se que se descrevam duas maneiras para verificar a simetria. Dentre as três formas de identificação da simetria que foram abordadas nas tarefas anteriores, aqui são pedidas duas, sem que nada sobre elas seja citado, mobilizando o estudante a responder com quaisquer duas formas que preferir.

Um ponto a ser levantado é a maneira como o livro canadense faz a conexão entre as partes do capítulo e a revisão. À esquerda da tarefa, pode-se observar o número (destacado em laranja) do subcapítulo a que a tarefa se refere, o que permite que o estudante revise com

facilidade o conteúdo abordado na tarefa, caso sinta necessidade. Tal particularidade demonstra a conexão que o livro estabelece consigo mesmo e o comprometimento com o encadeamento didático que faz nas seções de revisão. Essa ligação que referencia em qual subcapítulo se estudou o tema da tarefa proposta acontece em diversas seções, como ‘Revisão da Metade do Capítulo’, ‘Banco de Habilidades’, ‘Banco de Problemas’ e ‘Revisão do Capítulo’.

Completando a análise dessa dimensão no CN1, a seção ‘Tarefa do Capítulo’ (Figura 18) é proposta no final do capítulo e visa um trabalho interdisciplinar e mais prático.

Figura 18 – Tarefa do Capítulo – CN1.



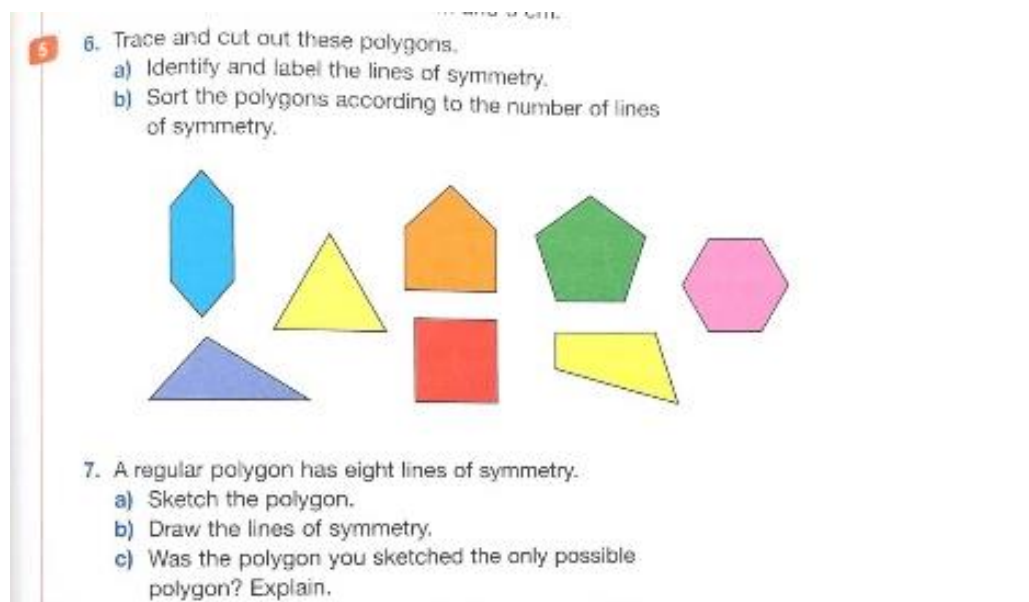
Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 216).

Através de alguns requisitos que os alunos devem se atentar, as quatro tarefas propõem que eles criem um logotipo utilizando algumas noções de simetria, pensando nos eixos de simetria da arte final. Essas tarefas estabelecem uma interdisciplinaridade entre a Matemática e a Arte, e explora o potencial de sensação estética das simetrias.

No livro CN2, após a atividade de classificação de polígonos a partir dos eixos de simetria (analisada e criticada anteriormente devido à escolha do uso do gradiente de cores), os autores propõem algumas tarefas que exploram a característica dos polígonos regulares de

possuírem o mesmo número de lados e de eixos de simetria. Exemplos dessas tarefas podem ser vistas na Figura 19:

Figura 19 – Tarefas do ‘Banco de Habilidades’ – CN2.



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 227).

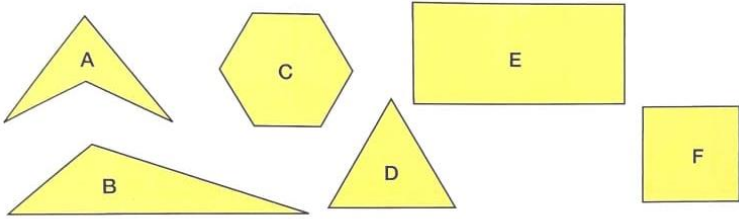
Todas as cinco tarefas da Figura 19 trabalham a classificação de polígonos a partir dos eixos de simetria. Sobre as duas primeiras (6(a) e (b)), os autores orientam que os alunos desenhem e recortem os polígonos representados, para depois fazerem a verificação do número de eixos de simetria e, por fim, classificá-los. Aqui vemos que as cores não geram confusão, nem atrapalham a identificação de possíveis eixos de simetria, já que foi escolhida apenas uma cor para cada polígono e seu uso foi uniforme dentro da região poligonal.

Enquanto estas duas primeiras tarefas da Figura 19 pretendem exercitar a habilidade de observar e depois descrever (identificação de eixos de simetria e classificação de polígonos a partir dessa propriedade), as demais tarefas presentes (7(a), (b) e (c)) fazem o inverso: após a descrição do número de eixos de simetria, o estudante deve buscar um polígono em que possa observar tal característica. Estas cinco tarefas se completam em suas propostas e a finalização com a tarefa 7(c), que faz o resgate da relação do número de lados dos polígonos regulares com os eixos de simetria, agrega mais valor a essa lista de tarefas encontrada na seção ‘Banco de Habilidades’.

A Figura 20 mostra as tarefas da seção de ‘Revisão do Capítulo’.

Figura 20 – Tarefas da ‘Revisão do Capítulo’ – CN2.

5 7. Order these polygons from least to most lines of symmetry.



8. Sketch at least three polygons for each description.
If a polygon is not possible, explain why.

- a) a regular polygon with at least four lines of symmetry
- b) a regular polygon with six lines of symmetry
- c) a polygon with fewer than four lines of symmetry

P1

Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 231).

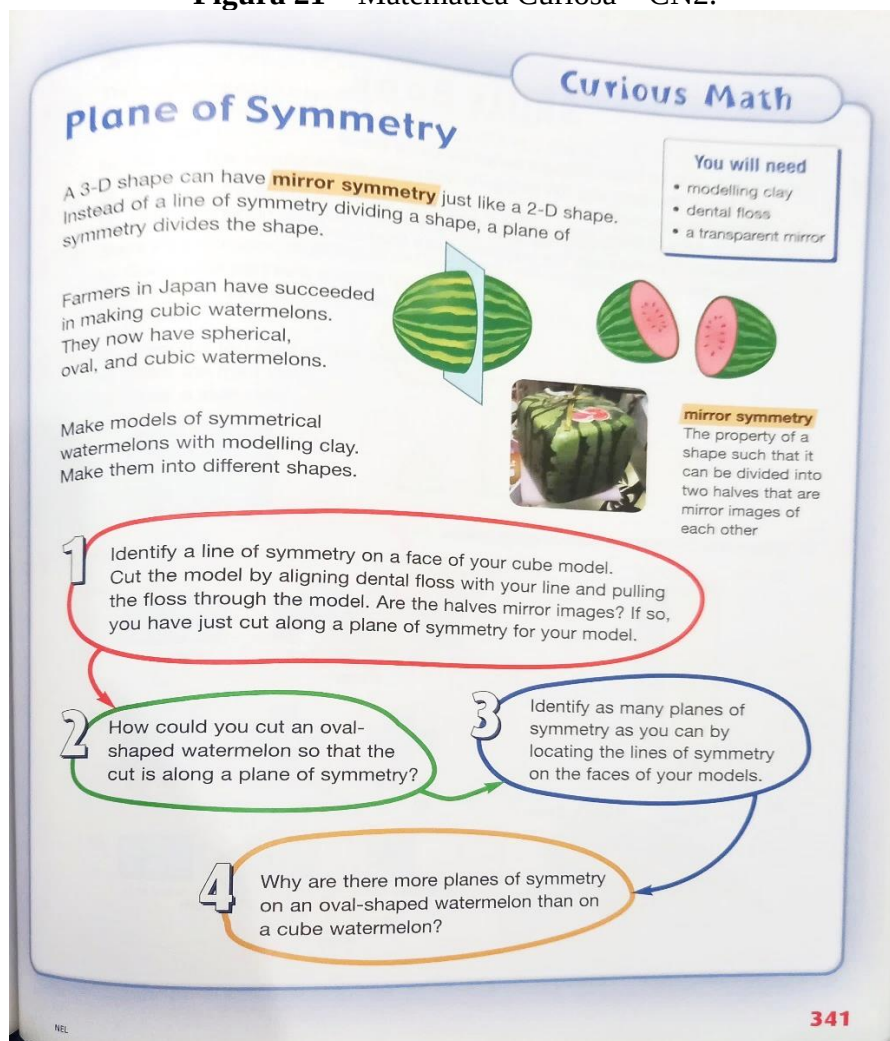
Observe-se que as quatro tarefas destacam tudo o que já se falou nos parágrafos anteriores, inclusive pode ser estabelecido um paralelo entre as tarefas das Figuras 19 e 20; no entanto, percebe-se que estas tarefas demandam complexidades maiores que as anteriores. Os polígonos da primeira tarefa (7) desta vez não só estão com uma cor interna única e uniforme, mas também estão todos coloridos com a mesma cor, o que indica um interesse menor para a aparência das figuras e maior para suas características matemáticas.

Pensando no desdobramento do tratamento de classificação de polígonos por meio dos eixos de simetria, percebe-se que a obra canadense começa com um abuso de cores com os gradientes de cor (de modo que chega a ser prejudicial para a aprendizagem do aluno), segue para uma seleção de polígonos coloridos com cores diferentes, mas uniformes em cada figura, e conclui com polígonos idênticos quanto à cor, o que indica que nesse momento todo o foco deve ser dado aos lados dos polígonos e seus eixos de simetria, sem qualquer outra distração. Além disso, a diminuição do uso de cores aponta para um possível amadurecimento que se espera dos estudantes, no sentido de se desprenderem de características que não são propriedades matemáticas e se voltarem para aquilo que realmente pode definir a simetria.

Com relação às outras três tarefas da Figura 20 (8(a), (b) e (c)), a evolução do exercício se mostra pela demanda de esboços de polígonos que são pedidos (três por item) e pela necessidade de argumentar quando não é mais possível criar polígonos com as características solicitadas, levando o estudante a articular tudo o que aprendeu sobre o tema naquele capítulo.

Concluindo a análise das tarefas dessa dimensão, no CN2 a tarefa da seção ‘Matemática Curiosa’ (Figura 21) apresenta a simetria em uma forma tridimensional.

Figura 21 – Matemática Curiosa – CN2.



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 341).

A tarefa estende o conceito de eixo de simetria da Geometria Plana para o espelho de simetria da Geometria Espacial. Por meio de um passo a passo guiado, o texto propõe que os alunos comparem os diferentes espelhos de simetria de um cubo e de um objeto oval.

Um destaque identificado na coleção canadense é que, nessa primeira dimensão de análise, foi observado o uso de diferentes materiais, desde os mais comuns, como tesoura, régua e transferidor, até alguns mais específicos, como papel quadriculado e espelho transparente. Todos esses materiais também existem no Brasil e são usados nas escolas; no entanto, o que se está destacando aqui é que o livro tem a preocupação de anunciar quais

materiais serão utilizados em cada conteúdo e de envolvê-los em suas atividades, o que por sua vez não é tão comum nos livros brasileiros.

6.3.2 Simetria – Coleção brasileira

Na coleção brasileira, o conteúdo de simetria aparece apenas no volume BR2, em um capítulo chamado ‘Transformações Geométricas e Simetria’. A primeira metade do capítulo trabalha com exemplos de Transformações Geométricas que ampliam e reduzem distâncias, em contraste com as que mantêm, ou seja, o capítulo trata das diferenças entre as homotetias e as Isometrias, embora esses termos não sejam citados. O exemplo que os autores usam de transformação que mantém distâncias é a reflexão e, por isso, as páginas relacionadas a esse trecho da coleção brasileira serão analisadas na respectiva dimensão de Reflexão.

A segunda metade do capítulo aborda brevemente a simetria e depois continua com seções focadas em reflexão, translação e rotação. A seguir, apresenta-se o resultado da investigação do conteúdo de simetria na coleção brasileira organizado por unidade de análise.

Conceituação

Na Figura 22, o leitor pode conferir a página do livro BR2 em que se encontra o conteúdo de simetria.

Figura 22 – Simetria – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 86).

O livro brasileiro inicia o tema da simetria estabelecendo as conexões que o conteúdo tem com o mundo, através da arte, da natureza e da arquitetura. Para isso, os autores citam os mosaicos, que são estampas marcadas pela repetição das mesmas figuras, mudando sua posição, direção ou sentido, e que compõem uma cena com potencial estético.

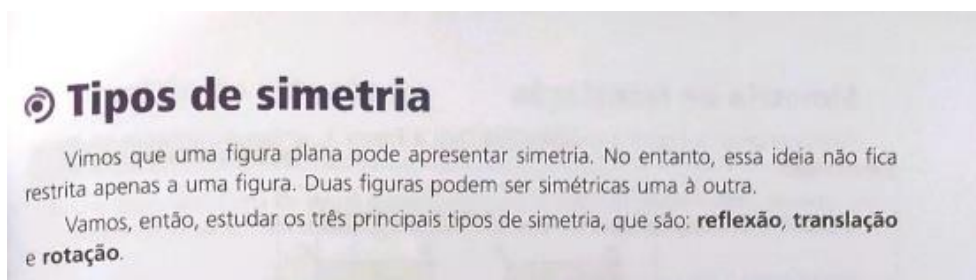
Na sequência, sem definir o conceito de simetria, o texto mostra uma maneira de verificar a existência da simetria em uma figura plana, através da sobreposição das metades cortadas pelo eixo de simetria. Essa forma de verificação é apenas um dos modos possíveis para tal, embora seja o único citado pelo livro brasileiro.

A imagem da borboleta da Figura 22 indica a escolha dos autores em vincular a simetria à dobra no eixo. Essa decisão não favorece o entendimento das propriedades isométricas da transformação. Características como a preservação das medidas de distância entre os pontos e de ângulos não são citadas, tratando-se, portanto, de uma oportunidade perdida de abordar o conteúdo sob o ponto de vista geométrico. O texto traz os exemplos de

uma borboleta e do pentágono, fazendo a contagem do número de eixos de simetria de cada um.

Percebe-se que a noção de simetria que se dá está totalmente associada à reflexão, dado que o livro trata dos eixos de simetria próprios das reflexões. Tal vinculação da simetria com a reflexão não está de acordo com esses conceitos matemáticos, assim como visto no referencial matemático. No entanto, a próxima página do livro traz a seguinte proposta (Figura 23):

Figura 23 – Tipos de simetria – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 87).

Ao falar sobre os tipos de simetria, os autores escrevem que duas figuras podem ser simétricas uma à outra e que os três principais tipos de simetria são reflexão, translação e rotação.

Com relação à possibilidade de duas figuras serem simétricas uma à outra, tal afirmação começa a revelar que os autores concebem as Transformações Geométricas como uma função entre figuras, quando na verdade o mais correto seria pensar na correspondência entre pontos e que, uma vez que os pontos são transformados sujeitos à Isometria, então também as figuras estariam de acordo com as preservações de distâncias de cada transformação (HILBERT, 1902; LIMA, 1996; HARTSHORNE, 2013). Essa concepção de função entre figuras (e não entre pontos) reaparece em diversos momentos na coleção brasileira, como será destacado nas próximas dimensões.

Além desse ponto, uma discussão importante a ser feita nessa análise é quanto à questão dos tipos de simetria, em que é possível notar uma confusão e inconsistência conceitual dentro da própria obra. Como discute Rohde (1997), a noção de simetria está ligada à preservação de alguma propriedade geométrica. No entanto, é comum encontrar o conceito de simetria sendo apresentado estritamente como sinônimo da simetria axial (a reflexão com relação à reta), como o próprio livro fez anteriormente. Quando o livro

brasileiro afirma que existem três principais tipos de simetria e que eles são as simetrias de reflexão, de translação e de rotação (Figura 23), a impressão que fica é de que o entendimento de simetria que a obra pretende expressar é o da preservação de propriedades, estendendo o conceito para além da reflexão, o que seria louvável. O problema está quando o leitor volta para a página anterior (Figura 22) e vê que o texto sobre simetria, apesar de não definir o conceito, diz que, para verificar se uma figura possui simetria, deve-se buscar um eixo que possa ser dobrado e, se for possível observar os dois lados ajustados um sobre o outro, então a figura é simétrica, o que nada mais é do que uma abordagem de verificação da reflexão com relação à reta.

Assim, algumas perguntas que podem surgir para o aluno são: ‘de que maneira posso encontrar um eixo de simetria para verificar a existência da simetria de translação? E o eixo da simetria de rotação? Se não existem eixos de simetria para essas duas transformações, por que também as chamamos de simetria? Qual é a diferença entre simetria e simetria de reflexão?’.

Essa inconsistência conceitual, em uma apresentação já tão curta das simetrias, é prejudicial ao aprendizado e pode gerar dúvidas em professores e alunos. Além disso, colocar a verificação da simetria sob a dependência do ajustamento após a dobra do eixo, sem citar as propriedades da Isometria que deveriam ser ressaltadas, é um estudo com baixo rigor teórico das simetrias.

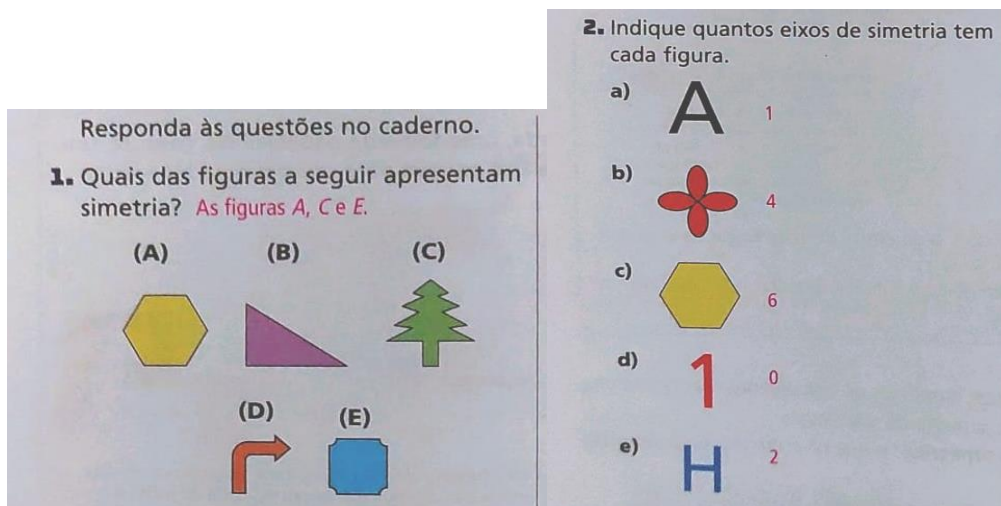
Exemplos

O conteúdo de simetrias consta apenas no segundo volume da coleção brasileira e logo se aprofunda nas simetrias de reflexões, translações e rotações, de modo que nenhum exemplo é oferecido pelos livros, tornando vácuo essa unidade de análise.

Tarefas

Foram identificadas apenas duas tarefas sobre o assunto de simetrias na coleção brasileira (Figura 24).

Figura 24 – Tarefas de simetria – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 90).

A primeira delas (tarefa 1) trata de uma tarefa de verificação de existência de simetria. Considerando o que a obra abordou sobre o tema, espera-se que os alunos encontrem um eixo de simetria que possam dobrar para ajustar as duas metades uma sobre a outra. Se existir esse eixo, então o aluno pode afirmar que a figura apresenta simetria. A tarefa 2 propõe que os alunos façam a contagem do número de eixos de simetria que cada figura possui. Vê-se que a coleção de figuras mescla formas geométricas, letras e números.

As duas tarefas abordam o conteúdo de simetria e são comuns ao se estudar o tema (tarefas de verificação da simetria e de contagem do número de eixos), no entanto o tratamento é breve, deixando de abordar as propriedades das Isometrias, trazendo tarefas com pouca variedade de figuras, sem realizar a discussão sobre polígonos regulares e o número de eixos de simetria que possuem.

Ainda sobre as tarefas, em contraste com a coleção canadense, identificou-se uma ausência de tarefas com construção geométrica, que movam o aluno a criar uma figura que apresente simetria, com um, dois, três eixos, e assim por diante. Nenhum material como régua, papel quadriculado ou transferidor foi solicitado. A formulação dos enunciados não abre margem para que os estudantes justifiquem suas respostas, mostrem como chegaram àquela conclusão ou articulem uma resposta em uma frase, o que não oportuniza que os alunos criem argumentos que fundamentem a solução neste conteúdo em nenhum dos livros da coleção.

6.4 Dimensão de análise – Translação

6.4.1 Translação – Coleção canadense

A dimensão de Translação está presente nos quatro livros da coleção canadense. Nas obras CN1 e CN2, o tema é estudado em um capítulo chamado ‘Padrões e Movimento em Geometria’. No livro CN3, as translações estão contidas no capítulo intitulado ‘Geometria 2D’, enquanto no CN4 o capítulo que abrange o assunto é nomeado de ‘Transformações’. A seguir, apresentam-se as discussões da investigação sobre translações em cada unidade de análise.

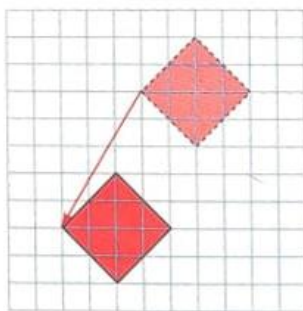
Conceituação

Assim como foi citado na dimensão de Simetria, os livros canadenses costumam fazer o tratamento dos conteúdos a partir de exemplos e tarefas, com poucos momentos de explanação puramente teórica. A coleção opta por abordar os conceitos através de uma seleção de tarefas que são estruturadas de modo a provocar a compreensão das conclusões conceituais desejadas, em especial nos dois primeiros volumes, que possuem um caráter mais leve e acessível para os estudantes e, portanto, menos rigoroso.

Nos livros CN1 e CN2, os autores apresentam a definição de translação no ‘Glossário’, conforme mostra a Figura 25.

Figura 25 – Glossário de translação – CN1.

translation: A slide of a shape; the slide must be along a straight line. (See also **transformation**.)

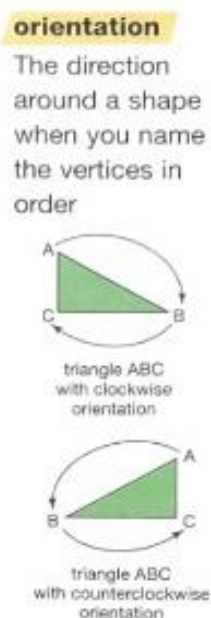


Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 424).

Note-se que a coleção define que a translação é o deslize de uma figura, sugerindo que tal transformação ocorra entre figuras, e não entre os pontos que as formam. Além disso, a definição, talvez na intenção de ser sucinta, não destaca as características isométricas da translação.

A definição aponta que o conteúdo tem relação com as transformações, que são definidas da seguinte maneira: “transformação: uma regra que resulta na mudança da posição, da orientação ou do tamanho de uma figura” (SMALL; KESTELL, 2004a, p. 396, tradução nossa). Ainda dentro do mesmo subcapítulo, chamado ‘Transladando Figuras em Grades’, os autores apresentam uma definição de orientação (Figura 26).

Figura 26 – Definição de orientação – CN1.



Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 391).

Considerando que a translação é a primeira das Isometrias a ser abordada nos livros canadenses, a definição de orientação dentro desse conteúdo é importante, uma vez que geralmente esse tema apenas aparece vinculado às reflexões, pois, dentre as Isometrias, são elas que possuem a propriedade de alterar a orientação dos pontos. No entanto, apresentar a preservação da orientação na translação é bastante apropriado por estabelecer mais uma característica a ser observada pelos estudantes no estudo das Isometrias.

A respeito da maneira como o conteúdo é apresentado nos últimos dois volumes da coleção, no ‘Glossário’ encontramos a definição de translação com uma pequena alteração:

“translação: o resultado de um arraste; o arraste deve ser ao longo de retas, para esquerda ou para direita, para cima ou para baixo ou em uma inclinação” (SMALL; KESTELL, 2004a, p. 472, tradução nossa). A diferença reside em não especificar que as translações ocorrem somente entre figuras, como era feito anteriormente, mas deixar em aberto que a translação é o resultado de qualquer arraste. Apesar disso, as características isométricas da translação seguem omitidas pela definição.

No livro CN3, em um subcapítulo chamado de ‘Translações’ (Figura 27), que tem como objetivo ‘reconhecer a imagem de uma figura plana após uma translação’, vemos a seguinte motivação para esse estudo:

Figura 27 – Motivação para o estudo de translações e notação – CN3.

7.2 Translations

GOAL
Recognize the image of a 2-D shape after a translation.

You will need

- centimetre grid
- paper
- a ruler

Learn about the Math

Jody is tiling a floor using square black and white tiles. She wants the floor to have a chessboard pattern. All the tiles are in a pile at $(-2, 0)$. Jody takes one tile at a time from the pile and slides it into position.

? How can Jody slide the tiles into position?

Communication Tip

The new shape that is created when a shape is transformed is called the *image*. The original shape is called the *pre-image*. The vertices of the image are often labelled using the same letters as the pre-image, but with primes. (For M' , say “ M prime.”) This shows which vertices of the image match which vertices of the pre-image. When M' is transformed, its image is M'' .

The diagram shows a green triangle with vertices M , N , and P (pre-image) and its translated image with vertices M' , N' , and P' . Arrows indicate the translation from each vertex of the pre-image to its corresponding vertex in the image.

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 232).

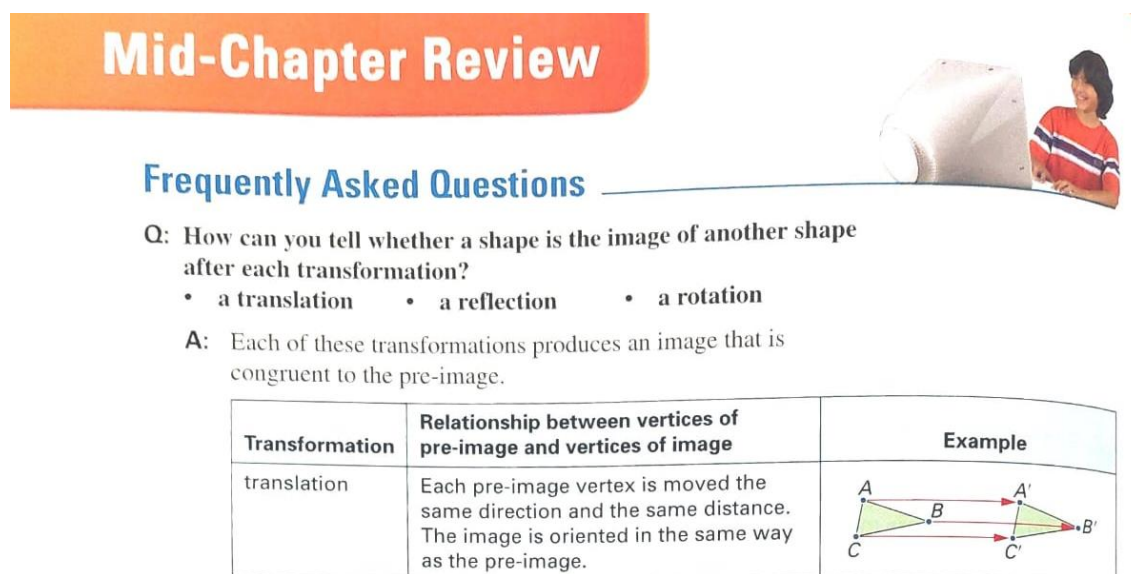
A Figura 27 mostra a abertura do subcapítulo, em que se podem ver os exemplos que os autores pretendem trabalhar em seguida (e que serão analisados na próxima unidade de análise). O destaque aqui é feito para o *box* de ‘Dica de Comunicação’, que é apresentada nessa página. A obra define que o resultado de uma transformação é chamado de imagem, atribuindo a noção de função para o conteúdo, uma vez que estabelece a correspondência entre os pontos M , N e P da pré-imagem e M' , N' e P' da imagem.

Tal abordagem desenvolve o conteúdo que tinha sido trabalhado até então: enquanto no CN1 a coleção se preocupava em propor a translação de figuras em grades, no

CN3 se observa o foco na translação de pontos e em como expressar função da translação e seus elementos. Ainda nesse subcapítulo, novamente a definição da orientação e sua preservação na translação são apresentadas.

Na seção de ‘Revisão da Metade do Capítulo’, os autores usam um *box* de ‘Perguntas Frequentes’ para reunir algumas informações sobre as Isometrias estudadas, entre elas a translação (Figura 28).

Figura 28 – ‘Revisão da Metade do Capítulo’ – CN3.



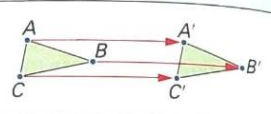
Mid-Chapter Review

Frequently Asked Questions

Q: How can you tell whether a shape is the image of another shape after each transformation?

- a translation
- a reflection
- a rotation

A: Each of these transformations produces an image that is congruent to the pre-image.

Transformation	Relationship between vertices of pre-image and vertices of image	Example
translation	Each pre-image vertex is moved the same direction and the same distance. The image is oriented in the same way as the pre-image.	

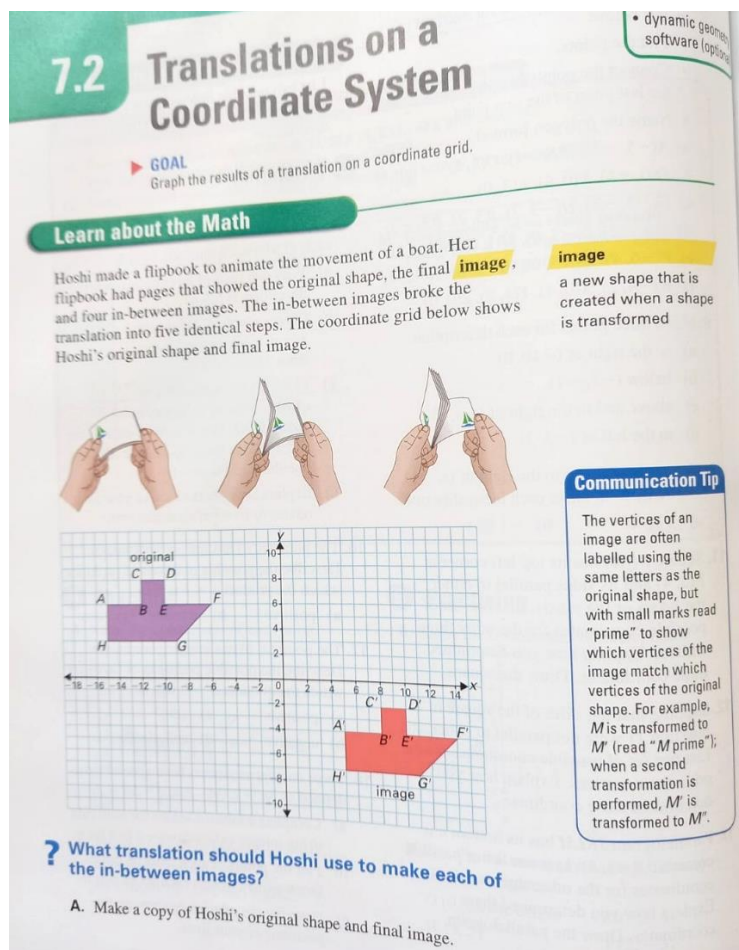
Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 246).

Note-se que, antes do quadro, a resposta para a pergunta feita ressalta a propriedade isométrica das transformações estudadas até aquele momento do capítulo. Sobre a translação, no quadro os autores escrevem que os vértices (pontos) da figura são movidos nas mesmas direção e distância, além de destacar que a orientação é preservada e apresentar um exemplo. Um quadro como esse pode ser conveniente para professores e estudantes, pois sintetiza os aspectos conceituais do conteúdo em um só lugar, tornando-se uma ferramenta de consulta.

Concluindo esta unidade de análise, no volume CN4 o subcapítulo relacionado ao tema da dimensão se chama ‘Translações em um Sistemas de Coordenadas’. Nele, as translações são abordadas sob o ponto de vista da Geometria Analítica, com o plano cartesiano, as coordenadas e os vetores de translação.

Na Figura 29 se vê a abertura do subcapítulo, que tem como objetivo “representar os resultados de uma translação em um sistema de coordenadas” (SMALL; KESTELL, 2004d, p. 226, tradução nossa).

Figura 29 – ‘Translações em um Sistema de Coordenadas’ – CN4.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 226).

A abordagem das translações como funções, que foi iniciada no volume anterior, é retomada no CN4, quando o ponto de partida da atividade destaca o conceito de imagem. A proposta usa a ideia de um *flipbook* que simula o movimento de translação de uma figura. Um par de eixos ordenados é apresentado com a figura original e sua imagem pós-translação. Note-se que o texto da ‘Dica de Comunicação’ é o mesmo que consta no conteúdo de translações do CN3 discutido anteriormente.

Após a ideia do *flipbook*, os autores propõem uma tarefa guiada para que os alunos construam o *flipbook* deles e respondam a algumas investigações que levam às

conclusões conceituais desejadas. O primeiro passo da tarefa está na Figura 21 e os outros na Figura 30.

Figura 30 – Continuação da atividade guiada e *box* de dica de comunicação – CN4.

B. Label the coordinates of the vertices of Hoshi's original shape and final image.

C. Write the **translation vector** for the translation needed to shift each vertex of the original shape to its final image.

D. Write the translation vector for each of the five identical translations that can be put together to move the original shape to the final image.

E. Draw the image of the original shape after the first translation in step D. Mark the coordinates of each image vertex.

F. Repeat step E for the remaining translations from step D.

Reflecting

1. How can you calculate the translation vector in step C, using the coordinates of the original shape and image?
2. How do the vectors for the in-between translations relate to the vector for the translation in step C?
3. How could you use the in-between translation vector in step D to calculate the coordinates of the vertices in steps E and F?

translation vector
an ordered pair of integers used to represent the horizontal and vertical moves that describe a translation; for example, $[-2, 5]$ represents the translation "2 units left and 5 units up"

Communication Tip
Ordered pairs in square brackets represent a translation. Ordered pairs in round brackets represent the coordinates of a point.

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 227).

No decorrer da atividade, como ilustra a Figura 30, a obra traz uma definição para vetor de translação e o *box* de 'Dica de Comunicação' explicando a diferença da notação para indicar a translação (um par ordenado entre colchetes) e as coordenadas de um ponto (um par ordenado entre parênteses).

O tratamento de vetores no tema de translação é comum na Matemática (LIMA, 1996). Desse modo, não seria errado dizer que tratar de vetores nas translações é necessário, uma vez que os conteúdos têm forte vínculo. Assim, a argumentação que se faz ao se observar a coleção canadense abordando os vetores é pertinente.

Uma questão que poderia surgir é sobre o momento da aparição desse conteúdo. Já que os vetores são tão importantes para as translações e elas estão sendo trabalhadas desde o CN1, por que o tema aparece apenas no último volume? Uma resposta possível é que somente no CN4 a coleção canadense tem o objetivo de explorar as translações no plano cartesiano, atribuindo coordenadas aos pontos que são transformados por essa Isometria e

discutindo como representá-los. Apesar dessa justificativa, o conteúdo de vetores de translação poderia ter mais destaque nas obras analisadas, com exemplos antes de iniciar as interrogações exploratórias que visam levar os estudantes a compreender a teoria desejada.

A Figura 31 mostra as translações na seção de ‘Revisão da Metade do Capítulo’, no formato de ‘Perguntas Frequentes’:

Figura 31 – ‘Revisão da Metade do Capítulo’ – CN4.

Q: How can you determine the coordinates of the image of a point after a transformation?

A1: You can apply the transformation and then determine the coordinates of the image by reading them from the coordinate grid.

A2: You can determine the coordinates of the image without plotting the point or the image. If point A has coordinates (x, y) , the coordinates of its image can be determined as follows:

Transformation of $A(x, y)$	Coordinates of A'	Example
translation by $[a, b]$	$(x + a, y + b)$	The example shows a coordinate grid with x and y axes ranging from -14 to 8. Two points, $A(-3, 2)$ and $A'(-9, 7)$, are plotted. A blue arrow labeled 'translation vector' points from A to A', with the vector $[-6, 5]$ written next to it. Another point $A(-3, 2)$ is plotted, and a red arrow labeled 'translation vector' points from A to $A'(6, 6)$, with the vector $[9, 4]$ written next to it.

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 234, 235).

O trecho apresentado mostra a coleção canadense sistematizando o modo como a translação afeta cada ponto que passa pela Isometria. A abordagem proposta é a da soma de vetores, em que as medidas do vetor de translação são somadas com as coordenadas dos pontos. Essa seção faz a reunião das informações sobre o conteúdo e pode se tornar para o aluno uma referência de como usar a notação e se expressar sobre as translações a partir dos vetores.

Exemplos

Nesta unidade de análise, apresentarei seis exemplos que a coleção canadense usa no desenvolvimento do conteúdo de translações. A Figura 32 mostra um exemplo do volume CN1, inserido no subcapítulo chamado ‘Transladando Figuras em Grades’:

Figura 32 – ‘Transladando Figuras em Grades’ – CN1.

CHAPTER 14

4

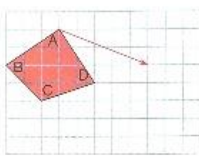
Translating Shapes on Grids

You will need

- grid paper
- a ruler

Goal Identify the rule for translating a shape.

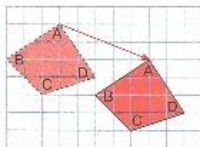
Marcus is translating and tracing shapes to create a piece of art. He moves a shape on grid paper. The red translation arrow shows the direction and distance he moves the quadrilateral.



? How can Marcus describe the translation?

Marcus's Translation

The red translation arrow goes from vertex A to the new position of vertex A. The new vertex is 5 units right and 2 units down.

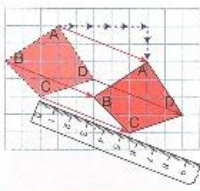


I check that the same rule applies to the new positions of vertices B, C, and D.

My translation rule is that the position of every new point is 5 units right and 2 units down.

I notice that the translation arrows are parallel and that they are all the same length.

The **orientation** of the shape stays the same.



390

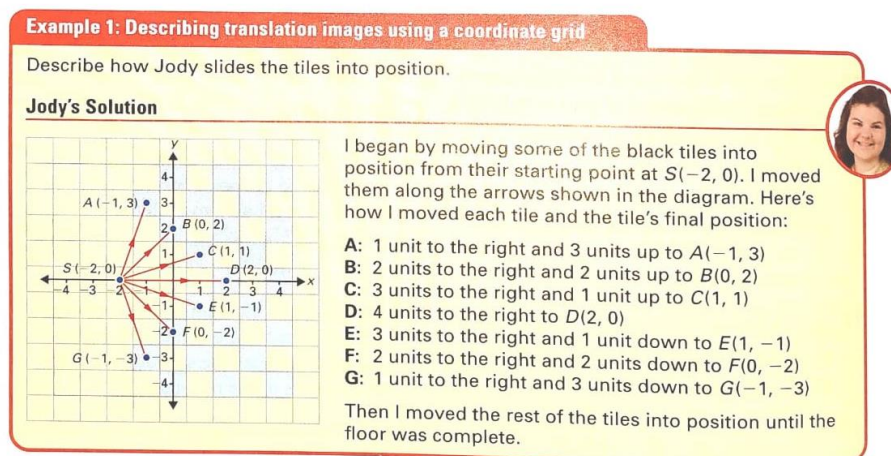
Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 390).

Apesar de a definição de translação no ‘Glossário’ do CN1 deixar a impressão de que a transformação ocorre entre figuras, o exemplo da Figura 32 aplica a translação nos vértices do quadrilátero, ou seja, em pontos, e destaca bem esse aspecto, tanto na explicação textual quanto na ilustração que acompanha o exemplo. Por ser a primeira abordagem das translações feita em toda a coleção, o conteúdo é apresentado com menos rigor formal, sem o uso de vetores de translação e de coordenadas do plano cartesiano. A caracterização da translação é realizada de maneira descritiva: ‘5 unidades para a direita e 2 unidades para

baixo’. Mais do que o rigor teórico da Geometria Analítica, o exemplo visa mostrar as propriedades de efeito da translação sobre todos os pontos da figura e da preservação de distâncias e da orientação após o movimento.

No volume CN3, o ‘Exemplo 1’ do subcapítulo ‘Translações’ retoma a mesma ideia trabalhada acima, como podemos ver na Figura 33.

Figura 33 – Exemplo de translação de pontos usando coordenadas – CN3.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 232).

A situação, que envolve o ladrilhamento de um piso em um padrão de quadrados pretos e brancos, como um tabuleiro de xadrez, traz a solução de como a aluna Jody ladrilhou o seu plano usando as translações. O exemplo descreve o passo a passo de Jody, que tinha uma pilha de quadrados pretos no ponto $S(-2, 0)$ e fez o movimento deles até as posições desejadas para compor o tabuleiro. A explicação de Jody envolve o mesmo tipo de linguagem apresentada no exemplo anterior do CN1, em que se descreve quantas unidades o ponto foi movido para cada direção. A novidade introduzida por esse exemplo é o uso das coordenadas para situar os pontos após o movimento e suas representações no plano cartesiano.

Já o ‘Exemplo 2’ do livro CN3 (Figura 34) se concentra na comparação das coordenadas antes e depois da translação em um ponto. O exemplo mostra, também, como interpretá-las para expressar o movimento, usando a mesma forma de descrever por quantas unidades o deslocamento ocorre em cada direção.

Figura 34 – Exemplo de determinação de translações usando soma de coordenadas – CN3.

Example 2: Determining translations using the coordinates of the starting point and endpoint

Determine how Jody slid each tile into position, using just the coordinates of the starting point and endpoint of the slide.

Indira's Solution

starting point: $S(-2, 0)$
 endpoint: $A(-1, 3)$

$(-1) - (-2) = 1$ or $(-1) - (-2) = +1$
 $3 - 0 = 3$ or $(+3) - 0 = +3$

The endpoint, A, has coordinates $(-1, 3)$.
 The starting point, S, has coordinates $(-2, 0)$.
 The difference between the x-coordinates is $+1$ or 1 .
 The difference between the y-coordinates is $+3$ or 3 .
 So, Jody slid the tile 1 unit to the right and 3 units up.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 233).

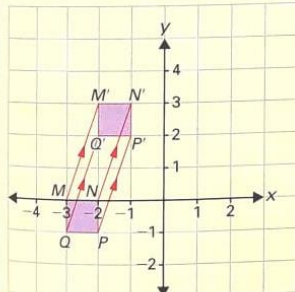
O 'Exemplo 3' (Figura 35), último dos exemplos que o livro CN3 apresentou, foi de uma nova situação de translação, desta vez de um único quadrado, em que a proposta foi de descrever o movimento indicado

Figura 35 – Exemplo de translação de pontos usando soma de coordenadas – CN3.

Example 3: Describing translation images using a coordinate grid

Describe the effects of the translation shown below.

Kwami's Solution



From the diagram, the coordinates of M are $(-3, 0)$ and the coordinates of M' are $(-2, 3)$.
 The difference between the x-coordinates is $(-2) - (-3) = +1$.
 The difference between the y-coordinates is $(+3) - 0 = +3$.
 So, M moved 1 unit to the right and 3 units up to the image point M' .
 Also, the other three vertices moved the same way, 1 unit to the right and 3 units up.

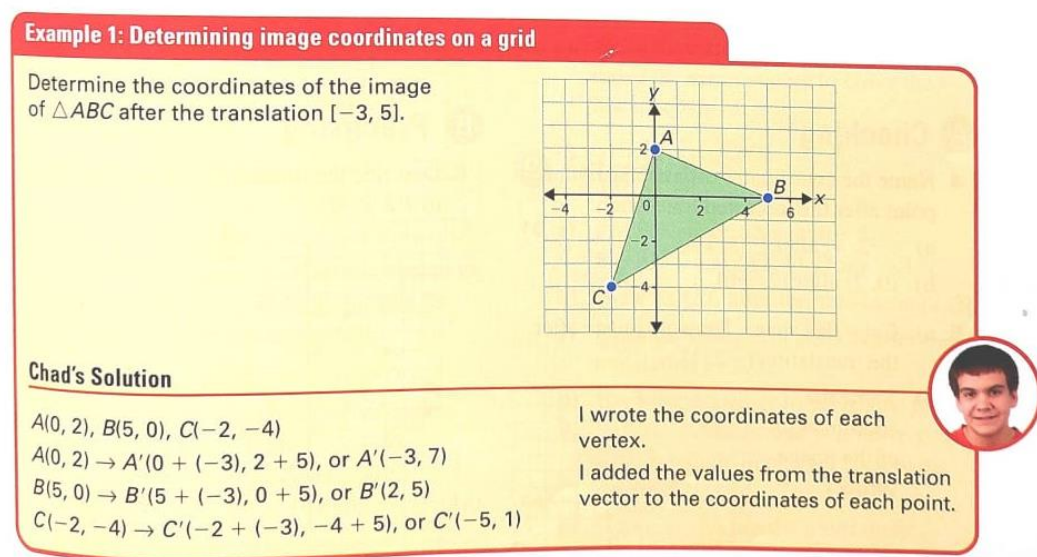


Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 233).

O exemplo apresentado coloca em prática as aprendizagens abordadas nos exemplos anteriores e conclui essa seção sobre o resultado de uma translação em uma figura e seus pontos.

No volume CN4, no subcapítulo em que os vetores de translação aparecem pela primeira vez na coleção e a translação é abordada do ponto de vista da Geometria Analítica, os autores apresentam o exemplo da Figura 36.

Figura 36 – Exemplo de determinação da imagem usando vetor de translação – CN4.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 227).

A resolução usa a soma das coordenadas dos pontos com as coordenadas do vetor de translação para calcular onde está localizado cada vértice do triângulo dado após o movimento. O exemplo é pertinente, pois é a primeira vez que o deslizamento da translação é apresentado com o uso de soma de vetores, apesar de não ter representado o vetor da situação nem mostrado qual foi o resultado obtido no plano cartesiano.

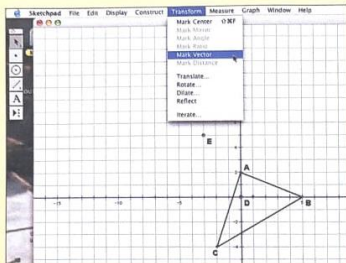
No entanto, o exemplo seguinte (Figura 37) trabalha com os mesmos triângulos e vetores usando outra ferramenta. Este exemplo envolve um *software* de geometria dinâmica chamado *The Geometer's Sketchpad*, que é o *software* parceiro da coleção, em que é referenciado sempre que os autores sugerem uma atividade envolvendo esse tipo de tecnologia.

Figura 37 – Exemplo de translação em um *software* de geometria dinâmica – CN4.

Example 2: Determining image coordinates using geometry software

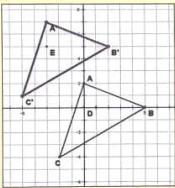
Determine the coordinates of the image of $\triangle ABC$ after the translation $[-3, 5]$.
 $\triangle ABC$ has coordinates $A(0, 2)$, $B(5, 0)$, and $C(-2, -4)$.

Tran's Solution



I drew $\triangle ABC$ by plotting points A , B , and C using the command **Graph: Plot Points ...** in *The Geometer's Sketchpad*®. Then I selected all three points and used **Construct: Segment** to construct the triangle.

I represented the translation $[-3, 5]$ by plotting point $D(0, 0)$ as a starting point and then plotting $E(-3, 5)$. I selected D first and then E . I used **Transform: Mark Vector** to tell *The Geometer's Sketchpad*® to use segment DE for the translation.



I selected points A , B , and C and the segments joining them. Then I used **Transform: Translate** to apply the $[-3, 5]$ transformation. *The Geometer's Sketchpad*® automatically labelled the image vertices.

I read the image coordinates as $A'(-3, 7)$, $B'(2, 5)$, and $C'(-5, 1)$.

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 228).

O exemplo descreve como marcar os pontos do triângulo e representar o vetor de translação usando o *software*. Note-se que o ponto de partida do vetor é colocado na origem do plano cartesiano, o que é uma escolha importante para a realização da proposta, embora o texto não chegue a revelar as razões de tal decisão. Na finalização do exemplo, o comando da translação é usado para aplicar o movimento nos vértices do triângulo original e obter o deslizamento de toda a figura.

Tarefas

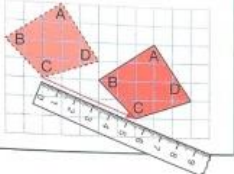
Nesta unidade de análise, foram identificadas 84 tarefas sobre o tema das translações na coleção canadense, sendo que 71 dessas constam nos volumes CN3 e CN4.

Começando pelo volume CN1, a Figura 38 apresenta as seções ‘Refletindo’, ‘Verificando’ e ‘Praticando’ do subcapítulo ‘Transladando Figuras em Grades’:

Figura 38 – Tarefas de translação de figuras em grades – CN1.

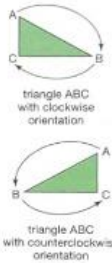
Reflecting

1. Compare the size and shape of Marcus's original and translated quadrilaterals. What math word describes how these shapes compare to each other?
2. How does Marcus know that the orientation of the shape doesn't change?
3. What does the length of one translation arrow tell you about every point in the translated shape?



orientation

The direction around a shape when you name the vertices in order



Checking

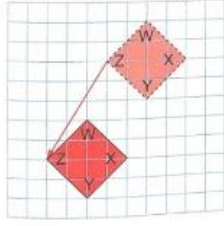
4. Draw another shape on a grid. Use Marcus's translation rule to locate the translated vertices. Draw the translated shape.

Practising

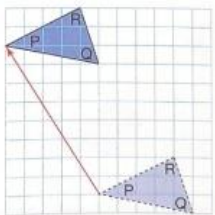
5. Copy the triangle in the middle of a grid. Each rule below describes the new position after a translation. Show the result of each translation. Draw a translation arrow for each.

a) right 3, up 2	c) left 3, down 2
b) right 3, down 2	d) down 5
6. Write a translation rule to describe the new position of any point after each translation.

a)



b)



391

Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 391).

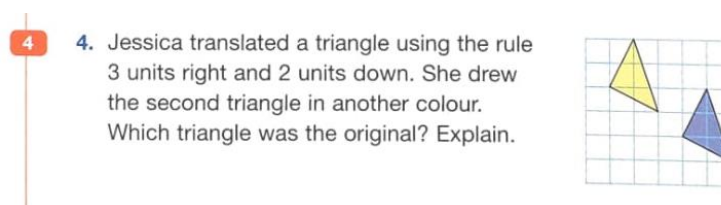
A seção 'Refletindo' se refere a três tarefas apresentando uma situação em que um aluno faz a translação do Quadrilátero ABCD, como indicado na figura. A descrição do movimento realizado especifica quantas unidades os vértices se moveram em cada direção – no caso, foram cinco unidades para a direita e duas para baixo. A primeira tarefa dessa seção (Refletindo 1) explora a propriedade isométrica de preservação de medidas e ângulos, mostrando que, após a translação, a imagem do quadrilátero é congruente a ele. A segunda tarefa (Refletindo 2) pede uma justificativa para a conservação da orientação do quadrilátero, enquanto a última tarefa (Refletindo 3) tangencia a ideia de vetores de translação, mas sem citar esse conceito, usando o nome de seta de translação. Essa tarefa tem a intenção de mostrar que todos os pontos do quadrilátero transladado estão à mesma distância dos pontos correspondentes na figura original, sendo que essa distância é igual ao comprimento da seta de translação (o vetor de translação). Como de costume, no box 'Refletindo', as tarefas levam

os estudantes a elaborar justificativas e chegar a conclusões conceituais trabalhadas a partir do exemplo dado.

Na seção ‘Verificando’, os autores pedem que o aluno crie seu próprio polígono e aplique a mesma translação utilizada anteriormente, apenas reproduzindo, agora por si só, uma nova situação com características similares. A seção ‘Praticando’, por sua vez, já oferece as figuras em todas as tarefas. As tarefas 5(a), (b), (c) e (d) exploram a distância e a direção a que cada ponto será movido, apresentando diferentes cenários, enquanto as tarefas 6(a) e (b) pedem que, ao ver a seta de translação indicando qual foi a translação sofrida por um ponto, o aluno descreva qual foi a distância em cada direção que a Isometria promoveu. Dessa maneira, percebe-se que os enunciados da seção ‘Praticando’ trabalham o mesmo tipo de conceito, no entanto, enquanto no primeiro o aluno recebe as instruções e as executa, no segundo ele observa o resultado da transformação e descreve quais são as orientações para que se obtenha o que está sendo apresentado.

Nas páginas de ‘Revisão da Metade do Capítulo’, ‘Banco de Habilidades’ e ‘Revisão do Capítulo’ constam tarefas (uma em cada seção) relacionadas ao tema estudado no CN1. Nas duas primeiras, a tarefa selecionada é bastante similar à última apresentada na Figura 30, que envolveu descrever translações indicadas por um diagrama. Já na última seção, ‘Revisão do Capítulo’ (Figura 39), um novo aspecto das translações é abordado.

Figura 39 – Tarefa da ‘Revisão do Capítulo’ – CN1.



Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 404).

A tarefa explora um tipo de habilidade que ainda não tinha sido explorado com relação às translações, que é a de identificar qual figura é a pré-imagem de uma translação, dados o resultado e as instruções da transformação. A constância da obra canadense em requisitar justificativas e explicações dos estudantes na resolução das tarefas cria o hábito de articular argumentos ou pelo menos de buscá-los. Tal consistência nessa abordagem investigativa é uma das principais distinções da coleção.

Na tarefa da Figura 39, os autores poderiam ter perguntado também de que maneira a translação deveria ter acontecido para que as figuras de pré-imagem e imagem

fossem trocadas, ou seja, uma ideia de translação inversa. Essa proposta exercitaria a capacidade de descrever de que modo ocorreu uma translação (que foi trabalhada durante o subcapítulo), além de explorar os dois sentidos desse raciocínio, ou seja, descrever a translação a partir do resultado dela e, a partir da descrição, compreender qual foi a translação.

No volume CN3, a seção ‘Refletindo’ do subcapítulo ‘Translações’ (Figura 40) apresenta duas tarefas que resgatam as discussões sobre o comprimento do vetor de translação (aqui ainda sendo chamado de flecha) e as propriedades isométricas da translação, incluindo a preservação da orientação da figura. A argumentação dos alunos é novamente solicitada.

Figura 40 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ – CN3.

Reflecting

1. For the translation of a tile, draw an arrow from each vertex of the pre-image to the matching vertex of the image. What do the arrows have in common?
2. What properties of a pre-image and its image are the same after a translation? What properties are different? Include **orientation** in your answer.

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 233).

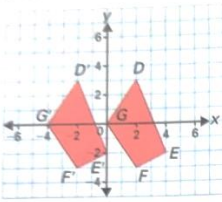
A Figura 41 mostra as seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ do CN3 para as translações. O leitor certamente notará o quanto ambas as seções, em especial a segunda, foram expandidas. A seção ‘Estendendo’ (Figura 42) é uma novidade dos últimos dois volumes e apresenta tarefas com maior nível de abstração e complexidade. Essa ampla lista de tarefas começa a surgir nos volumes CN3 e CN4, com toda a mudança na diagramação das páginas e na organização do texto.

Figura 41 – Tarefas das seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ – CN3.

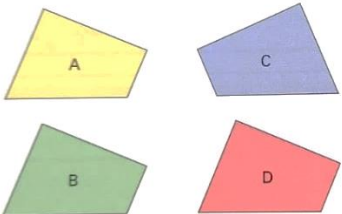
A Checking

3. Point A has coordinates (2, 4) on centimetre grid paper. It is translated 12 cm to the right and 3 cm up. What are the coordinates of the new location?

4. Describe the transformation that moved quadrilateral $DEFG$ to quadrilateral $D'E'F'G'$.



5. Which of figures B, C, and D is not a translation of figure A? Explain.

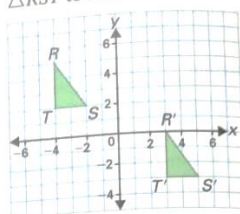


B Practising

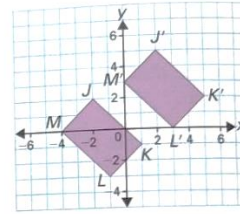
Use centimetre grid paper for the following questions.

6. The vertices of $\triangle ABC$ have coordinates $A(1, 2)$, $B(3, 5)$, and $C(3, -1)$. $\triangle ABC$ is translated 2 units to the right and 1 unit down. Determine the coordinates of the image triangle.

7. a) Describe the transformation that moved $\triangle RST$ to $\triangle R'S'T'$.

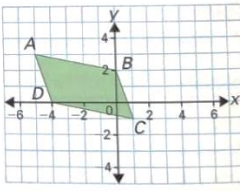


b) Describe the transformation that moved rectangle $JKLM$ to rectangle $J'K'L'M'$.

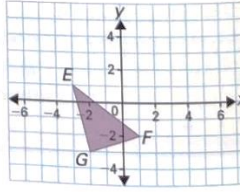


8. Copy each shape and translate it to determine the image coordinates.

a) Translate parallelogram $ABCD$ 3 cm down.



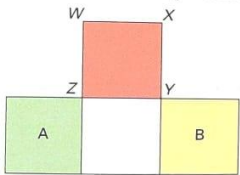
b) Translate $\triangle EFG$ 2 cm to the left and 1 cm up.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 234).

Como esta é a primeira vez que uma lista de tarefas do CN3 é apresentada na análise, ambas as páginas serão colocadas aqui a fim de promover a percepção do volume de tarefas, além do uso de figuras em cada uma das três seções (Verificando, Praticando e Estendendo). A análise das tarefas será feita após a Figura 42.

Figura 42 – Tarefas das seções ‘Praticando’ e ‘Estendendo’ – CN3.

9. The vertices of square $ABCD$ are $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, and $D(-1, 1)$. Square $ABCD$ is translated 3 cm to the left and 2 cm up. Determine the coordinates of all the vertices of the image square.
10. a) Draw any triangle, $\triangle DEF$, on a coordinate grid. Record the coordinates of each vertex.
b) Transform $\triangle DEF$ 5 cm to the left and 4 cm down. Label the image $\triangle D'E'F'$.
c) Determine the coordinates of D' , E' , and F' .
11. $\triangle DEF$ has a base, DE , that is 7 cm long. Describe how you would translate $\triangle DEF$ so that D' is the same point as E . Draw a diagram to illustrate your description.
12. Square $WXYZ$ has sides that are 2 cm long. Squares A and B are translation images of square $WXYZ$. Describe how square $WXYZ$ was translated to create squares A and B.
- 
13. The vertices of $\triangle ABC$ have coordinates $A(3, -2)$, $B(0, 0)$, and $C(2, 2)$.
a) $\triangle ABC$ is translated 3 cm to the right and 2 cm down. Determine the coordinates of the image triangle. Label the image triangle $\triangle A'B'C'$.
b) $\triangle A'B'C'$ is translated 1 cm to the right and 3 cm up. Determine the coordinates of the image triangle. Label the image triangle $\triangle A''B''C''$.
c) Describe a single translation that moves $\triangle ABC$ directly to $\triangle A''B''C''$.
14. Nathan has a paper route in a part of town where all the streets run either north-south or east-west. From his home, he travels 4 blocks north, 3 blocks east, 7 blocks south, 2 blocks east, 5 blocks north, 3 blocks west, and 2 blocks south. At the end of his route, how many blocks is he from his home, and in what direction?
15. The vertices of $\triangle ABC$ have coordinates $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, and $C(2, 2)$.
a) Translate $\triangle ABC$ 2 cm to the right and 1 cm down. Then translate the resulting image 1 cm to the right and 2 cm up.
b) Start again with $\triangle ABC$. Translate $\triangle ABC$ 1 cm to the right and 2 cm up. Then translate the resulting image 2 cm to the right and 1 cm down.
c) Compare your results in parts (a) and (b). If you apply two translations, one after the other, does the order in which you apply them matter? Write a hypothesis, and explore it using several examples.

C Extending

16. $\triangle ABC$ is translated 3 units to the left and 2 units down. The vertices of the image triangle, $\triangle A'B'C'$, have coordinates $A'(1, -1)$, $B'(3, -2)$, and $C'(2, 1)$. Determine the coordinates of the vertices of $\triangle ABC$.
17. $\triangle ABC$ is translated 2 units to the right and 1 unit up to produce $\triangle A'B'C'$. Then $\triangle A'B'C'$ is translated 3 units to the right and 2 units down to produce $\triangle A''B''C''$. The coordinates of three of the vertices are $A(0, 0)$, $B'(6, 0)$, and $C''(6, 0)$. Determine the coordinates of all the other vertices of the three triangles.

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 235).

Dentre tantas tarefas, apenas algumas serão destacadas nesta análise, a começar pela tarefa 5 (Figura 41). Tal tarefa apresenta quatro quadriláteros (A, B, C e D) e pergunta qual dos três últimos não é uma translação de A. Aqui temos um inconveniente relacionado às diferentes cores que os autores utilizaram para diferenciar os quadriláteros. Apesar de as cores escolhidas suavizarem a tarefa, tornando-a atrativa e até mesmo mais divertida, elas não só são desnecessárias na diferenciação dos quadriláteros (uma vez que eles já estão nomeados com letras diferentes), como podem dar a equivocada impressão de que a translação transformou os quadriláteros também no que diz respeito à sua cor. Desse modo, um aluno poderia responder que, além do quadrilátero C, que não é uma translação de A pois teve sua orientação invertida, os quadriláteros B e D também não são translações de A, dado que a cor se alterou.

Até este momento na coleção canadense, todas as translações de figuras coloridas haviam mantido suas cores originais, afinal a transformação isométrica tratada não altera uma característica como a cor dos pontos e das figuras em que são aplicadas. Assim, a forma como a tarefa é apresentada é discutível quanto às conclusões que pode gerar nos estudantes por causa da cor, estabelecendo uma relação enganosa entre as propriedades isométricas e estéticas das figuras.

Considerando as tarefas das Figuras 41 e 42, é possível perceber que, nas tarefas 4, 7a) e 7b), as imagens das translações mantêm as cores da figura original, enquanto na tarefa 12 a mesma crítica à mudança da cor pode ser feita, resultando em uma segunda ocorrência dessa situação.

Após algumas tarefas que envolvem a descrição de figuras que sofreram translações e o desenho de figuras que tiveram seus movimentos descritos, a lista de tarefas apresenta uma nova propriedade: a composição de translações. Nas tarefas 13(a), (b) e (c), a coleção canadense propõe pela primeira vez que os alunos façam duas translações sucessivas e depois pensem de que maneira poderiam partir da primeira figura até a última imagem, sem passar pela translação intermediária. As próximas quatro tarefas abordam essa mesma ideia. Um destaque especial será feito sobre a tarefa 15(a), (b) e (c) (Figura 43).

Figura 43 – Tarefa 15 da seção ‘Praticando’ – CN3.

15. The vertices of $\triangle ABC$ have coordinates $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, and $C(2, 2)$.
- Translate $\triangle ABC$ 2 cm to the right and 1 cm down. Then translate the resulting image 1 cm to the right and 2 cm up.
 - Start again with $\triangle ABC$. Translate $\triangle ABC$ 1 cm to the right and 2 cm up. Then translate the resulting image 2 cm to the right and 1 cm down.
 - Compare your results in parts (a) and (b). If you apply two translations, one after the other, does the order in which you apply them matter? Write a hypothesis, and explore it using several examples.

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 235).

As tarefas 15(a), 15(b) e 15(c) apresentam as coordenadas dos vértices de um triângulo. A tarefa 15(a) sugere submeter o triângulo a duas translações diferentes seguidas. Já a tarefa 15(b), por sua vez, orienta realizar as mesmas duas translações, mas na ordem contrária, começando pela segunda translação que foi sugerida na tarefa anterior e depois

fazendo a primeira. A tarefa 15(c) completa a sequência pedindo um comparativo dos resultados das tarefas anteriores, perguntando se a ordem da aplicação das translações importa no efeito final. A tarefa se encerra com o livro canadense pedindo que os estudantes escrevam uma hipótese baseada na conclusão obtida e que a testem através de exemplos.

Todo o desenvolvimento dessas tarefas até chegar ao final sugere a escrita de uma hipótese envolvendo a composição de translações e sua característica de ser própria (a orientação é preservada). Esse tipo de tarefa que faz com que os estudantes formulem uma hipótese baseada em algumas observações é um ponto marcante desses livros didáticos, ainda mais por se tratar de uma obra voltada para a faixa etária dos 13 anos. As tarefas assim estimulam os alunos a fazer matemática, estabelecer relações, formular conjecturas, desenvolver raciocínios e expressar argumentos.

Finalizando a análise das tarefas sobre translações do CN3, as duas tarefas da seção ‘Estendendo’ demandam maturidade com relação ao entendimento das coordenadas e do movimento da translação trabalhados até aquele momento da coleção. Ambas fornecem os comandos da translação e algumas coordenadas de pontos, solicitando que os alunos façam a aplicação de uma ou duas translações para localizar os outros pontos da tarefa.

As Figuras 41 e 42 evidenciam que as primeiras tarefas (Figura 41) utilizam mais recursos visuais, como diagramas, figuras e planos cartesianos em seus enunciados. Das oito tarefas da Figura 41, seis possuem algum recurso visual, enquanto na página seguinte (Figura 42), das 15 tarefas, apenas uma apresentou figuras. Tal observação leva à conclusão de que, nessa lista de tarefas, os enunciados vão se tornando mais descritivos e menos ilustrados, trabalhando cada vez mais com o repertório de instruções próprias da linguagem matemática, como ‘determine’, ‘desenhe’, ‘transforme’, ‘nomeie’, ‘descreva’, ‘translade’, ‘compare’, ‘escreva’, entre outras.

O desenvolvimento da maturidade dos alunos com o conteúdo é gradativo desde os primeiros livros, em que praticamente todas as tarefas eram acompanhadas por algum recurso visual além do textual, até chegar a essas tarefas finais do estudo de translação no volume CN3, nas quais se espera que os estudantes já tenham condições de criar as figuras pedidas, visualizar o movimento indicado e responder a perguntas sobre essas situações.

Tratando agora das tarefas do último livro da coleção canadense e lembrando que é nessa obra que o conceito de vetores de translação é abordado, a seção ‘Refletindo’ (Figura 44) conta com três tarefas.

Figura 44 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ – CN4.

Reflecting

1. How can you calculate the translation vector in step C, using the coordinates of the original shape and image?
2. How do the vectors for the in-between translations relate to the vector for the translation in step C?
3. How could you use the in-between translation vector in step D to calculate the coordinates of the vertices in steps E and F?

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 227).

A seção ‘Refletindo’ do CN4 se refere à atividade do *flipbook* discutida anteriormente (Figura 30), em que uma mesma figura passa por cinco translações idênticas até chegar a sua posição final. A primeira tarefa explora o cálculo do vetor de translação a partir das coordenadas iniciais e finais, enquanto as outras duas buscam estabelecer relações entre as translações que ocorreram da figura original até a imagem. Percebe-se que essas tarefas iniciais de translações no CN4 se conectam diretamente com as últimas tarefas do tema no CN3, em que pontos e figuras estavam sendo submetidos a mais de uma translação sucessivamente. Aqui, com a adição do conceito de vetor de translação, os autores seguem praticamente de onde pararam no livro anterior, dando mais um passo no aprofundamento da apresentação do conteúdo de translações aos estudantes, o que demonstra coerência teórica e pedagógica dentro da obra, visto seu desenvolvimento intencional e articulado do assunto.

Nas duas páginas seguintes, a lista de tarefas sobre translação do volume CN4 é novamente iniciada com as seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ (Figura 45).

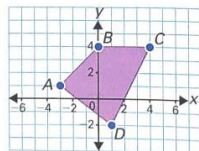
Figura 45 – Tarefas das seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ – CN4.**A Checking**

4. Name the coordinates of the image of each point after the indicated translation.

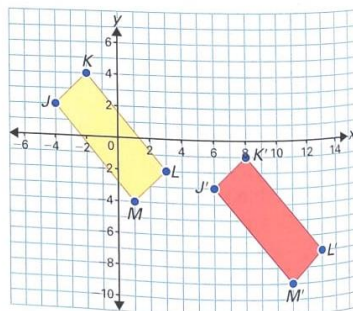
- a) $(-2, 4)$ after $[-3, 1]$
- b) $(0, 7)$ after $[2, -6]$

5. a) Copy this shape. Draw its image after the translation $[-2, 1]$.

- b) Name the coordinates of the image vertices.

**B Practising**

6. Describe the translation that moved $JKLM$ to $J'K'L'M'$.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 228).

A seção ‘Praticando’ continua com mais tarefas e é seguida pela seção ‘Estendendo’ (Figura 46). A análise das tarefas foi feita após a figura para dar uma noção da lista de tarefas completa.

Figura 46 – Tarefas das seções ‘Praticando’ e ‘Estendendo’ – CN4.

7. The coordinates of the vertices of $\triangle ABC$ are $A(1, -1)$, $B(3, 0)$, and $C(2, 4)$.

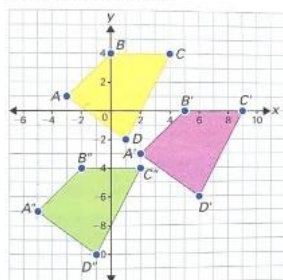
- State the translation vector needed to move A to $A'(3, 4)$.
- State the image of B and C under the same translation.

8. The coordinates of the vertices of $\triangle XYZ$ are $X(0, -4)$, $Y(0, 0)$, and $Z(3, 3)$.

- Determine the coordinates of the image of $\triangle XYZ$ after the translation $[3, -2]$.
- Determine the coordinates of the image of $\triangle XYZ$ after the translation $[-3, 6]$.

9. a) Write the translation vector needed to translate

- $ABCD$ to $A'B'C'D'$
- $A'B'C'D'$ to $A''B''C''D''$
- $ABCD$ to $A''B''C''D''$

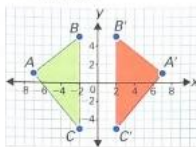


- b) Show how you can use integer operations to explain the relationships among the translation vectors in part (a).

10. $\triangle DEF$ is transformed to $\triangle D''E''F''$ by applying the same translation two times. The coordinates of D are $(-5, -5)$. The vertices of the final image are at $D''(-1, -15)$, $E''(-6, -10)$, and $F''(4, -12)$.

- Write the translation vector.
- Write the coordinates of vertices E and F .

11. Suppose that you were given only the coordinates of the vertices of these two triangles without the diagram. How could you use the coordinates to show that $\triangle A'B'C'$ is *not* the image of $\triangle ABC$ after a translation?



12. The coordinates of the vertices of $\triangle PQR$ are $P(-2, -1)$, $Q(2, 1)$, and $R(0, 4)$. Determine the coordinates of the image vertices after a translation that moves vertex P to vertex Q .

13. $PQRS$ is a square with two vertices at $P(-2, 4)$ and $Q(4, 4)$.

- State two possible sets of coordinates for the other two vertices.
- Draw your two squares on grid paper.
- Write the translation vector needed to move the upper square to cover the lower square.

C Extending

14. a) $\triangle ABC$ has vertices at $A(-2, 4)$, $B(-4, 1)$, and $C(2, 1)$. Draw $\triangle ABC$.
- Draw $\triangle ABC$ after the translation $[2, 2]$.
 - Draw the triangle in part (b) after the translation $[-2, 1]$.
 - Use your drawings to determine the translation vector that will move your image triangle in part (c) back to the original triangle.
 - How can you use the translation vectors $[2, 2]$ and $[-2, 1]$ to determine the translation vector in part (d)?

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 229).

O principal traço que distingue essa lista de tarefas das que são encontradas nos volumes anteriores é o forte uso das características analíticas da translação, isto é, aquelas que estão vinculadas ao plano cartesiano, às coordenadas dos pontos e aos vetores de translação, como serão detalhadas a seguir.

Nas tarefas 4(a) e (b) e 5(a) e (b) da seção ‘Verificando’ (Figura 45), os estudantes devem aplicar a translação em pontos isolados e em pontos que são vértices de um quadrilátero, compreendendo o movimento proposto em notação de vetores, usada pelo livro anteriormente. Já na primeira tarefa (6) da seção seguinte (‘Praticando’), os autores propõem o exercício de raciocínio inverso: dadas uma figura inicial e sua imagem, os alunos precisam identificar qual vetor de translação descreve a Isometria.

Com relação ao problema das cores alteradas após a translação, discutido na análise das tarefas do CN3, observa-se a reincidência do caso nas tarefas 6 e 9(a) e (b) do

CN4, conforme as Figuras 41 e 42, o que parece evidenciar que tal deslize provavelmente não foi observado pelos autores das obras.

As tarefas 10(a) e (b), que descrevem um triângulo que sofre duas translações iguais até chegar a uma imagem final, e questiona sobre o vetor de translação e as coordenadas de alguns vértices, são bastantes similares à tarefa 17 do CN3 (apresentada na Figura 42), com a diferença de perguntar sobre o vetor de translação, já que esse é o conceito recém-apresentado pela coleção (no livro anterior, a tarefa só questionava sobre as coordenadas dos pontos).

Na lista de tarefas do CN4, novamente podemos observar enunciados construídos com o uso de palavras que instruem o estudante a justificar suas respostas, articular argumentos, desenhar pontos, vetores e figuras e demonstrar que estão assimilando o conteúdo e suas propriedades.

Um exemplo especial disso é a tarefa 11 (Figura 46). Ela apresenta um plano cartesiano com dois triângulos, mas pede que os alunos suponham que só receberam as coordenadas dos vértices, sem as figuras. Assim, a tarefa pergunta de que maneira se pode justificar que um triângulo não é a translação do outro, apenas usando as coordenadas. Aqui, o destaque vai para a maneira como o enunciado da tarefa é formulado, usando a instrução ‘suponha’ e pedindo para justificar uma ideia sem utilizar a informação visual que a tarefa oferece.

Lembrando que esse livro é voltado para adolescentes na faixa dos 13 para os 14 anos. Propor tarefas com tal vocabulário oportuniza um desenvolvimento léxico e de raciocínio nos estudantes. Assim, é de se imaginar que muitos deles apresentem dificuldades tanto na compreensão do enunciado, quanto na resolução, mas ter tarefas como essa no seu repertório é um ponto positivo da coleção canadense.

Para encerrar a análise das tarefas da Figura 46, na seção ‘Estendendo’, o enunciado 14 (Figura 46) é dividido em 5 tarefas. Ele propõe duas translações sucessivas em um triângulo e pergunta qual deveria ser o vetor de translação para que a imagem final fosse deslocada para o triângulo original. Até essa parte a tarefa não pede nada de novo, uma vez que outras tarefas já haviam feito o mesmo roteiro; no entanto, a última questão mostra o avanço desejado pela tarefa: os autores perguntam como os dois vetores das primeiras translações poderiam ser usados para determinar o vetor da última translação, após as outras duas. A resposta está na soma das coordenadas, o que inaugura o assunto da soma de vetores

na coleção. Apesar disso, ele se encerra por aqui mesmo, já que não é mais abordado em seguida.

Uma tarefa diferenciada, no formato de jogo, é encontrada no último volume da coleção canadense. É chamada de ‘Corrida Coordenada’ (Figura 47).

Figura 47 – Seção de ‘Jogo Matemático’ – CN4.

Math Game

COORDINATE RACING

In this game, players race around a racecourse, plotting points using translation vectors.

Number of players: 2 to 4

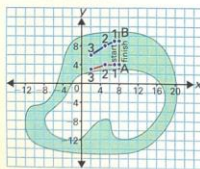
You will need

- grid paper
- a ruler
- coloured pencils

Rules

1. Create your own racecourse using the guidelines shown at the right.
2. Randomly select the order in which players mark their starting positions on the start/finish line. Use a different colour for each player.
3. All players begin the game with a $[0, 0]$ translation vector. They take turns adding $+1$, -1 , or 0 to the two parts of their previous translation vector. They do not have to add the same number to both parts.
4. Players move to their next position by using their new translation vector.
5. If a player goes off the racecourse, she or he must restart from the previous position, using $[0, 0]$ as the translation vector on the next turn.
6. The game ends at the finish line.

The first three moves for players A and B are shown below.



Player A		
Turn number	Translation vector	New position
start	$[0, 0]$	$(8, 4)$
1	$[-1, 0]$	$(7, 4)$
2	$[-2, 0]$	$(5, 4)$
3	$[-3, -1]$	$(2, 3)$

Player B		
Turn number	Translation vector	New position
start	$[0, 0]$	$(8, 9)$
1	$[-1, 0]$	$(7, 9)$
2	$[-2, -1]$	$(5, 8)$
3	$[-3, -2]$	$(2, 6)$

244 Chapter 7

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 244).

Nesse jogo, cada jogador controla um ponto que se move a partir de vetores de translação e que deve fazer um trajeto dentro de uma região do plano, que atua como uma pista de corrida. Para criar uma competição de corrida, a atividade utiliza diversas habilidades desenvolvidas durante a coleção, em especial no próprio volume CN4, como, por exemplo, a representação de pontos no plano cartesiano, o uso de tabelas, a adição de números inteiros, a notação de vetores e pontos e a translação deles. O jogo ainda possibilita que os estudantes treinem a tomada de decisão e criação de estratégias, uma vez que não depende da sorte.

Muitas variações podem ser feitas para novas versões e experiências do jogo, como, por exemplo, no formato da região que forma a pista de corrida, na posição da linha de chegada e nas regras que estabelecem qual deve ser o tamanho dos vetores de translação.

Encerrando a unidade de análise Tarefas, no livro CN4 em uma seção chamada ‘Tarefa do Capítulo’ (Figura 48), os autores apresentam uma animação de desenhos, explorando um lado artístico e profissional da proposta de fazer um *flipbook*, usada no subcapítulo de translações.

Figura 48 – ‘Tarefa do Capítulo’ – CN4.

Chapter Task

Animation

Animation is created by breaking the movement of a figure into a sequence of pictures. Each picture shows a small part of the change from the starting position to the final position.

As you saw in lesson 7.2, a flipbook can be used to create simple animation.

? How can you use transformations to create a flipbook?

- Draw a figure on a grid, using a Cartesian coordinate system. Label the coordinates of each vertex or key point on your figure. Label at least three points.
- Plan a sequence of transformations to perform on your figure. You must use
 - at least one translation
 - at least one reflection in the x -axis or y -axis
 - at least one counterclockwise rotation of 90° , 180° , or 270° about the origin
- Animate the sequence of transformations you planned in step B, using one page for each transformation. Draw each transformation on a grid, using a Cartesian coordinate system.
- Choose three of the points you labelled in step A. Label the coordinates of the images of these points for each transformation.
- On the back of each page of your flipbook, write a description of the transformation shown on that page.



Task Checklist

- ☒ Did you include all the required transformations?
- ☒ Did you correctly identify the coordinates of three vertices or key points on your original figure and its image after each transformation?
- ☒ Did you draw all the images correctly?
- ☒ Did you describe each transformation using appropriate math language?

248 Chapter 7
SEL

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 248).

O roteiro da ‘Tarefa do Capítulo’ trabalha também com as reflexões e rotações (tarefa B), sugerindo que os estudantes façam uso das três Isometrias estudadas no capítulo. Apesar de envolver as outras Isometrias, escolhemos apresentar essa página da unidade de análise relacionada a Translação porque a atividade do *flipbook* foi a motivação usada na abordagem dessa Isometria, o que mostra o esforço que a obra canadense faz ao conectar o que se estudou no decorrer do livro com as propostas especiais do final dos capítulos. Ainda sobre a ideia de criar um *flipbook*, é possível perceber a conexão que os livros canadenses

insistem em estabelecer entre a Matemática, aqui na particularidade das Isomerias e a Arte, explorando diversas possibilidades entre os dois campos.

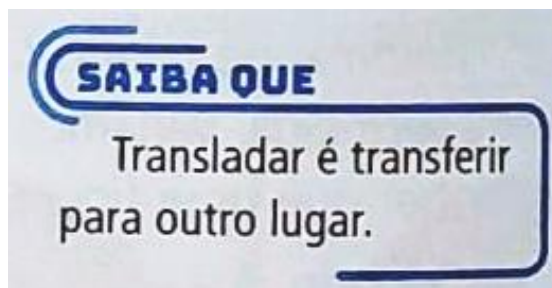
6.4.2 Translação – Coleção brasileira

Na coleção brasileira, o conteúdo de translação está presente nos volumes BR2 e BR3. O capítulo em que o tema é encontrado no BR2 se chama ‘Transformações Geométricas e Simetrias’, enquanto no BR3 o capítulo se chama ‘Polígonos e Transformações no Plano’. A seguir, apresento as descrições, interpretações e argumentos produzidos a partir da análise dessa dimensão.

Conceituação

O livro BR2 apresenta a translação a partir de um exemplo de sua aplicação, que será analisado na próxima unidade de análise. A obra não define formalmente o que é translação, mas oferece o seguinte *box* de vocabulário do verbo ‘transladar’ (Figura 49):

Figura 49 – Box ‘Saiba Que’ – BR2.

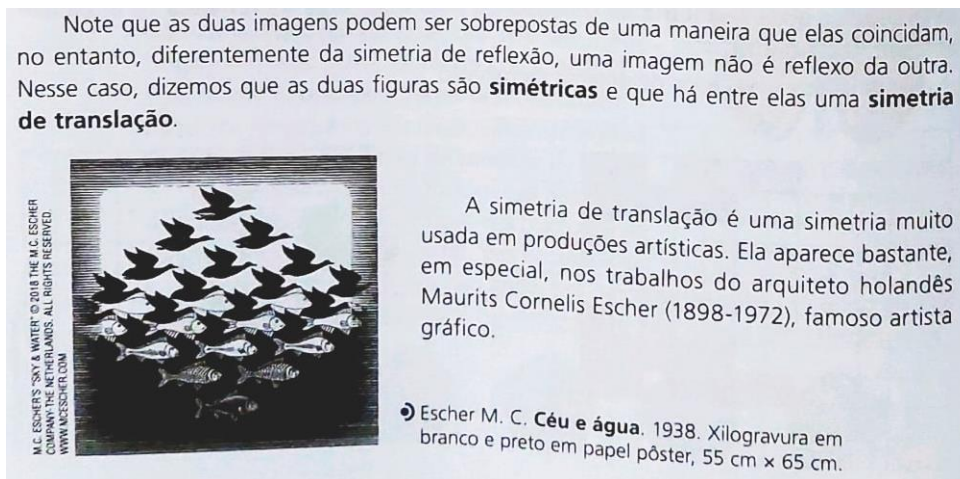


Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 88).

Essa maneira de indicar o significado de ‘transladar’ pode ser interpretada como uma tentativa dos autores de enriquecer o vocabulário dos alunos, no entanto, considerando que o livro não faz em nenhum momento menção à definição de translação, o leitor da obra pode ter a impressão de que o significado de ‘transladar’ é o mesmo que o do conceito de translação, o que não está correto. O conceito de translação envolve muito mais do que apenas “transferir para outro lugar” (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018b, p. 88), conforme visto em Lima (1996), afinal, transferir para outro lugar é característica de qualquer movimento rígido em si.

Na sequência do exemplo de translação, que apresenta uma figura e o resultado de sua translação, temos a seguinte discussão (Figura 50):

Figura 50 – Discussão sobre translação – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 88).

O primeiro parágrafo aponta para a possibilidade de sobrepor a figura inicial e a imagem de sua translação. Aqui, percebe-se uma tentativa de apontar a preservação de algumas características, como as distâncias entre os pontos e as medidas dos ângulos, mas sem explicitar exatamente isso e fazendo uso da noção comum de sobreposição, que recebeu críticas de Hilbert e outros matemáticos (HILBERT, 1902; HARTSHORNE, 2013).

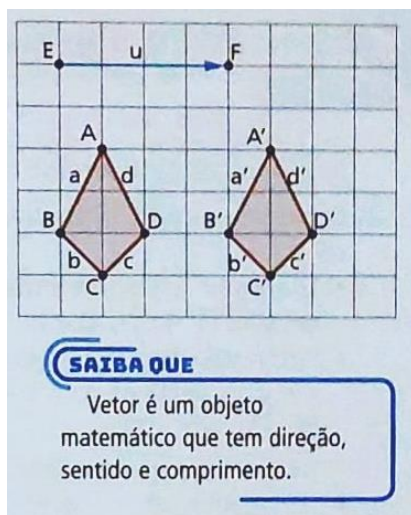
Nota-se também uma preocupação dos autores em diferenciar a translação da reflexão, uma vez que anteriormente (como discutido na dimensão da Simetria) o livro afirmou que, para verificar a simetria, o estudante deveria buscar o eixo de simetria, mas isso seria impossível na identificação de uma translação. Dessa forma, ao dizer que as figuras da translação são simétricas, o livro contradiz a si mesmo, e a origem desse erro está em vincular o conceito de simetria à reflexão axial.

Além de analisar a maneira como a coleção brasileira aborda o tema das translações, é importante interpretar naquilo que não foi citado, como, por exemplo, a preservação da orientação após uma translação e o conceito de vetores de translação, estes sendo fundamentais para a caracterização desse tipo de transformação (LIMA, 1996).

Os autores concluem essa apresentação inicial do conteúdo de translação estabelecendo uma conexão com a arte, citando o artista gráfico Escher (1898 – 1972), que é novamente mencionado na lista de tarefas do capítulo.

Ainda sobre a conceituação das translações no BR2, nas páginas finais do capítulo, dentro de uma seção chamada ‘Tecnologias’, o livro propõe que os estudantes façam uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra para construir figuras e aplicar nelas as simetrias de reflexão, translação e rotação. A Figura 51 mostra a proposta envolvendo a translação.

Figura 51 – Definição de vetor – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 93).

O destaque vai para o *box* ‘Saiba Que’ e sua definição de vetor. Como discutido anteriormente, na análise das translações na coleção canadense, o conceito de vetor é fundamental para a caracterização de uma translação (LIMA, 1996). Na figura acima, podemos ver o primeiro momento em toda a coleção – e único neste volume – em que os vetores são citados. O roteiro da atividade de aplicação da translação envolve criar um vetor e utilizá-lo para mover todos os pontos da figura. Para responder às tarefas sobre o deslocamento dos pontos, espera-se que os estudantes usem a noção de quantas unidades para a direita cada ponto foi movido.

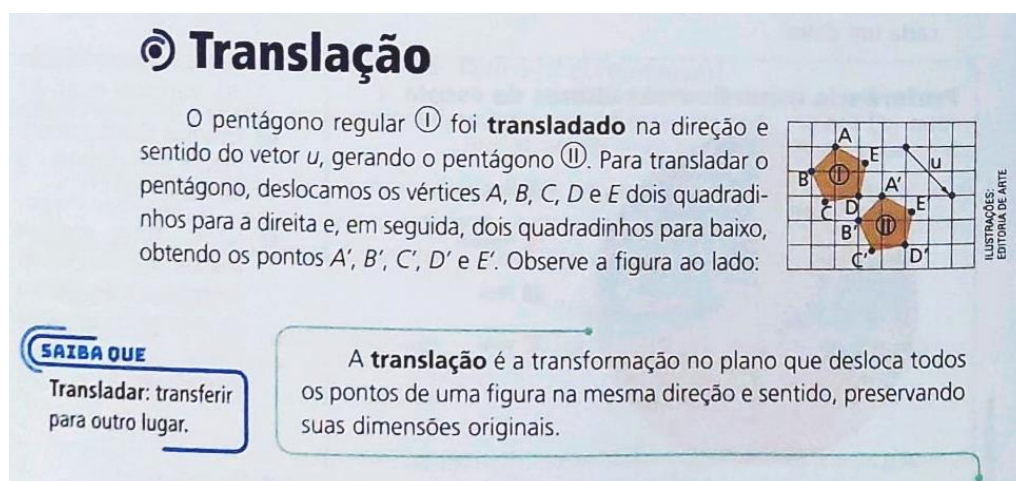
Considerando que até aquele momento a obra não tinha citado a palavra ‘vetor’, é visível a necessidade de se apresentar uma definição do que é esse objeto. No entanto, sabendo que os vetores são centrais para a definição de translação e que essa definição só apareceu no BR2, observa-se uma lacuna no desenvolvimento do tema, já que é uma novidade para o estudante que está aprendendo com este livro didático.

No BR2 percebe-se que a abordagem das translações (e das outras Isometrias também) é proposta sem o uso do plano cartesiano e de suas coordenadas, assim como

começou a coleção canadense nos livros CN1 e CN2, com a diferença de que esses livros canadenses não fizeram menção a vetores, uma vez que a coleção cita pela primeira vez o conceito no CN4, após ter trabalhado plano cartesiano e coordenadas dos pontos após a aplicação das Isometrias no CN3.

Assim, a conclusão é de que não há dúvidas sobre a importância de se trabalhar vetores no estudo das translações, e a coleção brasileira o propõe, embora o faça apenas em uma atividade ao final do capítulo do BR2, com o apoio de um *software* de geometria dinâmica. Trata-se de um aspecto novo para os estudantes e fundamental das translações, que surge sem a apresentação de mais exemplos ou de um trabalho elaborado de construção do conceito. A Figura 52 mostra a abordagem das translações feita pelo BR3.

Figura 52 – Discussão sobre translação – BR3.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 190).

O box ‘Saiba Que’ é o mesmo utilizado no volume anterior, como o leitor pode perceber. No entanto, no BR3 os estudantes encontram uma definição mais elaborada do conceito de translação. O livro mostra que a translação é uma transformação aplicada em pontos e que preserva distâncias. Comparando essa apresentação do conceito no BR3 com aquela feita no BR2, é possível notar um avanço tanto no rigor quanto na forma. Antes não se encontrava esse quadro em destaque com a definição, além de não ter as características isométricas da translação sendo ressaltadas pelo texto do livro.

Outra diferença notável é a escolha de chamar de translação o que vinha sendo tratado como simetria de translação. Os autores não mencionam a mudança na denominação da transformação, mas nesse volume se usa apenas translação em todas as aparições. A mudança em si não cria problemas teóricos ou conceituais, mas atribui um novo nome a algo

que já havia sido abordado no volume anterior, sem fazer menção aos motivos de essa outra nomenclatura ter sido adotada, além de não estabelecer um padrão no nome da transformação de um livro para outro.

Exemplos

Na unidade de análise Exemplos, a coleção brasileira possui uma única amostra em que um exemplo de translação é oferecido, encontrada no BR2. A Figura 53 apresenta esse trecho.

Figura 53 – Exemplo de translação – BR2.

simetria de translação

Vamos retomar a Figura 1 e observá-la com a Figura 3, ambas desenhadas na malha quadriculada.

O ponto A da Figura 1 tem, na Figura 3, o ponto A' como seu correspondente. Além disso, o ponto A está a cinco lados de quadradinho do ponto A'.

PENSE E RESPONDA Resoluções na p. 298

1. Considerando os demais pontos destacados na Figura 1, a quantos lados de quadradinho de distância eles estão de seus correspondentes na Figura 3?
Todos os pontos da Figura 1 estão a cinco lados de quadradinho de distância de seu correspondente na Figura 3.

Observe que todos os pontos da Figura 1 tem seus correspondentes na Figura 3 em uma mesma direção (horizontal), seguindo um mesmo sentido (da esquerda para a direita) e a uma mesma distância (cinco lados de quadradinho), conservando a forma e o tamanho da figura original.

SAIBA QUE
 Transladar é transferir para outro lugar.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 88).

A coleção exemplifica a translação do polígono côncavo indicado por 'Figura 1', que resulta no polígono chamado de 'Figura 3'. A explicação em texto abaixo dos polígonos estabelece a correspondência entre os pontos e a notação usada para isso, além de indicar a distância movida na translação aplicada ("cinco lados de quadradinho"). Não fica claro se os

autores consideram que os dois polígonos já existem ou se a ‘Figura 3’ se origina da translação da ‘Figura 1’. Quando se pensa na translação de um polígono, entende-se que o resultado da transformação é o movimento rígido do polígono inicial, ou seja, o mesmo polígono em outra posição.

No entanto, algumas sugestões do livro BR2 parecem indicar a translação da ‘Figura 1’ se sobrepondo à ‘Figura 3’, dessa forma entendendo os polígonos como dois polígonos distintos e já existentes antes da translação. O que leva a essa conclusão é primeiramente a escrita de apresentação do exemplo, que diz que será feita a observação de uma figura com relação à outra, antes de citar que uma delas passou por uma translação. Outro indício de que se trata de duas figuras distintas que existiam antes da translação é a cor diferente de cada polígono. Sendo assim, a coleção brasileira explora a ideia de sobreposição, apresentada como uma noção comum nos Elementos de Euclides (BICUDO *et al.*, 2009), e criticada por diversos matemáticos mais recentemente (HILBERT, 1902; HARTSHORNE, 2013).

Outro foco de discussão é a linguagem utilizada para determinar a translação. A Figura 53, que apresenta um exemplo do BR2, e a Figura 52, que apresenta o conceito de translação no BR3, utilizam “lados de quadradinho” para indicar quantas unidades os pontos foram deslocados. Além de ser uma escolha informal do ponto de vista teórico, percebe-se que a coleção não utiliza as coordenadas do plano cartesiano para descrever translações, restringindo-se a grades na malha quadriculada para isso. Assim, esses livros didáticos perdem a oportunidade de relacionar as Isometrias com a Geometria Analítica.

O último parágrafo afirma que a translação conserva a forma e o tamanho da figura original, mas não assinala a preservação da orientação na figura, outro aspecto importante nas translações.

Tarefas

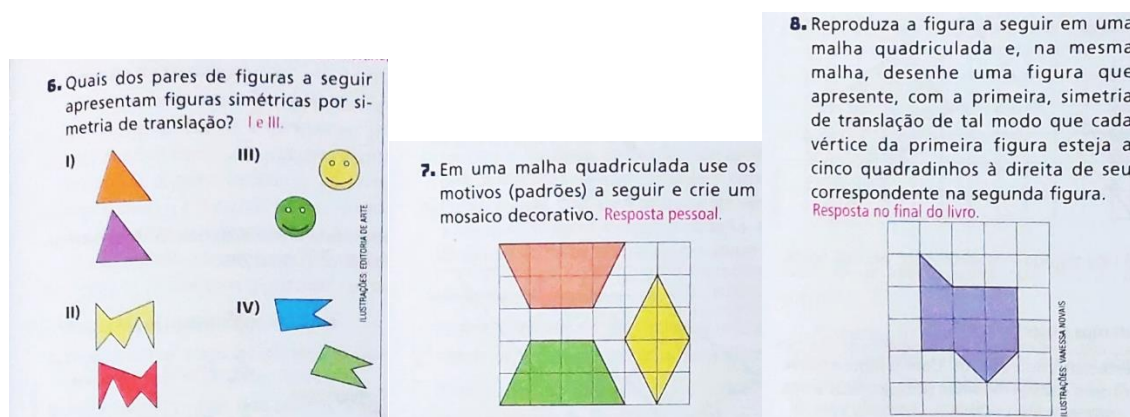
Ao todo, 12 tarefas sobre translações foram identificadas na coleção brasileira, sendo dez no BR2 e duas no BR3.

A primeira delas é encontrada no *box* ‘Pense e Responda’, já apresentado, na Figura 53. A tarefa pergunta sobre a distância entre os pontos correspondentes dos dois polígonos apresentados, trabalhando a característica da translação de deslocar todos os pontos à mesma distância – no caso, “cinco lados de quadradinho”. Um leitor que continuasse a

leitura do texto antes de responder encontraria a resposta no parágrafo seguinte à tarefa, o que poderia tirar a oportunidade de chegar à conclusão sozinho. Nota-se ainda que a tarefa e todo o exemplo em si não fazem menção à preservação das distâncias entre os pontos da figura transladada (por exemplo, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e assim por diante), que é o que torna a translação uma Isometria.

Na lista de tarefas da seção ‘Atividades’ do capítulo de ‘Transformações Geométricas e Simetria’ no BR2, encontram-se as seguintes três tarefas sobre translação (Figura 54):

Figura 54 – Tarefas sobre translação – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 91).

A tarefa 6 apresenta quatro pares de figuras e pergunta em qual deles se pode observar a translação. Percebe-se a influência da mesma ideia discutida anteriormente de sobreposição de figuras na verificação da translação, já que novamente as figuras possuem cores distintas e são preexistentes à translação, ou seja, pergunta-se quais dos pares podem ser sobrepostos, e não qual par retrata uma translação, uma vez que ela não ocorreu. A tarefa 7 possui caráter pessoal e explora a potencialidade estética da translação (e das outras Isometrias), ao propor que seja criado um mosaico com as figuras dadas.

A tarefa 8 pede que seja reproduzida a figura apresentada em uma malha quadriculada e depois que se aplique uma translação de “cinco quadradinhos” para a direita. Nota-se que a tarefa propõe exatamente a mesma experiência oferecida anteriormente no exemplo da Figura 53, utilizando os mesmos requisitos de direção, sentido e distância, mudando apenas a forma da figura transladada. Desse modo, a tarefa não traz nenhuma das diversas variações possíveis de uma translação, o que se torna mais alarmante em uma coleção com tão poucas tarefas para os estudantes utilizarem seus conhecimentos. A

linguagem da distância da translação segue sendo os quadradinhos, mas com uma sensível mudança: agora os autores utilizaram “cinco quadradinhos”, ao invés de “cinco lados de quadradinho”, o que pode passar despercebido para o leitor, mas que é ainda mais inadequado do ponto de vista conceitual.

As próximas tarefas a serem analisadas fazem parte da atividade com tecnologia (Figura 55);

Figura 55 – Tarefas sobre translação com apoio do GeoGebra – BR2.

Resposta pessoal; o comprimento do vetor é igual à distância entre os vértices da primeira figura e seus correspondentes na segunda figura.

• **Simetria de translação**

Usando a ferramenta , desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta , desenhe um vetor horizontal acima do polígono desenhado.

Em seguida, usando a ferramenta , clique, primeiro, no polígono criado e, em seguida, no vetor traçado para obter uma figura simétrica por translação. Veja o exemplo ao lado.

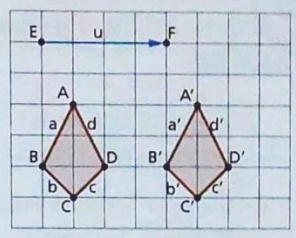
Depois, usando a ferramenta , determine a distância entre os vértices correspondentes das duas figuras.

Responda às questões no caderno.

1. Analisando as medidas obtidas, o que podemos observar? *Todas as medidas são iguais.*
2. Ao desenhar o vetor, dois pontos ficaram destacados. Use a ferramenta  e determine a distância entre eles (comprimento do vetor). Compare, então, esse valor com as medidas obtidas durante a construção. O que podemos concluir?
3. Com o mouse, clique no ponto F do vetor e depois movimente-o. O que ocorre com a segunda imagem criada? A relação existente entre o comprimento do vetor e as distâncias entre os vértices permanece a mesma? *A segunda imagem se movimenta na mesma direção do vetor; a relação permanece a mesma: o comprimento do vetor é igual à distância entre os vértices da primeira figura e seus correspondentes na segunda figura.*

• **Simetria de rotação**

SAIBA QUE
Vetor é um objeto matemático que tem direção, sentido e comprimento.



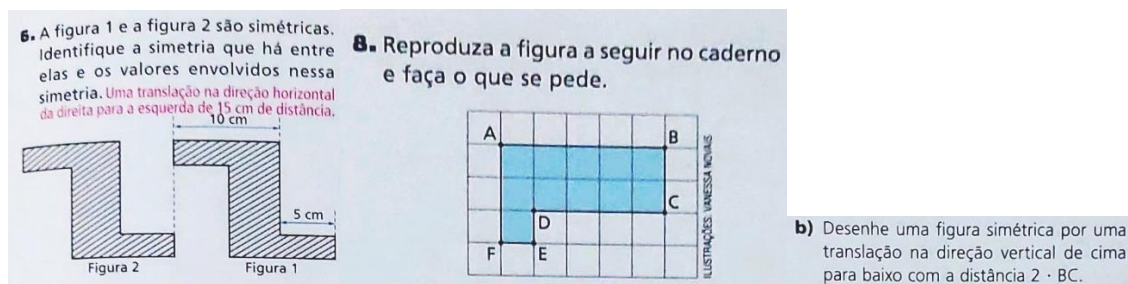
Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 93).

A tarefa propõe a translação de um polígono desenhado pelo estudante no *software* GeoGebra e faz uso de um vetor para realizar o movimento. As duas primeiras tarefas envolvem concluir que as medidas do comprimento do vetor e das distâncias dos vértices correspondentes dos dois polígonos (o original e o transladado) são todas iguais. Apesar de a conclusão ser similar à que foi apresentada no exemplo da Figura 53 (as distâncias entre vértices correspondentes são iguais), a realização dessas tarefas possibilita um desempenho conceitual superior ao do exemplo, uma vez que os enunciados mudam a unidade de medida dos “lados de quadradinho” e passam para uma medida em centímetros, utilizando o conceito de vetores e suas características de comprimento, direção e sentido. Por outro lado, os autores seguem não destacando a Isometria presente na translação: a preservação das distâncias entre os pontos da figura.

A terceira tarefa propõe que o estudante altere o quanto desejar a direção, o sentido e o comprimento do vetor de translação, o que traz uma boa conclusão sobre o impacto dessas propriedades do vetor na imagem dos pontos transladados.

As tarefas na Figura 56 estão no BR2, em uma seção de revisão chamada ‘Retomando o que Aprendeu’, e são as únicas que abordam translações.

Figura 56 – Tarefas de translação na seção de revisão – BR2.

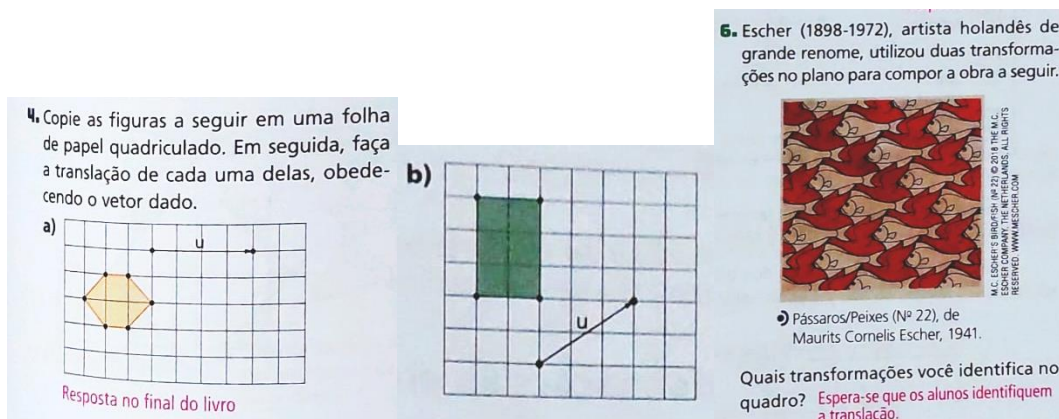


Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 95).

A tarefa 6 apresenta dois polígonos e pede que se identifique a simetria que pode ser estabelecida entre eles. O enunciado não deixa claro qual seria a figura original e qual seria a imagem, no entanto a resposta sugerida em rosa demonstra que o estudante deveria pensar no polígono à direita, chamado de ‘Figura 1’, como aquele que passará pela transformação. As medidas indicadas aumentam a dificuldade da tarefa, ao demandar que o aluno note que o deslocamento será de 15 cm.

Já o enunciado 8 possui três tarefas, sendo que apenas a tarefa 8(b) envolve translação. O enunciado oferece um polígono que deve ser reproduzido e transladado conforme as orientações dadas. Trata-se de uma tarefa que se diferencia das outras apresentadas até aqui, pois, além de propor um movimento com especificações ainda não vistas na coleção, o enunciado demanda interpretação para identificar a direção, o sentido e o comprimento da translação.

As últimas duas tarefas que serão analisadas nesta seção fazem parte do BR3, na seção chamada ‘Atividades’ do capítulo de ‘Transformações no Plano’, e podem ser conferidas na Figura 57.

Figura 57 – Tarefas sobre translação – BR3.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 193).

As tarefas 4(a) e (b) pedem que o estudante realize duas translações de polígonos conforme indicado pelo vetor em cada tarefa. A primeira (4(a)) envolve um tipo de translação na horizontal para a direita que já havia sido trabalhada outras vezes pela coleção. A tarefa 4(b) propõe uma translação que ainda não havia sido feita até o momento, com a direção na diagonal. Essa baixa variedade de experiências nas tarefas da coleção brasileira limita os estudantes a poucas situações, fazendo com que o professor precise complementar a lista de tarefas do livro didático para não os deixar com tal carência.

Por fim, a tarefa 6 envolve uma obra de Escher e requisita que os alunos identifiquem as transformações usadas pelo artista para compor sua criação. Trata-se de duas translações, uma dos pássaros (em vermelho) e outra dos peixes (em bege). A tarefa mostra como a translação pode ser usada para causar sensações visuais atraentes.

Concluindo a unidade de análise de Tarefas na coleção brasileira, o BR3 apresenta a seção ‘Tecnologias’ (Figura 58).

Figura 58 – Atividade sobre translação com apoio do GeoGebra – BR3.

TECNOLOGIAS

Depois do estudo das transformações geométricas no plano, vamos usar ferramentas do software Geogebra para fazer composições envolvendo simetrias de reflexão, translação e rotação.

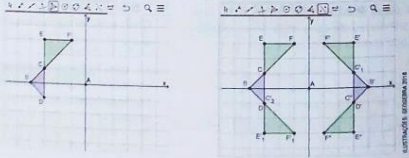
Transformações no plano

Talita e Fernando estavam usando o software de geometria dinâmica para estudar transformações no plano. Eles receberam um desafio para compor um padrão geométrico usando as simetrias de reflexão, translação e rotação. Nesse desafio, eles poderiam usar apenas as seguintes ferramentas:

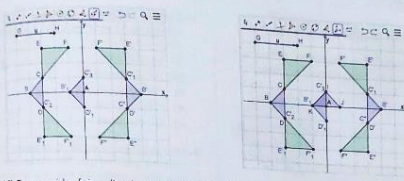
Mover	Reta
Reflexão em relação a uma reta	Ponto
Polígono	Translação por um vetor
Vetor	Intersecção entre dois objetos
Rotação em torno de um ponto	

Além disso, eles poderiam usar a ferramenta  apenas duas vezes. Observe algumas etapas das construções realizadas por Talita e Fernando.

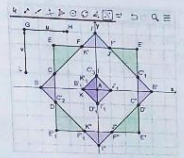
1ª) Inicialmente eles construíram dois triângulos. Em seguida, os triângulos BCD e CEF foram refletidos em relação ao eixo y. Depois, refletiram os triângulos CEF e F'E'C' em relação ao eixo x.



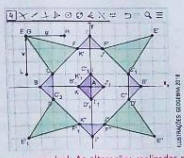
2ª) foi realizada uma translação do triângulo BCD, obtendo o triângulo B₁C₁D₁. Em seguida, foi feita uma rotação desse último triângulo, de centro em A e 90° no sentido horário.



3ª) Em seguida, foi realizada uma translação do triângulo JKI, obtendo o triângulo J'K'I'. Para finalizar, Talita refletiu os triângulos JKI e J'K'I' em relação ao eixo x, obtendo o padrão geométrico que desejava.



- No Geogebra, construa o padrão geométrico apresentado anteriormente. Você pode seguir o passo a passo que Talita e Fernando usaram, ou realizar as transformações geométricas em outra ordem. *Resposta pessoal.*
- Depois de construído o padrão geométrico, usando a ferramenta  clique sobre um vértice de um dos primeiros polígonos construídos e arraste. Veja a seguir um exemplo.



Resposta possível: As alterações realizadas nos primeiros polígonos construídos acontecem nos demais polígonos obtidos como transformação no plano dos primeiros.

O que você verificou?

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 194 e 195).

A proposta acima apresenta um roteiro que duas pessoas seguiram para criar um padrão geométrico usando Transformações Geométricas. Como pode ser visto na Figura 58, os autores partem de dois triângulos e, através de reflexões, translações e rotações, o restante do padrão é formado. Para isso, diversos pontos são citados na descrição do passo a passo, o que faz com que o resultado esteja poluído de informações com os nomes dos pontos. Esse aspecto da proposta pode ser um dificultador para a compreensão e realização da atividade, que, após o roteiro, pede que os estudantes repliquem o que foi descrito e, em seguida, movam determinado ponto para visualizar que a alteração na forma do padrão acontece em todos os pontos.

Apesar de as tarefas aumentarem o contato dos estudantes com as Isometrias e aprimorar suas habilidades com um *software* de geometria dinâmica, a proposta possui conclusões simples no que diz respeito a compreender que todos os pontos do padrão serão alterados ao se mover um ponto da construção geométrica, deixando de trabalhar questões relacionadas às Isometrias e suas características referentes à orientação, às medidas de distâncias e ângulos e aos pontos fixos de cada transformação aplicada.

6.5 Dimensão de análise – Rotação

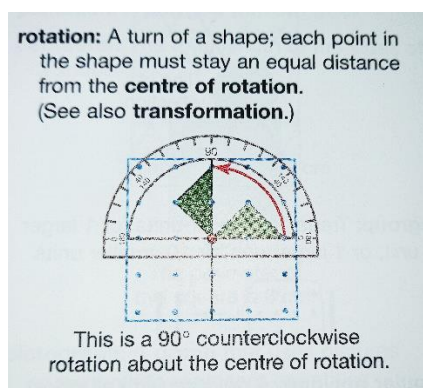
6.5.1 Rotação – Coleção canadense

A dimensão de Rotação foi observada em toda a coleção canadense, isto é, nos quatro livros encontram-se páginas que abordam o estudo das rotações.

Conceituação

No volume CN1, encontra-se na seção de ‘Glossário’ a seguinte definição de Rotação (Figura 59):

Figura 59 – Glossário de rotação – CN1.

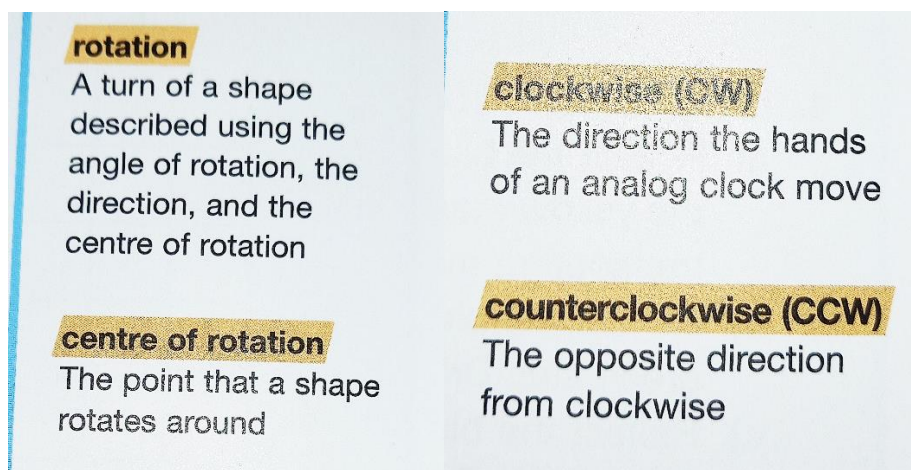


Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 422).

A obra destaca a preservação das distâncias entre os pontos rotacionados e o centro de rotação. Como visto, a definição é acompanhada de um exemplo da rotação de 90° de um triângulo no sentido anti-horário, utilizando o transferidor na medição do ângulo de rotação.

No volume seguinte, o CN2, o conteúdo de rotações é introduzido com o subcapítulo ‘Descrevendo Rotações’, que oferece aos estudantes as definições de rotação, centro de rotação, sentido horário e anti-horário (Figura 60), além de mostrar de que maneira esses termos podem ser usados, conforme será mostrado na unidade de análise Exemplos, mais à frente.

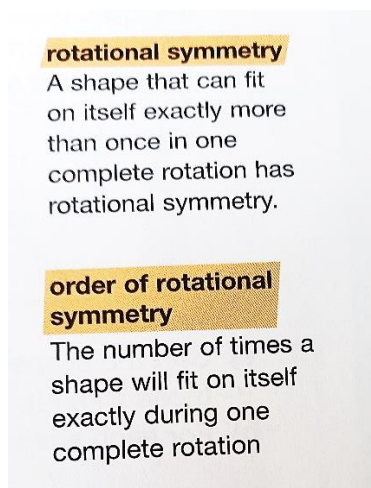
Figura 60 – Definições de rotação, centro de rotação e dos sentidos horário e anti-horário – CN2.



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 418).

Observa-se o cuidado que a coleção tem em dotar os estudantes do léxico referente às rotações, de maneira organizada e sistemática. Ainda no CN2, vemos a introdução da simetria rotacional, definida pela obra (Figura 61).

Figura 61 – Definição de simetria rotacional e da ordem de simetria rotacional – CN2.

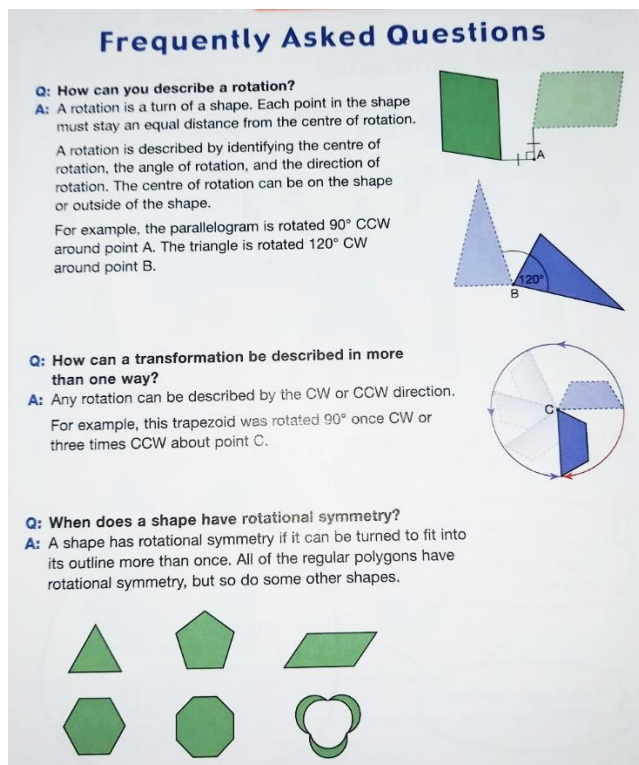


Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 423).

Trata-se de rotações em que o centro de rotação está dentro da figura e que obtêm como resultado a própria figura mais de uma vez em uma rotação completa. A abordagem dessa transformação com o centro de rotação dentro, e não só fora ou na fronteira da figura, é um diferencial da coleção canadense em relação à brasileira e aponta para uma variedade de noções dentro do mesmo conceito que os livros oportunizam.

A seção de ‘Perguntas Frequentes’ (Figura 62) do CN2 sistematiza o conteúdo.

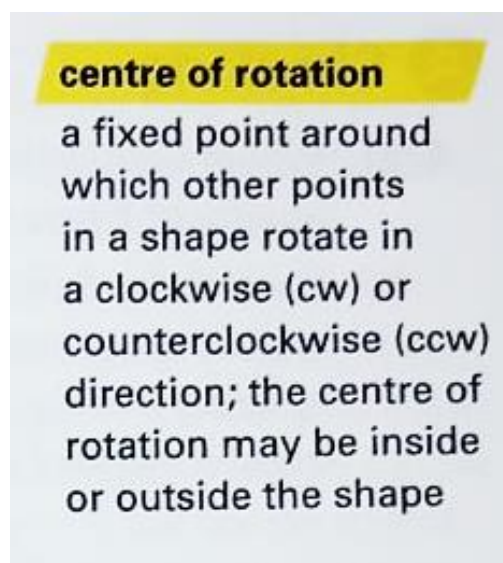
Figura 62 – ‘Perguntas Frequentes’ – CN2.



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 426).

As três interrogações retomam os conceitos trabalhados previamente no capítulo e ampliam as informações sobre a Isometria. A primeira delas traz a definição de rotação, como identificá-la e dois exemplos. Já na segunda os autores mostram como a rotação pode ser descrita de duas formas diferentes, considerando os sentidos horário e anti-horário. Aqui vale notar que o questionamento feito é “Como uma transformação pode ser descrita em mais de uma maneira?” (tradução nossa), quando o correto seria especificar que a transformação referida é a rotação. Apesar dessa imprecisão, a resposta e o exemplo apresentados na sequência expandem a noção sobre rotação e mostram que ambos os sentidos podem ser usados na descrição de qualquer rotação. Por último, a terceira interrogação retoma a simetria rotacional e adiciona a informação de que todos os polígonos regulares possuem esse tipo de rotação, além de algumas outras figuras geométricas também.

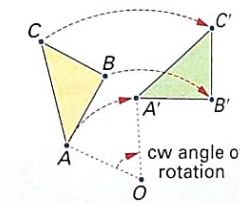
No livro CN3, ao definir o centro de rotação de uma figura, a obra deixa explícito que este ponto pode estar dentro ou fora dela (Figura 63) resgatando as ideias trabalhadas nos volumes anteriores.

Figura 63 – Definição de centro de rotação – CN3.

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 241).

Pela primeira vez na coleção canadense aparece o termo ‘ponto fixo’, que, como visto em Lima (1996, p. 23), é uma maneira de classificar as Isometrias. Em seguida, a seção de ‘Perguntas Frequentes’ (Figura 64), agora no CN3, apresenta um quadro com as relações entre os vértices da pré-imagem e da imagem após a aplicação de cada Isometria.

Figura 64 – ‘Perguntas Frequentes’ – CN3.

rotation 	There is a common centre of rotation, O, from which a circle can be drawn to pass through each pre-image vertex and its image. Angles AOA', BOB', COC', and so on, are all the same. The orientation of the image depends on the angle of rotation.	
---	--	--

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 246).

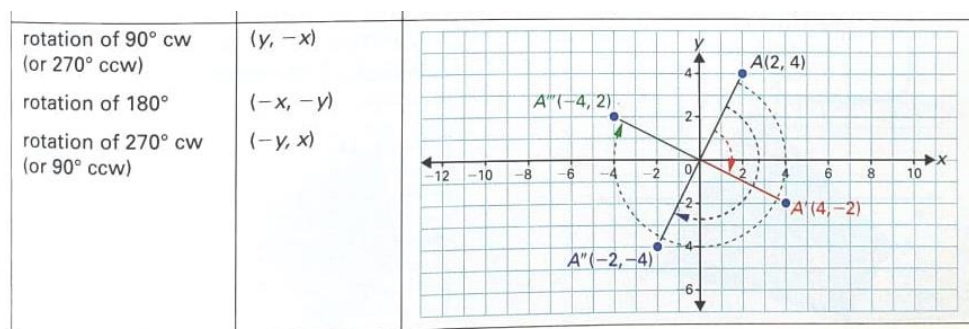
Percebe-se que os autores optaram por dar um exemplo com o centro de rotação fora da figura. A representação, com setas e indicações, contribui para o estudante entender qual movimento foi feito. Algo que chamou a atenção foi afirmação de que “A orientação da imagem depende do ângulo de rotação” (tradução nossa), afinal se sabe que a rotação não altera a orientação, ou seja, a orientação não depende do ângulo de rotação, ela será mantida (LIMA, 1996). Aqui, portanto, identifica-se um equívoco da coleção canadense. Em um

quadro como esse, onde a proposta é compilar as informações estudadas sobre o conteúdo até aquele momento, o erro pode gerar confusão e incerteza para os estudantes.

Por fim, no CN4 o tema das rotações está em um subcapítulo dividido entre reflexões e rotações. Após todos os conceitos trabalhados nos volumes anteriores, o livro propõe um estudo mais analítico das rotações, sem adicionar novas definições sobre a Isometria. Assim, o que se observa é a introdução do plano cartesiano e das coordenadas dos pontos que são transformados por rotações. Os exemplos serão analisados na próxima unidade de análise.

A seção de ‘Perguntas Frequentes’ do CN4 utiliza um quadro (Figura 65) para condensar as informações sobre algumas coordenadas de um ponto rotacionado no plano cartesiano.

Figura 65 – ‘Perguntas Frequentes’ – CN4.



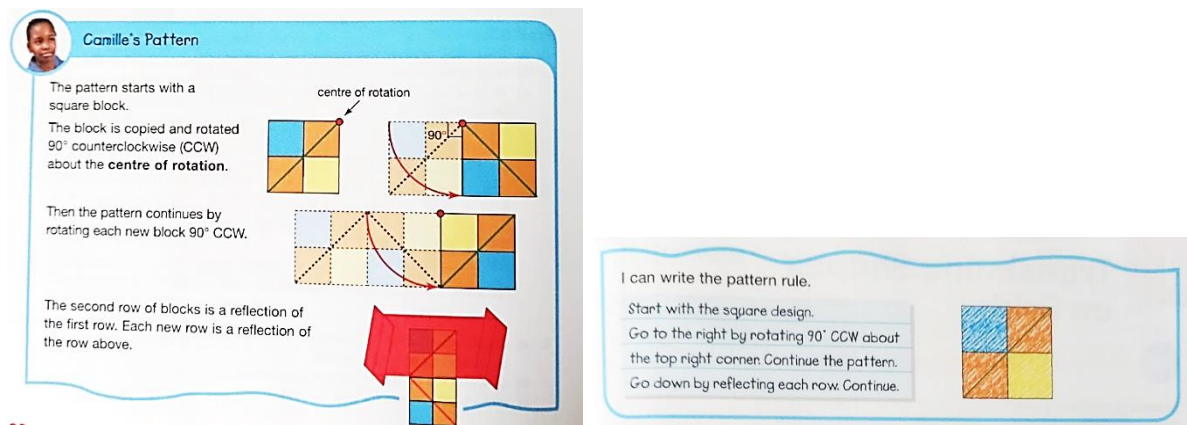
Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 235).

Utilizando a descrição das rotações com os dois sentidos, a obra dá destaque às coordenadas de um ponto que é rotacionado com o centro na origem do plano (essa informação não é indicada pelos autores) em 90°, 180° e 270° no sentido horário. A representação usa o plano cartesiano, setas e cores para ilustrar as transformações e propriedades das coordenadas desse tipo de rotação. O quadro oferece um modelo para consulta e aprendizado dos estudantes.

Exemplos

No CN1, a Isometria de rotação começa a ser introduzida com a ideia de padronagem (Figura 66), mesmo antes de apresentar qualquer definição de rotação, já que a única definição de rotação nesse volume é encontrada na seção de ‘Glossário’, ao final da obra.

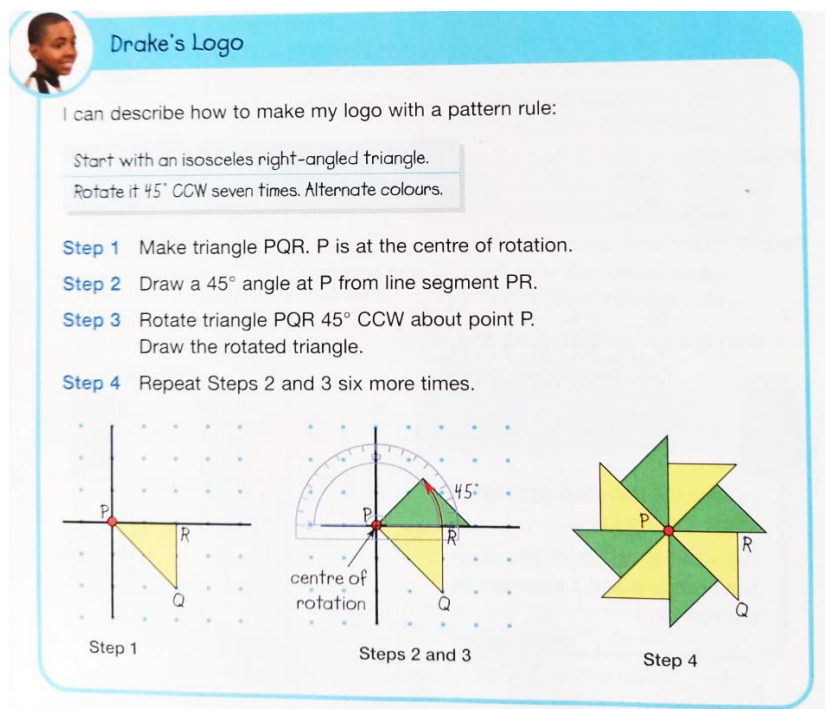
Figura 66 – Exemplo de criação de padrão – CN1.



Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 388, 389).

A motivação do exemplo envolve reproduzir e descrever o padrão dado utilizando rotações e reflexões. Percebendo os materiais indicados para uso nesse exemplo (papel quadriculado, lápis de cor, espelho transparente e opcionalmente um *software* de desenho), supõe-se que a proposta possibilita o contato concreto dos alunos com esse padrão e sua reprodução, levando-os a desenhar e identificar as possibilidades de giros e de reflexos possíveis.

No exemplo seguinte (Figura 67), ainda no CN1, os autores seguem utilizando as rotações para formar padrões, agora pensando em como criar um logo.

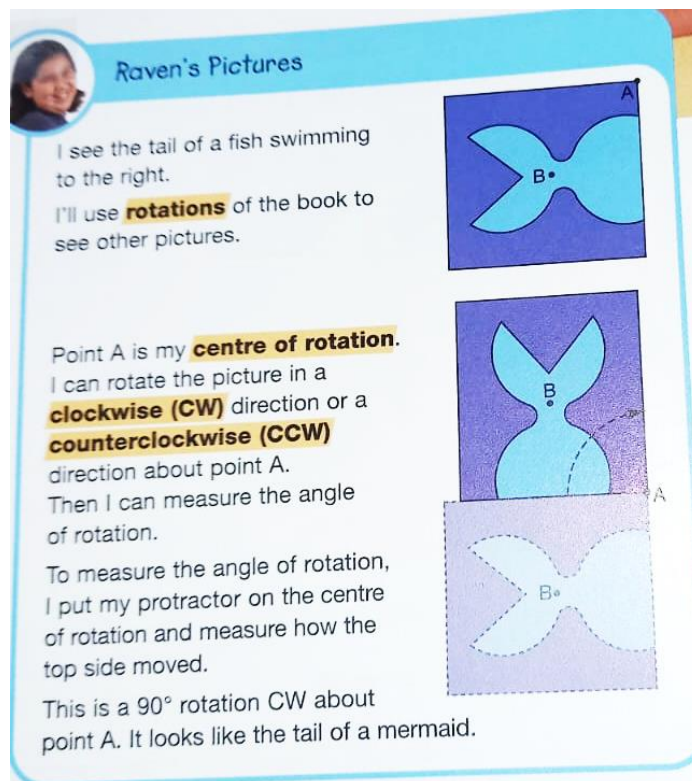
Figura 67 – Exemplo de criação de logo – CN1.

Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 394).

O exemplo mostra como criar um logo rotacionando triângulos e colorindo-os com cores alternadas e, para isso, se organiza através de um passo a passo em dois formatos (escrito e representado), o que auxilia na compreensão da sequência de ações. O potencial estético da rotação e do uso de cores mais uma vez ganha destaque nas páginas que se seguem e nas tarefas que o livro propõe, como será apresentado na próxima unidade de análise.

Os exemplos do segundo volume mostram como descrever rotações, ainda usando figuras mais lúdicas e sem utilizar o plano cartesiano ou coordenadas. Com a introdução das definições de rotação, centro de rotação e dos sentidos de rotação no CN2, o primeiro exemplo (Figura 68) descreve a rotação da representação da cauda de um peixe.

Figura 68 – Exemplo de rotação da cauda de um peixe – CN2.

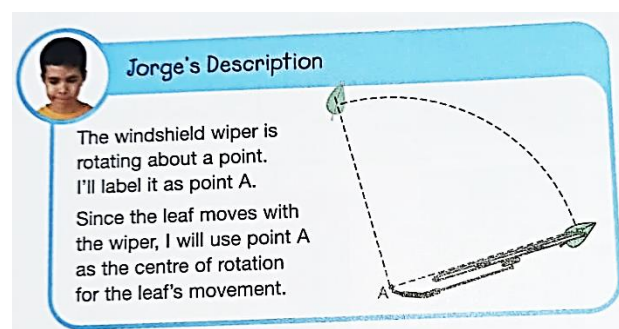


Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 418).

O exemplo apresenta o desenho de uma cauda de peixe com dois pontos marcados, um dentro da figura e outro na sua fronteira. A narrativa do exemplo mostra a decisão de que o ponto A será o centro de rotação e as possibilidades de rotação nos sentidos horário e anti-horário. O ângulo de 90° é escolhido para a rotação e os autores explicam como medi-lo. A seguir, nas tarefas, a obra discute as diferenças na imagem da rotação caso o ponto B fosse escolhido para o centro de rotação.

No próximo exemplo do CN2, observa-se uma rotação com o centro fora da figura (Figura 69).

Figura 69 – Exemplo de rotação com centro fora da figura – CN2.

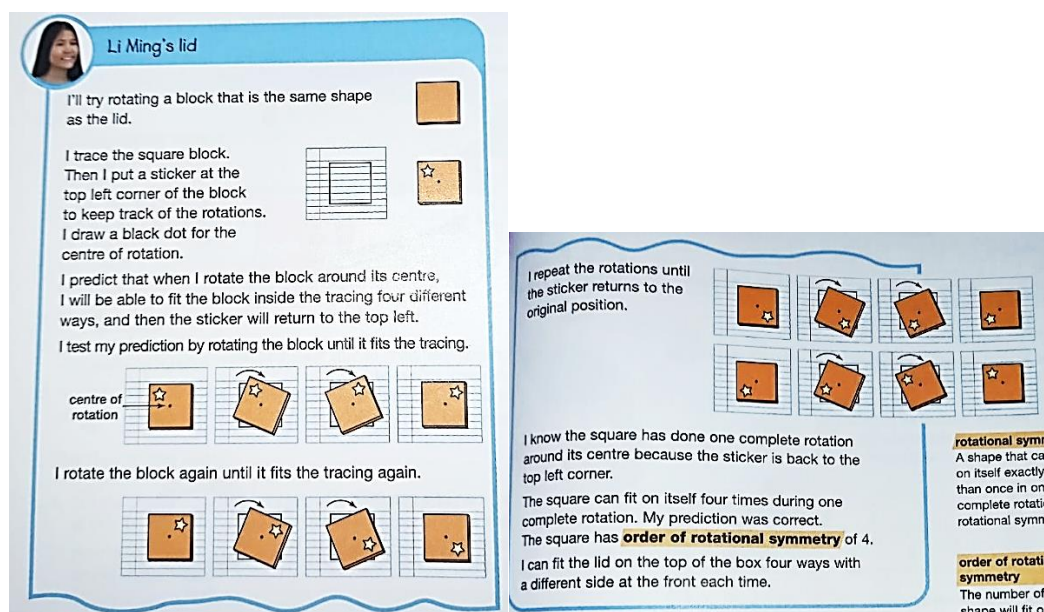


Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 420).

Apesar de breve, o texto propõe uma situação cotidiana de rotação no caso de um limpador de para-brisa que movimenta uma folha. Além da observação criativa de uma rotação, o exemplo é posicionado na sequência ao que discutia o ponto de rotação dentro ou na fronteira da figura, ampliando a noção dos estudantes com relação a essa informação.

O último exemplo de rotações do CN2 é o que aborda o conteúdo da simetria rotacional. A situação envolve de quantas maneiras distintas a tampa quadrada de uma caixa pode ser usada para cobri-la usando a rotação (Figura 70).

Figura 70 – Exemplo de simetria rotacional – CN2.



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 422, 423).

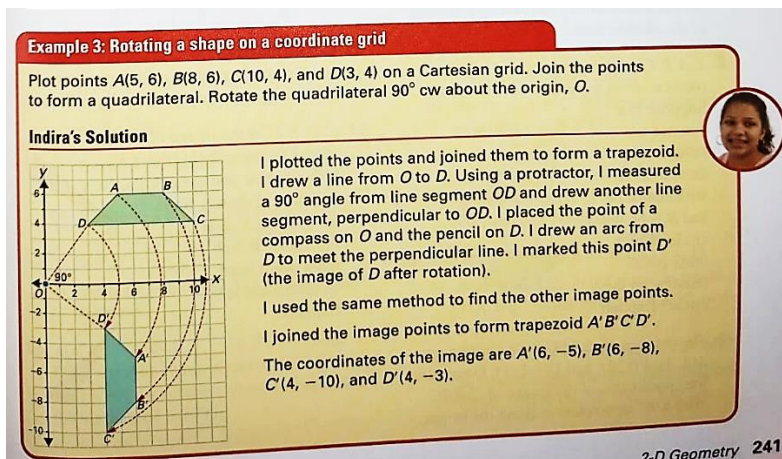
A resolução da situação começa com o desenho de um quadrado para representar a tampa, seguido da marcação desse quadrado com uma estrela, para ser possível identificar o número de rotações após os giros. O texto do exemplo oferece o guia das rotações que estão sendo realizadas, que podem ser acompanhadas também pelas ilustrações. Ao final do exemplo, a conclusão de que existem quatro maneiras distintas de cobrir a caixa com a tampa é sistematizada através do conceito de ordem da simetria rotacional, que, no caso dado, é igual a 4. Nesse exemplo, a coleção canadense volta a abordar a rotação com o centro no interior da figura e amplia seu tratamento apresentando esses conceitos.

O volume CN3 conta com três exemplos de rotação, sendo que o primeiro retoma a ideia de padronagem do CN1, o segundo explora a definição de rotação vista no CN2 e o

terceiro introduz uma nova informação ao conteúdo, que é o uso de coordenadas do plano cartesiano. É significativo o esforço que a coleção canadense faz para resgatar o que se estudou do conteúdo até aquele momento, antes de avançar para um novo assunto, uma vez que os conteúdos anteriores foram abordados teoricamente um ou dois anos antes.

O ‘Exemplo 3’ do CN3 (Figura 71) marca o início do estudo das rotações em um sistema de coordenadas dentro da coleção.

Figura 71 – Exemplo de rotação em um sistema de coordenadas – CN3.



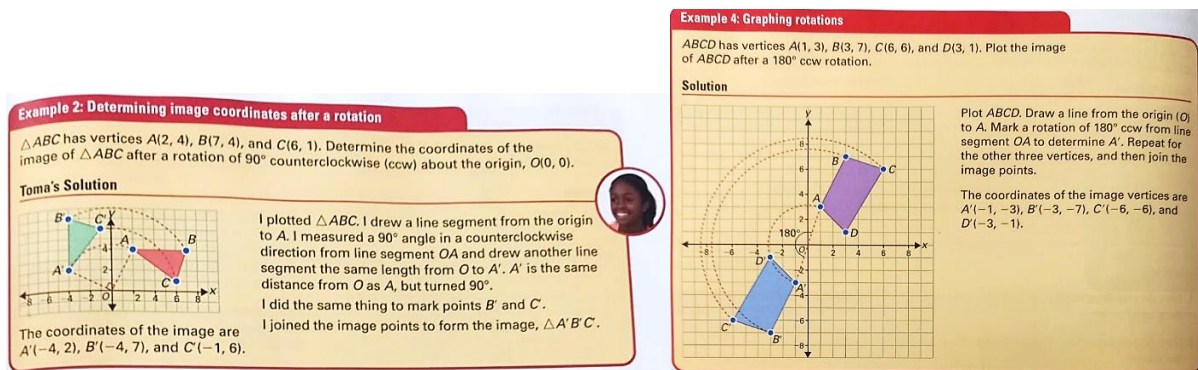
Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 241).

O enunciado do exemplo pede que, a partir de pares ordenados dados, quatro pontos sejam representados no plano cartesiano e ligados de modo a obter um quadrilátero. Em seguida, pede-se para rotacioná-lo em torno da origem com um ângulo de rotação de 90° no sentido horário. A solução mostra uma abordagem de construção geométrica utilizando transferidor para medição do ângulo e compasso para medição das distâncias. Ponto a ponto, a resolução proposta encontra os quatro pontos correspondentes após o giro e os liga, obtendo o quadrilátero transformado pela rotação.

Percebe-se que a abordagem ressalta as características isométricas da rotação, isto é, a preservação das distâncias, em especial da distância entre o centro de rotação e os vértices do quadrilátero. Outro aspecto destacado pela resolução é o de a rotação transformar pontos e não figuras.

Concluindo esta unidade de análise, no CN4 temos dois exemplos de rotação (Figura 72), ambos explorando o mesmo processo de construção geométrica apresentado no volume anterior.

Figura 72 – Exemplos de rotação de pontos em um sistema de coordenadas – CN4.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 231, 232).

Note-se que em ambos os exemplos o foco da situação é identificar as coordenadas após a transformação dos pontos. Os ângulos de rotação foram de 90° e 180° , respectivamente, e a alteração que movimentos como esses promovem nas coordenadas é o que se destaca no volume CN4. Na unidade de análise de Conceituação, a seção de ‘Perguntas Frequentes’ (Figura 65) faz o resumo de como as coordenadas dos pontos são alteradas quando sujeitas a essas rotações mais comuns de 90° e 180° .

Tarefas

Na coleção canadense, foram identificadas 125 tarefas que abordam o assunto das rotações, distribuídas da seguinte maneira: 23, 53, 32 e 17 no CN1, CN2, CN3 e CN4, respectivamente. Como foi apresentado, o CN1 trabalha as rotações através de padronagem, formação de mosaicos e de logos. A tarefa 3 (Figura 73) orienta que se escolha um dos polígonos e se aplique o método apresentado usando transferidor e papel quadriculado.

Figura 73 – Tarefa de criação de logo – CN1.

Checking

3. Trace one of these shapes to make your own logo.

- Rotate your shape using Drake's pattern rule. Use a protractor.
- Sketch each rotated shape on square dot paper.
- Label the angles of rotation.

Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 395).

As tarefas são baseadas no exemplo apresentado na Figura 59 e trata-se do primeiro contato do estudante com o processo de rotacionar uma figura na coleção canadense.

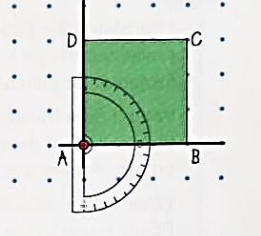
Nas tarefas seguintes (Figura 74), a partir da descrição da formação de um padrão usando a rotação de um quadrado, o estudante é conduzido a realizar cada passo e comparar com o que tinha previsto antes de fazer a tarefa.

Figura 74 – Tarefa de criação de logo com passo a passo – CN1.

4. a) Predict the shape of the logo using Jake's pattern rule.

Start with square ABCD.
 Rotate it 90° CW three times about point A.
 Alternate colours.

b) Make the logo using the pattern rule.
 c) Label the centre of rotation and the angles of rotation.
 d) How close was your prediction? Explain.



Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 395).

A novidade que essas tarefas proporcionam é o ângulo de rotação de 90°, desta vez no sentido horário. Mais tarefas como essa, para praticar a rotação de polígonos, constam na sequência do livro.

Encerrando as tarefas apresentadas do CN1, a obra propõe uma tarefa com mais abertura para o estudante escolher a figura para rotacionar (Figura 75).

Figura 75 – Tarefa de criação de logo livre – CN1.

6. Create your own logo using your own shape and 60° rotations.

Fonte: Small e Kestell (2004a, p. 395).

Apesar da fixação do ângulo de rotação, trata-se de uma tarefa que inspira autonomia e abre espaço para cada estudante criar um logo da maneira que preferir, após ter recebido todas as instruções de como fazer e ter visto variados exemplos.

O CN2 é responsável por trazer as definições de rotação, centro de rotação e dos sentidos horário e anti-horário e por propor rotações com os centros de rotação posicionados no interior, na fronteira e no exterior da figura. Retomando o exemplo apresentado na Figura 68, as tarefas que o seguem exploram o efeito de rotacionar uma mesma figura a partir de centros de rotação diferentes (Figura 76).

Figura 76 – Tarefas com rotações da mesma figura em dois centros diferentes – CN2.

This is a 90° rotation CW about point A. It looks like the tail of a mermaid.

? How can rotations change the picture that you see?

A. Raven rotated the picture from its original position about point B. What is the direction of the rotation? What is the angle of the rotation?

B. Rotate the picture around points A and B. Use 90° and 180° as angles of rotation. Try CW and CCW directions.

C. Describe each of the pictures you see. How many different pictures are there?



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 418, 419).

As três tarefas verificam se o estudante compreendeu os sentidos de rotação e de que forma o centro de rotação pode alterar o movimento realizado. São diversas as informações que podem ser observadas com as rotações pedidas pelas tarefas, como, por exemplo, a figura não ser quadrada, o movimento do ponto A quando o centro de rotação é o ponto B e vice-versa, o resultado da imagem ao rotacionar 90° e 180° , etc.

Ainda aproveitando as discussões dessas tarefas, a obra continua com a seção ‘Refletindo’ (Figura 77):

Figura 77 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ após o exemplo da cauda do peixe – CN2.

Reflecting

1. Compare the rotations about the two centres A and B.
 - a) How are they the same?
 - b) How are they different?
2.
 - a) Which angles of rotation give the same results when rotating in CW and CCW directions?
 - b) Which angles of rotation give different results when rotating in CW and CCW directions?
3. Raven saw the tail of the fish. Imagine that she kept turning the picture 90° CW around point B over and over. What pattern of pictures would she see?

Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 419).

As tarefas 1(a) e (b) pedem que se compare as rotações com centros A e B, destacando as semelhanças e diferenças, enquanto as tarefas 2(a) e (b) focam no ângulo de rotação e a tarefa 3 no padrão de figuras que seria visto caso a rotação fosse realizada diversas

vezes. As respostas para essas perguntas são discursivas e demandam que o estudante amplie seu contato com a figura e com os elementos da rotação, fazendo um experimento conforme as tarefas são propostas e criando um acumulado de observações e impressões nesse primeiro contato com os conceitos associados à rotação.

O CN2 segue o mesmo tipo de abordagem do CN1: após o aprofundamento da situação do exemplo, as tarefas envolvem praticar com outras formas e depois criar uma figura própria (Figura 78).

Figura 78 – Tarefas 6 e 7 da seção ‘Praticando’ – CN2.

6. a) How can you rotate this E to get a 3?

b) How can you rotate the picture to show another letter? Describe the rotation.

c) Choose a different direction and centre of rotation that will show the same second letter. Describe the rotation.

d) How can you rotate the design to show a third letter? Describe the rotation.

7. a) Create a picture that looks the same when you rotate it.

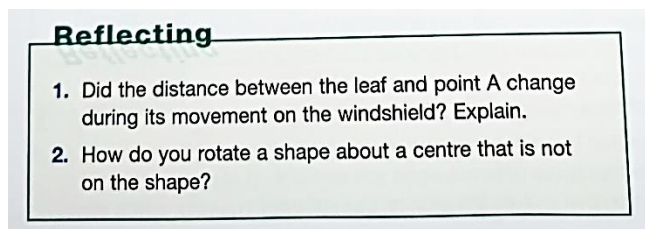
b) Create a picture that looks different when you rotate it. Describe a rotation that makes the picture look different.

Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 419).

As tarefas 6(a), (b), (c) e (d) propõem uma figura, com cinco pontos destacados, que deve ser rotacionada para obter como imagem letras do alfabeto. Devido aos diferentes pontos da figura, são várias as respostas corretas, cada uma com os seus próprios elementos (centro, ângulo e sentido de rotação). Já as tarefas 7a) e 7b) requerem que imagens sejam criadas de modo que resultem em rotações iguais ou diferentes à figura inicial, seguindo o padrão de estimular a criatividade dos alunos.

O subcapítulo seguinte a esse no CN2 aborda situações em que o centro de rotação é exterior ao que é transformado pela Isometria (Figura 61). As tarefas da seção ‘Refletindo’ (Figura 79) são relativas ao exemplo da folha no para-brisa de um automóvel.

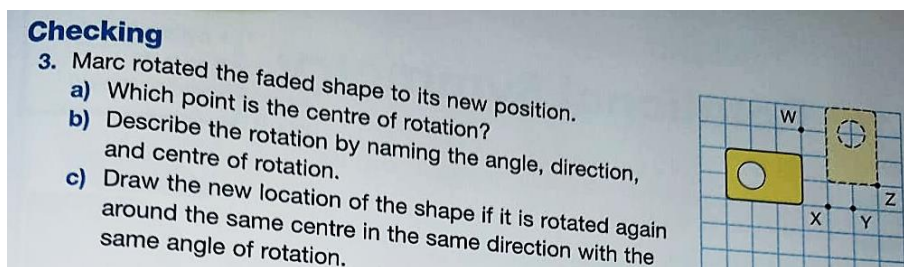
Figura 79 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ com o centro de rotação fora da figura – CN2.



Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 420).

A tarefa 1 (Figura 79) faz menção à preservação da distância entre o objeto movido e o centro de rotação, ao passo que a tarefa 2 (Figura 79) salienta o caso em que o centro de rotação não está na figura. Em seguida, as tarefas da seção ‘Verificando’ (Figura 80) apresenta uma figura que é rotacionada.

Figura 80 – Tarefas da seção ‘Verificando’ com o centro de rotação fora da figura – CN2.

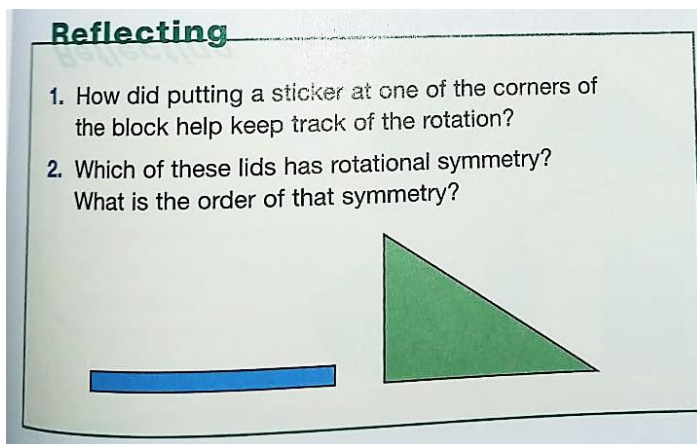


Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 421).

O estudante precisa identificar quais foram o centro, o ângulo e o sentido de rotação e depois utilizar os outros pontos como centro de rotação. No que tange à discussão sobre o uso das cores, observa-se que nessa tarefa a obra utiliza a mesma tonalidade de cor para a figura rotacionada, deixando a pré-imagem mais esbranquiçada e pontilhada. Essa escolha ilustra que a figura segue tendo as mesmas propriedades, inclusive a cor, após a rotação.

Concluindo o CN2, o último subcapítulo que aborda as rotações é sobre a simetria rotacional (Figura 70). As tarefas da seção ‘Refletindo’ (Figura 81) tratam desse conteúdo.

Figura 81 – Tarefas da seção ‘Refletindo’ de simetria rotacional – CN2.

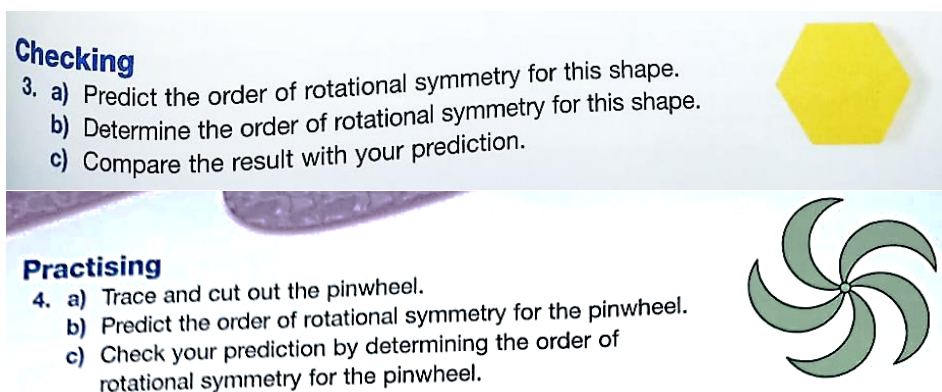


Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 423).

A tarefa 1 (Figura 81) retoma a importância de marcar a tampa da caixa com a figurinha, para ser possível contar a ordem de simetria rotacional. A tarefa 2 (Figura 81) apresenta dois polígonos que devem ser investigados com relação às suas ordens de simetria rotacional.

As tarefas que a obra propõe a seguir envolvem diferentes figuras, poligonais e não poligonais, como, por exemplo, o hexágono e o catavento (Figura 82).

Figura 82 – Tarefas das seções ‘Verificando’ e ‘Praticando’ de simetria rotacional – CN2.

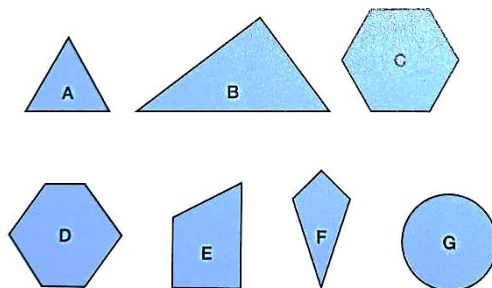


Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 423, 424).

São tarefas que dão o ponto de partida na dedução da relação que a ordem de simetria rotacional tem com a regularidade de uma figura, seja ela poligonal ou não. As cinco últimas tarefas (Figura 83) desse subcapítulo aumentam a gama de polígonos e demandam uma conclusão geral do conteúdo.

Figura 83 – Tarefas 7 e 8 da seção ‘Praticando’ – CN2.

7. a) Sort the shapes into those with rotational symmetry and those without. Use a Venn diagram.
 b) For each shape, list its order of rotational symmetry.

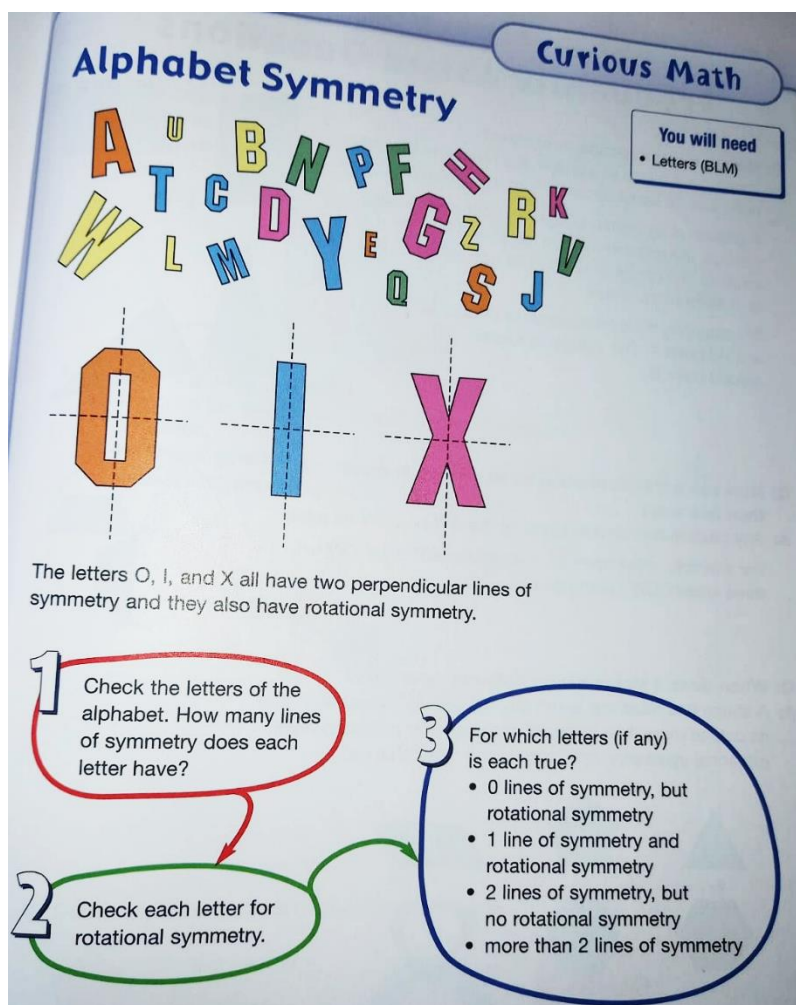


8. a) Can a polygon with no sides of equal length have rotational symmetry? Explain.
 b) Does every polygon with at least two sides of equal length have rotational symmetry? Explain.
 c) Why is a circle the shape with the most rotational symmetry?

Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 424).

As tarefas 7(a) e (b) pedem uma classificação dos polígonos quanto à simetria rotacional usando o Diagrama de Venn. Entre polígonos regulares e não regulares, as tarefas desafiam os estudantes colocando pela primeira vez um círculo na última figura. Por fim, as tarefas 8(a), (b) e (c) requerem que os estudantes façam deduções sobre a simetria rotacional de polígonos, buscando uma sistematização das conclusões obtidas com as figuras da tarefa anterior. As tarefas sobre o assunto das rotações no CN2 se encerram com a seção ‘Matemática Curiosa’ (Figura 84):

Figura 84 – Seção ‘Matemática Curiosa’ – CN2.



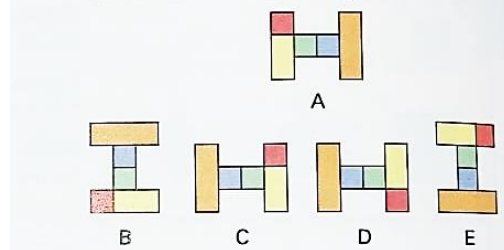
Fonte: Small e Kestell (2004b, p. 425).

Trata-se de uma proposta que trabalha com as letras do alfabeto e na identificação dos eixos de simetria e da ordem de simetria rotacional delas. Três letras são dadas como exemplo e o restante deve ser verificado pelos estudantes. As tarefas têm um aspecto divertido e lúdico, usando as letras para praticar os conceitos apresentados anteriormente. Um conjunto de ações em três etapas é oferecido para orientar a realização da proposta.

Com o início do uso do sistema de coordenadas nas rotações no CN3, as tarefas com padronagem e definições de rotação aparecem em menor quantidade. Ainda assim, a influência das cores, a manutenção delas após a rotação e a proposta lúdica seguem tendo destaque. Um exemplo são as tarefas 9(a) e (b) da seção 'Praticando' do CN3 (Figura 85).

Figura 85 – Tarefas da seção 'Praticando' – CN3.

9. a) Which figure below is not the result of a rotation of figure A? Explain.
 b) What transformation created the image that is not a rotation of figure A?

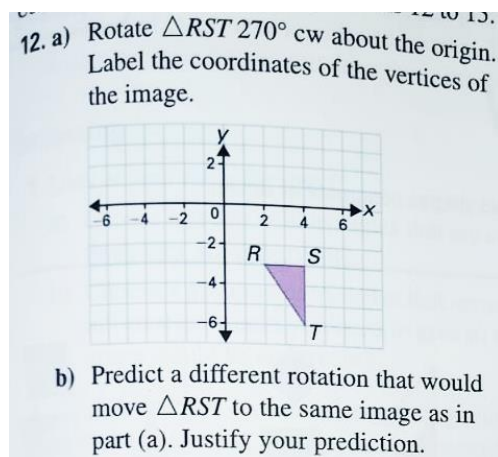


Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 242).

A figura dividida em áreas retangulares de diferentes cores apresenta uma complexidade ao se pensar sobre sua rotação, devido à disposição das cores e dos retângulos interiores. As duas tarefas focam em qual das opções não pode ser uma rotação da figura A e, sendo assim, qual transformação poderia criar tal figura. Aqui temos um uso interessante da posição das cores como dificultador da tarefa, mas também como atrativo (FONSECA, 2013). A conexão feita com a Isometria de reflexão também é um ponto positivo da proposta.

As tarefas 12(a) e (b) (Figura 86) apresentam um sistema de coordenadas com um triângulo que deve ser rotacionado 270° no sentido horário, com centro na origem.

Figura 86 – Tarefas 12(a) e 12(b) da seção ‘Praticando’ – CN3.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 243).

A tarefa 12(a) demanda as coordenadas da imagem da rotação em questão. Já a tarefa 12(b) pretende que o estudante pense em outra rotação que obtenha o mesmo resultado. Esse tipo de tarefa, em que se incentiva que o aluno preveja algum cenário, é recorrente em todo o conteúdo de rotação, como visto em passagens anteriores.

Para encerrar a análise das tarefas do CN3, o enunciado da tarefa 15 (Figura 87) é composto apenas por texto, não apresentando figuras ou plano cartesiano.

Figura 87 – Tarefa 15 da seção ‘Praticando’ de criação de logo – CN3.

15. $\triangle E'F'G'$ with $E'(1, -1)$, $F'(1, 3)$, and $G'(4, 0)$ is the rotation image of $\triangle EFG$ after a 90° cw rotation about F . Determine the vertices of $\triangle EFG$.

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 243).

São dadas as coordenadas de um triângulo após uma rotação de 90° no sentido horário, com centro de rotação em um dos vértices, e a solução da tarefa é descobrir as coordenadas do triângulo antes do movimento. Essa é uma das últimas tarefas do capítulo de rotações, e nela percebe-se que os autores já esperam que os estudantes consigam realizar o processo inverso de uma rotação, a partir de enunciados puramente textuais.

As tarefas sobre rotação do CN4 dão seguimento às do volume anterior, explorando cada vez mais a rotação no plano cartesiano. Na seção ‘Refletindo’, a tarefa 3 (Figura 88) tem como foco as coordenadas de um ponto após rotações comuns ao redor da origem.

Figura 88 – Tarefa 3 da seção ‘Refletindo’ – CN4.

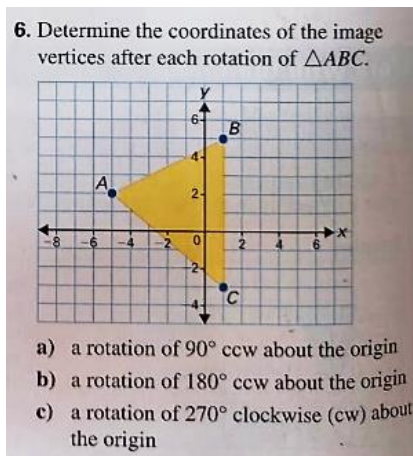
3. How do you determine the coordinates of a point after a 90° rotation about the origin? Do you think this would be true with rotations of 180° and 270° as well? Why?

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 231).

A tarefa segue o exemplo mostrado na Figura 64 e cumpre o papel de auxiliar os estudantes a estabelecer a relação entre as coordenadas dos pontos rotacionados com centro na origem e ângulos de rotação de 90° , 180° e 270° , de modo que se torne mais direta a identificação das coordenadas após rotações desse tipo.

Para praticar essa ideia, os autores propõem as tarefas 6(a), (b) e (c) (Figura 89):

Figura 89 – Tarefas 6(a), 6(b) e 6(c) da seção ‘Praticando’ – CN4.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 232).

Além de praticar a correspondência entre as coordenadas da imagem e da pré-imagem da rotação, aqui os estudantes também exercitam esse estudo em diferentes quadrantes, uma vez que os pontos estão em três quadrantes distintos.

Continuando o mesmo padrão de tarefas do CN3, no CN4 encontra-se as tarefas 8(a), (b), (c) e (d) (Figura 90), que consistem em um enunciado puramente textual e requerem uma rotação do tipo que se praticou até ali, explorando a rotação com Geometria Analítica.

Figura 90 – Tarefas 8(a), (b), (c) e (d) da seção ‘Praticando’ – CN4.

8. $A(-4, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, -3)$, and $D(-2, -3)$ are the vertices of a quadrilateral. Determine the coordinates of the image vertices after each transformation of $ABCD$.
- a) a reflection in the x -axis
 b) a reflection in the y -axis
 c) a rotation of 180° cw about the origin
 d) a rotation of 270° cw about the origin

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 233).

As tarefas 8(c) e 8(d) propõem ângulos de rotação já vistos antes, mas desta vez, além de o sentido de rotação ser outro, o enunciado não está acompanhado de uma figura.

Para encerrar a análise das tarefas no CN4, as tarefas 13(d), (e) e (f) (Figura 91) atuam como desafios finais após o estudo do capítulo.

Figura 91 – Tarefas 13(d), (e) e (f) da seção ‘Estendendo’ – CN4.

13. Point A has coordinates (x, y) . Determine the coordinates of the image of A after each transformation.
- d) a rotation of 90° cw about the origin
 e) a rotation of 180° cw about the origin
 f) a rotation of 270° cw about the origin

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 233).

Desta vez, um ponto com coordenadas genéricas é dado e as rotações comuns de 90° , 180° e 270° com centro na origem são propostas. Pedem-se as coordenadas do ponto após as rotações. Nessas tarefas, os autores visam que os estudantes cheguem à conclusão do efeito desse tipo de rotação em quaisquer coordenadas x e y , conclusões essas que são compiladas no quadro de ‘Perguntas Frequentes’, apresentado na unidade de análise de Conceituação (Figura 65).

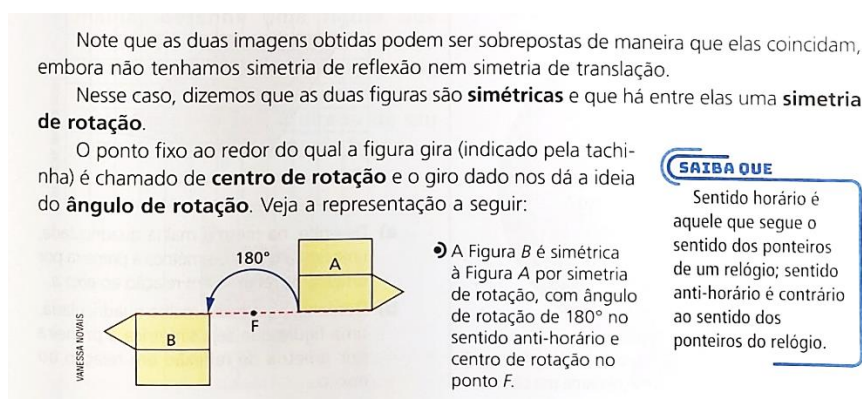
6.5.2 Rotação – Coleção brasileira

Assim como as translações, as rotações estão presentes somente nos livros BR2 e BR3, nos mesmos capítulos. A quantidade de páginas do conteúdo na coleção brasileira, em comparação com a coleção canadense, é nitidamente inferior e, por isso, as unidades de análise são mais breves.

Conceituação

No BR2, o trecho que apresenta os conceitos relacionados à rotação (Figura 92) resulta de um exemplo de rotação de uma figura que será analisado na próxima unidade de análise, o que não prejudica a discussão da conceituação.

Figura 92 – Conceitos sobre rotação – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 89).

Semelhantemente ao que foi mencionado na dimensão de Translação, a coleção brasileira chama a rotação de “simetria de rotação” no BR2 e apenas de “rotação” no BR3. Na Figura 92 observa-se que a identificação da Isometria de rotação é feita a partir da sobreposição das figuras e do descarte das outras duas simetrias apresentadas (reflexão e translação). A obra conclui que as figuras são simétricas e que entre elas ocorre a simetria de rotação.

Nesse ponto segue válido o que Lima (1996) e Hartshorne (2013) argumentam a respeito da sobreposição de figuras como argumento para verificação de Isometrias. Apesar de não representar um erro conceitual, a maneira como a coleção brasileira inicia o conteúdo não ressalta as características próprias e específicas da rotação, como centro, sentido e ângulo de rotação, e, ao invés disso, sugere que sua identificação é feita por exclusão, ao não se observarem as outras Isometrias.

Na sequência, ao definir os elementos da rotação, o texto da Figura 92 apresenta o centro e ângulo de rotação, enquanto o sentido de rotação é explicado no quadro ‘Saiba Que’. Um destaque positivo é o reforço que o BR2 faz ao dizer que o centro de rotação é um ponto fixo da transformação, característica exclusiva da rotação entre as Isometrias (LIMA, 1996).

No BR3, o trecho (Figura 93) de definição do conceito é conciso e está posicionado na obra após dois exemplos.

Figura 93 – Definição de rotação – BR3.



A transformação geométrica **rotação** consiste em girar determinada figura, em torno de um ponto do plano, mantendo o ângulo de deslocamento.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 191).

A definição enfatiza a rotação de uma figura, quando o correto seria evidenciar os pontos da figura, uma vez que a rotação é uma transformação de pontos (LIMA, 1996). A preservação de distâncias da rotação também não aparece na definição dada.

Assim, do ponto de vista conceitual, o conteúdo das rotações é apresentado de modo superficial. Suas características são destacadas de maneira imprecisa e sem receber destaque. Em contraste com a coleção canadense, os conceitos de simetria rotacional e sua ordem não estão presentes na coleção brasileira.

Exemplos

Nesta unidade de análise, os três exemplos de rotação na coleção serão apresentados, sendo que um deles (Figura 94) se encontra no BR2 e os outros dois no BR3.

Figura 94 – Exemplo de rotação com tachinha e palito de sorvete – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 89).

O exemplo mostra um passo a passo com imagens e texto para fazer a rotação de uma figura qualquer. Para isso, requer um palito de sorvete, uma tachinha e fita adesiva, além dos materiais escolares convencionais. A tachinha atua como o centro de rotação e o palito de sorvete como a medida preservada entre a figura e a tachinha.

Esse é o primeiro contato com rotação que a coleção brasileira oferece, visto que o conteúdo se inicia com a atividade. Percebe-se que, assim como a coleção canadense, o BR2 começa o estudo das rotações sem o uso do sistema de coordenadas, apenas rotacionando figuras no plano. Mas, diferentemente do CN1, que opta por atividades de criação de mosaicos, a formação de padrões com a rotação de figuras e o potencial estético do uso de cores não são explorados na página de conceituação e exemplo do BR2.

No BR3, dois exemplos são exibidos antes da conceituação vista na Figura 93. O primeiro deles (Figura 95) apresenta a rotação de uma figura similar à que foi mostrada no exemplo da tachinha do volume anterior, com a adição do uso de uma grade quadriculada.

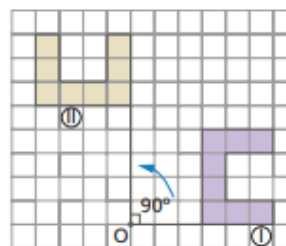
Figura 95 – Exemplo de rotação em uma grade quadriculada – BR3.

Rotação

Considere a figura a seguir. Nela, ① foi rotacionada em torno do ponto O , em 90° no sentido anti-horário, obtendo-se a figura ②.

Para construir a rotação de uma figura, é preciso definir o ponto em torno do qual essa figura girará, ou seja, um **centro de rotação**. Também é preciso definir um ângulo e um sentido de rotação.

Abaixo temos a rotação do triângulo IJK, construído passo a



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 191).

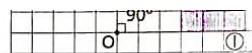
O movimento de rotação é feito no mesmo sentido que o do BR2, embora o ângulo de rotação seja de 90° . A ilustração representa incorretamente uma rotação em torno do ponto O , visto que a distância entre o centro de rotação e cada ponto da figura aumentou após a transformação. Esse erro logo no primeiro exemplo do conteúdo pode impactar a aprendizagem dos estudantes, uma vez que as propriedades isométricas da rotação não são observadas na representação nem no texto que a acompanha.

Com relação ao uso de cores no exemplo, houve uma mudança na cor da figura rotacionada. O texto afirma que a ‘figura I’ foi rotacionada para obter a ‘figura II’, mas um par de perguntas que pode ser feito pelos estudantes é: “Em que momento desse movimento a sua cor foi transformada? A rotação é uma transformação que altera cor e distância?”. Desse modo, a mudança na cor prejudica a noção de que ocorreu um movimento e que a mesma figura que estava na posição I moveu-se para ocupar a posição II.

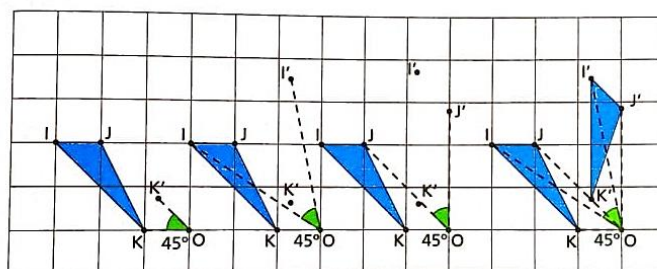
O BR3 continua com o segundo exemplo de rotação (Figura 96) ainda em uma malha quadriculada, desta vez com um triângulo.

Figura 96 – Exemplo de rotação de um triângulo – BR3.

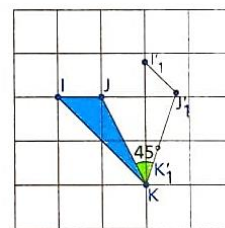
Abaixo temos a rotação do triângulo IJK, construído passo a passo, em torno do ponto O, com um ângulo de rotação de 45° , no sentido horário.



Observe como cada um dos vértices do triângulo foi unido ao centro de rotação e definiu, de acordo com a medida do ângulo de rotação e o sentido definido, os vértices da imagem $I'J'K'$.



O centro de rotação também pode ser um dos pontos da figura. Agora, vamos rotacionar o triângulo IJK, considerando o vértice K como centro de rotação. Faremos um giro de 45° no sentido horário:



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 191).

O exemplo é apresentado em duas partes, a primeira com o centro de rotação fora da figura e a segunda com o centro sendo um dos vértices. Em ambas, o foco da representação é o ângulo de rotação. A cor do triângulo rotacionado é mantida na primeira parte do exemplo. A ilustração busca oferecer um passo a passo da rotação de cada vértice, mas o resultado que se vê na imagem é um emaranhado de construções, por não haver divisórias entre as etapas, o que dificulta o entendimento. A segunda parte do exemplo traz o centro de rotação sendo um dos vértices do triângulo e foi a primeira ocorrência desse tipo de rotação na coleção brasileira. Em nenhuma das partes do exemplo a malha quadriculada foi realmente utilizada. Na primeira, a imagem da rotação teve apenas o ponto J' encontrado na malha, e o fato de $\overline{IJ}$ medir a unidade da malha não é aproveitado para fim algum e pode até gerar mais confusão visual nas ilustrações repletas de informações.

Concluindo a unidade de análise de Exemplos, constam três exemplos em toda a coleção, sendo que um deles possui erro conceitual. Percebe-se que a coleção oferece baixa variedade de situações de rotação para os estudantes e em nenhum momento introduz as coordenadas dos pontos nesse estudo, em contraste com a coleção canadense.

Tarefas

A coleção brasileira possui dez tarefas que abordam o conteúdo das rotações, sendo que oito delas estão no BR2 e duas no BR3.

As duas primeiras tarefas (a) e (b) sobre rotações no BR2 (Figura 97) se referem ao exemplo da construção com a tachinha e o palito de sorvete (Figura 94).

Figura 97 – Tarefas sobre preservação das distâncias – BR2.

- a) Obtenha a medida de comprimento dos dois segmentos de reta traçados e depois compare-os.
b) Faça, para os demais vértices, a mesma análise do item anterior. A qual conclusão podemos chegar?

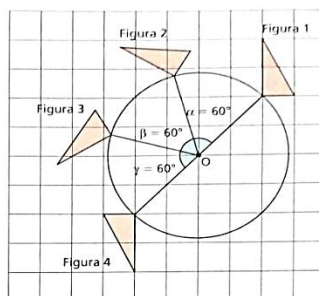
Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 89).

Ambas as tarefas ressaltam a preservação das distâncias na rotação, inicialmente entre o centro de rotação e a figura e depois entre os vértices. O destaque que as tarefas fazem para essa característica da rotação é a única menção que o BR2 faz sobre a rotação ser uma Isometria, mesmo sem escrever explicitamente.

Após o exemplo da tachinha e a definição de rotação, as duas tarefas abaixo estão em uma lista de tarefas que inclui as outras transformações. A primeira (Figura 98) envolve rotações com ângulo de rotação medindo 60° e centro fora da figura.

Figura 98 – Tarefa sobre rotação com o centro fora da figura – BR2.

9. Observe a figura a seguir que mostra uma circunferência de centro O e quatro figuras (1, 2, 3 e 4) simétricas entre si por simetria de rotação.



Com base na imagem responda:

- a) Qual o ângulo de rotação entre as Figuras 1 e 4?
b) Esse é o mesmo ângulo de rotação entre as figuras 2 e 4? Por quê?

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 91).

A situação é dividida em duas tarefas (9(a) e 9(b)) que abordam a medida do ângulo de rotação, esperando que o estudante faça a soma das medidas apresentadas para

descobrir qual deve ser o ângulo de rotação para uma figura ser rotacionada até sobrepor a outra. É a primeira vez que esse tipo de raciocínio é apresentado no estudo das rotações.

A tarefa seguinte (Figura 99) exhibe outra obra de Escher, diferente daquelas que o livro apresentou no conteúdo de translações (Figuras 50 e 57).

Figura 99 – Tarefa de rotação envolvendo uma obra de arte – BR2.

10. A figura a seguir é da xilogravura *Limite circular III* de Escher, feita em 1959. Observe no centro dela os dois peixes laranjas. Sabendo que são simétricos, detalhe a simetria que há entre eles.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 91).

O enunciado da tarefa revela que os peixes laranja centrais são simétricos e pede que se identifique qual é a transformação envolvida. A tarefa oferece um exemplo do uso das Isometrias como potenciais estéticos em obras de arte. O resgate de uma obra do artista, que já havia sido apresentado antes com outra transformação, salienta a variedade artística que o conteúdo possibilita e contribui para a criatividade e o raciocínio dos estudantes (BAPTISTA, 2014).

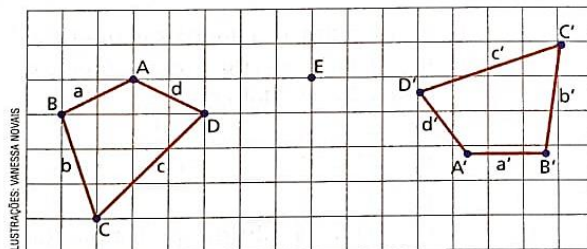
Na seção ‘Tecnologias’ do BR2 (Figura 100), o trecho sobre rotações está apresentado na Figura 100.

Figura 100 – Tarefa sobre rotação com apoio do GeoGebra – BR2.

• Simetria de rotação

Usando a ferramenta , desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta , clique em qualquer lugar fora do polígono desenhado (que será o centro de rotação).

Depois, usando a ferramenta , clique, primeiro, no polígono construído e, em seguida, no ponto determinado. Escolha o ângulo e o sentido de rotação (lembre-se do valor desse ângulo). Dessa forma obtém-se uma imagem simétrica por rotação. Veja a seguir um exemplo:



escolhido um ângulo menor que 180°) ou o maior ângulo (caso tenha escolhido um maior que 180°).

Responda às questões no caderno.

1. Comparando a medida do ângulo obtida com a medida escolhida como ângulo de rotação, o que podemos observar?
2. Faça o mesmo trabalho para os demais pontos do polígono. O que podemos concluir?

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 93).

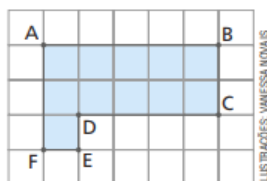
A proposta apresenta um guia para fazer a rotação de um polígono utilizando o *software* GeoGebra. O texto posiciona alguns ícones do GeoGebra relacionados à rotação, para orientar os estudantes a criar suas figuras e transformá-las com autonomia. Em seguida, o BR2 coloca um exemplo de rotação com o centro fora da figura construído com o *software* de geometria dinâmica e solicita que alguns segmentos e ângulos sejam medidos. As duas tarefas que decorrem (1 e 2) abordam comparações das medidas dos ângulos e as conclusões de que elas são iguais às do ângulo de rotação.

As tarefas sustentam o que a coleção brasileira mais destaca da Isometria rotação: o ângulo de rotação, como apresentado na conceituação do BR3 (Figura 93) no trecho em que aborda a manutenção do ângulo de deslocamento. Apesar de tal característica da rotação determinar também a manutenção das distâncias entre os pontos rotacionados, o BR2 e o BR3 não trabalham essa propriedade, que é a razão de a rotação ser uma Isometria (LIMA, 1996).

A última tarefa de rotações presente no BR2 (Figura 101) está na seção ‘Retomando o que Aprendeu’ e tem como ponto de partida um polígono irregular.

Figura 101 – Tarefa 8c) da seção ‘Retomando o que Aprendeu’ – BR2.

- 8.** Reproduza a figura a seguir no caderno e faça o que se pede.



No polígono ABCDEF:

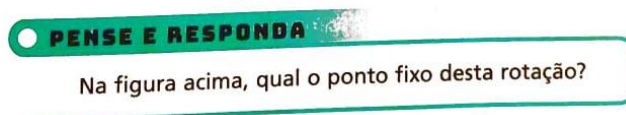
- c)** Desenhe uma figura simétrica por uma rotação de 180° no sentido anti-horário com centro no ponto *E*.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 95).

As tarefas 8(a) e 8(b) referem-se às outras Isometrias. O enunciado da tarefa 8(c) pede que o polígono seja rotacionado no sentido anti-horário com ângulo de rotação de 180° e centro em *E*. O centro de rotação é um dos vértices e os pontos estão em uma malha quadriculada, sem coordenadas. É uma tarefa que introduz a prática com rotações para os estudantes, mas é a única que proporciona essa experiência no BR2.

No BR3, a tarefa da seção ‘Pense e Responda’ (Figura 102) está posicionada após a apresentação da conceituação de rotação (Figura 93).

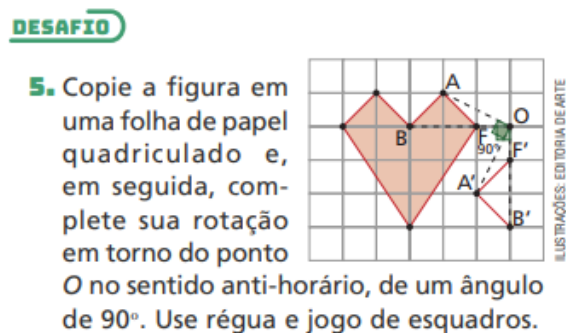
Figura 102 – Tarefa da seção ‘Pense e Responda’ – BR3.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 191).

O enunciado trata do ponto fixo da rotação que tem como centro de rotação um dos vértices do triângulo. A tarefa destaca a ideia de ponto fixo, relevante no estudo das rotações (LIMA, 1996), e retoma o que tinha se apresentado com a tachinha como ponto fixo e centro de rotação do exemplo no BR2, dando continuidade ao estudo do volume anterior.

Como mencionado anteriormente, no BR3 o conteúdo das Transformações Geométricas divide o capítulo com o tema polígonos, o que levou a uma quantidade ínfima de tarefas sobre rotação no BR3. Assim, a segunda e última tarefa do livro (Figura 103) está na seção ‘Atividades’, dentro de uma aba chamada ‘Desafio’.

Figura 103 – Desafio da seção ‘Atividades’ – BR3.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 193).

A tarefa propõe a rotação de uma figura na malha quadriculada com centro de rotação fora da figura e solicita régua e esquadro. A resolução já está iniciada na ilustração que acompanha o enunciado, mas o desafio está em concluir a rotação da figura côncava. Com essa tarefa, o conteúdo de rotação é encerrado na coleção brasileira.

6.6 Dimensão de análise – Reflexão

Nesta dimensão será apresentado o que as coleções indicam como reflexões, pois em diversas situações elas abordam as reflexões denominando de simetrias e esses trechos já foram discutidos e analisados nas respectivas dimensões. Devido a esse contexto, o leitor poderá notar que a extensão da análise das reflexões é menor do que se viu em translação e rotações, em especial na coleção canadense.

6.6.1 Reflexão – Coleção canadense

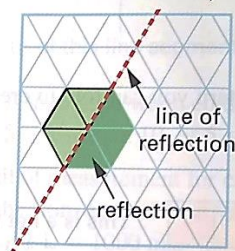
A dimensão de Simetria expôs essencialmente a maneira como a coleção canadense retratou as reflexões nos dois primeiros volumes. Portanto, a análise feita a seguir mostra de que maneira os livros CN3 e CN4 abordam a reflexão, pois é apenas nesses dois últimos volumes que o conteúdo se desprende do tema da simetria.

Conceituação

A coleção canadense traz a definição conceitual de reflexão nos quatro volumes somente na seção de ‘Glossário’ (Figura 104), deixando exemplos e tarefas para trabalhar o conteúdo no corpo dos livros.

Figura 104 – Glossário de reflexão – CN3.

reflection: The result of a flip of a 2-D shape; each point in a 2-D shape flips to the opposite side of the line of reflection, but stays the same distance from the line (Also see **transformation**.)



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 470).

Os autores escrevem que a reflexão é o resultado obtido ao se virar uma figura bidimensional e destacam que cada ponto transformado vai para o lado oposto do eixo de reflexão, mantendo a distância que havia entre eles. Existe, portanto, a menção às relações isométricas entre os pontos e a noção de que se trata de uma transformação ponto a ponto. A definição é acompanhada da ilustração que apresenta um trapézio dividido em três triângulos refletido em torno de sua base maior. Novamente, o aspecto das cores pode ser observado: a cor refletida é diferente da original.

Na seção de ‘Perguntas Frequentes’ do CN3 (Figura 105), o quadro organiza um resumo dos efeitos de uma reflexão nos vértices de um triângulo.

Figura 105 – Reflexões em ‘Perguntas Frequentes’ – CN3.

reflection	The line segments that join each pre-image vertex to its image vertex are • perpendicular to the line of reflection • cut in half by the line of reflection The orientation of the image is opposite to the orientation of the pre-image.	
------------	--	--

Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 246).

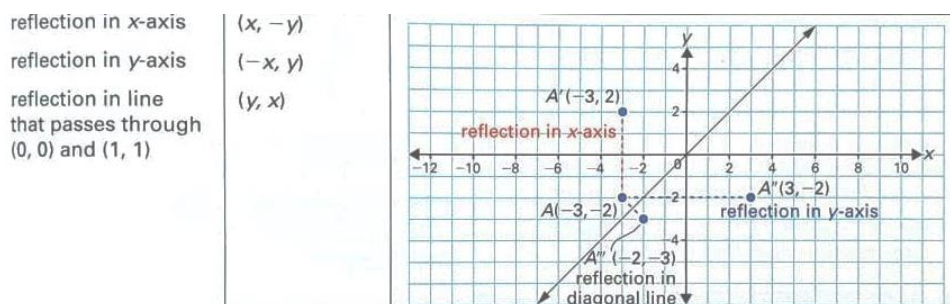
A perpendicularidade entre o eixo de reflexão e o segmento de reta que une o ponto e sua imagem é listada no quadro juntamente com a informação de que o eixo de

rotação divide esse segmento ao meio. Ambas as características são representadas pela ilustração, com a indicação do ângulo reto e das medidas congruentes.

Por fim, o texto do quadro afirma que a orientação dos pontos é invertida após a transformação pela reflexão. O destaque para essa característica é relevante, pois trata-se de um aspecto que diferencia a reflexão das duas outras Isometrias estudadas (translação e rotação). Assim, a coleção canadense junta as informações que conceituam a reflexão no CN3.

Já no último volume, que tem foco nas coordenadas dos pontos no sistema cartesiano, o quadro das ‘Perguntas Frequentes’ (Figura 106) explora o resultado de três reflexões fundamentais de um ponto, que são as reflexões com relação aos eixos x e y e com relação à reta que passa pela origem e divide ao meio os quadrantes 1 e 3.

Figura 106 – Reflexões em ‘Perguntas Frequentes’ – CN4.



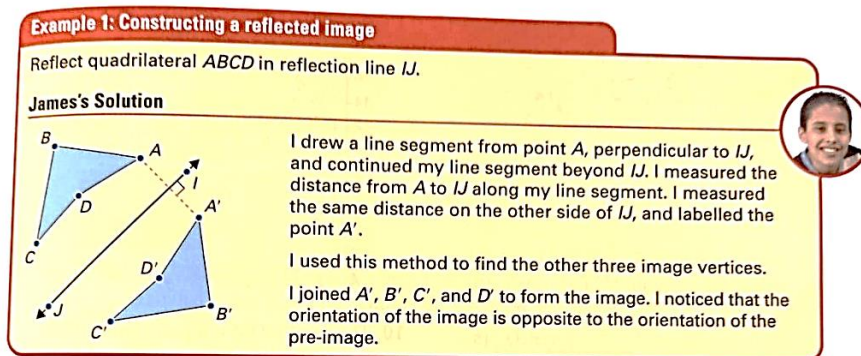
Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 235).

A ilustração mostra as coordenadas do ponto A e de suas três imagens refletidas nos eixos de reflexão dados. O quadro chama a atenção para o fato de que os valores em módulo das coordenadas são os mesmos, mas que, dependendo da reflexão que é feita, a ordem e o sinal das coordenadas podem ser trocados. Dado que os três eixos de reflexão propostos são recorrentemente requisitados em tarefas desse conteúdo, o quadro reúne os resultados generalizados que podem facilitar suas resoluções.

Exemplos

Nesta unidade de análise, quatro exemplos foram identificados na coleção canadense, divididos entre CN3 e CN4. O primeiro exemplo (Figura 107) propõe a reflexão de um quadrilátero côncavo em torno de uma reta.

Figura 107 – Exemplo de reflexão de um quadrilátero em torno de uma reta – CN3.



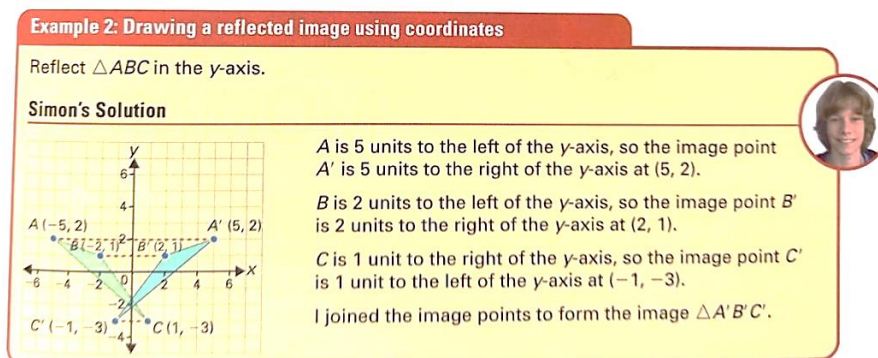
Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 237).

Neste exemplo, os autores descrevem a reflexão do ponto A a partir do traço de um segmento que começa em A e é perpendicular à reta de reflexão. A distância entre o ponto e a reta é medida e utilizada para encontrar a imagem de A do lado oposto da reta. O mesmo processo é repetido para os outros vértices. O texto ainda observa que a orientação dos pontos da imagem é oposta à do quadrilátero original.

Percebe-se o interesse da coleção canadense em fornecer exemplos que explorem a construção geométrica, a aplicação da transformação em pontos, a preservação das medidas e a inversão da orientação, o que está de acordo com a abordagem dessa Isometria realizada por Lima (1996).

O segundo exemplo do CN3 (Figura 108) segue com a mesma abordagem, porém adiciona um sistema de coordenadas no lugar da construção geométrica apresentada anteriormente.

Figura 108 – Exemplo de reflexão de um triângulo no plano cartesiano em torno do eixo y – CN3.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 237).

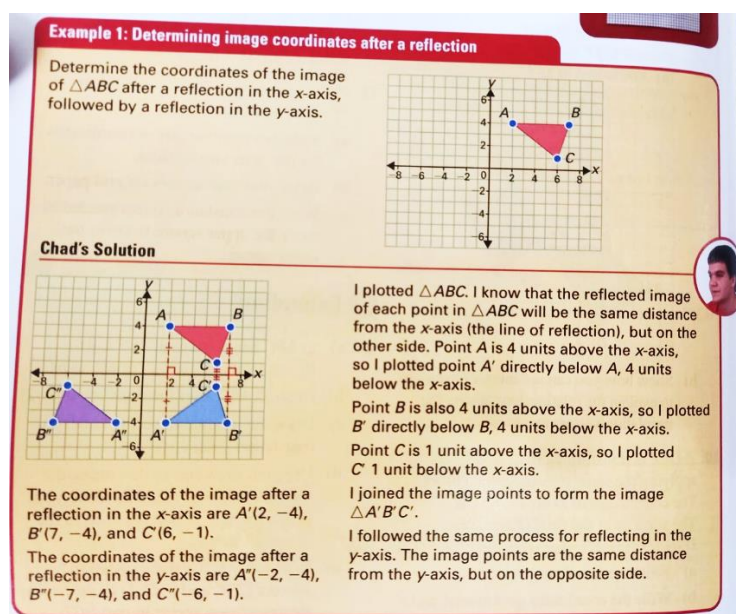
Um triângulo é refletido em torno do eixo y e a descrição do exemplo mostra que, devido à reflexão ser em torno desse eixo, a coordenada referente a ele é mantida, mudando apenas o sinal da abscissa dos pontos. O tracejado vermelho indica a perpendicular formada entre o ponto e o eixo de reflexão e o texto ressalta que a distância entre os pontos e o eixo y é usada para encontrar, após a transformação, a imagem do ponto do outro lado do eixo.

O exemplo trabalha com a reflexão de um triângulo que está posicionado em três quadrantes do plano cartesiano, o que adiciona complexidade ao primeiro exemplo oferecido pelo CN3, uma vez que a imagem e a pré-imagem se encontram em certa região, oportunizando mais conclusões da situação dada.

As cores utilizadas nos polígonos de ambos os exemplos do CN3 são mantidas após a reflexão, o que transmite corretamente a ideia do processo de transformação daquelas figuras. No entanto, como veremos a seguir, no CN4 esse cuidado com as cores não é mantido.

Abordando todas as Isometrias do ponto de vista analítico, o CN4 traz as coordenadas dos pontos para os dois exemplos envolvendo reflexões. O primeiro deles (Figura 109) apresenta uma situação em que um triângulo deve ser refletido duas vezes, inicialmente ao redor do eixo x e depois ao redor do eixo y .

Figura 109 – Exemplo de duas reflexões sucessivas em torno dos eixos – CN4.



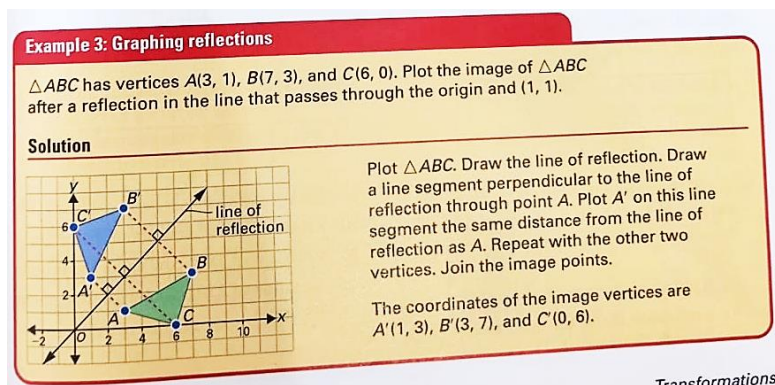
Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 230).

O processo de resolução utilizado é semelhante ao que foi feito no CN3 (Figura 108): traçar a perpendicular dos vértices e identificar a distância dos pontos até o eixo de reflexão, para reproduzi-la do outro lado. Como o exemplo requer duas reflexões, o processo é repetido até obter o triângulo de coordenadas A'' , B'' e C'' .

O exemplo dá continuidade ao estudo proposto no volume anterior e explora a reflexão com relação aos dois eixos, ao invés de apenas um só. Outra diferença no CN4 é como se usam as cores: o triângulo tem sua cor alterada ao passar pela reflexão. Apesar de ser compreensível a intenção de diferenciar os triângulos uns dos outros na ilustração, essa necessidade já é satisfeita apenas se observando os nomes dos pontos e a própria posição dos triângulos no plano cartesiano. Manter a cor inicial do triângulo deixa a mensagem de que a reflexão não altera essas propriedades não matemáticas e resgata a noção inicial feita pelos volumes CN1 e CN2, quando falam de simetria referindo-se à reflexão e usam um espelho transparente para transformar figuras. Um aluno pode se perguntar: “Se um espelho pode ser usado para identificar uma reflexão, de que maneira a cor da figura seria afetada?”.

O último exemplo de reflexão da coleção canadense (Figura 110) também propõe a reflexão de um triângulo.

Figura 110 – Exemplo de reflexão em torno da reta que passa pela origem e pelo ponto (1,1)
– CN4.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 231).

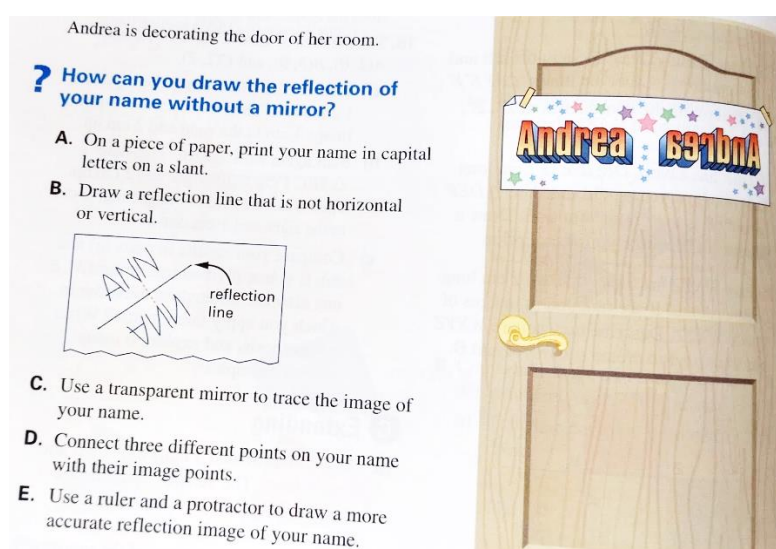
A questão da alteração da cor se repete, mas a novidade trazida pelo exemplo é o eixo de reflexão ser a reta que passa pela origem e divide ao meio o 1º quadrante do plano cartesiano. Após reproduzir novamente o processo de reflexão de pontos em torno de uma reta, apresentado anteriormente, a conclusão do exemplo busca levar o estudante a reparar na

troca das coordenadas em reflexões desse tipo. A informação é reforçada na seção de ‘Perguntas Frequentes’ do CN4 (Figura 106).

Tarefas

Juntos, os volumes CN3 e CN4 possuem 55 tarefas sobre reflexão, com 38 e 17 em cada um, respectivamente. As primeiras tarefas do CN3 estão no subcapítulo de ‘Reflexões’ (Figura 111) e fazem a abertura do tema neste livro.

Figura 111 – Tarefas que iniciam o conteúdo de reflexões – CN3.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 236).

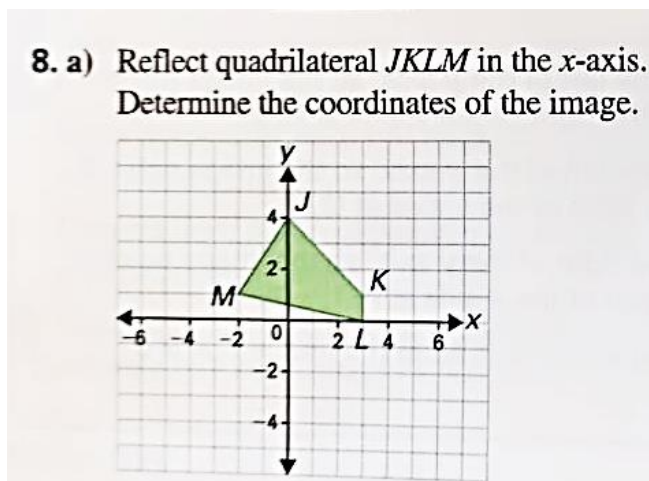
Partindo da ilustração que mostra a reflexão das letras de um nome em uma porta, as tarefas guiam os estudantes a fazer a reflexão dos seus próprios nomes com uma reta de reflexão que não seja horizontal nem vertical. Depois, com o auxílio de um espelho transparente, eles devem realizar a reflexão, conectar três pontos diferentes com suas imagens e usar régua e transferidos para aperfeiçoar a imagem da reflexão.

As tarefas apresentam um passo a passo para refletir as letras em uma abordagem de construção geométrica e fazem uso de materiais, o que pode favorecer o aprendizado da transformação (SOUZA, 2013; SOUZA, 2019).

Na lista de tarefas que segue os exemplos apresentados (Figuras 107 e 108), a seção ‘Praticando’ oferece diversas tarefas que visam à aplicação de ideias que foram

abordadas anteriormente, como a tarefa 8(a) (Figura 112), por exemplo, que propõe a reflexão de um quadrilátero em torno do eixo x .

Figura 112 – Tarefa 8(a) da seção ‘Praticando’ – CN3.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 238).

A tarefa resgata o que foi visto no segundo exemplo do CN3 (Figura 108), com a variação da figura e da reta de reflexão, já que desta vez aborda o eixo das abscissas. Os estudantes poderão observar que as coordenadas de um dos vértices do polígono serão mantidas após a transformação, devido ao seu contato com o eixo de reflexão.

Os enunciados das tarefas 10(a) e 10(b) (Figura 113) apresentam a definição de um palíndromo e mostra um exemplo de uma palavra inglesa que, além de ser um palíndromo, é a mesma quando é refletida por uma reta vertical.

Figura 113 – Tarefas 10(a) e 10(b) da seção ‘Praticando’ – CN3.

10. The word MOM is a **palindrome**. This means that it is the same word when it is read backward. As well, MOM is the same word when it is reflected in a vertical line.

a) Write the longest three words you can think of that are the same when they are reflected in a vertical line.

b) Must these words also be palindromes? Explain.

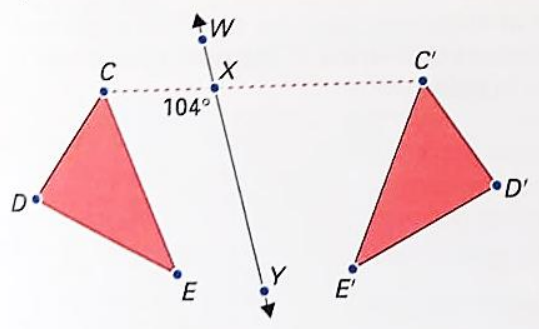
Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 238).

Em seguida, os autores pedem que os estudantes escrevam as três maiores palavras que conseguirem pensar que possuem essa mesma característica e perguntam sobre a ligação que existe entre elas e os palíndromos. A situação remete ao que o CN3 apresentou na abertura do conteúdo (Figura 111), e adiciona a questão dos palíndromos devido à escolha da posição do eixo de reflexão, o que dá às tarefas um tom de charada e curiosidade em buscar palavras com tal peculiaridade.

Conforme a lista de tarefas avança, elas vão ganhando complexidade e se tornando menos associadas ao que se apresentou antes, como, por exemplo, a tarefa 15 (Figura 114), que apresenta dois triângulos e uma reta.

Figura 114 – Tarefa 15 da seção ‘Praticando’ – CN3.

15. The reflected image of $\triangle CDE$ is $\triangle C'D'E'$.
Is line segment WY the reflection line?
Explain, giving at least two reasons for your answer.



Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 239).

Interroga-se se o segmento WY é o eixo de reflexão dos triângulos e pede que pelo menos dois argumentos sejam dados na justificativa da resposta. O tipo de resposta para a tarefa, portanto, é uma argumentação baseada nas propriedades da reflexão. Espera-se que os estudantes percebam que, além de o segmento CC' não ser perpendicular ao candidato a eixo de reflexão, os segmentos CX e XC' não são congruentes. A articulação dessas e de outras razões conceituais possíveis é o desafio da tarefa.

Ainda no CN3, na seção ‘Estendendo’, uma das últimas tarefas exemplifica um maior nível de complexidade que a coleção canadense busca alcançar no conteúdo de reflexões (Figura 115).

Figura 115 – Tarefa 17 da seção ‘Estendendo’ – CN3.

17. a) Reflect $\triangle ABC$ in the y -axis to produce the image $\triangle A'B'C'$.

b) Reflect $\triangle A'B'C'$ in the line LR to produce the image $\triangle A''B''C''$.

c) Determine the coordinates of $\triangle A''B''C''$.

d) Is there a single transformation that moves $\triangle ABC$ to the image $\triangle A''B''C''$? If so, describe the transformation. If not, explain why not.

e) Will the result in part (d) be true for reflections in every pair of parallel lines? Write a hypothesis, and explore it using a number of examples.

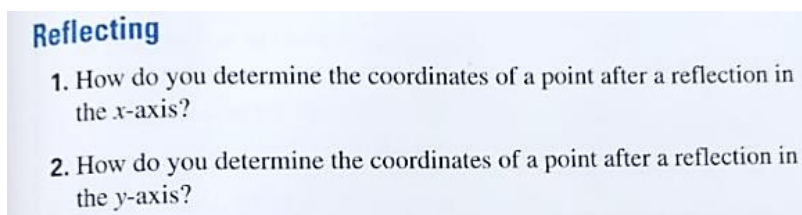
Fonte: Small e Kestell (2004c, p. 239).

Duas reflexões são pedidas pelas tarefas iniciais, a primeira (17(a)) sendo com relação ao eixo y e a segunda (17(b)) da imagem com relação à reta dada. A tarefa 17(d) questiona sobre a existência de outra transformação que realize em uma única aplicação o movimento obtido no final, partindo do primeiro triângulo, e pede para que o estudante explique sua resposta, sendo ela afirmativa ou negativa. Por fim, considerando a tarefa 17(e), os autores indagam sobre a validade daquela resposta para reflexões em qualquer par de retas paralelas, requisitando a escrita de uma hipótese e a investigação de outros exemplos.

As tarefas começam com procedimentos já trabalhados em diversas situações anteriores para, em seguida, se aprofundarem na composição de transformações e na busca de uma sistematização do conteúdo por parte do estudante, com base no que se viu até ali. Trata-se de tarefas mais complexas, com instruções como “explique”, “escreva uma hipótese” e “explore exemplos”, que estimulam o desenvolvimento do raciocínio formal e dedutivo (RAFAEL; MIRANDA, 2018).

No CN4, as primeiras tarefas que constam no capítulo que aborda as reflexões estão na seção ‘Refletindo’ (Figura 116).

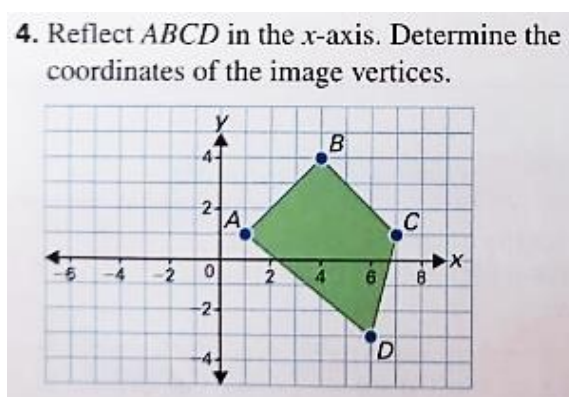
Figura 116 – Tarefas 1 e 2 da seção ‘Refletindo’ – CN4.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 231).

Ambas as tarefas visam à sistematização dos efeitos que as reflexões em torno dos eixos possuem nas coordenadas de um ponto, estabelecendo um padrão e um significado ao se manter a ordenada ou a abscissa. As conclusões obtidas na seção ‘Refletindo’ são retomadas em toda a lista de tarefas que a seguem, como, por exemplo, na tarefa 4 (Figura 117) da seção ‘Verificando’.

Figura 117 – Tarefa 4 da seção ‘Verificando’ – CN4.



Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 232).

A tarefa é proposta para aplicar o que foi deduzido sobre a manutenção da abscissa de pontos que são refletidos em torno do eixo x . Outras tarefas colocam o eixo y em foco. Na seção ‘Estendendo’, as tarefas 13(a), (b) e (c) (Figura 118) sistematizam essas conclusões para quaisquer coordenadas (x, y) .

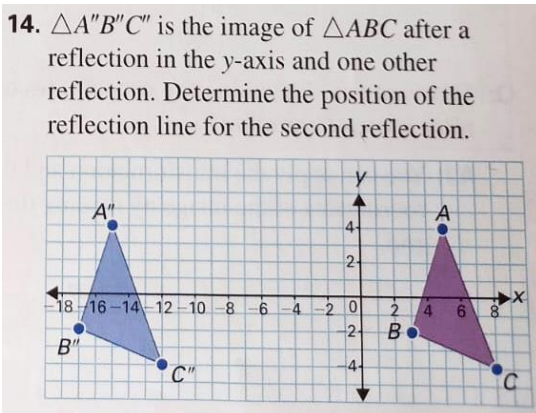
Figura 118 – Tarefas 13(a), (b) e (c) da seção ‘Estendendo’ – CN4.

- 13.** Point A has coordinates (x, y) . Determine the coordinates of the image of A after each transformation.
- a) a reflection in the x -axis
 - b) a reflection in the y -axis
 - c) a reflection in the line that passes through the origin and $(2, 2)$

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 233).

O enunciado é o mesmo apresentado na Figura 91, com três tarefas abordando a reflexão e outras três a rotação. Além dos eixos das tarefas 13(a) e (b), que já haviam sido estudados em tarefas anteriores, a tarefa (c) considera o eixo de reflexão como a reta que passa pela origem e divide a meio o 1º quadrante, retomando um terceiro caso de eixo notável para os alunos conhecerem, assim como visto no exemplo da Figura 110.

Encerrando esta unidade de análise na coleção canadense, a tarefa 14 (Figura 119) é a última do CN4 e explora a composição de reflexões.

Figura 119 – Tarefa 14 da seção ‘Estendendo’ – CN4.

Fonte: Small e Kestell (2004d, p. 233).

O enunciado pede para encontrar a posição do eixo de reflexão que gerou $A''B''C''$, sabendo que o triângulo transformado é resultado da reflexão de ABC em torno do eixo y . Como visto em diversas outras tarefas até aqui, a coleção canadense leva os estudantes a exercitar o raciocínio no sentido contrário, observando a conclusão de um movimento e buscando a sua origem.

6.6.2 Reflexão – Coleção brasileira

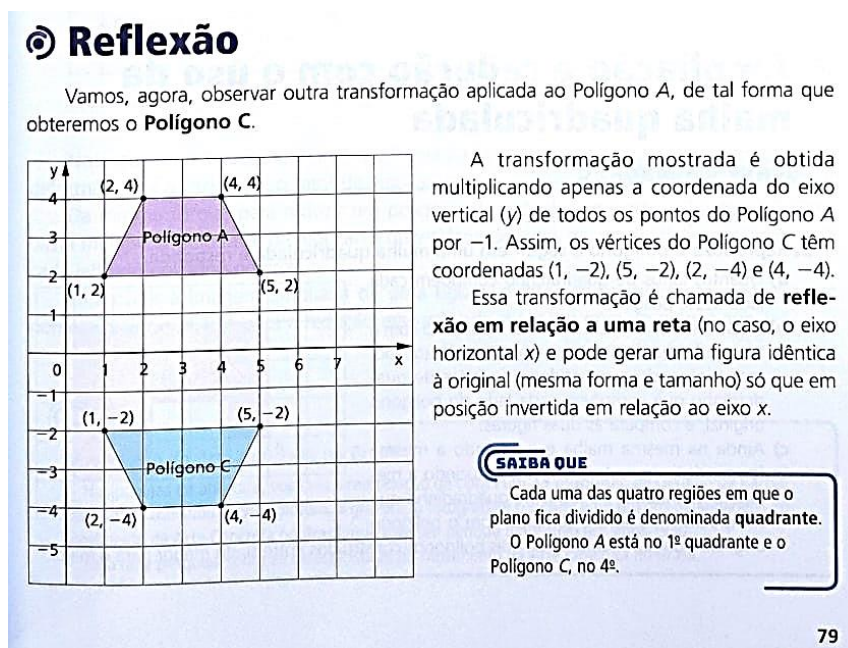
O conteúdo das reflexões aparece nos livros BR2 e BR3. Assim como na coleção canadense, nesta dimensão consta apenas aquilo que a coleção nomeou de reflexão, uma vez que as páginas de simetria, que em alguns momentos abordaram ideias que se confundem com reflexão, foram analisadas em sua respectiva dimensão.

Conceituação

No BR2, o conteúdo de reflexões aparece em dois subcapítulos do capítulo ‘Transformações Geométricas e Simetria’. São eles: 1 – ‘Transformações no Plano’ e 2 – ‘Simetria’. No primeiro, o foco da coleção é estabelecer a diferença entre transformações que preservam e que alteram as distâncias, ou seja, Isometrias e Homotetias. Apesar disso, esses dois termos nunca são citados no capítulo, e para se referir a eles os autores usam a reflexão como modelo de Isometria e escrevem “ampliação e redução” para falar da homotetia. O segundo subcapítulo foca nos diferentes tipos de Isometrias, como vimos nas dimensões anteriores.

Assim, as reflexões ganham uma pequena quantidade de páginas a mais que a translação e a rotação, dado o subcapítulo que precede o das simetrias e que usa a reflexão para referir-se à Isometria (Figura 120).

Figura 120 – Reflexão em torno de uma reta como modelo de Isometria – BR2.



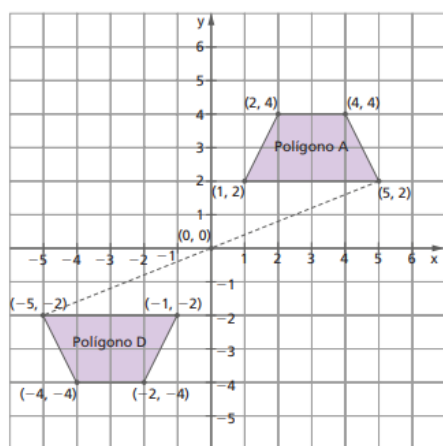
Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 79).

Considerando que se trata da primeira vez que o conteúdo é apresentado na coleção brasileira, nota-se que a conceituação inicial é feita através das coordenadas do plano cartesiano: a reflexão em torno de uma reta é associada à multiplicação das coordenadas dos pontos. O texto afirma que a reflexão “pode gerar uma figura idêntica à original (mesma forma e tamanho) só que em posição invertida em relação ao eixo x ” (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018b, p. 79). A definição não menciona a perpendicular que deve ser baixada entre os pontos e o eixo de reflexão, como observa Lima (1996, p. 16). Alguns termos da conceituação do BR2 não são adequados, como, por exemplo, “mesma forma e tamanho”, para dizer que os ângulos e as distâncias são mantidos. Outras falhas são: afirmar que a reflexão pode gerar uma figura idêntica, quando ela de fato sempre gera; e usar o termo “idêntica” enquanto a ilustração mostra que a imagem refletida teve sua cor alterada.

A definição de reflexão é, portanto, feita sem rigor matemático nessa primeira aparição, e totalmente associada às coordenadas do plano cartesiano. Em seguida, o BR2 apresenta a reflexão em torno de um ponto (Figura 121).

Figura 121 – Reflexão em torno de um ponto como modelo de Isometria – BR2.

Quando multiplicamos as coordenadas dos pontos do polígono A por -1 , obtemos o Polígono D. Considerando as coordenadas do vértice, temos que os vértices do Polígono D são os pontos $(-1, -2)$, $(-5, -2)$, $(-2, -4)$ e $(-4, -4)$.



Essa transformação é chamada de **reflexão em relação a um ponto** (no caso, a origem $(0, 0)$ do sistema de coordenadas), e o Polígono D tem a mesma forma e tamanho da figura original, ou seja, obteve-se um trapézio idêntico ao original só que em outra posição.

SAIBA QUE

O Polígono D está no 3º quadrante.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 80).

Os autores seguem colocando a mudança das coordenadas como o critério que define a reflexão, dessa vez considerando a multiplicação por (-1) das duas coordenadas. Não há orientação sobre como construir essa reflexão com régua e compasso, nem a menção do ângulo de 180° ou preservação das distâncias, necessários para esse tipo de reflexão. As

mesmas críticas anteriores podem ser estendidas para essa abordagem, com a exceção de que dessa vez a cor da imagem da reflexão foi mantida.

Como citado anteriormente, essa primeira abordagem das reflexões no BR2 cumpre o papel de mostrar um modelo de transformação isométrica, afinal o que se discute em seguida é ampliação e redução de figuras, isto é, as homotetias, e assim segue para a lista de tarefas que estão mais focadas nas questões das Isometrias e homotetias do que de fato na reflexão em especial. Dessa forma, o tratamento dado a ela é superficial, aparentemente desejando apenas que o estudante compreenda que as Isometrias preservam as distâncias e que a reflexão é um exemplo disso.

No subcapítulo seguinte, chamado ‘Simetria’, a reflexão se junta às outras Isometrias e ganha maior destaque por suas características. A Figura 122 apresenta o trecho em que o BR2 faz a conceituação da reflexão, utilizando a imagem da seção ‘Pense e Responda’, que será analisada na unidade de análise Tarefas.

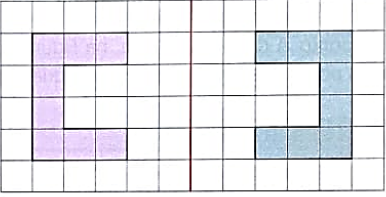
Figura 122 – Definição de reflexão – BR2.

Simetria de reflexão (ou axial)

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

- Observe as Figuras 1 e 2 na malha.
 - Elas têm mesma forma? E mesmo tamanho?
 - Compare a posição que essas duas figuras se encontram em relação à linha vermelha. O que você observa?



Retomando o caso da seção *Pense e Responda*, se dobrássemos a malha quadriculada na linha vermelha, veríamos que as duas figuras se sobreporiam e coincidiriam. Assim, podemos perceber que uma figura é o reflexo da outra em relação à linha vermelha.

Quando duas imagens são reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há **simetria de reflexão** e a linha é seu **eixo de reflexão** ou ainda que as figuras são **simétricas**.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 87).

Apesar de estar a menos de vinte páginas da definição em torno da reta feita anteriormente nesse mesmo livro (Figura 120), dessa vez os autores não citam a multiplicação de coordenadas nem relacionam essa conceituação com a que foi feita previamente.

Assim como fez com as outras Isometrias, o BR2 chama as reflexões de “simetria de reflexão”. A definição usa a ilustração para apresentar a reflexão sob o ponto de vista da sobreposição, como visto em Euclides (BICUDO *et al.*, 2009) e criticado por Hilbert (1902) e

Hartshorne (2013), afirmando que a reta vermelha é o eixo de reflexão, pois, ao dobrar a malha, as figuras se coincidem, embora as cores utilizadas não sejam as mesmas.

A conceituação usa a própria ideia de reflexo, ainda não definida, para definir o que é reflexão, o que se torna uma espécie de “paradoxo conceitual”, em que não está claro o que é reflexo e o que exatamente caracteriza a reflexão. Enquanto isso, as ideias relacionadas à perpendicularidade e distância entre os pontos e o eixo de reflexão são novamente desconsideradas.

Como a definição do BR2 se concentra apenas na existência de um eixo de reflexão (como a reta vermelha) entre figuras e seus pontos, uma pergunta válida seria: “Como provar que não há reflexão entre duas figuras?”. Segundo o que o livro oferece de definição, seria necessário provar que não existe um eixo de reflexão, o que é impossível. Assim, percebe-se a falta que as características definidoras da reflexão fazem ao se estudar o tema.

Os autores utilizaram a palavra “linha” para referir-se a “reta”, sendo esta uma escolha que não é consoante com o rigor matemático, uma vez que não há sentido conceitual para esse termo. Caso os autores tenham buscado referências de textos na língua inglesa, o equívoco pode ter sido originado pela tradução literal de *line*, que é usada para dizer “retas” na coleção canadense, por exemplo.

A conceituação termina com a menção de que as figuras são simétricas, o que foi repetido nas outras duas Isometrias apresentadas pelo BR2 (Figuras 50 e 92), podendo deixar dúvidas para os estudantes acerca do significado de duas figuras serem simétricas, ainda mais lembrando que o sentido dado para isso no livro (Figura 22) foi apenas vinculado à reflexão.

No BR3, as reflexões são definidas no subcapítulo das ‘Transformações no Plano’ (Figura 123).

Figura 123 – Definição de reflexão – BR3.

Quando duas imagens são reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há **simetria de reflexão** ou **simetria axial** e a linha é seu **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria**.

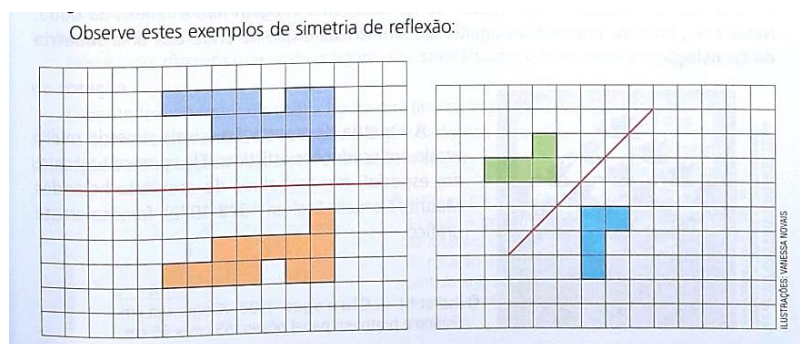
Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 190).

Das três Isometrias, apenas a reflexão continua sendo chamada de “simetria de reflexão” no BR3. A definição apresentada é praticamente idêntica à do BR2 (Figura 122) e, portanto, os mesmos comentários acerca do “paradoxo conceitual”, da ausência das características da reflexão e do uso da palavra “linha” no lugar de “reta”, são apropriados para ela.

Exemplos

No BR2, dois exemplos puramente ilustrados (Figura 124), baseados na definição dada (Figura 122), são apresentados.

Figura 124 – Exemplos ilustrativos de reflexão – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 87).

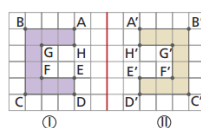
Os autores colocam os dois exemplos sem apoio de texto, deixando para os estudantes fazerem a interpretação a partir da definição dada anteriormente. Nesse ponto, a coleção brasileira explora a noção comum de reflexão que os alunos possuem e não usa a oportunidade para avançar teoricamente no assunto. Apesar de a preservação das distâncias e a perpendicularidade entre os pontos e o eixo de reflexão estarem presentes nas ilustrações, elas não recebem destaque, podendo passar despercebidas.

No BR3, o exemplo (Figura 125) tem o mesmo desempenho do livro anterior.

Figura 125 – Exemplo ilustrativo de reflexão – BR3.

Reflexão

Considere a figura representada a seguir. Podemos dizer que ② é a reflexão de ① em relação à linha vermelha.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 190).

Em ambos os volumes, a cor da imagem refletida não é a mesma que a da figura original, contradizendo o que a própria coleção afirma sobre a reflexão gerar uma imagem idêntica, alterando apenas a posição com relação ao eixo de reflexão.

Tarefas

A coleção brasileira possui 14 tarefas sobre reflexão, sendo que dez delas estão no BR2 e quatro no BR3. As duas primeiras tarefas já foram apresentadas na Figura 122, devido à importância da ilustração para a conceituação realizada, mas a análise da seção ‘Pense e Responda’ (Figura 126) será feita nesta unidade.

Figura 126 – Tarefas da seção ‘Pense e Responda’ – BR2.

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Observe as Figuras 1 e 2 na malha.

a) Elas têm mesma forma? E mesmo tamanho?

b) Compare a posição que essas duas figuras se encontram em relação à linha vermelha. O que você observa?



Figura 1. Figura 2.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 87).

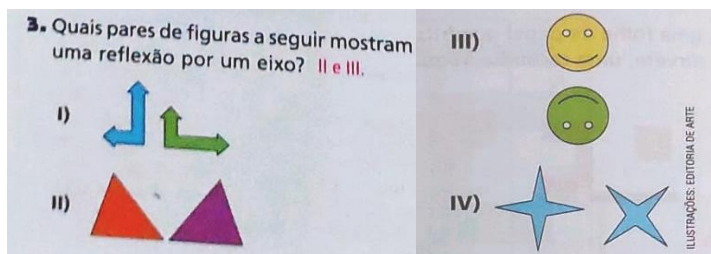
Como apresentado na unidade de Conceituação, a situação faz a abertura do conceito de reflexão no subcapítulo ‘Simetria’ do BR2. As duas tarefas (1(a) e (b)) abordam as noções iniciais que os estudantes têm ao observarem a ilustração dada. Trata-se de uma investigação relativamente informal, pois, apesar de haver um certo direcionamento, na tarefa 1(b), por exemplo, a pergunta “o que você observa?” é aberta e pode gerar diversas respostas a partir das experiências de cada estudante.

Não foi verificado um padrão na finalidade das tarefas da seção ‘Pense e Responda’ na coleção brasileira, pois existem tarefas que investigam as noções iniciais dos estudantes e tarefas que desenvolvem o conteúdo diretamente. Desse modo, identifica-se que não há uma sistematização do papel que a seção cumpre na coleção, deixando para os usuários do livro identificarem o caráter do *box* ‘Pense e Responda’ todas as vezes em que ele

aparece. Assim, ainda que a seção seja recorrente em todos os livros da coleção brasileira, não existe um sentimento de familiaridade com o seu propósito no momento em que ela aparece.

Na seção ‘Atividades’, a tarefa 3 (Figura 127) propõe a identificação de pares de figuras que podem ser resultado da reflexão em torno de um eixo.

Figura 127 – Tarefa 3 da seção ‘Atividades’ – BR2.

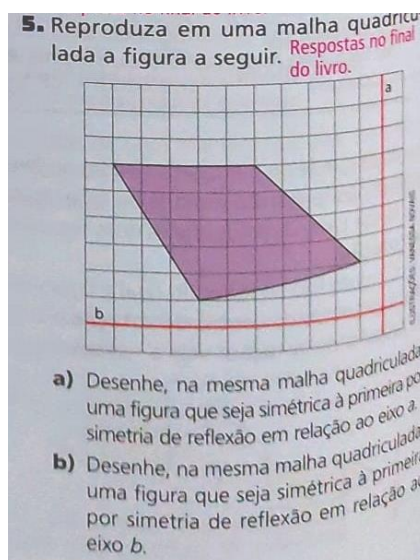


Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 90).

A solução esperada pelos autores são os pares II e III, embora as cores dessas figuras sejam diferentes, o que poderia levar à resposta de que nenhuma das alternativas apresenta uma reflexão. Baseado no que a obra definiu de reflexão e nas figuras sem uma malha quadriculada ou coordenadas que a tarefa propõe, provavelmente a resolução prevê a noção comum de reflexo estimulada na conceituação, sem a verificação das características definidoras da reflexão.

Ainda na seção ‘Atividades’, as tarefas 5(a) e 5(b) (Figura 128) propõem a reflexão de um quadrilátero em torno de dois eixos em uma malha quadriculada.

Figura 128 – Tarefas 5(a) e (b) da seção ‘Atividades’ – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 90).

As tarefas 5(a) e 5(b) voltam a denominar a reflexão de “simetria de reflexão” e dois eixos, chamados de a e b , são dados. Apesar de conceitualmente o livro não ter oferecido as características sobre a perpendicularidade entre os pontos e o eixo de reflexão e a preservação das distâncias entre todos os pontos, as tarefas trabalham indiretamente essas propriedades, devido à malha quadriculada em que a figura se insere. As conclusões, no entanto, ficam a cargo do estudante ou do professor, visto que o livro didático não faz esse apontamento explícito.

Na seção ‘Retomando o que Aprendeu’ do BR2 (Figura 129), a tarefa 7 apresenta uma foto do monumento Taj Mahal, na Índia.

Figura 129 – Tarefa 7 da seção ‘Retomando o que Aprendeu’ – BR2.



Fonte: Giovanni e Castrucci (2018b, p. 95).

O estudante deve associar o espelho d'água à Isometria de reflexão. A tarefa é solucionada com uma resposta direta e sem justificativa, no entanto cumpre o papel de apresentar um exemplo de aplicação da reflexão na arquitetura e no potencial estético de uma paisagem, foto, construção, etc.

No BR3, as primeiras tarefas da seção ‘Atividades’ (Figura 130) abordam a reflexão.

Figura 130 – Tarefas 1 e 2 da seção ‘Atividades’ – BR3.

1. Copie o polígono ABCDE em uma folha de papel quadriculado e, em seguida, construa sua reflexão em relação à reta r .

2. Construa, em uma folha de papel quadriculado, um plano cartesiano e marque os pares ordenados $A(3, 2)$, $B(7, 2)$ e $C(5, 5)$. Em seguida, construa o polígono $A'B'C'$, refletido em relação ao eixo das ordenadas (eixo y). *Resposta no final do livro*

a) Quais as coordenadas dos pontos A' , B' e C' ? $A'(-3, 2)$, $B'(-7, 2)$ e $C'(-5, 5)$

b) O que você observa com relação às coordenadas dos pontos A' , B' e C' ?

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 193).

A tarefa 1 apresenta o mesmo tipo de proposta que o BR2 nas tarefas apresentadas na Figura 128, requisitando a reflexão de um polígono em torno de uma reta dada no papel quadriculado. Já as tarefas 2(a) e 2(b) não possuem ilustrações, o que leva o estudante a ter que construir o triângulo em questão e, na sequência, realizar sua reflexão em torno do eixo y . A tarefa 2(a) pergunta sobre as coordenadas da imagem da reflexão, enquanto a tarefa 2(b) visa à conclusão sobre o efeito da reflexão em torno do eixo y nas coordenadas dos pontos. Além das tarefas da seção ‘Pense e Responda’ (Figura 126), a tarefa 2(b) é a única tarefa sobre reflexões que propõe uma resposta dedutiva e argumentativa.

7 CONCLUSÕES

Após as descrições, interpretações e argumentos apresentados nesta dissertação, a presente seção dá sequência ao capítulo de Análise e, ao explicitar as correspondências do que foi observado com a teoria, bem como ao propor novas ideias originadas pelo estudo, divide-se nessas duas partes, dissertadas a seguir.

7.1 Diálogo teórico

Nesta parte, estabelecem-se as relações que puderam ser feitas entre a análise, o referencial matemático e a revisão de literatura. Essas conexões já foram feitas cada uma em seu momento no texto da análise, mas serão reunidas aqui na intenção de organizar as conclusões que a pesquisa gerou e que possuem alguma correspondência com o que se conheceu nos estudos revisados.

Um ponto latente em toda a análise foi o uso das cores nas coleções. O trabalho de Fonseca (2013) já adiantava que as simetrias nos livros didáticos de Matemática são apresentadas com forte apelo das cores. Como o autor afirmou, a sensação estética que esse conteúdo provoca é ampliada ao colorir as figuras que serão transformadas, de modo que a cor chega a assumir um papel de propriedade matemática, ao funcionar como critério de simetria.

Na presente pesquisa, identificou-se essa característica no conteúdo de simetrias e seu potencial estético, destacando-se como ponto positivo a interdisciplinaridade com a Arte, e de escolhas que tiveram uma importância didática, enquanto os negativos se concentraram em situações em que se observou que as cores não só assumiam o papel de propriedade matemática para os autores, mas também poderiam influenciar os estudantes a não identificar propriedades ou até mesmo se equivocarem em suas conclusões.

No que tange aos aspectos conceituais das Isometrias, nos livros de ambos os países foi expressiva a vinculação da ideia de simetria à de reflexão, o que é inadequado, já que a reflexão é apenas um tipo de simetria, assim como a translação e a rotação, como discute Rohde (1997).

Sobre a definição de translação, em contraste com o que consta em Lima (1996), observou-se que as coleções trabalham timidamente com a noção de vetores, propondo em diversos momentos um contato discreto com o conteúdo até finalmente abordar os vetores nas translações. É importante dizer que essa constatação não trata de comparar ou questionar as diferenças encontradas nas definições de translação presentes no livro do matemático Lima (1996) e nos livros didáticos voltados para estudantes da Educação Básica, afinal não se pretende que a linguagem, o rigor e a forma sejam os mesmos; no entanto, o que se levanta para discussão é o desempenho das obras analisadas ao abordar os vetores de translação: o descompromisso com sua definição e apresentação de exemplos que podem prejudicar a compreensão da Isometria.

Ainda nas translações, uma diferença entre as coleções canadense e brasileira foi a abordagem da preservação da orientação ao transladar pontos de uma figura. Os livros canadenses fazem esse tratamento desde o primeiro momento em que falam sobre translações, enquanto o tópico não é abordado pelos livros brasileiros analisados.

Com base em Lima (1996), também se entende que todas as Isometrias têm suas aplicações em pontos, isto é, elas transformam e movem pontos. No caso em que uma Isometria é aplicada em uma figura, a interpretação correta é a de que todos os pontos da figura estão sendo transformados, e não que a figura esteja sendo transformada. Essa característica das Isometrias, como consta em Lima (1996), é várias vezes colocada em segunda instância em ambas as coleções. Observou-se que as obras não frisam essa distinção da aplicação nos pontos, o que abre margem para uma sequência de outros equívocos conceituais, como, por exemplo, o conceito central de Isometria, que é a preservação de distâncias entre pontos, não entre figuras.

Considerando agora as rotações, além do potencial estético e da aplicação em pontos já citados anteriormente, um destaque foi a discussão sobre os pontos fixos que a Isometria gerou. Lima (1996) apresenta uma classificação das Isometrias segundo os pontos fixos de cada uma e esta característica foi abordada por ambas as coleções apenas na Isometria da rotação. Esta constatação pode sugerir que o tema dos pontos fixos é mais facilmente abordado através das rotações, devido ao fato destas possuírem um único ponto

fixo, isto é, o centro de rotação. No entanto, ampliar a discussão para as outras Isometrias é importante para dar ainda mais sentido ao único ponto fixo da rotação e para oferecer as mesmas características de todas as Isometrias enquanto as estuda, podendo então agregar mais informações definidoras deste conteúdo.

Por fim, na análise das reflexões, se observou na coleção brasileira o uso da ideia de dobra, apresentando a Isometria como o resultado de dobrar os pontos sobre o eixo de reflexão. Essa noção, como citada em Hartshorne (2013), se apoia na sobreposição de pontos que Euclides abordou nos Elementos (BICUDO *et al.*, 2009), e que posteriormente recebeu críticas de matemáticos, entre eles Hilbert (1902). A noção é naturalmente utilizada no ensino de reflexões da coleção brasileira, o que não é o problema em si, afinal ela até pode dialogar com o conhecimento prévio dos estudantes. No entanto a questão está em não se aprofundar nas questões isométricas de preservação das distâncias das reflexões e seguir utilizando a ideia da dobra, que apresenta problemas conceituais por se apoiar em uma movimentação dos pontos que necessita de uma dimensão auxiliar, ou seja, os pontos não se movem no plano, mas são “dobrados” sobre ele e, para isso, são retirados e recolocados (Hartshorne, 2013).

7.2 Reflexões analíticas

Nesta seção, trazemos considerações em que nos arriscamos a ousar, a tratar de questões que propomos a partir das nossas reflexões e argumentos.

A primeira reflexão analítica envolve o uso de materiais no ensino da construção das Isometrias. Percebe-se que a coleção canadense possui a preocupação de sempre anunciar e incluir os materiais que serão utilizados em cada atividade, como régua, transferidor, espelho transparente, tesoura, lápis de cor, recortes de polígonos, papel quadriculado, compasso, entre outros. Esses recursos contribuem para a aprendizagem dos estudantes, ao ampliar o contato e as experiências que eles têm com o conteúdo, propondo atividades que abordam a construção de figuras que serão transformadas.

Por outro lado, a coleção brasileira possui um uso mais restrito desses materiais, deixando a cargo do professor a constatação dessa ausência, a busca pelos materiais que poderiam ser utilizados nas atividades e o desenvolvimento de uma proposta que os inclua. Na Matemática os conceitos existem mesmo sem o uso desses recursos de construções, no entanto, este trabalho não se preocupou apenas com o rigor matemático, mas também com o

ensino desses conteúdos e, nesse sentido, o uso de recursos e materiais para a construção geométrica contribui na aprendizagem dos alunos, conforme ressaltam Souza (2013) e Souza (2019). Mais do que os estudantes conhecerem o passo a passo da construção geométrica dos conceitos, uma abordagem com esse tipo de proposta contribui no entendimento do fundamento desses objetos matemáticos (SOUZA, 2013).

Algumas reflexões foram geradas a partir do contato com as tarefas das coleções. Na coleção canadense, observou-se nas listas de tarefas um propósito de organização por nível de complexidade, criando um roteiro de estudo para os estudantes que ia de perguntas mais práticas e imediatas, passando por questões elaboradas e que articulavam os conceitos mais profundamente, até a chegada a tarefas desafiadoras que demandavam maturidade com o conteúdo e com a Matemática em si. Os livros canadenses ainda mostraram uma variedade de seções com tarefas, afinal elas aparecem na abertura dos capítulos e durante os subcapítulos, além de seções de revisão na metade e no final dos capítulos. Nessas últimas, as obras ainda referenciavam em qual subcapítulo o estudante poderia encontrar as ideias que a tarefa trabalhava, caso quisesse revisar alguma delas.

A perspectiva na coleção brasileira é distinta nesse aspecto. Além do número de tarefas ser bastante inferior (298 canadenses contra 38 brasileiras), percebe-se uma baixa variedade de tarefas e de seções com tarefas para os alunos realizarem. No caso das listas para os estudantes praticarem, o nível de complexidade não se aprofunda, além de apresentar muitas tarefas baseadas na observação e comparação de imagens e poucas que focam nas definições dos conceitos. Dessa maneira, percebeu-se que os livros brasileiros se preocuparam mais em propor tarefas em que os alunos deveriam verificar ou interpretar imagens de Isometrias, e menos em apresentar as que envolviam a construção ou descrição de definições.

Ainda sobre as tarefas, percebe-se o uso de uma linguagem bastante diferente em cada uma das coleções. A obra canadense faz o uso sistemático de palavras como “justifique” na escrita das suas tarefas, incentivando os estudantes a argumentarem e articularem seus conhecimentos. Mais do que mostrar como se faz, a coleção parece querer que o aluno saiba os motivos de aquilo acontecer. O mesmo não ocorre na coleção brasileira: a maior parte dos enunciados das tarefas demandam apenas a resposta, deixando de oportunizar momentos em que os alunos possam expor suas justificativas.

As últimas duas reflexões analíticas envolvem o conteúdo das Isometrias. Um tópico especial das rotações na coleção canadense foi os cenários diversos no que diz respeito ao centro de rotação, isto é, as situações em que o centro de rotação estava dentro, fora ou na

fronteira da figura rotacionada. Tal destaque proporcionou a abordagem do conceito de simetria rotacional (Figura 61) e rendeu conclusões e tarefas relevantes para o aprofundamento do estudo das rotações.

Por fim, além da apresentação de cada Isometria e os desdobramentos de suas definições realizados por ambas as coleções analisadas, a coleção canadense promoveu um estudo do ponto de vista analítico das Transformações, o que abre possibilidades de maior contato dos estudantes com o sistema cartesiano de coordenadas. A abordagem amplia o alcance do conteúdo no que diz respeito às conexões que podem ser feitas dentro da Matemática ao estudá-lo. Isso faz com que as Isometrias ganhem uma posição de destaque na Geometria, pois ao mesmo tempo em que apresentam novos objetos matemáticos próprios, se relacionam com outros já vistos, o que contribui para agregar mais sentido ao estudo da Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 2000. p. 108-203.
- AMARAL-SCHIO, R. B. Livro didático de ensino médio, geometria e a presença das tecnologias. **Renote**, v. 16, n. 2, p. 127-137, 2018. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/89217/51473>. Acesso em: 05 mar. 2022.
- AMARAL, R. B.; HOLLEBRANDS, K. An analysis of context-based similarity tasks in textbooks from Brazil and the United States. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 8, p. 1166-1184, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1315188>. Acesso em: 07 jan. 2022.
- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.
- BAPTISTA, D. M. **Arte contemporânea no ensino das transformações geométricas**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico) – Escola Superior de Comunicação e Educação, Universidade do Algarve, Algarve, Portugal, 2014. Disponível em: <https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/7708/1/Relat%c3%b3rio%20PES%20Diogo%20Baptista.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2022.
- BARDINI, L. C.; AMARAL-SCHIO, R. B.; MAZZI, L. C. Aspectos do cotidiano e a geometria nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 61-76, 2019. Disponível em: <https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/EMSF/article/view/10642/7125>. Acesso em: 10 abr. 2022.
- BARROSO, I. C. **Um estudo sobre o conhecimento profissional para o ensino das transformações geométricas**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://repositorio.pgskroton.com/bitstream/123456789/32036/1/Tese_Isabel_Barroso_2018_Final_organized.pdf. Acesso em: 07 mar. 2022.
- BICUDO, I. *et al.* **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009.
- BICUDO, M. A. V. *et al.* Sobre a fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (org.). **Pesquisa qualitativa em educação**. Piracicaba, SP: Unimep, 1994. p. 15-22.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. p. 111-124.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Guia de Livros Didáticos:** Ensino Médio - Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica/Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação: Ministério da Educação, 2020. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2020/componente-curricular/pnld2020-matematica. Acesso em: 18 jun. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Dados Estatísticos.** Disponível em: <https://www.fnede.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 06 set. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental.** Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2022.

CHARALAMBOUS, C. Y. *et al.* A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 12, n. 2, p. 117-151, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10986060903460070>. Acesso em: 23 abr. 2022.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, RS, n. 2, 1990.

CHIRÉIA, J. V. **Transformações Geométricas e a Simetria:** Uma proposta para o Ensino Médio. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2013. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/fevereiro2016/matematica_dissertacoes/dissertacao_jose_vagner_chireia.pdf. Acesso em: 10 fev. 2022.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e pesquisa**, v. 30, n. 3, p. 549-566, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1517-97022004000300012>. Acesso em: 10 fev. 2022.

CHOY, B. H.; LEE, M. Y.; MIZZI, A. Textbook signatures: an exploratory study of the notion of gradient in Germany, Singapore and South. *In*: BESWICK, K.; MUIR, T.; FIELDING-WELLS, J. (Ed.). 2015, Hobart, Australia. **Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** [...]. Hobart, Australia: 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 13-18 Jul., 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280301687_TEXTBOOK_SIGNATURES_AN_EXPLORATORY_STUDY_OF_THE_NOTION_OF_GRADIENT_IN_GERMANY_SINGAPORE_AND_SOUTH_KOREA. Acesso em: 22 maio 2022.

DELMONDI, N. N.; PAZUCH, V. Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 99, p. 659-686, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.99i253.38616>. Acesso em: 25 mar. 2022.

FAN, L. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. **ZDM**, v. 45, n. 5, p. 765-777, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>. Acesso em: 05 jul. 2022.

FAN, L.; ZHU, Y.; MIAO, Z. Textbook research in mathematics education: development status and directions. **ZDM**, v. 45, n. 5, p. 633-646, 2013. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0539-x>. Acesso em: 30 mar. 2022.

FERNANDES, M. C. Vinte e cinco anos do PNLD: uma trajetória de negociações entre política educacional e econômica. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 6., 2011, Vitória. **Anais [...]**. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2011. Não paginado.

FERREIRA, R. C. **Orientações curriculares para o ensino de geometria**: do período da Matemática Moderna ao momento atual. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11368>. Acesso em: 20 fev. 2022.

FILGUEIRAS, J. M. As políticas para o livro didático durante a ditadura militar: a COLTED e a FENAME. **História e Educação (Online)**, Porto Alegre, v. 19, n. 45, p. 85-102, 2015. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/44800/pdf_66. Acesso em: 19 mar. 2022.

FONSECA, C. R. C. da. **Conceito de simetria em livros didáticos de matemática para o ensino fundamental**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/13229>. Acesso em: 15 jan. 2022.

FONTES, M. M.; FONTES, D. J. S. Estudo sobre as isometrias nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental Recomendados pelo PNLD 2011–2013. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas, RS. **Anais [...]**. Canoas, RS: Universidade Luterana do Brasil, 2013. Disponível em: <https://docplayer.com.br/40009726-Estudo-sobre-as-isometrias-nos-livros-didaticos-de-matematica-do-ensino-fundamental-recomendados-pelo-pnld.html>. Acesso em: 20 mar. 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018a.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018b.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018c.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018d.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

GOMES, A. **Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores**. Minho: Associação de Professores de Matemática (APM), 2012. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/20835>. Acesso em: 01 fev. 2022.

GONÇALVES, F. R. **Um estudo sobre a presença e a influência das crenças de professores de Matemática ao utilizar o Livro Didático**. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2022. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/217176>. Acesso em: 18 abr. 2022.

HARTSHORNE, R. **Geometry: Euclid and beyond**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.

HILBERT, D. **The foundations of geometry**. Chicago: Open court publishing Company, 1902.

HONG, D. S.; CHOI, K. M. A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 85, n. 2, p. 241-263, 2014a. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-013-9512-4>. Acesso em: 05 jun. 2022.

HONG, D. S.; CHOI, K. M. How Is the Function Concept Introduced in Textbooks?: A Comparative Analysis. In: OESTERLE, S. *et al.* (Eds.). 2014, 3., Vancouver, Canada. **Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 [...]**. Vancouver, Canada: PME, pp. 329-336, 2014b. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599847.pdf>. Acesso em: 04 mar. 2022.

KLEIN, F.; MENGHINI, M.; SCHUBRING, G. **Elementary mathematics from a higher standpoint**. Berlin: Springer, 2016.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, v. 16, n. 69, 1996.

LEME DA SILVA, M. C. A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno**. São Paulo: Editora Annablume; Brasília: CNPq; Osasco: GHEMAT, 2008. p. 69-93.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LITOLDO, B. F. **A contextualização e os níveis de demanda cognitiva de tarefas de geometria presentes em livros didáticos de matemática sob a perspectiva do opportunity-to-learn**. 2021. Tese (Doutorado em Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2021.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11217>. Acesso em: 03 jun. 2022.

MACIEL, A. M.; RÊGO, R. G.; CARLOS, E. J. Possibilidades pedagógicas do uso da imagem fotográfica no livro didático de Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, p. 344-364, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a17>. Acesso em: 01 abr. 2022.

MALCHER JUNIOR, J. E. S. L. *et al.* Práticas docentes relacionadas ao ensino de transformações geométricas. **Revista Prática Docente**, v. 4, n. 2, p. 375-390, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.23926/RPD.2526-2149.2019.v4.n2.p375-390.id426>. Acesso em: 24 mar. 2022.

MATOS, J. M.; SILVA, M. C. L. O Movimento da Matemática Moderna e diferentes propostas curriculares para o ensino de geometria no Brasil e em Portugal. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 24, n. 38, p. 171-196, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/160841/291222086008.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 22 fev. 2022.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio**: um foco nos capítulos de Geometria. 2018. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.17977.62566>. Acesso em: 15 jan. 2022.

MAZZI, L. C.; AMARAL-SCHIO, R. B. Uma trajetória histórica dos livros didáticos: um foco nas políticas públicas implementadas nos séculos XX e XXI. **Intermaths**, v. 2, n. 1, p. 88-105, 2021. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/8077/5925>. Acesso em: 13 jan. 2022.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da educação matemática**. São Paulo: Atual Editora, 1998.

MIORIM, M. A. Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2005, Porto, Portugal. **Actas [...]**. Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, p. 1-20, 2005.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa Social: Teoria, método e criatividade**. 21. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. 3. ed. Ijuí, RS: Editora Unijuí, 2016.

NEVES, P. R. V. **Uso de Caleidoscópios no Ensino de Grupos de Simetria e Transformações Geométricas**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91059>. Acesso em: 23 jun. 2022.

OLIVEIRA, S. C. **(Re) Construção do pensamento geométrico de professores sobre transformações geométricas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória, 2016. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3932029. Acesso em: 20 jan. 2022.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Felix Christian Klein Biography, 2003. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Klein/>. Acesso em: 10 jun. 2023.

O'SHEA, T. The Canadian mathematics curriculum from New Math to the NCTM standards. **A history of school mathematics**, p. 843-896, 2003.

PEPIN, B.; HAGGARTY, L. Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 33, n. 5, p. 158-175, 2001. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02656616>. Acesso em: 15 abr. 2022.

RAFAEL, J. A. M.; MIRANDA, P. R. Onde está a Simetria? Uma investigação nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 2, n. 1, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/27362/18828>. Acesso em: 28 jan. 2022.

RIPPLINGER, H. M. G. **A Simetria nas práticas Escolares**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/3951>. Acesso em: 08 jul. 2022.

RODRIGUES, C. R. F. **Potencialidades e possibilidades do ensino das transformações geométricas no Ensino Fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/61264/000865141.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 30 jan. 2022.

RUSSELL, H. H., ROBINSON, F. G., WOLFE, C. & DIMOND, C. **Current Ontario Elementary School Mathematics Programs**. Toronto, ON: Ontario Institute for Studies in Education, 1975

ROHDE, G. M. **Simetria: rigor e imaginação**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1997.

SANTOS, L. F. **Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino de simetria e das artes visuais em livros didáticos de matemática para séries iniciais do ensino fundamental**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3915>. Acesso em: 24 mar. 2022.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Pintar, Dobrar, Recortar e Desenhar: o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 291-310, 2012.

Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100013>. Acesso em: 19 jun. 2022.

SANTOS, M. R.; BICUDO, M. A. V. Uma experiência de formação continuada com professores de Arte e Matemática no ensino de Geometria. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 1329-1347, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a26>. Acesso em: 15 mar. 2022.

SENA, R.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: rumos da pesquisa (1991-2011). **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138/25095>. Acesso em: 20 jun. 2022.

SCHLEICHER, A. Insights and interpretations. **Pisa 2018**, v. 10, 2018.

SILVA, J. C. D.; PIETROPAOLO, R. C. Um estudo sobre as contribuições de Felix Klein para a introdução das transformações geométricas nos currículos prescritos de matemática do ensino fundamental. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 14, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/886/565>. Acesso em: 10 abr. 2022.

SILVA, M. B. E.; GUIMARÃES, G.; OLIVEIRA, I. Propostas de Atividades com Tabelas em Livros Didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental do Brasil e do Quebec. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 14-25, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n1p14-25>. Acesso em: 08 fev. 2022.

SMALL, M.; KESTELL, M. L. **Nelson Mathematics 5**. 1. ed. Canada: Nelson Canada, 2004a.

SMALL, M.; KESTELL, M. L. **Nelson Mathematics 6**. 1. ed. Canada: Nelson Canada, 2004b.

SMALL, M.; KESTELL, M. L. **Nelson Mathematics 7**. 1. ed. Canada: Nelson Canada, 2004c.

SMALL, M.; KESTELL, M. L. **Nelson Mathematics 8**. 1. ed. Canada: Nelson Canada, 2004d.

SOUSA, P.; GUIMARÃES, D.; AMARAL-SCHIO, R. Um estudo da presença da simetria nos livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 1, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.51359/2177-9309.2021.246925>. Acesso em: 07 abr. 2022.

SOUSA, R. S. O texto na análise textual discursiva: uma leitura hermenêutica da “tempestade de luz”. **Revista Pesquisa Qualitativa**, v. 8, n. 19, p. 641-660, 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2020.v.8.n.19.363>. Acesso em: 17 fev. 2022.

SOUZA, L. C. de. **Livros didáticos de Matemática do Brasil e Canadá: um enfoque em construção geométrica nos anos finais do ensino fundamental**. 2019. Dissertação (Mestrado

em Ciências) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-27062019-200308/publico/Dissertacao_Leonardo_Cascio.pdf. Acesso em: 21 jan. 2022.

SOUZA, R. D. **O resgate do ensino das construções geométricas na educação básica**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2013. Disponível em: <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160279D.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2022.

TAKEUCHI, H.; SHINNO, Y. Comparing the lower secondary textbooks of Japan and England: A praxeological analysis of symmetry and transformations in geometry. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 18, n. 4, p. 791-810, 2019. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-019-09982-3>. Acesso em: 02 jun. 2022.

TRÓPIA, F.; FURTADO, K. C. C.; BACCAR, M. H. M. M. Felix Klein e o Programa de Erlangen: histórico e implicações pedagógicas. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, 9., 2020, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: SBEM, 2020. Disponível em: <http://eventos.sbem.com.br/index.php/spem-rj/ix-spem-rj/paper/view/1478/1199>. Acesso em: 13 abr. 2022.

TURGUT, M.; YENILMEZ, K.; ANAPA, P. Symmetry and rotation skills of prospective elementary mathematics teachers. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 383-402, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a19>. Acesso em: 15 abr. 2022.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 16, n. 2, 2009. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894>. Acesso em: 24 jun. 2022.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

YANIK, H. B. Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 78, n. 2, p. 231-260, 2011. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9324-3>. Acesso em: 01 maio 2022.

ZAMBON, L. B.; TERRAZZAN, E. A. Políticas de material didático no Brasil: organização dos processos de escolha de livros didáticos em escolas públicas de educação básica. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 94, p. 585-602, 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbeped/a/4DgxPWYqB45jCHPYpnddVLv/?lang=pt>. Acesso em: 24 mar. 2022.

ZULATTO, R. B. A. **A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102133>. Acesso em: 01 fev. 2022.