



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MULTIUNIDADES  
EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA  
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

AYLA MOULAZ CARVALHO

**O PAPEL DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA EM ATIVIDADES  
PROPOSTAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

**CAMPINAS**

**2022**

**AYLA MOULAZ CARVALHO**

**O PAPEL DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA EM ATIVIDADES  
PROPOSTAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto de Física Gleb Wataghin na Universidade Estadual de Campinas como requisito para obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática, na área de Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Rubia Barcelos Amaral Schio

O ARQUIVO DIGITAL CORRESPONDE À  
VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELA ALUNA AYLA  
MOULAZ CARVALHO E ORIENTADA  
PELA PROF.<sup>a</sup> DR.<sup>a</sup> RÚBIA BARCELOS  
AMARAL SCHIO.

**CAMPINAS**

**2022**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin  
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

C253p Carvalho, Ayla Moulaz, 1998-  
O papel do software de geometria dinâmica em atividades propostas nos livros didáticos de matemática / Ayla Moulaz Carvalho. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.

Orientador: Rúbia Barcelos Amaral Schio.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. Software de geometria dinâmica. 2. Construção. 3. Visualização. 4. Experimentação com tecnologias. 5. Investigação matemática. I. Amaral-Schio, Rúbia Barcelos, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações Complementares

**Título em outro idioma:** The role of dynamic geometry software in activities proposed in mathematics textbooks

**Palavras-chave em inglês:**

Dynamic geometry software

Construction

Visualization

Experimentation with technologies

Mathematical investigation

**Área de concentração:** Ensino de Ciências e Matemática

**Titulação:** Mestra em Ensino de Ciências e Matemática

**Banca examinadora:**

Rúbia Barcelos Amaral Schio [Orientador]

Henrique Nogueira Sá Earp

Miriam Cardoso Utsumi

Beatriz Fernanda Litoldo

**Data de defesa:** 03-10-2022

**Programa de Pós-Graduação:** Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-5253-3675>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/9958155643718612>

## **COMISSÃO EXAMINADORA**

03/10/2022

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rubia Barcelos Amaral Schio

Presidente

Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

Prof<sup>º</sup>. Dr<sup>º</sup>. Henrique Nogueira de Sá Earp

Membro Titular

Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>a</sup>. Miriam Cardoso Utsumi

Membro Titular

Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>a</sup>. Beatriz Fernanda Litoldo

Membro Titular

Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de  
Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Dedico este trabalho aos meus pais,  
incansáveis em sempre oferecer o melhor para  
mim, mesmo que isso significasse tamanho  
sacrifício para eles.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, autor e consumidor da minha fé, por ter me dado essa oportunidade e privilégio de chegar até aqui, mesmo em meio a tantos desafios, proporcionando-me muito mais do que sonhei para a minha vida. A Ele, toda a minha gratidão, pois sem Ele, eu nada seria.

Aos meus pais, Marcos e Andreia, que sempre me apoiaram e estiveram presentes, mesmo na distância. Sou grata por todo o suporte, o ouvido amigo e ensinamentos. Muito do que sou hoje é graças à luta que batalharam por mim e comigo. Obrigada por quem são e pelo o que representam na minha existência.

À querida Rubia, minha orientadora, sempre presente, dedicando-se a mim em cada detalhe, apoiando e sendo dura quando necessário, a todo o momento buscando tirar o melhor de mim. Gratidão àquele dia na entrevista em que nos conhecemos e pelos sorrisos compartilhados desde então nessa trajetória.

Ao professor Henrique, com seus comentários e compartilhamentos que tanto enriqueceram este trabalho. Sua síntese permitiu que essa pesquisa alcançasse voos mais altos.

À querida Bia, que mesmo em meio a tantos dos seus compromissos, sempre se desprendia a me ajudar com suas leituras cuidadosas e apontamentos pertinentes, objetivando que a pesquisa alcançasse excelência.

À querida professora Miriam, com quem tive o privilégio de caminhar junto em uma Iniciação Científica. Aprendi a amar a pesquisa e ainda mais a Educação Matemática com você. Tê-la em minha banca, após me acompanhar por tantos anos, é um privilégio para mim.

Ao meu querido companheiro Lucas, com seu apoio incondicional e constantes orações, permitindo-me ter forças para que esse trabalho fosse concluído. Seu companheirismo me constrange.

Aos meus grupos de pesquisa, teorEMa – Interlocações entre Geometria e Educação Matemática e PECIMAT – Tecnologias Digitais em Educação Matemática, pelas leituras, apontamentos, conversas e contribuições com um olhar cuidadoso e preocupado com a Educação.

Por fim, aos meus amigos, pelo apoio e compreensão, pelas conversas e orações, refúgio e disposição em me ajudar. Bons culpados pelo meu crescimento pessoal, também, durante esse tempo.

“Assim, quer vocês comam, quer vocês bebam,  
quer vocês façam qualquer outra coisa, façam  
tudo para a glória de Deus.”

1Coríntios 10:31

## RESUMO

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2020 é o primeiro com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento das competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular, que apresenta propostas tratando especificamente sobre o uso das Tecnologias Digitais, inclusive sobre o Software de Geometria Dinâmica (SGD). Dessa maneira, uma vez que, para serem aprovados, os Livros Didáticos (LD) devem trazer propostas com o uso de tais recursos, dispõe-se, nesta pesquisa, como objetivo geral: caracterizar e compreender o papel que as atividades com o uso do SGD têm desempenhado em LD dos Anos Finais do Ensino Fundamental, aprovados no PNLD 2020, nos capítulos da unidade temática de Geometria. No referencial teórico, parte-se da concepção de que é importante que tais atividades levem em consideração a experimentação-com-tecnologias e investigação matemática em suas abordagens a partir das frentes de construção e visualização. Para alcançar o objetivo proposto, realizou-se uma pesquisa qualitativa com abordagem de análise documental em quatro coleções. Foram criadas quatro categorias de análise, a partir da perspectiva da experimentação-com-tecnologias, para discutir sobre os papéis das 36 atividades encontradas: corroboração a compreensão de conjecturas (16), descoberta matemática (13), domesticação da tecnologia (5) e simples constatação (2). No âmbito da discussão sobre a investigação matemática, observou-se que nenhuma atividade possuía tal abordagem, pois não havia um convite aos estudantes para justificarem as conjecturas levantadas. Foi possível perceber quantidades e abordagens bem distintas entre as obras: uma das coleções não explorou as potencialidades que o SGD oferece, requerendo, em muitas oportunidades, o mero uso das funções pré-definidas do software. Em contrapartida, outra apresentou várias atividades promovendo descoberta matemática, mostrando-se como um diferencial frente às outras coleções quanto ao uso do SGD. Outra dá pouca importância a esse tópico, apresentando apenas uma atividade com o uso do software por ano, potencialmente apenas com vias de ter a coleção aprovada pelo PNLD. Por fim, a última apresentava muitas questões que não possuíam um caráter aberto, limitando a construção de certos elementos, o que não era essencial para os objetivos matemáticos da atividade. Em suma, em três das quatro coleções, o papel das atividades com o SGD é o de corroborar para a compreensão de conjecturas, enquanto em apenas uma o papel é o de potencializar a descoberta matemática. Apesar disso, também foram encontradas atividades que não

requeriam uma exploração por parte do estudante e abordavam conceitos já conhecidos (domesticação da tecnologia) ou não (simples constatação). Tendo ciência do papel de uma atividade com o uso do SGD que é fornecida pelos LD, os professores podem realizar uma adaptação ou uma (re)estruturação da mesma, quando julgarem necessário, podendo contribuir com um ganho pedagógico em suas aulas.

**Palavras-chave:** Software de Geometria Dinâmica. Construção. Visualização. Experimentação-com-tecnologias. Investigação Matemática.

## ABSTRACT

The PNLD 2020 is the first with the goal of contributing to the development of skills and abilities of the BNCC, which presents proposals dealing specifically with the use of Digital Technologies, including Dynamic Geometry Software (DGS). In this way, once to be approved, textbooks (TB) must present proposals using such software, the goal of this research is: to characterize and understand the role of activities using the DGS performed in TB in Middle Schools, approved in the PNLD 2020, in the chapters of the thematic unit of Geometry. The theoretical framework starts from the conception that such activities must consider experimentation-with-technologies and mathematical investigation in their approaches from the construction and visualization fronts. To achieve the proposed goal, qualitative research was carried out with a document analysis approach in four collections. Four categories of analysis were created to discuss the roles of the 36 activities found: corroboration on the understanding of conjectures (16), mathematical discovery (13), domestication of technology (5), and simple verification (2). In the context of the discussion about the mathematical investigation, it was found that no activity had this approach, once students were not invited to justify their conjectures raised. It was possible to perceive very different amounts and approaches between the TB's collections: one of the collections showed not explore the potential that the DGS offers, requiring, on many occasions, the mere use of the pre-defined functions of the software. On the other hand, another presented several activities promoting mathematical discovery, demonstrating itself as a differential compared to other collections in the use of the DGS. Another does not present so much importance to this, presenting only one activity with the use of the software per year, potentially just to have the collection approved by the PNLD. Finally, the last one presented many questions that did not have an open character, limiting the construction of certain elements, which was not essential for the mathematical goals of the activity. In summary, in three of the four collections, the role of activities with the DGS is to corroborate the understanding of conjectures, while in only one the role is to enhance mathematical discovery. Despite this, activities were also found that did not require exploration by the student and approached concepts already known (domestication of technology) or not (simple observation). Being aware of the role of activity with the use of the DGS that is provided by the textbooks, teachers can carry out an adaptation or a (re)structuring of it, when they think it is necessary, being able to contribute with a pedagogical gain in their classes.

**Keywords:** Dynamic Geometry Software. Construction. Visualization. Experimentation-with-technologies. Mathematical Investigation.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figura 1a</b> - Desenho de um triângulo isósceles.....                                                               | 34 |
| <b>Figura 1b</b> - Triângulo escaleno, formado após movimentar o vértice C.....                                         | 34 |
| <b>Figura 2a</b> - Construção de um triângulo isósceles .....                                                           | 35 |
| <b>Figura 2b</b> - Triângulo isósceles após mover o vértice A.....                                                      | 35 |
| <b>Figura 3</b> - Atividade exemplificadora do MP com o uso do SGD na seção intitulada ‘Informática e Matemática’ ..... | 53 |
| <b>Figura 4</b> - Atividade exemplificadora com o uso de um SGD dividida em três unidades de análise preliminares ..... | 56 |
| <b>Figura 5</b> - Caminho metodológico baseado em Borba e Selva (2013).....                                             | 57 |
| <b>Figura 6</b> - Estrutura para caracterização da abordagem de experimentação-com-tecnologias .....                    | 58 |
| <b>Figura 7</b> - Estrutura para caracterização da abordagem de investigação matemática .....                           | 58 |
| <b>Figura 8</b> - Capas dos LD dos Anos Finais da Coleção Apoema .....                                                  | 63 |
| <b>Figura 9</b> - Informação inicial contida no MP sobre seção ‘Conviver’ na Coleção Apoema..                           | 64 |
| <b>Figura 10</b> - Informação inicial contida no livro sobre selos na Coleção Apoema .....                              | 65 |
| <b>Figura 11</b> - Parte inicial da atividade AP01: 6º ano .....                                                        | 65 |
| <b>Figura 12</b> - Parte inicial da atividade AP04: 7º ano .....                                                        | 66 |
| <b>Figura 13</b> - Capas dos LD dos Anos Finais da Coleção Araribá.....                                                 | 67 |
| <b>Figura 14</b> - Informação inicial contida no LE sobre a seção ‘Informática e Matemática’ .....                      | 69 |
| <b>Figura 15</b> - Atividade AR13: 9º ano.....                                                                          | 69 |
| <b>Figura 16</b> - Parte inicial da AR08.....                                                                           | 70 |
| <b>Figura 17</b> - Capas dos LD dos Anos Finais da coleção A Conquista da Matemática .....                              | 71 |
| <b>Figura 18</b> - Informação inicial contida no LE sobre a seção ‘Tecnologias’ .....                                   | 72 |
| <b>Figura 19</b> - Parte inicial e final da CM01: 6º ano .....                                                          | 73 |
| <b>Figura 20</b> - Parte da CM02 sobre simetria de rotação: 7º ano .....                                                | 74 |
| <b>Figura 21</b> - Capas dos LD dos Anos Finais da Coleção Teláris.....                                                 | 75 |
| <b>Figura 22</b> - Informação inicial contida no LE sobre a seção ‘Matemática e Tecnologia’ .....                       | 76 |
| <b>Figura 23</b> - Início da atividade TE03: 7º ano .....                                                               | 77 |
| <b>Figura 24</b> - Final de atividade TE03: 7º ano.....                                                                 | 78 |
| <b>Figura 25</b> - Parte final da AP07: 8º ano.....                                                                     | 81 |
| <b>Figura 26</b> - Atividade AR12: 8º ano.....                                                                          | 88 |

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 27</b> - Parte da CM02 sobre simetria de translação: 7º ano .....                        | 95  |
| <b>Figura 28</b> - Parte da TE06: 8º ano .....                                                     | 99  |
| <b>Figura 29</b> - Parte da atividade AP04 com domesticação da tecnologia: 7º ano .....            | 104 |
| <b>Figura 30</b> - Parte final da atividade AR01 com descoberta matemática: 6º ano .....           | 106 |
| <b>Figura 31</b> - Final da CM04 com corroboração a compreensão de conjectura: 9º ano.....         | 108 |
| <b>Figura 32</b> - Parte inicial e final da TE07 com o objetivo de simples constatação: 9º ano.... | 109 |
| <b>Figura 33</b> - Parte final da AR07: 7º ano .....                                               | 111 |
| <b>Figura 34</b> - Parte da CM02 sobre simetria de reflexão: 7º ano .....                          | 112 |
| <b>Figura 35</b> - Parte inicial da TE04: 7º ano .....                                             | 113 |
| <b>Figura 36</b> - Parte da TE04: 7º ano .....                                                     | 114 |
| <b>Figura 37</b> - Parte inicial da AP07: 8º ano .....                                             | 115 |
| <b>Figura 38</b> - Parte final da CM03: 8º ano.....                                                | 116 |
| <b>Figura 39</b> - Parte final da TE06: 8º ano .....                                               | 117 |
| <b>Figura 40</b> - Parte final da TE08: 9º ano .....                                               | 118 |
| <b>Figura 41</b> - Parte final da AR06: 7º ano .....                                               | 119 |
| <b>Figura 42</b> - Atividade AR11: 8º ano.....                                                     | 121 |
| <b>Figura 43</b> - Atividade AR14: 9º ano.....                                                     | 122 |
| <b>Figura 44</b> - Atividade AR15: 9º ano.....                                                     | 123 |
| <b>Figura 45</b> - Parte inicial da AP05: 8º ano .....                                             | 124 |
| <b>Figura 46</b> - Parte da AP05: 8º ano .....                                                     | 125 |
| <b>Figura 47</b> - Parte inicial da AP06: 8º ano .....                                             | 126 |
| <b>Figura 48</b> - Parte do LD que trata sobre ângulos do hexágono regular.....                    | 127 |
| <b>Figura 49</b> - Página do livro onde se encontra a atividade AR05: 7º ano.....                  | 128 |
| <b>Figura 50</b> - Parte final da TE02 - 6º ano.....                                               | 129 |
| <b>Figura 51</b> - Parte da AP09: 9º ano .....                                                     | 130 |
| <b>Figura 52</b> - Início da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano .....              | 132 |
| <b>Figura 53</b> - 2ª parte da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano .....            | 133 |
| <b>Figura 54</b> - 3ª parte da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano .....            | 133 |
| <b>Figura 55</b> - Parte final da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano.....          | 134 |
| <b>Figura 56</b> - Parte final da AP02: 6º ano.....                                                | 136 |
| <b>Figura 57</b> - Parte final da AR09: 8º ano .....                                               | 136 |
| <b>Figura 58</b> - Parte inicial da AR04: 7º ano.....                                              | 137 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tabela 1</b> - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso do GeoGebra na coleção Apoema .....                                | 64 |
| <b>Tabela 2</b> - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso de um SGD por capítulo na coleção Araribá.....                     | 68 |
| <b>Tabela 3</b> - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção A Conquista da Matemática..... | 72 |
| <b>Tabela 4</b> - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção Teláris .....                  | 76 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Quadro 1</b> - Sistematização 2x2 das características gerais das atividades .....                                               | 60  |
| <b>Quadro 2</b> - Localização das atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção Apoema .....                    | 82  |
| <b>Quadro 3</b> - Localização das atividades que sugerem o uso de um SGD por capítulo na coleção Araribá.....                      | 89  |
| <b>Quadro 4</b> - Localização das atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção A Conquista da Matemática ..... | 95  |
| <b>Quadro 5</b> - Localização das atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção Teláris.....                    | 99  |
| <b>Quadro 6</b> - Classificação das atividades das quatro coleções .....                                                           | 103 |
| <b>Quadro 7</b> - Classificação das atividades da coleção Apoema .....                                                             | 104 |
| <b>Quadro 8</b> - Classificação das atividades da coleção Araribá .....                                                            | 105 |
| <b>Quadro 9</b> - Classificação das atividades da coleção A Conquista da Matemática.....                                           | 107 |
| <b>Quadro 10</b> - Classificação das atividades da coleção Teláris.....                                                            | 109 |

## LISTA DE SIGLAS

|          |                                                          |
|----------|----------------------------------------------------------|
| BNCC     | Base Nacional Comum Curricular                           |
| FNDE     | Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação            |
| GD       | Geometria Dinâmica                                       |
| LD       | Livro Didático                                           |
| LE       | Livro do Estudante                                       |
| MP       | Manual do Professor                                      |
| OED      | Objetos Educacionais Digitais                            |
| PNLD     | Programa Nacional do Livro e do Material Didático        |
| PUC-SP   | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo            |
| SEB/MEC  | Secretaria de Educação Básica/Ministério da Educação     |
| SGD      | Software de Geometria Dinâmica                           |
| TD       | Tecnologias Digitais                                     |
| TDIC     | Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação         |
| Unesp-SP | Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” |
| Unicamp  | Universidade Estadual de Campinas                        |
| USP      | Universidade de São Paulo                                |

## SUMÁRIO

|       |                                                                                        |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO                                                                             | 20 |
| 1.1   | TRAJETÓRIA PESSOAL                                                                     | 20 |
| 1.2   | CONTEXTUALIZAÇÃO DA PROBLEMÁTICA                                                       | 21 |
| 1.3   | CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS                                                                | 24 |
| 1.4   | ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO                                                               | 24 |
| 2     | A TRAJETÓRIA DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS EM GEOMETRIA E OS LIVROS DIDÁTICOS               | 26 |
| 2.1   | A PESQUISA COM LIVROS DIDÁTICOS                                                        | 26 |
| 2.2   | COMO A GEOMETRIA TEM SIDO TRATADA NOS LIVROS DIDÁTICOS                                 | 27 |
| 2.3   | A PRESENÇA DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA                 | 28 |
| 2.4   | O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA NO CONTEXTO DO PNLD 2020                              | 34 |
| 3     | REFERENCIAL TEÓRICO                                                                    | 38 |
| 3.1   | A CONSTRUÇÃO NA PERSPECTIVA DA GEOMETRIA DINÂMICA                                      | 38 |
| 3.2   | A IMPORTÂNCIA DA VISUALIZAÇÃO NO PROCESSO DE COMPREENSÃO MATEMÁTICA                    | 41 |
| 3.3   | A IMPORTÂNCIA DA EXPERIMENTAÇÃO ASSOCIADA ÀS TECNOLOGIAS DIGITAIS                      | 44 |
| 3.4   | A IMPORTÂNCIA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA ASSOCIADA AO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA   | 47 |
| 4     | FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA E APRESENTAÇÃO DAS OBRAS                                    | 50 |
| 4.1   | PARADIGMA DA PESQUISA QUALITATIVA                                                      | 50 |
| 4.2   | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS                                                            | 52 |
| 4.3   | FONTE DE DADOS                                                                         | 54 |
| 4.4   | O CAMINHAR DA PESQUISA COM AS ATIVIDADES QUE UTILIZAM O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA | 55 |
| 4.4.1 | Fase exploratória                                                                      | 55 |

|       |                                                                                                                                     |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.4.2 | <b>Fase da investigação focalizada</b>                                                                                              | 57 |
| 4.5   | <b>TIPOS DE ATIVIDADES: COMO ESSA ANÁLISE SERÁ REALIZADA?</b>                                                                       | 58 |
| 4.6   | <b>UM OLHAR DETALHADO PARA AS OBRAS</b>                                                                                             | 62 |
| 4.6.1 | <b>Coleção: APOEMA</b>                                                                                                              | 62 |
| 4.6.2 | <b>Coleção: ARARIBÁ</b>                                                                                                             | 66 |
| 4.6.3 | <b>Coleção: A Conquista da Matemática</b>                                                                                           | 70 |
| 4.6.4 | <b>Coleção: TELÁRIS</b>                                                                                                             | 74 |
| 5     | <b>ANÁLISE DESCRITIVA: UM APROFUNDAMENTO NAS COLEÇÕES</b>                                                                           | 79 |
| 5.1   | <b>COLEÇÃO APOEMA</b>                                                                                                               | 79 |
| 5.1.1 | <b>Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP</b>                                  | 79 |
| 5.1.2 | <b>Como os LD propõem a utilização do SGD</b>                                                                                       | 81 |
| 5.1.3 | <b>Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria</b> | 82 |
| 5.2   | <b>COLEÇÃO ARARIBÁ</b>                                                                                                              | 86 |
| 5.2.1 | <b>Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP</b>                                  | 86 |
| 5.2.2 | <b>Como os LD propõem a utilização do SGD</b>                                                                                       | 87 |
| 5.2.3 | <b>Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria</b> | 89 |
| 5.3   | <b>COLEÇÃO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA</b>                                                                                            | 93 |
| 5.3.1 | <b>Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP</b>                                  | 93 |
| 5.3.2 | <b>Como os LD propõem a utilização do SGD</b>                                                                                       | 94 |
| 5.3.3 | <b>Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria</b> | 95 |
| 5.4   | <b>COLEÇÃO TELÁRIS</b>                                                                                                              | 96 |
| 5.4.1 | <b>Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP</b>                                  | 96 |
| 5.4.2 | <b>Como os LD propõem a utilização do SGD</b>                                                                                       | 98 |

|              |                                                                                                                                     |            |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5.4.3</b> | <b>Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria</b> | <b>99</b>  |
| <b>6</b>     | <b>UM OLHAR PARA AS ATIVIDADES COM O USO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA: COMO ESSAS SE CARACTERIZAM?</b>                         | <b>103</b> |
| <b>6.1</b>   | <b>EXPERIMENTAÇÃO-COM-TECNOLOGIAS</b>                                                                                               | <b>103</b> |
| <b>6.1.1</b> | <b>Corroboração à compreensão de conjecturas</b>                                                                                    | <b>110</b> |
| <b>6.1.2</b> | <b>Descoberta matemática</b>                                                                                                        | <b>119</b> |
| <b>6.1.3</b> | <b>Domesticação da tecnologia</b>                                                                                                   | <b>124</b> |
| <b>6.1.4</b> | <b>Simples constatação</b>                                                                                                          | <b>130</b> |
| <b>6.2</b>   | <b>INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA</b>                                                                                                      | <b>131</b> |
| <b>7</b>     | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                                                                                                         | <b>138</b> |
|              | <b>REFERÊNCIAS</b>                                                                                                                  | <b>145</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Este primeiro capítulo tem por objetivo apresentar a pesquisadora ao leitor, de forma que ele entenda o contexto no qual ela está inserida e seu interesse particular nesta pesquisa, bem como a contextualização da problemática, seguida de pergunta diretriz e objetivos deste trabalho; a relevância deste estudo para a Educação Matemática, apresentando-se, por fim, um resumo de como a dissertação está estruturada.

### 1.1 TRAJETÓRIA PESSOAL

Em meu<sup>1</sup> 5º e último ano no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), em 2019, comecei a lecionar a disciplina de Matemática para turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental em uma escola privada da cidade de Campinas/SP e, com isso, surgiram diversos novos desafios. Minha experiência com a docência, até então, havia sido por meio dos estágios obrigatórios e, dessa maneira, como professora pela primeira vez, efetivamente, os desafios encontrados eram completamente novos para mim.

Ao lidar comigo mesma no ofício pedagógico e aprofundando-me na relação professor-aluno, enfrentei questões pessoais, a destacar o cumprimento do currículo e, conseqüentemente, do material didático utilizado até então na escola (um sistema apostilado usado naquele momento). A pressão pelo cumprimento da grade curricular e utilização do material didático vinha de todos os lados, incluindo dos responsáveis pelos alunos. A questão principal era que eu considerava a apostila inadequada em termos da abordagem dos objetos do conhecimento matemático, com uma diversidade de detalhes desnecessários, erros conceituais e uma escassez de atividades. Dessa maneira, começaram as inquietações e um constante embate entre mim, meu ensino e o material didático. Era como se, ao invés desse me auxiliar, estivesse sendo uma ‘pedra de tropeço’ para meu trabalho de lecionar e, por conseguinte, para a aprendizagem dos alunos.

Ao fim do 2º bimestre daquele ano, a escola decidiu conhecer uma nova editora para a possível troca do material por um Livro Didático. Coincidentemente, no mesmo

---

<sup>1</sup> Somente essa seção será escrita na 1ª pessoa do singular, por se tratar da trajetória pessoal da pesquisadora.

semestre, na faculdade, estava cursando a disciplina MA225 – Análise de Livros e Materiais Didáticos de Matemática, em que uma das tarefas envolvia a comparação de dois livros, na busca por criar uma metodologia própria para concluir qual Livro Didático (LD) era mais adequado na minha perspectiva como professora.

A tarefa proposta junto com a minha necessidade urgente na escola fizeram com que surgisse um interesse pela pesquisa envolvendo LD. Na época, baseada nas duas opções de materiais didáticos que a escola tinha, busquei criar uma metodologia, da maneira como aprendi na disciplina, que ajudasse a mim e aos demais professores da escola na escolha do livro mais adequado à nossa perspectiva.

Foi decidido trocar a apostila em uso. A escola optou por mudar o seu sistema apostilado de ensino, migrando para uma nova editora, que foi justamente a que eu considerava mais adequada dentre as duas opções.

Desde que comecei a usar esse novo livro, inquietações surgiram quanto às Tecnologias Digitais (TD) em suas atividades. Em várias páginas, há a presença de *QR codes*, bem como a possibilidade de usar um aplicativo da própria editora para a utilização de uma ferramenta identificada como Realidade Aumentada. O interesse iminente dos alunos por essas páginas e pelos objetos do conhecimento presentes nos códigos geraram – e tem gerado – uma inquietude sobre quão efetiva é a presença dessas TD nos LD.

Sendo assim, com a minha experiência no Ensino Fundamental e as inquietações surgidas desde o primeiro contato com um material curricular, até o momento atual com as TD presentes nos livros, considerei pertinente realizar um estudo que culminasse em uma análise documental (LUDKE; ANDRÉ, 2011) em LD de Matemática do Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD – edital 2020, dos Anos Finais do Ensino Fundamental, que eram os mais atuais, uma vez que 2020 foi o ano em que o mestrado se iniciou, tendo como foco as TD.

## 1.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PROBLEMÁTICA

O Brasil possui um grande programa de avaliação e distribuição de LD, o PNLD, tendo por objetivo oferecer, de forma gratuita e universal, obras didáticas – a se destacar o LD – a todos os alunos do Ensino Infantil até o Ensino Médio das Redes Públicas de Ensino brasileiras. Só no ano de 2020 foram 24 editoras envolvidas, mais de

170 milhões de livros distribuídos e um investimento de quase 1,4 bilhão de reais (BRASIL, 2021).

Todo o processo que envolve o PNLD contempla várias fases. Inicialmente, há a publicação de um Edital pelo Ministério da Educação por meio do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE – com as diretrizes necessárias para as editoras se inscreverem. Em seguida, os livros que foram escritos pelos autores e publicados pelas editoras são inscritos e analisados por especialistas selecionados, conforme critérios publicados em um outro edital divulgado pela Secretaria de Educação Básica/Ministério da Educação – SEB/MEC. Esses especialistas fazem a análise dos livros e escrevem uma resenha dos que são aprovados, compondo o Guia Nacional do Livro Didático<sup>2</sup>. Esse, então, é disponibilizado para orientar a escolha de professores e coordenadores em suas respectivas escolas. Posteriormente, de acordo com esse pedido, há a aquisição por parte do governo, seguida da produção e distribuição do material. É importante destacar que esses livros são reutilizáveis para atender aos alunos por um período de quatro anos. Nesse tempo, são feitas aquisições apenas para reposição ou complementação.

Nesse processo, um componente de muita importância é a escrita do LD por parte dos autores, porque, dessa maneira, nota-se a abordagem do objeto do conhecimento adotada por cada um, bem como a decisão de utilizar ou não as TD. Esse destaque é importante principalmente porque o LD é o recurso mais utilizado pelo professor em sua prática (VALVERDE *et al.*, 2002), podendo influenciar diretamente o educador em sala de aula e, conseqüentemente, os processos de ensino e de aprendizagem.

Tal decisão sobre a utilização das TD nos livros está ligada diretamente ao PNLD, sendo que é inegável a contribuição das TD na mudança da configuração social, refletindo, também, no espaço de aprendizagem. Atentando-se a essas mudanças, o Edital de 2014 do PNLD, dedicado aos livros dos Anos Finais do Ensino Fundamental, foi o primeiro do Programa que contemplou a inclusão de Objetos Educacionais Digitais<sup>3</sup> – OED – como parte complementar dos LD impressos. Além disso, a Base

---

<sup>2</sup> A partir desse momento, apenas o termo Guia será usado para se referir ao Guia Nacional do Livro Didático para minimizar repetições.

<sup>3</sup> Os Objetos Educacionais Digitais são recursos tecnológicos “destinados ao processo de ensino e aprendizagem. Esses objetos devem ser apresentados nas categorias audiovisual, jogo eletrônico educativo, simulador e infográfico animado; ou congregar todas ou algumas dessas categorias no estilo a hipermídia, devendo cada objeto ser identificável individualmente, armazenável em mídia e passível de disponibilização em ambiente virtual” (BRASIL, 2011, p. 2).

Nacional Comum Curricular<sup>4</sup> – BNCC – (BRASIL, 2018) expõe como uma competência geral da Educação Básica:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Sendo assim, considera-se que está clara a importância da presença de TD nos LD disponíveis atualmente. Porém, apesar de todas essas diretrizes regulamentares dos LD presentes em editais do PNLD desde 2014, há resultados de algumas pesquisas mostrando que os livros vão na contramão de tais diretrizes. Gitirana, Bittar e Ignácio (2014), ao discutir sobre esse processo de inclusão nos livros dos OED que foram analisados e aprovados, mostraram que foram cinco coleções aprovadas no PNLD 2014; junto com elas, foram submetidos 200 OED no total. Desses, apenas 16 objetos foram aprovados e estiveram presentes nos LD, encontrados em três coleções, ou seja, duas não tiveram nenhum objeto. Esse grande número de OED excluídos (184) é devido, principalmente, à falta de qualidade conceitual, carência de esforços em relação à integração entre os OED e a abordagem adotada no LD, além de muitos erros e induções a erros, divulgação de estereótipos e a falta de exploração das potencialidades tecnológicas que promovam, em relação ao livro impresso, um diferencial.

Além disso, Amaral-Schio (2018), com base em atividades de cinco coleções de LD do Ensino Médio do PNLD 2015, focando no uso das tecnologias<sup>5</sup> no desenvolvimento de objetos do conhecimento de Geometria, mostra a pouca presença das tecnologias nos livros. E mesmo quando há a presença, de acordo com Ribeiro e Amaral (2016, p. 73), que desenvolveram sua pesquisa com base em três coleções dos Anos Finais, os OED nos livros “não promovem interatividade e [...] o conteúdo matemático nem sempre é uma prioridade (e nem sempre da forma matematicamente correta)”.

Diante do cenário exposto, julgou-se importante refletir sobre como tem sido a presença de tarefas propostas com o uso das TD nos livros e como essas podem ser caracterizadas, chegando à seguinte questão diretriz:

---

<sup>4</sup> Para evitar repetições, usaremos apenas o termo Base para fazer referência à Base Nacional Comum Curricular.

<sup>5</sup> Em alguns momentos da dissertação, usa-se apenas ‘tecnologias’ ao invés de ‘tecnologias digitais’, com o intuito de prezar pela ideia do autor de origem do que é exposto.

### **Qual o papel das Tecnologias Digitais em atividades propostas nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental, no âmbito da Geometria?**

Tendo em mente a pergunta diretriz, propõe-se como objetivo geral caracterizar e compreender o papel que as atividades com o uso do software de Geometria Dinâmica têm desempenhado em LD dos Anos Finais do Ensino Fundamental, aprovados no PNLD 2020, nos capítulos da unidade temática de Geometria.

#### **1.3 CONTRIBUIÇÕES ESPERADAS**

Acredita-se que essa pesquisa pode contribuir, de maneira mais específica, para três públicos: os docentes de matemática, assim como futuros professores; para aqueles que são autores e editores de LD; e para os responsáveis pelas políticas públicas do Brasil.

Com um olhar dedicado à caracterização das atividades com o uso do Software de Geometria Dinâmica – SGD – em LD, o professor de matemática é quem efetivamente utiliza tais livros e escolhe a forma de fazer tal utilização com seus alunos. Dessa maneira, a compreensão sobre as características de uma atividade com o uso do software pode ajudar o professor a desenvolver um olhar crítico para as mesmas, sendo importante na possibilidade de auxiliá-lo em suas aulas.

Ao mesmo tempo, aqueles que de fato elaboram e publicam essas atividades com o uso do SGD nos LD têm relevância como público-alvo dessa pesquisa, ou seja, os autores e editores, uma vez que eles podem potencializar suas propostas, a fim de melhorar a qualidade dos livros que chegam à sala de aula.

Por fim, aqueles que têm a responsabilidade de elaborar diretrizes para a Educação do país podem, assim como devem, levar em conta que é necessário mais do que apenas apresentar propostas utilizando as TD. A maneira como estas são abordadas diz muito sobre o estudante que se tem em mente e que se deseja formar.

#### **1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO**

Após esse capítulo introdutório, na sequência, tem-se o capítulo 2, que apresenta uma revisão de literatura, iniciando a abordagem pela pesquisa com os LD com foco na

Geometria presente nos mesmos, abarcando, ainda, a presença das TD, principalmente nessa área. Por fim, é lançado um olhar específico para o PNLD 2020 (BRASIL, 2019) e como tem sido a recente obrigatoriedade de tais TD, com foco no SGD, nos livros por meio da BNCC (BRASIL, 2018).

Na sequência, no capítulo 3, aborda-se o referencial teórico que permeou toda esta pesquisa no paradigma da Geometria Dinâmica – GD, com um olhar voltado para a construção, visualização, experimentação-com-tecnologias e a investigação matemática.

Posteriormente, no capítulo 4, expõe-se a metodologia adotada e a escolha pela pesquisa qualitativa com análise documental. Também, apresentam-se, inicialmente, as obras que foram analisadas nesta pesquisa com a intenção de situar o leitor. Ressalta-se que, ao falar das coleções, optou-se por apresentá-las na mesma ordem durante toda a dissertação para facilitar o entendimento do leitor quanto às características particulares de cada uma.

Os capítulos 5 e 6 expõem a análise desta pesquisa. A divisão se dá por acreditar que há focos diferentes, mas ambos necessários no contexto no qual essa está inserida. Dessa maneira, no capítulo 5, realiza-se uma análise descritiva das quatro coleções, elencando pontos sobre o que o Guia orienta a respeito de cada coleção no contexto das TD, bem como o que o próprio Manual do Professor – MP – norteia na utilização destes. Também se volta um olhar para onde as atividades com o uso do SGD estão localizadas dentro dos capítulos de Geometria. Na sequência, no capítulo 6, faz-se uma análise que busca caracterizar as atividades com o uso do SGD nos LD a partir do referencial que foi adotado.

## **2 A TRAJETÓRIA DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS EM GEOMETRIA E OS LIVROS DIDÁTICOS**

Esta pesquisa está apoiada no seguinte tripé: Livro Didático, Geometria e Tecnologias Digitais. Por conta disso, nesse capítulo, volta-se um olhar para a trajetória das TD nos LD, com foco, também, na Geometria. Tais elementos do tripé, enquanto palavras-chave, foram considerados na revisão de literatura que aqui será apresentada. A estas palavras, também foi adicionado o termo ‘Objetos Educacionais Digitais’, por este aproximar as TD aos LD. Os resumos dos artigos, apresentações em eventos, dissertações e teses encontradas foram lidos e, a partir do objetivo desta pesquisa, foram considerados critérios de exclusão: o não tratamento específico da Matemática, o foco na formação docente ou na aprendizagem discente, e pesquisas realizadas fora do âmbito dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio.

### **2.1 A PESQUISA COM LIVROS DIDÁTICOS**

Ao ter em mente o Livro Didático como o objeto de estudo desta pesquisa, faz-se necessário apontar como delimitam-se os materiais que podem ser chamados de LD. Choppin (2004), apresentando uma pesquisa histórica e considerando o livro didático como tema principal, revelou que uma grande dificuldade das pesquisas nesse campo é exatamente delimitar o seu principal objeto de estudo. Sendo assim, é relevante que uma definição seja aqui apresentada.

Segundo Choppin (2004), o LD é um instrumento educacional que possui quatro funções: 1. referencial, por ser um tradutor do programa curricular; 2. instrumental, pois coloca em prática métodos de aprendizagem; 3. ideológica e cultural, já que é um dos portadores essenciais da língua, da cultura e dos princípios das classes dirigentes; e 4. documental, fornecendo uma gama de documentos que podem vir a desenvolver um espírito crítico nos estudantes.

O mesmo autor identificou um aumento de pesquisas sobre LD próximo à época da sua, e ainda expôs como nos 20 anos anteriores a esse estudo houve um intenso desenvolvimento de pesquisas que discutiam sobre a natureza metodológica dos LD. Apesar disso, mesmo anos depois, já com o foco em livros didáticos de Matemática no âmbito internacional, Fan (2013) pontua que a pesquisa nessa área ainda é muito nova

se comparada a outras áreas da Educação Matemática, sugerindo um amplo caminho possível de pesquisas nesse campo.

Valente (2008) aponta que a matemática é, talvez, a disciplina que mais tem sua trajetória histórica atrelada aos LD, de modo que ambos parecem ser indissociáveis à Educação Matemática. Os livros atuais podem, inclusive, revelar “heranças de práticas pedagógicas do ensino de matemática, presentes em nosso cotidiano escolar hoje” (VALENTE, 2008, p. 159). Dessa forma, é possível perceber que o autor defende uma possível influência que o LD pode exercer num contexto de ensino e aprendizagem, concluindo que pesquisas nessa perspectiva da influência são muito relevantes para a Educação Matemática.

Nessa concepção, Fan (2013) argumenta que o objetivo mais importante da pesquisa em LD é responder ao questionamento de como produzir tais livros para um melhor ensino e aprendizagem. Tal ideia sustenta toda esta pesquisa.

Consciente de que o professor é quem efetivamente toma as decisões quanto à sua aula, ou até mesmo quanto a utilizar ou não o livro, isso não diminui a problemática sobre o que os LD têm oferecido e oportunizado aos mesmos. Isso porque tem-se em vista que esse é um recurso que oferece ideias, propostas e sugestões que podem enriquecer o trabalho docente, sendo importante que os materiais que os mesmos usam favoreçam a tarefa de ensinar, de maneira que estejam a serviço de seus planejamentos didáticos, e não o contrário (ZABALA, 1995).

## 2.2 COMO A GEOMETRIA TEM SIDO TRATADA NOS LIVROS DIDÁTICOS

A ideia apontada por Fan (2013) sobre a necessidade de refletir quanto à pesquisa buscando a compreensão de como produzir LD que objetivem a melhora do ensino e aprendizagem mostra-se necessária, também, ao se considerar a Geometria, já que esse tem sido um objeto do conhecimento apontado como problemático (PAVANELLO, 1993; MORAIS; BALTAR BELLEMAIN; LIMA, 2014; AMARAL-SCHIO, 2018).

O ensino de Geometria esteve em segundo plano por muito tempo no Brasil (ROMANO; SCHIMIGUEL; FERNANDES, 2015). Pavanello (1993) explica sobre o

abandono do ensino dessa área do conhecimento<sup>6</sup> a partir da insegurança dos professores quanto ao mesmo. Além disso, por anos, nas décadas de 1980 e 1990, a Geometria integrava as páginas finais dos livros, de forma que, se o professor não conseguisse cumprir o programa traduzido pelo LD como um todo, essa parte não era lecionada ou, ainda que conseguisse, essa reserva para o fim do ano letivo acabava prejudicando o ensino desta área do conhecimento (PAVANELLO, 1993; AMARAL-SCHIO, 2018). Mesmo em 1993, Pavanello (1993) já abordava a necessidade de um investimento maior em pesquisas que tratassem sobre metodologias mais apropriadas para o ensino dessa unidade temática.

Mesmo que o panorama da Geometria nos LD tenha mudado, já que agora essa área do conhecimento está distribuída por todo o livro, o entrave no aprendizado desse objeto do conhecimento continua (GODOY, 2016).

Godoy (2016) expôs ser evidente a escassez de trabalhos que relacionem a Geometria e o LD. Sendo assim, acredita-se que essas questões dão margem a pesquisas que reflitam sobre a possível influência da abordagem dos livros nesse entrave encontrado em Geometria.

Além disso, Amaral e Hollebrands (2017) argumentam que é razoável presumir que reflexões e discussões críticas possam ajudar os alunos a desenvolverem maneiras de interpretar problemas e pensar em Geometria. Isso também pode, bem como deve, ser pensado em abordagens tecnológicas, tendo em vista sua relevância na competência geral da Educação Básica exposta pela BNCC, como apresentado anteriormente, o que influencia diretamente nos LD que passam pelo PNLD.

### 2.3 A PRESENÇA DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Em 2004, Choppin (2004) já expunha as dúvidas que tinha com relação ao LD. Uma delas, que chamara a atenção, era sobre o próprio futuro dos livros. O autor destacou as incertezas quanto ao papel que os LD desempenhariam diante das novas tecnologias educativas na época em que seu artigo foi escrito, sendo interessante pensar nessa preocupação como uma ideia não recente.

---

<sup>6</sup> Seguindo a Base, campo, área do conhecimento e unidade temática são sinônimos, sendo Geometria uma delas. As outras quatro são: Números, Álgebra, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística.

Nessa direção, Romano, Schimiguel e Fernandes (2015) apresentaram uma revisão bibliográfica sobre pesquisas no campo de LD de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, tecnologia e ensino de Geometria. Os autores expuseram que houve um avanço com relação à exigência de que os LD contemplem o quesito tecnológico, segundo o PNLD. Os autores defendem que a presença das TD é essencial nos LD, uma vez que o contexto tecnológico é o que os alunos estão atualmente inseridos. Nesse sentido, Kenski (2003, p. 3) afirma que “toda aprendizagem, em todos os tempos, é mediada pelas tecnologias disponíveis”, isso é, o contexto tecnológico no qual os estudantes estão imersos, seja com tecnologias convencionais como lápis e papel, seja com as TD, há influência em sua aprendizagem.

Apesar disso, os mesmos autores afirmam que é difícil encontrar trabalhos que busquem tratar a necessidade de articular, no campo de Geometria, o quesito tecnológico nos LD de Matemática (ROMANO; SCHIMIGUEL; FERNANDES, 2015). Fan (2013), inclusive, indicou questões de pesquisa interligando as TD e o LD como promissores.

Tendo em vista esse terreno próspero para pesquisas, Vieira e Escher (2018) apontaram como foi possível perceber um aumento considerável na abordagem de utilização de tecnologias na área da educação nos últimos anos. Os autores ainda afirmam que, ao considerar o contexto de Geometria, os meios tecnológicos mais utilizados, além do computador, são os softwares matemáticos, com destaque específico para o GeoGebra. Assim, apresentam-se, a seguir, pesquisas que tratam das TD nos LD com foco na Geometria.

Em uma pesquisa com uma coleção dos Anos Finais aprovada no PNLD 2014, Prampolim e Amaral-Schio (2018) analisaram uma dentre as que tiveram seus OED aprovados. Esse foi o primeiro PNLD que trazia a inclusão dos OED como parte complementar dos livros impressos, ou seja, não obrigatória, sendo que das dez coleções aprovadas, três abarcavam o complemento requerido<sup>7</sup>. A partir da coleção analisada, foi possível concluir que a abordagem dos OED variou entre alguns que já demandavam que o professor tivesse desenvolvido previamente determinados conceitos, e outros que utilizavam os objetos para introduzi-los. As autoras também ressaltaram a necessidade de haver uma maior integração entre os OED e os LD para que não

---

<sup>7</sup> Para esse edital, poderia haver a submissão de dois tipos de coleções: conjunto de livros impressos e conjunto de livros impressos acompanhados de conteúdos multimídias (BRASIL, 2011). Portanto, as outras sete coleções estão dentro do primeiro tipo citado.

apareçam similares a uma ‘etiqueta’ nos livros, pontuando a importância de que estes deveriam, também, conter orientações de uso para professores e alunos.

Analisando uma outra coleção aprovada pelo PNLD 2014, das três que incluíam OED, além do Guia, Amaral-Schio e Ribeiro (2018) concluíram que os objetos inseridos nos LD, quase que exclusivamente, sustentaram-se numa visão tradicional de ensino, ou seja, de forma transmissiva, tendo resumido o papel do aluno a ver, ouvir ou clicar em algo para obter uma resposta.

Realizando uma pesquisa com as três coleções aprovadas pelo PNLD 2014 com os OED, Balbino (2016) expôs que nenhum dos 16 objetos abarcados nas coleções apresentava orientações para o seu uso pedagógico, mesmo sendo este um dos critérios do PNLD. Com relação à articulação com os conteúdos desenvolvidos, os OED ora apareciam no início, podendo ser usados como problema desafiador, ora no final, como atividade complementar. A autora também pontuou a quantidade de OED que possibilitava a simulação, ou seja, a exploração de fenômenos inéditos, incentivando a busca de novos conhecimentos, permitindo a visualização de resultados, até então desconhecidos, a partir de sua manipulação. Nesse tópico, Balbino constatou que sete possibilitavam a simulação. Além disso, destaca-se que uma das coleções analisadas pela autora indicava o uso do software GeoGebra para o professor, ainda que não trouxesse atividades que o utilizassem.

Ainda nesse mesmo PNLD, Souza (2016) analisou 13 dos 16 OED (o equivalente a duas coleções). Destaca-se, em sua análise, a relação aluno-OED-tarefa, a qual foi dividida em quatro níveis. O primeiro nível baseia-se no fato de que aquilo que é proposto pelo objeto já era ou pode ser feito sem o uso do computador, o que não ocorreu em nenhum caso. O segundo é quando o OED melhora a eficiência das tarefas<sup>8</sup> ou mesmo supre a eventual falta de algum material, o que ocorreu em sete dos 13. O terceiro nível refere-se aos OED que permitem aos estudantes investigarem e estabelecerem conjecturas, ocorrendo em três objetos. E, finalmente, o quarto nível é quando o OED coloca os alunos diante de problemas desafiadores, o que ocorre, também, três vezes.

Analisando uma coleção também aprovada pelo PNLD 2014, mas que não contemplou os OED, Alberti (2016) questionou a ausência de atividades envolvendo

---

<sup>8</sup> Isto é, o OED informatiza os processos de ensino já existentes, que são do tipo tutorial, fornecendo informações sequenciais para o estudante seguir e fazer no computador.

outras tecnologias no LD, além da calculadora. Além disso, a autora também contestou a ausência de discussão sobre o uso dessa tecnologia e como o professor pode inseri-la em suas aulas, relegando o uso às propostas mecânicas. Ao final de cada um dos quatro livros, há uma apresentação de dicas de sites e softwares matemáticos, mas os mesmos deixam a desejar na integração desses recursos durante os capítulos dos LD. Esses poderiam mediar os processos de ensino e de aprendizagem, sendo abordados de acordo com a apresentação dos assuntos.

Em consonância, mas referente ao PNLD seguinte, destinado aos Anos Finais do Ensino Fundamental, Goulart, Silva e Pereira (2019) realizaram um estudo com a coleção mais escolhida no PNLD 2017, buscando a presença de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC. Na análise, as autoras dividiram as atividades encontradas em três grupos: tendo as TDIC como contexto, ou seja, que exigem a interpretação dos alunos (e não o uso delas); que têm indicações de tais tecnologias restritamente no manual do professor; e que propõem o uso efetivo das TDIC por parte dos alunos, mostrando como a maior quantidade de atividades é restrita ao Manual do Professor – MP. Chama a atenção que nessa última categoria, que propõem o uso das TDIC pelos alunos, são encontradas sete atividades no 6º ano, cinco no 8º, apenas uma no 9º e nenhuma no 7º ano, totalizando 13 atividades na coleção como um todo. Além disso, todas essas 13 são com o uso de calculadora, na abordagem do conteúdo de Números e Operações. Isso significa que, na abordagem de Geometria, não havia nenhuma atividade proposta para que os alunos realizassem utilizando as tecnologias. Sobre essas 13 atividades, elas ainda concluem que:

[...] é bastante evidente que os gêneros que mais aparecem na coleção analisada [...] são atividades que são pouco ousadas, no sentido de utilizar as TDIC no desenvolvimento do potencial criativo, crítico e produtivo dos alunos, e tão pouco uma clara mudança na percepção de que o aluno deve ter centralidade na sua aprendizagem (GOULART; SILVA; PEREIRA, 2019, p. 9).

Ainda com relação aos livros aprovados pelo PNLD 2017, Santos e Guimarães (2021) identificam todas as TD que são citadas nos LD do 6º ano de três coleções. Foram encontradas 155 abordagens a partir do uso de TD, sendo 47 em um, 50 em outro, e 58 no último livro. Dessas, 90 são abordagens com o uso da calculadora (o equivalente a quase 60%), que aparece nos LD com o objetivo de auxiliar nos cálculos e operações matemáticas. Os autores acreditam que essa quantidade mais abrangente é por conta da calculadora ser um recurso presente há muito tempo na sociedade e de

baixo custo. Ademais, há a sugestão de atividades utilizando/citando<sup>9</sup> *tablets*, celular, internet, computador, TV, urna eletrônica, relógio digital, balança digital/eletrônica, entre outros. Os autores apontam que isso pode ter ocorrido pelo fato de serem tecnologias comuns ao dia a dia dos alunos.

Também, analisando três coleções aprovadas pelo mesmo Edital, Barreto (2019) busca quais os ‘recursos tecnológicos’ mais presentes nessas. Para o autor, a primeira coleção explora bem o uso da calculadora e indica pesquisas na internet, ou seja, apresentando tecnologias, mas principalmente como forma de contexto do que está sendo abordado. As indicações de softwares são restritas ao MP e não há uma descrição de como utilizá-los ou comentários sobre suas características. A segunda coleção é a que traz menos sugestões quanto ao uso dos recursos digitais, sendo novamente a calculadora o mais recorrente. Destaca-se a sugestão do uso de softwares, predominantemente o GeoGebra, em variados assuntos, mas também restrito ao MP, sem uma descrição de como empregá-lo. Na última coleção, além da calculadora, também há a exploração de planilhas eletrônicas, abordagem trazida no Livro do Estudante – LE, porém, já não há sugestão do uso de demais TD no MP como nas demais coleções. Sendo assim, o autor conclui que a calculadora é o recurso mais presente nos LD analisados e que os softwares não são aprofundados no LE.

Agora, com relação aos LD do Ensino Médio, sendo que cada coleção possui três livros, Brito *et al.* (2020) realizaram uma pesquisa pela procura de atividades com o uso das TD em uma coleção aprovada pelo PNLD 2015. Grande parte das atividades encontradas, da mesma forma que as pesquisas realizadas nos LD dos Anos Finais, ateu-se a propostas com calculadora. Em contrapartida, também foram identificadas atividades que possuíam o software LibreOffice (duas) e o GeoGebra (seis) em suas abordagens nos três livros, sendo o SGD presente sempre com o objetivo de construir gráficos de funções. Os autores ainda apontaram a existência de falhas na Matriz de Referência do Ensino Médio<sup>10</sup>, pois não existiam ‘competências e habilidades’ que abrangessem as TD. Além disso, afirmaram que a inserção das tecnologias nos LD ocorria num processo lento, já que desde 2012 o PNLD vinha explicitando as possibilidades de se utilizar a abordagem de TD nos livros.

---

<sup>9</sup> Não fica claro, pelos autores, o que eles consideraram para esses valores de frequência absoluta, se a atividade usava propriamente as TD ou se apenas as citava. Ao que se entende pela análise dos trechos dos LD expostos, acredita-se que ambos são considerados.

<sup>10</sup> O PNLD do Ensino Médio agora não segue mais essa Matriz de Referência.

Ainda no que tange ao PNLD 2015, Reis *et al.* (2021) analisaram todas as sete coleções que foram aprovadas neste Edital, mas com foco no conteúdo de funções. Mais uma vez, de forma unânime, é possível perceber a presença da calculadora em todas as coleções e, em cinco, a presença do uso de softwares livres<sup>11</sup>, o que inclui o GeoGebra (em três). Dentro deste último caso, os autores ressaltam diferentes abordagens. Para, eles, uma coleção explora bem o uso do software, inclusive ensinando como os alunos podem utilizá-lo; em outro caso é empregado de maneira básica e superficial, com o oferecimento de atividades restritas com o uso desse SGD; e, por fim, com a exploração de gráficos na mesma coleção apontada que da pesquisa anterior. Dessa maneira, os autores concluem que, de certa forma, todas as coleções buscaram a inclusão das TDIC, seja com calculadoras ou softwares, entretanto, a descrição desses é superficial, no geral, carecendo de uma abordagem mais aprofundada.

Ainda no PNLD 2015, Santos (2016) analisa cinco coleções na área de Estatística e Probabilidade. Destas, uma não apresenta o uso de recursos tecnológicos para os alunos, apenas no MP; outra utiliza planilhas eletrônicas em sua abordagem, mas não estimula o emprego da calculadora ou de softwares livres; na terceira não há ênfase nos ‘recursos tecnológicos’, nem na calculadora; na outra, falta menção a estes recursos ao longo dos capítulos; e, por último, uma coleção se destaca por sugerir diferentes softwares, além de estimular o emprego da calculadora científica.

Agora com o foco na Geometria, Amaral-Schio (2018) analisa cinco coleções desse mesmo PNLD de 2015 para o Ensino Médio. A autora mostra como a presença das TD, para esse conteúdo, está muito aquém do que os documentos oficiais vêm recomendando. Além disso, resalta que são raras as atividades que utilizam as potencialidades das tecnologias, pois a maioria se limita à realização e conferência de cálculos, também através da calculadora.

Olhando para o PNLD 2018, o seguinte para o Ensino Médio, Silva, Reis e Rodighero (2019) analisaram o volume I de sete das oito coleções aprovadas na busca de ‘recursos tecnológicos’. Todas elas traziam o uso da calculadora científica; em seis, a planilha eletrônica; e em quatro, o GeoGebra. Além disso, também havia abordagens utilizando os recursos do Winplot (aplicativo que permite a plotagem de curvas e superfícies), internet, microscópio, software de construções gráficas e de um software

---

<sup>11</sup> Um software livre é “qualquer programa gratuito de computador cujo código-fonte deve ser disponibilizado para permitir o uso, o estudo, a cópia e a redistribuição” (DANTE, 2018a, p. XXXI).

de geometria interativa. Os autores concluíram que, apesar de terem encontrado um número, para eles, satisfatório de recursos tecnológicos nos LD, nem todas as coleções apresentavam uma definição da tecnologia que estava sendo sugerida, bem como um roteiro ou orientações para o uso devido de tais recursos. Outras vezes, esses estavam desvinculados do assunto abordado.

Nesse sentido, percebe-se que, paulatinamente, as TD têm adentrado aos LD, o que alcança, também, a Geometria. Entretanto, ao mesmo tempo, a literatura aponta a não utilização das potencialidades que essas tecnologias podem proporcionar, muitas vezes limitando a abordagem às calculadoras e, quando tratados outros softwares como o GeoGebra, por exemplo, estes estão mais restritos ao MP. É possível perceber, além disso, que há um número maior de pesquisas envolvendo o PNLD 2014, talvez pela novidade da inserção dos OED, e, de maneira mais tímida, dos Programas seguintes, não sendo encontradas pesquisas referentes ao ano de 2020. O número de pesquisas se reduz ainda mais ao considerar um olhar voltado às TD relacionadas com a Geometria, desde 2014.

Dessa maneira, com o foco na tríade do Livro Didático, Geometria e Tecnologias Digitais, entende-se que há espaço para essa pesquisa buscando reflexões que vão ao encontro daquilo que a abordagem tecnológica, especificamente o SGD, dos livros tem oportunizado aos professores, como, também, aos alunos.

Faz-se pertinente, então, olhar exclusivamente para o PNLD 2020 e como esse, seguindo as diretrizes da BNCC, trata a questão das TD, uma vez que se refere ao contexto no qual esta pesquisa está inserida.

## 2.4 O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA NO CONTEXTO DO PNLD 2020

O PNLD 2020, trazendo livros que foram escritos e publicados em 2018, é o primeiro que apresenta a obrigatoriedade de contemplação das competências e habilidades da BNCC (BRASIL, 2018)<sup>12</sup>. O Edital de tal Programa<sup>13</sup>, em vários

---

<sup>12</sup> A primeira versão da BNCC foi promulgada em 2017. Aqui, usa-se a referência mais recente, da última versão, de 2018. Pelas próprias datas, é possível perceber que as editoras foram se adequando às exigências da BNCC enquanto o Edital do PNLD 2020 era publicado.

<sup>13</sup> O Edital do PNLD 2020, publicado pela primeira vez no Diário Oficial da União em março de 2018, teve algumas retificações, sendo que a referência utilizada nessa pesquisa é do último publicado, já em

momentos, cita a Base ao se referir sobre critérios eliminatórios dos materiais, sejam eles critérios gerais ou específicos, sendo o primeiro critério de avaliação o seguinte:

A avaliação objetiva sobretudo garantir que os materiais contribuam para o desenvolvimento das competências e habilidades envolvidas no processo de aprendizagem nos anos finais do ensino fundamental, conforme definidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2020, p. 37).

Primeiramente, nos critérios gerais de eliminação, o Edital explicita que obras que não obedecerem à resolução que institui e orienta a implementação de diversas diretrizes nacionais, dentre elas, a BNCC, serão excluídas. Mais à frente, apresenta-se a questão da coerência e adequação da abordagem teórica-metodológica, trazendo que serão excluídas obras que não apresentarem uma “abordagem metodológica capaz de contribuir para o alcance dos objetos de conhecimento e respectivas habilidades explanados pela BNCC [...]” (BRASIL, 2020, p. 39).

Em seguida, nos critérios específicos de eliminação, é trazido que as obras disciplinares e interdisciplinares têm como preceito de avaliação a consistência e a coerência entre os conteúdos, atividades propostas e os objetos de conhecimento e habilidades presentes na BNCC, bem como a necessidade de que todos os objetos de conhecimentos e habilidades da Base estejam contemplados em tais obras (BRASIL, 2020).

Como descrito, então, é afirmado que os LD que não se adequarem à Base, não serão aprovados. Dessa maneira, é relevante um olhar específico para a BNCC e, principalmente, ao que ela traz sobre o uso de TD.

Dando foco à área da Matemática e suas tecnologias, encontra-se na Base oito competências específicas para o Ensino Fundamental. A competência de número 5 enfoca a importância das TD: “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267).

Focando ainda mais nas habilidades, agora considerando apenas os Anos Finais do Ensino Fundamental, é possível perceber que 11 das 121 habilidades na área da Matemática (34 para o 6º ano, 37 para o 7º, 27 para o 8º e 23 para o 9º) se referem explicitamente sobre o uso das TD. São elas:

---

2020. Isso se deu porque o próprio site do PNLD não disponibiliza o 1º Edital referido, apenas o último, chamado de Edital consolidado.

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, **com e sem uso de softwares de geometria dinâmica**.

(EF08MA04) Resolver e elaborar situações problema, envolvendo cálculo de porcentagens, **incluindo o uso de tecnologias digitais**.

(EF08MA09) Resolver e elaborar, **com e sem o uso de tecnologias**, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo  $ax^2 = b$ .

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, **fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica**.

(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, **utilizando** régua e compasso, como **também softwares**. (BRASIL, 2018, p. 303, 309, 313, 315, 317, 319, grifo nosso).

A partir da leitura de tais habilidades, é possível perceber que das 11, seis (EF06MA21, EF06MA22, EF07MA21, EF08MA15, EF08MA18 e EF09MA05) trazem uma sugestão do uso de TD, com o uso da palavra ‘ou’ e ‘preferencialmente’, como sublinhado no texto para auxiliar nessa percepção. Já as outras cinco (EF07MA23, EF08MA04, EF08MA09, EF09MA11 e EF09MA15) possuem um tom de obrigação para que os LD abordem os respectivos objetos do conhecimento a partir das TD, como é visto nos trechos em negrito.

Mesmo desconsiderando as habilidades EF08MA04 e EF08MA09 por não se tratarem de Geometria (referem-se a unidade temática Números e Álgebra, respectivamente), ainda assim, é possível perceber que, pela BNCC, é exigido dos autores que apresentem atividades com o uso de SGD em suas obras em Geometria, a partir das habilidades EF07MA23, EF09MA11 e EF09MA15.

O uso das TD é indicado explicitamente na BNCC, entretanto, a maneira como isso deve ser realizado não fica clara, dando margem a uma presença apenas como meio de ter suas obras aprovadas, sem uma reflexão sobre tal aparição. Dessa forma, caracterizar essa inserção nos LD e entender o papel que elas têm desempenhado é importante na busca por compreender de que forma esse processo é proposto no material didático.

Deste modo, finaliza-se esse capítulo que apresentou um panorama do que as pesquisas indicam sobre a trajetória das TD nos LD. Tendo como foco a Geometria, tal percurso foi feito a partir dos editais do PNLD, encerrando com o PNLD 2020, referência das fontes de dados desta pesquisa. Na sequência, o referencial teórico será apresentado.

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse capítulo será apresentado o referencial teórico que embasou esta dissertação. Parte-se da concepção de que as atividades com o uso de um Software de Geometria Dinâmica se dividem em duas frentes: **construção e visualização** (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020; BORBA; VILLARREAL, 2005), sendo ambas primordiais no processo para a compreensão matemática. Mas, compreender o que cada uma dessas frentes significa e a maneira como são apresentadas é essencial para a elaboração de atividades que utilizam as potencialidades que o SGD pode oferecer aos seus usuários. Tais questões serão discutidas a seguir.

#### 3.1 A CONSTRUÇÃO NA PERSPECTIVA DA GEOMETRIA DINÂMICA

O termo Geometria Dinâmica – GD – foi utilizado pela primeira vez por Nick Jackiw e Steve Rasmussen para diferenciar softwares de Geometria e logo adentrou na literatura para caracterizar o recurso da transformação contínua em tempo real chamado de ‘arrastar’ (GOLDENBERG; CUOCO, 1998). Porém, entende-se que tal Geometria não é possível somente com softwares, como cunhado inicialmente, uma vez que a GD é compreendida como o estudo de figuras em movimento ou deformáveis, podendo ser tais figuras feitas com variados recursos, sejam eles computacionais ou mais convencionais (BAIRRAL; BARREIRA, 2017). Sendo assim, na perspectiva da GD, é possível focalizar nos estudos realizados na abordagem a partir do SGD, nos quais as figuras geométricas são construídas em um cenário virtual de interações síncronas.

Com a possibilidade de deformação de um objeto geométrico<sup>14</sup>, à medida que um elemento de tal objeto é movido no SGD, é possível observar outros elementos respondendo dinamicamente às condições alteradas. Dessa forma, o dinamismo pode ser conferido às possibilidades em poder utilizar, movimentar, fazer relações, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo delinear novos caminhos de investigação (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

Em vista disso, esse dinamismo adquirido concebe ao SGD algumas distinções importantes. Com relação à frente da construção, por exemplo, na perspectiva da GD, há uma diferenciação importante entre desenho e construção. O primeiro relaciona-se

---

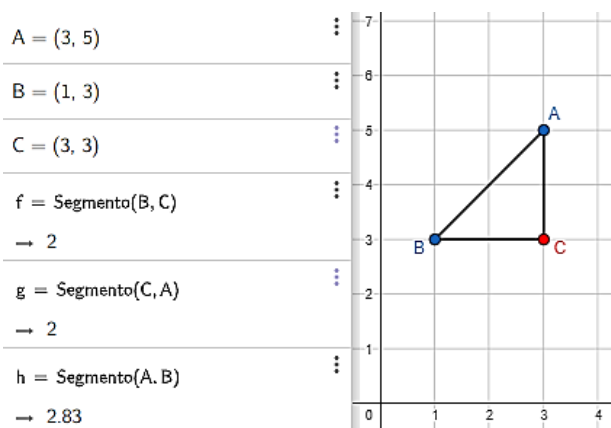
<sup>14</sup> Figuras, objetos geométricos e figuras geométricas são usadas como sinônimos nessa pesquisa.

com a não resistência à prova do arrastar, ou seja, se uma figura é arrastada e essa não mantém suas propriedades fundamentais, a figura é apenas um desenho (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020), como uma fotografia de um objeto geométrico.

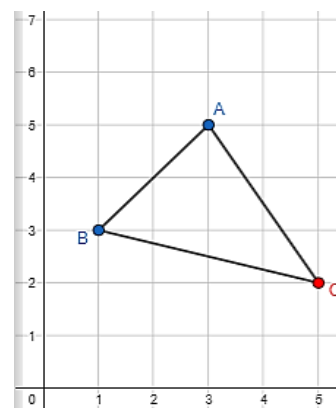
Ao mesmo tempo, segundo Laborde (1998), a construção é a criação de figuras geométricas que sempre preservam suas propriedades fundamentais, mesmo quando é arrastado algum de seus elementos – aqueles que são possíveis<sup>15</sup>, como um ponto ou uma reta. Neste caso é dito que a construção resiste à prova do arrastar.

Para a compreensão mais adequada dessa diferenciação, apresenta-se a imagem de um triângulo isósceles que foi criada de duas maneiras distintas no GeoGebra, como é mostrado a seguir. Na Figura 1a, pode-se perceber um triângulo isósceles criado a partir dos eixos cartesianos e a malha principal, ambos evidenciados pelo próprio software. Dessa maneira, ao ser arrastado um dos vértices (nesse caso, o C) desse triângulo (Figura 1b), pode-se perceber que ele se torna um triângulo escaleno e algumas de suas propriedades, então, mudam. Nesta situação, é possível dizer que esse é um desenho de um triângulo isósceles, pois não resistiu à prova do arrastar.

**Figura 1a** - Desenho de um triângulo isósceles



**Figura 1b** - Triângulo escaleno, formado após movimentar o vértice C



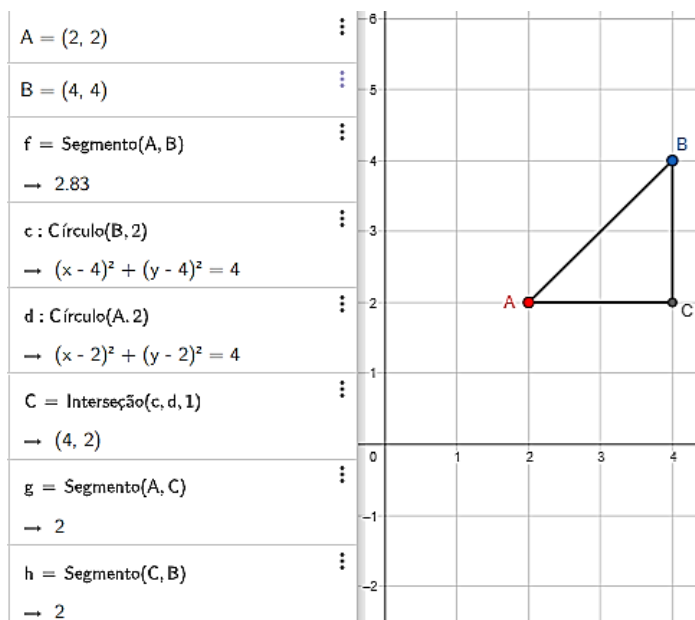
Fonte: Elaborado pela autora. Desenho feito no software GeoGebra (2022).

Ao considerar a Figura 2a apresentada a seguir, vê-se a construção de um triângulo isósceles a partir de circunferências que foram escondidas a fim de facilitar o processo de observação do objeto final. Da maneira como o triângulo foi construído, é possível perceber que ao arrastar um de seus vértices (nesse caso, o A, como

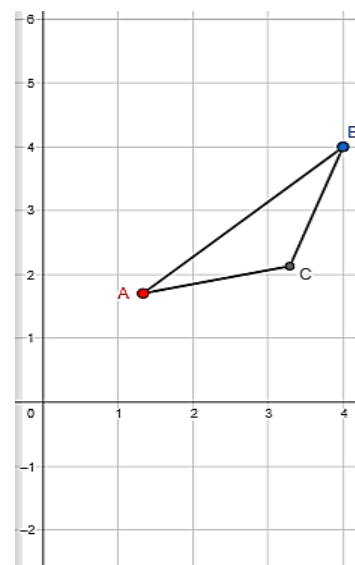
<sup>15</sup> Dependendo do modo como uma figura é construída, alguns elementos não são possíveis de serem arrastados por dependerem de outros construídos previamente. Por isso, nem todos os elementos de uma figura são móveis em um SGD. Exemplo disso aparece na Figura 2a, onde o vértice C, em cinza, não pode ser arrastado, pois sua construção advém da intersecção da circunferência centrada em A com raio 2 com a circunferência centrada em B de raio 2.

apresentado na Figura 2b) de forma que os três pontos não sejam colineares, ele ainda continua sendo um triângulo isósceles e, assim, suas propriedades fundamentais são mantidas.

**Figura 2a - Construção de um triângulo isósceles**



**Figura 2b - Triângulo isósceles após mover o vértice A**



Fonte: Elaborado pela autora. Construído no software GeoGebra (2022).

Considerando que esta pesquisa está no paradigma da GD, em que o movimento é inerente aos processos que a envolvem, compreende-se que a construção é essencial para que as atividades com o uso de um SGD busquem construir cenários que possam permitir que a investigação matemática aconteça (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020), incentivando os alunos no processo de compreensão das propriedades que as próprias figuras geométricas apresentam e, conseqüentemente, no aprendizado.

Além de manter as propriedades de um objeto geométrico, Laborde (1998) também explora a importância da construção para os estudantes perceberem a relação entre os elementos de um objeto geométrico. Essa percepção é possível por meio do feedback visual, qualitativamente diferente da tecnologia de lápis e papel.

No segundo exemplo exibido (Figuras 2a e 2b), é possível perceber a relação que arrastar um dos vértices causa na medida dos lados e dos ângulos desse triângulo, e poderia ser ainda mais visível caso fossem utilizadas as funções pré-definidas<sup>16</sup> do

<sup>16</sup> O GeoGebra traz uma barra de ferramentas com funções pré-definidas, como reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, entre outros. Dessa maneira, a construção de tal objeto geométrico é feita pelo software, que já tem a função programada para tal.

software para mostrar as medidas dessas construções citadas. Como é mostrado um triângulo isósceles na Figura 2a, por meio do SGD, seria possível perceber que os ângulos da base, por exemplo, são alterados ao mover um dos vértices, entretanto, continuam sendo congruentes entre si, sendo que o mesmo poderia ser feito com os lados opostos a esses ângulos.

Em sua pesquisa, Laborde (1998), ao trabalhar com estudantes que fazem uma atividade com lápis e papel e, também, com o SGD, conclui que esse movimentar, junto com o feedback visual instantâneo, pode fazer com que eles percebam a relação entre a teoria e a parte gráfica mais facilmente, mesmo que o software possa trazer complexidade às atividades propostas.

Essa ideia de movimento será mais explorada conjuntamente com a visualização, já que, com base no dinamismo explorado a partir da construção de figuras geométricas, abre-se a possibilidade para manipulação<sup>17</sup> e visualização dos objetos, como apresentado no início dessa seção. Sendo assim, será discutido o processo de visualização e movimento a seguir.

### 3.2 A IMPORTÂNCIA DA VISUALIZAÇÃO NO PROCESSO DE COMPREENSÃO MATEMÁTICA

Há uma discussão bem extensa, tanto na área da Matemática quanto da Educação Matemática, sobre a importância da visualização no processo de compreensão matemática. Borba e Villarreal (2005) trazem um debate em torno do assunto em um capítulo sobre concepções acerca da visualização, bem como suas implicações e seus desdobramentos.

Os autores apontam uma grande resistência em reconhecer o status do raciocínio visual na pesquisa em Matemática, entendido como o processo de expressar informações visuais como relações matemáticas, pois a supremacia do rigor de provas formais persiste em muitas publicações, ao mesmo tempo que reconhecem que as TD, como um software matemático, têm papel primordial no processo de visualização, uma vez que esse parece ser o principal meio de feedback fornecido por computadores (BORBA; VILLARREAL, 2005).

---

<sup>17</sup> Nesta pesquisa, manipulação está intimamente associada com a ideia do arrastar.

Na Matemática, muitos autores reconhecem a importância da visualização, mas apenas como meio para atingir um estágio de abstração, restringindo suas possibilidades de utilização. Dessa forma, essa limitação acaba diminuindo a importância do processo que a visualização possui na busca pela compreensão matemática. Entretanto, Borba e Villarreal (2005, p. 90) pontuam que

[...] mesmo com a introdução de computadores no ensino de matemática e contextos de aprendizagem atribuindo um novo papel à visualização em educação matemática, a dicotomia visual/simbólica e a supremacia do rigor [...] ainda persistem em muitas publicações.

Tal relutância dos matemáticos nasce, principalmente, pela preocupação associada à prova matemática e ao rigor que esta possui e, dessa maneira, conseqüentemente, surge um certo estranhamento dos mesmos com o uso das TD na Educação Matemática. Além disso, esse estranhamento também está associado com a mudança da própria natureza do “fazer matemática”, antes trabalhado apenas com a tecnologia papel e lápis pelos estudantes. Apesar disso, é acordado, entre os educadores matemáticos, que existe um valor pedagógico da visualização no ensino e na aprendizagem de Matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005). Nesse sentido, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 59) trazem, então, uma ideia importante:

[a visualização] envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática.

Neste sentido, pode-se perceber que, apesar da visualização, para alguns matemáticos, ter uma importância menor no processo da produção matemática não deve ser assim considerado, uma vez que ela tem grande importância no processo de compreensão matemática, como defendido por Borba e Villarreal (2005), pois

- A visualização constitui uma forma alternativa de acessar o conhecimento matemático.
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e a representação visual pode transformar a compreensão nela mesmo.
- A visualização é parte da atividade matemática e uma forma de resolver problemas.
- Tecnologias com interfaces visuais poderosas estão presentes nas escolas, e seu uso para ensino e aprendizagem de matemática requer compreensão de processos visuais.
- Se o próprio conteúdo da matemática pode mudar devido aos computadores, como proposto por alguns matemáticos, é claro, neste ponto,

que a matemática nas escolas passará por pelo menos algum tipo de mudança.

- Embora a prova seja vista como o caminho oficial para a verdade no meio acadêmico matemático, não deve necessariamente ser transposta para a matemática da sala de aula em todos os níveis escolares (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 96, tradução nossa).

Associado a esses motivos, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) defendem que, ao serem elaboradas atividades matemáticas baseadas no uso de tecnologias, em particular os SGD, essas devem explorar o aspecto visual, já que o feedback visual que essas plataformas proporcionam é quase instantâneo. Tal feedback propicia uma interpretação por parte dos estudantes e, por isso, a visualização tem um papel crucial na GD (LABORDE, 1998).

Zimmermann e Cunningham (1991) abordam a visualização como o processo de formar imagens com um objetivo. Não é apenas a criação ou um mero olhar dessas imagens, mas sim, criá-las e usá-las para que gerem descoberta ou entendimento matemático. É uma visualização que requer um papel ativo por parte daquele que visualiza. De acordo com os autores, essa formação de imagens pode ser mental, com lápis e papel ou com TD. Baseando-se, também, nesses autores, Mazzi (2014) defende que a visualização tem papel importante nos processos de ensino e de aprendizagem, possibilitando compreensões e interpretações de conceitos matemáticos que eram, até então, abstratos, fornecendo novos significados aos mesmos.

Nessa perspectiva, é importante que, após a construção de algum objeto geométrico, tenha-se um objetivo para visualizar tal construção, seja levantando hipóteses, convencendo-se de alguma propriedade ou para confirmar ideias já levantadas anteriormente. Essa interação com o objeto criado faz-se necessária.

Nesse caminho, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) argumentam que a manipulação, atrelada à visualização, oportuniza caminhos para que seja possível perceber a existência das relações de dependência entre objetos geométricos, ao encontro do que defendia Laborde (1998) há anos.

Essa manipulação à qual eles se referem incorpora a ideia do arrastar que o software proporciona, considerando que visualização e movimento estão interligados. À medida que, por meio dessa manipulação, há essa exploração, a visualização ocorre, já que o primeiro oferece meios para que conexões possam acontecer, processo essencial pela definição de visualização que foi adotada. É uma perspectiva na qual a visualização possibilita novas compreensões matemáticas e, conseqüentemente, a aprendizagem

matemática. Zimmermann e Cunningham (1991, p. 4) resumem as ideias apresentadas trazendo que

Visualização matemática não é uma ‘apreciação matemática de imagens’. A intuição que a visualização matemática requer não é um tipo vago de intuição, um substituto superficial para a compreensão, porém o tipo de intuição que penetra o âmago de uma ideia. Isso dá profundidade e significado à compreensão, serve com um guia confiável para a resolução de problemas e inspira descobertas criativas.

Esta pesquisa considera, então, o processo da visualização como primordial na busca pela compreensão matemática e, tratando-se da ideia de manipulação, intimamente ligada à visualização, aponta-se para a importância da experimentação em atividades matemáticas, a qual será discutida a seguir.

### 3.3 A IMPORTÂNCIA DA EXPERIMENTAÇÃO ASSOCIADA ÀS TECNOLOGIAS DIGITAIS

De acordo com Borba e Villarreal (2005, p. 65), um experimento é “realizado para descobrir algo desconhecido, para verificar a verdade de uma hipótese a fim de aceitá-la ou rejeitá-la ou para fornecer exemplos (ilustrar) de uma verdade conhecida [...]”. A ideia do experimento de descobrir algo desconhecido associa-se com a ideia da descoberta matemática.

Essa ideia é primordial na produção de sentidos matemáticos, como apontam Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 58), ao expressar que “a descoberta de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) propulsiona a produção de sentidos matemáticos”. Dessa maneira, há uma dimensão ‘empírica’ que envolve tanto o pensamento, quanto a aprendizagem matemática.

Nesse processo da dimensão ‘empírica’ para a ocorrência da aprendizagem matemática, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) argumentam que os recursos tecnológicos digitais se tornaram protagonistas por esse caráter predominantemente experimental e visual que possuem. Sendo assim, pode-se perceber a importância que a dimensão experimental, além da visual (já abordada), ganha no tratamento do SGD.

Hanna (2000, p. 19, tradução nossa) sustenta que “o software de geometria dinâmica pode ser usado para aprimorar o papel da heurística, exploração e visualização em sala de aula”. A questão que fica é que isso levanta um problema: “como essas

abordagens podem ser melhor integradas ao currículo de matemática como um todo e como podem ser usadas da melhor forma para promover a compreensão?” (HANNA, 2000, p. 19, tradução nossa). Esse questionamento levantado por Hanna (2000) mostra-se extremamente pertinente para a busca da compreensão dessa integração entre a visualização, a exploração e a compreensão matemática nas atividades com o uso do SGD.

Um problema levantado ao defender a necessidade da exploração em atividades matemáticas é que, ao considerarmos uma exploração por parte dos alunos, existe uma tendência para, após a realização de alguns casos, e não encontrando contraexemplos, entenderem uma conjectura como verdadeira sem o processo da justificativa (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019), processo este facilitado pelo uso do SGD, pelo seu dinamismo já apontado.

Seguindo dessa forma, a necessidade da busca de uma justificativa seria minimizada ou, até mesmo, anulada. Quanto a isso, Hanna (2000) esclarece que a exploração matemática fundamenta a prova, pois só se prova aquilo que já se foi convencido ser verdade, mas não a substitui. A autora complementa e conclui:

[...] embora explorar e provar sejam atividades distintas, elas se complementam e se reforçam. Não apenas fazem parte da resolução de problemas em geral, mas também são necessários para o sucesso em matemática em particular. A exploração leva à descoberta, enquanto a prova é a confirmação (HANNA, 2000, p. 14, tradução nossa).

Ao se considerar a exploração por parte dos alunos, é possível acreditar que esses possam conjecturar, ou seja, abstrair de um conjunto de observações, o fato geral comum a essas observações que, por se repetir, é possivelmente verdade. Dessa maneira, uma conjectura testada várias vezes, não encontrando um exemplo que a tornaria inválida, poderia transformar-se em uma conclusão, o que pode levar a enxergar o SGD como um entrave para a experimentação-com-tecnologias. Entretanto, é necessário instigar os alunos a justificarem suas conjecturas para evitar que as demonstrações sejam esquecidas ou mesmo tenham sua importância diminuída, sendo que esse incentivo é um papel que as atividades com o uso do SGD podem ter (ZULATTO, 2002).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) apontam como é importante, também, o professor combater essa maneira de encarar os testes de conjecturas, sendo relevante que os professores de Matemática sejam alertados para isso, a fim de se prepararem para tal combate. Os autores ainda advertem como, por vezes, são as próprias atividades que

sugerem vulgarmente que os alunos intitulem as suas conjecturas como conclusões, sem passarem por um processo de justificação, por meio dos termos que utilizam.

Ao considerar que os LD são instrumentos nas mãos dos professores e que aqueles fornecem atividades, um dos caminhos possíveis para o alerta necessário aos professores de Matemática é por meio dos LD. Dessa maneira, é essencial que tais atividades não sugiram o que foi citado acima, como salientam Ponte, Brocardo e Oliveira (2019).

Ainda, como, a partir da experimentação, pode haver uma tendência de que as demonstrações sejam deixadas em segundo plano, é possível perceber porque a experimentação ainda é vista como uma ameaça ao desenvolvimento matemático rigoroso, como se tivesse um papel “não científico” no apoio aos resultados matemáticos, de acordo com Borba e Villarreal (2005), sendo que não deve ser vista assim na Educação Matemática, no processo de fazer matemática dos alunos. Os referidos autores trazem a ideia de que colocar isso em prática permite uma ampliação das perspectivas sobre a relação da prova matemática e a experimentação.

[...] a experimentação associada com computadores tem um papel primordial na educação matemática. [...] este ponto de vista não significa necessariamente uma rejeição da prova matemática tradicional, mas uma ampliação das perspectivas de ser considerada nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 71, tradução nossa).

Sumarizando as relações com o termo visualização e suas implicações, os autores apontam oito implicações da abordagem experimental na Educação Matemática, sendo que as três últimas referem-se especificamente à força que tal abordagem ganha com o uso das TD. São elas:

- o uso de procedimentos experimentais e testes que apoiam a geração de conjecturas matemáticas;
- a descoberta de resultados matemáticos anteriormente desconhecidos para o experimentador;
- a possibilidade de testar formas alternativas de obter um resultado;
- a chance de propor novos experimentos;
- uma maneira diferente de aprender matemática [...];
- a possibilidade de testar uma conjectura usando um grande número de exemplos e a chance de repetir os experimentos, devido ao feedback rápido fornecido por computadores;
- a chance de obter diferentes tipos de representações de uma determinada situação mais facilmente;
- uma forma de aprender matemática que é ressonante com a modelagem como uma abordagem pedagógica (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 75, 76, tradução nossa).

Se de acordo com Borba e Villarreal (2005), pode-se afirmar que as TD têm um papel primordial quanto ao uso de experimentos em Matemática, bem como em Educação Matemática, então, é fundamental que as atividades com o uso das TD levem em conta a necessidade dessa experimentação-com-tecnologia.

O termo experimentação-com-tecnologia, com o uso do hífen, é com a consciência de que as tecnologias não são neutras ao pensamento, sendo que a produção do conhecimento matemático é condicionada pela tecnologia a qual se utiliza, com uma certa interdependência entre esses dois aspectos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020), o que está de acordo com o que a pesquisadora acredita.

Sendo assim, levando em conta que, explicitamente ou não, os LD estão impregnados com as concepções de seus respectivos autores sobre Matemática, além de suas visões sobre ensino e sua aprendizagem, há de se cobrar que as atividades contidas nesses livros que consideram o uso do SGD levem em conta a experimentação-com-tecnologias.

### 3.4 A IMPORTÂNCIA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA ASSOCIADA AO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), vários estudos em Educação têm discutido que investigar tem se mostrado como uma poderosa forma de construir conhecimento. Ademais, ao considerar o cenário da GD, as possibilidades de construir, manipular e visualizar objetos geométricos virtualmente permite traçar novos caminhos de investigação.

Em termos conceituais, investigar pode ser visto como “descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019, p. 13). Os autores apontam que investigar não está associado, necessariamente, a problemas muito sofisticados, mas à formulação de questões de caráter aberto – ou seja, que não possuem uma resposta pronta, podendo ser exploradas de diversas formas e proporcionando o surgimento de novos problemas (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) – para as quais procuram-se respostas fundamentadas e rigorosas, na medida que isso for possível. Não obstante, como expressaram Baldini e Cyrino (2012, p. CLI),

Em ambientes de aprendizagem é interessante aliar a Investigação Matemática a softwares, como o GeoGebra, que pode oportunizar a criação, a manipulação, a exploração de situações, análise, a elaboração de conjecturas, a verificação de regularidades, a discussão de resultados e a generalização.

É possível perceber, então, que o ambiente criado por meio de atividades com SGD pode ser potencializado a partir da integração com a investigação matemática.

A realização de uma investigação envolve quatro momentos principais. São eles: 1. reconhecimento da situação, exploração e formulação de questões, de inquietações iniciais; 2. formulação de conjecturas; 3. realização de testes e possível refinamento das conjecturas; 4. justificação das conjecturas (demonstração) e avaliação do trabalho feito (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2019). Os autores deixam clara a possibilidade desses momentos, principalmente os três primeiros, acontecerem simultaneamente.

Dentre os quatro momentos estabelecidos por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) para a investigação matemática, chama-se a atenção para o último, a justificação de conjecturas, o qual teve sua importância discutida anteriormente. Eles argumentam que essa vertente costuma, com alguma frequência, ser deixada em segundo plano ou mesmo esquecida, principalmente em níveis de escolaridade mais elementares. Porém, com essa divisão, os autores explicitam o papel que o último momento desempenha no processo da investigação matemática, sendo essa essencial nas atividades propostas para que a investigação não seja empobrecida. Como expressou Zulatto (2002, p. 29):

Caminhar nesta direção, levantando hipóteses, fazendo explorações, testando pelo arrastar, pode ser uma alternativa para o uso de softwares de Geometria Dinâmica. Porém, para que seu uso não seja um obstáculo à demonstração, é preciso não mais enfatizar o convencimento, que é adquirido, muitas vezes, com o manuseio do software, e sim, instigar os alunos a explicarem o porquê da veracidade de suas conjecturas, evitando, assim, deixar as demonstrações esquecidas, relegadas a segundo plano.

Com essa percepção, é possível notar uma aproximação entre experimentação-com-tecnologias e investigação matemática. Além da questão da justificação, também vê-se a descoberta matemática associada a ambas, assim como observam Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), que destacam que a utilização de um SGD pode ser significativa para a aprendizagem matemática quando o cenário didático-pedagógico que envolve as atividades com o uso desses softwares abrange a complexidade do pensamento matemático, assim como o fato de que a busca por desenvolver tal complexidade é fundamental na (re)elaboração de atividades investigativas.

A ideia da (re)elaboração parte de uma categorização simplificada que Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) sugerem para indicar uma distinção entre adaptação e (re)estruturação de uma atividade, que se descreve da seguinte maneira:

- Adaptação da atividade: o objetivo da atividade, bem como a sua natureza, são preservados. São aspectos relacionados à construção que podem ser modificados, seguindo dois polos:
  - ✓ Adaptação direta: a construção não sofre mudanças significativas.
  - ✓ Adaptação aprimorada: a construção reforça o caráter experimental da atividade.
- (Re)estruturação da atividade: o objetivo da atividade é mantido, entretanto a natureza da construção não é.

Tais ideias apoiam o que se considera importante nesta pesquisa, uma vez que, com o objetivo de utilizar o SGD de acordo com suas potencialidades para a aprendizagem matemática, é requerido que atividades apresentadas pelos LD sejam adaptadas, estruturadas ou (re)estruturadas tendo em vista a experimentação-com-tecnologias e a investigação matemática, de acordo com a necessidade.

Dessa maneira, busca-se que os LD ofereçam propostas que abordem o SGD de maneira significativa, de forma que seu papel possa fomentar um ambiente para a aprendizagem matemática. Sendo assim, retoma-se a pergunta de Hanna (2000, p. 19, tradução nossa) para reflexão, que vai ao encontro daquilo que foi proposto responder nessa pesquisa: “como essas abordagens [SGD] podem ser melhor integradas ao currículo de matemática como um todo e como podem ser usadas da melhor forma para promover a compreensão?”.

Em suma, neste capítulo foram discutidas as concepções de construção e visualização na elaboração de atividades com o uso de um SGD, sendo importante que elas levem em consideração o caráter visual, de experimentação-com-tecnologias e investigação matemática em suas abordagens. Na sequência, a fundamentação metodológica e as obras analisadas serão apresentadas.

## 4 FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA E APRESENTAÇÃO DAS OBRAS

Nesse capítulo será apresentado o paradigma da pesquisa qualitativa que foi adotado, qual foi o procedimento metodológico empregado, a justificativa da escolha das coleções analisadas, bem como uma síntese com a apresentação das obras.

### 4.1 PARADIGMA DA PESQUISA QUALITATIVA

Tendo como objetivo geral caracterizar e compreender o papel que as atividades com o uso do SGD têm desempenhado em LD dos Anos Finais do Ensino Fundamental, a presente pesquisa constitui-se como qualitativa.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), em uma pesquisa qualitativa os dados são ricos em detalhes descritivos; sendo que, conforme Borba (2004, p. 2), esta “prioriza procedimentos descritivos a medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva”.

Dessa maneira, para investigar fenômenos com toda a heterogeneidade que apresentam, o pesquisador é visto como o principal agente de investigação (ALVES-MAZZOTTI, 2001) e deve, portanto, estar em contato recorrente com sua fonte de dados, fornecendo descrições detalhadas sobre aquilo que analisa, conforme Bogdan e Biklen (1994).

Bogdan e Biklen ainda estabelecem cinco características de uma pesquisa qualitativa, das quais nem todas precisam ser abrangidas. São estas:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural; [...]
2. A investigação qualitativa é descritiva; [...]
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos; [...]
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; [...]
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47-50).

Tem-se em mente que a presente pesquisa não dispõe de um ambiente natural como fonte de dados, como apresenta a primeira característica, pois esse é visto como o local de estudo do pesquisador, tal qual uma escola, por exemplo, não se aplicando, porém, a um estudo com foco único no LD. Além disso, uma vez que a ideia de significado na quinta característica está atrelada às perspectivas de participantes de um estudo, é compreendido que também não diz respeito à presente pesquisa.

Entretanto, entende-se que as outras três características são abarcadas aqui com elevado grau. Isso porque: há uma busca pela descrição detalhada dos dados (2ª) – o que dialoga com a análise documental (LUDKE; ANDRÉ, 2011); existe um interesse maior pela abordagem das atividades com o software do que pela quantidade dessas (3ª); e observam-se as atividades, buscando indutivamente características das coleções de LD (4ª).

Sendo assim, na presente pesquisa, o olhar para o LD não é apenas para verificar a presença ou a ausência das TD, ou mesmo de atividades com o uso do SGD. Mas principalmente para analisar como essa presença, quando ocorre, tem oferecido ferramentas que podem ou não potencializar a aprendizagem matemática a partir da caracterização e compreensão dos dados construídos.

Assim, fez-se um levantamento acerca da quantidade de atividades em cada livro, páginas ocupadas por elas e se havia uma quantidade satisfatória de atividades com o uso de um SGD nos LD, questionando-se, também, sobre a localização dessas dentro dos capítulos, quais têm sido seus objetivos, se oferecem perspectivas para potencializar a aprendizagem matemática, ou se têm feito o mesmo que já é feito com o uso de lápis e papel, por exemplo.

Isto posto, para alcançar os objetivos definidos para essa pesquisa qualitativa, tendo em vista que o LD é o objeto de estudo, entende-se ser pertinente realizar uma análise documental, a qual Lüdke e André (2011, p. 38) expõem que “pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos [...] desvelando aspectos novos de um tema ou problema”.

De acordo com Cellard (2008), a pesquisa fundamentada na análise documental deve buscar o máximo de informações possíveis dos materiais analisados que são capazes de fornecer elementos pertinentes, isso para que gere um *corpus* satisfatório para posterior análise. Dessa maneira, o exame minucioso faz parte do olhar adotado pela pesquisadora, sendo que esse estará voltado para o LD, o qual servirá de fonte documental (CECHINEL *et al.*, 2016).

Ainda de acordo com Cellard (2008), há uma primeira etapa para toda análise documental, buscando um olhar crítico para o documento que se pretende analisar. Essa, chamada de análise preliminar, aplica-se em cinco dimensões: a primeira, o contexto – é importante que se faça um exame do cenário no qual o material foi produzido; segundo, o(a) autor(a) ou autores(as) – tendo em vista que quem se expressa tem interesses e motivos que o levaram a escrever tais coisas; terceiro, a autenticidade e confiabilidade

do texto – não se esquecendo de verificar a procedência do documento (o que não se aplica a presente pesquisa, visto que os LD selecionados para esta investigação já foram analisados e aprovados pelo PNLD 2020); quarto, a natureza do texto – tendo em vista que cada documento é produzido e estruturado de diferentes maneiras, de acordo com o contexto no qual está inserido; e quinto, os conceitos-chave e a lógica interna do texto – avaliando sua importância e sentido. Tais dimensões, excetuando o terceiro, apoiam a análise dessa pesquisa.

A segunda e última etapa exposta por Cellard (2008) é a análise em si, a qual reúne todas as partes levantadas na preliminar, bem como o quadro teórico na busca que o pesquisador faça uma interpretação coerente, tendo em vista seus questionamentos iniciais. Processo esse apresentado na sequência deste estudo.

## 4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Buscando o máximo de informações possíveis dos LD, procurou-se entender o contexto no qual as atividades com o uso de um SGD estão inseridas, seguindo os seguintes procedimentos:

- 1) Seleção dos LD a serem analisados;
- 2) Reconhecimento dos capítulos que eram, majoritariamente, da unidade temática de Geometria;
- 3) Identificação das atividades com o uso de TD, especialmente o SGD nesses capítulos;
- 4) Percepção das orientações dadas aos professores para o uso do software e para as respectivas atividades;
- 5) Constatação da localização de tais atividades dentro dos capítulos de Geometria;
- 6) Caracterização de tais atividades de acordo com o referencial teórico adotado;
- 7) Busca pela compreensão do papel que essas atividades têm desempenhado por meio da caracterização.

Ressalta-se o segundo procedimento adotado, no uso da palavra ‘majoritariamente’. A maioria dos capítulos apresentados pelos LD aborda mais de uma unidade temática, podendo ser: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e



### 4.3 FONTE DE DADOS

Foram analisadas quatro coleções de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental das 11 que foram aprovadas no PNLD 2020, a saber:

- A Conquista da Matemática da Editora FTD (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d);
- Coleção Araribá Mais<sup>19</sup> da Editora Moderna (GAY; SILVA, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d);
- Apoeia da Editora do Brasil (LONGEN, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d);
- Teláris da Editora Ática (DANTE, 2018a; 2018b; 2018c; 2018d).

Cada coleção é constituída por quatro livros, do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, totalizando, assim, 16 livros analisados.

A seleção partiu das coleções mais escolhidas no PNLD 2020 às quais se teve acesso, com o critério de serem todas de editoras diferentes. Excetuando A Conquista da Matemática, as três outras coleções referidas aqui foram adquiridas por meio da doação de uma escola pública que não as utilizaria. A coleção A Conquista da Matemática foi adquirida pela disponibilização da própria editora por meio da internet. O interesse específico nessa última é pelo fato de ter tido quase metade de abrangência dos LD de 2020 que foram distribuídos.

Dessa maneira, dos mais de 10 milhões de LD de Matemática distribuídos em 2020, aproximadamente 70% destes são constituídos por essas quatro coleções, o que se considera uma boa representatividade das obras utilizadas nas escolas. Além disso, analisar livros de autores e editoras diferentes, potencialmente com ideias distintas entre si, enriquece a discussão levantada nesta pesquisa acerca dos papéis das atividades, como ideia de panorama. No mais, tendo em vista o tempo destinado ao mestrado, entende-se que essa era uma quantidade possível para se analisar dentro do período de dedicação à pesquisa.

Todas as 16 obras analisadas são livros do professor, de modo que as orientações contidas no MP estão dispostas em formato de U (ou seja, apresentadas nas bordas laterais e inferiores), tendo o LE na parte central, em tamanho reduzido, como pode ser visto em uma exemplificação na Figura 3, já apresentada. Apesar do exemplo específico de uma única coleção, todas as demais seguem o mesmo padrão por orientação do

---

<sup>19</sup> Nessa pesquisa, a coleção será chamada apenas de Araribá.

PNLD 2020. Nas bordas há orientações das mais diversas, especificamente para as respectivas páginas, sendo que o MP possui, também, a presença de páginas iniciais em numeração romana, ambas disponíveis somente aos professores. Acredita-se que tal numeração é uma diferenciação em relação ao LE para destacar o complemento ao material dos alunos.

#### 4.4 O CAMINHAR DA PESQUISA COM AS ATIVIDADES QUE UTILIZAM O SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Após a seleção dos LD e o reconhecimento dos capítulos de Geometria, deu-se início ao período exploratório, cujo principal objetivo foi “obter informações suficientes para orientar decisões iniciais sobre as questões relevantes e o *design* do estudo, as observações, impressões e *insights* que levaram a essas decisões” (ALVES-MAZZOTTI, 2001, p. 161). Após isso, ocorreu a etapa da investigação focalizada, concentrada na produção dos dados. De acordo com Alves-Mazzotti (2001), ambas as etapas são importantes para o desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa.

##### 4.4.1 Fase exploratória

Tendo selecionado os LD e com a definição, *a priori*, que Geometria seria o campo da pesquisa, a fase exploratória deu início ao segundo procedimento metodológico, no qual os livros foram analisados considerando a busca pelo uso de TD em todas as páginas de tais capítulos, fosse somente destinada ao professor ou em atividades ou orientações voltadas para os estudantes, havendo uma marcação em todos os locais em que isso ocorria. Isso foi ao encontro de compreender o contexto dos LD, na análise documental, como definido por Cellard (2008).

Entretanto, nessa fase, chegou-se à conclusão de que havia uma grande abrangência de TD sendo abordadas nos LD (como sites, sugestões de vídeos, jogos online, atividades com planilhas e calculadoras), mas com particular destaque para o SGD, chamando a atenção o fato de todas as coleções apresentarem seções específicas com atividades utilizando o software nos capítulos de Geometria, não ocorrendo da mesma forma com outras TD. Dessa maneira, o contorno da pesquisa passou a ser as atividades com o uso de algum SGD como foco de investigação.

A partir de tal seleção, todas as atividades com o uso de SGD foram xerocopiadas ou impressas para facilitar a visualização individual de cada uma, buscando-se semelhanças entre os objetivos pedagógicos das mesmas. Após isso, buscou-se uma unidade de análise, que é definida na “forma pela qual organizamos os dados para efeito de análise” (ALVES-MAZZOTTI, 2001, p. 169).

Para alcançar tal objetivo, todas as impressões de atividades foram cortadas, dividindo-as em segmentos. Cada pergunta ou pedido de construção era uma unidade de análise, compreendendo que haviam distintos objetivos pedagógicos. Como exemplificação para tal fato, mostra-se na Figura 4 uma atividade fragmentada em três unidades de análise, demarcadas em retângulos pretos, ou seja, com três propostas diferentes de questão.

**Figura 4** - Atividade exemplificadora com o uso de um SGD dividida em três unidades de análise preliminares

**CONSTRUA**

Siga os passos abaixo.

- 1ª) Construa uma circunferência  $c$  de centro  $O$ .
- 2ª) Marque três pontos distintos,  $A$ ,  $B$  e  $V$ , na circunferência.
- 3ª) Trace as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .
- 4ª) Trace as semirretas  $\overrightarrow{VA}$  e  $\overrightarrow{VB}$ .

$\widehat{AVB}$  é um ângulo inscrito e  $\widehat{AOB}$  é o ângulo central correspondente.

**INVESTIGUE**

Faça o que se pede usando as ferramentas do software.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) Meça os ângulos <math>\widehat{AVB}</math> e <math>\widehat{AOB}</math>. É possível perceber alguma relação entre essas medidas?</p> <p>b) Movimente os pontos móveis da construção, modificando a configuração inicial. A relação observada é válida em diferentes configurações?</p> | <p>a) Espera-se que os alunos percebam que a medida do ângulo inscrito na circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.</p> <p>b) Essa propriedade é válida independentemente da configuração apresentada.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Gay e Silva (2018d, p. 67).

As 36 atividades foram, então, divididas em três grupos: as que objetivavam a construção de algum objeto geométrico (como ilustra o primeiro retângulo); outro que exigia algum tipo de movimento do objeto no software (terceiro retângulo); e outro que não se encaixava nos dois primeiros (caso do segundo retângulo). É importante destacar que no momento da criação dessas unidades de análise e grupos, no período exploratório, a pesquisa estava na fase de construção teórica e, portanto, tal divisão se deu, aqui, por percepção da proximidade de objetivos pedagógicos dos segmentos das atividades dos LD nesses dois primeiros grupos citados.

No entanto, ao juntar todas as unidades nos respectivos grupos citados, para ter uma visão geral, percebeu-se que muitas unidades ali perdiam o sentido de serem

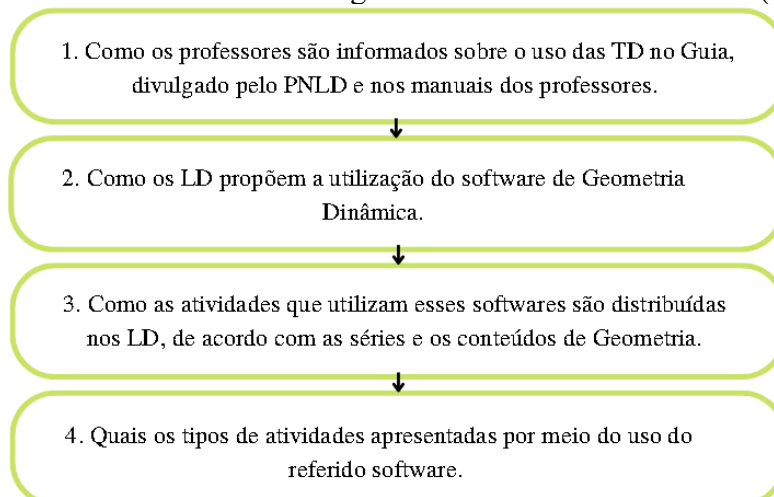
analisadas da maneira como estavam por se apresentarem descoladas da atividade original, o que apontou para o fato de que as atividades não poderiam ser analisadas sem serem consideradas como um todo. Dessa maneira, a unidade de análise passou a ser cada uma das atividades encontradas nos LD.

#### 4.4.2 Fase da investigação focalizada

Passando para a fase da investigação focalizada, ao identificar as atividades, em cada coleção com o uso de um SGD nos capítulos de Geometria, foi decidido nomeá-las por duas letras do nome da coleção, seguido pela numeração em que tal atividade se encontrava dentro dessa. Tal codificação, sugestão de Bogdan e Biklen (1994), é feita com o objetivo de organizar e sistematizar a produção dos dados e, também, para facilitar a posterior análise. Sendo assim, AP01, AP02, até AP09 refere-se às nove atividades presentes na coleção Apoema; na coleção Araribá, encontradas 15 atividades, AR01 até AR15; na coleção A Conquista da Matemática, como foram identificadas quatro atividades, CM01, CM02, CM03 e CM04; e, por fim; na coleção Teláris, oito atividades, TE01 até TE08.

Na busca pela compreensão do papel que essas atividades têm desempenhado, foi adotado um caminho metodológico baseado em Borba e Selva (2013). As autoras fizeram um estudo com 12 coleções de LD dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2003, observando se tais livros consideravam o uso da calculadora e, se sim, como o faziam. Transpondo tal procedimento para o SGD, foi feito da maneira como pode ser vista na Figura 5:

**Figura 5** - Caminho metodológico baseado em Borba e Selva (2013)



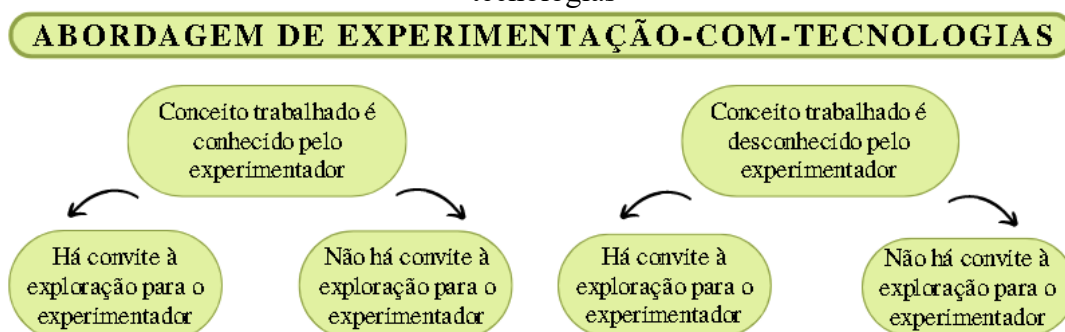
Fonte: Elaborada pela autora (2022).

Para as três primeiras questões, a produção dos dados foi feita a partir de um viés descritivo, que será apresentado no próximo capítulo. Por fim, para a última questão, todas as atividades com o uso do SGD foram novamente impressas para que facilitasse a comparação entre elas e a classificação de acordo com o que será apresentado a seguir, sendo tal classificação uma proposta desta pesquisa.

#### 4.5 TIPOS DE ATIVIDADES: COMO ESSA ANÁLISE SERÁ REALIZADA?

Após a leitura dos referenciais teóricos, foram construídas categorias de análise na busca por caracterizar as atividades com o uso do SGD a partir da abordagem de experimentação-com-tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005) e da investigação matemática (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019). Para tal, foram adotadas as estruturas expostas pelas Figuras 6 e 7.

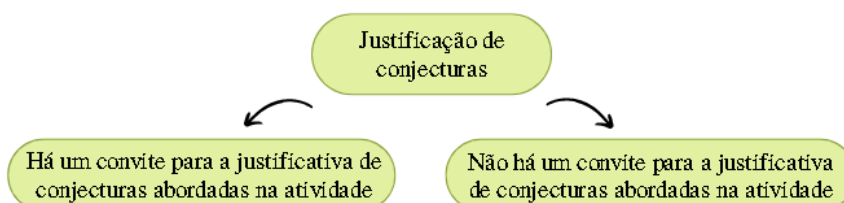
**Figura 6** - Estrutura para caracterização da abordagem de experimentação-com-tecnologias



Fonte: Elaborada pela autora (2022).

Com base nos autores apontados anteriormente, compreende-se que tais abordagens são importantes de serem exploradas a partir das atividades com o uso do SGD. Tendo em vista a aproximação dessas duas abordagens, foi elaborado um caminho que, levando em conta as leituras e discussões, acredita-se ser possível analisar as atividades por meio de um olhar para sua função dentro de um LD.

**Figura 7** - Estrutura para caracterização da abordagem de investigação matemática



Fonte: Elaborada pela autora (2022).

Tendo em vista tal estrutura (Figura 6) para a discussão da abordagem de experimentação-com-tecnologias, buscou-se responder aos seguintes questionamentos para cada uma das atividades:

- Os conceitos trabalhados na atividade já foram abordados anteriormente, seja no próprio livro ou em livros anteriores da mesma coleção dentro dos Anos Finais?
- Há um convite à exploração, por meio de testes de visualização e movimento, sendo promovido pela atividade?

A ideia de exploração a partir da visualização e movimento é compreendida pelo arraste dos elementos móveis de um objeto construído no SGD, sendo necessário visualizá-los matematicamente – a isso será denominado teste de visualização e movimento. Ou seja, visualizar a construção, a partir da manipulação, com o objetivo de que as imagens formadas ajudem na compreensão ou no descobrimento de algo (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991).

Tendo por base Borba e Villarreal (2005), compreende-se que atividades que abordam tanto conceitos conhecidos quanto desconhecidos, com características exploratórias, possuem abordagem de **experimentação-com-tecnologias** com testes e feedback visual instantâneo.

Pensando nessa diferenciação que os autores fazem dos conhecimentos abordados anteriormente para o experimentador, há uma distinção necessária: quando a atividade faz um convite à exploração, a partir da visualização e movimento, e ainda parte de conceitos que são previamente desconhecidos pelo experimentador, estas promovem a **descoberta matemática**. Há o descobrimento de resultados matemáticos anteriormente desconhecidos para o experimentador, associado a um dos objetivos de uma exploração, tendo em vista a descoberta de novas conjecturas (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Quando a atividade tem o convite à exploração, mas aborda conceitos e conjecturas já explanadas anteriormente no LD para o explorador, então, tais atividades **corroboram à compreensão das conjecturas** anteriormente explanadas, ajudando no convencimento do experimentador.

Com um olhar para a possibilidade da não exploração, em que não há abordagem de experimentação-com-tecnologias, também há uma distinção entre as atividades que abordam conceitos já explanados e as que não. Além de não haver convite à exploração das figuras geométricas construídas, caso a atividade aborde

conceitos não trabalhados anteriormente, ela objetiva **simples constatação**, abordando aquilo que não era conhecido até então por meio do SGD.

Por outro lado, atividades que, além de não explorarem as figuras construídas também abordam conteúdos conhecidos, podem ser vistas a partir de uma ótica da **domesticação da tecnologia**. Isso ocorre porque utiliza-se o software de forma que mantém intacta práticas que foram feitas anteriormente com tecnologias convencionais. O SGD traz uma infinidade de possibilidades visuais, e não explorar essa capacidade dentro de um assunto já conhecido pelo experimentador é ter um papel que pode tender a tal domesticação, não criando novas possibilidades para os alunos.

Em suma, é proposta uma sistematização 2x2 com base nas características gerais das atividades, como a que se apresenta no Quadro 1. Tais atividades foram identificadas, ressaltando que as categorias localizadas na coluna da esquerda possuem abordagem de experimentação-com-tecnologias, contrariamente aos da coluna da direita.

**Quadro 1 - Sistematização 2x2 das características gerais das atividades**

|                              | <b>COM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b>               | <b>SEM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b> |
|------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------|
| <b>CONCEITO CONHECIDO</b>    | Corroboração com a compreensão de conjecturas | Domesticação da tecnologia      |
| <b>CONCEITO DESCONHECIDO</b> | Descoberta matemática                         | Simples constatação             |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A diferença classificatória entre atividades que corroboram a compreensão de conjecturas das que possuem abordagem da descoberta matemática é se o conceito trabalhado ali já foi abordado, ou não, anteriormente no LD. Porém, é importante ressaltar que essa diferenciação não é representada somente por uma mudança de paginação no LD. A posição que uma atividade assume em um livro revela as intenções ideológicas ou pedagógicas dos autores (CHOPPIN, 2004). É mais do que disposição, é a compreensão de como os autores enxergam a finalidade de uma atividade nos LD para os estudantes, uma vez que estes estão impregnados com as concepções destes autores acerca do ensino e aprendizagem de Matemática, seja de modo explícito ou não (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Após esse primeiro posicionamento e por entender que as abordagens de experimentação-com-tecnologias e investigação matemática vão ao encontro uma da outra, ressalta-se a necessidade dessa primeira abordagem culminar na demonstração

matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020). A demonstração é apontada como o último momento requerido para a ocorrência da investigação matemática realizada por parte dos estudantes (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019). Como Mazzi (2018, p. 150) aponta, “situações que incentivam o aluno a conjecturar, testar e se convencer de algum resultado, antes mesmo de se ter uma demonstração para ele, podem fazer com que ele se interesse em buscar uma justificativa mais rigorosa [...]”.

Por esse motivo, a pesquisa propõe-se a discutir se as atividades oportunizam a investigação matemática, de acordo com a Figura 7. Para isso, leva-se em conta a questão:

- Há um convite para a justificação de conjecturas levantadas?

Se tal convite é feito aos estudantes, uma vez que já foi oportunizada a experimentação-com-tecnologias, então diz-se que a atividade possibilita, também, a investigação matemática (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019).

Agora, observando o padrão das etapas dentro de uma atividade com o uso do SGD nas coleções, bem como suas características, e alinhando com o que é discutido pela literatura, tais atividades precisam explorar duas dimensões: a construção e a visualização.

**1º) Construção:** criação de figuras que sempre preservam suas propriedades fundamentais, mesmo quando é arrastado um de seus elementos móveis. A figura geométrica, dessa maneira, resiste à prova do arrastar, pois, mesmo movimentando algum de seus elementos – aqueles que são possíveis –, as propriedades do objeto geométrico são mantidas (BORBA; SCUCUGLIA; GADADINIS, 2020).

É importante ressaltar que, para a realização de uma atividade com o SGD, os alunos não necessariamente precisam realizar a construção. Ela pode ocorrer por parte do professor, ou mesmo de algum autor desconhecido (por exemplo, quando o professor se apropria de atividades criadas por outros disponíveis na internet), para que os alunos se concentrem apenas na etapa 2, de visualização. Porém, isso não ocorre nas atividades analisadas dos LD. É sempre esperada a construção como parte integrante da atividade que os estudantes desenvolverão. Dessa maneira, após essa etapa, as atividades partem para a visualização.

**2º) Visualização:** processo de formar imagens, seja mentalmente, ou com lápis e papel, ou com o auxílio da tecnologia, e usando tais imagens efetivamente para a descoberta e o entendimento matemático; ou seja, não é apenas ver; visualizar implica em buscar compreender (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991).

Aqui, é possível perceber as duas dimensões que envolvem a visualização: o processo da formação e do uso do que foi formado. Dessa maneira, as atividades podem abordar apenas a primeira dimensão, exclusivamente na construção de imagens, sem conter ‘com o objetivo de’. Essas situações serão denominadas de **mera visualização**. Ou, ainda, elas podem abordar a visualização de maneira integral, em ambas as dimensões, ao que se denominará **visualização ativa**, na qual se demonstra um propósito na observação de uma construção.

Dessa forma, ao analisar as atividades que constam nos LD baseadas nas frentes de construção e visualização, em algumas propostas há de se propor adaptações a essas, de acordo com a definição anteriormente proposta. Tal proposição almeja o aprimoramento dessas atividades com o uso de um SGD para que o caráter visual de experimentação e investigação seja potencializado nas mesmas, tendo em vista que a realização de investigações matemáticas por parte dos estudantes pode contribuir de modo considerável para a aprendizagem da Matemática, assim como motivá-los.

#### 4.6 UM OLHAR DETALHADO PARA AS OBRAS

Para que o leitor tenha uma perspectiva das obras didáticas que foram analisadas nesta pesquisa, na sequência, há uma apresentação das mesmas.

##### 4.6.1 Coleção: Apoema

A primeira coleção abordada é a Apoema da Editora do Brasil, cujo autor é o professor de Ensino Fundamental e Médio Adilson Longen, licenciado em Matemática, mestre e doutor em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná. A coleção pode ter suas capas visualizadas na Figura 8.

**Figura 8** - Capas dos LD dos Anos Finais da Coleção Apoema

Fonte: Longen (2018a; 2018b; 2018c; 2018d).

Nos próximos parágrafos, encontra-se um resumo dos capítulos de Geometria na coleção Apoema e onde as atividades com o uso de um SGD estão localizadas. Ao final, é possível visualizar a Tabela 1 com tais informações sintetizadas.

No LD de Matemática do 6º ano da coleção Apoema, é possível identificar um total de 304 páginas com dois capítulos de Geometria no LE: 2 – FIGURAS GEOMÉTRICAS; e 4 – FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS. Aqui, nota-se a presença de três atividades que sugerem o uso de um SGD, especificamente o GeoGebra, todas no capítulo 4 (AP01, AP02 e AP03).

Já no LD do 7º ano, com 272 páginas, há os seguintes capítulos de Geometria: 2 – GEOMETRIA; e 8 – GEOMETRIA. Encontra-se apenas uma atividade com o uso do GeoGebra, presente no capítulo 8 (AP04).

Para o 8º ano, um LD com 272 páginas é apresentado, destacando-se os capítulos: 2 – GEOMETRIA PLANA; e 8 – CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E MEDIDAS. Há a presença de três atividades com o uso do GeoGebra, todas do capítulo 8 (AP05, AP06 e AP07).

Por fim, no LD do 9º ano, também com 272 páginas e dois capítulos de Geometria, têm-se: 3 – GEOMETRIA; e 6 – RELAÇÕES MÉTRICAS, CONSTRUÇÕES E PLANO CARTESIANO. Há uma atividade com o GeoGebra em cada capítulo (AP08 e AP09, respectivamente).

A Tabela 1 resume os dados quantitativos apontados anteriormente com a respectiva frequência relativa da quantidade de páginas dos capítulos de Geometria dentro dos respectivos LD.

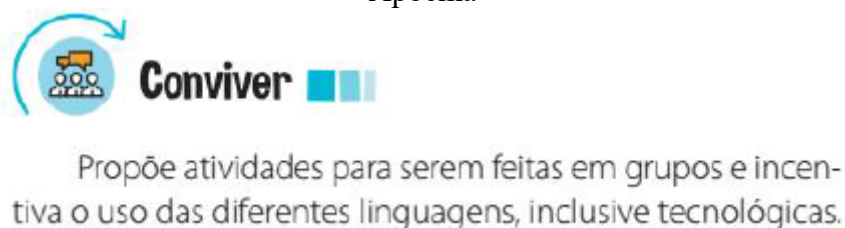
**Tabela 1** - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso do GeoGebra na coleção Apoema

| Ano                | Capítulo abordado                                    | Qde. <sup>20</sup> de páginas | Freq. <sup>21</sup> relativa | Qde. de ativ. |
|--------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|---------------|
| 6º                 | 2: Figuras geométricas                               | 32                            | 10,5%                        | 0             |
|                    | 4: Figuras geométricas planas                        | 44                            | 14,5%                        | 3             |
|                    | <b>Total do 6º</b>                                   | <b>76 (de 304)</b>            | <b>25%</b>                   | <b>3</b>      |
| 7º                 | 2: Geometria                                         | 34                            | 12,5%                        | 0             |
|                    | 8: Geometria                                         | 26                            | 9,6%                         | 1             |
|                    | <b>Total do 7º</b>                                   | <b>60 (de 272)</b>            | <b>22,1%</b>                 | <b>1</b>      |
| 8º                 | 2: Geometria plana                                   | 34                            | 12,5%                        | 0             |
|                    | 8: Construções geométricas e medidas                 | 40                            | 14,7%                        | 3             |
|                    | <b>Total do 8º</b>                                   | <b>74 (de 272)</b>            | <b>27,2%</b>                 | <b>3</b>      |
| 9º                 | 3: Geometria                                         | 36                            | 13,2%                        | 1             |
|                    | 6: Relações métricas, construções e plano cartesiano | 34                            | 12,5%                        | 1             |
|                    | <b>Total do 9º</b>                                   | <b>70 (de 272)</b>            | <b>25,7%</b>                 | <b>2</b>      |
| <b>Total geral</b> |                                                      |                               |                              | <b>9</b>      |

Fonte: Elaborada pela autora (2022).

A coleção Apoema, das quatro, é a única que não apresenta uma seção específica para tratar de TD. Todas as atividades com o uso do GeoGebra<sup>22</sup> aparecem dentro de uma seção chamada Conviver. A Figura 9 exibe o que o livro traz aos professores em suas páginas iniciais sobre essa seção. É possível notar o destaque às tecnologias, mas a seção não é restrita a elas.

**Figura 9** - Informação inicial contida no MP sobre seção ‘Conviver’ na Coleção Apoema



Fonte: Longen (2018a, p. XVIII).

Além disso, o livro se utiliza de três elementos de apoio, chamados selos, trazendo a ideia de marcadores reproduzidos em algumas páginas. Destacam-se dois

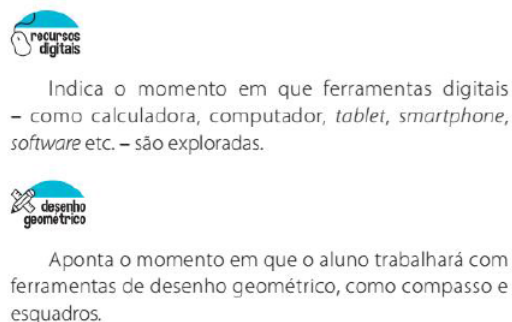
<sup>20</sup> Abreviação para quantidade. Usada em todas as tabelas.

<sup>21</sup> Abreviação para frequência. Usada em todas as tabelas.

<sup>22</sup> Em todas as coleções que especificaram o SGD GeoGebra, o mesmo será feito ao se referir às atividades da mesma nessa pesquisa.

deles, chamados de ‘recursos digitais’ e ‘desenho geométrico’, como mostra a Figura 10. É importante ressaltar que ambas as informações estão disponíveis apenas na parte que é restrita ao professor, não posta no LE.

**Figura 10** - Informação inicial contida no livro sobre selos na Coleção Apoema  
Elementos de apoio (selos)



Fonte: Longen (2018a, p. XIX).

Pelo que é possível perceber por meio da Figura 10, o primeiro elemento de apoio traz a ideia de uso das ‘ferramentas digitais’. Dessa maneira, é de se esperar que as atividades no GeoGebra nessa coleção estejam com esse selo. Entretanto, mesmo nas atividades que são abordadas a partir do software, que é um recurso digital, nem sempre esse selo aparece. Nas três atividades que abordam a utilização do GeoGebra trazidas nos LD do 6º ano, AP01, AP02 e AP03, esse elemento de apoio não é apresentado, sendo exemplificado pela Figura 11, onde ao lado do título ‘Conviver’ não há selo algum, identificando-se uma incoerência.

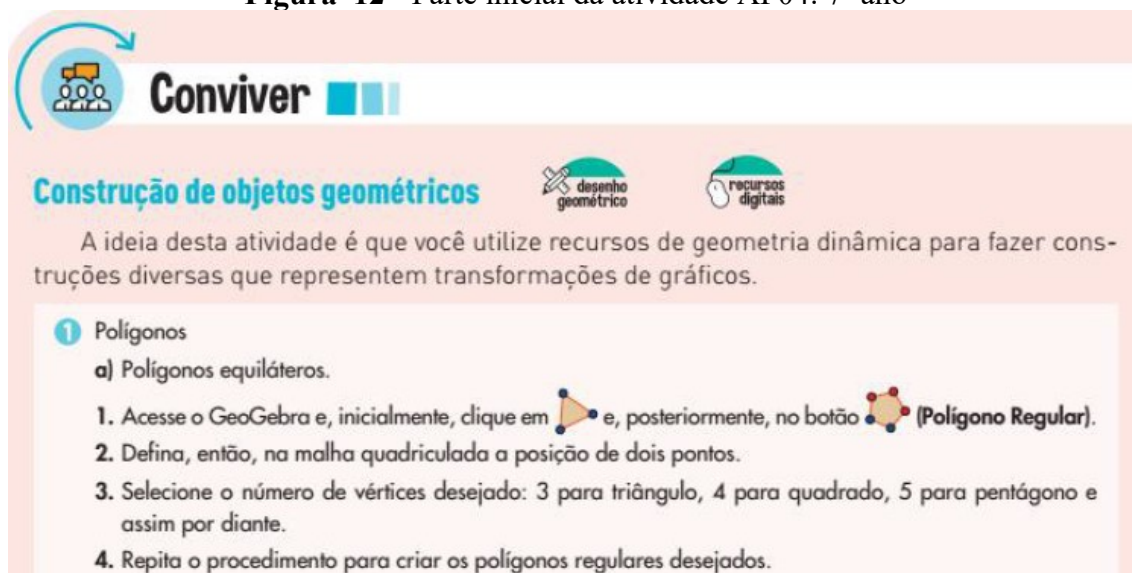
**Figura 11** - Parte inicial da atividade AP01: 6º ano

The screenshot shows the 'Conviver' activity page. At the top, there is a title 'Conviver' with a small icon of three people. Below the title, the section 'Identificando ângulos' is highlighted. The first instruction (1) asks the user to use the 'Semirreta' tool to create two rays,  $f$  and  $g$ , passing through points  $B$  and  $C$  respectively, with a common point  $A$ . A diagram shows a grid with points  $A$ ,  $B$ , and  $C$ . Ray  $f$  passes through  $A$  and  $B$ , and ray  $g$  passes through  $A$  and  $C$ . The second instruction (2) asks the user to use the 'Ângulo' tool to click on ray  $g$  and then ray  $f$ . The third instruction (3) asks the user to repeat the previous step, but clicking first on ray  $f$  and then on ray  $g$ .

Fonte: Longen (2018a, p. 118).

Em outras ocasiões, ao contrário, a atividade se utiliza dos dois selos ao mesmo tempo, como mostra a Figura 12. Pela mesma figura, é possível notar, também, que a coleção opta pela abordagem geralmente com verbos no imperativo para os passos a serem seguidos nas atividades.

**Figura 12** - Parte inicial da atividade AP04: 7º ano



**Conviver**

**Construção de objetos geométricos**

A ideia desta atividade é que você utilize recursos de geometria dinâmica para fazer construções diversas que representem transformações de gráficos.

**1 Polígonos**

**a) Polígonos equiláteros.**

1. Acesse o GeoGebra e, inicialmente, clique em  e, posteriormente, no botão  (Polígono Regular).
2. Defina, então, na malha quadriculada a posição de dois pontos.
3. Selecione o número de vértices desejado: 3 para triângulo, 4 para quadrado, 5 para pentágono e assim por diante.
4. Repita o procedimento para criar os polígonos regulares desejados.

Fonte: Longen (2018b, p. 248).

A coleção também opta por não fazer nenhum tipo de apresentação do software GeoGebra em si no LE, bem como qualquer tipo de introdução na seção ‘Conviver’ quanto ao objetivo de tal atividade ou um resumo do que será feito em seguida pelos alunos.

#### 4.6.2 Coleção: Araribá

A segunda coleção abordada é a Araribá, da Editora Moderna, cujos editores responsáveis são Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva. A primeira é bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), além de professora há 17 anos em escolas públicas e particulares de São Paulo. Já Willian Silva é professor e editor, licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Por ser uma obra coletiva, não há especificações de autores, apenas dos editores responsáveis. A coleção pode ter suas capas visualizadas na Figura 13.

**Figura 13** - Capas dos LD dos Anos Finais da Coleção Araribá



Fonte: Gay e Silva (2018a; 2018b; 2018c; 2018d).

Na coleção Araribá, considerando inicialmente o LD do 6º ano, há um total de 309 páginas, sendo que há quatro capítulos de Geometria: 3 – GEOMETRIA: NOÇÕES INICIAIS; 7 – RETAS E ÂNGULOS; 10 – LOCALIZAÇÃO E POLÍGONOS e, por fim, 11 – MEDIDAS DE COMPRIMENTO E MEDIDAS DE SUPERFÍCIE. Encontram-se três atividades com o uso de um SGD nos capítulos 7, 10 e 11 (AR01, AR02 e AR03, respectivamente).

O livro do 7º ano contém 326 páginas ao todo com quatro capítulos de Geometria: 3 – ÂNGULOS; 8 – POLÍGONO, CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO; 9 – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS; e 12 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS. Nesses capítulos há quatro atividades, sendo duas no capítulo 3 (AR04 e AR05), uma no capítulo 8 (AR06) e uma no capítulo 12 (AR07).

No 8º ano, o LD contém 285 páginas com cinco capítulos de Geometria: 2 – RETAS E ÂNGULOS; 3 – CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS; 4 – QUADRILÁTEROS; 5 – POLÍGONOS; e 11 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS. Nesses, há cinco atividades, sendo uma no capítulo 2 (AR08), duas no capítulo 3 (AR09 e AR10) e duas no capítulo 4 (AR11 e AR12).

Por fim, o LD do 9º tem 270 páginas com quatro capítulos de Geometria: 3 – CIRCUNFERÊNCIA; 5 – SEMELHANÇA; 6 – RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO; e 10 – FIGURAS GEOMÉTRICAS NÃO PLANAS E

VOLUMES. Há três atividades que sugerem o uso de um SGD no total (AR13, AR14 e AR15), sendo que apenas o último capítulo não apresenta nenhuma atividade.

A Tabela 2 resume os dados quantitativos apontados anteriormente com a respectiva frequência relativa da quantidade de páginas dos capítulos de Geometria dentro dos respectivos LD.

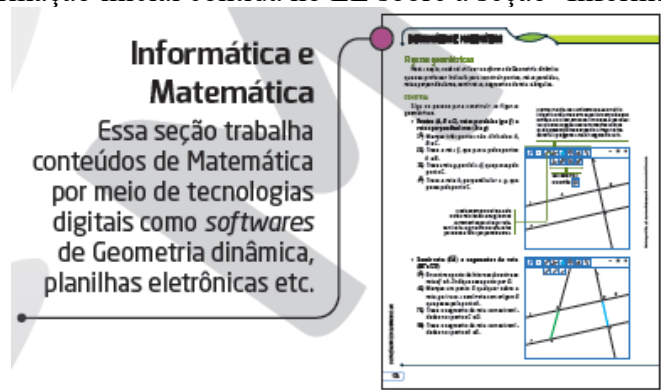
**Tabela 2** - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso de um SGD por capítulo na coleção Araribá

| Ano                | Capítulo abordado                                  | Qde. de páginas     | Freq. relativa | Qde. de ativ. |
|--------------------|----------------------------------------------------|---------------------|----------------|---------------|
| 6º                 | 3: Geometria: noções iniciais                      | 26                  | 8,4%           | 0             |
|                    | 7: Retas e ângulos                                 | 20                  | 6,5%           | 1             |
|                    | 10: Localização e polígonos                        | 22                  | 7,1%           | 1             |
|                    | 11: Medidas de comprimento e medidas de superfície | 25                  | 8,1%           | 1             |
|                    | <b>Total do 6º</b>                                 | <b>68 (de 309)</b>  | <b>30,1%</b>   | <b>3</b>      |
| 7º                 | 3: Ângulos                                         | 30                  | 9,2%           | 2             |
|                    | 8: Polígono, circunferência e círculo              | 15                  | 4,6%           | 1             |
|                    | 9: Triângulos e quadriláteros                      | 33                  | 10,1%          | 0             |
|                    | 12: Transformações geométricas                     | 32                  | 9,8%           | 1             |
|                    | <b>Total do 7º</b>                                 | <b>110 (de 326)</b> | <b>33,7%</b>   | <b>4</b>      |
| 8º                 | 2: Retas e ângulos                                 | 31                  | 10,9%          | 1             |
|                    | 3: Congruência de triângulos                       | 29                  | 10,2%          | 2             |
|                    | 4: Quadriláteros                                   | 23                  | 8,1%           | 2             |
|                    | 5: Polígonos                                       | 28                  | 9,8%           | 0             |
|                    | 11: Transformações geométricas                     | 18                  | 6,3%           | 0             |
|                    | <b>Total do 8º</b>                                 | <b>129 (de 285)</b> | <b>45,3%</b>   | <b>5</b>      |
| 9º                 | 3: Circunferência                                  | 32                  | 11,9%          | 1             |
|                    | 5: Semelhança                                      | 38                  | 14,1%          | 1             |
|                    | 6: Relações métricas no triângulo retângulo        | 21                  | 7,8%           | 1             |
|                    | 10: Figuras geométricas não planas e volumes       | 33                  | 12,2%          | 0             |
|                    | <b>Total do 9º</b>                                 | <b>124 (de 270)</b> | <b>46%</b>     | <b>3</b>      |
| <b>Total geral</b> |                                                    |                     |                | <b>15</b>     |

Fonte: Elaborada pela autora (2022).

A coleção da editora Moderna apresenta uma seção específica para trabalhar com TD em seus livros, chamada ‘Informática e Matemática’, como mostra a Figura 14. Essa seção sempre vem destacada com bordas na cor verde e é composta por duas partes: Construa e Investigue, sempre nessa ordem (isso pode ser melhor visualizado na Figura 15). Todas as 15 atividades estão localizadas dentro dessa seção.

**Figura 14** - Informação inicial contida no LE sobre a seção ‘Informática e Matemática’



Fonte: Gay e Silva (2018a, p. 4).

Na parte da seção denominada Construa, são dadas diretrizes para os alunos construírem objetos geométricos; na parte do Investigue, são oferecidos questionamentos para que possam refletir, buscar soluções, fazer cálculos e, assim, aprofundar aquilo que foi construído anteriormente (isso é possível ser visualizado na Figura 15).

**Figura 15** - Atividade AR13: 9º ano

**INFORMÁTICA E MATEMÁTICA**

**Ângulos em uma circunferência**

Nesta seção, você vai utilizar um *software* de Geometria dinâmica para construir um ângulo inscrito em uma circunferência e o ângulo central correspondente. Depois, vai investigar a relação entre suas medidas.

**CONSTRUA**

Siga os passos abaixo.

- 1ª) Construa uma circunferência  $c$  de centro  $O$ .
- 2ª) Marque três pontos distintos,  $A$ ,  $B$  e  $V$ , na circunferência.
- 3ª) Trace as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .
- 4ª) Trace as semirretas  $\overrightarrow{VA}$  e  $\overrightarrow{VB}$ .

$\widehat{AVB}$  é um ângulo inscrito e  $\widehat{AOB}$  é o ângulo central correspondente.

**INVESTIGUE**

Faça o que se pede usando as ferramentas do *software*.

- a) Meça os ângulos  $\widehat{AVB}$  e  $\widehat{AOB}$ . É possível perceber alguma relação entre essas medidas?
- b) Movimente os pontos móveis da construção, modificando a configuração inicial. A relação observada é válida em diferentes configurações?

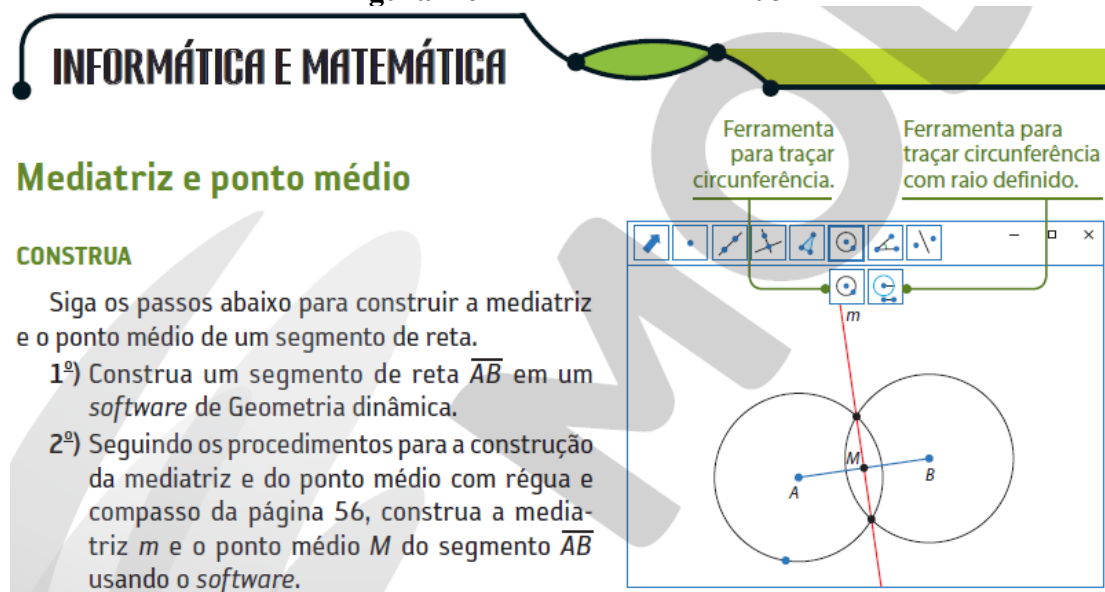
a) Espera-se que os alunos percebam que a medida do ângulo inscrito na circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.  
b) Essa propriedade é válida independentemente da configuração apresentada.

Fonte: Gay e Silva (2018d, p. 67).

Na primeira parte, o passo a passo é apresentado utilizando números ordinais, sendo bem direto em suas instruções, usualmente trazendo verbos no imperativo. Na segunda, geralmente em formato de perguntas, traz-se um marcador tipográfico do tipo

ponto lista ou com letras, assim como também é possível visualizar na Figura 15. Além disso, pela mesma figura, percebe-se que a editora escolhe não utilizar especificamente o nome de algum programa, mas genericamente ‘software de Geometria Dinâmica’, optando por trazer uma introdução resumindo o que será feito na atividade, ocorrendo em 14 de 15 atividades (Figura 15), com exceção da AR08, como pode ser visto na Figura 16.

**Figura 16** - Parte inicial da AR08



Fonte: Gay e Silva (2018c, p. 63).

#### 4.6.3 Coleção: A Conquista da Matemática

A terceira coleção abordada é A Conquista da Matemática da Editora FTD, cujos autores são José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci. O primeiro é licenciado em Matemática pela USP e professor e assessor de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Médio desde 1985. Já Castrucci era bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela USP, na qual se tornou professor, assim também como na PUC-SP. Da mesma forma, foi professor em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Médio. O autor faleceu em janeiro de 1995. A coleção pode ter suas capas visualizadas na Figura 17.

**Figura 17** - Capas dos LD dos Anos Finais da coleção A Conquista da Matemática



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a; 2018b; 2018c; 2018d).

No LD de Matemática do 6º ano, que tem 287 páginas ao todo, é possível encontrar dois capítulos de Geometria. São eles: 3 – FIGURAS GEOMÉTRICAS; e 7 – ÂNGULOS E POLÍGONOS. Neste último capítulo, encontra-se a única atividade proposta com o uso do GeoGebra nesse livro (CM01).

Considerando, agora, o LD do 7º ano, há, também, 287 páginas no total com a presença de dois capítulos de Geometria. São eles: 3 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA; e 6 – FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS. A única atividade aqui se encontra no capítulo 3 (CM02).

Já no 8º ano, há o LD com 287 páginas, com os dois capítulos de Geometria: 3 – ÂNGULOS E TRIÂNGULOS; e 6 – POLÍGONOS E TRANSFORMAÇÕES NO PLANO. Neste último capítulo encontra-se a atividade com o uso do GeoGebra (CM03).

Por fim, no 9º ano, com o LD de 288 páginas, diferente dos anteriores, são trazidos três capítulos destinados à Geometria, que são: 4 – RELAÇÕES ENTRE ÂNGULOS; 7 – RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA; e 8 – FIGURAS PLANAS, ESPACIAIS E VISTAS. No capítulo 4 encontra-se a CM04 e, dessa maneira, finalizam-se as atividades nesta coleção, sendo uma em cada série dos Anos Finais.

A Tabela 3 resume os dados quantitativos apontados acima com a respectiva frequência relativa da quantidade de páginas dos capítulos de Geometria nos respectivos LD.

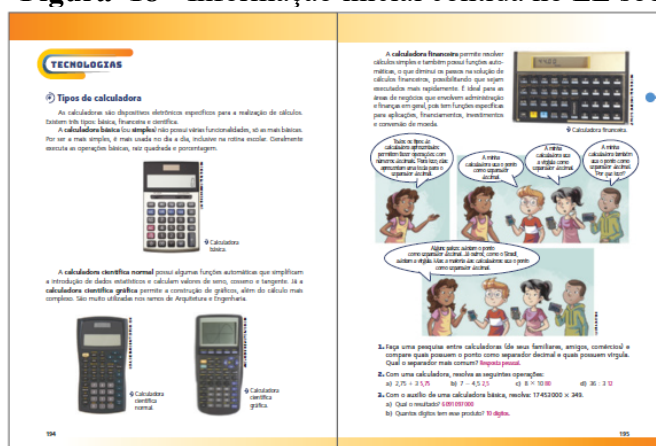
**Tabela 3** - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção A Conquista da Matemática

| Ano                | Capítulo abordado                                               | Qde. de páginas    | Freq. relativa | Qde. de ativ. |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------|----------------|---------------|
| 6º                 | 3: Figuras geométricas                                          | 24                 | 8,4%           | 0             |
|                    | 7: Ângulos e polígonos                                          | 34                 | 11,8%          | 1             |
|                    | <b>Total do 6º</b>                                              | <b>58 (de 287)</b> | <b>20,2%</b>   | <b>1</b>      |
| 7º                 | 3: Transformações geométricas e simetria                        | 22                 | 7,7%           | 1             |
|                    | 6: Figuras geométricas planas                                   | 36                 | 12,5%          | 0             |
|                    | <b>Total do 7º</b>                                              | <b>58 (de 287)</b> | <b>20,2%</b>   | <b>1</b>      |
| 8º                 | 3: Ângulos e triângulos                                         | 32                 | 11,1%          | 0             |
|                    | 6: Polígonos e transformações no plano                          | 34                 | 11,9%          | 1             |
|                    | <b>Total do 8º</b>                                              | <b>66 (de 287)</b> | <b>23%</b>     | <b>1</b>      |
| 9º                 | 4: Relações entre ângulos                                       | 26                 | 9%             | 1             |
|                    | 7: Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência | 26                 | 9%             | 0             |
|                    | 8: Figuras planas, espaciais e vistas                           | 24                 | 8,3%           | 0             |
|                    | <b>Total do 9º</b>                                              | <b>76 (de 288)</b> | <b>26,3%</b>   | <b>1</b>      |
| <b>Total geral</b> |                                                                 |                    |                | <b>4</b>      |

Fonte: Elaborada pela autora (2022).

Nessa coleção, há uma seção específica para atividades com o uso de TD chamada “Tecnologias”, sempre com bordas superiores e inferiores alaranjadas, como mostra a Figura 18.

**Figura 18** - Informação inicial contida no LE sobre a seção ‘Tecnologias’



## TECNOLOGIAS

Nesta seção você verá como utilizar ferramentas tecnológicas na resolução de problemas ou questões matemáticas.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 7).

Sem um padrão específico para essa seção, ao se tratar do uso do GeoGebra, das quatro atividades, duas (CM01 e CM03) apresentam uma explicação geral das ferramentas do software e o que é possível fazer com elas. Apenas ao final da atividade

que os LD propõem construções por parte dos alunos para que esses utilizem as explicações dadas anteriormente. Por fim, apresenta perguntas sobre esta construção feita, como pode ser visto na Figura 19, explicitado pela frase “Agora, vamos exercitar!”.

**Figura 19** - Parte inicial e final da CM01: 6º ano



Resoluções  
na p. 319

### 🌀 Construção e ampliação de polígonos com o GeoGebra

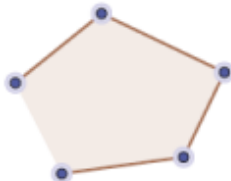
Vamos aproveitar esta unidade de Geometria para aprender a construir polígonos regulares e não regulares e ampliá-los utilizando ferramentas do software GeoGebra.

Existem duas ferramentas muito úteis para a construção de polígonos nesse software. Vamos vê-las a seguir e conhecer um pouco sobre o funcionamento delas:

-  Polígono

Essa ferramenta permite a construção de qualquer tipo de polígono.

Nela, o usuário seleciona na tela, com o mouse, a posição dos vértices do polígono, que vai sendo desenhado à medida dessa seleção.



**Agora, vamos exercitar!**

1. Usando as ferramentas apresentadas, construa: Respostas pessoais.
  - a) um polígono não regular de 4 lados.
  - b) um polígono regular de 4 lados.
  - c) um polígono não regular de 3 lados.
  - d) um polígono regular de 3 lados.
2. Escolha um polígono da atividade 1 e, usando a ferramenta Homotetia, faça duas ampliações: uma com o valor do fator maior que 1 e outra com o valor do fator entre 0 e 1, excluindo esses valores. Respostas pessoais.
3. Com base nas construções da atividade 2, podemos afirmar que a homotetia permite somente a ampliação de figuras? Não, pois a homotetia também permite a redução de figuras quando  $0 < \text{fator} < 1$ .

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018a, p. 230–231).

Já em CM02 e CM04, o LD traz orientações para os estudantes fazerem de acordo com a leitura, como um passo a passo, descrevendo as construções propostas. Após tal construção, traz perguntas para serem respondidas sobre o que foi construído. Entretanto, em todas as atividades há uma pequena introdução na seção Tecnologias quanto ao que será feito na mesma. Destaca-se que essa é a única coleção que decide

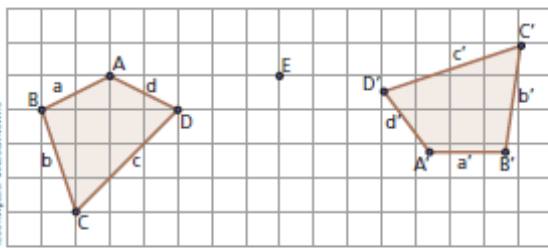
trazer os passos para construção em forma de um texto único e não em tópicos, como ocorre nas outras três coleções, como pode ser visto na Figura 20.

**Figura 20** - Parte da CM02 sobre simetria de rotação: 7º ano

• **Simetria de rotação**

Usando a ferramenta , desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta , clique em qualquer lugar fora do polígono desenhado (que será o centro de rotação).

Depois, usando a ferramenta , clique, primeiro, no polígono construído e, em seguida, no ponto determinado. Escolha o ângulo e o sentido de rotação (lembre-se do valor desse ângulo). Dessa forma obtém-se uma imagem simétrica por rotação. Veja a seguir um exemplo:



Agora, usando a ferramenta , desenhe um segmento de reta do vértice A ao centro de rotação e outro do centro de rotação ao vértice A'. Em seguida, usando a ferramenta , meça o menor ângulo determinado por esses dois segmentos (caso você tenha escolhido um ângulo menor que 180°) ou o maior ângulo (caso tenha escolhido um maior que 180°).

Responda às questões no caderno.

1. Comparando a medida do ângulo obtida com a medida escolhida como ângulo de rotação, o que podemos observar? *As duas medidas são iguais.*
2. Faça o mesmo trabalho para os demais pontos do polígono. O que podemos concluir? *Todos os ângulos formados possuem a mesma medida, a do ângulo de rotação.*

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 93).

#### 4.6.4 Coleção: Teláris

A quarta e última coleção abordada é a Teláris da Editora Ática, cujo autor é o professor Luiz Roberto Dante. O mesmo é licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp-SP), Rio Claro, mestre em Matemática pela USP, doutor em Psicologia da Educação pela PUC-SP e livre-docente também pela Unesp-SP, Rio Claro. É ex-professor do Ensino Fundamental e Médio da rede pública e autor de várias obras dessas etapas de ensino, além da Educação Infantil. A coleção pode ter suas capas visualizadas na Figura 21.

**Figura 21** - Capas dos LD dos Anos Finais da Coleção Teláris



Fonte: Dante (2018a; 2018b; 2018c; 2018d).

No LD do 6º ano há, ao todo, 328 páginas, possuindo três capítulos de Geometria. São eles: 3 – SÓLIDOS GEOMÉTRICOS; 5 – ÂNGULOS E POLÍGONOS; e 8 – GRANDEZAS GEOMÉTRICAS: COMPRIMENTO, PERÍMETRO E ÁREA. É possível encontrar duas atividades com o uso especificamente do software GeoGebra (TE01 e TE02). Ambas se encontram no mesmo capítulo, o 5.

Já no LD do 7º ano, há, ao todo, 312 páginas, com dois capítulos destinados à Geometria. São eles: 5 – GEOMETRIA: CIRCUNFERÊNCIA, ÂNGULO E POLÍGONO; e 6 – SIMETRIA. As duas atividades (TE03 e TE04) são vistas uma em cada capítulo apontado acima.

No LD do 8º ano há 264 páginas e três capítulos de Geometria: 2 – LUGARES GEOMÉTRICOS E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS; 4 – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS; e 8 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS. Encontram-se, também, duas atividades no GeoGebra, uma no primeiro e outra no último capítulo apontados (TE05 e TE06, respectivamente).

Por último, no LD do 9º ano, há 312 páginas, sendo os seguintes capítulos de Geometria: 3 – PROPORCIONALIDADE E JUROS; 5 – GEOMETRIA: SEMELHANÇA, VISTAS ORTOGONAIS E PERSPECTIVA; 6 – RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS e, por fim, 7 – CIRCUNFERÊNCIAS E CÍRCULOS. Novamente, são vistas duas atividades com o uso sugerido do GeoGebra, ambas no último capítulo descrito (TE07 e TE08).

A Tabela 4 mostra um resumo do que foi descrito acima com a frequência relativa da quantidade de páginas dos capítulos de Geometria nos LD.

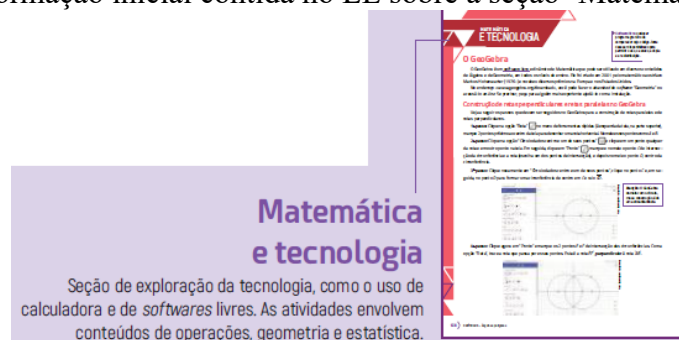
**Tabela 4** - Panorama dos capítulos de Geometria com a quantidade de atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção Teláris

| Ano                | Capítulo abordado                                         | Qde. de páginas     | Freq. relativa | Qde. de ativ. |
|--------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------|----------------|---------------|
| 6º                 | 3: Sólidos geométricos                                    | 18                  | 5,5%           | 0             |
|                    | 5: Ângulos e polígonos                                    | 48                  | 14,6%          | 2             |
|                    | 8: Grandezas geométricas: comprimento, perímetro e área   | 30                  | 9,1%           | 0             |
|                    | <b>Total do 6º</b>                                        | <b>96 (de 328)</b>  | <b>29,2%</b>   | <b>2</b>      |
| 7º                 | 5: Geometria: circunferência, ângulo e polígono           | 48                  | 15,4%          | 1             |
|                    | 6: Simetria                                               | 24                  | 7,7%           | 1             |
|                    | <b>Total do 7º</b>                                        | <b>72 (de 312)</b>  | <b>23,1%</b>   | <b>2</b>      |
| 8º                 | 2: Lugares geométricos e construções geométricas          | 22                  | 8,3%           | 1             |
|                    | 4: Triângulos e quadriláteros                             | 32                  | 12,1%          | 0             |
|                    | 8: Transformações geométricas                             | 20                  | 7,6%           | 1             |
|                    | <b>Total do 8º</b>                                        | <b>74 (de 264)</b>  | <b>28%</b>     | <b>2</b>      |
| 9º                 | 3: Proporcionalidade e juros                              | 40                  | 12,8%          | 0             |
|                    | 5: Geometria: semelhança, vistas ortogonais e perspectiva | 40                  | 12,8%          | 0             |
|                    | 6: Relações métricas nos triângulos retângulos            | 24                  | 7,7%           | 0             |
|                    | 7: Circunferências e círculos                             | 30                  | 9,6%           | 2             |
|                    | <b>Total do 9º</b>                                        | <b>134 (de 312)</b> | <b>42,9%</b>   | <b>2</b>      |
| <b>Total geral</b> |                                                           |                     |                | <b>8</b>      |

Fonte: Elaborada pela autora (2022).

A coleção de Dante apresenta uma seção específica para trabalhar com TD denominada ‘Matemática e Tecnologia’, como mostra a Figura 22. Essa seção sempre vem destacada em suas páginas com filetes laterais e superiores na cor vermelha.

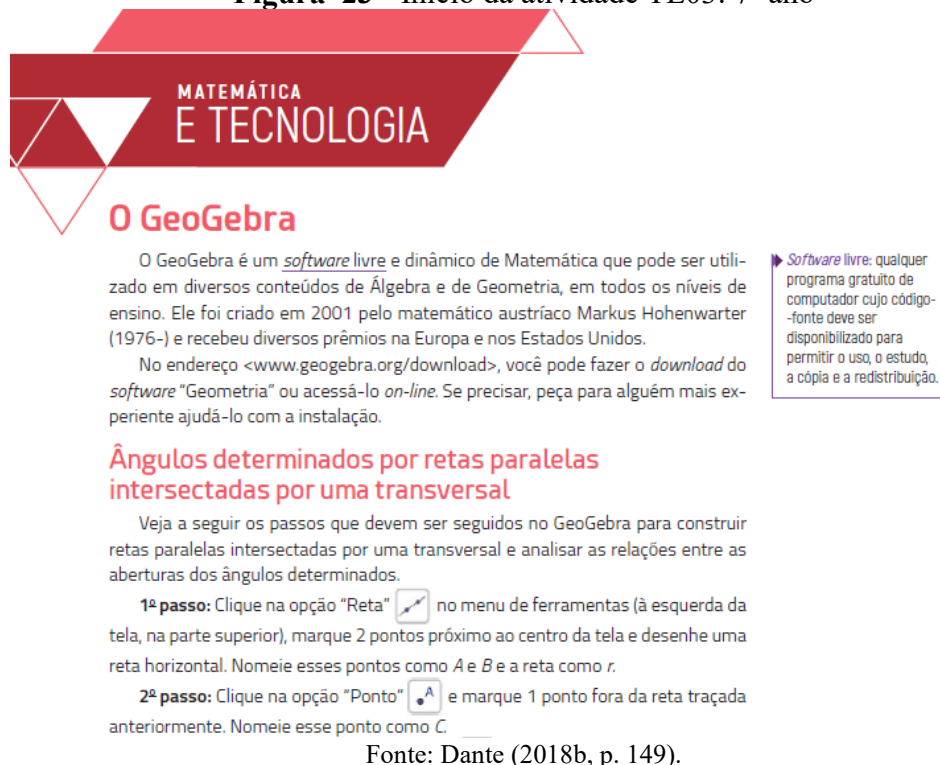
**Figura 22** - Informação inicial contida no LE sobre a seção ‘Matemática e Tecnologia’



Fonte: Dante (2018b, p. 5).

Em sua estrutura, o autor decidiu sempre explicar o que é o GeoGebra na primeira atividade que faz uso do software de cada ano do Ensino Fundamental. É uma explicação curta, mas que traz o que é, quem o criou, para que serve e como manipulá-lo, podendo ser usado online ou após seu download. Um exemplo disso pode ser visto na Figura 23 que mostra o início da primeira atividade do 7º ano, em que se utiliza o software, a TE03.

**Figura 23 - Início da atividade TE03: 7º ano**



**MATEMÁTICA E TECNOLOGIA**

## O GeoGebra

O GeoGebra é um software livre e dinâmico de Matemática que pode ser utilizado em diversos conteúdos de Álgebra e de Geometria, em todos os níveis de ensino. Ele foi criado em 2001 pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter (1976-) e recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

No endereço <[www.geogebra.org/download](http://www.geogebra.org/download)>, você pode fazer o *download* do software "Geometria" ou acessá-lo *on-line*. Se precisar, peça para alguém mais experiente ajudá-lo com a instalação.

**Software livre:** qualquer programa gratuito de computador cujo código-fonte deve ser disponibilizado para permitir o uso, o estudo, a cópia e a redistribuição.

### Ângulos determinados por retas paralelas intersectadas por uma transversal

Veja a seguir os passos que devem ser seguidos no GeoGebra para construir retas paralelas intersectadas por uma transversal e analisar as relações entre as aberturas dos ângulos determinados.

**1º passo:** Clique na opção "Reta"  no menu de ferramentas (à esquerda da tela, na parte superior), marque 2 pontos próximo ao centro da tela e desenhe uma reta horizontal. Nomeie esses pontos como *A* e *B* e a reta como *r*.

**2º passo:** Clique na opção "Ponto"  e marque 1 ponto fora da reta traçada anteriormente. Nomeie esse ponto como *C*.

Fonte: Dante (2018b, p. 149).

Também é possível perceber pela Figura 23 que o autor cita um resumo do que será feito no início da atividade, o que realmente ocorre em todas elas, e que se utiliza de numerais ordinais seguidos de passos com verbos no imperativo para apresentar aos alunos a sequência da mesma. Ao final de algumas dessas atividades, ele traz um quadro denominado 'Questões', expondo alguns questionamentos aos estudantes. Porém, isso também ocorre dentro dos 'passos', como é possível ver pela Figura 24, de modo que o 8º passo expõe duas indagações que, pelo padrão, poderiam estar dentro do quadro em vermelho.

**Figura 24 - Final de atividade TE03: 7º ano**

**8ª passo:** Clique na opção "Mover"  e movimente lentamente a reta  $t$ .

O que você pôde observar? *As medidas de abertura dos ângulos não são alteradas.*

Clique agora no ponto  $D$  da reta  $t$  e movimente-o de maneira circular, rotacionando a reta. O que acontece com as medidas de aberturas dos ângulos?  
*São alteradas, porém fica mantida a relação preexistente entre as medidas de abertura dos ângulos congruentes e suplementares.*

**Questões**  Não escreva no livro!

- 1▶ Qual relação você pode observar quando escolhe 2 ângulos entre os 8 ângulos determinados na construção?  
*São congruentes ou complementares.*
- 2▶ Identifique, nos ângulos que você determinou, as medidas de abertura dos ângulos: *Respostas pessoais.*

|                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| a) alternos internos;   | d) colaterais externos; |
| b) alternos externos;   | e) correspondentes.     |
| c) colaterais internos; |                         |

Fonte: Dante (2018b, p. 150).

Nesse capítulo, após ter sido exibida a fundamentação metodológica desta pesquisa, bem como uma síntese com a apresentação das obras analisadas, será dado seguimento à análise, primeiramente iniciando pela descritiva, e logo após com a analítica, com a discussão da caracterização das atividades com o uso do SGD, de acordo com o referencial teórico.

## **5 ANÁLISE DESCRITIVA: UM APROFUNDAMENTO NAS COLEÇÕES**

Pelo que já foi discutido até aqui, há a consciência de que só a presença das TD nos LD não é o suficiente para garantir que os autores têm utilizado suas potencialidades para propor atividade que facilitem a criação de um ambiente favorável à aprendizagem matemática. Portanto, é relevante entender o tipo de proposta que aparece nos livros em atividades que se utilizam de tais TD. Mesmo há algum tempo, Lajolo (1996, p. 8) já trazia que “muitas vezes, o livro didático é inadequado pela irrelevância do que diz, pela monotonia dos exercícios que propõe, pela falta de sentido das atividades que sugere”. Sendo assim, só conter as TD não é suficiente para sugerir se o livro tem sido mais adequado ao contexto dos estudantes. É necessário levar a análise adiante.

Para isso, foi adotado o caminho metodológico para a análise dos dados baseado em Borba e Selva (2013), como explanado anteriormente. Retomando, a análise foi feita apresentando:

1. Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos manuais dos professores;
2. Como os LD propõem a utilização do SGD;
3. Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria; e
4. Os tipos de atividades apresentadas por meio do uso do referido software.

A seguir são apresentadas as três primeiras questões para cada uma das quatro coleções que foram analisadas na presente pesquisa, por serem consideradas descritivas. A quarta questão, por sua vez, será abordada no próximo capítulo.

### **5.1 COLEÇÃO APOEMA**

Na sequência é apresentada a primeira análise descritiva, da Coleção Apoema, dividida nos três tópicos citados.

#### **5.1.1 Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP**

O MP da Apoema mostra, em suas páginas iniciais, uma apresentação com sua proposta teórico-metodológica, sendo que todos os LD da coleção exibem a mesma parte exclusiva do MP, o que ocorre somente nessa coleção dentre as analisadas. Evidencia-se, nessas páginas, o conjunto de conteúdos para os Anos Finais do Ensino Fundamental, o que inclui uma subseção destinada ao trabalho com a Geometria.

Dentro dessa subseção de Geometria, o autor menciona pela primeira vez sobre softwares, ressaltando que as transformações geométricas podem ser melhor compreendidas com o uso desses, mencionado como um recurso muito atrativo ao universo dos alunos. Ao indicar como tal obra é conduzida, ainda na unidade de Geometria, o SGD é especificamente apontado, explanando que essa obra propõe tarefas<sup>23</sup> que se utilizam do mesmo.

Apesar do autor ressaltar essa questão de que há a proposição de tarefas com o uso de SGD, o Guia aponta que tal coleção apresenta deficiências na sugestão do emprego de recursos tecnológicos:

O pouco incentivo da coleção [Apoema] ao uso de recursos tecnológicos variados em sala de aula requer a complementação das atividades pelo professor, a partir da exploração de tecnologias midiáticas como computador, softwares, calculadoras, internet, simuladores, vídeos e vídeo-aulas, entre outros (BRASIL, 2019, p. 102).

Ainda nas páginas iniciais do MP, a obra trata sobre os recursos didáticos, trazendo como um deles os softwares de Matemática, expondo quão significativas são as contribuições que seu uso oferece, pela possibilidade de manipulação dos objetos matemáticos, “já que é um recurso visual capaz de validar as propriedades estudadas em sala de aula” (LONGEN, 2018a, p. XVII).

Ainda é apontado que é importante avaliar as possibilidades experimentais disponíveis nos SGD e a sua contribuição para a elaboração de conjecturas, bem como a verificação por parte dos alunos. Por fim, a investigação matemática é apresentada como a principal potencialidade do software.

Na sequência do MP, são apresentadas as competências gerais e específicas de Matemática da BNCC, assim como as habilidades referentes a cada unidade temática de todos os Anos Finais do Ensino Fundamental.

---

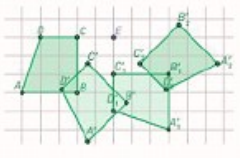
<sup>23</sup> O termo é apresentado pela própria coleção.

### 5.1.2 Como os LD propõem a utilização do SGD

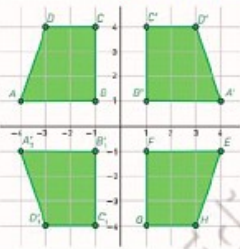
Nas páginas onde se encontram as atividades com o uso do GeoGebra, nove no total, há sempre a presença de orientações, competências gerais e específicas e habilidades da Base que se pode desenvolver, num quadro chamado “Na BNCC”, como pode ser visto na Figura 25.

**Figura 25** - Parte final da AP07: 8º ano

Depois, cliquem em  (Rotação em torno de um ponto), selecionem a parte interior do trapézio e, então, cliquem no ponto criado. Na caixa de diálogo, selecionem o ângulo e o sentido para o qual desejam que esse trapézio seja rotacionado. Por exemplo, a rotação a seguir se dá em torno do ponto  $E$ , a um ângulo de  $45^\circ$ , no sentido anti-horário.

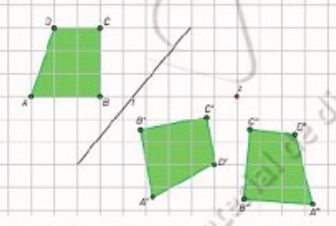


**4 Reflexão**  
Voltando ao trapézio inicial, utilizaremos os eixos do plano cartesiano para efetuar as reflexões. Cliquem no botão  (Reflexão em relação a uma reta) e, então, selecionem o interior do trapézio e um dos eixos do plano cartesiano para realizar a reflexão, considerando o eixo selecionado como uma reta. Façam isso sucessivas vezes, de maneiras diferentes. *As reflexões acompanham o trapézio inicial.*



Movam o trapézio inicial e verifiquem o que ocorre com suas reflexões.

**5** A partir das transformações exploradas nesta atividade, criem uma figura obtida a partir da composição de duas ou mais transformações geométricas, veja:



A terceira figura foi obtida refletindo a primeira sob o eixo  $l$ , e, posteriormente, rotacionando a segunda figura  $75^\circ$  em torno do ponto  $Z$ .  
Apresentem suas composições aos colegas! [Resposta pessoal.](#)

### Orientações

Ao finalizar os passos referentes às simetrias de rotação e reflexão, proponha aos alunos que façam composições das simetrias trabalhadas nesta seção para obterem produtos finais com base no desenho que criaram.

Esse trabalho possibilita a eles que tenham bagagem para elaborar outras composições e desfrutar do GeoGebra a fim de estimular sua criatividade e imaginação. Garanta um tempo para que explorem as ferramentas aprendidas e façam as composições com base nas figuras desenhadas no primeiro passo.

#### NA BNCC

##### HABILIDADE EF08MA18

Nesta seção os alunos podem traçar figuras obtidas por composições de transformações geométricas em um software de Geometria dinâmica.

Fonte: Longen (2018c, p. 237).

Dentro de tal quadro são trazidas apenas as numerações e siglas das competências e habilidades, respectivamente, mas a descrição na íntegra de como

constam na Base não é explanada. A coleção opta por descrever o porquê tais competências e habilidades estão sendo desenvolvidas, entretanto, cabe ao professor recorrer à BNCC para o conhecimento delas, caso seja de seu interesse.

Das nove atividades, em seis são trazidas as habilidades que se espera desenvolver, em cinco as competências gerais e em duas as competências específicas de Matemática. Destaca-se que na única atividade presente no LD do 7º ano, AP04, não consta o quadro “Na BNCC” e, dessa maneira, não é apresentado nenhum dos três tópicos citados da Base.

Na parte de Orientações, há diretrizes gerais sobre a implementação da atividade. Além disso, no início dessa seção, há a abordagem do que será feito, às vezes apresentando diretamente o objetivo da atividade, e, às vezes, explanando a maneira como será a execução da mesma. Não há um padrão para apresentação disto, o que proporciona uma certa confusão no resumo da atividade.

Em AP01 e AP02, há uma orientação inicial para que o professor leve os alunos até a sala de informática para a condução da atividade e confirme se o software está baixado em todos os computadores ou se é possível, havendo internet, entrar no site em que é apresentado o GeoGebra. Restrito ao LD do 6º ano, isso não aparece nos LD dos anos seguintes.

Além disso, em Orientações, há, por vezes, alerta aos professores de onde os alunos podem encontrar mais dificuldade na realização da atividade, ou sugestões extras que não constam para os alunos, destaques que o professor precisa enfatizar, como direcionar essa implementação, o que discutir ou incentivar nos alunos.

### **5.1.3 Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria**

O Quadro 2 apresenta um resumo da localização de tais atividades em termos de páginas dentro dos respectivos capítulos na coleção Apoema e, abaixo, um detalhamento desses locais.

**Quadro 2** - Localização das atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção Apoema

| Ano | Capítulo abordado             | p. inicial – p. final | Páginas da atividade                |
|-----|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| 6º  | 4: Figuras geométricas planas | 108 – 151             | AP01: 118<br>AP02: 124<br>AP03: 144 |
| 7º  | 8: Geometria                  | 232 – 257             | AP04: 248-249                       |

|              |                                                      |           |                                                 |
|--------------|------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------|
| 8º           | 8: Construções geométricas e medidas                 | 214 – 253 | AP05: 222-223<br>AP06: 230-231<br>AP07: 236-237 |
| 9º           | 3: Geometria                                         | 72 – 107  | AP08: 102-103                                   |
|              | 6: Relações métricas, construções e plano cartesiano | 168 – 201 | AP09: 197                                       |
| <b>Total</b> |                                                      |           | <b>14 páginas</b>                               |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

No LD do 6º ano, no capítulo 4<sup>24</sup>, de FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS, é onde aparecem as três atividades com o uso do GeoGebra. O capítulo inicia-se com a seção de ângulos, onde há uma apresentação sobre o assunto, assim como a orientação sobre como se usa o transferidor para determinar medidas de ângulos. Após algumas atividades aparece a seção Conviver, com a atividade AP01, intitulada Identificando ângulos, que objetiva que os alunos determinem a medida da abertura de ângulos. Ao final, é sugerido que, caso os alunos consigam imprimir os ângulos que foram feitos no software, que o façam com a finalidade de medi-los com o auxílio de um transferidor, conferindo os valores encontrados com aqueles apresentados pelo software.

Em seguida, há a explanação de retas paralelas e perpendiculares com a apresentação de uma atividade com o auxílio de um esquadro para que construam tais retas, e outra para que façam o segundo tipo com o uso de dobraduras. Posteriormente, aparece, então, a AP02 com o uso do GeoGebra, para que os alunos construam novamente retas paralelas e perpendiculares, agora, também, determinando a medida do ângulo entre eles. Essa atividade encerra a seção Ângulos.

Logo após, há a seção de Polígonos e suas principais características; de Quadriláteros e triângulos, com aspectos e classificações de ambos; Ampliação e redução de figuras planas; e Figuras semelhantes. Nessa última, apresenta-se, logo no início, meia página com a atividade no GeoGebra, AP03, cujo objetivo é que os alunos construam figuras semelhantes e percebam que os ângulos internos correspondentes de tais construções são sempre congruentes. Na página anterior, isso foi explanado, além do fato de haver uma proporcionalidade entre os lados, o que não é abordado na atividade no software.

Partindo para a AP04, única atividade presente no 7º ano, essa aparece no último capítulo do LD, o 8, intitulado GEOMETRIA. Inicialmente, há uma seção de Circunferências, onde é mostrada a construção desse objeto geométrico, utilizando o

<sup>24</sup> A coleção opta por chamar de Unidades e, dentro delas, há pequenos capítulos. Seguindo o padrão com relação à semelhança de páginas, para não comprometer a análise, optamos por denominar de Capítulos que são contidos por seções para todas as coleções.

compasso, sendo tratado, também, sobre o comprimento de uma circunferência. Na seção seguinte, sobre Construções de figuras geométricas, são apresentadas algumas como um triângulo equilátero, triângulo escaleno com medidas escolhidas previamente e hexágono regular, com o auxílio de instrumentos geométricos. Depois de algumas atividades em que são pedidas outras construções como de mediatrizes, retas paralelas e perpendiculares, aparece, ainda na mesma seção, a atividade no GeoGebra, objetivando que os alunos façam polígonos regulares e não regulares, circunferências e mediatrizes. Todas essas são orientadas a serem feitas por meio das ferramentas prévias que o próprio software possui, cabendo aos alunos, ao final, verificar que o ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um polígono regular é interno e, também, o centro desse polígono. Após isso, há a breve seção de Transformações geométricas e encerra-se o livro didático do 7º ano.

Considerando, agora, o LD do 8º ano, no capítulo 8 de CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E MEDIDAS, há três atividades, AP05, AP06 e AP07. O capítulo inicia-se com o ensino das construções de mediatriz de um segmento, bissetriz de um ângulo e ângulo reto, utilizando sempre régua e compasso. Nessa mesma seção, após isso, há a atividade AP05 objetivando fazer todas as construções que os alunos viram sobre ângulos e bissetrizes, mas agora em um SGD. Apesar do livro trazer isso como objetivo, tais construções são todas utilizando as ferramentas pré-definidas do próprio software.

Na sequência, há uma subseção intitulada Construções de polígonos regulares e é exposta a construção de um triângulo equilátero com régua e compasso, um quadrado com régua, esquadro e compasso e hexágono regular, também com régua e compasso. Para esse último polígono, chama a atenção por explicitar, a partir de três maneiras distintas, como traçar um hexágono regular. Após, aparece a AP06 com o uso do SGD, com o objetivo de que os alunos vejam a medida dos lados, dos ângulos internos e externos de polígonos regulares. A última questão dessa atividade trabalha novamente com a construção de um hexágono regular, mas não utiliza mais o SGD para tal, apesar de estar dentro da mesma seção Conviver, em que a AP06 se encontra.

Em seguida, há a seção de Transformações geométricas, sendo apresentados os conceitos de translação, rotação e reflexão, e logo aparece a AP07, com o objetivo de trabalhar com essas três transformações por meio de uma figura no SGD, bem como composições dessas. Na sequência, há apenas a seção de Volume e capacidade e o LD já é finalizado.

Por fim, no LD do 9º ano, primeiro há o capítulo 3 de GEOMETRIA, em que é trabalhada a ideia de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, semelhança de triângulos e seus segmentos proporcionais e Teorema de Tales; na sequência, há uma seção sobre Arcos e Ângulos na circunferência, sendo trabalhado comprimento de arco, ângulo central e inscrito e a relação entre esses dois últimos. Aqui entra a AP08.

Inicialmente, é para essa atividade ser trabalhada sem a utilização do SGD para a construção de um quadrilátero inscrito numa circunferência manuseando régua e compasso, sendo que os ângulos internos do quadrilátero devem ser medidos com o auxílio de um transferidor. Após algumas perguntas que levam os estudantes a perceberem a propriedade dos ângulos opostos como suplementares, sendo pedido até para traçarem outros quadriláteros, a propriedade é formalmente apresentada e é requerido para que os alunos busquem demonstrá-la algebricamente. Para isso, alguns direcionamentos são mostrados no intuito de auxiliar os alunos na demonstração.

Por último, empregando, então, o SGD, a atividade descreve que a propriedade exposta será verificada por meio do GeoGebra, solicitando que se mova os vértices do quadrilátero percebendo que os ângulos opostos se mantêm sendo suplementares, o que já foi feito previamente com lápis e papel por intervenção da questão que pedia para que fizessem vários desenhos e medissem tais ângulos. Após isso, há apenas atividades de retomada do capítulo e esse é encerrado.

Por fim, no capítulo 6, denominado RELAÇÕES MÉTRICAS, CONSTRUÇÕES E PLANO CARTESIANO, também há uma atividade com o uso de um SGD sendo apresentada no final, logo antes das atividades finais de retomada do capítulo. Até lá, são expostas as relações métricas no triângulo retângulo, bem como o Teorema de Pitágoras; na sequência, o plano cartesiano, com o cálculo das coordenadas do ponto médio e o cálculo da distância entre dois pontos; e uma seção sobre Polígonos regulares, explanando a construção de um octógono e um decágono regular inscritos em uma circunferência, com o auxílio de régua e transferidor. Aqui entra a AP09, com uma página.

Essa última atividade tem por base a pavimentação de um plano com polígonos regulares, em um cenário descrito como real, porém, por um ponto de vista teórico. Os alunos precisam perceber quais polígonos são possíveis para se pavimentar um plano, dentre os evidenciados, e o porquê disso. Por último, tendo uma situação que é necessário levar em conta fatores como área útil, é pedido que os alunos ilustrem um

esboço de um sítio considerando a área reservada para duas residências, uma piscina em formato circular e uma área de recreação infantil. As medidas do sítio de formato retangular são mostradas, bem como o máximo de área que as construções dentro do sítio devem ocupar.

## 5.2 COLEÇÃO ARARIBÁ

Na sequência é apresentada a segunda análise descritiva, da Coleção Araribá, dividida nos três tópicos citados.

### 5.2.1 Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP

A Araribá inicia seu MP com Orientações gerais e seus princípios norteadores presentes em todos os quatro livros da coleção. Na sequência, apresenta as 10 competências da BNCC (BRASIL, 2018) com uma introdução ao uso das TD, pela competência geral de número 5, bem como a competência específica de Matemática número 5, que tratam especificamente sobre estas.

Logo em seguida, o livro traz uma seção para tratar especificamente dos processos de ensino-aprendizagem mediados pelas Tecnologias da Informação e Comunicação. Ao argumentar sobre a importância de o professor assumir um papel de protagonista na busca por criar novas atividades tendo os recursos digitais como possibilidade para ampliação do seu campo de ação didática, Gay e Silva (2018a) introduzem o fato de que a coleção traz atividades que utilizam SGD, entre outras TD.

Por fim, na parte que cabe a todos os MP da coleção, os autores apresentam diversas referências de leitura para o desenvolvimento profissional do professor. Algumas dessas abordam sobre TD ou especificamente sobre um SGD, apesar de não haver uma organização dessa parte que deixe tais temas mais clarificados.

Na sequência, os MP trazem alguns textos de aprofundamento que se referem aos capítulos específicos dos respectivos anos do Ensino Fundamental, com orientações aos professores, exercícios resolvidos, bem como sugestões de atividades, como jogos e resolução de problemas. Após isso, há mais algumas páginas que são comuns aos quatro livros da coleção.

Nessa segunda parte em comum, há uma explanação de como a coleção está organizada. Isto posto, a seção Informática e Matemática é apresentada. Nesse seguimento, os autores especificam que as atividades que estão contidas em tal seção trabalham os conteúdos matemáticos por meio das TD, incluindo o SGD. Eles também apontam que tais atividades estão sempre divididas em duas: Construa e Investigue, esclarecendo que na primeira é exibido um texto com instruções para que os alunos construam as figuras solicitadas seguindo tais indicações e, na segunda, há a possibilidade de os alunos medirem, investigarem e levantarem hipóteses a respeito do que foi construído por meio das ferramentas do software. Os autores ainda argumentam que essa seção está de acordo com as competências elencadas pela BNCC.

O Guia identifica a referida seção, ressaltando que conceitos matemáticos são abordados por meio de atividades com o apoio de TD, tais como softwares, e, ao abordar especificamente sobre a Geometria, oferece a seguinte ênfase:

Destaque para o trabalho sofisticado realizado com as transformações geométricas nos volumes do 7º e do 8º anos (Reflexão em relação a um ponto, em relação a uma reta e em relação à origem ou aos eixos do plano cartesiano e Rotação e Translação na Malha Quadriculada, Composições de Reflexão, Rotação e Translação etc.). Também merece destaque as diversas atividades de geometria propostas com o uso de tecnologias digitais como é o caso de softwares de geometria dinâmica, que favorece a proatividade do estudante (BRASIL, 2019, p. 106).

Dessa maneira, é possível ver que, diferentemente da primeira coleção, a Araribá é reconhecida por seu trabalho com as TD, ganhando ênfase no Guia, destaque esse que também pode-se perceber por meio das Orientações gerais aos professores, expostas no Manual.

### **5.2.2 Como os LD propõem a utilização do SGD**

A coleção Araribá opta por apresentar sempre dois ou três tópicos ao lado das atividades, sendo os itens destes trazidos em *bullets*, como pode ser visto na Figura 26.

Figura 26 - Atividade AR12: 8º ano

**INFORMÁTICA E MATEMÁTICA**

Nessa construção do trapézio isósceles, optamos por partir de um triângulo isósceles. Explore outras possibilidades com os alunos, utilizando, por exemplo, a reflexão para construir os lados de mesma medida.

**Verificando experimentalmente algumas propriedades dos trapézios isósceles**

Nesta seção, você vai utilizar um software de Geometria dinâmica para construir um trapézio isósceles e investigar suas propriedades.

**CONSTRUA**

**Trapézio isósceles e suas diagonais**

Siga os passos abaixo para construir um trapézio isósceles.

- 1º) Construa um segmento de reta  $\overline{AB}$ .
- 2º) Trace a mediatriz  $m$  de  $\overline{AB}$ .
- 3º) Marque um ponto  $P$  qualquer na mediatriz.
- 4º) Trace os segmentos de reta  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$ .
- 5º) Marque um ponto  $C$  qualquer em  $\overline{PB}$ , com  $C$  distinto de  $P$  e de  $B$ .
- 6º) Trace uma reta  $r$ , paralela a  $\overline{AB}$ , passando por  $C$ .
- 7º) Marque  $D$ , interseção da reta  $r$  com  $\overline{PA}$ .
- 8º) Construa o trapézio  $ABCD$ .
- 9º) Se desejar, esconda as construções de suporte.
- 10º) Trace o segmento de reta  $\overline{AC}$  e o segmento de reta  $\overline{BD}$ , diagonais do trapézio.

Recomende aos alunos que não escondam o ponto  $P$  para possibilitar outras afirmações na configuração do trapézio.

**INVESTIGUE**

Faça o que se pede usando as ferramentas do software.

- a) Meça os ângulos internos do trapézio isósceles. Observe essas medidas e movimente a construção. O que é possível perceber?
- b) Meça as diagonais do trapézio. O que é possível observar?

Espera-se que os alunos percebam que os ângulos adjacentes a uma das bases do trapézio isósceles são congruentes.

Espera-se que os alunos observem que as diagonais do trapézio isósceles são congruentes.

**Objetivos**

- Investigar algumas propriedades dos trapézios isósceles utilizando um software de Geometria dinâmica.
- Favorecer o desenvolvimento da competência geral 5 e da competência específica 2 da BNCC.

**Orientações**

- Nessa seção, os alunos terão a oportunidade de construir um trapézio isósceles e investigar algumas de suas propriedades, como o fato de os ângulos adjacentes a uma de suas bases serem congruentes e suas diagonais também serem congruentes. É importante deixá-los livres para interagir com seus pares e estabelecer conjecturas. Novamente enfatize que as investigações realizadas apenas sugerem que essas propriedades são válidas e que elas serão demonstradas, nas páginas seguintes, por meio da identificação de triângulos congruentes.
- A seção favorece o desenvolvimento da competência geral 5 e da competência específica 2 da BNCC, porque os alunos colocam em prática o espírito investigativo para produzir conhecimento usando uma tecnologia digital.

Competência geral 5: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Competência específica 2: Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

125

Fonte: Gay e Silva (2018c, p. 125).

Os dois ou três tópicos estão entre: Objetivos, Habilidade da BNCC e Orientações, nessa ordem. No primeiro, é sempre exposto como objetivo, além da questão relacionada à atividade em si, favorecer o desenvolvimento de algo relacionado à BNCC, seja ele competência geral, específica ou habilidades, excetuando apenas a atividade AR15, que não há citação da Base.

Quando se propicia o desenvolvimento de alguma habilidade, há, então, o segundo tópico descrito – Habilidade na BNCC –, descrevendo o porquê tal atividade favorece esse referido desenvolvimento. Ao fim da página, aquilo que está sendo fundamentado, de acordo com a Base, é descrito de maneira literal, como pode ser visto por meio da Figura 26.

Também há sempre a descrição de Orientações para o professor. Neste tópico, há um pequeno resumo do que os alunos farão naquela atividade proposta. Além disso, em geral, divide-se as orientações que cabem à construção e à investigação, separação

que o próprio livro didático propõe para as atividades. Também há um cuidado na ênfase que o professor precisa dar nas investigações feitas pelos alunos, que apesar de sugerirem, não justificam que uma proposição é verdadeira, sendo que essas serão demonstradas nas páginas seguintes, sendo tal cuidado repetido em várias atividades. Isso também está exemplificado pela Figura 26.

No mais, ainda dentro do referido tópico, há orientações que o professor precisa dar aos alunos quanto ao uso do software em si; sugere-se, também, outras formas de construção de algum objeto geométrico que os alunos foram instruídos a construir para complementar as ideias que estão sendo trabalhadas; ressalta-se a importância do uso de esconder objetos, o que o difere de apagá-los, diferenciação essa bem esclarecida; ainda, são trazidas definições para os alunos relembrares e sugestões para troca de ideias e compartilhamento entre os colegas.

### 5.2.3 Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria

No Quadro 3, é possível encontrar um resumo das atividades que sugerem o uso de um SGD, que serão explanadas na sequência em termos de páginas dentro dos respectivos capítulos.

**Quadro 3** - Localização das atividades que sugerem o uso de um SGD por capítulo na coleção Araribá

| Ano          | Capítulo abordado                           | p. inicial - p. final | Páginas da atividade       |
|--------------|---------------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 6º           | 7: Retas e ângulos                          | 162 – 181             | AR01: 174-175              |
|              | 10: Localização e polígonos                 | 228 – 249             | AR02: 238-239<br>AR03: 264 |
| 7º           | 3: Ângulos                                  | 64 – 93               | AR04: 75<br>AR05: 79       |
|              | 8: Polígono, circunferência e círculo       | 198 – 212             | AR06: 201-202              |
|              | 12: Transformações geométricas              | 290 – 321             | AR07: 306-307              |
| 8º           | 2: Retas e ângulos                          | 49 – 79               | AR08: 63-65                |
|              | 3: Congruência de triângulos                | 80 – 108              | AR09: 87<br>AR10: 99-100   |
|              | 4: Quadriláteros                            | 109 – 131             | AR11: 116<br>AR12: 125     |
| 9º           | 3: Circunferência                           | 56 – 87               | AR13: 67                   |
|              | 5: Semelhança                               | 112 – 149             | AR14: 130                  |
|              | 6: Relações métricas no triângulo retângulo | 150 – 201             | AR15: 151                  |
| <b>Total</b> |                                             |                       | <b>22 páginas</b>          |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

No LD do 6º ano, encontramos três atividades. A atividade AR01, com duas páginas, do capítulo 7 de RETAS E ÂNGULOS, tem por objetivo construir pontos,

retas paralelas, retas perpendiculares, semirretas, segmentos de reta e ângulos, com a questão final de que os alunos verifiquem que a menor distância entre um ponto e uma reta é a medida do segmento formado entre eles com um ângulo reto. A AR01 encontra-se antes das atividades finais do capítulo, quando já foi apresentada aos alunos a definição e a representação de todos esses objetos geométricos citados que estão propostos para construção.

Já a AR02, também com duas páginas do capítulo 10 de LOCALIZAÇÃO E POLÍGONOS, é para construção de quadriláteros por meio de retas paralelas. É esperado que os alunos percebam que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes. Tal atividade vem após a seção de quadriláteros que define trapézios, paralelogramos e os casos específicos desse, como quadrados, retângulos e losangos. O objetivo final da AR02 que se refere aos alunos perceberem a propriedade da congruência de lados opostos do paralelogramo não é sistematizada até então, sendo que, após essa atividade, o assunto também não é abordado novamente dentro desse capítulo.

Por fim, a AR03 com uma página tem por objetivo que os alunos construam um retângulo e conjecture que sua área é base multiplicada pela altura e que a do quadrado pode seguir a mesma ideia por ser um caso particular do retângulo. Antes disso, o capítulo aborda sobre grandezas, medidas de comprimento, de superfície e explana sobre o significado de perímetro. A área do retângulo, vista pela primeira vez na AR03, é exposta logo após a atividade com algumas questões, sendo a área de um triângulo retângulo também apresentada antes das atividades finais e complementares do livro.

No 7º ano, há quatro atividades no total. Abordando inicialmente as duas primeiras atividades que estão no capítulo 3, de ÂNGULOS, é possível notar a AR04, com o objetivo de que os alunos verifiquem que os ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) são iguais. Antes, é apresentado aos alunos o que são os ângulos chamados o.p.v. e é por meio da atividade com o uso do software que os mesmos descobrem a propriedade que afirma que os tais ângulos são iguais. Após essa página de atividade, há a justificativa da conjectura com a sistematização da mesma.

Depois de duas páginas com atividades e a apresentação dos ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal, há meia página com a AR05, objetivando identificar as relações entre os ângulos citados. É importante destacar que uma atividade chamada ‘para investigar’ se encontra no início da mesma página que

possui objetivo equivalente que a atividade com o SGD, sendo a única diferença que essa primeira é para ser feita com o auxílio do transferidor, lápis e papel.

No capítulo de POLÍGONO, CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO, o 8, após três páginas com explicações sobre esse primeiro tópico, encontra-se a atividade AR06, para que os alunos construam mosaicos com diferentes polígonos regulares. A partir de tais construções, os alunos deverão, na investigação, calcular as medidas dos ângulos internos de alguns polígonos regulares sem o uso de fórmulas específicas.

A última atividade do 7º ano no capítulo 12, de TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS, AR07, encontra-se após toda a explanação dos conteúdos, apenas antes de tópicos sobre história da Matemática e atividades complementares finais. Tal atividade, com duas páginas, objetiva que os alunos construam as figuras obtidas pelas transformações geométricas de: reflexão em relação a uma reta e a um ponto, translação e rotação.

No LD do 8º ano encontram-se as AR08 até AR12. No capítulo 2, de RETAS E ÂNGULOS, há uma atividade no final do capítulo com duas páginas e meia, AR08, apenas antes de atividades e problemas finais, com o objetivo de construir mediatriz, bissetriz e ângulo de 60º a partir de circunferências. Todas essas construções são sugeridas nas páginas anteriores com o uso de régua e compasso.

No 3º capítulo, após a explanação de triângulos abordando seus ângulos internos e o ponto notável baricentro, há uma atividade, AR09, na seção ‘Informática e Matemática’, com o objetivo de investigar a propriedade que diz que a distância de cada vértice do triângulo ao baricentro é o dobro da distância entre o baricentro e o ponto médio do lado oposto, propriedade essa ainda não abordada anteriormente.

Após a apresentação de mais alguns pontos notáveis como ortocentro, incentro e circuncentro, os quatro casos de congruência de triângulos e propriedades dos triângulos isósceles e equilátero que envolvem lados e ângulos, encontra-se a AR10, com o objetivo de que os alunos construam um triângulo de cada tipo mencionado, bem como seus respectivos quatro pontos notáveis. Ao final, os alunos devem verificar experimentalmente os teoremas de que a mediatriz, a altura e a mediana relativas à base e a bissetriz relativa ao ângulo oposto à base coincidem no triângulo equilátero, bem como que os pontos notáveis estão alinhados num triângulo isósceles. Tais teoremas são demonstrados nas duas páginas seguintes à atividade.

As duas últimas atividades do livro do 8º ano, AR11 e AR12, que se encontram no capítulo de QUADRILÁTEROS, possuem uma página cada. Depois da explanação

sobre elementos de um quadrilátero e aqueles que são notáveis, incluindo o paralelogramo e o trapézio, há a atividade AR11 que tem por objetivo investigar três propriedades dos paralelogramos que não foram abordadas anteriormente: os lados são congruentes, ângulos opostos também e, as diagonais desse quadrilátero se cruzam em seus respectivos pontos médios. Nas próximas duas páginas há a demonstração de todas as propriedades apresentadas na atividade.

Na sequência, são abordadas propriedades dos paralelogramos notáveis que são os retângulos, losangos e quadrados. Após isso, a atividade AR12 dessa coleção tem o objetivo de identificar experimentalmente algumas propriedades do trapézio isósceles, também não abordadas anteriormente.

Por fim, no LD do 9º ano, encontra-se a AR13 no capítulo 3, CIRCUNFERÊNCIA, com a explanação das definições e diferenças entre circunferência e círculo, posições relativas de pontos e retas em relação a uma circunferência, bem como entre duas circunferências, e, por último, ângulos nesse objeto geométrico, tratando os conceitos do central e o inscrito. Dessa maneira, após isso, há a atividade com o uso do SGD que objetiva que os alunos investiguem sobre a relação entre as medidas do ângulo inscrito na circunferência e do ângulo central correspondente ao mesmo arco, sendo que o primeiro é metade do segundo. Após a atividade, há a demonstração do teorema que foi proposto aos alunos verificarem experimentalmente.

No capítulo seguinte de SEMELHANÇA, é possível verificar a retomada de alguns conceitos, a explicação de figuras semelhantes, afunilando para polígonos semelhantes e, na sequência, triângulos semelhantes. Dentro dessa última seção, há um tópico do livro envolvendo História da Matemática explanando uma relação entre o matemático, filósofo e cientista grego Tales de Mileto e a aplicação da semelhança de triângulos. Após uma página de atividades para ‘aplicar’, finalmente a AR14, sobre o Teorema de Tales. O título, inclusive, aparece a primeira vez no LD dentro dessa atividade com o uso do SGD, objetivando que os alunos ‘verifiquem experimentalmente’ o Teorema de Tales, envolvendo a razão entre segmentos, seguindo uma mesma proporção. Na página seguinte o Teorema é enunciado e, posteriormente, demonstrado.

Por fim, a última do LD do 9º ano, AR15, apresenta a atividade com o uso do SGD logo na 2ª página do capítulo de RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (aquela que aparece mais rápido dentre um capítulo comparando com

todas as 36 das quatro coleções). O objetivo é que ‘verifiquem experimentalmente’ a validade do Teorema de Pitágoras. Apesar de aparecer logo no início do capítulo, o teorema já foi enunciado na primeira página. Dessa maneira, a atividade traz à tona como o teorema só é válido em triângulos retângulos, uma vez que é pedido, inicialmente, que os alunos construam um triângulo qualquer e percebam que a soma das áreas dos quadrados sob dois lados só será igual à área do quadrado sob o outro lado se houver um ângulo reto no triângulo construído. Na página seguinte, o teorema é demonstrado geometricamente.

### 5.3 COLEÇÃO A CONQUISTA DA MATEMÁTICA

Na sequência é apresentada a terceira análise descritiva, da Coleção A Conquista da Matemática.

#### 5.3.1 Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP

O MP inicia com orientações gerais para o professor e, na sequência, faz considerações sobre o ensino de Matemática. Das quatro considerações, a terceira é sobre as potencialidades das TD no ensino e na aprendizagem. Essa seção traz o livro Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), porém, na versão de 2014, como referência para uma retomada do panorama das quatro fases, argumentando que, a partir delas, é possível perceber a dimensão da força e rapidez com que as TD têm, cada vez mais, estado na vida das pessoas, sendo que seu uso não pode ser retardado nas escolas, defendendo que a utilização das mesmas tem papel preponderante na formação do cidadão nos dias de hoje.

Para finalizar as ideias dessa seção, os autores expõem que as TD são ferramentas de trabalho pedagógico que podem ser usadas livremente na realização de atividades de formas criativas, mas que ainda existem muitos embates sobre a sua utilização na educação, deixando como indicação bibliográfica, nas referências finais, algumas pesquisas para entender esse universo do ciberespaço e as possibilidades que surgem com ele. Na parte das referências não há um destaque com relação às TD. Essas referências citadas pelos autores misturam-se a todas as outras referências utilizadas

nessa parte inicial do MP. Após essa seção, a coleção não cita mais especificamente sobre esse assunto.

Com relação ao Guia, este afirma que A Conquista da Matemática fomenta a utilização de softwares e outras tecnologias no ensino da Matemática, sendo que é colocado como um dos objetivos da coleção: buscar “uma relação significativa entre o aluno e os conhecimentos matemáticos, por meio da curiosidade e da investigação, pautando-se na modelagem, na resolução de problemas e no uso das tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 94).

### **5.3.2 Como os LD propõem a utilização do SGD**

Na coleção A Conquista da Matemática, nas quatro atividades com a utilização do SGD, uma em cada ano, são expostas Orientações Didáticas para o professor. Dentro deste tópico, às vezes é apontado o resumo do que está sendo proposto naquela seção, e os objetivos que o professor precisa ter em mente ao trabalhar tal atividade com seus alunos, como: ressaltar que a Matemática está inserida em diversas manifestações artísticas, explorar recursos diferentes do GeoGebra, encorajar os estudantes a pesquisarem vídeos e sites que ensinem a explorar recursos do referido software, sistematizar conceitos trabalhados, ajudar os alunos e discutir pontos específicos com eles.

Em duas oportunidades, é apresentado um segundo tópico chamado ‘Ampliando’, com links para pesquisa por parte do professor: na atividade do 6º ano, um link para ampliação do conhecimento sobre o conteúdo trabalhado naquela seção e, no 7º, um site voltado para o uso do GeoGebra, apresentando esse software, como pode ser visto na Figura 27.

**Figura 27 - Parte da CM02 sobre simetria de translação: 7º ano**

**Resposta pessoal; o comprimento do vetor é igual à distância entre os vértices da primeira figura e seus correspondentes na segunda figura.**

• **Simetria de translação**

Usando a ferramenta , desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta , desenhe um vetor horizontal acima do polígono desenhado.

Em seguida, usando a ferramenta , clique, primeiro, no polígono criado e, em seguida, no vetor traçado para obter uma figura simétrica por translação. Veja o exemplo ao lado.

Depois, usando a ferramenta , determine a distância entre os vértices correspondentes das duas figuras.

Responda às questões no caderno.

1. Analisando as medidas obtidas, o que podemos observar? *Todas as medidas são iguais.*
2. Ao desenhar o vetor, dois pontos ficaram destacados. Use a ferramenta  e determine a distância entre eles (comprimento do vetor). Compare, então, esse valor com as medidas obtidas durante a construção. O que podemos concluir?
3. Com o *mouse*, clique no ponto *F* do vetor e depois movimente-o. O que ocorre com a segunda imagem criada? A relação existente entre o comprimento do vetor e as distâncias entre os vértices permanece a mesma? *A segunda imagem se movimenta na mesma direção do vetor; a relação permanece a mesma: o comprimento do vetor é igual à distância entre os vértices da primeira figura e seus correspondentes na segunda figura.*

• **Simetria de rotação**

**SAIBA QUE**

Vetor é um objeto matemático que tem direção, sentido e comprimento.

Se possível, é interessante que os alunos realizem as construções descritas para cada tipo de simetria utilizando o GeoGebra, de modo a praticar o uso das ferramentas de simetria apresentadas.

**AMPLIANDO**

**Link**

O site <<http://livro.pro/2p9ezj>> (acesso em 25 out. 2018) é todo voltado para o *software* GeoGebra. Nele, é possível encontrar vários vídeos sobre como usar esse *software*, desde sua instalação e construções básicas da Geometria até cursos mais complexos do que pode ser feito com o *software*. A seção do site **Perguntas e respostas** apresenta alguns tutoriais de como usar o GeoGebra.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 93).

### 5.3.3 Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria

No Quadro 4, é possível encontrar um resumo das atividades que sugerem o uso do GeoGebra que será explanado na sequência, em termos de páginas dentro dos respectivos capítulos.

**Quadro 4 - Localização das atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção A Conquista da Matemática**

| Ano          | Capítulo abordado                        | p. inicial - p. final | Páginas da atividade |
|--------------|------------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| 6º           | 7: Ângulos e polígonos                   | 200 – 233             | CM01: 230-231        |
| 7º           | 3: Transformações geométricas e simetria | 76 – 97               | CM02: 92-93          |
| 8º           | 6: Polígonos e transformações no plano   | 166 – 199             | CM03: 194-195        |
| 9º           | 4: Relações entre ângulos                | 118 – 143             | CM04: 138-139        |
| <b>Total</b> |                                          |                       | <b>8 páginas</b>     |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

No LD do 6º ano, a única atividade demonstrada, CM01, com duas páginas, encontra-se no capítulo 7 de ÂNGULOS E POLÍGONOS, tendo por objetivo que os estudantes construam polígonos, regulares e não regulares, e percebam as características da homotetia, com fatores entre 0 e 1 (resultando na redução do polígono) e maior que 1 (resultando na ampliação do polígono). Essa atividade encontra-se antes das atividades de retomada do fim do capítulo. Previamente, houve a explanação do que são polígonos, tipos de polígonos e suas nomenclaturas, a definição de polígonos regulares e como

construí-los num plano cartesiano, porém, a ideia de homotetia, ampliação e redução de polígonos não foi abordada previamente.

Já CM02, também com duas páginas, presente no capítulo de TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA do 7º ano, objetiva utilizar ferramentas de simetria para fazer construções e, a partir disso, perceber relações que se mantêm nas simetrias de reflexão, translação e rotação, como a distância com relação ao eixo de simetria que se mantém na reflexão e as medidas dos polígonos criados que não se alteram a partir dessas transformações. Todos esses tipos de simetria já foram abordados anteriormente no LD.

No LD do 8º ano, localiza-se a CM03, no capítulo de POLÍGONOS E TRANSFORMAÇÕES NO PLANO, a qual objetiva que os alunos construam um objeto geométrico a partir da composição das simetrias de reflexão, translação e rotação e, ao moverem um ponto, visualizem como isso altera o restante da construção. Além da abordagem já citada no 7º ano, as transformações geométricas aqui são aprofundadas nesse LD antes da CM03.

Por fim, no LD do 9º ano encontra-se a CM04 no capítulo de RELAÇÕES ENTRE ÂNGULOS, objetivando que os estudantes verifiquem que todo ângulo inscrito em uma circunferência tem medida igual à metade do ângulo central correspondente a ele. Essa relação já foi explanada anteriormente no LD, bem como demonstrada. Foram apresentadas atividades utilizando essa relação e, na sequência, aparece a CM04 para tal verificação. Assim como em todos os outros LD dessa coleção, tal atividade localiza-se mais ao fim do capítulo, antes da seção de atividades de retomada final.

## 5.4 COLEÇÃO TELÁRIS

Na sequência é apresentada a quarta e última análise descritiva, sendo esta referente à Coleção Teláris.

### 5.4.1 Como os professores são informados sobre o uso das TD no Guia, divulgado pelo PNLD e nos MP

No MP dessa coleção, no que concerne às primeiras páginas, o autor faz uma divisão em parte geral (presente em todos os LD da coleção) e parte específica (que considera o que está presente no livro daquele ano).

Na parte geral, inicialmente, o autor expõe os fundamentos teóricos de sua coleção. Nesse tópico, há orientações metodológicas para o que ele considera como um trabalho significativo com os alunos. Uma de suas orientações é permitir o uso adequado de computadores em sala de aula. Após isso, ele expressa a interdisciplinaridade da Ciência e Tecnologia, argumentando que o ensino da Matemática deve contemplar, também, o conhecimento tecnológico. Após mais algumas exposições, o autor trata das seções que há na coleção e como explorá-las. Ao falar da seção de Matemática e tecnologia, seção em que as atividades com o GeoGebra estão presentes, ele apresenta o seguinte:

Além de se aproximar da linguagem cotidiana e atual da maioria dos alunos, o uso da tecnologia permite construir, de maneira precisa e com pouco esforço, modelos que demandariam grande habilidade para desenhá-los na lousa. Ainda possibilita a visualização e a manipulação de construções de maneira dinâmica, com grande precisão e beleza (DANTE, 2018a, p. XIX).

Sendo assim, pode-se perceber a concepção do autor, que considera mais do que as facilidades que a construção no SGD pode trazer, mas como essa construção permite a visualização e manipulação, pelo dinamismo do software.

Ao fim da parte geral, há referências sobre vários assuntos, dentre eles, sobre tecnologias. Destaca-se que algumas das referências trazidas no LD coincidem com escolhas para compor o referencial da presente dissertação, como Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2019).

Na parte específica, o autor resume os objetivos de cada conjunto de páginas dos LD, o que inclui as que contêm as atividades com o uso do GeoGebra, sendo esse o software que é especificado para uso nas atividades dentro da seção de Matemática e Tecnologia.

Com relação ao Guia, é relatado que a coleção explana questões em diferentes contextos, o que inclui os softwares livres, e propõe o uso do GeoGebra para construções de figuras geométricas. O Guia ainda apresenta a seguinte orientação aos professores:

É importante que o professor esteja atento para utilização dos diversos recursos, tais como: calculadora, instrumentos de medida, softwares. Recomenda-se que o professor esteja atento ao excesso de atividades que tratam da ação de resolver e poucos que exigem a ação de elaborar (BRASIL, 2019, p. 152).

### 5.4.2 Como os LD propõem a utilização do SGD

Na parte geral do MP, o autor traz alguns recursos didáticos auxiliares, sendo um deles o Computador, e, dentro desse tópico, aborda dois SGD: GeoGebra e Geometricks. Em ambos, ele explica brevemente sobre o surgimento de cada um e seus respectivos criadores. O GeoGebra é o mais destacado pelo autor, aconselhando o professor para que, antes de usar o software pela primeira vez, dê um tempo aos alunos para que explorem o programa, levantando, em seguida, algumas funcionalidades do mesmo. Ao fim de ambos os SGD, há sites que o professor pode consultar para conhecer melhor sobre cada um.

Nas páginas em que TE01 à TE08 estão inseridas, é possível notar, no U, a presença de um quadro que apresenta as habilidades da Base que se espera trabalhar por meio daquela respectiva atividade, chamado Principal (ou Principais) habilidade(s) da BNCC. Após o quadro, aparecem orientações diversas aos professores.

Dentre essas orientações, pode-se notar: sugestões para ensinar o que está sendo feito por meio do SGD, mas com instrumentos geométricos, como régua e compasso, a fim de comparar tais construções, também para que permita aos alunos explorarem mais o software; sugestões de atividades para o professor trabalhar que vão além do que está sendo descrito somente para os alunos, de questionamentos a serem feitos aos estudantes antes do início da mesma ou para que leia a introdução sobre o GeoGebra e para que o próprio professor explore mais o SGD, a fim de familiarizar-se e descobrir mais sobre suas potencialidades, bem como verificar o laboratório de informática para a possibilidade de realização das atividades antes que elas ocorram; há, também, alertas diversos como de que “as construções utilizando rapidamente as ferramentas de retas perpendiculares e retas paralelas desse software são úteis, mas pouco instrutivas no estudo da Geometria” (DANTE, 2018a, p. 138); ainda, é feita a retomada do que foi realizado anteriormente com o uso do SGD e é pedido que o professor faça relações entre o que foi estudado e o que está sendo feito na presente atividade.

Há um destaque para TE06, TE07 e TE08. Na primeira, é possível perceber uma sugestão para que os alunos criem um tutorial ou roteiro com as aprendizagens desenvolvidas no GeoGebra e compartilhem com outras turmas com o intuito de incentivar aos colegas a também utilizarem tal programa. Essa atividade traz como sugestão extra que os alunos refaçam as criações baseadas nas obras de Escher, já que

estão sendo trabalhadas as transformações geométricas de rotação, translação e reflexão, bem como suas composições, como pode ser visto no canto direito da Figura 28.

**Figura 28 - Parte da TE06: 8º ano**



**6º passo:** Clique na opção "Ponto"  e, depois, clique em 1 ponto na tela, fora do vetor, da reta e dos quadriláteros que você construiu. Nomeie-o como  $P$ . Esse ponto será o centro de rotação.

**7º passo:** Clique na opção "Rotação em torno de um ponto"  e, depois, clique no quadrilátero  $A''B''C''D''$  e no ponto  $P$  que você construiu. Na janela que abrir, escolha a medida de abertura do ângulo e o sentido da rotação. Aparecerá um quadrilátero simétrico aos 3 quadriláteros que você construiu. Nomeie os vértices desse quadrilátero como  $A''', B''', C'''$  e  $D'''$ , respectivamente.

Fonte: Dante (2018c, p. 248).

#### Matemática e tecnologia

Solicite aos alunos que sigam os passos apresentados para fazer a reflexão da imagem em relação a uma reta e, depois, a rotação dessa outra imagem em relação a um ponto.

Ao final, sugira aos alunos que criem um pequeno roteiro ou tutorial contendo as aprendizagens desenvolvidas ao utilizar o GeoGebra e o compartilhem com outras turmas, incentivando os colegas a utilizar o programa.

#### Questão

Permita que façam diversas figuras e transformações geométricas. Aconselhe os alunos até mesmo a tentarem refazer, no GeoGebra, as criações baseadas nas obras de Escher que fizeram na página 247.

A TE07 expõe, no U, sugestões para o professor executar algumas propostas que estão presentes em sites como o da Universidade Federal de Santa Maria (RS) e da Revista Nova Escola. Os links de ambos são apresentados. Por fim, a TE08 sugere um texto sobre Ensino da Matemática e Tecnologia para ser lido e debatido com os alunos, bem como há a sugestão para que o professor proponha aos mesmos uma pesquisa sobre esse assunto para ampliar essas conversas e reflexões.

### 5.4.3 Como as atividades que utilizam esses softwares são distribuídas nos LD, de acordo com as séries e os conteúdos de Geometria

O Quadro 5 apresenta um resumo da localização das atividades em termos de páginas dentro dos respectivos capítulos na coleção Teláris.

**Quadro 5 - Localização das atividades que sugerem o uso do GeoGebra por capítulo na coleção Teláris**

| Ano | Capítulo abordado                               | p. inicial – p. final | Páginas da atividade       |
|-----|-------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 6º  | 5: Ângulos e polígonos                          | 120 – 167             | TE01: 138-139<br>TE02: 155 |
| 7º  | 5: Geometria: circunferência, ângulo e polígono | 132 – 179             | TE03: 149-150              |

|              |                                                  |           |                                |
|--------------|--------------------------------------------------|-----------|--------------------------------|
|              | 6: Simetria                                      | 180 – 203 | TE04: 197-199                  |
| 8º           | 2: Lugares geométricos e construções geométricas | 54 – 75   | TE05: 63-66                    |
|              | 8: Transformações geométricas                    | 234 – 253 | TE06: 248-249                  |
| 9º           | 7: Circunferências e círculos                    | 206 – 235 | TE07: 221-222<br>TE08: 230-231 |
| <b>Total</b> |                                                  |           | <b>18 páginas</b>              |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

A TE01, presente no LD do 6º ano no capítulo 5, de ÂNGULOS E POLÍGONOS, é para construção de retas perpendiculares e paralelas, com a medição de ângulos formados entre as retas, aparecendo em duas páginas. O autor especifica que essa atividade é para, também, conhecer o SGD, encontrando-se após a explanação de ponto, plano e reta e a ideia de ângulo, associado principalmente ao giro, os tipos de ângulos, bem como o ensino da utilização do transferidor.

Na 3ª seção, sobre retas paralelas e concorrentes, é abordada a ideia das posições relativas entre duas retas e como construir tais retas com o auxílio de régua e esquadro. Aqui encontra-se a atividade no GeoGebra, TE01, que requer dos alunos que façam novamente retas perpendiculares e paralelas, mas agora, a partir de circunferências. Após isso, é esclarecido sobre a função que há nesse SGD que constrói tais retas de maneira mais direta, sendo pedido aos alunos que utilizem tais ferramentas para construir mais algumas. A ideia do menor ângulo formado entre duas retas concorrentes oblíquas é brevemente explorada por meio de um último passo também.

A TE02, presente no mesmo capítulo, o autor expõe que essa é subsequente à TE01, sendo o objetivo construir quadriláteros a partir das retas perpendiculares e paralelas aprendidas na primeira atividade. Apesar disso, os alunos não devem usar a construção a partir de circunferências, como especificado anteriormente, mas a partir das funções que o software apresenta. Entre essas duas atividades há duas seções: uma de regiões planas e contornos e outra de polígonos. Nessa última, são mostrados os principais elementos desses, os tipos, e as classificações dentro dos triângulos e quadriláteros.

Tendo em vista agora o livro didático do 7º ano, o capítulo 5, GEOMETRIA: CIRCUNFERÊNCIA, ÂNGULO E POLÍGONO, aborda inicialmente as definições de círculo e circunferência, apresentando a construção com régua e compasso dessa segunda. A próxima seção é sobre ângulos, seus tipos, o uso do transferidor e a sua construção geométrica; também há a definição de ângulos adjacentes, complementares e suplementares, opostos pelo vértice e aqueles formados por retas paralelas cortadas por

uma transversal. A TE03 está dentro dessa última subseção, onde já foi sistematizada a relação dos ângulos correspondentes, colaterais e alternos, que são iguais ou suplementares entre si. Com duas páginas, seu objetivo é que, além de visualizarem as relações entre os oito ângulos formados entre as retas, os alunos percebam a possibilidade de movimentar uma das retas paralelas sem que os ângulos sejam alterados.

No capítulo 6, de SIMETRIA, são apresentados os tipos de simetria (reflexão, rotação, translação) numa primeira seção, tendo uma segunda seção com a abordagem de simetrias no plano cartesiano. Aqui aparece a TE04, com três páginas, que tem por objetivo que os alunos ‘aprendam e apliquem’ os passos de construção de polígonos e os respectivos simétricos, empregando transformações geométricas de reflexão, rotação e translação e movimentando as construções para visualizar o que acontece. Após isso, há atividades antes do capítulo ser encerrado.

No 8º ano, a TE05, de quatro páginas, encontra-se no capítulo 2, LUGARES GEOMÉTRICOS E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS, após a explicação de construções geométricas com régua, esquadro, transferidor e compasso como polígonos regulares, e também as definições de circunferência, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento de reta. Nessa atividade, os alunos devem construir a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo, ângulos com medidas dadas e polígonos regulares com seus respectivos ângulos internos. Com exceção dos ângulos com medidas fornecidas, todas as outras construções foram realizadas anteriormente com o uso dos instrumentos de desenho citados anteriormente.

No capítulo 8, de TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS, localiza-se a TE06, de duas páginas, objetivando usar o GeoGebra para obter uma figura por meio de uma composição de transformações geométricas. Ela se encontra logo antes das atividades finais do LD, já que o capítulo referido é também o último. Nele, há a explicação de seções com as transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), bem como a explanação de como fazer a construção geométrica dessas; e a composição de tais transformações. Dessa maneira, a atividade com o uso do SGD é para os alunos usarem a criatividade para construir outras figuras a partir de diferentes composições de transformações geométricas.

Por fim, no livro didático do 9º ano, no capítulo de CIRCUNFERÊNCIAS E CÍRCULOS, o 7, há inicialmente a definição de ambos os objetos geométricos do título com atividades diversas. Adiante, são apresentadas as posições relativas de uma reta e

uma circunferência, entre duas circunferências e essas inscritas ou circunscritas a um polígono. Uma última subseção antes da atividade apresenta algumas construções de polígonos regulares (triângulo equilátero, quadrado e pentágono) a partir de circunferências. Aqui aparece a atividade no GeoGebra, TE07, objetivando construir um hexágono regular baseado em uma medida de comprimento de lado dada, utilizando circunferências. Não é solicitado que os alunos confirmem se essa construção, de fato, é um hexágono regular.

Após isso, é apresentada a construção de um polígono regular de  $2n$  lados e parte-se para a próxima seção que aborda sobre ângulos em uma circunferência: o central e o inscrito. Também são abordadas as ideias de arco e setor circular. Na sequência, demonstra-se a relação entre as medidas de abertura do ângulo central ser o dobro de um inscrito sob um mesmo arco em uma circunferência, com atividades pedidas para os alunos. A TE08 aparece aqui com o objetivo de ‘verificar’ a referida propriedade.

Em suma, após ter sido exibida a análise descritiva das coleções, posteriormente apresenta-se um capítulo com um olhar mais específico para as atividades com o uso do SGD que são expostas nos LD, objetivando caracterizá-las com base no referencial teórico.

## 6 UM OLHAR PARA AS ATIVIDADES COM O USO DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA: COMO ESSAS SE CARACTERIZAM?

Neste capítulo será apresentada a análise das 36 atividades das quatro coleções (nove na Apoema, quinze na Araribá, quatro na A Conquista da Matemática e oito na Teláris) com o uso do SGD, seguindo a quarta questão do caminho metodológico adotado baseado em Borba e Selva (2013): quais são os tipos de atividades apresentadas por meio do uso do referido software. Essas serão caracterizadas de acordo com as quatro categorias de análise apresentadas no capítulo de fundamentação metodológica e apresentação das obras, que são: corroboração a compreensão de conjecturas, descoberta matemática, domesticação da tecnologia e simples constatação (Quadro 1), a partir das duas perguntas primordiais que abordam se os conceitos que são trabalhados na atividade já foram contemplados anteriormente no LD, e se há um convite à exploração, por meio de testes de visualização e movimento sendo promovidos pela mesma. Na sequência, haverá a discussão se tais atividades possuem a abordagem da investigação matemática, a partir da ótica do convite à justificação de conjecturas.

### 6.1 EXPERIMENTAÇÃO-COM-TECNOLOGIAS

O Quadro 6 apresenta os dados produzidos a partir das quatro categorias de análise e após discussão baseada nas duas frentes abarcadas por essa pesquisa, de construção e visualização.

**Quadro 6 - Classificação das atividades das quatro coleções**

|                              | <b>COM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b>                                                                 | <b>SEM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b> |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| <b>CONCEITO CONHECIDO</b>    | AP01, AP02, AP03, AP07, AP08, AR02, AR07, CM02, CM03, CM04, TE01, TE03, TE04, TE05, TE06, TE08. | AP04, AP05, AP06, AR05, TE02.   |
| <b>CONCEITO DESCONHECIDO</b> | AR01, AR03, AR04, AR06, AR08, AR09, AR10, AR11, AR12, AR13, AR14, AR15, CM01.                   | AP09, TE07.                     |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Ao olhar para o Quadro 6, há visualmente uma impressão de que grande parte das atividades das quatro coleções possui a abordagem de experimentação-com-

tecnologias, por haver uma concentração na coluna esquerda. Porém, ao olhar para as coleções separadamente, é possível ver que as quatro possuem características muito diferentes entre si. A seguir, apresentam-se tais aspectos, a começar pela coleção Apoema, demonstrada no Quadro 7.

**Quadro 7** - Classificação das atividades da coleção Apoema

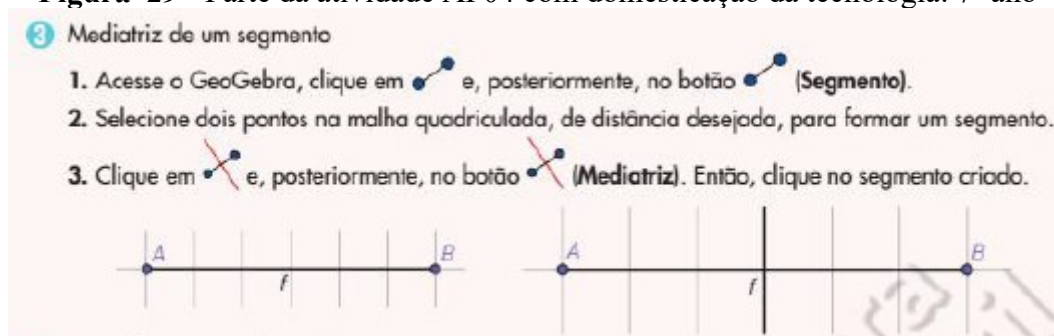
|                       | COM CONVITE À EXPLORAÇÃO     | SEM CONVITE À EXPLORAÇÃO |
|-----------------------|------------------------------|--------------------------|
| CONCEITO CONHECIDO    | AP01, AP02, AP03, AP07, AP08 | AP04, AP05, AP06         |
| CONCEITO DESCONHECIDO | –                            | AP09                     |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

O Quadro 7 mostra que a coleção Apoema não possui atividades que promovem descoberta matemática, com apenas uma que parte de conceito desconhecido (AP09), e há um equilíbrio entre atividades que possuem abordagem da experimentação-com-tecnologias (cinco em nove) e que não possuem (quatro em nove), sendo que dessas, três tendem à domesticação da tecnologia (AP04, AP05 e AP06).

A Figura 29 apresenta parte da AP04 (etapa 3 da atividade) com abordagem da domesticação da tecnologia que, num dado momento, propõe a construção da mediatriz de um segmento. Após isso, já inicia a etapa 4 com um outro objetivo.

**Figura 29** - Parte da atividade AP04 com domesticação da tecnologia: 7º ano



Fonte: Longen (2018b, p. 249).

Com um olhar mais detalhado para essa atividade, é possível notar que há apenas uma mera aplicação de funções prontas do software para a construção de uma mediatriz. Porém, nessa parte ou na continuação da atividade, não há um convite para arrastar nenhum dos elementos móveis da construção, o que não difere do que poderia ser feito com lápis e papel.

Além disso, caso fosse feito com outros recursos mais convencionais, os estudantes teriam que recorrer à definição, sendo que, após desenharem um segmento, teriam que procurar o centro deste e encontrar uma forma de traçar um segmento de reta

que fosse perpendicular a esse. Quando se usa a função ‘Mediatriz’ do software, não há um convite para os estudantes pensarem nesses tópicos, por exemplo, indo de encontro à ideia de criar um ambiente favorável para a aprendizagem matemática por meio do SGD (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

É importante ressaltar que não é um problema, em si, usar as funções pré-definidas do SGD. Elas podem auxiliar no processo de aprendizagem, permitindo, inclusive, um ganho de tempo para outras finalidades que se pode ter dentro de uma atividade, mas isso depende do próprio objetivo matemático ou pedagógico da mesma. Aqui, o autor expressa que a intenção da AP04 é que os alunos saibam construir alguns objetos geométricos, o que inclui mediatriz de um segmento, utilizando recursos de GD. Entretanto, da maneira como a atividade é proposta, é esperado que os alunos aprendam a usar a função ‘Mediatriz’ do software, e não a construam uma.

Apresenta-se agora a classificação das atividades da coleção Araribá a partir do Quadro 8.

**Quadro 8 - Classificação das atividades da coleção Araribá**

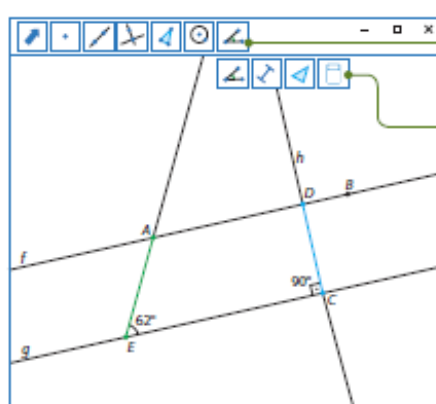
|                              | <b>COM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b>                                        | <b>SEM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b> |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| <b>CONCEITO CONHECIDO</b>    | AR02, AR07.                                                            | AR05.                           |
| <b>CONCEITO DESCONHECIDO</b> | AR01, AR03, AR04, AR06, AR08, AR09, AR10, AR11, AR12, AR13, AR14, AR15 | —                               |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Diferentemente da primeira coleção, é possível perceber que a Araribá é a que causou a maior influência na coluna esquerda do Quadro 6. Primeiro, por ser a coleção que mais apresenta atividades com o uso do SGD (15 em comparação com nove, oito e quatro), mas também porque, com exceção de uma, todas as demais atividades possuem abordagem da experimentação-com-tecnologias (14 em 15), com uma interessante concentração de 12 em 14 promovendo a descoberta matemática. A Figura 30 exemplifica uma dentre essas 12 classificadas, propondo como ‘investigação’ um assunto que não foi abordado anteriormente.

**Figura 30** - Parte final da atividade AR01 com descoberta matemática: 6º ano**INVESTIGUE**

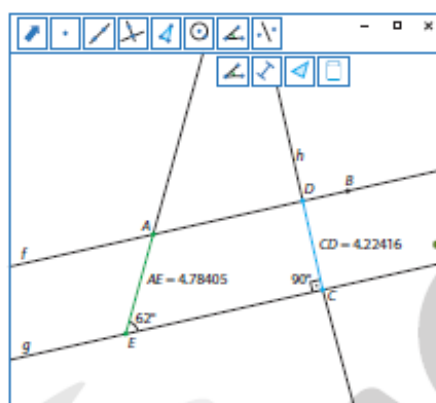
- a) Faça o que se pede utilizando as ferramentas do software.
- Utilize a ferramenta "medida de ângulo" e encontre a medida do ângulo  $\widehat{CEA}$  e do ângulo  $\widehat{DCE}$ .



Neste exemplo de tela, este botão foi clicado e surgiram as ferramentas calculadora, área, medida de segmento e medida de ângulo.

Ferramentas do botão

- Utilize a ferramenta "medida de segmento" e meça os segmentos  $\overline{CD}$  e  $\overline{AE}$  (com 5 casas decimais).



Em alguns softwares de Geometria interativa, ao clicar com o botão direito do mouse sobre uma medida, é possível escolher o número de casas decimais para o qual ela será arredondada.

- b) Agora, arraste o ponto E sobre a reta g e compare as medidas AE e CD. Essa investigação sugere que o ângulo  $\widehat{CEA}$  deve ter que medida para que  $AE = CD$ ?
- c) Continue arrastando o ponto E e verifique se é possível obter um segmento com extremidades nas retas f e g cujo comprimento seja menor que o de  $\overline{CD}$ .
- d) O que a investigação sugere a respeito da medida de um segmento com extremidades em duas retas paralelas? Quando essa medida é mínima?

- b) Espera-se que os alunos percebam que a investigação feita sugere que a medida do ângulo  $\widehat{CEA}$  deve ser igual a  $90^\circ$  para que  $AE = CD$ .
- c) Os alunos não vão conseguir obter um segmento com comprimento menor que o do segmento  $\overline{CD}$ .
- d) Espera-se que os alunos percebam que a medida de um segmento com extremidades em retas paralelas é mínima quando esse segmento forma com as retas um ângulo de  $90^\circ$ .

Fonte: Gay e Silva (2018a, p. 175).

É pedido aos estudantes que movimentem o ponto E de modo que AE seja igual à medida de CD. Para isso, o ponto E terá que ser movimentado até que  $\widehat{CEA}$  forme  $90^\circ$ . Ao continuar a atividade, os alunos, a partir da visualização e movimento, utilizando procedimentos experimentais, são convidados a elaborarem a conjectura matemática de que a menor distância entre um ponto e uma reta corresponde à medida do segmento que une este ponto à reta formando um ângulo reto.

Dessa maneira, pelo uso de procedimentos experimentais para gerar uma conjectura, ocorre a descoberta de resultados matemáticos antes desconhecidos pelos

alunos e a possibilidade de vários testes ao arrastar o ponto E, ao mesmo tempo que podem verificar a medida do segmento AE, bem como do ângulo  $\widehat{C\hat{E}A}$ , comparativamente com o ângulo  $\widehat{D\hat{C}E}$ . Define-se tal atividade como tendo uma abordagem de experimentação-com-tecnologias, promovendo descoberta matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005).

De fato, ao analisar a referida coleção, é perceptível essa diferença na abordagem pedagógica que os autores propõem. Indo ao encontro do que Hohenwarter *et al.* (2008) defendem, ao invés de dar aos estudantes uma resposta a um problema que eles não sabiam em primeiro lugar, tais explorações permitem uma introdução mais significativa a um conceito abstrato.

Apresenta-se, agora, o Quadro 9 com a classificação das atividades da coleção A Conquista da Matemática.

**Quadro 9** - Classificação das atividades da coleção A Conquista da Matemática

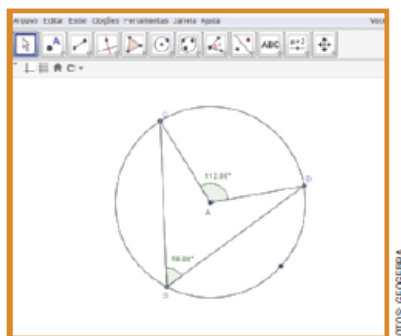
|                              | <b>COM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b> | <b>SEM CONVITE À EXPLORAÇÃO</b> |
|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| <b>CONCEITO CONHECIDO</b>    | CM02, CM03, CM04.               | –                               |
| <b>CONCEITO DESCONHECIDO</b> | CM01.                           | –                               |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

Olhando para essa coleção, como mostra o Quadro 9, é possível perceber que todas as atividades têm abordagem de experimentação-com-tecnologias. Apesar disso, chama a atenção o fato de que é a coleção com menos atividades com o uso do SGD. Se as atividades trazem, na perspectiva da literatura, uma abordagem interessante, poderiam ser melhor aproveitadas durante toda a coleção ao apresentarem mais propostas, já que, em um ano inteiro, os estudantes só teriam acesso ao GeoGebra uma única vez, tendo em vista que há uma atividade em cada um dos LD dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Como exemplificação, é exposta a atividade CM04, que tem papel de corroborar a compreensão de conjecturas, que pode ser vista na Figura 31.

**Figura 31** - Final da CM04 com corroboração a compreensão de conjectura: 9º ano

- 4 Por fim, construa os ângulos central e inscrito. Para isso, basta clicar na ferramenta **Ângulo** e construir os ângulos DAC e DBC.



Agora, movimente os ângulos inscrito e central, modificando as medidas. Copie o quadro em seu caderno e anote essas medidas.

| Ângulo inscrito | Ângulo central |
|-----------------|----------------|
|                 |                |
|                 |                |
|                 |                |

Agora, é sua vez: Espera-se que o aluno verifique a propriedade de que a medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central de mesmo arco determinado por ele na circunferência.

1. Analise o quadro que você preencheu. O que é possível concluir?
2. Organizados em trios, escolham um dos exercícios da Unidade para resolver utilizando as orientações desta seção com o software GeoGebra. Após resolvê-lo, cada trio deverá propor um desafio de modificação para outros trios resolverem. *Resposta pessoal.*

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018d, p. 139).

A CM04 aparece após toda a explanação e demonstração da propriedade que a medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente. Ela traz a ideia de visualização e movimento incorporada na frase antes do quadro e complementada na questão 1, como descrito na Figura 31. Inicialmente, é requerido que os alunos movimentem os ângulos construídos, anotando tais medidas modificadas de modo que possam verificar que os dados da coluna da esquerda serão sempre metade das medidas da coluna direita.

Entretanto, a questão vem como uma confirmação do que foi visto previamente, uma vez que a demonstração da propriedade foi feita anteriormente e várias outras atividades já foram propostas sobre o assunto outrora no capítulo. Dessa maneira, neste momento, de antemão, os alunos poderiam estar convencidos de que tal propriedade é verdadeira, não havendo a necessidade de incorporação de um experimento para descobrir algo desconhecido ou mesmo verificar se uma hipótese é verdadeira, com o objetivo de aceitá-la ou refutá-la (BORBA; VILLARREAL, 2005). Sendo assim, como

não há descoberta matemática, a atividade objetiva corroborar à compreensão da conjectura citada.

Por fim, o Quadro 10 traz a classificação da última coleção analisada, a Teláris.

**Quadro 10** - Classificação das atividades da coleção Teláris

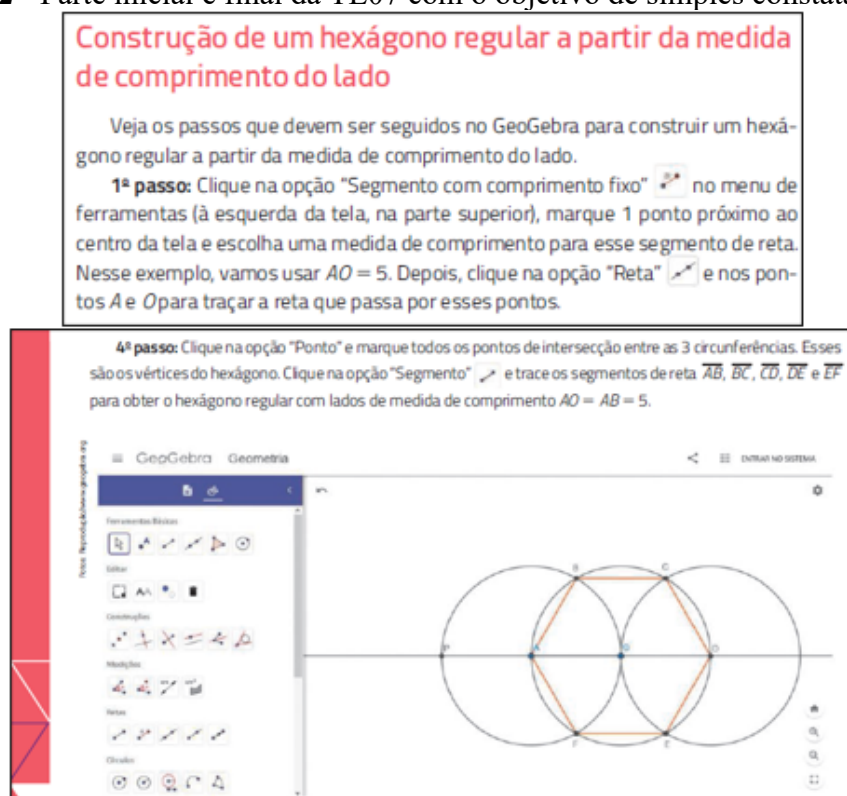
|                       | COM CONVITE À EXPLORAÇÃO            | SEM CONVITE À EXPLORAÇÃO |
|-----------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| CONCEITO CONHECIDO    | TE01, TE03, TE04, TE05, TE06, TE08. | TE02.                    |
| CONCEITO DESCONHECIDO | —                                   | TE07.                    |

Fonte: Elaborado pela autora (2022).

No Quadro 10, chama a atenção apenas uma atividade partir de um conceito que é desconhecido (um em oito) e, assim como Apoema, não haver atividades que promovam descoberta matemática.

A TE07, de simples constatação, cuja parte final é apresentada na Figura 32, objetiva a construção de um hexágono regular, conceito ainda não abordado até o momento no livro. Esta é a única da coleção que parte de um conceito desconhecido. Anteriormente, as atividades do LD oportunizaram a construção de triângulo equilátero, quadrado e pentágono regular com o auxílio de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor, mas não o hexágono.

**Figura 32** - Parte inicial e final da TE07 com o objetivo de simples constatação: 9º ano



Fonte: Dante (2018d, p. 221–222).

Em cada um dos passos da construção é requerido dos estudantes que sigam orientações detalhadamente. No 1º passo, é possível perceber, por exemplo, que até a localização do ponto inicial para o início da construção é pedido que se faça próximo ao centro da tela, bem como que se trace um segmento de cinco unidades de comprimento. Fato este que não é necessário para que a atividade seja possível de ser realizada. Como essa atividade não solicita interações com tal construção feita, seu objetivo é apenas simples constatação, por meio do uso do SGD.

Porém, ao final, não há uma verificação de que esse desenho é, de fato, a construção de um hexágono regular, que tem todos os lados e ângulos iguais, seja pelo convencimento recorrendo ao arrastar, seja utilizando as funções pré-definidas do software para medição de tais objetos geométricos. Perde-se uma oportunidade de experimentação a partir da visualização ativa por parte dos estudantes, já que, talvez, seja visualmente mais claro que  $AF = AB = CD = DE = 5$  por serem raios das circunferências, mas justificar que  $BC = FE = 5$  pode não ser tão direto. Aqui, há uma atividade de mera visualização.

Agora, as quatro categorias serão discutidas separadamente, refletindo-se sobre questões que estão potencializadas e outras que precisam ser potencializadas para a criação de um ambiente mais favorável à aprendizagem matemática nas 36 atividades, a partir da ótica da construção e visualização levantada anteriormente.

### **6.1.1 Corroboração à compreensão de conjecturas**

As atividades que corroboram a compreensão de conjecturas são 16 dentre as 36, o que corresponde a 44,4% aproximadamente. Ou seja, quase a metade de todas as atividades encontradas nas quatro coleções trabalha conceitos já conhecidos e possui convite à exploração. Agora, estas serão analisadas de maneira mais focalizada.

Das quatro coleções, três trazem atividades que abordam a habilidade EF07MA21 da BNCC sobre transformações geométricas, que aponta ser necessário “reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica [...]” (BRASIL, 2018, p. 309). São elas: AR07, CM02 e TE04.

A atividade AR07 inicia-se pedindo para que os estudantes construam as transformações geométricas de reflexão em relação a uma reta e a um ponto (que

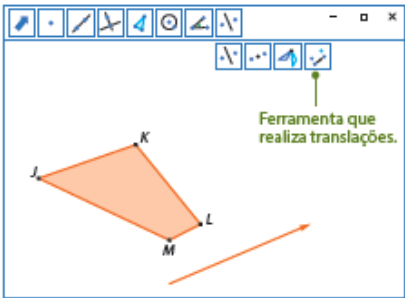
aparece na página anterior ao que está demonstrada) e, depois, façam a translação e rotação, como pode ser observado na Figura 33.

**Figura 33 - Parte final da AR07: 7º ano**

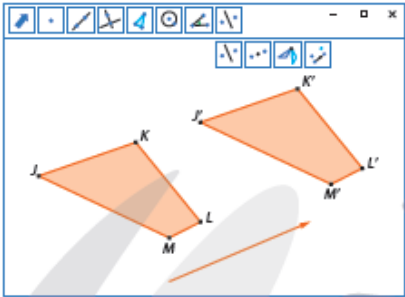
### Translação

Siga os passos abaixo para transladar um polígono qualquer.

- 1ª) Construa um polígono qualquer.
- 2ª) Clique na ferramenta para construir vetores e construa um vetor qualquer. Esse será o vetor da translação.



3ª) Clique na ferramenta de translação. Depois, clique sobre o polígono e sobre o vetor. O polígono que aparecerá na tela será a imagem da translação.



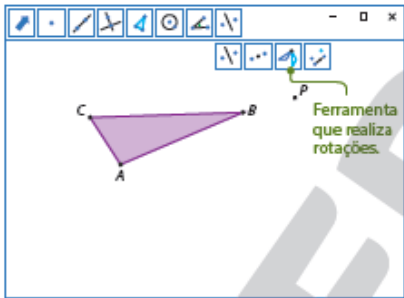
### INVESTIGUE

Em cada uma das construções que você realizou, meça os lados e os ângulos correspondentes dos polígonos. Depois, movimente-os. O que você observou? *Espera-se que os alunos respondam que observaram que as medidas dos lados e dos ângulos correspondentes são iguais.*

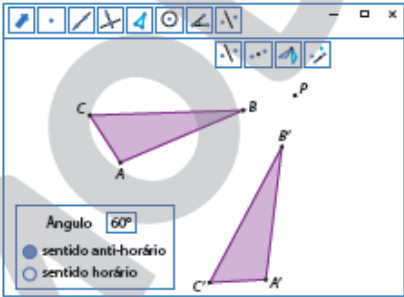
### Rotação

Siga os passos abaixo para rotacionar um polígono qualquer em torno de um ponto por um ângulo.

- 1ª) Construa um polígono qualquer.
- 2ª) Marque um ponto  $P$  qualquer. Esse ponto será o centro da rotação.



3ª) Clique na ferramenta de rotação. Depois, clique sobre o polígono e sobre o ponto  $P$ . Por fim, escolha a medida do ângulo de giro e o sentido da rotação. O polígono que aparecerá na tela será a imagem da rotação.



CURRÍCULO EMENTA E RECURSOS DIDÁTICOS

Fonte: Gay e Silva (2018b, p. 307).

Após todas as construções, nas quais é pedido para que o professor alerte os alunos para irem salvando, os autores trazem a pergunta final, que pede para os alunos visualizarem ativamente as construções que foram realizadas a partir de uma ótica: que ao medirem os lados e ângulos dos polígonos, bem como dos polígonos após as transformações, os estudantes percebam que essas são transformações isométricas, ou seja, que preservam forma e tamanho, o que ocorre mesmo tendo movimentado as construções realizadas, como requerido.

A atividade CM02, por sua vez, traz uma perspectiva um pouco diferente da que foi abordada na AR07, como pode ser visto na Figura 34.

**Figura 34** - Parte da CM02 sobre simetria de reflexão: 7º ano

• **Simetria de reflexão**

Usando a ferramenta , desenhe um polígono qualquer e depois, usando a ferramenta , trace uma reta qualquer que **não** corte o polígono desenhado.

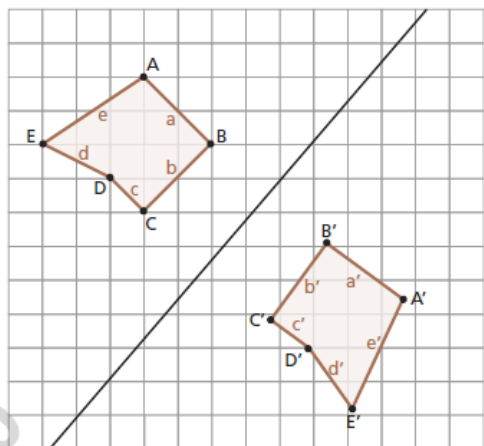
Em seguida, usando a ferramenta , clique primeiro no polígono criado e, em seguida, na reta traçada para obter uma figura simétrica por reflexão. Veja ao lado um exemplo.

Depois, usando a ferramenta , determine a distância entre os vértices da primeira figura e a reta traçada, bem como entre a reta traçada e os vértices da segunda figura.

Responda às questões no caderno.

1. Analisando as medidas obtidas, o que podemos observar?  
*A distância entre um vértice e a reta, bem como distância entre a reta e seu vértice correspondente, são iguais.*
2. Ao traçar a reta nessa construção, foram destacados dois pontos. Com o *mouse* clique sobre um dos pontos e arraste-o. O que acontece com as medidas obtidas? Elas ainda seguem a mesma observação da questão anterior?  
*As medidas se alteram, mas é mantida a igualdade observada anteriormente.*

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018b, p. 92).



Na Figura 34, que mostra apenas a parte da transformação de reflexão, é possível perceber que os autores decidem abordar sobre a distância entre os vértices de ambas as figuras até a reta traçada, que é o eixo de simetria. Ao perguntar, na questão número 1, sobre “o que podemos observar?”, há um convite para que os alunos visualizem ativamente o fato de tais distâncias serem iguais. Ao pedir que movimentem, a partir da pergunta de número 2, os mesmos são convidados a perceberem que as distâncias, apesar de mudarem, continuam tendo a mesma relação de igualdade nos vértices correspondentes.

Ideias similares são abordadas nas transformações de translação e de rotação (com as concepções do vetor e do ângulo de rotação respectivamente associados). Em nenhuma delas há a abordagem para que os estudantes explorem sobre a isometria das relações. A atividade sobre o mesmo assunto na Teláris, TE04, é apresentada nas Figuras 35 e 36.

Figura 35 - Parte inicial da TE04: 7º ano

## Simetrias no GeoGebra

Você se lembra das construções feitas no GeoGebra no capítulo 4? Agora, vamos fazer construções de simetrias usando esse *software*.

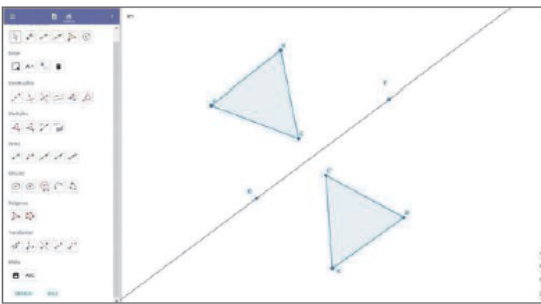
### Reflexão de um polígono em relação a um eixo

Veja os passos que devem ser seguidos no GeoGebra para construir um polígono e a reflexão dele em relação a um eixo.

**1º passo:** Clique na opção "Polígono"  no menu de ferramentas (à esquerda da tela, na parte superior), marque 3 pontos próximo ao centro da tela e desenhe um triângulo. Nomeie esses pontos como  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

**2º passo:** Clique na opção "Reta"  marque 2 pontos próximo ao centro da tela e desenhe uma reta horizontal. Nomeie esses pontos como  $C$  e  $D$  e a reta como  $r$ .

**3º passo:** Clique na opção "Reflexão em relação a uma reta" . Depois, clique no  $\triangle ABC$  que você construiu e na reta  $\overleftrightarrow{CD}$ . Aparecerá o  $\triangle A'B'C'$  simétrico ao  $\triangle ABC$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{CD}$  (o eixo de simetria).



**4º passo:** Clique na função "Mover" , clique em um dos vértices do  $\triangle ABC$  e arraste. Veja o que acontece. Se você repetir o 1º e o 2º passos, mas clicar em um dos eixos cartesianos, então vai obter um triângulo simétrico ao original, mas em relação ao eixo escolhido. Observe que você também pode fazer as mesmas construções com outros polígonos.

**Atenção:** o GeoGebra nomeia como polígono, mas a construção é de uma região poligonal.

O vértice simétrico também se move, mantendo a simetria de reflexão dos triângulos em relação à reta.

Fonte: Dante (2018b, p. 197).

Aqui, o convite é para que os estudantes visualizem ativamente que o movimento do vértice de um polígono implica em sua transformação refletida. Chama a atenção, nessa atividade, que ela não pode ser considerada de caráter aberto (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020). Isso porque o autor, no 1º passo, especifica onde devem ficar os três pontos a serem construídos, bem como solicita que se nomeie os pontos e as retas do jeito que ele pede (2º passo). Essas questões não são primordiais para que se chegue ao objetivo matemático da atividade. Além disso, o próprio autor aponta que tais construções podem ser feitas com um polígono qualquer (aparece ao final da Figura 35). Entretanto, logo na sequência, com a construção da reflexão com relação a um ponto, ele pede para construir um quadrilátero. Apenas na rotação em relação a um ponto (construção solicitada na sequência) é que a atividade traz essa possibilidade para os estudantes: construir um polígono qualquer, a fim de rotacioná-lo (Figura 36).

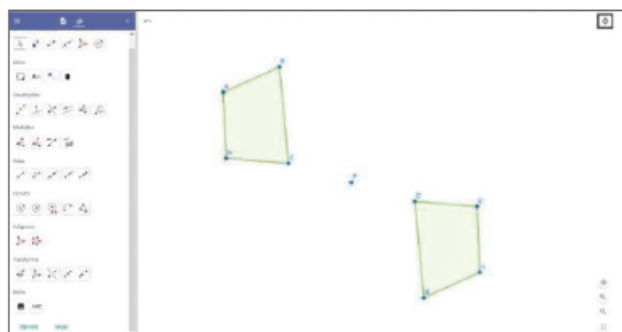
**Figura 36 - Parte da TE04: 7º ano****Reflexão de um polígono em relação a um ponto**

Agora, veja os passos que devem ser seguidos no GeoGebra para construir um polígono e a reflexão dele em relação a um ponto. Para isso, salve sua construção anterior e comece um novo trabalho.

**1º passo:** Clique na opção "Polígono" no menu de ferramentas, marque 4 pontos próximo ao centro da tela e desenhe um quadrilátero. Nomeie esses pontos como  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

**2º passo:** Clique na opção "Ponto"  e marque um ponto  $P$  fora da região do polígono.

**3º passo:** Clique na opção "Reflexão em relação a um ponto" . Depois, clique no polígono que você construiu e no ponto  $P$ . Aparecerá o polígono simétrico ao original em relação ao ponto  $P$ .



**4º passo:** Clique na função "Mover", clique em um dos vértices do quadrilátero e arraste. Veja o que acontece.

**Rotação de um polígono em relação a um ponto**

Veja agora os passos que devem ser seguidos no GeoGebra para construir um polígono e a rotação dele em relação a um ponto. Salve sua construção anterior e comece um novo trabalho.

**1º passo:** Clique na opção "Polígono" no menu de ferramentas e desenhe um polígono qualquer.

**2º passo:** Clique na opção "Ponto" e marque um ponto  $P$  fora da região do polígono.

Fonte: Dante (2018b, p. 198).

Ainda na Figura 36, também se ressalta o erro no 2º e no 3º passo: primeiramente, é pedido que os alunos nomeiem dois pontos de  $C$  e  $D$ , porém, já houve a nomeação de um ponto  $C$  no 1º passo; após isso, é pedido para o experimentador clicar na reta  $DF$  que foi construída, todavia, o autor havia pedido para nomear a única reta feita de  $r$ , e ainda não há ponto  $F$  construído. Pela atividade, supõe-se que a reta  $DF$  seja o eixo de simetria, porém, na própria imagem que o LD traz é difícil de enxergar os pontos nomeados de  $D$  e  $F$  pela baixa qualidade de resolução.

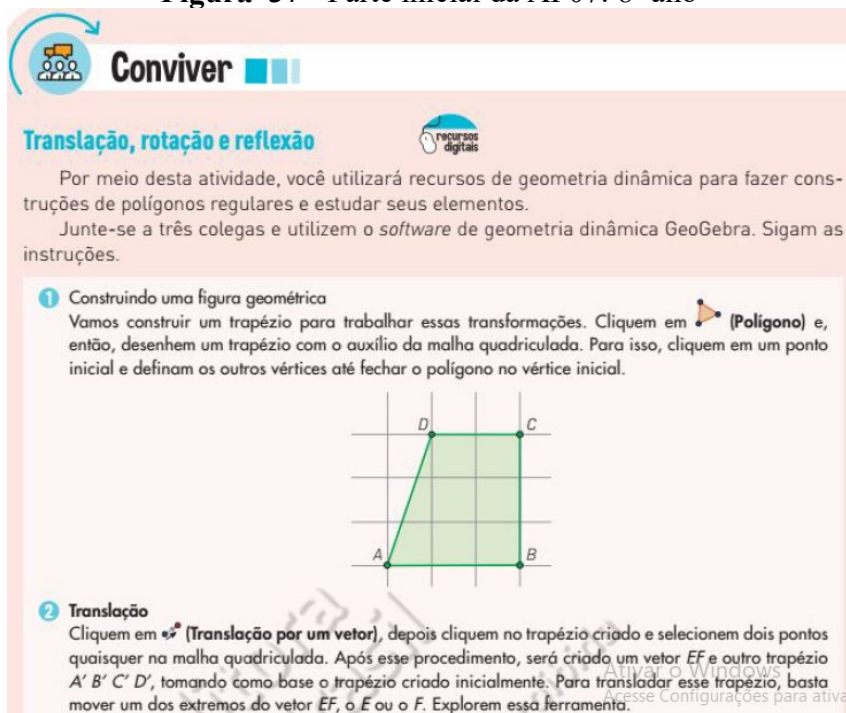
Também se ressalta a escolha do autor em fazer algumas afirmativas, ao invés de questionamentos, diferentemente das atividades anteriores das outras coleções. Em alguns momentos, inclusive, o autor já afirma onde os alunos devem chegar, a se destacar as frases: “vai obter um triângulo simétrico ao original, mas em relação ao eixo escolhido [e] [...] você também pode fazer as mesmas construções com outros polígonos” (DANTE, 2018b, p. 197). Dessa maneira, reitera-se a necessidade de adaptar

essa atividade para que crie um ambiente mais favorável à aprendizagem matemática, fornecendo mais liberdade ao experimentador (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

Dessa maneira, as três atividades apresentadas acima sobre transformações geométricas, de maneiras distintas, possuem a abordagem de experimentação-com-tecnologia, sendo que esses experimentos foram realizados com o objetivo de ilustrar verdades conhecidas a respeito das transformações geométricas (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Quando se trata de composição de transformações geométricas, a habilidade da BNCC que trata sobre esse assunto é EF08MA18, que expõe “reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p. 315). Apoema, A Coleção da Matemática e Teláris abordam tal habilidade a partir das atividades AP07, CM03 e TE06. Cada uma delas será caracterizada na abordagem do referido assunto, a começar pela atividade da Apoema, que pode ser vista na Figura 37.

**Figura 37 - Parte inicial da AP07: 8º ano**



**Conviver**

**Translação, rotação e reflexão**

Por meio desta atividade, você utilizará recursos de geometria dinâmica para fazer construções de polígonos regulares e estudar seus elementos.

Junte-se a três colegas e utilizem o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Sigam as instruções.

**1 Construindo uma figura geométrica**  
Vamos construir um trapézio para trabalhar essas transformações. Cliquem em  (**Polígono**) e, então, desenhem um trapézio com o auxílio da malha quadriculada. Para isso, cliquem em um ponto inicial e definam os outros vértices até fechar o polígono no vértice inicial.

**2 Translação**  
Cliquem em  (**Translação por um vetor**), depois cliquem no trapézio criado e selecionem dois pontos quaisquer na malha quadriculada. Após esse procedimento, será criado um vetor *EF* e outro trapézio *A' B' C' D'*, tomando como base o trapézio criado inicialmente. Para transladar esse trapézio, basta mover um dos extremos do vetor *EF*, o *E* ou o *F*. Explore essa ferramenta.

Fonte: Longen (2018c, p. 236).

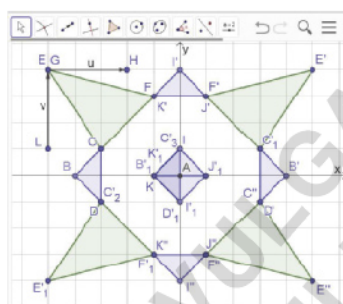
A atividade AP07 inicia pedindo a construção de um trapézio. O autor opta por fazer cada transformação geométrica separadamente para, ao final, compô-las. Todavia,

observando a orientação do enunciado, percebe-se que, na verdade, é solicitado o desenho de um trapézio, e não sua construção. Caso um dos vértices seja arrastado, sua forma geométrica não será mais de um trapézio. Isso limita a exploração que poderia ser feita na atividade, pois, no decorrer, é pedido que os estudantes movimentem o trapézio e vejam a relação desse movimento com o objeto geométrico formado a partir da transformação. Porém, isso não pode ser feito nos vértices, uma vez que movimentar um deles pode acarretar na deformação da forma geométrica original, tornando-se um desenho diferente do trapézio pedido inicialmente na atividade. Isso pode confundir os alunos, pela mudança de formato, apesar de não acarretar em erro dentro das transformações geométricas que são propostas.

A CM03, por sua vez, tem uma abordagem um pouco diferente, como pode ser vista na Figura 38.

**Figura 38 - Parte final da CM03: 8º ano**

- 1 No Geogebra, construa o padrão geométrico apresentado anteriormente. Você pode seguir o passo a passo que Talita e Fernando usaram, ou realizar as transformações geométricas em outra ordem. **Resposta pessoal.**
- 2 Depois de construído o padrão geométrico, usando a ferramenta  clique sobre um vértice de um dos primeiros polígonos construídos e arraste. Veja a seguir um exemplo.



O que você verificou?

**Resposta possível:** As alterações realizadas nos primeiros polígonos construídos acontecem nos demais polígonos obtidos como transformação no plano dos primeiros.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018c, p. 195).

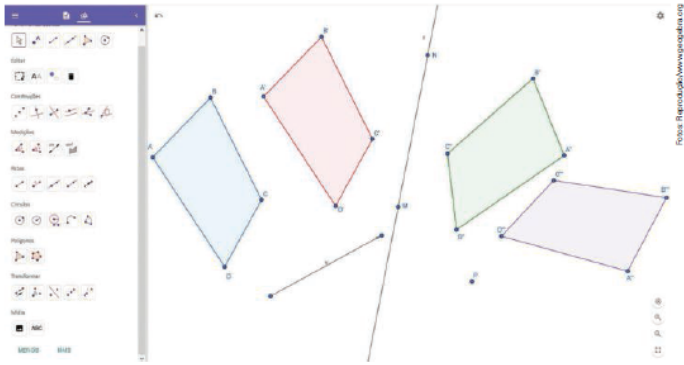
Anteriormente, é apresentada uma construção de um padrão geométrico feito pela Talita e Fernando (nomes escolhidos pelos autores nessa atividade). Os autores expõem o passo a passo dessa construção e, como pode ser observado na Figura 38, pedem para que os estudantes façam de forma similar. Após isso, na questão 2, pedem para que o experimentador arraste os vértices que são possíveis de serem arrastados para ver o que acontece. Ressalta-se aqui que a atividade podia tender a ter uma mera visualização, não incorporando um objetivo ao arrastar os vértices, mesmo que esse objetivo fosse ser criativo. Porém, ao perguntar o que se verifica com esse movimento, há uma busca para que tenha uma visualização ativa, apesar desse questionamento

requerer uma resposta bem genérica, o que poderia ser, também, aprofundado. Tal criatividade requerida é deixada de maneira clara, enquanto objetivo, na TE06, como pode ser visto em sua parte final na Figura 39.

**Figura 39 - Parte final da TE06: 8º ano**

**6º passo:** Clique na opção "Ponto"  e, depois, clique em 1 ponto na tela, fora do vetor, da reta e dos quadriláteros que você construiu. Nomeie-o como  $P$ . Esse ponto será o centro de rotação.

**7º passo:** Clique na opção "Rotação em torno de um ponto"  e, depois, clique no quadrilátero  $A''B''C''D''$  e no ponto  $P$  que você construiu. Na janela que abrir, escolha a medida de abertura do ângulo e o sentido da rotação. Aparecerá um quadrilátero simétrico aos 3 quadriláteros que você construiu. Nomeie os vértices desse quadrilátero como  $A''', B''', C'''$  e  $D'''$ , respectivamente.



**Questão**

No GeoGebra, construa outras figuras e tente fazer diferentes composições de transformações geométricas. Use a sua criatividade e veja como você pode transformar as figuras. *Resposta pessoal.*

**Questão**

Permita que façam diversas figuras e transformações geométricas. Aconselhe os alunos até mesmo a tentarem refazer, no GeoGebra, as criações baseadas nas obras de Escher que fizeram na página 242.

Fonte: Dante (2018c, p. 249).

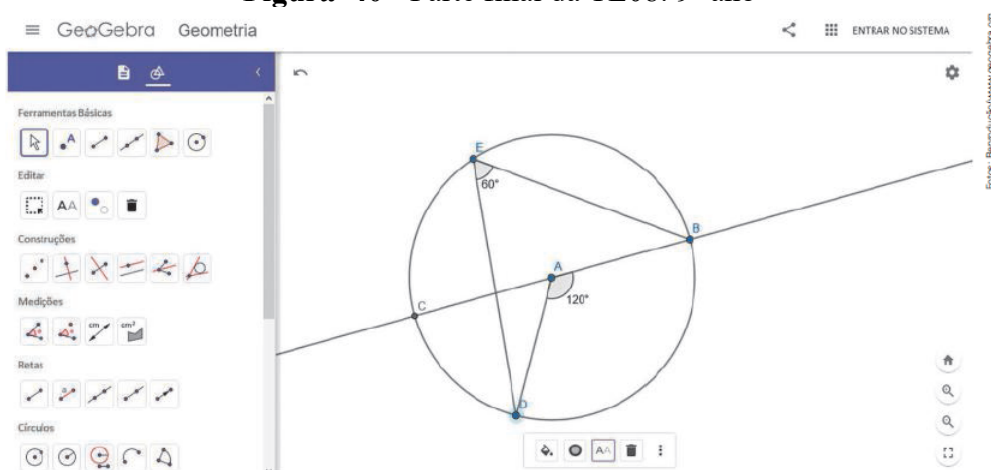
Aqui, o autor tem abordagem similar à AP07, na qual cada transformação é apresentada, até que, ao final, é solicitado que os estudantes façam suas composições. Dentro do quadro 'Questão', o autor deixa claro que é intenção da atividade que os estudantes sejam criativos para que visualizem como é possível transformar as figuras. Também se pode ressaltar a sugestão dada ao professor no canto direito para que incentive seus alunos a fazerem construções baseados em Escher, um artista gráfico que é conhecido por utilizar isometrias em suas obras. Dessa maneira, integra-se o que havia sido feito anteriormente no LD, sugerindo que os alunos tentem criar uma composição de transformações geométricas seguindo o mesmo padrão de Escher, por meio do GeoGebra.

Por fim, apresentam-se três atividades que abordam a habilidade EF09MA11, que requerem que os estudantes saibam “resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na

circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p. 317). Essas atividades são: AP08, CM04 e TE08.

Julga-se importante ressaltar que a coleção Araribá também possui uma atividade com base na mesma habilidade, mas a abordagem é por uma ótica da descoberta matemática e, por isso, será apresentada em um outro momento, na seção específica dessa categoria. Dentre as outras três atividades, a AP08 e a CM04 já foram discutidas. A AP08 era a única que solicitava uma demonstração por parte dos estudantes, e a CM04 pedia que os alunos preenchessem uma tabela com valores de ângulos inscritos e centrais correspondentes para, assim, perceberem a relação destes. Portanto, agora será discutida a TE08, que pode ser vista na Figura 40.

**Figura 40 - Parte final da TE08: 9º ano**



**6º passo:** Clique na opção “Mover”  e arraste o ponto *D* entre os pontos *B* e *C*. Depois, use a mesma ferramenta para arrastar o ponto *E* entre os pontos *C* e *B*.

O que você observou ao mover os pontos *D* e *E*?

Resposta esperada: A medida de abertura do ângulo central é sempre o dobro da medida de abertura do ângulo inscrito quando esses ângulos se relacionam ao mesmo arco em uma circunferência.

Fonte: Dante (2018d, p. 231).

A atividade TE08 tem abordagem muito similar à da CM04, com testes de visualização e movimento para que os alunos percebam que o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito correspondente. No início dessa atividade, já é trazido pelo autor que ela trata de uma “verificação da propriedade das medidas de abertura do ângulo central e do ângulo interno de um mesmo arco” (DANTE, 2018d, p. 230). Dessa forma, as três atividades referentes à habilidade EF09MA11, da BNCC, corroboram à compreensão da propriedade citada, a partir da abordagem de experimentação-com-tecnologias, uma vez que possuem o objetivo de verificar a verdade de uma hipótese (BORBA; VILLARREAL, 2005).

### 6.1.2 Descoberta matemática

As atividades que possuem abordagem de descoberta matemática são 13 dentre as 36, o que corresponde a 36,1% aproximadamente do total. Dessas 13, 12 são da mesma coleção, a Araribá (a outra é da A Conquista da Matemática). Ao se remeter ao fato de que a Araribá possui 15 atividades no total, isso significa que 80% destas possuem tal abordagem. Como há esse destaque para essa coleção em termos de descoberta matemática, então o foco dessa seção está nas atividades da mesma e nas potencialidades que estas podem oferecer para que ocorra a experimentação-com-tecnologias por parte dos alunos. Será dado destaque para atividades que ainda não foram apresentadas ou discutidas anteriormente nessa dissertação da referida coleção. São elas: AR06, AR11, AR14 e AR15.

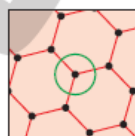
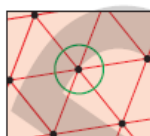
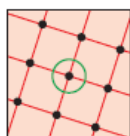
Iniciando pela AR06, a atividade propõe a construção de mosaicos compostos por diferentes polígonos regulares como quadrados, triângulos equiláteros, hexágonos regulares e um composto de dois polígonos regulares diferentes e, a partir disso, o descobrimento dos ângulos internos de tais polígonos, sem o uso de fórmulas. Isso pode ser visto na Figura 41, que apresenta a parte ‘Investigue’.

**Figura 41 - Parte final da AR06: 7º ano**

#### INVESTIGUE

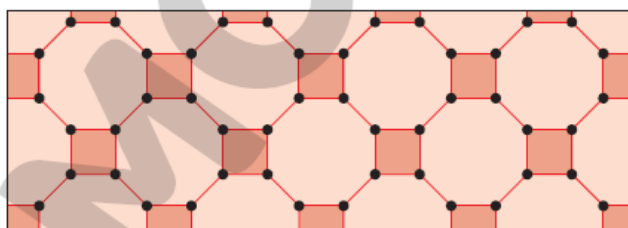
Faça o que se pede utilizando as ferramentas do *software*.

- Movimente os pontos móveis dos mosaicos construídos, mudando a medida de seus lados. O que aconteceu com as medidas dos ângulos internos dos polígonos quando modificamos as medidas dos lados dos polígonos?
- Se, em um dos três primeiros mosaicos construídos, escolhermos um vértice de um polígono cercado por polígonos em toda a sua volta, a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor desse vértice será  $360^\circ$ .



a) Os ângulos internos nos polígonos regulares não mudaram.

- Considerando essa informação, é possível determinar as medidas dos ângulos internos desses polígonos. Calcule a medida do ângulo interno do triângulo equilátero e do hexágono regular. *triângulo equilátero:  $60^\circ$ ; hexágono regular:  $120^\circ$*
- Observe o mosaico construído com octôgonos regulares e quadrados.



- Como podemos descobrir a medida do ângulo interno do octógono regular? Qual é essa medida? Se escolhermos um vértice do mosaico, teremos ao seu redor dois octôgonos e um quadrado. Como o ângulo interno de um quadrado mede  $90^\circ$ , a medida de dois ângulos do octógono é  $360^\circ - 90^\circ$ , que é igual a  $270^\circ$ . Então, para descobrir a medida de um ângulo interno do octógono, basta obter a metade de  $270^\circ$ , que é  $135^\circ$ .

Fonte: Gay e Silva (2018b, p. 202).

A partir do item A, o aluno é convidado a verificar que os ângulos internos dos polígonos regulares não mudam, mesmo que os lados dos polígonos se alterarem. Além disso, nos itens seguintes, há o convite para que descubram o valor de tais ângulos que foram construídos por meio do mosaico, incluindo um item um pouco mais desafiador (item C), que é necessário integrar o valor já calculado de um ângulo interno do quadrado com dois dos octógonos. Isso se dá a partir da habilidade EF07MA27: “Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos” (BRASIL, 2018, p. 309).

É interessante notar que, não havendo a abordagem anterior dos valores dos ângulos internos de polígonos regulares, os alunos são convidados a descobrir tais valores a partir de uma construção que ele mesmo faz, sendo que, mesmo movimentando os lados de tais polígonos, os ângulos não se alteram. Dessa forma, tal descoberta pode propulsionar a produção de sentidos matemáticos para os mesmos. Apesar disso, há espaço para um aprimoramento da atividade, uma vez que é possível permitir maior criatividade por parte do experimentador, construindo mosaicos à sua maneira e, inclusive, percebendo que nem todos os polígonos regulares permitem tal ladrilhamento.

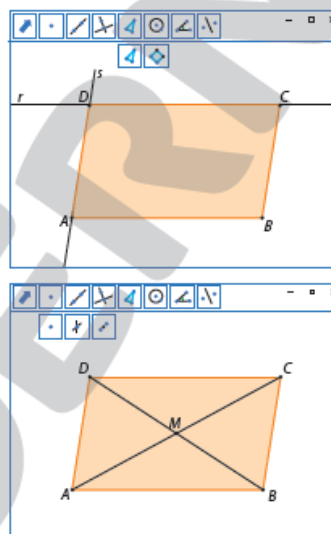
Partindo, agora, para a atividade AR11 do 8º ano, como pode ser vista na Figura 42, essa objetivava que os estudantes construíssem um paralelogramo e descobrissem algumas de suas propriedades experimentalmente, a saber: lados opostos congruentes, ângulos opostos também congruentes, e as diagonais se encontrando no ponto médio. Como posto pelo LD, esta atividade está baseada na habilidade EF08MA14: “Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos” (BRASIL, 2018, p. 315).

Figura 42 - Atividade AR11: 8º ano

**CONSTRUA****Paralelogramo e suas diagonais**

Siga os passos abaixo para construir um paralelogramo.

- 1ª) Construa um segmento de reta  $\overline{AB}$ .
- 2ª) Marque um ponto  $C$  qualquer, tal que  $C$  não pertença a  $\overline{AB}$ .
- 3ª) Trace a reta  $r$ , paralela ao segmento de reta  $\overline{AB}$ , passando por  $C$ .
- 4ª) Trace o segmento de reta  $\overline{BC}$ .
- 5ª) Trace a reta  $s$ , paralela ao segmento de reta  $\overline{BC}$ , passando por  $A$ .
- 6ª) Marque o ponto  $D$ , intersecção das retas  $r$  e  $s$ .
- 7ª) Construa o paralelogramo  $ABCD$ .
- 8ª) Se desejar, esconda as construções auxiliares.
- 9ª) Trace o segmento de reta  $\overline{AC}$  e o segmento de reta  $\overline{BD}$ , diagonais do paralelogramo.
- 10ª) Marque o ponto  $M$ , intersecção das diagonais.

**INVESTIGUE**

Faça o que se pede usando as ferramentas do software.

- a) Meça os lados do paralelogramo e movimente-o. O que você pode observar em relação a essas medidas? Espera-se que os alunos percebam que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
- b) Meça os ângulos internos do paralelogramo e movimente-o. O que você pode observar em relação às medidas dos ângulos internos? Espera-se que os alunos percebam que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.
- c) Meça agora os segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{MC}$  e observe. Faça o mesmo com os segmentos  $\overline{BM}$  e  $\overline{MD}$ . O que é possível verificar? Com base nessas medidas, os alunos vão verificar que  $AM = MC$  e  $BM = MD$ . Isso sugere que  $M$  é o ponto médio das duas diagonais. Assim, essa investigação sugere que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seus respectivos pontos médios.

Fonte: Gay e Silva (2018c, p. 116).

A própria atividade traz o termo que os estudantes verificarão experimentalmente algumas propriedades do paralelogramo. Entretanto, como verificar se aproxima de “confirmar algo”, entende-se que o termo aqui não está de acordo com a proposta da atividade, uma vez que as propriedades ainda não foram apresentadas anteriormente no LD. O objetivo é que os estudantes as descubram, a partir de três perguntas postas na seção ‘Investigue’, ajudando a convencê-los da validade de tais propriedades, a partir de sua experimentação. Nas duas páginas seguintes, as três propriedades foram compiladas e demonstradas.

Por fim, no LD do 9º ano há duas atividades a se destacar: AR14 e AR15. Essa primeira aparece antes de apresentar formalmente o Teorema de Tales, sendo que a coleção pede para que os alunos investiguem as relações entre as medidas dos segmentos determinados sobre retas transversais que cortam paralelas, com o objetivo de que os próprios alunos descubram essas relações das razões que o Teorema expõe, como pode ser visto na Figura 43. Isso se baseia na habilidade EF09MA14: “Resolver e

elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes” (BRASIL, 2018, p. 319).

Figura 43 - Atividade AR14: 9º ano

**Observação**

Feixe de retas paralelas são duas ou mais retas de um mesmo plano que, consideradas duas a duas, são sempre paralelas.

Orienta os alunos a utilizar uma calculadora dinâmica (do próprio software) para determinar as razões. Assim, ao movimentar a construção, o cálculo realizado é atualizado simultaneamente com as medidas, possibilitando a verificação da propriedade constatada em diferentes configurações.

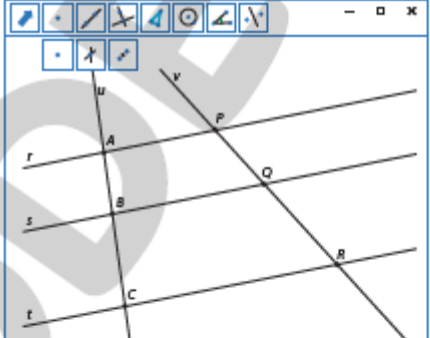
### Teorema de Tales

Nesta seção, você vai utilizar um *software* de Geometria dinâmica para construir um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais e verificar, experimentalmente, relações entre as medidas dos segmentos determinados sobre as transversais.

**CONSTRUA**

Siga os passos abaixo para construir as retas paralelas e as retas transversais.

- 1ª) Construa uma reta  $r$ .
- 2ª) Construa as retas  $s$  e  $t$ , paralelas à reta  $r$ .
- 3ª) Construa duas retas,  $u$  e  $v$ , transversais ao feixe de retas paralelas feito nos passos anteriores.
- 4ª) Marque os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  intersecções das retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  com a reta transversal  $u$  e os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  intersecções das retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  com a reta transversal  $v$ .



**INVESTIGUE**

- Meça os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{QR}$  e  $\overline{PR}$ .
- Usando a ferramenta de calculadora dinâmica do *software*, determine as razões  $\frac{AB}{BC}$ ,  $\frac{PQ}{QR}$ ,  $\frac{AC}{AB}$  e  $\frac{PR}{PQ}$ .
- Comparando as razões  $\frac{AB}{BC}$  com  $\frac{PQ}{QR}$  e  $\frac{AC}{AB}$  com  $\frac{PR}{PQ}$ , o que é possível verificar?

Movimente os pontos móveis, modificando a configuração inicial. A relação que você percebeu continua sendo válida para diferentes configurações? A relação verificada continua válida, independentemente da configuração apresentada.

Espera-se que os alunos verifiquem que  $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$  e  $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$ .

Fonte: Gay e Silva (2018d, p. 130).

Ainda pela mesma habilidade, a última atividade da coleção Araribá, AR15, após a apresentação do Teorema de Pitágoras, busca que o aluno descubra e se convença de que tal relação só é verdadeira se o triângulo for retângulo, não valendo para triângulo acutângulo, bem como obtusângulo, como pode ser observado na Figura 44.

Figura 44 - Atividade AR15: 9º ano

**Verificação experimental**

Nesta seção, você vai utilizar um software de geometria dinâmica para construir um triângulo e três quadrados, cada quadrado com um lado em comum com o triângulo e externo a ele, e, então, comparar a área do quadrado maior com a soma das áreas dos quadrados menores.

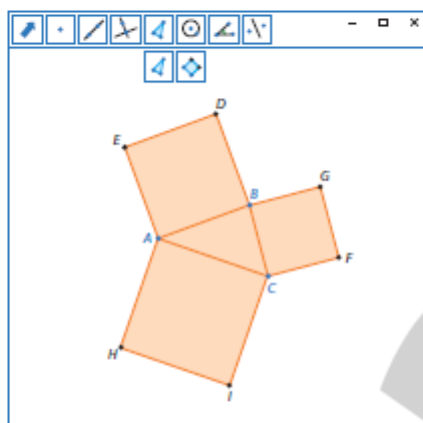
**CONSTRUA** No 2º e 3º passos, oriente os alunos a construir os quadrados de forma que eles fiquem externos ao triângulo para facilitar a investigação.

Utilize a ferramenta para a construção de polígonos e siga os passos descritos a seguir.

1ª) Construa um triângulo  $ABC$  qualquer.

2ª) Sobre o lado  $\overline{AB}$ , construa um quadrado  $ABDE$  externo ao triângulo.

3ª) Da mesma forma, construa o quadrado  $BCFG$  sobre o lado  $\overline{BC}$  e o quadrado  $ACIH$  sobre o lado  $\overline{AC}$ .



Quando o triângulo se aproxima de um triângulo retângulo, a área do quadrado maior se aproxima da soma das áreas dos quadrados menores.

**INVESTIGUE**

- Meça os três ângulos internos do triângulo  $ABC$  e, usando a ferramenta de cálculo de área, determine as áreas dos quadrados  $ABDE$ ,  $BCFG$  e  $ACIH$ .
- Movimente um dos vértices do triângulo construído de forma que obtenha um triângulo acutângulo. Compare a área do quadrado maior com a soma das áreas dos quadrados menores. O que você observa? *Nos quadrados construídos sobre os lados do triângulo acutângulo, a área do quadrado maior é menor que a soma das áreas dos quadrados menores.*
- Movimente, agora, um dos vértices do triângulo de forma que obtenha um triângulo obtusângulo. Compare a área do quadrado maior com a soma das áreas dos quadrados menores. O que você observa? *Nos quadrados construídos sobre os lados do triângulo obtusângulo, a área do quadrado maior é maior que a soma das áreas dos quadrados menores.*
- Mais uma vez, movimente um dos vértices do triângulo de forma que um dos seus ângulos internos se aproxime de  $90^\circ$ . O que você observa? *A área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores.*
- Repita a construção descrita acima, porém desenhe um triângulo retângulo no 1º passo. Determine as áreas dos quadrados e compare a área do quadrado maior com a soma das áreas dos quadrados menores. Movimente a construção. O que você observa?

Fonte: Gay e Silva (2018d, p. 151).

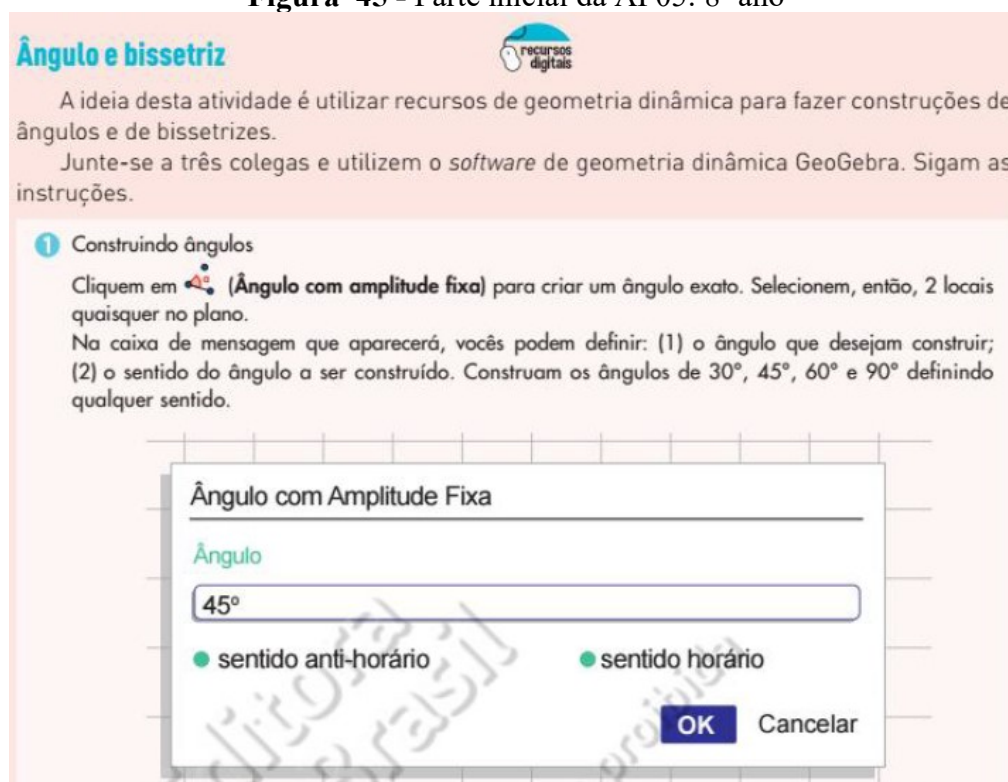
Considera-se tal abordagem a partir da experimentação-com-tecnologias promovendo descoberta matemática, uma forma diferente de aprender matemática, auxiliando na elaboração de conjecturas e no convencimento do experimentador, uma vez que há uma especulação e um criticismo associado, sem respostas previamente dadas aos estudantes. Além disso, reitera-se a necessidade de essa estar mais presente nos LD, promovendo aos estudantes uma compreensão maior dos conceitos, uma vez que eles fazem parte dos resultados que foram obtidos, os quais não foram dados a eles diretamente.

### 6.1.3 Domesticação da tecnologia

As atividades que tendem à domesticação da tecnologia são cinco dentre as 36, o que corresponde a 13,9% aproximadamente. Destas, três são da Apoema, uma da Araribá e uma da Teláris. Ou seja, das quatro coleções, três possuem pelo menos uma que trabalha conceitos já conhecidos e não possuem convite à exploração. Como a AP04 já foi discutida anteriormente, o foco será nas outras quatro atividades. São elas: AP05, AP06, AR05, TE02.

Começando pela AP05, essa é uma atividade baseada na habilidade EF08MA15: “Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $30^\circ$  e polígonos regulares” (BRASIL, 2018, p. 315). Pelo o que a atividade define, ela tem o objetivo de construir ângulos e bissetrizes utilizando os recursos do SGD. Essa primeira parte pode ser vista na Figura 45.

**Figura 45** - Parte inicial da AP05: 8º ano

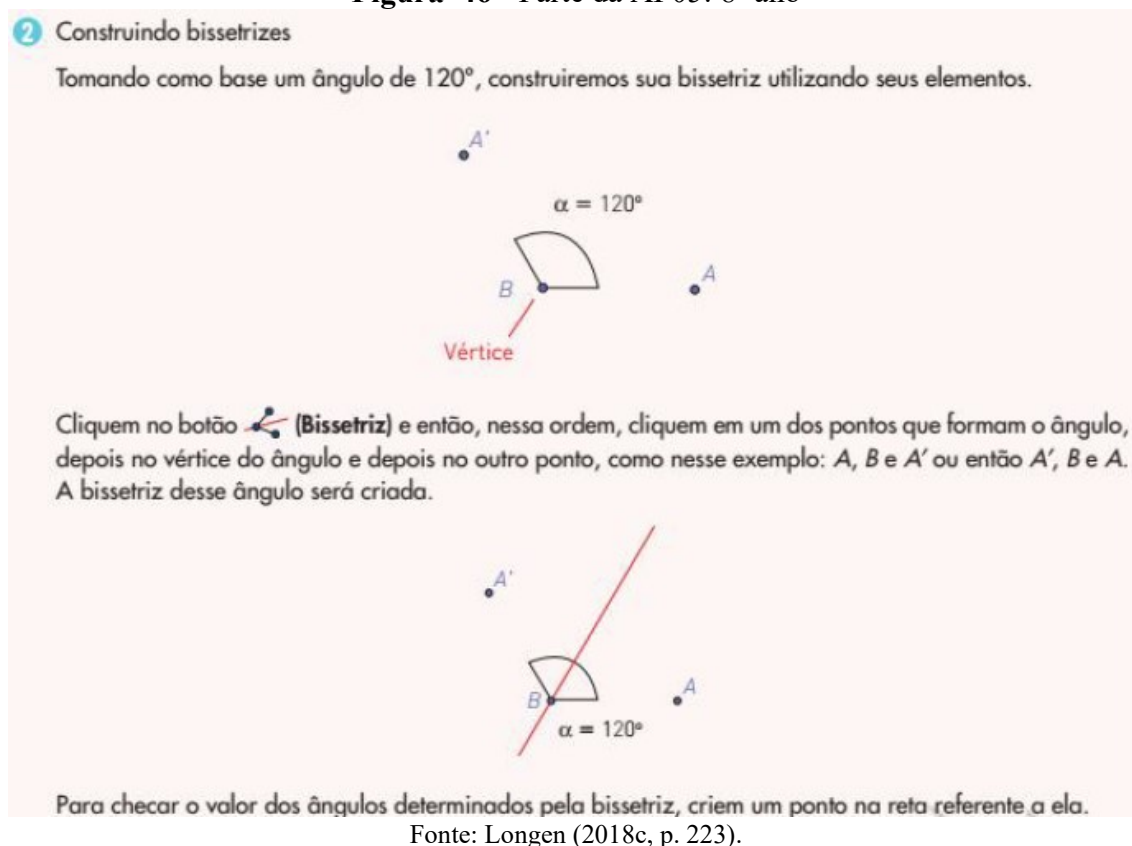


Fonte: Longen (2018c, p. 222).

A atividade pede para que esse procedimento seja repetido, seja no sentido horário, como também no anti-horário, por meio da exploração da ferramenta ‘Ângulo

com amplitude fixa' citada na Figura 45. Na sequência, pede-se a construção das bissetrizes, como pode ser visto na Figura 46.

**Figura 46** - Parte da AP05: 8º ano



Essa atividade vem logo após várias outras que pedem para que os estudantes construam ângulos e bissetrizes com o auxílio de régua e compasso. Aqui, há somente um uso das funções pré-definidas do software para as construções citadas. Isso permite aos estudantes saberem como se usam tais funções do GeoGebra, mas eles não precisam saber quais são as características de tais objetos geométricos, ou em que se baseiam as construções para realizá-las. Por isso, essa é uma atividade que tende à domesticação da tecnologia, por não explorar as potencialidades que o próprio software oferece ou mesmo não incorporar os conhecimentos já discutidos anteriormente no LD.

Logo na sequência, tem-se a AP06, que está baseada na mesma habilidade da BNCC citada anteriormente, EF08MA15. A atividade propõe a construção de polígonos regulares e, focando no hexágono, a partir das funções pré-definidas do software que dão as medidas dos lados e dos ângulos, sugere que os estudantes vejam que são todos congruentes entre si, como pode ser observado no início na Figura 47.

Figura 47 - Parte inicial da AP06: 8º ano

**Polígonos regulares**

Esta atividade propicia a utilização de recursos de geometria dinâmica para construir polígonos regulares e estudar seus elementos.

Junte-se a três colegas e utilizem o software de geometria dinâmica GeoGebra. Sigam as instruções.

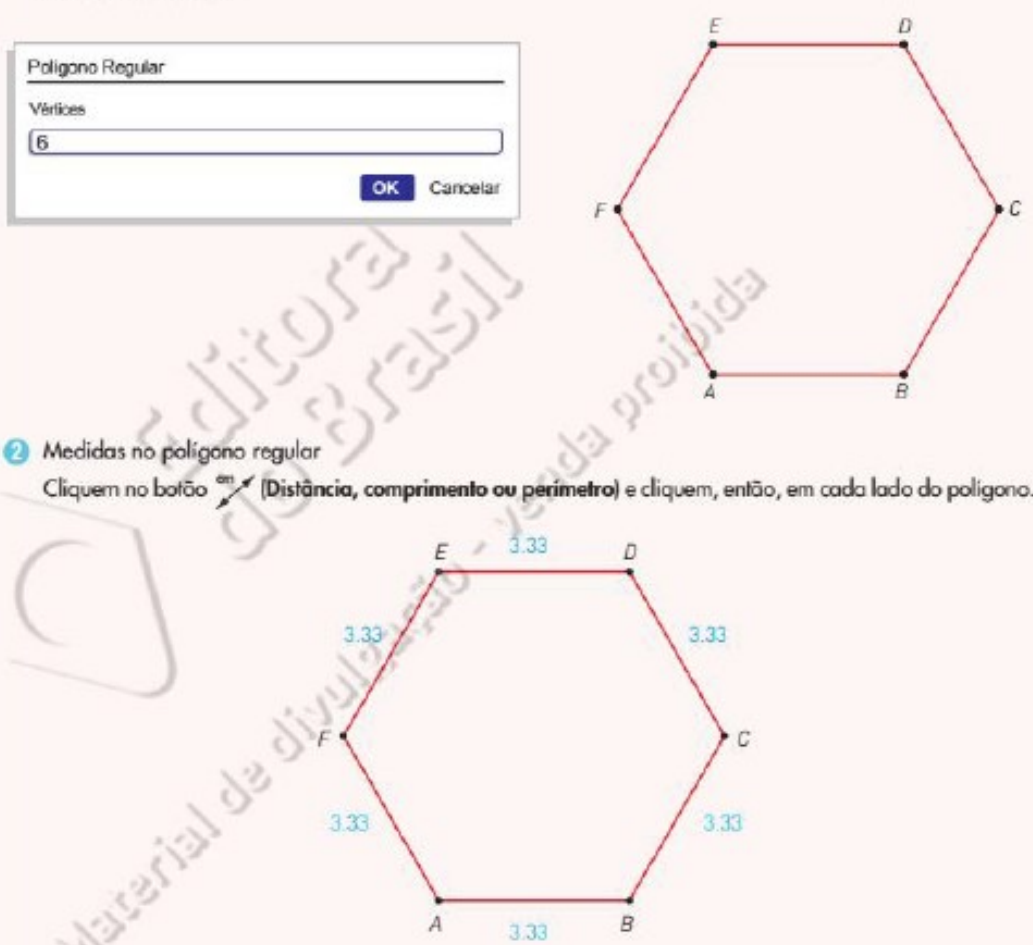
**1 Construindo polígonos regulares**

Cliquem em  (**Polígono regular**) para criar um polígono regular. Seleccionem, então, 2 pontos quaisquer no plano. Aparecerá uma janela para a escolha do número de vértices do polígono desejado. Seleccionem 3 para triângulo, 4 para quadrado, 5 para pentágono etc. Como, construiremos um hexágono, vamos seleccionar 6.

**2 Medidas no polígono regular**

Cliquem no botão  (**Distância, comprimento ou perímetro**) e cliquem, então, em cada lado do polígono.

O que podemos concluir sobre os lados de um polígono regular? **Os lados possuem a mesma medida.**



Fonte: Longen (2018c, p. 230).

Porém, isso já havia sido abordado anteriormente no LD, como pode ser visto na Figura 48 (com relação aos ângulos), que não faz parte de qualquer atividade com o uso do GeoGebra. Com relação aos lados congruentes, também já houve um frequente questionamento sobre, a partir da exposição de como construir um hexágono regular baseado em três formas diferentes.

**Figura 48** - Parte do LD que trata sobre ângulos do hexágono regular

Antes de você observar a próxima construção, note que um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros. Além disso, o ponto de encontro desses triângulos representa o centro de uma circunferência de raio igual à medida do lado do triângulo equilátero ou do hexágono regular.



Responda:

1. Qual é a medida de cada um dos 6 ângulos que têm o vértice no centro da circunferência?
2. Qual é a medida de cada ângulo interno do hexágono regular?

A medida de cada ângulo é  $60^\circ$ .

Cada ângulo interno do hexágono regular mede  $120^\circ$ .

Fonte: Longen (2018c, p. 225).

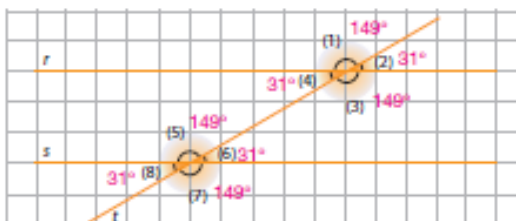
Agora partindo para a coleção Araribá, há a atividade AR05, que tem por objetivo favorecer o desenvolvimento da habilidade EF07MA23: “Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p. 309). Porém, uma atividade com objetivo similar aparece no início da página em que AR05 se encontra, diferenciando-se pelo fato que é para ser feita com o uso de lápis e papel, como pode ser visto na Figura 49.

**Figura 49** - Página do livro onde se encontra a atividade AR05: 7º ano

2. Lembre os alunos do procedimento visto no 6º ano para traçar retas paralelas. Eles também podem usar, para auxiliar no traçado das retas paralelas, as linhas de um papel quadriculado ou as linhas da folha do caderno.

#### Para investigar

1. Observe os ângulos formados quando uma reta ( $t$ ) intercepta duas retas paralelas ( $r$  e  $s$ ). Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos formados. Quais deles têm a mesma medida? Os ângulos (2), (4), (6) e (8) têm a mesma medida, assim como os ângulos (1), (3), (5) e (7).



2. c) Espera-se que os alunos percebam que os ângulos correspondentes e os opostos pelo vértice têm a mesma medida.

2. Trace, da maneira que preferir, duas retas paralelas e uma reta que cruze essas paralelas. Essas retas determinarão oito ângulos.



- a) Com o auxílio de um transferidor, meça cada um desses ângulos, anote a medida junto ao ângulo e pinte os ângulos que têm mesma medida com a mesma cor. *Resposta pessoal.*
- b) Quantas cores diferentes você usou para pintar os ângulos? *duas cores*
- c) Que relação você percebeu entre as medidas dos ângulos determinados?
- d) Compare sua figura com a de alguns colegas. Os ângulos determinados por vocês têm as mesmas medidas? A relação que você percebeu no item c também vale na figura dos colegas? *Provavelmente, os ângulos não terão as mesmas medidas em todas as figuras, mas espera-se que os alunos percebam que em cada figura a relação entre as medidas dos ângulos se mantém.*

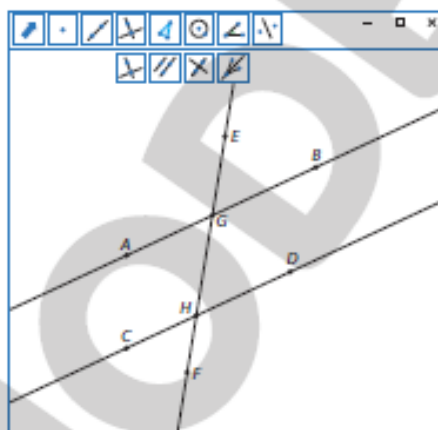
## INFORMÁTICA E MATEMÁTICA

Vamos agora utilizar um software de Geometria dinâmica para investigar se a relação entre as medidas dos ângulos vale para quaisquer paralelas cortadas por uma transversal.

#### CONSTRUA

Siga os passos a seguir para construir duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

- 1ª) Trace uma reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- 2ª) Usando a ferramenta de traçar retas paralelas, trace uma reta  $\overleftrightarrow{CD}$  paralela a  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- 3ª) Trace uma reta  $\overleftrightarrow{EF}$  que cruze as retas paralelas  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- 4ª) Marque o ponto  $G$ , intersecção das retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{EF}$ .
- 5ª) Marque o ponto  $H$ , intersecção das retas  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{EF}$ .



**INVESTIGUE** pares de ângulos correspondentes são:  $\angle EGB$  e  $\angle GHD$ ,  $\angle BGH$  e  $\angle DHF$ ,  $\angle AGE$  e  $\angle CHG$ ,  $\angle HGA$  e  $\angle FHC$ ; e os pares de ângulos opostos pelo vértice são:  $\angle EGB$  e  $\angle HGA$ ,  $\angle BGH$  e  $\angle AGE$ ,  $\angle GHD$  e  $\angle FHC$ ,  $\angle DHF$  e  $\angle CHG$ .

- a) Usando a ferramenta de medir ângulos do software, meça os oito ângulos obtidos na construção anterior.
- b) Identifique os pares de ângulos correspondentes e de ângulos opostos pelo vértice.
- c) Que relação é possível perceber entre os pares de ângulos correspondentes? E entre os pares de ângulos opostos pelo vértice? *Tanto os pares de ângulos correspondentes quanto os pares de ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Fonte: Gay e Silva (2018b, p. 79).

É possível perceber que em ambas as atividades é pedido que os estudantes façam duas retas paralelas cortadas por uma transversal, meçam os oito ângulos formados e vejam a relação entre eles. Além disso, agora com o foco na atividade com o SGD, não é solicitado que os estudantes arrastem quaisquer dos pontos criados para ajudá-los no convencimento de que os ângulos opostos pelo vértice, bem como os complementares, são congruentes entre si, o que seria semelhante ao item D da

atividade “Para investigar”, ao fazerem a comparação com as atividades dos colegas. Porém, nesse último, há de se considerar a possibilidade de erros de construção das retas paralelas e da medição dos ângulos por parte dos alunos, o que seria minimizado com o uso do SGD.

Por fim, na coleção Teláris, há a TE02, na qual é requerido dos alunos que construam retângulo, trapézio e quadrado baseando-se na habilidade EF06MA22: “Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 303), como pode ser visto na parte final na Figura 50.

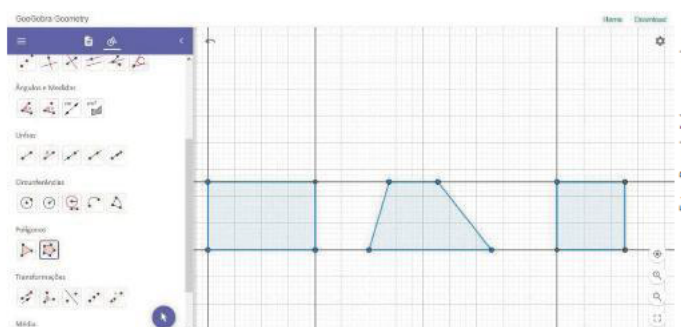
**Figura 50 - Parte final da TE02 - 6º ano**

**4º passo:** Usando os pares de retas que você construiu inicialmente e a opção “Polígono”, construa um trapézio.

**5º passo:** Usando novamente o par de retas paralelas que você construiu inicialmente, você também pode construir um quadrado. Para isso, vamos usar outra opção de construção de polígonos do menu de ferramentas.

Inicialmente, trace outra reta perpendicular a essas retas paralelas. Em seguida, clique em “Polígono regular”  selecione os 2 pontos de intersecção dessa reta perpendicular com as retas paralelas e digite “4”.

Você obterá quadriláteros parecidos com estes.



Fonte: Dante (2018a, p. 155).

Entretanto, não há uma interação com essas construções ou mesmo uma confirmação de que são, realmente, as construções citadas. Também não há pedido para movimentação de nenhum dos pontos móveis para que os próprios estudantes fizessem o teste do arrastar, ou seja, que percebessem que as construções foram bem feitas, sendo que, mesmo ao movimentar os pontos que são móveis, continuaria sendo os polígonos citados.

Dessa maneira, as cinco atividades comentadas acima são exemplos de domesticação da tecnologia, as quais não se aproveitam das potencialidades do SGD, bem como há pouca ou nenhuma interação com as construções feitas, não havendo, assim, uma exploração, além de abordar conceitos já trabalhados nas páginas anteriores

no LD. Reitera-se, portanto, a precariedade de atividades nesse formato, pois usam as TD apenas como pretexto para deixar de trabalhar com as tecnologias convencionais como lápis e papel. Não incorporar tais potencialidades pode ser considerado um desperdício no uso do SGD.

#### 6.1.4 Simples constatação

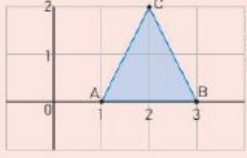
As atividades que objetivam simples constatação são duas dentre as 36, o que corresponde a 5,6% aproximadamente. Uma é da coleção Apoema e outra da Teláris. Ou seja, essas duas trabalham conceitos ainda não explorados e que não possuem convite à exploração. Como a TE07 já foi discutida anteriormente, agora será apresentada de maneira mais focalizada a AP09.

Essa atividade objetiva que os alunos construam mosaicos e vejam quais polígonos permitem pavimentar um plano, com base de que só é possível com aqueles polígonos regulares que possuem ângulos internos divisíveis por 360. Após isso, há o pedido de esboço de construção de um sítio, como pode ser visto na Figura 51.

**Figura 51 - Parte da AP09: 9º ano**

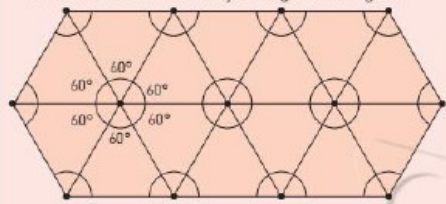
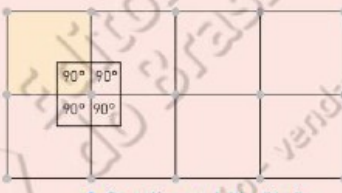
**Exercício - Construindo polígonos regulares**

Utilizando a ferramenta  (**Polígono Regular**), selecione dois pontos em um dos eixos definidos, com medida 2, e construam um triângulo regular digitando 3 na caixa de diálogo que aparecerá após a seleção dos dois pontos. Repitam o procedimento e construam um quadrado e um hexágono regular.



**Pavimentação do plano**

A construção de uma pavimentação no plano toma por base o encaixe de polígonos sem que haja sobras ou sobreposição, ou seja, a soma dos ângulos que possuem um vértice em comum deve ser  $360^\circ$ . Veja as figuras a seguir.

Utilizem o GeoGebra para realizar as verificações que seguem:

- Verifique quais dos polígonos a seguir não permitem a pavimentação de um plano.
 

|                       |                         |
|-----------------------|-------------------------|
| I) Pentágono regular. | III) Decágono regular.  |
| II) Hexágono regular. | IV) Dodecágono regular. |
- Quais são os únicos polígonos que permitem a pavimentação do plano? Por quê?
- Um sítio será construído em uma área com medidas aproximadas de 80 metros de comprimento por 160 metros de largura. Para aproveitar melhor a área utilizada, foram escolhidos polígonos que permitem a pavimentação do plano. Ilustrem um esboço do sítio com área reservada para duas residências, uma piscina em formato circular e uma área de recreação infantil, ocupando no máximo 800 metros quadrados. Dica: o botão  (**Área**) pode expressar a medida ocupada por cada polígono/círculo construído.

**1. Os polígonos I, III e IV não permitem a pavimentação de um plano. Os alunos devem construir os polígonos no GeoGebra para concluir.**

**3. Resposta pessoal.** Espera-se que os alunos construam as pavimentações e utilizem a ferramenta de área para verificar o espaço utilizado. A figura será deverá ser construída em escala definida pelos alunos 

Fonte: Longen (2018d, p. 197).

A AP09 é descrita como baseada na habilidade EF09MA15: “Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando [...] softwares” (BRASIL, 2018, p. 319). O objetivo da atividade é identificar com quais polígonos é possível fazer uma pavimentação a partir da função pré-definida do GeoGebra “Polígono regular”. É requerida a simples constatação de que só é possível o mosaico quando a soma dos ângulos com o vértice em comum é  $360^\circ$ , como a própria atividade já informa, fazendo-se a verificação com quatro outros polígonos (item 1). Isto não foi abordado anteriormente no LD, porém, não há convite à exploração, ou seja, não é esperado que os estudantes cheguem a essa conclusão e, dessa maneira, a AP09 tem papel de simples constatação sobre a questão dos ângulos internos dos polígonos para os estudantes por meio do uso do GeoGebra.

Dessa maneira, foi apresentada a caracterização das 36 atividades encontradas nas coleções, na busca pela compreensão do papel que essas têm desempenhado nos LD a partir das quatro categorias de análise: corroboração a compreensão de conjecturas, descoberta matemática, domesticação da tecnologia e simples constatação, advindas da abordagem da experimentação-com-tecnologias, com um panorama das coleções.

## 6.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Tendo em vista, agora, a discussão sobre a existência de um convite para a justificativa das conjecturas por parte do experimentador nas atividades, constatou-se que apenas uma das atividades (AP08) faz tal convite para os estudantes. Em vários momentos nas coleções, há a demonstração de tais conjecturas antes ou logo após as atividades, com exceção da AP08, sempre por parte do próprio LD, não por parte dos estudantes.

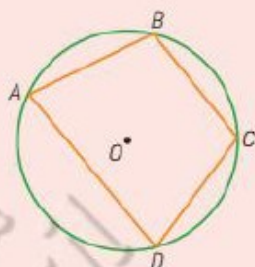
A referida atividade inicia pedindo para que se formem grupos de 3 ou 4 participantes, e que utilizem régua, compasso, folha e lápis para realizá-la. Após isso, aparece o que se apresenta na Figura 52, a qual é possível perceber que não é para ser feita por meio do GeoGebra inicialmente, mas sim, numa folha de papel. Os experimentadores são convidados a traçar uma circunferência, um quadrilátero inscrito nele e medir os quatro ângulos internos com o auxílio de um transferidor (esse último instrumento não aparecia na lista de materiais que seriam necessários para a realização da atividade inicialmente).

**Figura 52** - Início da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano

### Encaminhamento

#### Instruções para a 1ª parte

1. Em uma folha de papel trace uma circunferência com 8 cm de raio.
2. Nessa circunferência marque quatro pontos diferentes e ligue-os por meio de segmentos conforme indica a figura.



a) Espera-se que os alunos informem que os ângulos opostos têm medidas que, quando adicionadas, resultam em  $180^\circ$  [valor aproximado devido a possíveis imprecisões não apenas no traçado da figura mas também do instrumento utilizado].

3. Com o transferidor, obtenha e anote as medidas dos quatro ângulos internos do quadrilátero.
4. Adicione as medidas dos ângulos do quadrilátero que são opostos, isto é, obtenha  $A + C$  e depois  $B + D$ .
  - a) Responda: Qual é sua conclusão após comparar os dois resultados?
  - b) Repita essa atividade traçando outras circunferências e outros quadriláteros e responda: A conclusão é a mesma? Espera-se que os alunos informem que sim.

Fonte: Longen (2018d, p. 102).

Com essa primeira atividade, como é possível perceber nas respostas do MP no canto direito, é esperado que os experimentadores percebam que a soma dos ângulos opostos desse quadrilátero é  $180^\circ$ , mesmo com possíveis erros de imprecisões. Ao fim da 1ª parte, é pedido para que os alunos repitam tal procedimento traçando outras circunferências e quadriláteros para ver que a soma dos ângulos opostos continua sendo  $180^\circ$ .

Na 2ª parte, apresentada na Figura 53, é possível ver o pedido para que os experimentadores, em grupos, demonstrem a propriedade apontada, fornecendo uma orientação inicial para que estes utilizem a propriedade já vista e demonstrada no LD anteriormente sobre a relação do ângulo central ser o dobro do ângulo inscrito em uma circunferência.

**Figura 53** - 2ª parte da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano

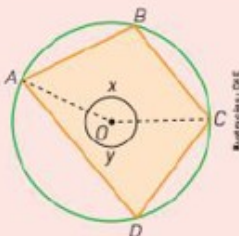
**Instruções para a 2ª parte**

1. Leia a propriedade a seguir.

**Propriedade**

Se um quadrilátero está inscrito em uma circunferência, seus ângulos opostos são suplementares. Reciprocamente, se os ângulos de um quadrilátero convexo são suplementares, então o quadrilátero é inscrito em uma circunferência.

2. Para demonstrar que os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência são suplementares, faça um desenho como o do exemplo a seguir.



Para demonstrar essa propriedade, pode-se utilizar a relação entre ângulo inscrito e ângulo central de uma circunferência.

3. Procure demonstrar algebricamente que os ângulos  $B$  e  $D$  são suplementares. Troque ideias com os colegas sobre como isso pode ser feito e apresente as justificativas para a turma toda. [Ver resposta no Manual do Professor.](#)

Fonte: Longen (2018d, p. 102–103).

Por fim, a Figura 54 apresenta a 3ª e última parte dessa atividade, a ser realizada no GeoGebra. Logo no início, percebe-se que a atividade coloca essa parte para que se verifique a propriedade citada anteriormente. A mesma construção que foi feita com lápis e papel é solicitada, agora com o uso do SGD por meio da ferramenta de ângulo.

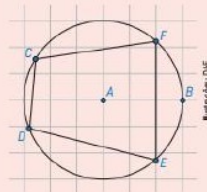
**Figura 54** - 3ª parte da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano

**Instruções para a 3ª parte**

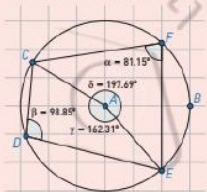
**Verificação geométrica da propriedade**

Utilizando o *software* GeoGebra você verificará a propriedade citada anteriormente.

1. Trace uma circunferência utilizando o botão  (**Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**).
2. Nessa circunferência, por meio do botão  (**Segmento**), desenhe um quadrilátero qualquer unindo quatro pontos pertencentes a ela.



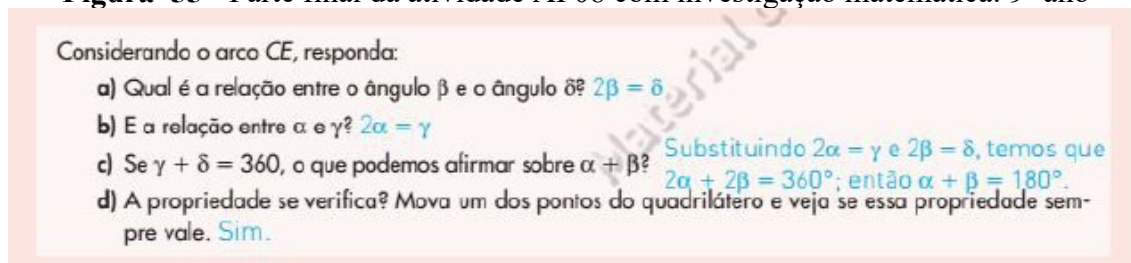
3. Utilizando novamente o botão **Segmento**, ligue dois vértices opostos desse quadrilátero ao centro da circunferência, nesse caso, o ponto  $A$ .
4. Com o botão  (**Ângulo**) indique os ângulos formados pelos vértices opostos que não foram ligados ao centro, bem como os ângulos centrais desse quadrilátero.



Fonte: Longen (2018d, p. 103).

Após isso, algumas perguntas finais (Figura 55) são feitas para os alunos se convencerem da relação dos ângulos opostos do quadrilátero inscrito à circunferência somarem  $180^\circ$ .

**Figura 55** - Parte final da atividade AP08 com investigação matemática: 9º ano



Fonte: Longen (2018d, p. 103).

Quanto a essa atividade, percebe-se que o objetivo do autor é usar o GeoGebra como meio para verificar a propriedade, como está exposto no início da 3ª parte (Figura 54), entretanto, é possível questionar sobre o que se ganha em repetir a mesma construção com os recursos convencionais e, depois, com o GeoGebra. Nesse sentido, essa ordenação diminui a relevância do uso do SGD, uma vez que o experimentador estaria refazendo algo que já pode tê-lo propiciado um convencimento por meio da visualização ativa.

O trabalho manual por parte dos experimentadores (para ser feito com lápis, papel e transferidor e repetido algumas vezes) poderia ser reduzido caso fosse feito com o auxílio do GeoGebra, com ganho de tempo, uma vez que esse é um dos benefícios que tal ferramenta traz (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020). Além disso, haveria a possibilidade de ter feedback visual instantâneo para os experimentadores, com diminuição dos erros de imprecisões naturalmente encontrados pelo uso de materiais manuais.

Uma vez que só se demonstra aquilo que já se está convencido ser verdade (HANNA, 2000), sugere-se, aqui, uma adaptação aprimorada da atividade, como abordado por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), sendo os objetivos matemático e pedagógico e a natureza preservados, mas com necessidade de mudança na construção de tal atividade para que essa reforce o caráter experimental necessário em atividades com o uso do SGD. Dessa maneira, de acordo com a literatura, a 3ª parte poderia ser ponto de partida e não ponto de verificação, sendo que, após ter testado a propriedade diversas vezes de que a soma dos ângulos opostos é  $180^\circ$  no quadrilátero inscrito à circunferência, a partir da visualização ativa, os alunos poderiam estar convencidos de

que é uma verdade, buscando, então, justificar tal propriedade algebricamente, como foi pedido na 2ª parte.

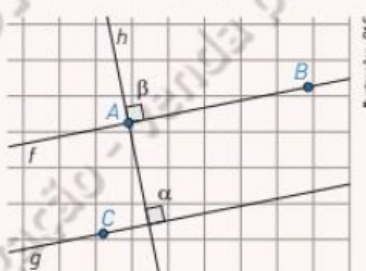
Partindo dessa atividade, quando olhamos para essa questão da justificação de conjecturas, encontram-se termos nos LD que vão na contramão da literatura, como o que se apresenta no fim da AP08, representada na Figura 55. No item D, é possível perceber o questionamento se a propriedade se verifica. Porém, na continuação do item, é pedido para que o aluno “mova um dos pontos do quadrilátero e veja se essa propriedade **sempre vale**” (LONGEN, 2018d, p. 103, grifo nosso). O que se apresenta diminui a importância da demonstração, uma vez que, ao levantar esse último questionamento, há a possibilidade de levar os alunos a entenderem que esse movimentar, não havendo exemplos que deem errado, é suficiente para afirmar que a propriedade é sempre verdadeira, o que não está correto.

A coleção Apoema e A Conquista da Matemática, por vezes, optam por trazer termos que podem confundir os usuários de tais coleções, ao considerarem que ao testar uma conjectura várias vezes é possível concluir sobre sua veracidade, sem passar pelo processo da justificação (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2019).

Tal questão pode ser observada, também, na Figura 56, a qual, após a atividade pedir a construção de retas paralelas cortadas por uma perpendicular, traz as perguntas finais que aparecem na imagem. A pergunta do item E questiona aos alunos o que se pode concluir sobre os ângulos formados entre essas retas, já que nos itens anteriores, mesmo movendo os pontos móveis que foram pedidos, a medida do ângulo não se altera. A resposta esperada dos estudantes, descrita em azul, exibe que as retas se intersectam sempre formando  $90^\circ$ . Como não se pode afirmar uma conjectura sem passar pelo processo de justificativa (HANNA, 2000), é matematicamente equivocado chegar a tal conclusão sobre o ângulo de  $90^\circ$  apenas com exemplos advindos dos itens anteriores.

**Figura 56** - Parte final da AP02: 6º ano

5 Repita o passo anterior clicando primeiro na reta  $f$  e, depois, na reta  $h$ .



6 Agora responda:

- Quanto mede o ângulo  $\beta$  formado entre as retas  $f$  e  $h$ ?  $90^\circ$
- Quanto mede o ângulo  $\alpha$  formado entre as retas  $g$  e  $h$ ?  $90^\circ$
- Ao mover o ponto  $C$ , as retas  $f$  e  $g$  se mantêm paralelas. O que acontece com os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  nesse caso? *A medida deles não se altera.*
- Clique no ponto  $A$  ou no ponto  $B$  para mover a reta  $f$ . O que acontece com os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ ? *A medida deles não se altera.*
- O que podemos concluir sobre os ângulos formados por uma reta perpendicular que intersecta duas retas paralelas? *Uma reta perpendicular a duas retas paralelas as intersecta sempre formando um ângulo de  $90^\circ$ .*

Fonte: Longen (2018a, p. 124).

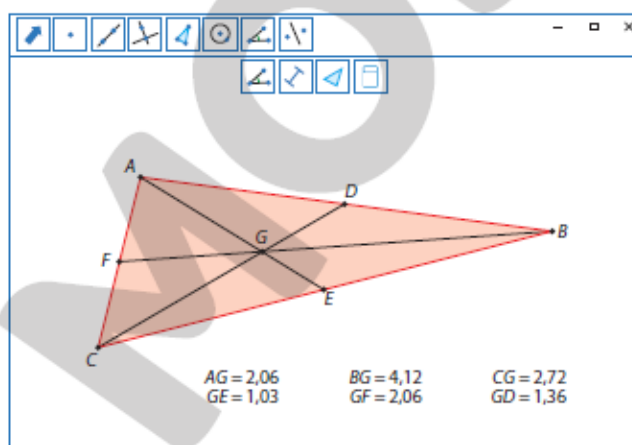
Referindo-se, agora, às coleções Araribá e Teláris, essas optam por frases como: ‘o que você observou?’, ‘o que a investigação sugere?’ ou ‘é possível perceber alguma relação entre[...]?’ (Figura 57), sentenças essas que são mais adequadas para o processo da experimentação, ainda que não haja o pedido para a justificação em nenhuma das atividades nessas coleções, ou seja, não propondo investigação matemática.

**Figura 57** - Parte final da AR09: 8º ano

### INVESTIGUE

Faça o que se pede usando as ferramentas do *software*.

- Meça as distâncias  $AG$  e  $GE$ . Você consegue perceber alguma relação entre essas medidas?
- Meça as distâncias  $BG$  e  $GF$  e observe-as. Repita o procedimento com  $CG$  e  $GD$ . É possível perceber alguma relação entre os pares de medidas?
- Movimente os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , mudando a configuração do triângulo, e veja se a relação se mantém. Converse com um colega e veja se ele observou a mesma relação que você.



Espera-se que os alunos percebam que a distância de cada vértice ao baricentro é o dobro da distância entre o baricentro e o ponto médio do lado oposto.

Fonte: Gay e Silva (2018c, p. 87).

É importante destacar a relevância que o LD tem em combater essa maneira de enxergar uma experimentação, associando-a diretamente à demonstração, sem o processo da justificativa. Na Figura 58, por exemplo, percebe-se que os autores deixam esse alerta importante no MP, como pode ser visto em rosa na sugestão da resposta do item A, na atividade AR04.

**Figura 58** - Parte inicial da AR04: 7º ano

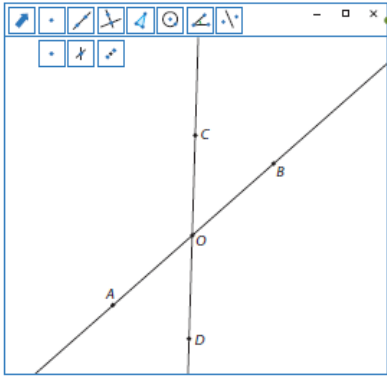
### INFORMÁTICA E MATEMÁTICA

Nesta seção, você vai utilizar um *software* de Geometria dinâmica, que seu professor indicará, para construir duas retas concorrentes, identificar os pares de ângulos opostos pelo vértice determinados por essas retas e verificar uma regularidade em relação a esses ângulos.

**CONSTRUA**

Siga os passos abaixo para construir e determinar dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

- 1ª) Trace uma reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- 2ª) Trace uma reta  $\overleftrightarrow{CD}$  cruzando a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- 3ª) Marque o ponto  $O$ , interseção das retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$ .



a) Comente com os alunos que a movimentação dos pontos móveis, possibilitada pela Geometria dinâmica, auxilia na construção de hipóteses, porém não configura uma demonstração matemática.

Normalmente, nos *softwares* de Geometria dinâmica, há uma barra superior com diversos botões. Ao clicar em cada um deles, é possível ver diversas opções de ferramentas com as quais podemos marcar pontos, traçar retas, construir polígonos, medir ângulos etc.

b) Considerando a disposição dos pontos como mostra a figura (o ponto  $O$  entre  $A$  e  $B$  e entre  $C$  e  $D$ ), os pares de ângulos opostos pelo vértice são:  $\widehat{A\hat{O}D}$  e  $\widehat{B\hat{O}C}$ ;  $\widehat{D\hat{O}B}$  e  $\widehat{C\hat{O}A}$ .

c) Os ângulos  $\widehat{A\hat{O}D}$  e  $\widehat{B\hat{O}C}$  apresentam a mesma medida, ou seja, são congruentes, assim como os ângulos  $\widehat{D\hat{O}B}$  e  $\widehat{C\hat{O}A}$ . Movimentando os pontos móveis para alterar a configuração inicial da construção, as medidas dos ângulos se modificam também, porém os ângulos opostos pelo vértice continuam congruentes.

**INVESTIGUE**

a) Usando a ferramenta de medir ângulos do *software*, meça os quatro ângulos determinados pelas retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{CD}$ .



Fonte: Gay e Silva (2018b, p. 75).

Dessa maneira, discutiu-se sobre a abordagem da investigação matemática presentificada nas atividades com o uso do SGD nos LD analisados, com foco na ótica do convite à justificativa de conjecturas.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa se propôs a ir na direção da pergunta “qual o papel das Tecnologias Digitais em atividades propostas nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental, no âmbito da Geometria?”, por meio do objetivo de caracterizar e compreender o papel que as atividades com o uso do SGD têm desempenhado em LD dos Anos Finais do Ensino Fundamental, aprovadas no PNLD 2020, nos capítulos da unidade temática de Geometria.

Para isso, a dissertação deu início com uma revisão de literatura com a trajetória das TD nos Livros Didáticos, partindo do PNLD 2014, o primeiro a incluir os Objetos Educacionais Digitais como parte complementar dos livros impressos, e chegando até 2020, ano base da presente pesquisa. Dessa maneira, foram levantadas as habilidades trazidas pela Base que abordavam sobre a necessidade de os estudantes trabalharem com as TD, principalmente o SGD, uma vez que o PNLD 2020 foi o originário a trazer como primeiro critério garantir que os LD contribuíssem para o desenvolvimento de tais habilidades. Sendo assim, olhar para as atividades com o uso do SGD demonstrou-se de grande importância.

Na sequência, o referencial teórico da pesquisa foi apresentado, tendo como base duas frentes: construção e visualização. A primeira, entendida como essencial no processo de investigação por meio do SGD, define-se pela possibilidade de arrastar elementos móveis de um objeto geométrico e os demais elementos responderem dinamicamente a esse arraste, preservando as propriedades fundamentais de tal objeto. Com essa possibilidade do movimento sendo explorada, a visualização ganha destaque, sendo o processo de formar imagens atrelado a um objetivo, com a finalidade de gerarem descoberta ou entendimento matemático.

Ainda na sequência do referencial, essas duas frentes foram discutidas, atreladas à experimentação-com-tecnologias e à investigação matemática, pela dimensão empírica que o SGD pode fornecer. Além disso, tal exploração dos objetos geométricos pode ajudar a convencer os estudantes sobre certas conjecturas, porém com a necessidade de buscar, matematicamente, justificativas para aquilo que já foram convencidos. Dessa maneira, experimentação-com-tecnologias e investigação matemática se aproximam, com o envolvimento das frentes citadas.

No capítulo da fundamentação metodológica, foi justificado a presente pesquisa ser qualitativa com o uso de análise documental realizada em quatro coleções de LD dos

Anos Finais do Ensino Fundamental, além de apresentar o procedimento adotado. Tais obras foram apresentadas a partir de suas características, principalmente no que se refere aos capítulos de Geometria, o quanto isso correspondia dentro do LD e quantas atividades com o uso do SGD foram encontradas em cada um dos 16 LD, tendo sido identificadas nove na Apoema, 15 na Araribá, quatro na A Conquista da Matemática e oito na Teláris – 36 no total.

Além disso, foram apresentadas as quatro categorias de análise baseadas na discussão sobre se os conceitos desenvolvidos na atividade já haviam sido abordados anteriormente ou não no LD e se havia um convite para teste de visualização e movimento sendo promovidos pela mesma. São elas: corroboração a compreensão de conjecturas, descoberta matemática, domesticação da tecnologia e simples constatação. Na discussão sobre a abordagem da investigação matemática, o questionamento estava baseado sobre se as atividades faziam um convite para justificar as conjecturas que eram levantadas.

Na sequência, nos capítulos 5 e 6, foi apresentada uma análise descritiva e analítica das quatro coleções. Primeiro com um olhar a partir do Guia e das orientações gerais dos MP com relação às TD; segundo a partir das propostas de utilização que o LD fornecia para o professor no uso do software; terceiro, um olhar para as páginas específicas do livro que continham as atividades com o uso do GeoGebra e sua localização. E, por fim, com a caracterização das 36 atividades a partir das categorias de análise que foram construídas. Aqui foi possível identificar aspectos específicos de cada umas coleções.

Primeiro, a Apoema, com porcentagem média de 25% em capítulos de Geometria em seus LD dos Anos Finais, apresenta uma falta de padronização em várias de suas abordagens, o que pode confundir tanto o professor quanto os alunos que farão tal atividade. Porém, apesar do Guia apontar como essa sendo a única coleção que tem pouco incentivo aos recursos tecnológicos, foi a segunda que mais abordou atividades com o uso do SGD em comparação com as outras três analisadas na presente pesquisa, ficando atrás apenas da Araribá. Com relação à caracterização das nove atividades, não houve abordagem de descoberta matemática em nenhuma delas e pode-se perceber falta de exploração das potencialidades do software, apresentando diversas questões utilizando apenas as funções pré-definidas do GeoGebra, bem como não fazendo um convite de arraste para os alunos explorarem os objetos geométricos que eram construídos. Além disso, apenas uma atividade partiu de um conceito ainda não

abordado no LD, ou seja, a coleção não se utiliza do SGD como ponto de partida para a experimentação por parte dos alunos, trazendo atividades já realizadas anteriormente com o uso de recursos convencionais.

A Araribá foi a que mais teve atividades com o uso do SGD – quinze no total –, além de ser também a coleção que apresentou a maior porcentagem média de capítulos de Geometria em seus LD – 38,8%. Das quatro, é a que apresenta uma maior organização na apresentação da seção específica com o uso do SGD, além de ter uma ênfase já no Guia elogiando a coleção por fornecer diversas atividades com o uso das TD que favorecem a proatividade dos alunos. Isso, de fato, foi perceptível ao analisar a coleção, uma vez que todas as atividades com o uso do SGD, com exceção de uma, apresentam um convite à exploração, além de que 12 em 15 partem de um conceito ainda não abordado no LD, favorecendo a descoberta matemática. Ou seja, a Araribá demonstra o uso do software de forma mais potencializada, ao propor sua utilização como ponto de partida e criando um ambiente mais favorável de experimentação para os estudantes, tendo vários convites para que os mesmos elaborem conjecturas, não fornecendo respostas previamente definidas.

A coleção A Conquista da Matemática foi a que apresentou a menor quantidade de atividades com o uso do GeoGebra – quatro no total, uma em cada ano –, além de ser a que apresentou a menor porcentagem média dos capítulos de Geometria nos LD – 22,4%. Por ser a coleção mais escolhida no ano de 2020, com quase metade de todos os LD distribuídos nesse ano, espera-se que a coleção ofereça mais atividades para oportunizar que os estudantes utilizem mais o SGD. Em suas páginas iniciais, a própria coleção defende que o uso das TD tem papel preponderante na formação do cidadão e que essas são ferramentas pedagógicas que podem ser livremente utilizadas na realização de atividades de formas criativas. Além disso, o Guia destaca que a coleção fomenta o uso das TD no ensino da Matemática. Porém, não foi o que a presente pesquisa pode encontrar no que tange especificamente ao SGD nessa coleção, que se contradiz. Apesar disso, as quatro atividades trazidas possuem objetivos bem claros, tendo todas convite à exploração.

Por fim, também chama a atenção o fato de que três das quatro partem de conceito conhecido. É possível, inclusive, perceber pela paginação das atividades (referência ao Quadro 3), que essas sempre se encontram no final dos capítulos nas quais estão presentes, abordando conceitos já amplamente explorados no LD anteriormente. A CM01 excetua-se desse ponto, abordando conceito, até então,

desconhecido. Entretanto, como aparente curiosidade, uma vez que o assunto novo é homotetia, que não tem a obrigatoriedade de ser abordado no 6º ano e o LD não cita mais sobre isso em outro momento, apenas nessa atividade. Dessa forma, é possível se questionar sobre a decisão dos autores na abordagem de atividades com o uso do SGD, o que não aparenta ser uma prioridade.

Por último, a coleção Teláris, com média de 30,8% em capítulos de Geometria em seus LD, apresentou oito atividades com o uso do GeoGebra, duas em cada ano, uma respectiva a cada uma das habilidades da BNCC que citavam o SGD. Em suas páginas iniciais, o autor se utiliza de mesmas referências que a presente pesquisa, abordando como o SGD possibilita a manipulação e visualização de construções geométricas de maneira dinâmica. Apesar disso, foram apresentadas duas atividades que não possuíam um convite à exploração. Todas as oito eram claras em seus objetivos, porém, o que mais chamou a atenção na coleção foi a presença de muitas questões que não possuíam um caráter aberto, limitando onde os estudantes deveriam colocar um ponto, ou a medida específica que deveriam traçar um segmento, ou como deveriam chamar um objeto construído, elementos esses não essenciais para os objetivos matemáticos da atividade; além disso, havia apenas uma atividade que partia de um conceito desconhecido.

Na discussão sobre o incentivo à investigação matemática, também foi possível identificar que nenhuma das 36 atividades nas quatro coleções possuía essa abordagem, principalmente por não haver um convite à justificação das conjecturas que eram levantadas (quarto ponto da investigação). A única atividade que tinha esse convite carecia de um aprimoramento, uma vez que o GeoGebra estava sendo usado apenas como forma de verificação que a propriedade era válida, após o convite de demonstração da mesma, diminuindo a relevância do SGD.

Portanto, voltando à pergunta de pesquisa, por meio das categorias de análise criadas, na busca da caracterização das 36 atividades encontradas, é possível compreender que o papel das TD, com foco no SGD, em atividades nos LD no âmbito da Geometria, em sua maioria, tem sido para corroborar na compreensão de conjecturas (16 de 36). Outras 13 foram com foco na descoberta matemática, cinco tendiam à domesticação da tecnologia e duas apenas a simples constatação. Sabendo da grande influência da coleção Araribá nesses números de descoberta matemática e retirando-as, é possível perceber que apenas uma atividade dentro de 21 tem esse papel.

Ou seja, em três das quatro coleções, o papel das atividades com o SGD é o de corroborar para a compreensão de conjecturas, enquanto em apenas uma o papel é o de potencializar a descoberta matemática. Como a BNCC e, conseqüentemente, o próprio Edital do PNLD, não especificam sobre as atividades com o uso do SGD, é possível perceber quantidades e abordagens bem distintas entre as obras.

Reitera-se a necessidade de os autores das coleções oferecerem propostas de atividades com o uso do SGD que criem um ambiente favorável para a aprendizagem matemática e não os utilize de forma domesticada ou mesmo não potencializada, simplificando o processo apenas como aparente mero caminho para terem suas obras aprovadas pelo PNLD. O próprio Programa está atrelado a isso, uma vez que ele é o responsável por esse tipo de avaliação.

Tal proposta pode, inclusive, oferecer diferentes abordagens como uma atividade com uma construção já feita e o foco ser a exploração dessa por parte dos alunos, ou a utilização de atividades que foram desenvolvidas com o uso do SGD e estão disponíveis na internet, como ocorre no próprio site do GeoGebra. De todo modo, é necessário que os autores dos LD levem em conta as abordagens de experimentação-com-tecnologias e a investigação matemática.

Uma vez que se tem a obra em mãos, então, o professor pode pensar nos papéis citados, buscando uma forma de realizar uma adaptação ou uma (re)estruturação da atividade que é fornecida pelo LD, a depender do nível de caráter experimental que a mesma apresenta, caso haja necessidade. Como apontado anteriormente por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), é essencial na (re)elaboração de atividades com SGD levar em consideração a busca por um cenário didático-pedagógico que envolva a complexidade do pensamento matemático para que a utilização do software seja significativa.

Uma das atividades que foram discutidas na presente pesquisa que tem papel que tende à domesticação da tecnologia foi a AR05 (apresentada na Figura 49). Esse é um exemplo de uma atividade em que o software foi utilizado de forma que mantém intacta práticas que foram feitas anteriormente com lápis e papel, promovendo uma mera visualização. Na busca de realizar uma (re)estruturação da mesma, a atividade poderia ser potencializada caso aparecesse antes de toda a explicação das relações entre os ângulos das retas paralelas cortadas por uma transversal. Os próprios estudantes poderiam fazer tal construção no GeoGebra, medir os oito ângulos formados, e verificar as relações entre eles. Havendo um convite explícito para arrastar pontos da

mesma, poderiam perceber e se convencer das relações de congruência ou de suplementariedade de tais ângulos, conjecturando sobre tal assunto. Dessa forma, a atividade teria um papel diferente, na busca por promover descoberta matemática, pois haveria um convite aos estudantes para que descobrissem resultados matemáticos anteriormente desconhecidos para os mesmos por meio de uma exploração, com uma visualização ativa.

Mesmo aquelas atividades que possuem um papel de corroboração a compreensão de conjecturas podem ser usadas pelo professor como ponto de partida para criar um ambiente favorável à investigação matemática, com o objetivo de que os alunos conjecturem sobre o assunto que será abordado, sem respostas pré-estabelecidas, sem saber antecipadamente onde se quer chegar.

Essas são sugestões de propostas que o LD pode oferecer. Contudo, os papéis levantados nessa pesquisa são papéis que o próprio professor pode refletir e levar em consideração ao elaborar uma atividade com o uso do SGD. Além disso, tais (re)elaborações por parte das editoras não precisam se limitar apenas à Geometria, mas podem, bem como devem, ser pensadas para as outras áreas da Matemática. Isso pode ser evidenciado pelo fato do GeoGebra, por exemplo, principal SGD discutido nessa pesquisa, ter se autodenominado como software de Matemática Dinâmica, não mais apenas de Geometria Dinâmica.

Nessa perspectiva, entende-se que essa pesquisa pode ser aprofundada ao refletir sobre as demais TD, não somente o SGD, e também em outras áreas da Matemática que não somente a Geometria. Além disso, tais reflexões também podem ser expandidas aos demais LD, além dos Anos Finais do Ensino Fundamental, uma vez que o PNLD regulamenta sobre os LD de todos os anos da Educação Básica.

Retomando o primeiro critério de avaliação do Programa, é exposto que esse objetiva garantir que os materiais contribuam para o desenvolvimento das habilidades e competências da BNCC, sendo que essa apresenta propostas pouco flexíveis para o uso do SGD. Em vista disso, quanto ao PNLD, é fácil averiguar a presença ou ausência de algo, mas para a busca de se ter um LD de qualidade em sala de aula, é necessário que seja exigida não somente a presença das TD, mas a qualidade das mesmas. A obrigatoriedade das TD nos LD foi um primeiro passo fundamental dado, porém, estagnar aqui seria como um desperdício, uma vez que as TD, em si, não param de evoluir e apenas a sua presença não garante atividades que criem um ambiente mais favorável para a aprendizagem matemática.

Visto que a BNCC cita como habilidade requerida dos alunos que eles utilizem as TD de forma crítica, significativa e reflexiva, no mínimo, é necessário exigir o mesmo daqueles que devem usar a própria Base como fundamento de suas propostas, como é o caso do PNLD. Apesar disso, tal olhar crítico, significativo e reflexivo deve ser presente, também, ao encarar a própria BNCC, que exige o cumprimento de diversas habilidades para os estudantes, limitando o professor a uma proposta enrijecida, restringindo suas possibilidades e, consequentemente, empobrecendo o ato de ensinar.

Transferir a responsabilidade de desenvolver esse olhar para o professor está longe de ser um caminho, uma vez que desde o Presidente da República, o Ministro da Educação no oferecimento de Políticas Públicas, passando pelos autores de LD e editoras responsáveis pela qualidade dos materiais usados nas escolas, até o professor em sala de aula no exercício do ensinar, têm influência direta na Educação que é oferecida aos estudantes do Brasil. Que todos os envolvidos nesse processo possam trabalhar para que os estudantes aprendam Matemática e compreendam não somente a utilização das TD, mas todas as instâncias da vida, de forma crítica, significativa e reflexiva.

## REFERÊNCIAS

ALBERTI, Luana Angélica. **Tendências no ensino da matemática no Brasil: uma análise a partir de livros didáticos**. 2016. 183 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2016. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/682>. Acesso em: 02 nov. 2021.

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith. O método nas Ciências Sociais. *In: ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Editora Pioneira, 2001. p.107-188.

AMARAL, Rúbia Barcelos; HOLLEBRANDS, Karen. An analysis of context-based similarity tasks in textbooks from Brazil and the United States. **International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology**, [S.l.], v. 48, n. 8, p. 1166-1184, 24 maio 2017. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/0020739x.2017.1315188>. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/169749>. Acesso em: 18 ago. 2020.

AMARAL-SCHIO, Rúbia Barcelos; RIBEIRO, Miguel. Objetos educacionais digitais em uma coleção de livros didáticos de Matemática. *In: SCHEFFER, Nilce Fátima; COMACHIO, Eliziane; CENCI, Danuza. Tecnologias da informação e comunicação na educação matemática: articulações entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações*. Curitiba: Editora CRV, 2018. p. 167-187.

AMARAL-SCHIO, Rúbia Barcelos. Livro Didático de Ensino Médio, Geometria e a Presença das Tecnologias. **Renote**, [S.l.], v. 16, n. 2, p. 127-137, 28 dez. 2018. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/89217>. Acesso em: 18 ago. 2020.

BAIRRAL, Marcelo A.; BARREIRA, João Carlos Fernandes. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. **Revista do Instituto Geogebra de São Paulo**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 46-64, 2017. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6767164.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2022.

BALBINO, Renata Oliveira. **Os objetos de aprendizagem de Matemática do PNLD 2014: uma análise segundo as visões construtivista e ergonômica**. 2016. 139 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: <https://hdl.handle.net/1884/44080>. Acesso em: 01 nov. 2021.

BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade. Função seno - uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 1, n. 1, p. CL - CLXIV, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8292>. Acesso em: 10 out. 2021.

BARRETO, Filipe Sarmiento. **Dinamismo e estaticidade: uma análise das tecnologias presentes em livros didáticos**. 2019. 83 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa

de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019. Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br/handle/1/16760>. Acesso em: 02 nov. 2021.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo Carvalho. A PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. In: **Anais da 27ª reunião anual da Anped**. Caxambu-MG, 2004. p. 1-18. Disponível em: [http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso\\_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf](http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf). Acesso em: 03 nov. 2021.

BORBA, Marcelo Carvalho; SCUCUGLIA, Ricardo R. S.; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

BORBA, Marcelo Carvalho; VILLARREAL, Mónica E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation**. Estados Unidos: Springer Science & Business Media, 2005.

BORBA, Rute; SELVA, Ana. Analysis of the role of the calculator in Brazilian textbooks. **Zdm**, [S.l.], v. 45, n. 5, p. 737-750, 10 jul. 2013. Springer Science and Business Media LLC. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0517-3>. Acesso em: 18 ago. 2020.

BRASIL. Edital de Convocação 06/2011 – CGPLI. **PNLD 2014**, Brasília, 2011. Disponível em: <https://www.fnede.gov.br/index.php/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/165-editais?download=8046:pnld-2014-edital-consolidado-3-alteracao>. Acesso em: 6 out. 2021.

BRASIL. Edital de Convocação 01/2018 – CGPLI. **PNLD 2020**, Brasília, 2020. Disponível em: <https://www.fnede.gov.br/index.php/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/165-editais?download=14307:edital-consolidado-pnld-2020-20-11-2020>. Acesso em: 6 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. PNLD. **Dados Estatísticos**. Disponível em: <https://www.fnede.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Acesso em: 06 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **PNLD 2020: matemática – guia de livros didáticos**. Brasília, DF, 2019. Disponível em: [https://pnld.nees.ufal.br/assets-pnld/guias/Guia\\_pnld\\_2020\\_pnld2020-matematica.pdf](https://pnld.nees.ufal.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2020_pnld2020-matematica.pdf). Acesso em: 6 out. 2021.

BRITO, Acelmo de Jesus *et al.* Tecnologias Digitais no Livro Didático de Matemática do Ensino Médio: uma análise de conteúdo da coleção matemática contexto e

aplicação. **Série Educar - Volume 43 - Matemática**, [S.l.], p. 119-128, 2020. Editora Poisson. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.36229/978-65-86127-63-8.cap.14>. Acesso em: 21 dez. 2020.

CECHINEL, Andre *et al.* ESTUDO/ANÁLISE DOCUMENTAL: uma revisão teórica e metodológica. **Criar Educação**, [S.l.], v. 5, n. 1, p. 1-7, 2 jun. 2016. Fundação Educacional de Criciúma- FUCRI. Disponível em: <http://periodicos.unesc.net/criaredu/article/view/2446>. Acesso em: 21 set. 2020.

CELLARD, André. A análise documental. In: POUPART, Jean; DESLAURIERS, Jean-Pierre; GROULX, Lionel-H.; LAPERRIÈRE, Anne; MAYER, Robert; PIRES, Álvaro. **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos**. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 295-316.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, dez. 2004. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/ep/a/GNrkgPgQnmdcxwKQ4VDTgNQ/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 06 out. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 6º ano: ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018a.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 7º ano: ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018b.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 8º ano: ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018c.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 9º ano: ensino fundamental, anos finais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018d.

FAN, Lianghuo. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. **ZDM Mathematics Education**, [S. l.], v. 45, n. 5, p. 765-777, ago. 2013.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael (ed.). **Araribá Mais Matemática: 6º ano**. São Paulo: Moderna, 2018a.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael (ed.). **Araribá Mais Matemática: 7º ano**. São Paulo: Moderna, 2018b.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael (ed.). **Araribá Mais Matemática: 8º ano**. São Paulo: Moderna, 2018c.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael (ed.). **Araribá Mais Matemática: 9º ano**. São Paulo: Moderna, 2018d.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática: 6º ano: ensino fundamental: anos finais**. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018a. Disponível em: <https://pnld2020.ftd.com.br/colecao/a-conquista-da-matematica/?1=a-conquista-da-matematica>. Acesso em: 12 maio 2020.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018b. Disponível em: <https://pnld2020.ftd.com.br/colecao/a-conquista-da-matematica/?1=a-conquista-da-matematica>. Acesso em: 12 maio 2020.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018c. Disponível em: <https://pnld2020.ftd.com.br/colecao/a-conquista-da-matematica/?1=a-conquista-da-matematica>. Acesso em: 12 maio 2020.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018d. Disponível em: <https://pnld2020.ftd.com.br/colecao/a-conquista-da-matematica/?1=a-conquista-da-matematica>. Acesso em: 12 maio 2020.

GITIRANA, Verônica; BITTAR, Marilena; IGNÁCIO, Rogério. Objetos Educacionais Digitais: Políticas e Perspectivas. *In: Anais do II Fórum GT 6*, Rio de Janeiro, 2014, p. 1-8. Disponível em: <https://www.pucsp.br/IIIpesquisaedmat/download/resumos/GD6-OEDemLD-ForumGT6.pdf>. Acesso em: 03 ago. 2022.

GODOY, Juliana Samora. **A geometria presente em alguns livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2016.

GOLDENBERG, E. Paul; CUOCO, Albert A. What is dynamic geometry? *In: LEHRER, Richard; CHAZAN, Daniel (ed.). Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. New York and London: Routledge, 1998. p. 365-382.

GOULART, Marceli Behm; SILVA, Mariane Isabele Possidônio da; PEREIRA, Ana Lúcia. Presença das TDIC no Livro Didático de Matemática: uma análise do PNLD 2017-2019. **Redin-Revista Educacional Interdisciplinar**, [S. l], v. 8, n. 1, p. 1-12, 2019. Disponível em: <http://seer.faccat.br/index.php/redin/article/view/1494>. Acesso em: 13 out. 2021.

HANNA, Gila. Proof, Explanation and Exploration: An Overview. **Educational Studies In Mathematics**, [S.L.], v. 44, n. 1/2, p. 5-23, 2000. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1023/a:1012737223465>. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/226598348\\_Proof\\_Explanation\\_and\\_Exploration\\_An\\_Overview](https://www.researchgate.net/publication/226598348_Proof_Explanation_and_Exploration_An_Overview). Acesso em: 27 set. 2020.

HOHENWARTER, Markus *et al.* Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. *In: International Congress on Mathematical Education*, 11., 2008. Disponível em: <https://orbu.uni.lu/bitstream/10993/47219/1/ICME11-TSG16.pdf>. Acesso em: 06 out. 2021.

LABORDE, Colette. Relationships between the spatial and theoretical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving. *In: TINSLEY, J.D.;*

JOHNSON, D.C. (Ed). **Information and Communications Technologies in School Mathematics**. Grenoble: Chapman & Hall, 1998. p. 183-194.

LAJOLO, Marisa. Livro didático: um (quase) manual do usuário. **Brasília: Em aberto**. 1996.

LONGEN, Adilson. **Apoema**: matemática 6. São Paulo: Editora do Brasil, 2018a.

LONGEN, Adilson. **Apoema**: matemática 7. São Paulo: Editora do Brasil, 2018b.

LONGEN, Adilson. **Apoema**: matemática 8. São Paulo: Editora do Brasil, 2018c.

LONGEN, Adilson. **Apoema**: matemática 9. São Paulo: Editora do Brasil, 2018d.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli EDA. Pesquisa em educação abordagens qualitativas. **Em Aberto**, v. 5, n. 31, 2011.

MAZZI, Lucas Carato. **Experimentação-com-Geogebra: revisitando alguns conceitos da análise real**. 2014. 135 p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/123706>. Acesso em: 13 out. 2021.

MAZZI, Lucas Carato. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de Geometria**. 2018. 160 p. Tese - (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin, Campinas, SP, 2018. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/333348>. Acesso em: 13 out. 2021.

MORAIS, Leonardo Bernardo; BALTAR BELLEMAIN, Paula Moreira; LIMA, Paulo Figueiredo. Análise de situações de volume em livros didáticos do ensino médio à luz da teoria dos campos conceituais. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 16, n. 1, maio 2014. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/15278>. Acesso em: 18 ago. 2020.

KENSKI, Vani Moreira. Aprendizagem mediada pela tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, [S.l.], v. 4, n. 10, p. 47-56, jul. 2003. ISSN 1981-416X. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/6419/6323>. Acesso em: 18 ago. 2020.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, [S. l.], n. 1, p. 7-17, 1993.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula: Nova Edição**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

PRAMPOLIM, Gabriela; AMARAL-SCHIO, Rúbia Barcelos. Objetos educacionais digitais e sua integração aos livros didáticos de matemática. **Boletim Online de Educação Matemática**, [S.l.], v. 6, n. 11, p. 160-180, 17 out. 2018. Universidade do Estado de Santa Catarina. Disponível em:

<https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/13894/8964>. Acesso em: 13 out. 2021.

REIS, Júlio Paulo Cabral dos *et al.* Análise de Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio: a presença das tecnologias digitais para o conteúdo de funções. **Abakós**, [S.l.], v. 9, n. esp, p. 19-39, 29 mar. 2021. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Disponível em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/23038/17998>. Acesso em: 13 out. 2021.

RIBEIRO, Miguel; AMARAL, Rúbia. Barcelos. Guia e Tecnologia dos/nos Livros Didáticos de Matemática: uma Primeira Discussão. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 1, p. 64–75, jul. 2016. Disponível em: [https://www.ime.usp.br/~dpdias/2019/MAT0412%20emr-ribeiro\\_amaral.pdf](https://www.ime.usp.br/~dpdias/2019/MAT0412%20emr-ribeiro_amaral.pdf). Acesso em: 18 ago. 2020.

ROMANO, Geane de Oliveira; SCHIMIGUEL, Juliano; FERNANDES, Marcelo Eloy. Uma revisão bibliográfica e pesquisa sobre livros didáticos de matemática, tecnologia e ensino de geometria no ensino fundamental e médio. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 10, n. 4, p. 212-226, 2015.

SANTOS, Danilo Messias Nascimento e. **Análise de livros didáticos conforme as considerações do Programa Nacional do Livro Didático: Estatística e Probabilidade**. 2016. 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2016. Disponível em: <https://ri.ufs.br/handle/riufs/5217>. Acesso em 02 nov. 2021.

SANTOS, Helismar Medeiros dos; GUIMARÃES, Marcos Denilson. UMA ABORDAGEM SOBRE AS TECNOLOGIAS PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO 6º. ANO DE ESCOLAS PÚBLICAS DE SÃO LUÍS/MA. **Educação Matemática em Revista - Rs**, [S. l.], v. 1, n. 22, p. 176-187, 1 jun. 2021. Sociedade Brasileira de Educacao Matematica. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.37001/emr-rs.v.1.n.22.2021.p.176-187>. Acesso em: 12 dez. 2021.

SILVA, Tatiane Ferreira da; REIS, Enoque da Silva; RODRIGHERO, Daiane Ferreira da Silva. O uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática: análise de livros didáticos do PNLD/2018 do 1º ano do ensino médio. *In: XIII ENEM-Encontro Nacional De Educação Matemática*, 2019. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-15. Disponível em: <https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/viewPaper/1216>. Acesso em: 02 nov. 2021.

SOUZA, Mateus Coqueiro Daniel de. **Análise das contribuições dos objetos educacionais digitais para a construção do conhecimento em matemática na educação básica**. 2016. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016. doi:10.11606/D.45.2016.tde-27082016-153913. Acesso em: 01 nov. 2021.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 139-162, jul./dez. 2008. Disponível

em:

<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894/13796>.

Acesso em: 07 out. 2021.

VALVERDE, Gilbert A. *et al.* **According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.** Springer Science & Business Media, 2002.

VIEIRA, Andréa Aparecida; ESCHER, Marco Antônio. Construções geométricas utilizando régua e compasso e softwares educacionais. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, [S.l], v. 8, n. 1, p. 195-208, jan/abr, 2018. Disponível em: <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/4889>. Acesso em: 18 ago. 2020.

ZABALA, Antoni. Os materiais curriculares e outros recursos didáticos. *In*: ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar.** São Paulo: Artimed, 1995. p. 167-194

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. Editor's introduction: What is mathematical visualization. **Visualization in teaching and learning mathematics**, p. 1-7, 1991.

ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas.** 2002. vi, 119 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2002. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91012>. Acesso em: 13 out. 2021.