UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JOÃO VICTOR UZITA

Limite Inferior de Cociclos em Variedades Flag

Campinas

2023

João Victor Uzita

Limite Inferior de Cociclos em Variedades Flag

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin

Coorientador: Adriano João da Silva

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno João Victor Uzita e orientada pelo Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Uzita, João Victor, 1999-
Uz5L Limite inferior de cociclos em variedades flag / João Victor Uzita. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.
Coorientador: Adriano João da Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos de Lie. 2. Grupos de Lie semi-simples. 3. Teoria do controle. 4. Variedades bandeira. 5. Expoentes de Lyapunov. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera, 1955-. II. Silva, Adriano João da, 1985-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Lower bounds of cocycles in flag manifolds
Palavras-chave em inglês:
Lie groups
Semisimple Lie groups
Control theory
Flag manifolds
Lyapunov exponents
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]
Paulo Regis Caron Ruffino
Luciana Aparecida Alves
Data de defesa: 28-02-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-3252-5317
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0399554548041090

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof(a). Dr(a). LUCIANA APARECIDA ALVES

Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. San Martin por sempre me fazer ver a beleza nas coisas que não entendo, que as coisas mais bonitas são aquelas que você ainda está para aprender e sempre tem muita coisa para aprender.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Adriano João da Silva por ter me acompanhado desde a graduação, sempre acreditar em mim e me explicar quantas vezes forem necessárias.

A minha companheira Gih, que sempre esteve lá, sempre me ouviu falando de matemática, mesmo não sendo da área e é meu porto seguro quando preciso de apoio. Por sempre me fazer acreditar em mim, mesmo quando eu não consigo, pelas conversas de madrugada e pelo amor imenso.

Ao Prof. Dr. Paulo Ruffino, por me orientar no caminho que estou hoje, por me iniciar na pesquisa e me mostrar que uma boa conversa pode fazer o olho de alguém brilhar para a matemática.

Aos meus amigos que ajudaram a aliviar o estresse, geralmente conversando online ou jogando.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Não escolhemos a força das ondas, o tom da música ou as cartas do jogo. A vida manda, a gente aprende a lidar com ela. Decidimos como vamos navegar, que passos vamos dar, que jogadas vamos fazer. Não é o que fizeram conosco, mas o que fazemos com o que fizeram conosco. Podemos fazer muito. E aprender a lidar com os sentimentos e com quem somos é o melhor caminho possível.

(Por que gritamos)

Resumo

Seja $G = KAN$ uma decomposição de Iwasawa de um grupo de Lie, conexo, semi-simples e com centro finito. Dado $S \subset G$ um subgrupo, estudaremos a ação de S nas variedades flag de G e seus conjuntos de controle. Além disso, analisaremos os cociclos $\rho : G \times K \to A$, onde $gk = u\rho(g,k)n$ e $\rho_\lambda = e^{\lambda \mathbf{a}(g,k)}$, onde $\mathbf{a} = \log\rho$ e suas extensões para as variedades flag. Como ponto central desta pesquisa, vamos compreender as condições para que os limites inferiores de ρ_λ sejam diferentes de zero. Esses resultados têm consequências no cálculo dos momentos de expoentes de Lyapunov de sequências i.i.d, como mostrado no capítulo final.

Palavras-chave: Grupos de Lie. Grupos de Lie semi-simples. Teoria de controle. Variedades bandeira. Expoentes de Lyapunov

Abstract

Let $G = KAN$ be an Iwasawa decomposition of a connected and semisimple Lie group with finite center. Take $S \subset G$ a subgroup, we are going to study the action of S in the flag manifolds of G and their control sets. Moreover, we are going to analyze the cocicles $\rho : G \times K \to A$, where $gk = u\rho(g, k)n$ and $\rho_\lambda = e^{\lambda \mathbf{a}(g,k)}$, where $\mathbf{a} = \log\rho$ and their extensions to flag manifolds. As the central part of this thesis, we are going to comprehend the conditions for the inferior limits of ρ_λ to be different from zero. Those results have consequences in the calculations of the Lyapunov exponents moments of i.i.d. sequences, as shown in the final chapter.

Keywords: Lie groups. Semisimple Lie groups. Control theory. Flag manifolds. Lyapunov exponents.

Sumário

Introdução

Seja G um grupo de Lie semi simples não compacto, com centro finito e $S \subset G$ um subsemigrupo com interior não vazio. No presente trabalho estamos interessados em estudar cotas inferiores de cociclos definidos em variedades flag, com o intuito de encontrar uma forma alternativa de classificar o tipo flag de um semigrupo.

O conceito de tipo flag de um semigrupo é importante no estudo de semigrupos em grupos de Lie semi simples (ver [6], [7], [8] e [9]).

O resultado principal que estudaremos, enunciado a seguir, é essencial para os objetivos ditos anteriormente.

Teorema 0.1. *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \varnothing$ e $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, $\Theta(S) \subset \Sigma$ seu tipo flag, onde Σ é o conjunto das raízes simples de G. Denotamos por C o conjunto de controle invariante de S na variedade flag maximal $\mathbb{F}$, então se $x_0 \in C_0$, temos que*

$$\inf_{g \in S} \rho_\alpha(g, x_0) > 0,$$

se $\alpha \in \Sigma \backslash \Theta(S)$. Além disso, $\inf_{g \in S} \rho_\alpha(g, x_0) = 0$, se $\alpha \in \Theta(S)$.

Além disso, esse resultado auxilia no estudo do comportamento assintótico de produtos aleatórios de sequências i.i.d., por meio da classificação dos limites inferiores dos momentos de Lyapunov.

No primeiro capítulo são introduzidos os grupos de Lie e algumas propriedades de suas estruturas, como a decomposição de Iwasawa e as variedades flag.

No segundo capítulo é estudada a ação de um semigrupo contido no grupo de Lie em suas variedades flag, apresentamos o conceito de conjunto de controle dessas ações e nos aprofundamos no estudo de conjunto de controle nas variedades flag, isso nos leva a estudar tipo flag. Por fim, analisamos cociclos definidos nas variedades flag e esse tema será mais aprofundado nos próximos capítulos.

No terceiro capítulo é apresentado o teorema principal deste trabalho que associa o limite inferior dos cociclos com elementos do tipo flag do semigrupo.

O quarto capítulo mostra uma aplicação do teorema principal no cálculo dos momentos de expoente de Lyapunov, que é importante para o entendimento do comportamento assintótico de produtos independentes e identicamente distribuidos (i.i.d.) em grupos de Lie.

Para facilitar a compreensão também é proposto no final dos capítulos um exemplo em espaços conhecidos.

1 Conceitos básicos

Neste capítulo serão explicados os conceitos básicos de álgebras e grupos de Lie, trazendo também estruturas específicas de grupos e álgebras de Lie semi simples, como as decomposição de Cartan e de Iwasawa e os resultados principais sobre variedades flag que usaremos depois. Por fim, serão apresentadas tais decomposições no grupo $\mathrm{Sl}(n)$.

1.1 Grupos de Lie e suas álgebras de Lie

Definição 1.1. *Seja $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial, dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma* ***álgebra de Lie*** *se está munido de um colchete $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ com as seguintes propriedades:*

1. *Anti-simetria, ou seja,*

$$[X, Y] = -[Y, X], \ \forall X, Y \in \mathfrak{g};$$

2. *Linearidade na primeira entrada, ou seja, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$[\lambda X + Y, Z] = \lambda[X, Z] + [Y, Z],$$

   que em conjunto com o item 1 resulta em bilinearidade.

3. *Satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Além disso, um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dito ***subálgebra de Lie*** *se dados $X, Y \in \mathfrak{h}$, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

A partir de agora $\mathfrak{g}$ sempre será uma álgebra de Lie, e denotaremos por $Gl(\mathfrak{g})$ o grupo das transformações lineares de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ com determinante não nulo.

Definição 1.2. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita* ***abeliana****, se $[X, Y] = 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Definição 1.3. *Sendo $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, definimos sua* ***representação adjunta*** *como a transformação linear $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por*

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Definição 1.4. *A* ***forma de Cartan-Killing*** *de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a função bilinear $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{K}(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)), \ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Definição 1.5. *Dados* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$*, definimos o* ***centralizador*** *de* $\mathfrak{a}$ *em* $\mathfrak{b}$ *como*

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{b} : [X, Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Definição 1.6. *Seja* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *um subespaço vetorial, definimos o* ***normalizador*** *de* $\mathfrak{h}$ *em* $\mathfrak{g}$ *como*

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\}.$$

Além disso, dizemos que $\mathfrak{h}$ *é um* ***ideal*** *de* $\mathfrak{g}$ *se* $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$*.*

Definição 1.7. *Dizemos que uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é* ***simples*** *se* $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ *e se os únicos ideais de* $\mathfrak{g}$ *são* $\{0\}$ *e* $\mathfrak{g}$*.*

Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *é* ***semi simples*** *se existem* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ *álgebras de Lie simples tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n.$$

Definição 1.8. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é dita* ***compacta*** *se existe um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *com*

$$\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z \rangle + \langle Y, \mathrm{ad}(X)Z \rangle = 0,\ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Definição 1.9. *Dado* G *um grupo com produto* $p : G \times G \to G$*, dizemos que* G *é um* ***grupo de Lie****, se* G *é uma variedade diferenciável* $\mathcal{C}^\infty$*, onde* p *é uma função de classe* $\mathcal{C}^\infty$*.*

A partir de agora denotaremos por G um grupo de Lie com elemento neutro 1 e o produto será dado por $p(g, h) = gh$, então para qualquer $g \in G$, definimos a **translação à esquerda** por g

$$\begin{aligned} E_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto gh, \end{aligned}$$

a **translação à direita** por g

$$\begin{aligned} D_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto hg, \end{aligned}$$

e a **conjugação** por g

$$\begin{aligned} C_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Tanto a translação à esquerda quanto a translação à direta são difeomorfismos com inversas $E_{g^{-1}}$ e $D_{g^{-1}}$ e note que a conjugação de g pode ser escrito como $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}}$, logo a conjugação também é um difeomorfismo.

A partir de agora construiremos para cada grupo de Lie G uma álgebra de Lie associada $\mathfrak{g}$, essa álgebra de Lie é isomorfa ao espaço tangente da identidade de G.

Definição 1.10. *Dizemos que um campo de vetores X em G é* ***invariante à esquerda*** *se dados $g, h \in G$, $d(E_g)_h(X(h)) = X(gh)$. Denotamos por* Inv^e *o espaço de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda.*

Note que dado $Y \in T_1G$, temos que $X(g) = d(E_g)_1(Y)$ define um campo de vetores em G invariante à esquerda. De fato, tome $g, h \in G$, então

$$\begin{aligned} d(E_g)_h(X(h)) &= d(E_g)_h \circ d(E_h)_1(Y) \\ &= d(E_g \circ E_h)_1(Y) \\ &= d(E_{gh})_1(Y) = X(gh). \end{aligned}$$

Desta maneira, para cada elemento $Y \in T_1G$ existe um único campo vetorial invariante à esquerda em G, o qual denotaremos por Y^e.

Sendo X um campo vetorial, denotaremos por $X_t(g)$ o fluxo de X partindo do ponto g no tempo t, ou seja, o fluxo onde $X_t'(g) = \dfrac{d}{dt}X_t(g) = X(X_t(g))$.

Dados $g, h \in G$ e $X \in \mathrm{Inv}^e$ defina $\alpha(t) = gX_t(h)$. Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= d(E_g)_{X_t(h)}(X_t'(h)) \\ &= d(E_g)_{X_t(h)}(X(X_t(h))) \\ &= X(gX_t(h)) = X(\alpha(t)), \end{aligned}$$

pois X é invariante à esquerda. Assim α é solução de $\dfrac{dg}{dt} = X(g)$ com $\alpha(0) = gh$, portanto $\alpha(t) = X_t(gh)$ e

$$X_t(gh) = gX_t(h) \implies X_t \circ E_g = E_g \circ X_t. \tag{1.1}$$

Além disso, tomando $h = 1$, temos que

$$X_t(g) = gX_t(1).$$

Definição 1.11. *A* ***álgebra de Lie de um grupo de Lie*** *G é a álgebra dos campos invariantes à esquerda* Inv^e *com o colchete dado por*

$$[X, Y](g) = \frac{d}{dt}\left(d(X_{-t})_{X_t(g)}(Y(X_t(g)))\right)_{|t=0}, \ \forall X, Y \in \mathrm{Inv}^e.$$

Note que dados $X, Y \in \mathrm{Inv}^e$, $[X, Y] \in \mathrm{Inv}^e$. De fato, seja $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned} d(X_{-t})_{X_t(g)}(Y(X_t(g))) &= d(X_{-t})_{X_t(g)}(Y(gX_t(1))) \\ &= d(X_{-t})_{X_t(g)}(d(E_g)_{X_t(1)}Y(X_t(1))) \\ &= d(X_{-t} \circ E_g)_{X_t(1)}(Y(X_t(1))) \\ &\overset{(1.1)}{=} d(E_g \circ X_{-t})_{X_t(1)}(Y(X_t(1))) \\ &= d(E_g)_1 d(X_{-t})_{X_t(1)}(Y(X_t(1))), \end{aligned}$$

assim, pela linearidade de $d(E_g)$:

$$\begin{aligned}
[X,Y](g) &= \frac{d}{dt}\left(d(X_{-t})_{X_t(g)}(Y(X_t(g)))\right)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(d(E_g)_1 d(X_{-t})_{X_t(g)}(Y(X_t(1)))\right)_{|t=0} \\
&= d(E_g)_1 \frac{d}{dt}\left(d(X_{-t})_{X_t(g)}(Y(X_t(1)))\right)_{|t=0} \\
&= d(E_g)_1 [X,Y](1).
\end{aligned}$$

Portanto $[X,Y] \in \mathrm{Inv}^e$, para todo $X, Y \in \mathrm{Inv}^e$.

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G é isomorfa à T_1G com o colchete definido por $[\cdot,\cdot]_e : T_1G \times T_1G \to T_1G$ dado por $[X,Y]_e = [X^e, Y^e](1)$.

Exemplo 1.1. *Seja M_n o conjunto das matrizes $n \times n$, então o subconjunto*

$$\mathrm{Gl}(n) = \{g \in M_n : \det(g) \neq 0\}$$

é um grupo de Lie e sua álgebra de Lie é o conjunto das matrizes $n \times n$ dado por $\mathfrak{gl}(n)$, com o colchete de Lie dado pelo comutador de matrizes.

A álgebra de Lie pode ser construída a partir de campos invariantes à direita. Em [1] são mostradas as principais diferenças, mas a teoria independe dessa escolha, pois essas álgebras são isomorfas.

Definição 1.12. *Definimos a* ***representação adjunta*** *de G, $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ por*

$$\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_1.$$

Definição 1.13. *Definimos a função $\exp : \mathfrak{g} \to G$ como $\exp(X) = X_1(1)$, onde X é visto como um campo invariante à esquerda. Também denotamos $\exp(tX) = \mathrm{e}^{tX}$.*

Proposição 1.1. $d(\exp)_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$.

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{g}$, temos que

$$d(\exp)_0(X) = \frac{d}{dt}\exp(0+tX)_{|t=0},$$

mas note que $\frac{d}{dt}\exp(0+tX)_{|t=0}$ é solução de $\frac{dg}{dt} = X^e(g)$, assim, $d(\exp)_0(X) = X$. □

A proposição anterior nos diz que a exponencial é um difeomorfismo numa vizinhança de 0.

Proposição 1.2. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente. Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo diferenciável e tome $X \in \mathfrak{g}$. Então, para todo $g \in G$, vale*

$$d\phi_g(X^e(g)) = Y^e(\phi(g)),$$

onde $Y = d\phi_1(X)$. Além disso,

$$\phi(\exp(X)) = \exp(d\phi_1(X)).$$

Demonstração. Como X^e é campo invariante à esquerda,

$$d\phi_g(X^e(g)) = d\phi_g \circ d(E_g)_1 X = d(\phi \circ E_g)_1 X,$$

mas como ϕ é um homomorfismo, temos que

$$d(\phi \circ E_g)_1 X = d(E_{\phi(g)} \circ \phi)_1 X = d(E_{\phi(g)})_1 \circ d\phi_1 X = Y^e(\phi(g)),$$

e assim provamos a primeira parte. Para provar a segunda parte basta notar que pela primeira parte, a derivada da trajetória $\alpha(t) = \phi(\exp(tX))$ é

$$\alpha'(t) = d\phi_{\exp(tX)}(X^e(\exp(tX))) = Y^e(\phi(\exp(tX))),$$

onde $Y = d\phi_1(X)$. Logo, como $\alpha(0) = 1$, temos, por unicidade de soluções de EDO, que $\phi(\exp(X)) = \exp(d\phi_1(X))$. □

Corolário 1.1. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dados $X \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$, temos que*

$$C_g(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\mathrm{Ad}(g)X}.$$

Demonstração. Note que $C_g : G \to G$ é um homomorfismo diferenciável, então pela Proposição 1.2, temos que

$$C_g(\exp(X)) = \exp(d(C_g)_1 X) = \exp(\mathrm{Ad}(g)X).$$

□

A proposição a seguir relaciona a adjunta do grupo com a adjunta da álgebra, através das aplicações exponenciais.

Proposição 1.3. *Dado $X \in \mathfrak{g}$, temos que $d(\mathrm{Ad})_1(X) = \mathrm{ad}(X)$ e também*

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}(X)).$$

Demonstração. Seja $X \in \mathrm{Inv}^e$, então $d(\mathrm{Ad})_1(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Dado $Y \in \mathrm{Inv}^e$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})(Y) &= d(C_{\mathrm{e}^{tX}})_1(Y)\\ &= d(D_{\mathrm{e}^{-tX}} \circ E_{\mathrm{e}^{tX}})_1(Y)\\ &= d(D_{\mathrm{e}^{-tX}})_{\mathrm{e}^{tX}}(d(E_{\mathrm{e}^{tX}})_1(Y)),\end{aligned}$$

mas como $Y \in \mathrm{Inv}^e$,

$$d(E_{\mathrm{e}^{tX}})_1(Y) = Y(\mathrm{e}^{tX}).$$

Assim, como $X_t = D_{\mathrm{e}^{tX}}$, temos que

$$d(D_{\mathrm{e}^{-tX}})_{\mathrm{e}^{tX}}(d(E_{\mathrm{e}^{tX}})_1(Y)) = d(X_{-t})_{\mathrm{e}^{tX}}(Y(\mathrm{e}^{tX})),$$

donde,

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})(Y) = d(X_{-t})_{X_t(1)}(Y(X_t(1))).$$

Logo, se derivarmos ambos os lados em relação à t em $t = 0$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})(Y)\right)_{|t=0} = [X, Y](1).$$

Portanto, como X, Y são campos invariantes à esquerda temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX})\right)_{|t=0} &= \mathrm{ad}(X)\\ d(\mathrm{Ad})_1(X) &= \mathrm{ad}(X),\end{aligned}$$

e assim, pela Proposição 1.2, temos $\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad}(X))$. □

Definição 1.14. *Dado $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço vetorial da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos o* ***normalizador*** *de $\mathfrak{h}$ em G como o subgrupo $N(\mathfrak{h})$ de G*

$$N(\mathfrak{h}) = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}.$$

Definição 1.15. *Sendo G um grupo de Lie, definimos seu* ***centro*** *$Z(G)$ como*

$$Z(G) = \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\}.$$

Definição 1.16. *Dados $A, B \subset G$ subgrupos, definimos o* ***centralizador*** *de A em B por*

$$Z_B(A) = \{g \in B : ga = ag,\ \forall a \in A\}.$$

Definição 1.17. *Dados $A, B \subset G$ subgrupos, dizemos que A* ***normaliza*** *B se dados $a \in A$ e $b \in B$, $a^{-1}ba \in A$.*

1.2 Decomposição de Iwasawa

A partir de agora vamos considerar $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi simples não compacta. Dado $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ um automorfismo, dizemos que θ é uma **involução de Cartan** ou **involução principal** se $\theta^2 = 1$ e se a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle X, Y \rangle = -\mathcal{K}(X, \theta(Y))$$

é um produto interno em $\mathfrak{g}$. Em [4] é provado que toda álgebra de Lie semi simples admite uma involução de Cartan e que toda involução de Cartan é única a menos de automorfismo interno.

Fixemos θ uma involução principal e considere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $\mathfrak{g}$ relacionado a θ.

Definição 1.18. *Sejam*

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\} \text{ e } \mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = -X\}.$$

*Definimos a **decomposição de Cartan** de $\mathfrak{g}$ associada à θ por $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$.*

A partir de uma decomposição de Cartan será construída uma decomposição de Iwasawa . Para isso fixamos uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, ou seja, $\mathfrak{a}$ é abeliana e dado $X \in \mathfrak{s}$ tal que $[X, Y] = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{a}$, então $X \in \mathfrak{a}$. Denotaremos por **posto real** a dimensão de $\mathfrak{a}$.

Como $\mathfrak{a}$ é abeliana, pela fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (Capítulo 8.2 de [1]), dados $X, Y \in \mathfrak{a}$, temos que

$$e^X e^Y = e^{X+Y}. \tag{1.2}$$

Definição 1.19. *Dado $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, dizemos que α é uma **raiz** de $\mathfrak{a}$ quando o conjunto*

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a},\ \operatorname{ad}(H)X = \alpha(H)X\}$$

é diferente de vazio. Denotaremos o conjunto das raízes de $\mathfrak{a}$ por Π.

Note que, dados $\alpha, \beta \in \Pi$,

$$\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta \neq \{0\} \iff \alpha = \beta.$$

De fato, se existe $X \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta \backslash \{0\}$, então

$$\alpha(H)X = \operatorname{ad}(H)X = \beta(H)X,\ \forall H \in \mathfrak{a},$$

logo, $\alpha(H) = \beta(H)$, $\forall H \in \mathfrak{a}$. E $g_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, se $\alpha = \beta$. Como a dimensão de $\mathfrak{g}$ é finita, existem finitos elementos em Π.

Definição 1.20. *Um elemento $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\alpha(H) \neq 0$, para todo $\alpha \in \Pi$, é chamado de* ***regular real****. De forma mais geral, um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é chamado de regular real se existe $g \in G$ tal que*

$$\mathrm{Ad}(g)H = X, \text{ com } H \in \mathfrak{a};\ \alpha(H) \neq 0,\ \forall \alpha \in \Pi.$$

Note que o conjunto dos elementos regulares reais em $\mathfrak{a}$ pode ser escrito como

$$\mathrm{reg}(\mathfrak{a}) = \left(\bigcup_{\alpha \in \Pi} \ker(\alpha) \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Pi} (\ker(\alpha))^c,$$

assim o conjunto $\mathrm{reg}(\mathfrak{a})$ é denso em $\mathfrak{a}$, pois existem finitas raízes e o núcleo de cada raiz é um subespaço vetorial de codimensão 1. Chamamos de **câmara de Weyl** cada componente conexa de $\mathrm{reg}(\mathfrak{a})$.

Para continuar a construção da decomposição de Iwasawa fixamos de agora em diante um elemento regular real $H \in \mathfrak{a}$.

Definição 1.21. *Dado $\alpha \in \Pi$, dizemos que α é uma* ***raiz positiva*** *se $\alpha(H) > 0$. Denotamos o conjunto de raízes positivas por Π^+. Além disso, $\alpha \in \Pi^+$ é dito ser uma* ***raiz simples*** *se $\alpha \neq \alpha_1 + \alpha_2$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Pi^+$. Representamos o conjunto das raízes simples por Σ.*

Temos que Σ é uma base de $\mathfrak{a}^*$ (a demonstração pode ser encontrada no Capítulo 6.4 de [2]).

Seja

$$\mathfrak{a}^+ = \{X \in \mathfrak{a} : \alpha(X) > 0, \forall \alpha \in \Pi^+\},$$

a **câmara positiva de Weyl**, ou seja, a câmara de Weyl em que $H \in \mathfrak{a}^+$.

Definimos então

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Note que $\mathfrak{n}$ é a soma dos auto-espaços de $\mathrm{ad}(H)$ associados aos autovalores positivos. Em [1], Seção 12.2 é provado que $\mathfrak{s}$ é isomorfo, como espaço vetorial, à subálgebra $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

Definição 1.22. *Com a construção acima, definimos uma* ***decomposição de Iwasawa*** *de $\mathfrak{g}$ por*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Definição 1.23. *Sendo $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, definimos a* ***subálgebra parabólica minimal*** *de $\mathfrak{g}$ como*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

De maneira mais geral, dado $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto das raízes simples, definimos a subálgebra parabólica do tipo Θ como

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

onde $\langle\Theta\rangle^+$ são os elementos de Π^+ que são combinações lineares de elementos de Θ.

Dado $\alpha \in \Pi$, a partir de agora denotaremos por $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ o elemento satisfazendo

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, H\rangle, \ \forall H \in \mathfrak{a}.$$

Temos que H_α existe e é único pelo Teorema de Representação de Riesz. Assim definimos o produto interno em $\mathfrak{a}^*$ como

$$\langle \alpha, \beta\rangle = \langle H_\alpha, H_\beta\rangle, \ \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*.$$

Definição 1.24. *Dado $\Theta \subset \Sigma$, denotamos*

$$\mathfrak{a}(\Theta) = \operatorname{span}\{H_\alpha \in \mathfrak{a} : \alpha \in \Theta\}.$$

Além disso, definimos

$$\mathfrak{a}_\Theta = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) = 0, \alpha \in \Theta\},$$

o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$.

Dado $\Theta \subset \Sigma$ definimos $\mathfrak{g}(\Theta)$ como a subálgebra gerada por $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, onde $\alpha \in \Theta$. Temos que $\mathfrak{g}(\Theta)$ também é uma álgebra de Lie semi simples e

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta),$$

onde $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$ e $\mathfrak{n}(\Theta) = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$, é uma decomposição de Iwasawa. Denotaremos por

$$\mathfrak{n}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Definição 1.25. *Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ as raízes simples. Definimos os **pesos fundamentais** como $\Phi = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\} \subset \mathfrak{a}^*$ onde*

$$\frac{2\langle \alpha_i, \omega_j\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle} = \delta_{ij}.$$

Da mesma forma, dado $\Theta \subset \Sigma$, com $\Theta = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_j}\}$, definimos $\Phi_\Theta = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_j}\}$ o conjunto de pesos fundamentais com os mesmo índices de Θ.

Temos que o conjunto dos pesos fundamentais é a base dual das raízes simples e portanto também é base de $\mathfrak{a}^*$.

Note que

$$\Phi\backslash\Phi_\Theta = \{\omega \in \Phi : \forall\alpha \in \Theta, \langle\alpha, \omega\rangle = 0\},$$

e assim, o conjunto

$$(\mathfrak{a}_\Theta^*)^+ = \{\beta \in \mathfrak{a}_\Theta^* : \forall\alpha \in \Sigma\backslash\Theta,\ \langle\alpha, \beta\rangle > 0\},$$

é o interior (em $\mathfrak{a}_\Theta^*$) do cone gerado por $\Phi\backslash\Phi_\Theta$. De fato, dado $\beta \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$, temos que

$$\beta = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_l\omega_l,$$

com $\omega_i \in \Phi$. Então, para cada $\alpha_i \in \Sigma$, temos que

$$\langle\alpha_i, \beta\rangle = a_i\langle\alpha_i, \omega_i\rangle = a_i\frac{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle}{2} \implies a_i = 2\frac{\langle\alpha_i, \beta\rangle}{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle},$$

donde,

1. $a_i = 0$, se $\alpha_i \in \Theta$, pois $\beta \in \mathfrak{a}_\Theta^*$;

2. $a_i > 0$, se $\alpha_i \in \Sigma\backslash\Theta$, pois $\beta \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$.

Portanto, $(\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$ está contido no interior do cone gerado por $\Phi\backslash\Phi_\Theta$. Agora, dado β pertencente ao interior do cone gerado por $\Phi\backslash\Phi_\Theta$, temos que

$$\beta = b_{i_1}\omega_{i_1} + \dots b_{i_p}\omega_{i_p},$$

com $b_i > 0$ e $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_p} \in \Phi\backslash\Phi_\Theta$. Assim, dado $\alpha_i \in \Sigma$

1. $\langle\alpha_i, \beta\rangle = a_{i_j}\dfrac{\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle}{2} > 0$, se $\alpha_i \in \Sigma\backslash\Theta$;

2. $\langle\alpha_i, \beta\rangle = 0$, se $\alpha_i \in \Theta$;

logo, $\beta \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$.

Proposição 1.4. *Seja $\Phi = \{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ o conjunto dos pesos fundamentais, então*

$$\mathfrak{a}^+ = \{a_1H_{\omega_1} + \cdots + a_lH_{\omega_l} : a_i > 0\}.$$

Demonstração. Como Φ é base de $\mathfrak{a}^*$, então dado $H \in \mathfrak{a}^+$,

$$H = a_1H_{\omega_1} + \cdots + a_lH_{\omega_l},$$

para $a_i \in \mathbb{R}$. Como para todo $\alpha_i \in \Sigma$, vale que

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_i(H) &= \alpha_i(a_1 H_{\omega_1} + \cdots + a_l H_{\omega_l}) \\ &= a_1\alpha_i(H_{\omega_1}) + \cdots + a_l\alpha_i(H_{\omega_l}) = a_i\frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2}, \end{aligned}$$

obtemos $a_i > 0$ e portanto $\mathfrak{a}^+ \subset \{a_1 H_{\omega_1} + \cdots + a_l H_{\omega_l} : a_i > 0\}$. Reciprocamente, dado $H = a_1 H_{\omega_1} + \cdots + a_l H_{\omega_l}$ com $a_i > 0$, temos que $\alpha_i(H) = a_i\dfrac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2} > 0$, $i \in \{1, \ldots, l\}$. Portanto, $\alpha(H) \in \Pi^+$ e assim $H \in \mathfrak{a}^+$, o que nos dá a igualdade. □

Seja G um grupo de Lie semisimples com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ uma decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$. Definimos uma decomposição de Iwasawa de G por

$$G = KAN,$$

onde $K = \exp(\mathfrak{k})$, $A = \exp(\mathfrak{a})$ e $N = \exp(\mathfrak{n})$.

Proposição 1.2.1. *Sejam $G = KAN$ uma decomposição de Iwasawa. Temos que*

1. *K é compacto se, e somente se, o centro de G é finito;*
2. *A é abeliano;*
3. *A normaliza N;*
4. *N é normal em AN;*

Demonstração. 1. A prova se encontra no capítulo VI de [4].

2. Dados $x, y \in A$, temos que $x = e^X$ e $y = e^Y$, onde $X, Y \in \mathfrak{a}$, então

$$xy = e^X e^Y \overset{1.2}{=} e^{X+Y} = e^Y e^X = yx.$$

3. Dados $h = e^H \in A$ e $x = e^X \in N$, onde $H \in \mathfrak{a}$ e $X \in \mathfrak{n}$, temos que

$$hxh^{-1} = he^X h^{-1} = e^{\mathrm{Ad}(h)X},$$

e portanto $hxh^{-1} \in N$ se $\mathrm{Ad}(h)X \in \mathfrak{n}$.

Por outro lado,

$$\mathrm{Ad}(h)X = \mathrm{Ad}(e^H)X = e^{\mathrm{ad}(H)}X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}(H)^n}{n!} X.$$

Assim, $\mathrm{Ad}(h)X \in \mathfrak{n}$ se $\mathrm{ad}(H)X \in \mathfrak{n}$.

Mas,

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathrm{ad}(H)Y = \alpha(H)Y, \text{ se } Y \in \mathfrak{g}_\alpha,$$

portanto,

$$X = \sum_{\alpha \in \Pi^+} X_\alpha \implies \mathrm{ad}(H)X = \sum_{\alpha \in \Pi^+} X_\alpha \in \mathfrak{n},$$

concluindo a demonstração.

4. Pelo item 3, temos que A normaliza N, mas note que dado $an \in AN$ e $g \in N$, temos

$$(an)g(an)^{-1} = a(ngn^{-1})a^{-1} = an_1a^{-1} \in N,$$

onde $n_1 = ngn^{-1} \in N$, logo N é normal em AN.

□

Note que na construção da decomposição de Iwasawa foi fixado tanto uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$, quanto um elemento regular real $H \in \mathfrak{a}$ e isso faz com que ela não seja única. De fato, qualquer conjugação destas por um automorfismo interno fornece uma nova decomposição. Mais ainda, em [4] o autor prova que todas as decomposições de Iwasawa são conjugadas entre si por automorfismos internos. Como exemplo, o próximo resultado nos mostra que a conjugação de uma álgebra abeliana maximal ainda é uma álgebra abeliana maximal.

Proposição 1.5. *Sendo A abeliano maximal, dado $g \in G$, temos que gAg^{-1} também é abeliano maximal.*

Demonstração. Dado $x, y \in A$ temos que

$$(gxg^{-1})(gyg^{-1}) = gxyg^{-1} = gyxg^{-1} = (gyg^{-1})(gxg^{-1}),$$

assim gAg^{-1} também é abeliano. Agora seja $z \in G$ tal que $(gxg^{-1})z = z(gxg^{-1})$, para todo $x \in A$. Defina $z_1 = g^{-1}zg$, então $z = gz_1g^{-1}$, logo

$$(gxg^{-1})z = z(gxg^{-1}) \implies gxz_1g^{-1} = gz_1xg^{-1} \implies xz_1 = z_1x,$$

e como $x \in A$ e A é abeliano maximal, temos que $z_1 \in A$, assim $z \in gAg^{-1}$, portanto gAg^{-1} é abeliano maximal. □

Definição 1.26. *Definimos o **subgrupo parabólico minimal** como $P = N(\mathfrak{p})$. O subgrupo P pode ser escrito, segundo Langlands, como*

$$P = MAN,$$

onde,

$$\begin{aligned} M = Z_K(A) &= \{g \in K : ga = ag,\ \forall a \in A\} \\ &= \{g \in K : \mathrm{Ad}(g)H = H,\ \forall H \in \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

Dado $\Theta \subset \Sigma$ considere $\mathfrak{p}_\Theta$ a subálgebra parabólica associada. Definimos o **subgrupo parabólico** do tipo Θ como $P_\Theta = N(\mathfrak{p}_\Theta)$.

Consideramos $G(\Theta) = \langle \exp \mathfrak{g}(\Theta) \rangle$ o grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\Theta)$. Uma decomposição de Iwasawa de $G(\Theta)$ é

$$G(\Theta) = K(\Theta)A(\Theta)N(\Theta),$$

onde $K(\Theta) = \exp(\mathfrak{k}(\Theta))$, $A(\Theta) = \exp(\mathfrak{a}(\Theta))$ e $N(\Theta) = \exp(\mathfrak{n}(\Theta))$. Em particular, denotamos $P_{\{\alpha\}} = P_\alpha$, $G(\{\alpha\}) = G(\alpha)$, $K(\{\alpha\}) = K(\alpha)$, $A(\{\alpha\}) = A(\alpha)$ e $N(\{\alpha\}) = N(\alpha)$.

Assim como P, os subgrupos parabólicos P_Θ se decompõem como

$$P_\Theta = K_\Theta AN,$$

onde

$$K_\Theta = \{u \in K : \mathrm{Ad}(u)H = H, \forall H \in \mathfrak{a}_\Theta\}.$$

Em particular, temos a decomposição

$$P_\Theta = MG(\Theta)A_\Theta N_\Theta, \tag{1.3}$$

onde $A_\Theta = \exp(\mathfrak{a}_\Theta)$ e $N_\Theta = \exp(\mathfrak{n}_\Theta)$. De fato, como $K_\Theta = MK(\Theta)$, $A = A(\Theta)A_\Theta$ e $N = N(\Theta)N_\Theta$, temos que

$$\begin{aligned} P_\Theta = K_\Theta AN &= (MK(\Theta))(A(\Theta)A_\Theta)(N(\Theta)N_\Theta) \\ &= MK(\Theta)A(\Theta)N(\Theta)A_\Theta N_\Theta \\ &= MG(\Theta)A_\Theta N_\Theta. \end{aligned}$$

Em [4], Capítulo 7, é mostrado que MA normaliza N. Em particular, temos que M normaliza N.

Proposição 1.6. *Dado $mhn \in P = MAN$ no subgrupo parabólico minimal, temos que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\bar{n} \in N$ tal que*

$$(mhn)^k = m^k h^k \bar{n}.$$

Demonstração. Note que

$$(mhn)^2 = mh(nmh)n = mh(mhn_1)n,$$

onde $n_1 = (mh)^{-1}n(mh) \in N$, pois N é normalizado por MA então como M é o centralizador de A em K, temos que $(mh)(mh) = m^2h^2$ e sendo $n_2 = n_1 n$, temos que $(mhn)^2 = m^2h^2n_2$. Indutivamente, obtemos que existe $\bar{n}$ tal que $(mhn)^k = m^k h^k \bar{n}$. □

Dizemos que um elemento $h \in G$ é **regular real** se $h = \exp H$, com $H \in \mathfrak{g}$ elemento regular real.

Proposição 1.7. *Dados $g \in G$ e x elemento regular real, temos que $h = gxg^{-1}$ também é elemento regular real.*

Demonstração. Como x é elemento regular real, $x \in A$ para algum A abeliano maximal. Como conjugação de abeliano maximal também é abeliano maximal, temos que $h \in A_1$ com A_1 abeliano maximal, então existem $X, H \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp X = x$ e $\exp H = h$, logo derivando a equação $\exp H = C_g(\exp A)$ obtemos

$$d(\exp)_1 H = d(C_g)_1 d(\exp)_1(A) \implies H = Ad(g)(A),$$

portanto, H é elemento regular real. Assim, h é elemento regular real. □

Seja $\Lambda \subset \mathfrak{a}$ uma câmara de Weyl, chamaremos $\Gamma = \exp(\Lambda)$ também de **câmara de Weyl**. Note que é possível diferenciá-las, pois uma está na álgebra e outra está no grupo. Da mesma forma que na álgebra, consideraremos $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ a câmara positiva de Weyl.

Seja $M^* = \{u \in K : \mathrm{Ad}(u)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} = \{u \in K : uAu^{-1} = A\}$. Note que $M \subset M^*$, além disso M é subgrupo normal de M^*, pois dado $g \in M$, $u \in M^*$ e $h \in A$, temos que $u^{-1}hu \in A$, assim $g(u^{-1}hu)g^{-1} = u^{-1}hu$, logo

$$(ugu^{-1})h(ugu^{-1})^{-1} = u(g(u^{-1}hu)g^{-1})u^{-1} = u(u^{-1}hu)u^{-1} = h,$$

portanto $gug^{-1} \in M$. Assim, definimos o **grupo de Weyl** como $\mathcal{W} = M^*/M$.

Note que como as câmaras de Weyl são as componentes conexas de $\mathrm{reg}(\mathfrak{a})$, dados $\Lambda \subset \mathfrak{a}$, $\Gamma \subset A$ câmaras de Weyl e $u \in M^*$, então $\mathrm{Ad}(u)\Lambda$ e $C_u(\Gamma)$ também são câmaras de Weyl pela continuidade de $\mathrm{Ad}(u)$ e C_u. Assim a ação de $w = uM$, $u \in M^*$, nas câmaras de Weyl é dada por $\mathrm{Ad}(u)\Gamma$ e $C_u(\Lambda)$. Essas ações estão bem definidas, pois dado $g \in M$, temos que

$$C_{ug}(\Gamma) = ug\Gamma g^{-1}u^{-1} = u\Gamma u^{-1} = C_u(\Gamma),$$

pois $ghg^{-1} = h$, para todo $h \in A$. Agora, derivando, obtemos que $\mathrm{Ad}(ug)\Lambda = \mathrm{Ad}(g)\Lambda$. Em [2], Capítulo 9, é provado que o grupo de Weyl age transitivamente nas câmaras de Weyl.

A seguir daremos uma interpretação mais geométrica para o grupo de Weyl. A equivalência entre as duas definições é provado em [4], Capítulo VI.5.

Dado $\alpha \in \Pi$, defina a **reflexão** $r_\alpha : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ por

$$r_\alpha(H) = H - 2\frac{\alpha(H)}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} H_\alpha,$$

ou seja, a reflexão em $\mathfrak{a}$ por $\ker(\alpha)$. Define-se então o grupo de Weyl, como

$$\mathcal{W} = \{r_{\alpha_1} \circ r_{\alpha_2} \circ \cdots \circ r_{\alpha_n} : \alpha_i \in \Sigma\}.$$

Analogamente, dado $\Theta \subset \Sigma$, definimos $\mathcal{W}_\Theta$ o subgrupo do grupo de Weyl gerado por $\{r_\alpha : \alpha \in \Theta\}$.

1.3 Variedades flag

Definição 1.27. *Dado $\Theta \subset \Sigma$, definimos a **variedade flag** associada a Θ como*

$$\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta.$$

*Denotaremos por x_Θ a origem de $\mathbb{F}_\Theta$, ou seja, $x_\Theta = 1P_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$ e quando $\Theta = \varnothing$, ou seja, quando $P_\Theta = P$, chamamos essa variedade de **flag maximal** e denotamos por $\mathbb{F}$.*

Dado $x \in \mathbb{F}_\Theta$ definimos o **subgrupo de isotropia** de x por $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. Note que, sendo x_Θ a origem de $\mathbb{F}_\Theta$, temos que

$$g \in x_\Theta \iff gx_\Theta = x_\Theta,$$

logo $P_\Theta = G_{x_\Theta}$.

Sendo $x = gx_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$ e $h \in G_x$ temos que

$$hx = x \Rightarrow hgx_\Theta = gx_\Theta \Rightarrow g^{-1}hgx_\Theta = x_\Theta \Rightarrow g^{-1}hg \in P_\Theta \Rightarrow h \in gP_\Theta g^{-1},$$

mas note que, dado $p \in P_\Theta$,

$$gpg^{-1}x = gpg^{-1}(gx_\Theta) = gpx_\Theta = gx_\Theta = x,$$

assim $G_x = gP_\Theta g^{-1}$, que na verdade também é um subgrupo parabólico. Então os subgrupos parabólicos são únicos a menos de automorfismo interno. Assim, se $hx = x$ às vezes supomos que x é a origem e $h \in P_\Theta$.

Proposição 1.8. *O flag maximal pode ser escrito como K/M.*

O resultado anterior vem do fato de que como $\mathbb{F} = G/MAN$, temos que dado $x \in \mathbb{F}$, $x = gMAN$. Por Iwasawa, $g = kan \in KAN$, e como $an \in MAN$, então obtemos

$$x = kanMAN = kMAN,$$

logo $\mathbb{F} = K/(MAN \cap K) = K/M$.

Definição 1.28. *Dado $\Theta \subset \Sigma$ definimos a **projeção** $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ como*

$$\pi_\Theta(gx_0) = gx_\Theta,$$

onde $x_0 \in \mathbb{F}$ e $x_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$ são as origens de suas respectivas variedades flag.

Note que π_Θ está bem definida, pois $P \subset P_\Theta$.

Teorema 1.1 (Bruhat)**.** *Se $G = KAN$ é uma decomposição de Iwasawa, então o número de órbitas de N^- em $\mathbb{F}$ é finito e são as que passam pelos pontos $\tilde{\omega}x_0$, com $\tilde{\omega} \in M^*$ um representante de $\omega \in \mathcal{W}$. Isto é*

$$\mathbb{F} = \bigcup_{\omega \in \mathcal{W}} N^- \tilde{\omega} x_0,$$

onde $N^- = \exp \mathfrak{n}^-$ com $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ e a união é uma união disjunta. As variedades $N^-\tilde{\omega}P$ são denominadas ***células de Bruhat****, e somente a célula $N^- x_0$ é aberta e densa em $\mathbb{F}$.*

Demonstração. Em [4] é mostrado que G se decompõe como classes bilaterais da forma

$$G = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} P\tilde{w}P,$$

onde $\tilde{w}$ é representante de w em M^*.

Em particular,

$$G = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} \tilde{w}_0 P \tilde{w}_0 \tilde{w} P,$$

é também um decomposição de G. No entanto, escrevendo $P = NAM$, temos que

$$\tilde{w}_0 P \tilde{w}_0 = N^- AM,$$

assim,

$$G = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} N^- AM \tilde{w} P.$$

Como $w \in M^*$, temos que $AM\tilde{w} = \tilde{w}AM$ e

$$G = N^- \tilde{w} P,$$

pois $AM \subset P$.

Disso, projetando a $\mathbb{F} = G/P$, temos que

$$\mathbb{F} = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} N^- w b_0.$$

Considere agora $H \in \mathfrak{a}^+$. Temos que se $n \in N^-$, $e^{tH} n e^{-tH} \to 1$. Assim, se $x \in N^- \tilde{w}_1 b_0 \cap N^- \tilde{w}_2 b_0$, existem $n_i \in N^-$ tal que $x = n_i \tilde{w}_i b_0$. Então

$$e^{tH} x = e^{tH} n_i w b_0 = e^{tH} n_i e^{-tH} \tilde{w}_i b_0 \to \tilde{w}_i b_0,$$

e portanto $\tilde{w}_i b_0 = \tilde{w}_i b_0$, isto é,

$$\tilde{w}_2^{-1} \tilde{w}_1 \in M^* \subset K$$

e

$$\tilde{w}_2^{-1} \tilde{w}_1 \in P = MAN,$$

logo,

$$\tilde{w}_2^{-1}\tilde{w}_1 \in M \implies w_1 = w_2.$$

Agora, dado $w \in W$, temos que

$$N^- w b_0 = w(w^{-1}N^- w)b_0.$$

Além disso, $w^{-1}N^-w = N_w^- Q_w$, onde N_w^- e Q_w são subgrupos de Lie de $w^{-1}N^-w$ com álgebras $\mathfrak{n}_w^- = w\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{n}^-$ e $\mathfrak{q} = w\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}$.

Portanto,

$$N^- w b_0 = w N_w^- b,$$

onde $N_w^- = \exp \mathfrak{n}_w^-$.

Como

$$X \in \mathfrak{n}_w^- \mapsto we^X b_0 \in wN_w^- b_0 = N^- w b_0$$

é um difeomorfismo, temos que $N^- w b_0$ é uma variedade de dimensão $\dim \mathfrak{n}_w^-$ e $\dim \mathfrak{n}_w^- = \dim \mathfrak{n}^- = \dim \mathbb{F}$ se, e só se, $w = 1$. □

Terminamos a seção com alguns resultados sobre elementos regulares reais que serão utilizados posteriormente

Proposição 1.9. *Dados $H \in \mathfrak{a}$ com $h = \mathrm{e}^H \in A$, um elemento regular real e $n \in N$, existe $n_1 \in N$ tal que $nhn^{-1} = hn_1$ e o mapa $\phi_h(n) = n_1$ é um difeomorfismo.*

A prova da proposição anterior se encontra em [3] no Capítulo 17.4.

Proposição 1.10. *O conjunto dos elementos regulares reais é denso em AN.*

A prova da proposição anterior segue do fato que a função ϕ_h da proposição 1.9 é um difeomorfismo, pois como $A \times N$ é difeomorfo à AN e os elementos regulares reais são densos em A, então os elementos regulares reais são densos em AN.

Proposição 1.11. *Dados $n \in N^-$ e $h \in A^+$, temos que $h^k n h^{-k} \to 1$, quando $k \to \infty$.*

Demonstração. Sejam $n = \exp(X)$ e $h = \exp(H)$, onde $X \in \mathfrak{n}^-$ e $H \in \mathfrak{a}^+$, assim

$$\begin{aligned} h^k n h^{-k} = C_{h^k}(n) = C_{h^k}(\exp(X)) &= \exp(\mathrm{Ad}(h^k)X) \\ &= \exp(\mathrm{e}^{k\mathrm{ad}(H)}X). \end{aligned}$$

Agora note que como $X \in \mathfrak{n}^-$ e $\mathfrak{n}^- = \sum\limits_{\alpha \in \Pi^+} g_{-\alpha}$, temos que $X = X_{\alpha_1} + \cdots + X_{\alpha_m}$, onde $X_{\alpha_i} \in g_{-\alpha_i}$. Assim, analisemos o que acontece com $\mathrm{e}^{k\mathrm{ad}(H)X_\alpha}$ para algum $\alpha \in \Pi^+$. Como $X_\alpha \in \mathfrak{n}^-$ e $H \in A^+$, temos que

$$k\mathrm{ad}(H)X_\alpha = -k\alpha(H)X_\alpha,$$

então

$$\left\|e^{k\,\mathrm{ad}(H)}X_\alpha\right\| = \left\|e^{-k\alpha(H)}X_\alpha\right\| = e^{-k\alpha(H)}\left\|X_\alpha\right\|,$$

mas como $H \in \mathfrak{a}^+$, temos que $\alpha(H) > 0$, assim $e^{-k\alpha(H)} \to 0$ e portanto

$$h^k n h^{-k} = \exp(e^{k\,\mathrm{ad}(H)}X) \longrightarrow e^0 = 1.$$

□

1.4 Exemplo em $\mathrm{Sl}(n)$

Um exemplo muito conhecido e que será usado no decorrer do texto para melhor entendimento e intuição é o grupo

$$\mathrm{Sl}(n) = \{g \in \mathrm{Gl}(n) : \det(g) = 1\},$$

que é um grupo de Lie com o produto usual de matrizes e sua álgebra de Lie é

$$\mathfrak{sl}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) : \mathrm{tr}(X) = 0\},$$

onde o colchete é dado pelo comutador.

Uma decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, é tal que $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ é a álgebra das matrizes antissimétricas, $\mathfrak{a}$ é a álgebra das matrizes diagonais com traço nulo e $\mathfrak{n}$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal principal.

Dado $1 \leqslant i \leqslant n-1$, defina a função $\lambda_i : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ que devolve a i-ésima entrada da matriz diagonal. As funções $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, com $i \neq j$ são as raízes. Usaremos como raízes positivas α_{ij}, com $j > i$ e as raízes simples $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Sendo então $\alpha = \alpha_{ij}$ uma raiz, temos que g_α é o conjunto das matrizes com zero em todas as entradas, menos na entrada ij.

Vamos calcular o conjunto

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{k} : [X, Y] = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Dado $X \in \mathfrak{m}$, temos que X é antissimétrico, então escrevemos

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

agora, para todo $Y = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{a}$.

$$0 = [X, Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & (b_2 - b_1)a_{12} & (b_3 - b_1)a_{13} & \cdots & (b_n - b_1)a_{1n} \\ (b_2 - b_1)a_{12} & 0 & (b_3 - b_2)a_{23} & \cdots & (b_n - b_2)a_{2n} \\ (b_3 - b_1)a_{13} & (b_3 - b_2)a_{23} & 0 & \cdots & (b_n - b_3)a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_n - b_1)a_{1n} & (b_n - b_2)a_{2n} & (b_n - b_3)a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

Pela arbitrariedade de Y, concluímos que $X = 0$, e portanto, $\mathfrak{m} = 0$. Logo, a subálgebra parabólica minimal

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

é o conjunto das matrizes triangulares superiores com traço nulo.

Assim, dado um subconjunto das raízes simples $\Theta = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}\} \subset \Sigma$, temos que $\mathfrak{p}_\Theta$ é o conjunto das matrizes triangulares superiores em blocos com traço nulo, ou seja, matrizes que são da forma

$$\begin{pmatrix} D_1 & * & \cdots & * \\ 0 & D_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_m \end{pmatrix},$$

onde cada D_i é uma matriz quadrada. A ordem de D_i é determinada da seguinte forma: Seja $D = \{d_1, \ldots, d_m\} = \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}$, com $d_1 < d_2 < \cdots < d_m = n$ e $i_1, \ldots, i_k$ os subíndices das raízes simples. Assim, a ordem da matriz D_i é $j_i = d_i - d_{i-1}$, com $d_0 = 0$.

A nível de grupo, temos que uma decomposição de Iwasawa de $\mathrm{Sl}(n)$ é $\mathrm{Sl}(n) = KAN$, onde $K = \mathrm{SO}(n)$ é o grupo das matrizes ortogonais com determinante 1, A é o grupo das matrizes diagonais com entradas positivas e determinante 1 e N é o grupo das matrizes diagonais superiores com 1's na diagonal principal.

O conjunto M seriam as matrizes diagonais de determinante 1 com entradas 1 ou -1 na diagonal principal, ou seja, o subgrupo parabólico minimal P são as matrizes triangulares superiores de $\mathrm{Sl}(n)$. De forma semelhante à álgebra, dado $\Theta = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}\} \subset \Sigma$, P_Θ é o conjunto das matrizes triangulares superiores em blocos com determinante 1, com blocos do mesmo tamanho que em $\mathfrak{p}_\Theta$.

Agora para entender o que seria a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ vamos usar o conjunto $D = \{d_1, \ldots, d_m\}$ dado anteriormente. Seja

$$\mathbb{F}_D = \{(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m) : V_i \subset \mathbb{R}^n \text{ espaço vetorial, } \dim(V_i) = d_i\}.$$

Dado $g \in \mathrm{Sl}(n)$, g age em $\mathbb{F}_D$ da seguinte maneira

$$g(V_1 \subset \cdots \subset V_m) = gV_1 \subset \cdots \subset gV_m,$$

note que essa ação é transitiva, pois dados $(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m), (W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_m) \in \mathbb{F}_D$, defina $g \in \mathrm{Sl}(n)$ tal que $gV_i = W_i$, então

$$g(V_1 \subset \cdots \subset V_m) = W_1 \subset \cdots \subset W_m.$$

Fixe $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e defina $f_\beta = (W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_m)$, onde $W_i = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{d_i} \rangle$. Como a ação de $\mathrm{Sl}(n)$ é transitiva em $\mathbb{F}_D$, pelo Teorema da Órbita ([1], Capítulo 2.6.1).

$$\mathbb{F}_D \cong \mathrm{Sl}(n)/\mathrm{Sl}(n)_{f_\beta},$$

onde $\mathrm{Sl}(n)_{f_\beta} = \{g \in \mathrm{Sl}(n) : gf_\beta = f_\beta\}$. Por outro lado, se $g \in \mathrm{Sl}(n)_{f_\beta}$, então

$$gW_1 = W_1 \implies g = \begin{pmatrix} D_1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

$$gW_2 = W_2 \implies g = \begin{pmatrix} D_1 & * & * \\ 0 & D_2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$gW_m = W_m \implies g = \begin{pmatrix} D_1 & * & \cdots & * \\ 0 & D_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_m \end{pmatrix},$$

e portanto $\mathrm{Sl}(n)_{f_\beta} \subset P_\Theta$. É fácil ver que $P_\Theta \subset \mathrm{Sl}(n)_{f_\beta}$ e assim

$$\mathbb{F}_D \cong \mathrm{Sl}(n)/\mathrm{Sl}(n)_{f_\beta} = \mathrm{Sl}(n)/P_\Theta = \mathbb{F}_\Theta.$$

2 Ação de semigrupos em variedades flag

Usando os conceitos do capítulo anterior, vamos construir a teoria de ações de semigrupos em grupos de Lie semi simples. Um ponto central estudado será os conjuntos de controle e seu conjunto de transitividade. Além disso, vamos nos aprofundar no estudo dos conjuntos de controle em variedades flag e a partir disso introduziremos o importante conceito de tipo flag.

2.1 Ação de Semigrupo e Conjunto de Controle

Nesta seção definiremos e estudaremos a ação de um semigrupo $S \subset G$ de interior não vazio em uma variedade qualquer.

Proposição 2.1. *Dados $g \in S$ e $h \in \text{int}S$, então $gh \in \text{int}S$ e $hg \in \text{int}S$. Ou seja, $\text{int}S$ é um ideal de S.*

Demonstração. Como $h \in \text{int}S$ existe uma vizinhança $V \subset S$ de h. Agora, como a multiplicação à direita e a multiplicação à esquerda são homeomorfismos, temos que gV e Vg são vizinhanças de gh e hg, respectivamente, e como S é semigrupo, temos que $g \cdot V \subset S$ e $V \cdot g \subset S$. □

Definição 2.1. *Sejam X uma variedade diferenciável e $C \subset X$, dizemos que C é um* ***conjunto de controle*** *para a ação de S em X, ou simplesmente é um conjunto de controle de S se*

1. $\text{int}C \neq \varnothing$;
2. $C \subset \text{cl}(Sx)$, *para todo* $x \in C$;
3. C *é maximal com as propriedades anteriores.*

Dizemos que o conjunto $C \subset X$ é **invariante** por S se $Sx \subset C$, para todo $x \in C$. Mais adiante analisaremos as propriedades de conjuntos de controle invariantes.

Proposição 2.2. *Seja X um espaço de Hausdorff compacto e seja $L \subset X$ um conjunto compacto invariante por S. Então, para cada $x \in L$, existe um conjunto de controle invariante $C \subset \text{cl}(Sx) \subset L$.*

Demonstração. Tome

$$\mathcal{I} = \{B \subset L : B \text{ fechado}, \text{cl}(Sx) \subset B,\ \forall x \in B\},$$

defina uma ordem $\leqslant$ em $\mathcal{I}$ por

$$B_1 \leqslant B_2 \iff B_2 \subset B_1.$$

Note que $\mathcal{I} \neq \varnothing$. De fato, dado $x \in L$, defina $B = \mathrm{cl}(Sx)$, então

$$y \in B \implies Sy \subset S(\mathrm{cl}(Sx)) \subset \mathrm{cl}(Sx) \implies \mathrm{cl}(Sy) \subset B,$$

logo, B é fechado e $\mathrm{cl}(Sy) \subset B$, para todo $y \in B$, ou seja, $B \in \mathcal{I}$. Agora, dado $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{I}$, como L é compacto, pela propriedade da interseção finita temos que

$$B_0 = \bigcap_{B \in \mathcal{J}} B \neq \varnothing,$$

e assim B_0 é cota superior de $\mathcal{J}$. Portanto, pelo Lema de Zorn existe elemento maximal $C \in \mathcal{I}$, ou seja,

1. C é fechado;
2. $\mathrm{cl}(Sx) \subset C$, para todo $x \in C$;
3. $C \subset B$, para todo $B \in \mathcal{I}$.

Além disso, temos que pelo item 2, $\mathrm{int}(C) \neq \varnothing$ e C é invariante por S. Também, $\mathrm{cl}(Sx) \in \mathcal{I}$, para todo $x \in L$, implica pelo item 3, que $C \subset \mathrm{cl}(Sx)$, para todo $x \in C$. Agora, dado $x \in L \backslash C$, se $C \cup \{x\}$ estiver contido em um conjunto de controle, temos que

$$C \cup \{x\} \subset \mathrm{cl}(Sy), \ \forall y \in C \implies x \in \mathrm{cl}(Sy) = C,$$

e portanto C é um conjunto de controle invariante por S. □

Lema 2.1. *Sejam X uma variedade diferenciável e $A \subset X$ com $SA = \bigcup_{g \in S} gA \subset \mathrm{cl}(A)$, então $\mathrm{cl}(A)$ é invariante por S. Em particular, se A é invariante por S, então $\mathrm{cl}(A)$ também é invariante por S.*

Demonstração. Note que dado $g \in S$, temos que $gA \subset \mathrm{cl}(A)$. Como E_g é um difeomorfismo, temos que $\mathrm{cl}(gA) = g\mathrm{cl}(A)$ e, como $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$, obtemos

$$g\mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(A),$$

como queríamos provar. □

Definição 2.2. *Definimos o **conjunto de transitividade** ou **core** de um conjunto de controle C como*

$$C_0 = \{x \in C : \exists g \in \mathrm{int}S, \ \text{com } gx = x\}.$$

Proposição 2.3. *Seja C um conjunto de controle de S, então $C_0 = (\text{int}S)C \cap C$.*

Demonstração. Dado $x \in (\text{int}S)C \cap C$, então existem $g \in \text{int}S$ e $y \in C$ tais que $x = gy$. Agora, como $\text{int}C \neq \varnothing$ existe $z \in \text{int}C \cap Sx$, pois $C \subset \text{cl}(Sx)$. Note que $y = g^{-1}x$, portanto $y \in (\text{int}S)^{-1}x$, que é uma vizinhança de y. Então, como $C \subset \text{cl}(Sz)$, existe $y_1 \in (\text{int}S)^{-1}x \cap Sz$, ou seja, existem $h_1 \in \text{int}S$ e $h_2 \in S$ tais que

$$h_1^{-1}x = y_1 = h_2 z \implies x = h_1 h_2 z,$$

mas temos que $z \in Sx$. Logo, existe $h_3 \in S$ tal que $z = h_3 x$ então $x = h_1 h_2 h_3 x$, mas como $\text{int}S$ é um ideal pela Proposição 2.1, temos que $x = hx$, onde $h = h_1 h_2 h_3 \in \text{int}S$. Portanto $x \in C_0$, e consequentemente $(\text{int}S)C \cap C \subset C_0$.

Para provarmos a outra inclusão tome $x \in C_0$, então existe $g \in \text{int}S$ tal que $x = gx$, mas como $x \in C$, temos que $x = gx \in (\text{int}S)C$ e portanto $x \in (\text{int}S)C \cap C$. Logo, $C_0 \subset (\text{int}S)C \cap C$. □

Lema 2.2. *Seja C um conjunto de controle com $C_0 \neq \varnothing$, então $C \subset (\text{int}S)^{-1}x$ para cada $x \in C_0$.*

Demonstração. Se $x \in C_0$, então $(\text{int}S)^{-1}x$ é vizinhança de x. Assim, para todo $y \in C$,

$$x \in C \cap (\text{int}S)^{-1}x \subset \text{cl}(Sy) \cap (\text{int}S)^{-1}x,$$

portanto $Sy \cap (\text{int}S)^{-1}x \neq \varnothing$. Logo, existem $g \in S$ e $h \in \text{int}S$ tais que

$$gy = h^{-1}x \implies y = (hg)^{-1}x \in (\text{int}S)^{-1}x.$$

□

Proposição 2.4. *Seja C um conjunto de controle com $C_0 \neq \varnothing$, então dado $x \in C_0$*

$$C_0 = (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x.$$

Demonstração. Dados $x \in C_0$ e $y \in (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$, existem $g, h \in \text{int}S$ tais que $y = gx = h^{-1}x$. Assim, tome $C' = C \cup \{y\}$. Como $\text{int}C \neq \varnothing$, então $\text{int}C' \neq \varnothing$. Agora, dado $x_1 \in C$, temos que $C \subset \text{cl}(Sx_1)$ e

$$y = gx \in g(\text{cl}(Sx_1)) = \text{cl}(gSx_1) \subset \text{cl}(Sx_1).$$

Assim, $C' \subset \text{cl}(Sx_1)$ $\forall x_1 \in C$. Por outro lado,

$$x_1 \in \text{cl}(Sx) = \text{cl}(Shy) \subset \text{cl}(Sy), \ \forall x_1 \in C,$$

e também $y = ghy$, assim $y \in Sy \subset \text{cl}(Sy)$.

Portanto, $C' \subset \mathrm{cl}(Sx)$, para todo $x \in C'$, então pela maximalidade de C como conjunto de controle obtemos $C = C'$ e, em particular, $y \in C$. Além disso $y \in C_0$, pois $y = ghy$ com $gh \in \mathrm{int}S$.

Por outro lado, dados $x, y \in C_0$ temos pelo Lema 2.2 que $x \in (\mathrm{int}S)^{-1}y$ e $y \in (\mathrm{int}S)^{-1}x$, logo $y \in (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$. Assim, $C_0 = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$. □

Proposição 2.5. *Sendo C um conjunto de controle com $C_0 \neq \varnothing$, então C_0 é denso em C.*

Demonstração. Dado $x \in C_0$, pela Proposição 2.4 temos que $C_0 = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$, assim $\mathrm{cl}((\mathrm{int}S)x) \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x \subset \mathrm{cl}(C_0)$, pois dados $y \in \mathrm{cl}((\mathrm{int}S)x) \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$ e V uma vizinhança de y, temos que existe $y_1 \in V$ tal que $y_1 \in (\mathrm{int}S)x$ e $y_1 \in (\mathrm{int}S)^{-1}x$. Logo $y_1 \in C_0$, ou seja, $y \in \mathrm{cl}(C_0)$.

Agora note que, pelo Lema 2.2, temos que $C \subset (\mathrm{int}S)^{-1}x$. Além disso, $x \in (\mathrm{int}S)x$, pois $x \in C_0$. Logo, $C \subset \mathrm{cl}(Sx) \subset \mathrm{cl}(S(\mathrm{int}S)x) \subset \mathrm{cl}((\mathrm{int}S)x)$. Portanto,

$$C \subset \mathrm{cl}((\mathrm{int}S)x) \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x \subset \mathrm{cl}(C_0),$$

ou seja, C_0 é denso em C. □

Proposição 2.6. *Suponha que* $\mathrm{int}S \neq \varnothing$ *e seja $C \subset X$ um conjunto de controle invariante, então*

1. *C é fechado;*
2. *$C = \mathrm{cl}(Sx)$, para todo $x \in C$;*
3. *$C = \mathrm{cl}(\mathrm{int}C)$;*
4. *$C_0 \neq \varnothing$.*

Demonstração. 1. Dado $y \in \mathrm{cl}(C)$. Temos que

$$C \cap \mathrm{int}(Sy) \neq \varnothing,$$

pois $\mathrm{int}(Sy) \neq \varnothing$ e $\mathrm{int}(Sy) \subset \mathrm{cl}(C)$, pela invariância de $\mathrm{cl}(C)$.

Assim, dado $x \in C \cap \mathrm{int}(Sy)$, temos

a) $x \in C \implies C \subset \mathrm{cl}(Sx) \implies \mathrm{cl}(C) \subset \mathrm{cl}(Sx)$;

b) $x \in \mathrm{int}(Sy) \implies Sx \subset Sy \implies \mathrm{cl}(Sx) \subset \mathrm{cl}(Sy)$,

portanto, $\mathrm{cl}(C) \subset \mathrm{cl}(Sy)$. Logo, $\mathrm{cl}(C)$ obedece às duas primeiras propriedades de conjunto de controle, donde pela maximalidade $C = \mathrm{cl}(C)$, ou seja, C é fechado.

2. Dado $x \in C$, como C é fechado e é invariante pelo item 1, temos

$$Sx \subset C \implies \mathrm{cl}(Sx) \subset \mathrm{cl}(C) = C,$$

e como C é conjunto de controle $C = \mathrm{cl}(Sx)$.

3. Seja $x \in C$. Temos que $(\mathrm{int}S)x$ é aberto e está contido em C, donde $(\mathrm{int}S)x \subset \mathrm{int}C$. Assim, dado $y \in (\mathrm{int}S)x$, segue que $Sy \subset S(\mathrm{int}S)x \subset (\mathrm{int}S)x$, pois $\mathrm{int}S$ é um ideal de S. Utilizando o item 1, obtemos

$$C = \mathrm{cl}(Sy) \subset \mathrm{cl}((\mathrm{int}S)x) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}C).$$

Novamente pelo item 1

$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}C) \subset \mathrm{cl}(C) = C,$$

provando o item.

4. Note que como C é invariante por S e $\mathrm{int}S \neq \varnothing$, temos que $(\mathrm{int}S)C \subset C$ e $(\mathrm{int}S)C \neq \varnothing$. Assim, usando o item 1 e a Proposição 2.3, temos que $C_0 = (\mathrm{int}S)C \cap C = (\mathrm{int}S)C \neq \varnothing$.

□

Proposição 2.7. *Sejam C um conjunto de controle de um semigrupo $S \subset G$ e $x \in C_0$. Então dado $y \in C$, existe $g \in \mathrm{int}S$ tal que $gy = x$.*

Demonstração. Como $x, y \in C$, temos que $x \in \mathrm{cl}(Sy)$, agora note que $(\mathrm{int}S)^{-1}x$ é uma vizinhança de x, pois $x \in C_0$, então existe $g_1 \in S$ tal que $g_1 \cdot y \in (\mathrm{int}S)^{-1}x$ e, portanto, existe $g_2 \in \mathrm{int}S$ tal que

$$g_1 y = g_2^{-1}x.$$

Logo, $g_2 g_1 y = x$ e, pela Proposição 2.1, temos que $g = g_2 g_1 \in \mathrm{int}S$, pois $g_2 \in \mathrm{int}S$. □

A proposição a seguir é muito relevante, pois vamos usá-la para caracterizar os conjuntos de controle invariantes nas variedades flag.

Proposição 2.8. *Suponha que $C = \bigcap_{x \in X} \mathrm{cl}(Sx) \neq \varnothing$. Então C é o único conjunto de controle invariante de S em X.*

Demonstração. Dado $y \in C$, então $y \in \mathrm{cl}(Sx)$, para todo $x \in X$. Logo, dado $g \in S$, a ação de g é um homeomorfismo, então

$$gy \in g\mathrm{cl}(Sx) = \mathrm{cl}(gSx) \subset \mathrm{cl}(Sx), \ \forall x \in X,$$

assim esse conjunto é invariante por S.

Como $C \neq \varnothing$, tome $y \in C$, então $(\text{int}S)y$ é um aberto não vazio contido em C, portanto C obedece a primeira condição da Definição 2.1. Então, pela definição de C, $C \subset \text{cl}(Sx)$, $\forall x \in X$. Portanto, C também obedece à segunda condição da Definição 2.1.

Agora, suponha que exista C_1 com $C \subset C_1$ que obedeça às propriedades 1 e 2 da Definição 2.1. Suponha que exista $z \in C_1 \backslash C$. Tome $y \in C$, em particular $y \in C_1$, então $C_1 \subset \text{cl}(Sy)$. Como C é invariante por S, temos que

$$\text{cl}(Sy) \subset C \implies C_1 \subset C,$$

logo, $C_1 = C$. Portanto, C é um conjunto de controle invariante.

A unicidade segue do fato de que se D é um outro conjunto de controle invariante, temos que $D \subset \text{cl}(Sx)$, para todo $x \in D$, ou seja, $C \subset D$, então como provado anteriormente, $C = D$. □

2.2 Conjunto de controle em flag

A partir de agora vamos considerar G um grupo de Lie semi simples não compacto com centro finito e $S \subset G$ um subsemigrupo de G com $\text{int}S \neq \varnothing$.

Proposição 2.9. *Existe elemento regular real $h \in G$ tal que $h \in \text{int}S$.*

Demonstração. O espaço G/AN é difeomorfo à K, então como G tem centro finito implica que G/AN é compacto, pela Proposição 1.2.1. Então, como K é compacto, pelas Proposições 2.2 e 2.6, existe um conjunto de controle invariante C em K tal que $C_0 \neq \varnothing$. Então, dado $x = yAN \in C_0$, existe $h \in \text{int}S$ tal que $hx = x$, ou seja, $hyAN = yAN$, logo, $h \in yANy^{-1}$. Pela Proposição 1.10, os elementos regulares reais são densos em AN. Assim perturbamos h em $\text{int}S$ para que exista $g \in AN$ regular real com $h = ygy^{-1}$. Pela Proposição 1.7, h é elemento regular real e $h \in \text{int}S$. □

A proposição anterior mostra que podemos tomar uma decomposição de Iwasawa tal que $A^+ \cap \text{int}S \neq \varnothing$ e isso nos auxiliará na demonstração da próxima proposição.

Proposição 2.10. *Existe um único conjunto de controle invariante no flag maximal $\mathbb{F}$.*

Demonstração. Tome uma decomposição de Iwasawa $G = KAN$ tal que $A^+ \cap \text{int}S \neq \varnothing$. Pelo Teorema 1.1 temos que $N^- x_0$ é denso em $\mathbb{F}$, então dado $x \in \mathbb{F}$, existe $g \in S$ tal que $gx \in N^- x_0$, ou seja, existe $n \in N^-$ com $gx = nx_0$. Tomando $h \in A^+ \cap \text{int}S$ elemento regular real, temos que $h^k gx = h^k n h^{-k} x_0$. Como, pela Proposição 1.11, $h^k n h^{-1} \to 1$, quando $k \to \infty$, temos que $h^k gx \to x_0$, portanto $x_0 \in \text{cl}(Sx)$ para todo $x \in \mathbb{F}$. Assim, pela proposição 2.8, concluímos que $C = \displaystyle\bigcap_{x \in \mathbb{F}} \text{cl}(Sx)$ é o único conjunto de controle invariante de S em $\mathbb{F}$. □

A próxima proposição generaliza o resultado anterior, no sentido de que assegura que toda variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ admite um único conjunto de controle invariante.

Proposição 2.11. *Dado $\Theta \subset \Sigma$, existe um único conjunto de controle invariante em $\mathbb{F}_\Theta$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}\pi_\Theta(C) = \pi_\Theta\left(\bigcap_{x\in\mathbb{F}} \mathrm{cl}(Sx)\right) \subset \bigcap_{x\in\mathbb{F}} \pi_\Theta(\mathrm{cl}(Sx)) \subset \bigcap_{x\in\mathbb{F}} \mathrm{cl}(\pi_\Theta(Sx)) \\ = \bigcap_{x\in\mathbb{F}} \mathrm{cl}(S\pi_\Theta(x)) \\ = \bigcap_{y\in\mathbb{F}_\Theta} \mathrm{cl}(S\pi_\Theta(y)),\end{aligned}$$

pois π_Θ é sobrejetora. Como $\pi_\Theta(C) \neq \varnothing$, concluímos pela Proposição 2.8 que $\bigcap_{x\in\mathbb{F}_\Theta} \mathrm{cl}(Sx)$ é o único conjunto de controle invariante de $\mathbb{F}_\Theta$. □

Vamos denotar por C_Θ o conjunto de controle invariante de $\mathbb{F}_\Theta$. Temos que, pela Proposição 2.6, para todo Θ, $(C_\Theta)_0 \neq \varnothing$. Note que podemos melhorar a Proposição 2.9, no sentido de garantir que se $x \in (C_\Theta)_0$, existe um elemento regular real em $\mathrm{int}S$ que fixa x. De fato, tome $x \in (C_\Theta)_0$. Então existe $g \in \mathrm{int}S$ tal que $gx = x$. Assumindo sem perda de generalidade que x é a origem, defina

$$M_g = \{m \in M : \exists h \in A, n \in N;\ mhn \in \mathrm{int}S\}.$$

Temos que

1. $M_g \neq \varnothing$, pois $m \in M_g$, onde $g = mhn \in MAN$;
2. $\mathrm{int}M_g \neq \varnothing$ (em M), pois dado $m \in M_g$ com $mhn \in \mathrm{int}S$, existe uma vizinhança de M_g que ainda está em M_g, pois $\mathrm{int}S$ é aberto;
3. M_g é um semigrupo, pois M é o centralizador de A e M normaliza N.

Sendo M compacto, seus elementos de ordem finita são densos e como $\mathrm{int}M_g \neq \varnothing$, existe $m \in M_g$ tal que $m^k = 1$ para algum k. Sendo M_g semigrupo, obtemos que $1 \in M_g$. Logo, existem $h \in A$ e $n \in N$ tal que $hn \in \mathrm{int}S \cap P$.

Como os elementos regulares reais são densos em AN, perturbamos hn para que seja regular real. Deste modo, podemos supor sem perda de generalidade que a origem do flag $\mathbb{F}_\Theta$ está em $(C_\Theta)_0$ e é fixado por um elemento regular real.

2.3 Tipo flag

Definição 2.3. *Seja X uma variedade diferenciável, dizemos que $x \in X$ é um ponto fixo atrator de $h \in S$ se $hx = x$ e existe uma vizinhança V de x, tal que*

$$h^k y \to x, \ \forall y \in V.$$

Dados $\Theta \subset \Sigma$ e $h \in AN$ um elemento regular, temos que os pontos fixos de h em $\mathbb{F}_\Theta$ são dados por

$$\tilde{w}x_\Theta, \text{ com } \ \tilde{w} \in M^* \text{ representante de } w \in \mathcal{W},$$

onde x_Θ é a origem de $\mathbb{F}_\Theta$. O único ponto fixo atrator de h é denotado por $x_\Theta^+(h)$ e é dado por

$$x_\Theta^+(h) = x_\Theta.$$

De maneira mais geral, existe $g \in G$ tal que $ghg^{-1} \in AN$ e assim, os pontos fixos de h em $\mathbb{F}_\Theta$ são dados por

$$g\tilde{w}x_\Theta, \text{ com } x_\Theta(h) = gx_\Theta,$$

com $\tilde{w} \in M^*$ representante de $w \in \mathcal{W}$.

Definição 2.4. *Sejam $h \in S$ elemento regular real e $x_\Theta^+(h)$ seu ponto fixo em $\mathbb{F}_\Theta$. Dizemos que um conjunto compacto $C \subset \mathbb{F}_\Theta$ é **contrátil** pelo elemento regular real h se dado $x \in C$,*

$$h^k x \longrightarrow x_\Theta^+(h).$$

Definição 2.5. *Dado $\Theta(S) \subset \Sigma$, dizemos que $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ é o **tipo flag** de S se dado $\Theta \subset \Sigma$, então*

1. *C_Θ é contrátil para cada $h \in \mathrm{int}S$ elemento regular real, se $\Theta(S) \subset \Theta$;*

2. *$C = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta)$, se $\Theta \subset \Theta(S)$.*

No Capítulo 3.2 de [3] é provado que existe tipo flag de S para qualquer semigrupo S de interior não vazio. Denotaremos a partir de agora por $\Theta(S)$ o tipo flag de S.

Proposição 2.12. *Seja $\mathbb{F}_\Theta$, onde $\Theta = \Theta(S)$ é o tipo flag de S. Então,*

$$\Lambda_N \subset \Lambda_\Theta = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{w \in \mathcal{W}_\Theta} w\mathfrak{a}^+ \right),$$

onde,

$$\Lambda_N = \{H \in \mathfrak{a} : \exists n \in N, \ \exists t > 0, \mathrm{e}^{tH} n \in \mathrm{int}S\}.$$

Além disso, $\Lambda_N \cap w\mathfrak{a}^+ \neq \varnothing$, para todo $w \in \mathcal{W}_\Theta$.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que Λ_N é um cone convexo. Tome $H \in \Lambda_N$ com $n \in N$ e $t > 0$ tal que $e^{tH}n \in \text{int}S$. Então dado $r > 0$ defina $s = t/r$. Logo

$$e^{s(rH)}n = e^{(tr/r)H}n = e^{tH}n \in \text{int}S,$$

e portanto $rH \in \Lambda_N$, para todo $r > 0$. Para provar a convexidade defina

$$T_H = \{s \in (0, +\infty) : \exists n \in N, e^{sH}n \in \text{int}S\},$$

note que dado $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, temos que se $t \in T_H$, então $kt \in T_H$. De fato,

$$(e^{tH}n)^k \in \text{int}S,$$

pois int$S$ é um ideal, então, como A normaliza N, existe $\tilde{n} \in N$ com

$$e^{ktH}\tilde{n} = (e^{tH}n)^k \in \text{int}S.$$

Note também que existe um intervalo (a, b) com $t \in (a, b)$ tal que $(a, b) \subset T_H$, pois int$S$ é aberto.

Com essas duas informações, obtemos que $(ka, kb) \subset T_H$, para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Mas existe $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $ka < (k-1)b$, logo existe $T > 0$ de forma que $(T, +\infty) \subset T_H$.

Agora, dados $H_1, H_2 \in \Lambda_N$, por Λ_N ser um cone, $tH_1, (1-t)H_2 \in \Lambda_N$, para todo $t \in (0, 1)$. Logo, existe $T > 0$ grande o suficiente para que existam $n_1, n_2 \in N$ que satisfazem

$$e^{TtH_1}n_1, e^{T(1-t)H_2}n_2 \in \text{int}S,$$

e assim,

$$(e^{TtH_1}n_1)(e^{T(1-t)H_2}n_2) = e^{TtH_1}e^{T(1-t)H_2}\tilde{n} = e^{T(tH_1+(1-t)H_2)}\tilde{n} \in \text{int}S,$$

para algum $\tilde{n} \in N$. Portanto $tH_1 + (1-t)H_2 \in \Lambda_N$, para todo $t \in (0, 1)$, ou seja, Λ_N é convexo.

Mostremos agora a inclusão. Como $\mathcal{W}$ age transitivamente nas câmaras de Weyl, temos que

$$\Lambda_N \subset \text{cl}\left(\bigcup_{w \in \mathcal{W}} w\mathfrak{a}^+\right) = \mathfrak{a},$$

então dado $H \in \Lambda_N$ com $H \in w\mathfrak{a}^+$, existe $H_1, \ldots, H_k$ regulares reais com $H_k = H$ tais que

1. $H_1 \in \mathfrak{a}^+$ e $H_k = H$;
2. $[H_i, H_{i+1}] \subset \Lambda_N$, para todo i;
3. $[H_i, H_{i+1}] \cap \ker\alpha_i \neq \varnothing$ para um único $\alpha_i \in \Sigma$;
4. $[H_i, H_{i+1}] \subset w_i\mathfrak{a}^+ \cup w_{i+1}\mathfrak{a}^+ \cup \ker\alpha_i$,

onde

$$[H_i, H_{i+1}] = \{tH_i + (1-t)H_{i+1} : 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Então r_{α_i} leva a câmara de Weyl contendo H_i para a câmara de Weyl contendo H_{i+1}. Em particular sendo $H_i' = [H_i, H_{i+1}] \cap \ker\alpha_i$, temos que

1. $r_{\alpha_i} H_i' = H_i'$;

2. $H_i' \in \Lambda_N \implies e^{t_i H_i'} n_i \in \mathrm{int} S$ para algum $t_i > 0$ e $n_i \in N$;

desta forma $r_{\alpha_i} \in \mathcal{W}_\Theta$ pelo Corolário 4.1 de [10]. Logo,

$$\begin{aligned} r_{\alpha_{k-1}} r_{\alpha_{k-2}} \dots r_{\alpha_1} \mathfrak{a}^+ = w\mathfrak{a}^+ &\implies w^{-1} r_{\alpha_{k-1}} r_{\alpha_{k-2}} \dots r_{\alpha_1} \mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+ \\ &\implies w^{-1} r_{\alpha_{k-1}} r_{\alpha_{k-2}} \dots r_{\alpha_1} = 1, \end{aligned}$$

onde a última implicação se deve à Proposição 9.19 de [2]. Portanto $w \in \mathcal{W}_\Theta$.

Para a afirmação $\Lambda_N \cap w\mathfrak{a}^+ \neq$, para todo $w \in W_\Theta$, note que

$$w \in W_\Theta \implies wx_0 \in C_0,$$

pela Proposição 4.1 de [10]. Além disso,

$$wb_0 \in C_0 \implies w^{-1}\mathfrak{a}^+ \cap \Lambda_N \neq \varnothing,$$

pelo Lema 3.3 de [5] e como W_Θ é um subgrupo, o resultado segue. □

Proposição 2.13. *Para qualquer $H \in \Lambda_\Theta$ e $\lambda \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$, temos que $\lambda(H) \geqslant 0$.*

Demonstração. Dado $J \in \bigcup_{w \in \mathcal{W}_\Theta} w\mathfrak{a}^+$, existe $w \in \mathcal{W}_\Theta$ tal que $J \in w\mathfrak{a}^+$. Sendo que

$$\mathcal{W}_\Theta = \mathrm{span}\{r_\alpha : \alpha \in \Theta\},$$

supomos sem perda de generalidade que $w = r_\alpha$, para algum $\alpha \in \Theta$. Assim, existe $I \in \mathfrak{a}^+$ tal que

$$J = r_\alpha(I) = I - 2\frac{\alpha(I)}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} H_\alpha.$$

Agora, como $\lambda \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$, temos que

1. $\lambda(H_\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \Theta$;

2. $\lambda(H_\beta) > 0$, para todo $\beta \in \Sigma \backslash \Theta$;

como $I \in \mathfrak{a}^+$, pela Proposição 1.4, obtemos

$$I = a_1 H_{\omega_1} + a_2 H_{\omega_2} + \dots a_n H_{\omega_n},$$

onde $a_i > 0$ e $\omega_i \in \Phi$, para todo i. Portanto, pela linearidade de λ

$$\begin{aligned} \lambda(J) = \lambda(I) - 2\frac{\alpha(I)}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}\lambda(H_\alpha) &= \lambda(I) \\ &= \lambda(a_1 H_{\omega_1} + \dots a_n H_{\omega_n}) \\ &= a_1 \lambda(H_{\omega_1}) + \dots a_n \lambda(H_{\omega_n}). \end{aligned}$$

Mas temos que como Σ é base de $\mathfrak{a}^*$, podemos escrever

$$H_{\omega_i} = \sum_k a_{ik} H_{\alpha_k},$$

e portanto,

$$\frac{||\alpha_j||^2}{2}\delta_{ij} = \alpha_j(H_{\omega_i}) = \sum_k a_{ik}\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle \implies \sum_k a_{ik}\frac{\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{||\alpha_j||^2} = \delta_{ij}.$$

Assim,

$$BC = I,$$

onde $B = (a_{ij})_{ij}$, $C = \left(\frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{||\alpha_j||^2}\right)_{ij}$ e I é a matriz identidade. Assim, sendo B é a inversa de C e C uma matriz de Cartan, temos que as entradas de B são não negativas, donde,

$$\lambda(H_{\omega_i}) = \sum_k a_{ik}\lambda(H_{\alpha_k}) \geqslant 0.$$

Logo, $\lambda(J) \geqslant 0$ e pela continuidade de λ, $\lambda(H) \geqslant 0$, para todo $H \in \Lambda_\Theta$. $\square$

2.4 Exemplo das matrizes positivas

Seja $S = \mathrm{Sl}^+(n) = \{A \in \mathrm{Sl}(n) : A = (a_{ij})_{ij}, a_{ij} \geqslant 0\}$ o conjunto das matrizes positivas. Note que S é o semigrupo de compressão do ortante positivo de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geqslant 0\},$$

o tipo flag de S é o espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$ e o conjunto de controle invariante em $\mathbb{P}^{n-1}$ é o conjunto $[\mathbb{R}^n_+]$.

3 Cociclos e seus limites inferiores

Neste capítulo introduziremos o conceito principal estudado que são os cociclos e nos aprofundaremos na definição deles em variedades flag. Também, como resultado principal, vamos classificar os possíveis limites inferiores dos cociclos ρ_α, considerando se α pertence ou não ao tipo flag.

3.1 Cociclos

Definição 3.1. *Dado uma ação* $\cdot : G \times X \to X$ *de um grupo* G *em* X *dizemos que uma função* $\rho : G \times X \to A$ *é um* ***cociclo*** *com relação à ação* $\cdot$ *quando*

$$\rho(gh, k) = \rho(g, h \cdot k)\rho(h, k), \;\; g, h \in G, \;\; k \in X.$$

Seja G um grupo de Lie, semi simples e não compacto, $G = KAN$ uma decomposição de Iwasawa e $r : G \to K$ a função definida por $r(g) = k$, onde $g = kan \in KAN$. Definimos a função

$$\rho : G \times K \to A, \;\text{ por } gk = u\rho(g, k)n,$$

onde $k \in K$, $\rho(g, k)$ e $n \in N$. Além disso, dado $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ definimos a função $\rho_\lambda : G \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\rho_\lambda(g, k) = \mathrm{e}^{\lambda \mathbf{a}(g,k)},$$

onde $\mathbf{a} = \log \rho$. A próxima proposição prova que ρ e ρ_λ são cociclos.

Proposição 3.1. *As funções* ρ *e* ρ_λ *são cociclos com relação à ação* $\cdot$*, onde* $g \cdot k = r(gk) = u$.

Demonstração. De fato, sejam $g, h \in G$ e $k \in K$. Fazendo a decomposição de hk obtemos

$$hk = u\rho(h, k)n,$$

então

$$ghk = gu\rho(h, k)n.$$

Mas note que gu também pode ser escrito como

$$gu = u_1\rho(g, u)n_1,$$

ou seja,

$$ghk = u_1\rho(g, u)n_1\rho(h, k)n.$$

Como A normaliza N, temos que $n_2 = \rho(h, k)^{-1}n_1\rho(h, k)n \in N$ e, portanto,

$$ghk = u_1\rho(g, u)\rho(h, k)n_2,$$

e concluímos que $\rho(gh,k) = \rho(g,h\cdot k)\rho(h,k)$ provando que ρ é cociclo. Por outro lado, se $\lambda \in \mathfrak{a}^+$,

$$\begin{aligned}\rho_\lambda(gh,k) = \exp(\lambda\mathbf{a}(gh,k)) &= \exp(\lambda\log(\rho(gh,k)))\\ &= \exp(\lambda\log(\rho(g,h\cdot k)\rho(h,k)))\\ &= \exp(\lambda\log(\rho(g,h\cdot k)) + \lambda\log(\rho(h,k)))\\ &= \exp(\lambda\log(\rho(g,h\cdot k)))\exp(\lambda\log(\rho(h,k)))\\ &= \rho_\lambda(g,h\cdot k)\rho_\lambda(h,k),\end{aligned}$$

portanto, ρ_λ também é um cociclo. □

Proposição 3.2. *A segunda entrada de ρ é invariante pela translação à direita por m, onde $m \in M$, ou seja,*

$$\rho(g,um) = \rho(g,u),\ \forall g \in G, u \in K \text{ e } m \in M.$$

Demonstração. Sendo

$$g(um) = k_1\rho(g,um)n_1 \text{ e } gu = k\rho(g,u)n,$$

as decomposições de Iwasawa de gum e gu, temos que

$$\begin{aligned}k_1\rho(g,um)n_1 = (gu)m &= (k\rho(g,u)n)m\\ &= k\rho(g,u)mm^{-1}nm\\ &= km\rho(g,u)m^{-1}nm,\end{aligned}$$

então como $M \subset K$ e M normaliza N, temos que $km \in K$ e $m^{-1}nm \in N$. Assim, pela unicidade da decomposição de Iwasawa, $\rho(g,um) = \rho(g,u)$. □

Note então que como $\mathbb{F} = K/M$ e ρ é constante em cada classe lateral kM, temos que ρ é invariante pela ação à direita de M na segunda entrada, ou seja, ρ pode ser definida em $G \times \mathbb{F}$ como

$$\rho(g,x) := \rho(g,k),$$

onde $x = kx_0$, x_0 origem de $\mathbb{F}$. A partir de agora sempre usaremos ρ para representar tanto o cociclo definido na Proposição 3.1, quanto o definido na Proposição 3.2. Essa extensão também vale para a definição de ρ_λ.

Proposição 3.3. *Dado $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, temos que*

1. $\rho_\lambda(1,x) = 1$, $\forall x \in K$;

2. *Se $hx = x$, então dado $m \in \mathbb{N}$, temos que* $\rho_\lambda(h^m,x) = \rho_\lambda(h,x)^m$;

Demonstração. 1. Temos que $1x = x \in K$, logo o elemento $a \in A$ de $1x$ é 1, e como $\lambda(0) = 0$, temos que

$$\rho_\lambda(1, x) = \mathrm{e}^0 = 1;$$

2. Como ρ_λ é um cociclo, temos que

$$\rho_\lambda(h^m, x) = \rho_\lambda(h^{m-1}, h \cdot x)\rho_\lambda(h, x) = \rho_\lambda(h^{m-1}, x)\rho_\lambda(h, x),$$

pois $hx = x$. Então, por indução, obtemos que

$$\rho_\lambda(h^m, x) = \rho_\lambda(1, x)\rho_\lambda(h, x)^m.$$

Logo, usando o item 1, obtemos que $\rho_\lambda(h^m, x) = \rho_\lambda(h, x)^m$.

□

3.2 Limite inferior de cociclos

Nesta seção vamos apresentar alguns lemas para a demonstração do Teorema 3.1, que é o resultado principal deste trabalho. No final dela provamos este Teorema e damos um exemplo que explicita uma cota inferior de um cociclo.

Lema 3.1. *Seja $\Theta = \Theta(S)$ o tipo flag de S. Dado $x_0 \in \mathbb{F}$, assuma que existe $g \in \mathrm{int}S$ com $gx_0 = x_0$. Então para todo $\lambda \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$, temos que $\rho_\lambda(g, x_0) \geqslant 1$.*

Demonstração. Como $gx_0 = x_0$ supomos sem perda de generalidade que x_0 é a origem de $\mathbb{F}$. Então, $g \in P$ e podemos escrever $g = man \in MAN$ e, assim, $\rho_\lambda(g, x_0) = \mathrm{e}^{\lambda(H)}$, onde $a = \mathrm{e}^H$. Perturbando $g \in \mathrm{int}S \cap P$ se necessário, podemos assumir que m tem ordem finita. Então, existe $j \geqslant 1$ tal que $m^j = 1$ e, pela Proposição 1.6, existe $\tilde{n} \in N$ tal que

$$g^j = m^j a^j \tilde{n} = a^j \tilde{n} \in AN.$$

Logo, como $\mathrm{int}S$ é um ideal pela Proposição 2.1, $g^j = \mathrm{e}^{jH}\tilde{n} \in \mathrm{int}S$, donde $jH \in \Lambda_N$. Pela Proposição 2.12 temos que $\Lambda_N \subset \Lambda_\Theta$. Assim, $jH \in \Lambda_\Theta$ e portanto $H \in \Lambda_\Theta$. Agora, como $\lambda \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$, temos, pela Proposição 2.13, que $\lambda(H) \geqslant 0$ e portanto $\rho_\lambda(g, x_0) = \mathrm{e}^{\lambda(H)} \geqslant 1$. □

Lema 3.2. *Seja S um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \varnothing$ e denote por C seu conjunto de controle invariante no flag maximal $\mathbb{F}$. Sejam $x \in C_0$ e $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ e suponha que existe $d > 0$ tal que $\rho_\lambda(g, x) > d$, para todo $g \in S_x = \{h \in \mathrm{int}S : \ hx = x\}$. Então existe $c > 0$ tal que $\rho_\lambda(g, x) > c$ para todo $g \in S$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista uma sequência $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ tal que

$$\rho_\lambda(g_k, x) \longrightarrow 0.$$

Como C é um conjunto de controle invariante, temos que $g_k x \in C$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Assim, pela compacidade de C, existe subsequência $(g_{k_i})_i$ de $(g_k)_k$ que converge para algum $y \in C$. Então, sem perda de generalidade, supomos que $g_k x \longrightarrow y$.

Pela Proposição 2.7, temos que existe $g \in \text{int}S$ tal que $gy = x$. Portanto pela continuidade do produto, temos que

$$gg_k x \longrightarrow gy = x.$$

Agora note que pela definição de cociclo: $\rho_\lambda(gg_k, x) = \rho_\lambda(g, g_k x)\rho_\lambda(g_k, x)$. Então, pela compacidade de K e continuidade de ρ_λ, $\rho_\lambda(g, g_k x)$ é limitado quando g é fixado. Portanto,

$$\rho_\lambda(g_k, x) \longrightarrow 0 \implies \rho_\lambda(gg_k, x) \longrightarrow 0.$$

Por simplicidade, denotaremos apenas por g_k o produto gg_k. Desta forma $g_k \in \text{int}S$, pois $\text{int}S$ é um ideal, e satisfaz

$$\rho_\lambda(g_k, x) \longrightarrow 0 \text{ e } g_k x \longrightarrow x.$$

Como $x \in C_0$, existe $g_0 \in \text{int}S$ tal que $g_0 x = x$. Seja $W \subset \text{int}S$ uma vizinhança compacta de g_0. Então $U = W^{-1}x$ é vizinhança compacta de x em $\mathbb{F}$. Pela compacidade de W e $\mathbb{F}$ e pela continuidade do cociclo ρ_λ, temos que $r = \sup\{\rho_\lambda(h, z) : \ h \in W, z \in \mathbb{F}\} < +\infty$.

Agora, como U é vizinhança de x, $g_k x \to x$ e $\rho_\lambda(g_k, x) \longrightarrow 0$, existe k grande o suficiente tal que $g_k x \in U$ e $\rho_\lambda(g_k, x) < \dfrac{d}{2r}$. Então pela construção de U, existe $h \in W$ tal que $hg_k x = x$ e, portanto, temos que

$$\rho_\lambda(hg_k, x) = \rho_\lambda(h, g_k x)\rho_\lambda(g_k, x) \leqslant r\rho_\lambda(g_k, x) < \frac{rd}{2r} = \frac{d}{2},$$

contradizendo o fato de que $\rho_\lambda(g, x) > d$, para todo $g \in S_x$. □

Proposição 3.4. *Sejam S um semigrupo com tipo flag $\Theta \subset \Sigma$ e C seu conjunto de controle no flag maximal. Dados $\lambda \in (\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$ e $x \in C_0$, existe $c > 0$, tal que $\rho_\lambda(g, x) > c$ para todo $g \in S$.*

Demonstração. Pelos comentários feitos após a Proposição 2.11, temos que $S_x \neq \varnothing$ se $x \in C_0$. Em particular, como x é um ponto fixo de todo elemento de S_x, temos pelo Lema 3.1, que

$$\forall g \in S_x, \ \rho_\lambda(g, x) \geqslant 1.$$

Logo, pelo Lema 3.2, existe $c > 0$ tal que

$$\rho_\lambda(g, x) > c, \ \forall g \in S.$$

□

Corolário 3.1. *Seja $S \subset G$ um semigrupo próprio com* $\mathrm{int}S \neq \varnothing$ *e suponha que $\mathfrak{g}$ (e G) tem posto real um. Denote por α (e eventualmente 2α) a raiz positiva. Então*

$$\inf_{g\in S} \rho_\alpha(g,x) > 0, \ \forall x \in C_0.$$

Demonstração. Como o posto real é 1, as variedades flag são $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}_\alpha$. Como $\Theta(S) = \Sigma$ se, e somente se, $S = G$, temos que o tipo flag de S é $\varnothing$. Portanto, o subespaço $\mathfrak{a}^*_\Theta$ tem dimensão 1 e $(\mathfrak{a}^*_\Theta)^+$ é o raio contendo α, onde $\Theta = \varnothing$.

Logo, α satisfaz as hipóteses da Proposição 3.4 e, portanto, $\rho_\alpha(g,x)$ é limitado inferiormente. □

Exemplo 3.1. *Dado $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, seja $\mathfrak{g}(\alpha)$ a álgebra de Lie gerada por g_α e $g_{-\alpha}$ e $G(\alpha)$ o subgrupo de Lie conexo associado. Como ambos têm posto real 1, obedecem às hipóteses do resultado anterior. Assim,*

$$\inf_{g\in S} \rho_\alpha(g,x) > 0, \ \forall x \in C_0,$$

onde C_0 é o core do conjunto de controle invariante maximal de $\mathbb{F}_\alpha$.

No que segue, utilizaremos o grupo $G(\alpha)$, para $\alpha \in \Sigma\backslash\Theta(S)$ para restringir nosso cociclo ao caso de posto 1, e assim obter uma limitação inferior. De modo a fazer isso, necessitamos de alguns preliminares.

Considere a decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{k}(\alpha) \oplus \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \mathfrak{n}(\alpha),$$

de $G(\alpha)$. A restrição de α a $\mathfrak{a}(\alpha)$ é identificado com a raiz positiva de $\mathfrak{g}(\alpha)$.

Seja $\pi_\alpha : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\alpha$ a projeção canônica. Se x_0 é a origem de $\mathbb{F}$, então a origem de $\mathbb{F}_\alpha$ é $x_\alpha = \pi(x_0)$. Note que

$$F_\alpha = \pi_\alpha^{-1}\{x_\alpha\} = P_\alpha x_0 = MG(\alpha)A_\alpha N_\alpha x_0 = MG(\alpha)x_0 = G(\alpha)x_0,$$

e portanto $G(\alpha)$ age transitivamente na fibra F_α.

A subálgebra de isotropia em x_0 da ação de $G(\alpha)$ em F_α é a subálgebra parabólica $\mathfrak{q}_\alpha$ dada por

$$\mathfrak{q}_\alpha = \mathfrak{m}(\alpha) \oplus \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \mathfrak{n}(\alpha),$$

onde $\mathfrak{m}(\alpha)$ é o centralizador de $\mathfrak{a}(\alpha)$ em $\mathfrak{k}(\alpha)$. Desta maneira, F_α se identifica à variedade flag maximal de $G(\alpha)$ de modo que x_0 é a sua origem.

Considerando α como uma raiz em $\mathfrak{a}(\alpha)^*$, definimos o cociclo $\rho_\alpha(g,x)$ em $G(\alpha) \times F_\alpha$ como anteriormente. Este cociclo é denotado da mesma forma que o anterior, já que é a restrição à fibra F_α do cociclo sobre $G \times \mathbb{F}$, devido às inclusões $K(\alpha) \subset K$, $A(\alpha) \subset A$ e $N(\alpha) \subset N$.

Note que se $T \subset G(\alpha)$ é um semigrupo com interior não vazio tal que $x_0 \in C(T)_0$, onde $C(T)$ é o conjunto de controle invariante de T em F_α, então $\rho_\alpha(g, x_0)$ tem cota inferior positiva pelo Corolário 3.1. Usaremos esse fato para provar o Lema 3.4.

Agora, suponha sem perda de generalidade que a origem de x_0 de $\mathbb{F}$ satisfaz $x_0 \in C_0$ e seja $h \in A^+ \cap \text{int}S$ com $hx_0 = x_0$. Definimos, a partir de S, um semigrupo $T \subset G(\alpha)$, da seguinte maneira:

1. A projeção $C_\alpha = \pi_\alpha(C)$ é o conjunto de controle de S em $\mathbb{F}_\alpha$ cujo core $(C_\alpha)_0$ contém $\pi_\alpha(C_0)$;

2. Como
$$x_\alpha = \pi_\alpha(x_0) \in \pi_\alpha(C_0) \subset (C_\alpha)_0,$$
o semigrupo $S_{x_\alpha} = (\text{int}S) \cap P_\alpha$ tem interior não vazio em P_α;

3. Considerando a decomposição $P_\alpha = MG(\alpha)A_\alpha N_\alpha$ em (1.3), defina
$$\Gamma = \{g \in MG(\alpha) : \ \exists b \in A_\alpha N_\alpha, gb \in S\}.$$
pois $MG(\alpha)$ normaliza $A_\alpha N_\alpha$, Γ é um subsemigrupo com interior não vazio de $MG(\alpha)$;

4. Defina agora o subsemigrupo $T = \Gamma \cap G(\alpha)$ de $G(\alpha)$. Note que T tem interior diferente de vazio, pois dado $mg \in \text{int}\Gamma$, com $m \in M$ e $g \in G(\alpha)$, podemos assumir que m tem ordem finita e portanto para algum $k \in \mathbb{N}$
$$(mg)^k = m^k g_1 = g_1 \in G(\alpha),$$
uma vez que M normaliza $G(\alpha)$. Desta maneira
$$g_1 \in \text{int}(\Gamma \cap G(\alpha)) \implies \text{int}T \neq \varnothing.$$

Os grupos $MG(\alpha)$ e $G(\alpha)$ agem transitivamente na fibra $F_\alpha = \pi^{-1}(x_\alpha)$. O próximo Lema nos diz sobre os conjuntos de controle invariante de Γ e T na fibra F_α.

Lema 3.3. *Para o semigrupo $T \subset G(\alpha)$, $\alpha \in \Sigma \backslash \Theta(S)$ se verificam:*

1. $x_0 \in (C(T))_0$;

2. $\Theta(T) = \varnothing$.

Demonstração. 1. Seja $h \in A^+ \cap \text{int}S$, como acima. Decomponha $h = h_1 h_2$ com $h_1 \in A(\alpha)$ e $h_2 \in A_\alpha$.

Como $\alpha(\log h_2) = 0$, temos que
$$\alpha(\log h_1) = \alpha(\log h_1 + \log h_2) = \alpha(\log(h_1 h_2)) = \alpha(\log h) > 0,$$

e portanto $h_1 \in \mathfrak{a}(\alpha)^+$, câmara positiva de $\mathfrak{a}(\alpha)$. Procedendo como na Proposição 2.10, mostra-se que x_0 (visto como origem de F_α) é tal que $x_0 \in \mathrm{cl}(Tx)$, para todo $x \in F_\alpha$. Logo,

$$x_0 \in C(T) = \bigcap_{x \in F_\alpha} \mathrm{cl}(Tx).$$

Como $h_1 \in \mathrm{int}T$, temos que $x_0 \in (C(T))_0$;

2. Pela Proposição 4.1 de [10], temos que

$$\alpha \in \Theta(T) \iff \tilde{w}_\alpha x_0 \in (C(T))_0,$$

onde $\tilde{w}_\alpha$ é um representante de r_α em $M(\alpha)^*$, com $M(\alpha)^*$ normalizador de $A(\alpha)$ em $K(\alpha)$.

Por outro lado, $(C(T))_0 \subset C_0 \subset \mathbb{F}$ e pela mesma Proposição, temos que $\alpha \in \Theta(S)$, o que é um absurdo, pelas hipóteses.

□

Com isso se prova o seguinte lema.

Lema 3.4. *Dados $\alpha \in \Sigma \backslash \Theta(S)$ e $x \in C_0$, existe $d > 0$ tal que $\rho_\alpha(g, x) > d$ para todo $g \in S_x$.*

Demonstração. Supomos sem perda de generalidade que x é a origem de $\mathbb{F}$.

Como T é um subsemigrupo de $G(\alpha)$ e $G(\alpha)$ tem posto real um, pelo Corolário 3.1 temos que existe $d > 0$ tal que $\rho_\alpha(g, x) > d$, para todo $g \in T$. Note que podemos decompor

$$P = MAN = MA(\alpha)A_\alpha N(\alpha)N_\alpha = MA(\alpha)N(\alpha)A_\alpha N_\alpha,$$

pois $N(\alpha)$ comuta com A_α. Então, dado $g \in S_x \subset P$, temos que

$$g = m(hn)h_1 n_1,$$

com $m \in M$, $h \in A(\alpha)$, $n \in N(\alpha)$, $h_1 \in A_\alpha$ e $n_1 \in N_\alpha$. Então, pela propriedade de cociclo, segue a igualdade

$$\rho_\alpha(g, x) = \rho_\alpha(mhn, h_1 n_1 x)\rho_\alpha(h_1 n_1, x).$$

Mas analisando cada fator obtemos que

1. $\rho_\alpha(h_1 n_1, x) = 1$, pois como $h_1 n_1 \in P$, temos

$$\rho_\alpha(h_1 n_1, x) = e^{\alpha(\log h_1)} = e^0 = 1,$$

porque $h_1 \in A_\alpha$;

2. Como $h_1 n_1 \in P$, segue que

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(mhn, h_1 n_1 x) &= \rho_\alpha(mhn, x) \\ &= \rho_\alpha(mh, nx)\rho_\alpha(n, x) \\ &= \rho_\alpha(m, hnx)\rho_\alpha(h, nx)\rho_\alpha(n, x). \end{aligned}$$

   Note que como $hn \in P$ e $n \in P$,

   a) $\rho_\alpha(m, hnx) = \rho_\alpha(m, x) = 1$;

   b) $\rho_\alpha(h, nx) = \rho_\alpha(h, x)$;

   c) $\rho_\alpha(n, x) = 1$;

Assim, $\rho_\alpha(g, x) = \rho_\alpha(h, x)$. Agora como $g \in \mathrm{int}S$, perturbamos g para que exista k inteiro com $g_1^k \in \mathrm{int}T$ e $m^k = 1$, onde $g_1 = m(hn)$. Pela Proposição 3.3, concluímos que

$$d < \rho_\alpha(g_1^k, x) = \rho_\alpha(h^k, x) = \rho_\alpha(h, x)^k = \rho_\alpha(g, x)^k.$$

Logo, se $\rho_\alpha(g, x) < 1$, temos que

$$\rho_\alpha(g, x) > \rho_\alpha(g, x)^k > d.$$

Portanto $\rho_\alpha(g, x) > \min\{d, 1\}$, quando $g \in S_x$. □ □

Teorema 3.1. *Seja $S \subset G$ um semigrupo com $\mathrm{int}S \neq \varnothing$ e $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, $\Theta(S) \subset \Sigma$ seu tipo flag, onde Σ é o conjunto das raízes simples de G. Denotamos por C o conjunto de controle invariante de S na variedade flag maximal $\mathbb{F}$, então se $x_0 \in C_0$, temos que*

$$\inf_{g \in S} \rho_\alpha(g, x_0) > 0,$$

se $\alpha \in \Sigma \backslash \Theta(S)$. Além disso,

$$\inf_{g \in S} \rho_\alpha(g, x_0) = 0,$$

se $\alpha \in \Theta(S)$.

Demonstração. Dado $x_0 \in C_0$, temos que $S_x \neq \varnothing$. Pelo Lema 3.4, existe $d > 0$, tal que $\rho_\alpha(g, x) > d$, para todo $g \in S_x$. Aplicando então o Lema 3.2, asseguramos a existência de $c > 0$ tal que $\rho_\alpha(g, x) > c$, para todo $g \in S$, provando a primeira parte.

Para a prova da segunda parte assuma sem perda de generalidade que $x_0 \in C_0$ e que $A^+ \cap \mathrm{int}S \neq \varnothing$. Como $\alpha \in \Theta(S)$, pela Proposição 2.12, $\Lambda_N \cap r_\alpha \mathfrak{a}^+ \neq \varnothing$, ou seja, existe $H \in \mathfrak{a}$ e $n \in N$ de modo que $g = e^H n \in \mathrm{int}S$ e $H \in r_\alpha \mathfrak{a}^+$. Portanto, $\alpha(H) < 0$ e $\rho_\alpha(g, x_0) = e^{\alpha(H)} < 1$. Logo,

$$\rho_\alpha(g^k, x_0) = \rho_\alpha(g, x_0)^k \to 0,$$

quando $k \to +\infty$, ou seja,

$$\inf_{g \in S} \rho_\alpha(g, x_0) = 0,$$

se $\alpha \in \Theta(S)$. $\square$

O próximo exemplo mostra que o limitante inferior do teorema acima depende do ponto escolhido.

Exemplo 3.2. *Em* $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ *a única variedade flag é a linha projetiva* $\mathbb{P}$. *Seja* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *tal que*

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1,$$

o cociclo desse peso é $\rho_\lambda(g,[z]) = \dfrac{\|gz\|}{\|z\|}$, $z \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Considere o cone $W = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \ a \geqslant 0, |b| \leqslant a\}$, *e o seu semigrupo de compressão* $S_W = \{g \in \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R}) : \ gW \subset W\}$ *e o core do seu conjunto de controle invariante em* $\mathbb{P}$ *é* $C_0 = \{[(a,b)] \in \mathbb{P} : \ (a,b) \in \mathrm{int} W\}$.

Como $g \in S_W$, *temos que* $g(1,0) = (a,b) \in W \backslash \{(0,0)\}$, *logo,* $g(1,0) = h(1,0)$, *onde*

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

logo $h^{-1}g(1,0) = (1,0)$, *ou seja,* $h^{-1}g$ *é triangular superior com 1's na diagonal principal, ou seja,* g *tem a forma*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora como $g(1,1) \in W$ *e* $a > 0$, *obtemos que*

$$a(1+x) \geqslant 0 \Rightarrow 1 + x \geqslant 0 \Rightarrow -x \leqslant 1.$$

Do fato que $g(1,-1) \in W$, *obtemos que* $1 - x \geqslant 0$ *e*

$$a(1-x) \geqslant |a^{-1} - b(1-x)| \geqslant a^{-1} - |b|(1-x)$$

$$a^{-1} \leqslant (a + |b|)(1-x) \leqslant 4a \Rightarrow 4a^2 \geqslant 1 \Rightarrow a \geqslant 1/2.$$

Logo,

$$\|g(1,0)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Portanto, dado $z = [(a,b)] \in C_0$, *existe* $h \in S_W$ *com* $z = hz_0$, *onde* $z_0 = [(1,0)]$. *Como* $g \in S_W$, *temos que* $gh \in S_W$, *então*

$$\rho_\lambda(g,z) = \frac{\|gz\|}{\|z\|} = \frac{\|ghz_0\|}{\|hz_0\|} \geqslant \frac{1}{2\|h\|}.$$

Então no caso de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ *uma cota inferior é* $\dfrac{1}{2\|h\|}$.

4 Momentos e expoentes de Lyapunov

Este capítulo se dedica a uma das aplicações do Teorema 3.1, que é o estudo dos Momentos e expoente de Lyapunov de produtos aleatórios de uma sequência i.i.d. e relaciona com o raio espctral, que é definido como o supremo dos autovalores da aplicação.

4.1 Produto aleatório de sequências i.i.d.

Vamos considerar μ uma medida de probabilidade de Borel em um grupo de Lie G, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel. Definimos o espaço amostral (Ω, P), onde $\Omega = G^{\mathbb{Z}}$ e P é a medida produto. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, seja $y_n : \Omega \to G$ a variável aleatória que associa $\mathbf{y} \in \Omega$ com sua n-ésima coordenada. Então $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

Note que a lei de y_n é μ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De fato, dado $B \in \mathcal{B}$, temos que

$$P(y_n^{-1}(B)) = P(G^{n-1} \times B \times G^{\mathbb{Z}}) = \mu(B).$$

Dado $n > 1$, definimos

$$g_n = y_1 y_2 \dots y_n$$

o produto aleatório da sequência i.i.d.

Para todo $B \in \mathcal{B}$, consideraremos

$$\mu^n(B) := p_*(\mu \times \cdots \times \mu)(B) = \mu \times \cdots \times \mu(p^{-1}(B)),$$

onde $\mu \times \cdots \times \mu$ é a medida produto e $p(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

Definição 4.1. *Uma medida de Borel μ em G é dita **exposta** (étalée) se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que μ^n não é singular com respeito à medida de Haar dg.*

Proposição 4.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A medida μ é exposta;*
2. *Existe um inteiro m e um conjunto aberto U tal que $\mu^m \geqslant cdg$ em U;*
3. *Existe um inteiro m, tal que $\mathrm{supp}\mu^m$ tem interior não vazio;*
4. *O semigrupo*

$$S_\mu = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{supp}\mu^n$$

tem interior diferente de vazio.

A prova da proposição anterior se encontra em [3].

Definição 4.2. *Dados $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $p \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{F}$, definimos o **momento do expoente de Lyapunov** de uma sequência i.i.d. $(g_n)_n$ pela fórmula*

$$\gamma_\lambda(p, x) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}[\rho_\lambda^p(g_n, x)].$$

Teorema 4.1. *Seja μ uma medida exposta e seja $\mathbb{F}_\Theta$, $\Theta \subset \Sigma$, o tipo flag de S_μ. Dado $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, temos que:*

1. *Se λ pertence ao subspaço gerado por Θ, então existe $p < 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{F}$ temos que $\gamma_\lambda(p, x) > 0$;*

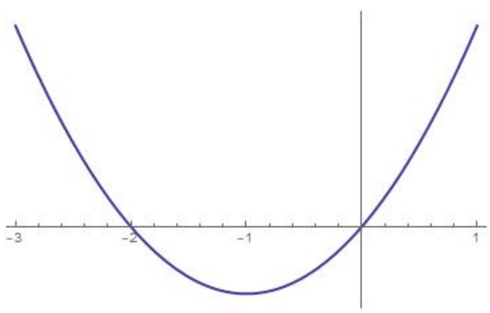
2. *Se λ pertence ao cone convexo $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$ gerado por $\Phi \backslash \Phi_\Theta$, então para cada $x \in C$ e $p < 0$, temos que $\gamma_\lambda(p, x) \leqslant 0$, onde C é o conjunto de controle invariante de S_μ em $\mathbb{F}$.*

Esse teorema nos fornece duas possibilidades para o momento do expoente de Lyapunov:

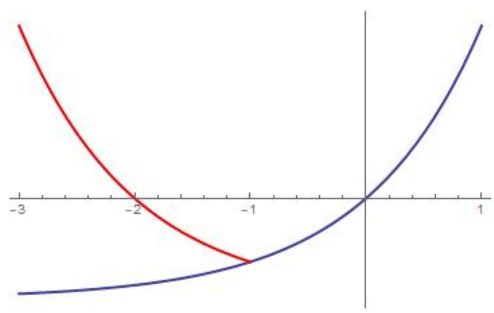
1. No caso em que $\lambda \in \mathrm{span}(\Theta)$ e $x \in \mathbb{F}$, a curva do momento em relação à p vai ser simétrica e coincidirá com o raio espectral;

2. No caso em que $\lambda \in \mathrm{cl}(\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$ e $x \in C$, o momento do expoente de Lyapunov vai ser uma curva crescente e vai ser diferente do raio espectral, pois o momento é analítico, mas o raio espectral não;

As próximas figuras são exemplos somente ilustrativos de momentos do expoente de Lyapunov (azul) comparado com o raio espectral (vermelho):



$\lambda \in \mathrm{span}(\Theta)$ e $x \in \mathbb{F}$



$\lambda \in \mathrm{cl}(\mathfrak{a}_\Theta^*)^+$ e $x \in C$

Referências

[1] San Martin, L.A.B. *Grupos de Lie*, Editora Unicamp, 2017;

[2] San Martin, L.A.B. *Álgebras de Lie*, Editora Unicamp, 2010;

[3] San Martin, L.A.B. *Semigroups in Semi-simple Lie groups*, A ser publicado;

[4] Knapp, A.W. *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser Boston, 1996;

[5] San Martin, L.A.B. *Invariant Control Sets on Flag Manifolds*, Math. Control Signal Systems (1993) 6:41-61;

[6] do Rocio, O.G.; San Martin, L.A.B. *Connected components of open semigroups in semi-simple Lie groups*. Semigroups Forum **69**, 2004, pp. 1-29.

[7] San Martin, L.A.B. *Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds*. J. Lie Theory **8**, 1998, pp. 335-350.

[8] San Martin, L.A.B.; Tonelli, P.A. *Semigroups actions on homogeneous spaces*. Semigroup Forum **50**, 1995, pp. 58-88.

[9] San Martin, L.A.B.; Laércio J. Santos. *Characteristic Functions of Semigroups in Semi-Simple Lie groups*. Forum Mathematicum, **31**, 2019, 815-842.

[10] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P.A. *Subgroups actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum Vol. 50 (1995) 59-88;

APÊNDICE A – Variedades diferenciáveis

Definição A.1. *Seja X um espaço topológico, dizemos que X é uma* ***variedade topológica*** *de dimensão m se:*

1. *X é Hausdorff, ou seja, dados $p, q \in X$, existem abertos disjuntos U e V, tais que $p \in U$ e $q \in V$;*

2. *X tem base enumerável de abertos, ou seja, existe uma coleção enumerável de abertos de X tal que todo aberto é a união enumerável de abertos dessa coleção;*

3. *para cada $p \in X$, existem abertos $U \subset X$ contendo p, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ e um homeomorfismo $\phi : U \to \tilde{U}$.*

Cada homeomorfismo da definição anterior é chamado de **carta local**. Uma coleção de cartas locais $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to \tilde{U}_i\}_{i \in I}$ é chamado de **atlas**, se $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dados ϕ_i, ϕ_j em um atlas, chamamos de **mudança de coordenada** os homeomorfismos

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_i \to \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_j.$$

Note que cada mudança de coordenada é uma função da qual tanto o domínio quanto o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}^m$, assim podemos falar de diferenciabilidade das mudanças de coordenada. Dizemos que um atlas é de classe C^r se cada mudança de coordenada é de classe C^r.

Definição A.2. *Sejam X uma variedade topológica e $\mathcal{A}$ um atlas dessa variedade, dizemos que o par $(X, \mathcal{A})$ é uma variedade de classe C^r se cada mudança de coordenada de $\mathcal{A}$ é de classe C^r.*

Geralmente o atlas usado já está implícito, então dizemos somente que X é a variedade diferenciável.

Definição A.3. *Sejam X e Y variedades de dimensão m e n, respectivamente, e classe C^r. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é de classe C^s, $s \leqslant r$, se para todo $p \in X$ existem cartas locais $\phi : U \subset X \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \subset Y \to \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ nos seus respectivos atlas tais que*

1. *$p \in U$ e $f(p) \in V$;*

2. *$f(U) \subset V$;*

3. *a função $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \to \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^s.*

Note que mais uma vez as propriedades diferenciáveis da variedade estão ligadas com propriedades diferenciáveis entre dois espaços euclidianos que estamos mais familiarizados. E também agora é possível perceber a relação entre a estrutura diferenciável de X e o atlas escolhido, já que as cartas locais da definição estão no atlas de cada variedade.

Agora para entendermos como funciona a derivada de um função entre variedades precisamos construir o que chamamos de espaço tangente. Dados $x \in X$, $\phi : V \to \tilde{V}$ uma carta local de x e $\epsilon > 0$, seja T_x o conjunto de todas as curvas $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ com $\alpha(t) \in V$, $\alpha(0) = x$ e tal que $\beta = \phi \circ \alpha$ é diferenciável. No conjunto T_x definimos a relação de equivalência $\sim$ de modo que

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff \beta_1'(0) = \beta_2'(0).$$

Definimos então o **espaço tangente** de x em X como

$$T_xX = T_x/\sim .$$

Dado $\alpha \in T_x$, denotaremos por $[\alpha]$ sua classe de equivalência em T_xX.

O espaço tangente é um espaço vetorial de dimensão igual à dimensão da variedade que na verdade não depende da carta escolhida.

Definição A.4. *Dado $f : X \to Y$ uma função diferenciável entre variedades X e Y, definimos a **derivada** de f no ponto $x \in X$ como a aplicação linear $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ de modo que*

$$df_x([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$