UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

THIAGO FELIPE DA SILVA

Cocaracteres Y-Próprios Graduados de $UT_m(F)$

Campinas

2022

Thiago Felipe da Silva

Cocaracteres Y-Próprios Graduados de $UT_m(F)$

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov

Coorientador: Lucio Centrone

Este trabalho corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Thiago Felipe da Silva e orientado pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Campinas

2022

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Silvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

	Silva, Thiago Felipe da, 1990-
Si38c	Cocaracteres Y-próprios graduados de UTm(F) / Thiago Felipe da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2022.
	Orientador: Plamen Emilov Kochloukov. Coorientador: Lucio Centrone. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Matrizes triangulares superiores. 2. PI-álgebras. 3. Identidades polinomiais graduadas. 4. Cocaracter. 5. Dimensão de Gelfand-Kirillov. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Centrone, Lucio, 1983-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Y-proper graded cocharacters of UTm(F)
Palavras-chave em inglês:
Upper triangular matrices
PI-algebras
Graded polynomials identities
Cocharacter
Gelfand-Kirillov dimension
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Artem Lopatin
Fabrizio Martino
Thiago Castilho de Mello
Antonio Ioppolo
Data de defesa: 10-11-2022
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-7361-9507
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/7929296220612702

Tese de Doutorado defendida em 10 de novembro de 2022 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). ARTEM LOPATIN

Prof(a). Dr(a). FABRIZIO MARTINO

Prof(a). Dr(a). THIAGO CASTILHO DE MELLO

Prof(a). Dr(a). ANTONIO IOPPOLO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico esse trabalho (In memoriam) ao meu pai, Manoel Joaquim da Silva.

Agradecimentos

Existem pessoas que foram coautoras na construção de nossa própria identidade, suas ideias foram basilares e norteadoras para ser quem somos. A felicidade de citar os nomes de algumas delas ameniza o sentimento de injustiça por aqueles omitidos.

Meus Agradecimentos

A eu mesmo, Thiago Felipe da Silva, fui forte e sou merecedor dessa conquista. Foram tantas noites indormidas e demônios vencidos... A sistemática desvalorização, desmantelo e falta de respeito para com a educação brasileira destrói qualquer sonho de quem um dia almejou ser um cientista. A ciência, com ênfase, a matemática, não deve ser um sacerdócio, também precisamos ganhar dinheiro para viver, e viver bem. Não obstante, mostrei minha revelia perante o sistema ... *'Viajante, vá e diga que eu venci!'.*

À minha família pelo apoio e amor incondicional. Especialmente, à minha mãe, Hilda Luiz, e às minhas irmãs Fabiana, Deia, Paula e Lurdes. Essas pessoas são a minha fortaleza.

Ao meu scientific advisor, Lucio Centrone. Fazer pesquisa científica é tentar se guiar pela a luz da razão no vasto rincão escuro e labiríntico da ignorância, é caminhar na fronteira entre o conhecido e o desconhecido e tentar ir um pouco além. Por vezes é desesperador, também empolgante, não ter as repostas prontas, mas, sim, ser você o incumbido a fornecê-las. Nesse caminho desafiador, Lucio foi a minha luz guia,ombro e porto seguro, com quem sempre pude contar, para além de sua importância primordial e norteadora no desenvolvimento dessa tese, como meu orientador, ele tem sido um amigo e uma figura paterna nos momentos difíceis. Sua cobrança foi sempre através da própria perfeição, sempre com um olhar bondoso e cheio de amor. A ele serei eternamente grato. Meu orientador, meu amigo.

Ao meu formal orientador da presente tese, Plamen Emilov Kochloukov. Sempre pronto e prestativo, tem sido uma honra trabalhar com ele. Sua excelência com a qual conduz seus trabalhos é admirável.

Ao meu eterno professor, tutor e amigo, Daniel Cordeiro de Morais Filho. Minha vida jamais seria a mesma sem sua gigantesca contribuição.

Ao meu ex-professor e ex-orientador, das disciplinas, do TCC e de minha dissertação de mestrado, Antônio Pereira Brandão Júnior. Esse é perfeito! Ele foi a pessoa que me ensinou a pensar ciência.

Aos meus professores do colegial e entusiastas de minha carreira, Josenildo Cunha Lima, Maria Helena e Neném d'Biluca.

Aos meus amigos *Os Otários*, Danilo, Matheus, Lobo, Guenza, Guilherme, Zé, Labiak, Leonardo.

Aos meus amigos, Rodolfo Lobo e Paula Alfaro, pela alegria e pensamentos compartilhados.

Aos meus amigos latinos do *Futebol da moradia* e do *Boca Júnior*, dentre os quais cito Carlos Capal e Julians, eles mantiveram o espírito da conquista vivo em coração.

Aos meus amigos da dança e das noitadas de Barão Geraldo, esses me trouxeram leveza sempre que a coisa complicava. Em especial, agradeço ao Douglas e ao Mauro, sempre será bom tomar uma cerva gelada com eles.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Todo cientista é como um sonho de criança, que em todo sonho, crianças são.

Resumo

Sejam F um corpo de caracteristica 0 e $UT_m(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem m com entradas em F. Em 2012, Centrone e Cirrito deram uma completa descrição das codimensões e cocaracteres Y-próprios graduados da álgebra $UT_m(F)$ dotada da $\mathbb{Z}_m$-graduação elementar induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, m-j)$, onde $m = 2, 3, 4$ e $j = 1$. Posteriormente, em 2015, os mesmos autores generalizaram esses resultados para $m = 2, 3, 4, 5$ e $j = 2$. Nesse trabalho, obtemos uma generalização dos resultados supracitados, mais precisamente, obtemos uma descrição dos cocaracteres Y-próprios graduados da álgebra $UT_m(F)$ dotada da G-graduação elementar induzida pela m-úpla da forma $\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \ldots, g_L^{l_L})$, onde G é um grupo finito. Além disso, investigamos a dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra relativamente livre Y-propria da álgebra $UT_m(F)$ G-graduada.

Palavras-chave: Matrizes triangulares superiores; PI-álgebras; Identidades polinomiais graduadas; Cocaracter, Dimensão de Gelfand-Kirillov.

Abstract

Let F be a field of characteristic 0 and let $UT_m(F)$ be the algebra of upper triangular matrices of order m with entries in F. In 2012, Centrone and Cirrito provided a complete description of the Y-proper graded cocharacters and codimensions of the algebra $UT_m(F)$ endowed with an elementary $\mathbb{Z}_m$-grading induced by the m-tuple $\varepsilon = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, m-j)$, where $m = 2, 3, 4$ and $j = 1$. Later, in 2015, the same authors generalized these results for $m = 2, 3, 4, 5$ and $j = 2$. In this work, we obtain a generalization of the above-mentioned results, more precisely, we obtain a description of the Y-proper graded cocharacters of the algebra $UT_m(F)$ endowed with an elementary G-grading induced by the m-tuple $\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \ldots, g_L^{l_L})$, where G is a finite grupo. Furthermore, we investigate the Gelfand-Kirillov dimension of the Y-proper relatively free G-graded algebra of $UTm(F)$.

Keywords: Upper triangular matrices; PI-algebras; Graded polynomials identities; Character; Gelfand-Kirillov dimension.

Sumário

Introdução

O conceito de identidades polinomiais surgiu, ainda que de forma implícita, por volta da década de 30 do século XX com os trabalhos de M. Dehn e W. Wagner (vide [22], [69]). Posteriormente, na década de 50 do mesmo século, esse objeto mostrou-se campo frutífero e área (PI-teoria) de notáveis trabalhos de renomados matemáticos como Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov (ver [42], [45], [55] e [34]).

Consideremos a álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$ livremente gerada sobre o corpo F por X, onde X é um conjunto infinito de variáveis não comutativas. Dado uma F-álgebra A, uma *identidade polinomial* de A é um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n)\in F\langle X\rangle$ tal que

$$f(a_1,\ldots,a_n)=0,$$

para todo $a_1,\ldots,a_n\in A$. As álgebras que admitem identidades polinomiais não nulas são chamadas de *PI-álgebras*. Álgebras comutativas, de dimensão finita e nilpotentes são exemplos clássicos de PI-álgebras.

As identidades polinomiais são de grande importância na matemática, sendo ferramenta importante no estudo estrutural de álgebras e anéis (ver [33], [40]). Um dos resultados clássicos que impulsionaram os estudos sobre identidades polinomiais, provado em 1950, foi o *Teorema de Amitsur-Levitzki*; este estabeleceu que a álgebra $M_m(F)$ das matrizes $m\times m$ sobre um corpo F satisfaz a *identidade standard de grau* $2m$ (vide [3]). O conjunto formado por todas as identidades polinomiais de uma certa álgebra A é denotado por $T(A)$ e denominado por *T-ideal*. Em 1973, Razmyslov provou que o T-ideal $T(M_2(F))$ é finitamente gerado para o caso de corpos de característica zero, determinando uma base com 9 identidades (ver [61]). Posteriormente, em 1981, Drensky mostrou que $T(M_2(F))=\langle s_4(x_1,x_2,x_3,x_4),[[x_1,x_2]^2,x_3]\rangle^T$, também para corpos de característica zero (vide [31]). Em 2001, P. Koshlukov generalizou o resultado obtido por Drensky para corpos infinitos de característica diferente de 2 (ver [48]). Dentre todas as questões levantadas na PI-teoria, a questão da descrição de um conjunto gerador das identidades polinomiais de uma certa PI-álgebra é uma das mais importantes, todavia, essa questão tem sido solucionada apenas para alguns exemplos em específico, sendo o caso geral uma questão em aberto, a saber, a descrição das identidades polinomiais de $M_3(F)$ com o corpo F infinito é desconhecida até o presente momento.

Por volta de 1950, Specht conjecturou, sobre corpos de característica zero, que as álgebras associativas cumprem a *propriedade de finitude da base de suas identidades polinomiais*. Essa conjectura ficou conhecida como *problema de Specht*, a qual veio a ser solucionada de forma positiva apenas na década de 80 por Kemer.

(Problema de Specht:) *Toda variedade de álgebras associativas tem base finita?* É importante destacar que o *problema de Specht* generaliza-se para qualquer álgebra.

Extensivas investigações por volta das décadas de 60 e 70 acerca das identidades polinomiais da álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_m(F)$ revelaram a sua extrema importância na classe das PI-álgebras. Em síntese, as identidades polinomiais de $UT_m(F)$ podem servir para mensurar a complexidade das identidades polinomiais de uma álgebra finitamente gerada que não satisfaz identidades polinomiais matriciais, assim como as identidades de $M_m(F)$ podem servir para mensurar a complexidade das identidades de uma álgebra arbitrária. A saber, sendo A uma álgebra que satisfaz identidades polinomiais não-matriciais, isto é, identidades que não são satisfeitas pela a álgebra $M_2(F)$ das matrizes de ordem 2 com entrada em F, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T(F)^m \subseteq T(A) \subseteq T(F),$$

onde $T(F)$ é o ideal gerado pelo comutador $[F\langle X\rangle, F\langle X\rangle]$ (vide [52]). Em [56], Maltsev provou que

$$T(F)^m = T(UT_m(F)),$$

onde $T(UT_m(F))$ é o T-ideal das identidades polinomiais da álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores com entrada em F. Genov, em [36] e [35], e Latyshev, em [53], provaram que toda álgebra que satisfaz as identidades de $UT_m(F)$ cumpre a propriedade de finitude da base das identidades polinomiais, levantada por Specht. Latyshev, em [54], e Popov, em [58], generalizaram esse último resultado para PI-álgebras satisfazendo as identidades que são consequências do produto de comutadores triplos

$$[x_1, x_2, x_3] \cdots [x_{3m-2}, x_{3m-1}, x_m] = 0,$$

o qual, por sua vez, gera o T-ideal das identidades polinomiais de $UT_m(E)$, a álgebra das matrizes triagulares superiores com entrada na álgebra de *Grassmann* E de dimensão infinita.

Desde sua conjectura até 1987, quando Kemer desenvolveu sua teoria estrutural sobre os T-ideais na linguagem das *identidades graduadas* (vide [46], e também seu livro [1]), onde ele solucionou positivamente o problema de Specht para qualquer álgebra sobre corpos de característica zero, os resultados supracitados devidos a Drensky, Genov, Krakowski, Latyshev, Popov e Regev constituíam todos os exemplos conhecidos de PI-álgebras cumprindo a propriedade de finitude da base de suas identidades polinomiais.

Para além dos fatos mencionados anteriormente, as álgebras das matrizes triangulares superiores $UT_m(F)$ se demonstram de grande importância, também, no estudo das variedades de álgebras associativas. Por exemplo, mostra-se que essas álgebras, bem como as álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos, são geradoras das chamadas *variedades minimais* com expoentes 'fixados', objeto de grande destaque no estudo das variedades de álgebras associativas. Por consequência disso, tem-se que os ideais $T(UT_m(F))$ e $T(UT_m(E))$, onde E denota a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, são ideais maximais com expoentes fixados (detalhes em [30]). Motivado por esses resultados, a álgebra $UT_m(F)$ será objeto de interesse central nessa tese.

O desenvolvimento do estudo das identidades polinomiais de uma PI-álgebra passa pela teoria das representações do grupo simétrico S_n.

Consideremos A uma PI álgebra, o grupo simétrico S_n e o espaço vetorial P_n com base no conjunto $\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$. O espaço P_n tem uma estrutura de S_n-módulo à esquerda, em verdade, na hipótese do corpo base ter característica zero, P_n é isomorfo ao módulo regular de S_n, e assim as identidades polinomiais multilineares geram todas as identidades polinomiais de A. Neste caso, afim de estudar o comportamento assintóticos das identidades polinomiais de A, estudamos o espaço quociente

$$P_n(A) \coloneqq \frac{P_n}{P_n \cap T(A)},$$

o qual tem uma estrutura de S_n-módulo à esquerda (aquela induzida por P_n). A *n-ésima codimensão* de uma álgebra A, denotada por $c_n(A)$, é definida como sendo a dimensão de $P_n(A)$ sobre o corpo base F e o *n-ésimo cocaracter* de A, denotado por $\chi_n(A)$, é definido como sendo o n-ésimo caracter do S_n-módulo $P_n(A)$.

Os cocaracteres e as codimensões são ferramentas importantes na obtenção de informações acerca das estruturas das PI-álgebras. A saber, o *Strip Theorem*, ver [40], limita a quantidade de "linhas" do cocaracter de uma PI-álgebra por sua dimensão, enquanto que o teorema de *Regev*, em [40], afirma que as sequências de codimensões das PI-álgebras são exponencialmente limitadas. De forma objetiva, os cocaracteres "medem" o conjunto dos polinômios que não são identidades e as codimensões, o crescimento delas.

No sentido de estudar as identidades polinomiais de PI-álgebra A, é conveniente equipá-la com uma estrutura de grupo e estudar um tipo de identidade mais "fraca", as denominadas *identidades graduadas*. Sejam A uma álgebra e G um grupo. Uma *G-graduação* em A é uma família $\left\{A^g\right\}_{g\in G}$ de subespaços vetoriais de A tais que

$$A = \oplus_{g\in G} A^g \qquad \text{e} \qquad A^g A^h \subseteq A^{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Sendo $X = \bigcup\limits_{g\in G} X^g$ uma família disjunta de conjuntos infinitos enumeráveis de variáveis não comutativas, a álgebra associativa livre livremente gerada por X sobre o corpo F, denotada por $F\langle X|G\rangle$, é um exemplo de álgebra graduada, onde as componentes $F\langle X|G\rangle^g$ são os subespaços gerados pelos monômios de grau g.

Definição 1. *Sendo A uma álgebra G-graduada, um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X|G\rangle$ é dito ser uma* identidade polinomial G-graduada *de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in \cup_{g\in G} A_g$, tais que $a_k \in A^{\deg x_k}$ para cada $k = 1, \ldots, n$.*

As Identidades polinomiais graduadas têm se mostrado objeto de grande relevância no estudo das identidades polinomiais ordinárias. Por exemplo: a teoria estrutural de Kemer sobre os T-ideais foi desenvolvida usando-se as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas (vide [46]); as identidades graduadas podem influenciar diretamente nas identidades ordinárias, sendo G é um grupo abeliano finito e A é uma álgebra G-graduada, então A é uma PI-álgebra se, e somente se, a componente A^{1_G} é uma PI-álgebra (vide [5] e [9]).

Uma graduação em $UT_m(F) = \oplus_{g\in G} A^g$ na álgebra das matrizes triangulares superiores é dita ser *elementar* se existe uma m-úpla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ de elementos do grupo G de tal forma que cada componente homogênea A^g é o subespaço gerado pelas matrizes elementares e_{ij}, tais que $g = g_i^{-1} g_j$, com $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ e $i \leq j$. Valenti e Zaicev provaram, em 2003, que as graduações em $UT_m(F)$ por grupos abelianos finitos, no caso do corpo base ser algebricamente fechado e de característica zero, resumem-se às graduações elementares, posteriormente, em 2007, os mesmos autores generalizaram esse último resultado para grupos e corpos arbitrários (vide [66] e [67]). Em 2004, Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti provaram, para corpos infinitos, que se G é um grupo finito, então existem $|G|^{m-1}$ graduações elementares não isomorfas em $UT_m(F)$, e que essas graduações podem ser diferenciadas por suas identidades graduadas (vide [27]). Nesse mesmo trabalho, os autores deram uma completa descrição de uma base, formada por tipos especiais de polinômios multilineares, das identidades polinomiais graduadas para cada uma dessas graduações.

Para o caso graduado, assim como no caso ordinário, tem-se, também, os conceitos de codimensões e cocaracteres (graduados). Consideremos G um grupo, A uma álgebra G-graduada e o subespaço vetorial

$$P_n^G = span\langle x_{\sigma(1)}^{g_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{g_n} \mid g_i \in G, \sigma \in S_n\rangle$$

de $F\langle X|G\rangle$. O espaço P_n^G e, portanto, o espaço quociente

$$P_n^G(A) := \frac{P_n^G}{P_n^G \cap T_G(A)}$$

possui uma estrutura natural de S_n-módulo à esquerda. O n-ésimo *S_n-cocaracter G-graduado* de A, denotado por $\chi_n^G(A)$, é definido como sendo o S_n-caracter do espaço quociente $P_n^G(A)$ e *n-ésima codimensão G-graduada* de A, denotada por $c_n^G(A)$, é definida como sendo a dimensão do espaço $P_n^G(A)$ sobre F. Os cocaracteres e as codimensões graduado(a)s têm sido investigados para algumas PI-álgebras clássicas, por exemplo, podemos citar: [65] e [12] para a álgebra $UT_2(F)$; [19] para $UT_3(F)$;

[24] e [25] para a álgebra de Grassmann E de dimensão infinita. Enfatizamos que o nosso interesse nessa tese é o estudo dos cocaracteres graduados de $UT_m(F)$. Na literatura, o cálculo explícito de suas multiplicidades é conhecido apenas para $m = 2$. Em 2012, Boumova e Drensky exibiram um algorítimo que fornece a função geradora da sequência de cocaracter de $UT_m(F)$ (vide [11]). Um fato interessante é que as multiplicidades da sequência de cocaracteres graduados limitam superiormente as multiplicidades da sequência de cocaracteres ordinários, bem como a sequência de codimensões graduadas limitam, também, superiormente a sequência de codimensões ordinárias. Não obstante, a descrição explícita desses objetos é uma tarefa árdua e não solucionada completamente, sendo conhecida apenas para algumas álgebras em particular. Em verdade, a descrição explícita dos cocaracters graduados é desconhecida para $UT_m(F)$ com $m \geq 4$, o que evidência a dificuldade de trabalhar com esse objeto. O trabalho [12], devido a Centrone, sugere que os cocaracteres graduados se relacionam com os chamados *cocaracteres Y-próprios graduados*. Devido a essa motivação, o avanço nessa linha de estudo depende dos resultados obtidos acerca dos caracteres Y-próprios graduados. Na presente tese, estudaremos os caracteres Y-próprios graduados da álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores com entradas no corpo F.

Consideremos um grupo finito $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ e $l_{g_1}, \ldots, l_{g_r} \in \mathbb{N}$. Olhemos para as variáveis na álgebra $F\langle X|G\rangle$ da seguinte forma:

$$x_1^{g_1}, \ldots, x_{l_{g_1}}^{g_1}, x_{l_{g_1}+1}^{g_2}, \ldots, x_{l_{g_1}+l_{g_2}}^{g_2}, \ldots,$$

e denotamos por $P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}$ o espaço vetorial linear gerado por elas. Mostra-se que esse espaço vetorial é um $S_{l_{g_1}} \times \cdots \times S_{l_{g_r}}$-módulo à esquerda, sendo o mesmo válido para o espaço quociente

$$P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A) := \frac{P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}}{P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}} \cap T_G(A)}.$$

Em 1996, Di Vincenzo demonstrou que os cocaracteres e codimensões graduados de uma PI-álgebra podem ser descritos em termos dos $S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$-cocaracteres e das $S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$-codimensões do espaço $P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A)$ (vide [23]), respectivamente.

A principal ferramente dessa tese é a *álgebra dos polinômios Y-próprios*. Sua abordagem, no caso ordinário, foi iniciada por Malcev e Specht em 1950. Em [29], Drensky também fez uso desse objeto no tratamento dos T-ideais da álgebra associativa livre $F\langle X|G\rangle$. No que segue, escrevemos a álgebra associativa livre $F\langle X|G\rangle$ sob a forma $F\langle Y \cup Z\rangle$, onde $Y = X^1$ e $Z = \cup_{g\in G, g\neq 1} X^g$, aqui 1 denota o elemento neutro do grupo G. *Os polinômios Y-próprios* são definidos como sendo os elementos da subálgebra unitária B, gerada pelos elementos de Z e por todos os comutadores não nulos. Denotando por Γ_n^G o conjunto dos polinômios Y-próprios multilineares de P_n^G, tem-se que Γ_n^G é um S_n-submódulo à esquerda de P_n^G, sendo o mesmo válido para o espaço quociente

$$\Gamma_n^G(A) := \frac{\Gamma_n^G}{\Gamma_n^G \cap T_G(A)}.$$

O n-ésimo *cocaracter Y-próprio graduado*, denotado por $\xi_n^G(A)$, e a n-ésima *codimensão Y-própria graduada*, denotada por $\gamma_n^G(A)$, de A são definidos como sendo o S_n-cocaracter graduado e S_n-codimensão graduada do espaço $\Gamma_n^G(A)$, respectivamente.

Denotando por $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}$ o conjunto de todos os polinômios Y-próprios multilineares de $P^G_{m_1,\ldots,m_r}$, tais que $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$, tem-se que $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}$ é um $S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$-submódulo à esquerda de $P^G_{m_1,\ldots,m_r}$, sendo o mesmo é válido para o espaço quociente

$$\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}(A) := \frac{\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}}{\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r} \cap T_G(A)}.$$

Seguindo o trabalho [23], mostra-se que os cocaracteres e codimensões Y-próprios graduados de uma PI-álgebra podem ser descritos em termos dos $S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$-cocaracteres, denotados por $\xi^G_{m_1,\ldots,m_r}(A)$, e das $S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$-codimensões, denotadas por $\gamma^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A)$, do espaço $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}(A)$, respectivamente.

Em 2012, Centrone e Cirrito deram uma completa descrição das codimensões e cocaracteres Y-próprios graduados de $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$, com $m = 2, 3, 4$ (ver [16]). A saber, os autores obtiveram o seguinte resultado.

Teorema. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Considere $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-upla $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$. Então, para quaisquer $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_{j=2}^{m} n_j(j-1) \leq m-1$, temos*

$$\begin{aligned} \xi^G_{n_1,\ldots,n_m}(A) &= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in S_{\tilde{n}}} \sum_{s_1+\cdots+s_k=n_1} (\boxed{s_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{s_k})^{\uparrow S_{n_1}} \\ &\otimes (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_2}} \otimes \cdots \otimes (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_m}} \end{aligned}$$

Posteriormente, em 2015, os mesmos autores generalizaram esse último resultado para o seguinte.

Teorema. *Seja $m \geq 2$. Consideremos a álgebra $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-2)$. Então, para quaisquer $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_{j=2}^{m} l_j(j-1) \leq m-2$, temos*

$$\xi^G_{n_1,\ldots,n_m}(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in S_{\tilde{n}}} \sum_{s_1+\cdots+s_k=n_1}$$

$$
\begin{aligned}
&\left([\lambda(s_1)] \otimes \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ \dots\ & \ \\ \hline\end{array} \otimes \cdots \otimes \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ \dots\ & \ \\ \hline\end{array}\right)^{\uparrow S_{n_1}} \\
\otimes \quad & (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_2}} \otimes \cdots \otimes (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_m}}
\end{aligned}
$$

onde $\lambda(s_1)$ *é a partição* $(s_1 - 1, 1)$ *associada com cocaracter irredutível*

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ .
$$

Nesta, apresentamos uma generalização de vários resultados contidos trabalhos [16] e [17], dos autores Centrone e Cirrito, sendo o mais importantes uma completa generalização dos resultados supratranscritos. Mais precisamente, damos uma completa descrição dos cocaracteres da álgebra $UT_m(F)$ com uma G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \ldots, g_L^{l_L})$, onde G é um grupo finito. Além disso, também fornecemos alguns resultados sobre o crescimento das identidades polinomiais homogêneas da álgebra $UT_m(F)$ através da dimensão de Gelfand-Kirillov de sua álgebra relativamente livre G-graduada em um conjunto finito de variáveis. Por último, conjecturamos a independência da graduação.

Essa tese está organizada como segue.

No primeiro capítulo, dissertamos sobre as PI-álgebras, definições, exemplos e propriedades clássicas acerca de suas identidades.

No segundo capítulo, apresentamos a teoria clássica das representações de grupos, dando ênfase à teoria das representações do grupo simétrico S_n e sua estreita relação com as identidades polinomiais multilineares de uma PI-álgebra.

No terceiro capítulo, abordamos: o conceito de graduação de uma álgebra por um grupo e suas identidades graduadas; as codimensões e expoentes de uma PI-álgebra; as variedades minimais e o Teorema de Kemer. Em suma, esses resultados mostram a importância da álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_m(F)$, a qual é objeto central nessa tese.

No quarto capítulo, apresentamos as contribuições dessa tese, sendo organizado como segue:

Na Seção 4.1, apresentamos o trabalho [27], devido a Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti, este fornece resultados e ferramentas essenciais no sentido técnico para o desenvolvimento efetivo dos cálculos precedentes aos resultados principais dessa tese.

Na Seção 4.2, apresentamos os trabalhos [16] e [17], devidos a Centrone e Cirrito, estes foram basilares e norteadores para o desenvolvimento dessa tese.

Na Seção 4.3, apresentamos as primeiras contribuições dessa tese, dentre estas, destacam-se a Proposição 21 e o Teorema 55. A Proposição 21 apresenta uma completa generalização do Lema 7.3 do trabalho [19] e dos Lemas 3.6 e 3.8 dos trabalhos [16] e [17], respectivamente. Enquanto que o Teorema 55, um dos três resultados principais dessa tese, apresenta uma completa generalização dos Teoremas 3.7 e 3.9, resultados principais dos trabalhos [16] e [17], respectivamente.

Na Seção 4.4, apresentamos o segundo resultado principal dessa tese, a Proposição 22, esta apresenta uma caracterização das sequências ε-boas, pre-requisito básico no cálculo dos cocaracteres.

Na Seção 4.5, apresentamos o terceiro resultado principal dessa tese, o Teorema 62, que calcula a dimensão de Gelfand-Kirillov de $B_r^G(UT_m(F))$, a álgebra Y-própria relativamente livre de $UT_m(F)$ em r-variáveis.

Todos os resultados contidos nas Seções 4.3, 4.4 e 4.5 constam no trabalho [18], devido a Centrone e ao autor dessa tese, submetido à publicação.

1 Identidades Polinomiais e PI-Álgebras

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e resultados básicos acerca das *PI-álgebras* —álgebras que satisfazem identidades polinomiais não nulas— esses resultados serão necessários para o desenvolvimento do presente trabalho.

A menos de menção explícita do contrário, doravante F denotará um corpo e toda estrutura algébrica abordada será considerada sobre F.

1.1 Álgebras

Iniciaremos por apresentar o conceito e alguns exemplos importantes de F-álgebras.

Definição 2. *Seja A um F-espaço vetorial. Diremos que o par $(A, *)$ é uma F-*álgebra *se $* : A \times A \longrightarrow A$ é uma operação bilinear, isto é, "$*$" satisfaz :*

1. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$;
2. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$;
3. $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in F$.

Como A comporta a operação de adição "$+$", é conveniente nos referirmos a "$*$" como sendo a operação *multiplicação ou produto*. Por simplicidade, denotaremos $a * b$ por ab, para quaisquer a e b em A, bem como denotaremos a F-álgebra $(A, *)$ apenas por A, e, quando a ela nos referirmos, deveremos usar a expressão *álgebra*, ao invés de *F-álgebra A*, ficando assim subentendido que A tem uma estrutura de álgebra sobre o corpo F.

Definimos o produto em uma álgebra de foma indutiva, isto é, para $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$, o elemento $a_1 \cdots a_n a_{n+1}$ é definido como sendo $(a_1 \cdots a_n)a_{n+1}$. Além disso, diremos que um subconjunto $\beta \subseteq A$ é uma *base* para A se β for base de A como espaço vetorial. Por último, a *dimensão* de A, denotada por $\dim_F A$, é definida como sendo a dimensão de A como espaço vetorial sobre F.

Definição 3. *Seja A uma álgebra. Então, diremos que A é:*

1. Associativa*, se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$, isto é, o produto em A é associativo;*

2. Comutativa*, se* $ab = ba$ *para quaisquer* $a, b \in A$*, ou seja, o produto em* A *é comutativo;*

3. Unitária *(ou com unidade), se existe* $1 \in A$ *tal que* $1a = a1 = a$ *para qualquer* $a \in A$*, isto é, o produto em* A *possui elemento neutro. O elemento* 1 *é referido como sendo* a unidade de A*;*

4. Álgebra de Lie*, se* $a^2 = 0$ *e* $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (Identidade de Jacobi) *para quaisquer* $a, b, c \in A$*.*

Definição 4. *Seja* A *uma álgebra. Dizemos que:*

1. *Um elemento* $a \in A$ *é* idempotente *se* $a^2 = a$*;*

2. *Um elemento* $a \in A$ *é* nilpotente *se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a^n = 0$*. Se todos os elementos de* A *são nilpotentes, dizemos que* A *é uma álgebra* nil*. Caso exista* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a^n = 0$ *para todo* $a \in A$*, então dizemos que* A *é nil de grau limitado. O menor natural* n *com esta propriedade é chamado de* expoente nil de A*;*

3. *Uma álgebra* A *chama-se* nilpotente *se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_1 \cdots a_n = 0$ *para todo* $a_1, \ldots, a_n \in A$*. Neste caso, dizemos que o menor natural* n *com esta propriedade é o* índice de nilpotência *de* A*.*

Sendo A uma álgebra unitária, é fácil ver que a unidade 1 é única. Nesse caso, podemos identificar, de forma natural, o elemento $\lambda 1$ de A por λ, e o conjunto $\{\lambda 1 \mid \lambda \in F\}$ por F, e assim observar que o corpo F está imerso na álgebra A. Um elemento $c \in A$ é dito ser *invertível* se possui inverso multiplicativo, isto é, existe $c^{-1} \in A$ tal que $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$. Particularmente, se A for associativa, então tem-se que A é um anel com respeito à adição e à multiplicação da álgebra A.

Salvo menção explicita em contrário, a partir de agora, sempre que nos referirmos a uma álgebra, esta irá significar uma álgebra associativa unitária.

Exemplo 1. *Seja* F *um corpo. Então,* F *é uma álgebra associativa, comutativa e unitária, cuja dimensão (sobre* F*) é* 1*.*

Exemplo 2. *Seja* m *um número natural. O conjunto* $M_m(F)$ *de todas as matrizes* $m \times m$ *com entradas em* F*, munido das operações usuais de soma e produto de matrizes, é uma álgebra associativa unitária de dimensão* m^2 *e, caso* $m > 1$*, não comutativa. A unidade de* $M_m(F)$ *(matriz identidade) é a matriz* $I_{m\times m}$ *que contém* 1 *na diagonal principal* e 0 *(zero) nas demais entradas.*

Destacam-se na álgebra $M_m(F)$ as matrizes *elementares* e_{ij}, cuja única entrada não nula é 1 ocorrente na i-ésima linha e na j-ésima coluna, para $1 \leq i, j \leq m$. O produto entre duas matrizes elementares é a matriz

$$e_{ij}e_{lk} = \begin{cases} 0 & , se \quad l \neq k \\ e_{ik} & , se \quad l = k \end{cases},$$

onde 0 denota a matriz nula $m \times m$. Além disso, é fácil ver que o conjunto $\beta = \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ é uma base para $M_m(F)$, e assim temos uma forma de verificar que $\dim_F(M_m(F)) = m^2$.

Exemplo 3. ***(Álgebra de Grassmann)*** *Consideremos V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$. Definimos a* álgebra de Grassmann $E(V)$ *(ou* álgebra exterior*) de V, denotada simplesmente por E, como sendo a álgebra associativa e unitária com base*

$$\{1, e_{i_1} \cdots e_{i_m} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_m, \quad m \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$. Destacam-se em E os subespaços gerados pelos conjuntos $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$ e $\{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$, os quais denotamos por E_0 e E_1, respectivamente. Observemos que $E = E_0 \oplus E_1$ e, a partir da relação $(e_{i_1} \ldots e_{i_m})(e_{j_1} \ldots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1} \ldots e_{j_k})(e_{i_1} \ldots e_{i_m})$,$ax = xa$, para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$, para quaisquer $b, c \in E_1$.

Exemplo 4. ***(Álgebra de grupo)*** *Seja S um conjunto não vazio. Consideremos o conjunto FS de todas as somas formais do tipo $\sum_{s \in S} \lambda_s s$, onde $\lambda_s \in F$ e $\{s \in S \mid \lambda_s \neq 0\}$ é finito. Dizemos que*

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s = \sum_{s \in S} \gamma_s s$$

em FS se tivermos $\lambda_s = \gamma_s$, para todo $s \in S$. A soma

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s + \sum_{s \in S} \gamma_s s = \sum_{s \in S} (\lambda_s + \gamma_s) s$$

e o produto por escalar

$$\gamma \sum_{s \in S} \lambda_s s = \sum_{s \in S} (\gamma \lambda_s) s \quad (\gamma \in F)$$

torna FS um F-espaço vetorial, chamado de F-espaço vetorial com base S.

Sendo "$*$" uma operação em S, é fato conhecido que "$*$" pode ser estendida a uma única operação bilinear em FS, a qual denotaremos, também, por "$*$". Desse modo, temos que $(FS, *)$ tem uma estrutura de F-álgebra, a qual denotamos simplesmente por FS. Se a operação "$*$" é associativa, comutativa e/ou unitária em S, então também o será, respectivamente, na álgebra FS. Um caso particular e muito importante desse tipo de construção é quando usamos um grupo G, ao invés de um simples conjunto S. Nesse caso, adotamos a notação multiplicativa para o grupo G e consideramos, no espaço FG, a *operação induzida pela operação de G, e assim obtemos a álgebra FG, chamada de* álgebra de grupo. *Notemos que FG é uma álgebra associativa com unidade, pois G o é, e, além disso, FG é comutativa se, e somente se, G é abeliano.*

Exemplo 5. *Consideremos álgebras A e B e o produto tensorial de espaços vetoriais $A \otimes B$ sobre F. Então o produto*

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_1x_2 \otimes y_1y_2),$$

com $x_1, x_2 \in A$ e $y_1, y_2 \in B$, induz uma estrutura de álgebra no espaço $A \otimes B$. Essa álgebra é chamada de álgebra tensorial *de A por B. Se A e B são álgebras com bases $\beta_1 = \{v_i \mid i \in I\}$ e $\beta_2 = \{w_j \mid j \in J\}$, respectivamente, então temos que o conjunto $\beta = \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é uma base para a álgebra $A \otimes B$. Se A e B são álgebras unitárias, então $A \otimes B$ também o é, sendo $1_A \otimes 1_B$ sua unidade. Caso A e B tenham dimensão finita, então $dim_F A \otimes B = \dim_F A \cdot \dim_F B$.*

Exemplo 6. ***(Álgebra associativa livre)*** *Consideremos $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto enumerável de variáveis não-comutativas. Uma* palavra *em X é entendida como sendo uma sequência finita $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, onde $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $i_j \in \mathbb{N}$. O número n é o* tamanho *da palavra $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, se $n = 0$ temos a palavra vazia a qual é denotada por 1. Duas palavras $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ e $x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ serão ditas iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1, \ldots, i_n = j_n$. Consideremos o F-espaço vetorial $F\langle X\rangle$ com base nas palavras de X (vide exemplo 4). Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de* polinômios *e são da forma*

$$f = \sum \alpha_m m, \text{ onde } m \text{ é uma palavra, } \alpha_m \in F \text{ e } \{m \mid \alpha_m \neq 0\} \text{ é finito.}$$

Quando for necessário especificar, devemos escrever $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ para significar que $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ são as variáveis que figuram em f, do contrário escreveremos f, apenas. Os elementos da forma $\alpha_m m = \alpha_m x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ são chamados de monômios, *cujo grau, denotado por* $\deg m$, *é definido como sendo o tamanho n da palavra $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$. Mais geralmente, o* grau de um polinômio *f, denotado por* $\deg f$, *é definido como sendo o máximo dos graus de seus monômios não nulos.*

Considerando a concatenação

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_n})(x_{j_1} \cdots x_{j_m}) = x_{i_1} \cdots x_{i_n} x_{j_1} \cdots x_{j_m},$$

temos que o espaço $F\langle X\rangle$, munido da operação bilinear induzida por esse produto, é uma álgebra, a qual é associativa e possui a palavra vazia 1 como unidade.

Definição 5. *Sejam A uma álgebra, e B e I subespaços vetoriais de A. Então, dizemos que:*

1. *B é uma* subálgebra *de A se B é multiplicativamente fechado, isto é, se para a e b elementos quaisquer em B, tem-se $ab \in B$. Além disso, não é difícil ver que se A é unitária, não necessariamente B também o é, mas em caso afirmativo, devemos ter $1_A = 1_B$;*

2. *I é um ideal à esquerda (respectivamente, à direita) se $ax \in I$ (respectivamente, $xa \in I$) para quaisquer $x \in I$ e $a \in A$. Se I é ideal à esquerda e à direita simultaneamente, então dizemos que I é um ideal bilateral de A (ou simplesmente ideal de A);*

3. *I é um ideal* maximal à esquerda *(respectivamente à direita) de A , se para todo ideal à esquerda (respectivamente à direita) J de A tal que $I \subseteq J \subseteq A$, tem-se que $J = I$ ou $J = A$. Além disso, um ideal I é dito ser* maximal *se este é maximal à direita e à esquerda.*

Um ideal muito importante na teoria algébrica é o *radical de Jacobson.*

Definição 6. *Seja A uma álgebra. O* radical de Jacobson *de A, denotado por $J(A)$, é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de A.*

Exemplo 7. *O espaço $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores de ordem n com entradas em F*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ onde } \ a_{i,j} \in F, \ \text{com } i \leq j,$$

é uma subálgebra de $M_n(F)$. É um fato conhecido que o radical de de Jacobson de $UT_n(F)$ é o ideal

$$J(UT_n(F)) = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } \ a_{i,j} \in F, i \leq j, \ \text{e } a_{i,i} = 0$$

das matrizes triangulares superiores com zero na diagonal (ver detalhes [41]). A álgebra $UT_n(F)$, bem como seu radicam de Jacobson, será de extrema importância no desenvolvimento dessa tese.

Exemplo 8. ***(Centro de uma álgebra)*** *Sendo A uma álgebra, o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid xa = ax \text{ para todo } x \in A\}$$

é um subespaço vetorial de A, denominado centro de A. *Caso a álgebra A seja associativa, mostra-se facilmente que $Z(A)$ é uma subálgebra de A, caso A seja uma álgebra de Lie, mostra-se que $Z(A)$ é um ideal. Não é difícil ver que $Z(M_n(F)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in F\}$ (matrizes escalares), para todo $n \in \mathbb{N}$. Quanto à álgebra exterior do Exemplo 3, tem-se que $Z(E) = E_0$, se F é infinito com $\mathrm{char} F \neq 2$, e $Z(E) = E$, caso $\mathrm{char} F = 2$.*

Definição 7. *Sejam A uma álgebra unitária e S um subconjunto não vazio de A. Então, definimos:*

1. *A subálgebra de A gerada por S, denotada por $\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contém $S \cup \{1\}$. Caso a álgebra não tenha unidade, retira-se o 1 dessa definição;*

2. *O ideal de A gerado por S como sendo a interseção de todos os ideais de A que contêm S.*

Sejam A uma álgebra associativa e unitária e S um subconjunto não vazio de A, mostra-se que a subálgebra de A gerada por S coincide precisamente com o subespaço de A gerado pelo o conjunto $\{1, s_1 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Caso A não tenha unidade, retira-se o 1 desse conjunto. Mostra-se, também, que o ideal gerado por S coincide exatamente com o subespaço gerado pelo o conjunto $\{asb \mid s \in S, a, b \in A\}$.

Exemplo 9. *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Consideremos o espaço quociente A/I, onde as operações de soma e produto por escalar são definidos por*

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$$

e

$$\lambda(a+I) = \lambda a + I,$$

onde $a, b \in A$ e $\lambda \in F$. A/I munido do produto

$$(a+I)(b+I) = (ab)+I$$

é uma álgebra chamada álgebra quociente. *É fácil ver que se A for associativa, comutativa e/ou unitária, então A/I também o será, respectivamente.*

Definição 8. *Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um* homomorfismo de álgebras *se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$. Caso as álgebras A e B sejam unitárias, será exigido que $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Dizemos que φ é um *mergulho* (ou um *monomorfismo*) se é injetivo, e que é *isomorfismo* se for bijetivo. Nos referimos a φ como sendo um *endomorfismo* de uma dada álgebra A se φ é um homomorfismo de A em A. Por último, um endomorfismo bijetivo é denominado de *automorfismo*. Se existir um isomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são *isomorfas* e denotamos por $A \simeq B$.

Consideremos $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então, o conjunto $Ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$, denominado por *núcleo de* φ, é um ideal de A e o conjunto $Im\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, chamado de *imagem de* φ, é subálgebra de B. O *Teorema Fundamental dos Homomorfismos* assegura que $A/Ker\varphi \simeq Im\varphi$. Ademais, sendo A uma álgebra e I um ideal de A. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi : A & \longrightarrow & A/I \\ a & \longmapsto & \pi(a) = a + I \end{array}$$

que é conhecida como *projeção canônica*, é um homomorfismo sobrejetivo de álgebras tal que $Ker\varphi = I$.

Definição 9. *Sejam ζ uma classe de álgebras e $A \in \zeta$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra A é chamada de* álgebra livre *na classe ζ, livremente gerada pelo conjunto X, se para toda álgebra $B \in \zeta$, qualquer aplicação $\varphi : X \longrightarrow B$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada de* posto *de A.*

No campo algébrico, os homomorfismos servem para relacionar estruturas algébricas semelhantes. A observação seguinte mostra como uma álgebra associativa e unitária se relaciona com a álgebra associativa livre do Exemplo 6, veremos adiante que essa relação permite o estudo da estrutura das PI-álgebras através de suas identidades polinomiais.

Observação 1. ***(Propriedade universal)*** *Consideremos A uma álgebra associativa e unitária, X um conjunto de variáveis e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer, isto é, para cada $x_i \in X$ tem-se que $h(x_i) = a_i$ para algum $a_i \in A$. Mostra-se que a aplicação linear $\phi_h : F\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que*

$$\phi_h(1) = 1_A \qquad \text{e} \qquad \phi_h(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$$

é o único homomorfismo de álgebras que estende h, ou seja, ϕ_h é o único homomorfismo de álgebra a satisfazer $\phi_h\,|_X = h$. Por essa razão, $F\langle X\rangle$ é denominada álgebra associativa livre unitária livremente gerada por *X. Além disso, dado $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, denotamos por $f(a_1, \ldots, a_n)$ como sendo o elemento de A imagem de $f(x_1, \ldots, x_n)$ por ϕ_h. Observemos que $f(a_1, \ldots, a_n)$ é obtido de $f(x_1, \ldots, x_n)$ ao trocarmos x_i por a_i.*

Exemplo 10. *Sejam A e B duas álgebras. Definimos o* produto direto de A por B *o como sendo a álgebra*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

cujas operações de soma, produto por escalar e multiplicação são definidas coordenada a coordenada. De forma análoga, define-se o produto direto de uma quantidade finita de álgebras.

Teorema 1. *Consideremos A uma álgebra associativa e unitária. São equivalentes:*

1. *A é isomorfa a um produto direto $A_1 \times \cdots \times A_n$ de álgebras associativas unitárias (não triviais);*

2. *Existem ideais não nulos $I_1, \ldots, I_n$ de A tais que*
$$A = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n;$$

3. *Existem elementos $e_1, \ldots, e_n \in Z(A)$ tais que $e_i e_j = 0$, para $i \neq j$, $e_1 + \cdots + e_n = 1$ e $e_k^2 = e_k$, para $k = 1, 2, ..., n$.*

Demonstração. Ver detalhes em [20], página 165. □

1.2 Comutadores

Os comutadores são ferramentas essenciais na questão técnica dos principais resultados desse trabalho. A seguir, exibiremos, de forma direta, suas principais propriedades .

Definição 10. *Sejam A uma álgebra e $a, b \in A$. O* comutador de a por b, *denotado por $[a, b]$, é definido como sendo o elemento $[a, b] = ab - ba$ de A. Mais geralmente, definimos de forma indutiva, para $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $n \geq 2$,* o comutador de comprimento n *como sendo o elemento*
$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n].$$

Lema 1. *Seja A uma álgebra. Então, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in F$, valem:*

1. $[a, b] = -[b, a]$;

2. $ab = ba + [a, b]$;

3. $[\lambda a + b, c] = \lambda[a, c] + [b, c]$ *e* $[a, \lambda b + c] = \lambda[a, b] + [a, c]$;

4. $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$.

5. $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ (identidade de Jacobi).

Demonstração. De fato, temos:

1. $[a, b] = ab - ba = -(ba - ab) = -[b, a]$;

2. $ab = ab - ba + ba = ba + [a, b]$;

3. $[\lambda a + b, c] = (\lambda a + b)c - c(\lambda a + b) = \lambda(ac - ca) + (bc - cb) = \lambda[a, c] + [b, c]$;

4. $a[b,c]+[a,c]b = a(bc-cb)+(ac-ca)b = abc-cab = [ab,c]$;

5.

$$\begin{aligned}
[a,b,c]+[b,c,a]+[c,a,b] &= [[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b] \\
&= [a,b]c-c[a,b]+[b,c]a-a[b,c]+[c,a]b-b[c,a] \\
&= abc-bac-(cab-cba)+bca-cba-(abc-acb) \\
&+ cab-acb-(bca-bac)=0.
\end{aligned}$$

□

Lema 2. *Para $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$[u_1u_2\cdots u_n, w] = \sum_{i=1}^{n} u_1\cdots u_{i-1}[u_i,w]u_{i+1}\cdots u_n.$$

Demonstração. Claramente, o resultado é válido para $n=1$. Para $n=2$, o resultado é assegurado pelo quarto item do lema anterior. Suponhamos o resultado válido para $n \geq 2$. Observemos que

$$\begin{aligned}
&[u_1u_2\cdots u_nu_{n+1}, w] \\
&= [(u_1u_2\cdots u_n)u_{n+1}, w] \\
&= (u_1u_2\cdots u_n)[u_{n+1},w] + \underbrace{[(u_1u_2\cdots u_n),w]}_{H.I}\,u_{n+1} \\
&= u_1u_2\cdots u_n[u_{n+1},w] + (\sum_{i=1}^{n} u_1\cdots u_{i-1}[u_i,w]u_{i+1}\cdots u_n.)u_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} u_1\cdots u_{i-1}[u_i,w]u_{i+1}\cdots u_{n+1}
\end{aligned}$$

□

Consideremos o seguinte lema técnico de carácter geral.

Lema 3. *Sejam A uma álgebra e $a,b,x_1,\ldots,x_n \in A$, com $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$[ab,x_1,\ldots,x_n] = \sum\ [a,x_{i_1},\ldots,x_{i_k}][b,x_{j_1},\ldots,x_{j_s}],$$

onde as variáveis $x_{i_1},\ldots,x_{i_k},x_{j_1},\ldots,x_{j_s}$ são tais que $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k},x_{j_1},\ldots,x_{j_s}\} = \{x_1,\ldots,x_n\}$, $k+s=n$, e os comutadores $[a,x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]$ e $[b,x_{j_1},\ldots,x_{j_s}]$ podendo ser, eventualmente, a e b, respectivamente.

Demonstração. De fato, observemos que $[ab, x_1] = a[b, x_1] + [a, x_1]b$, e assim, o resultado segue para $n = 1$. Suponhamos que o resultado seja válido para algum $n \geq 2$.

Notemos que $[ab, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = [[ab, x_1, \ldots, x_n], x_{n+1}]$, e, por hipótese de indução, temos

$$[ab, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{\{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_s\}=\{1,\ldots,n\},\ k+s=n} [a, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}][b, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}],$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[ab, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] &= [[ab, x_1, \ldots, x_n], x_{n+1}] \\
&= \Big[\sum_{\{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_s\}=\{1,\ldots,n\},\ k+s=n} [a, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}][b, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}], x_{n+1} \Big] \\
&= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_s\}=\{1,\ldots,n\},\ k+s=n} \Big[[a, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}][b, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}], x_{n+1} \Big] \\
&= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_s\}=\{1,\ldots,n\},\ k+s=n} [a, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] \Big[[b, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}], x_{n+1} \Big] \\
&+ \Big[[a, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}], x_{n+1} \Big] [b, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}] \\
&= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_s\}=\{1,\ldots,n+1\},\ k+s=n+1} [a, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}][b, x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}],
\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

1.3 Identidades Polinomiais

Nessa seção estabeleceremos os conceitos e exibiremos exemplos clássicos de identidades polinomiais.

Definição 11. *Sejam A uma álgebra e $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio em $F\langle X \rangle$. Então, diremos que o polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ (ou que a expressão $f \equiv 0$) é uma* identidade polinomial *para A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.*

Se um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial para uma álgebra A, então dizemos que A *satisfaz a identidade* $f \equiv 0$. Diremos que A é uma *PI-álgebra* se A satisfaz uma identidade polinomial não nula.

Exemplo 11. *Sendo A uma álgebra comutativa, temos que $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é uma identidade polinomial para A. Além disso, observemos que a recíproca desse fato é verdadeira.*

Exemplo 12. *A Álgebra de Grassmann E sobre um corpo infinito satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2, x_3] \equiv 0.$$

De fato, basta notar que, para quaisquer $a, b \in E$, tem-se $[a, b] \in E_0$ e que $E_0 = Z(E)$.

Exemplo 13. *Sendo $A, B \in M_2(F)$, temos que $tr([A, B]) = 0$. Logo,*

$$[A, B] = \begin{pmatrix} a & c \\ d & -a \end{pmatrix},$$

e assim $[A, B]^2 = \lambda I_2 \in Z(M_2(F))$, para algum $\lambda \in F$. Portanto, o polinômio $[[x_1, x_2]^2, x_3]$, conhecido por Polinômio de Hall, *é uma identidade polinomial para $M_2(F)$.*

Exemplo 14. *A álgebra $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ é uma PI-álgebra que satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

De fato, basta observar que o comutador de duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior com diagonal principal nula, e que o conjunto das matrizes triangulares superiores com diagonal principal nula é um ideal (radical de Jacobson) nilpotente de $UT_n(F)$ com índice de nilpotência igual a n.

Observemos que uma álgebra é nilpotente se, e somente se, satisfaz a identidade $x_1 \cdots x_n \equiv 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Os dois próximos resultados ajudaram a impulsionar o próprio desenvolvimento da PI-teoria em meados do século XIX, vide [33].

Teorema 2. ***(Nagata-Higman)*** *Sejam F um corpo de característica zero e A uma álgebra nil e de índice limitado, então A é nilpotente.*

Exemplo 15. ***(Problema de Kurosch para PI-álgebras)*** *Se A é uma PI-álgebra nil e finitamente gerada, então A é nilpotente.*

1.4 T-Ideais e Variedades

Dada uma PI-álgebra, uma questão central na PI-teoria é tentar estabelecer um conjunto gerador de todas as identidades polinomiais dessa álgebra. Nesse sentido, nessa seção abordaremos os conceitos dos T-ideais e variedades, suas principais propriedades e a relação biunívoca entre esses dois objetos.

Dado uma álgebra A, consideremos

$$T(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

o conjunto das identidades polinomiais de A. Notemos que $T(A)$ é um ideal de $F\langle X\rangle$, e, além disso, é tal que $f(g_1, \ldots, g_n) \in T(A)$, para todo $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$. Segue da Observação 1 que os endomorfismos de $F\langle X\rangle$ são definidos pelas funções $x \to g$, onde $x \in X$ e $g \in F\langle X\rangle$, e assim obtemos que $T(A)$ é invariantes pelos endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Os ideais de $F\langle X\rangle$ com essa propriedade são chamados de T-*ideais*.

Definição 12. *Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é dito ser um T*-ideal *se $\varphi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$.*

O T-ideal $T(A)$ é denominado por *T-ideal das identidades polinomiais de A*. Como argumentado acima, o conjunto $T(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, por outro lado, não é difícil ver que todo T-ideal é dessa forma. A saber, sendo I um T-ideal de $F\langle X\rangle$, então a álgebra $B = F\langle X\rangle/I$ é tal que $I = T(B)$.

Não é difícil observar que a interseção de uma família de T-ideais é ainda um T-ideal. Nesse sentido, temos a seguinte definição.

Definição 13. *Seja $S \subseteq F\langle X\rangle$. Definimos o T*-ideal gerado por *S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a intersecção de todos os T-ideais de $F\langle X\rangle$ que contêm S. Se $S = \emptyset$, então convencionaremos que o T-ideal gerado por S é $\{0\}$.*

Lema 4. *Sendo $S \subseteq F\langle X\rangle$, então o T-ideal $\langle S\rangle^T$ coincide precisamente com o subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$ gerado pelo subconjunto*

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n)h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle\}.$$

Quando $f \in \langle S\rangle^T$, dizemos que f é consequência de S.

Definição 14. *Consideremos PI-álgebras A e B. Dizemos que A e B são PI*-equivalentes *se $T(A) = T(B)$.*

Sendo $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras, tem-se: se f é sobrejetivo, então $T(A) \subseteq T(B)$; se f é injetivo, temos $T(B) \subseteq T(A)$; se f é bijetor, obtemos $T(A) = T(B)$. Dessa forma, temos que álgebras isomorfas são PI-equivalentes, no entanto, a recíproca desse fato não é verdadeira, a saber, $F \otimes_F F$ e F são álgebra PI-equivalentes não isomorfas.

Teorema 3. ***(Kemer)*** *Seja A uma PI-álgebra finitamente gerada sobre um corpo infinito ou de característica zero. Então, existe uma álgebra B de dimensão finita tal que A e B são PI-equivalentes.*

Demonstração. Ver detalhes em [1]. □

Os resultados anteriores mostram que muitas álgebras (diferentes) podem ter o mesmo T-ideal das identidades polinomiais, isso motiva a definição de Variedades de álgebras, dada a seguir.

Definição 15. *Seja S um subconjunto não vazio da álgebra livre $F\langle X\rangle$. A classe $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ de todas as álgebras associativas que têm os polinômios de S como identidades polinomiais é chamada de* variedade de álgebra (de álgebra associativas) definida por S. *Uma variedade $\mathcal{V}'$ é chamada de* subvariedade *de $\mathcal{V}$ se $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$.*

Seja $\mathcal{V}(S)$ uma variedade de álgebra determinada pelo conjunto S e $\langle S\rangle^T$ o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S, então $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S\rangle^T)$ e $\langle S\rangle^T = \bigcap_{A\in\mathcal{V}} T(A)$. O *$T$-ideal da variedade* $\mathcal{V}(S)$, denotado por $T(\mathcal{V})$ (definida pelo conjunto S), é definida como sendo o T-ideal $\langle S\rangle^T$.

Exemplo 16. *A classe de todas as álgebras comutativas é uma variedade definida pela identidade $[x_1, x_2] \equiv 0$.*

Exemplo 17. *A classe de todas as álgebras nil de grau limitado por n, formam uma variedade própria com $S = \{x^n\}$.*

O próximo resultado apresenta uma caracterização das variedades.

Teorema 4. ***(Birkhoff)*** *Uma classe $\mathcal{V}$ (não vazia) de álgebras é uma variedade se, e somente se, satisfaz:*

1. *Se $A \in \mathcal{V}$ e $\varphi : B \longrightarrow A$ é um homomorfismo injetor, então $B \in \mathcal{V}$;*
2. *Se $A \in \mathcal{V}$ e $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo sobrejetor, então $B \in \mathcal{V}$;*
3. *Se $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ é uma família de álgebras com $A_\lambda \in \mathcal{V}$, para todo $\lambda \in \Gamma$, então o produto direto $\prod_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda \in \mathcal{V}$.*

Demonstração. Ver [40] , Teorema 1.2.3. □

O conceito de *álgebra livre* em uma variedade é o mesmo da Definição 9, bastando lembrar que uma variedade é, antes de tudo, uma classe de álgebras.

Teorema 5. *Toda variedade $\mathcal{V}$ admite uma álgebra relativamente livre. Além disso, duas álgebras relativamente livres (com respeito à $\mathcal{V}$) são isomórficas se, e somente se, têm o mesmo posto.*

A correspondência entre T-ideais e variedades de álgebras é bem definida.

Teorema 6. *Existe uma correspondência biunívoca entre os T-ideais de $F\langle X\rangle$ e as variedades de álgebras. Nessa correspondência, uma variedade $\mathcal{V}$ corresponde ao T-ideal de identidades $T(\mathcal{V})$ e um T-ideal I corresponde à variedade definida por I (ou por S, onde $\langle S\rangle^T = I$). Além disso, tal correspondência inverte as inclusões.*

Demonstração. Ver detalhes em [40], página 5. $\square$

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade e A é uma álgebra tal que $T(A) = T(\mathcal{V})$ (por exemplo, $A = F\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$), então dizemos que $\mathcal{V}$ é a variedade gerada por A e escrevemos $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A)$. Além disso, nos referimos à álgebra $F\langle X\rangle/T(\mathcal{V})$ como a *álgebra relativamente livre da variedade* $\mathcal{V}$ de posto $|X|$.

Observação 2. *Se $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são variedades tais que $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$, então $T(\mathcal{V}_1) \supseteq T(\mathcal{V}_2)$, e assim podemos considerar as identidades de $\mathcal{V}_1$ módulo $T(\mathcal{V}_2)$. Portanto, se soubermos as identidades de $\mathcal{V}_2$ e quisemos estudar as identidades de $\mathcal{V}_1$, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre $F\langle X\rangle/T(\mathcal{V}_2)$.*

Dizemos que uma álgebra A é uma superálgebra se existirem subespaços A_0 e A_1 de A tais que $A = A_0 \oplus A_1$ e $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, para $i, j \in \{0, 1\}$. Consideremos A uma superálgebra, e definimos a *envoltória (ou Envelope) de Grassmann de A* como sendo a álgebra

$$E(A) = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1).$$

Kemer usou o envelope de Grassmann para solucionar positivamente o *problema de Specht*, ver detalhes em [46] e [1].

Posteriormente, Kemer generalizou o seu resultado para o seguinte:

Teorema 7. ***(Kemer)*** *Em característica zero, toda variedade não trivial de álgebras é gerada pela envoltória de Grassmann de alguma superálgebra de dimensão finita. Além disso, se uma variedade não contém nenhuma subvariedade gerada pela álgebra de Grassmann, então ela é gerada por alguma álgebra de dimensão finita.*

Segue desse último resultado de Kemer que no sentido de estudar as identidades polinomiais de uma PI-álgebra arbitrária, é suficiente estudar as identidades polinomiais das álgebras das matrizes $M_m(F)$, $m \in \mathbb{N}$, todavia, esse é um problema em aberto para $m \geq 3$, no caso de corpos infinitos, o que torna inviável o desenvolvimento de outros objetos. Portanto, o objeto central desse trabalho será, mais especificamente, a álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores, como veremos adiante, a descrição de suas identidades é uma questão resolvida, o que torna viável o desenvolvimento de outros objetos nessa linha de estudo, a saber, a descrição de seus cocaracteres, proposta dessa tese.

1.5 Polinômios Multi-homogêneos

No campo da PI-teoria, os polinômios multi-homogêneos e multilineares desenvolvem um papel muito importante, e, por esta razão, dediquemos essa seção ao estudo desses polinômios. Veremos adiante que, sob certas condições, os T-ideais são gerados por esses polinômios.

Definição 16. *Consideremos a álgebra associativa livre $F\langle X\rangle$ do Exemplo 6. Sejam m um monômio, f um polinômio e x_i uma variável em $F\langle X\rangle$. Definimos:*

1. *O grau de m em x_i, denotado por $\deg_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrência de x_i em m;*

2. *O grau de f em x_i, denotado por $\deg_{x_i} f$, como sendo o máximo dos graus em x_i dos monômios não nulos que figuram em f.*

Definição 17. *Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é dito ser* homogêneo em x_i *se todos os seus monômios não nulos têm o mesmo grau em x_i. De modo geral, f é dito ser* multi-homogêneo *se f for homogêneo em todas as suas variáveis.*

Definição 18. *Seja $m = m(x_1, \ldots, x_n)$ um monômio em $F\langle X\rangle$. O* multigrau de m *é definido como sendo a n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, onde $a_i = \deg_{x_i} m$. Consideremos $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$. A* componente multi-homogênea de f, *com multigrau $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ e denotada por $h_{(a_1,\ldots,a_n)}$, é definida como sendo a soma de todos os monômios de f com multigrau $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$.*

Observação 3. *Notemos que o polinômio $h_{(a_1,\ldots,a_n)}$ é multi-homogêneo e que*

$$f = \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}_0^n} h_{(a_1,\ldots,a_n)},$$

e assim temos que f é uma soma de polinômios multi-homogêneos (soma de suas componentes multi-homogêneas). Portanto, f é um polinômio multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea.

Exemplo 18. *O polinômio*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 3x_1x_2x_3 + 4x_2x_1 + x_1x_2x_3x_2 - x_2^2x_1x_3$$

é homogêneo apenas em x_1 e suas componentes multi-homogêneas são $h_{(1,1,0)} = 2x_1x_2 + 4x_2x_1$, $h_{(1,1,1)} = -3x_1x_2x_3$ e $h_{(1,2,1)} = x_1x_2x_3x_2 - x_2^2x_1x_3$. Além disso,

$$f = h(1, 1, 0) + h(1, 1, 1) + h(1, 2, 1).$$

Teorema 8. *Sejam F um corpo infinito, I um T-ideal de $F\langle X\rangle$ e $f(x_1, \ldots, x_m) \in I$. Então, cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado pelos seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração. Seja $n = \deg_{x_1} f$. Para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, tomemos f_j como sendo a componente de f de grau j em x_1. Daí, $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$. Agora, escolhendo $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dois a dois distintos em F, temos

$$g_j = f(\lambda_j x_1, \ldots, x_m) = f_0 + \lambda_j f_1 + \lambda_j^2 f_2 + \ldots + \lambda_j^n f_n.$$

Logo

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \cdots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

A primeira das matrizes, conhecida como *matriz de Vandermonde*, é invertível, e assim cada f_j é combinação linear dos $g_i's$. Por outro lado, cada g_i pertence a I, já que é obtida por uma substituição em $f \in I$ e I é T-ideal. Notemos que cada f_j é homogêneo em x_1 e $f_j \in I$. Repetindo esse mesmo processo nas outras variáveis, obteremos que cada componente multi-homogênea de f pertence a I e o resultado segue da Observação 3. □

Definição 19. *Dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é* linear *na variável x_i se f é homogêneo em x_i e $\deg_{x_i} f = 1$. Quando f é linear em cada uma de suas variáveis, então dizemos que f é* multilinear.

Lema 5. *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ um polinômio multilinear, A uma álgebra e β um subconjunto que gera A (como espaço vetorial). Então, $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial para A se, e somente se, $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$, para quaisquer $u_1, \ldots, u_n \in \beta$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Nada a ser feito. ($\Leftarrow$) Reciprocamente, sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $\beta = \{u_i \mid i \in I\}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, temos $a_i = \sum_{j_i \in I} \lambda_{ij_i} u_{j_i}$ com $\lambda_{ij_i} \in F$ (quase todos nulos), e assim, segue da multilinearidade de f que

$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_n) &= f\Big(\sum_{j_1 \in I} \lambda_{1j_1} u_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n \in I} \lambda_{nj_n} u_{j_n}\Big) \\ &= \sum_{j_1 \in I} \cdots \sum_{j_n \in I} \lambda_{1j_1} \ldots \lambda_{nj_n} f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_n}) = 0. \end{aligned}$$

Donde, $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$. □

Exemplo 19. *Sendo $n \in \mathbb{N}$ e A é uma álgebra de dimensão menor do que n, então o* polinômio standard

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

é uma identidade polinomial multilinear para A. De fato, sendo β uma base para A e $u_1, \ldots, u_n \in \beta$, devem existir $i \neq j$ tais que $u_i = u_j$. Considerando $\theta = (i\ j) \in S_n$, obtemos que $S_n = A_n \cup \theta A_n = A_n \cup \{\theta\sigma \mid \sigma \in A_n\}$, onde $A_n = \{\mu \in S_n \mid \mu$ é par $\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} St_n(u_1, \ldots, u_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^{\theta\sigma} u_{\theta\sigma(1)} \ldots u_{\theta\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} u_{\theta\sigma(1)} \ldots u_{\theta\sigma(n)} = 0, \end{aligned}$$

uma vez que $u_{\sigma(j)} = u_i = u_j = u_{\sigma(i)}$ e $\sigma(l) = l$, para $l \in \{1, \ldots, n\} - \{i, j\}$. O resultado segue do Lema 5.

A seguir, apresentaremos o processo de *linearização* de um polinômio em $F\langle X \rangle$.

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$ um polinômio multi-homogêneo de grau $m \geq 2$ em x_1. Tomemos y_1 e y_2 variáveis distintas de $x_2, \ldots, x_n$ e consideremos o polinômio $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)$. Agora, sendo $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ a componente homogênea de grau 1 em y_1 do polinômio $h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$, tem-se que $\deg_{y_2} h_1 = m - 1$ e que $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ é multi-homogêneo. Além disso, notemos que $h_1(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = mf(x_1, \ldots, x_n)$. Se tivermos, pois, que o grau de $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ em y_2 é 1, então obtemos um polinômio nas variáveis $y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n$ linear em y_1 e y_2, do qual f pode ser obtido a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão. Se porém, o grau de $h_1(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ em y_2 não for 1, então repetimos o mesmo processo, apresentado anteriormente, quantas vezes o for necessário, até obtermos um polinômio nas variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_y, x_2, \ldots, x_n$ (duas a duas distintas) linear nas variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_t$, do qual se pode obter f (a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão). Usando essa mesma técnica nas variáveis $x_2, \ldots, x_n$, obteremos um polinômio multilinear, do qual podemos obter f (a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão). A linearização de um polinômio no caso geral segue desse processo e da Observação 3.

Exemplo 20. *O processo de linearização do polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_1$ é*

$$\begin{aligned} & h(y_1, y_2, x_2, x_3) = (y_1 + y_2)^3 x_2 x_3 + (y_1 + y_2) x_2 x_3 (y_1 + y_2) \\ = \ & (y_1^3 + y_1^2 y_2 + y_1 y_2 y_1 + y_1 y_2^2 + y_2 y_1^2 + y_2 y_1 y_2 + y_2^2 y_1 + y_2^3) x_2 x_3 \\ + \ & y_1 x_2 y_1 x_3 y_1 + y_1 x_2 y_1 x_3 y_2 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_1 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_2 \\ + \ & y_2 x_2 y_1 x_3 y_1 + y_2 x_2 y_1 x_3 y_2 + y_2 x_2 y_2 x_3 y_1 + y_2 x_2 y_2 x_3 y_2, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} h_1(y_1, y_2, x_2, x_3) &= (y_1 y_2^2 + y_2 y_1 y_2 + y_2^2 y_1) x_2 x_3 + y_1 x_2 y_2 x_3 y_2 \\ &+ y_2 x_2 y_1 x_3 y_2 + y_2 x_2 y_2 x_3 y_1. \end{aligned}$$

Além disso,

$$h_1(x_1, x_1, x_2, x_3) = 3(x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_1) = 3f(x_1, x_2, x_3)$$

O polinômio $h_1(y_1, y_2, x_2, x_3)$ é linear em y_1, x_2 e x_3 . Repetindo esse processo, em y_2, obtemos um polinômio multilinear do qual f pode ser obtido (a menos de um múltiplo da unidade do corpo em questão).

O próximo resultado segue diretamente do Teorema 8, da Observação 3 e do processo de linearização.

Teorema 9. *Seja F um corpo com característica zero. Então, se I um T-ideal de $F\langle X\rangle$, temos que I é gerado pelos seus polinômios multilineares.*

Denotando por P_n o espaço dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, observemos que o conjunto

$$\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

é uma base para P_n, e assim $\dim(P_n) = n!$. Nessas circunstâncias, convém escrever um polinômio multilinear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n denota o grupo simétrico de grau n em $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Observação 4. *Adotando essa terminologia, segue do teorema anterior que se A é uma PI-álgebra e F é um corpo de característica zero, então os espaços $(T(A) \cap P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geram completamente o T-ideal $T(A)$ das identidades polinomiais de A. Além disso, A é uma PI-álgebra se, e somente se, $\dim_F(T(A) \cap P_n) < n!$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Os espaços $(T(A) \cap P_n)$ são importantes no estudo do crescimento assintótico das identidades das PI-álgebras, esses são desenvolvidos através das chamadas *codimensões* e *carácteres*, objetos que serão explorados no próximo capítulo.

1.6 Polinômios Próprios

Nessa seção abordaremos os *polinômios próprios*, classe de polinômios que gozam de varias propriedades dos comutadores, os quais serão essenciais no desenvolvimento técnico desse trabalho.

Consideremos a subálgebra unitária $B(X)$ gerada pelo conjunto

$$\{[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] \mid n \geq 2,\ x_{i_j} \in X\}.$$

Os elementos de $B(X)$ são chamados de *polinômios próprios*.

Teorema 10. *Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ em $F\langle X\rangle$. Então, existem polinômios $w_a(x_1, \ldots, x_n) \in B(X)$, com $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, tais que*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_a x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} w_a(x_1, \ldots, x_n).$$

Demonstração. Vide [33], capítulo 4. □

A demonstração do teorema anterior segue do conhecido teorema de *Poincaré-Birkhoff-Witt* (vide [33]). Deste último, também segue o método aplicado no seguinte exemplo.

Exemplo 21. *Consideremos o polinômio $f(x_1, x_2, x_3) = x_3x_1x_2x_1$, temos*

$$\begin{aligned}
x_3x_1x_2x_1 &= x_1x_2x_1x_3 + [x_3, x_1x_2x_1] \\
&= x_1^2x_2x_3 + x_1[x_2, x_1]x_3 + x_1x_2[x_3, x_1] + [x_3, x_1x_2]x_1 \\
&= x_1^2x_2x_3 + x_1x_3[x_2, x_1] + x_1[x_2, x_1, x_3] + x_1x_2[x_3, x_1] + \\
&+ x_1[x_3, x_2]x_1 + [x_3, x_1]x_2x_1.
\end{aligned}$$

Como

$$x_1[x_3, x_2]x_1 = x_1^2[x_3, x_2] + x_1[x_3, x_2, x_1]$$

e

$$\begin{aligned}
[x_3, x_1]x_2x_1 &= x_2[x_3, x_1]x_1 + [x_3, x_1, x_2]x_1 \\
&= x_2x_1[x_3, x_1] + x_2[x_3, x_1, x_1] + x_1[x_3, x_1, x_2] + [x_3, x_1, x_2, x_1] \\
&= x_1x_2[x_3, x_1] + [x_2, x_1][x_3, x_1] + x_2[x_3, x_1, x_1] + x_1[x_3, x_1, x_2] \\
&+ [x_3, x_1, x_2, x_1],
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2x_3 + x_1x_3[x_2, x_1] + x_1[x_2, x_1, x_3] + x_1x_2[x_3, x_1] + \\
&+ x_1^2[x_3, x_2] + x_1[x_3, x_2, x_1] + x_1x_2[x_3, x_1] + [x_2, x_1][x_3, x_1] + \\
&+ x_2[x_3, x_1, x_1] + x_1[x_3, x_1, x_2] + [x_3, x_1, x_2, x_1],
\end{aligned}$$

e assim f está sob a forma assegurada pelo teorema anterior.

Os polinômios próprios, sob a hipótese de infinitude do corpo em questão, geram os T-ideias completamente.

Lema 6. *Seja I um T-ideal de $F\langle X\rangle$, com o corpo F infinito. Suponha que $f(x_1,\dots,x_n)$ é um polinômio multi-homogêneo em I. Então, cada $w_a(x_1,\dots,x_n)$ pertence a I.*

Demonstração. Sendo $\deg f_{x_1} = m$, temos

$$\begin{aligned} f(x_1+1,x_2,\dots,x_n) &= \sum_a (x_1+1)^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}w_a(x_1+1,x_2\dots,x_n) \\ &= \sum_a \left(\sum_{i=0}^{a_1}\binom{a_1}{i}x_1^i\right)x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}w_a(x_1,\dots,x_n) \in I, \end{aligned}$$

pois $w_a(x_1+1,x_2\dots,x_n) = w_a(x_1,x_2\dots,x_n)$, uma vez que w_a é polinômio próprio. Observemos que $a_1 + \deg_{x_1} w_a(x_1,\dots,x_n) = m$, para quaisquer $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}_0$. Assim, considerando $a_{1\max} = \max\{a_1 \mid a = (a_1,\dots,a_n)\}$, temos

$$\deg_{x_1}\left(\sum_a x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}w_a(x_1,\dots,x_n)\right)_{a_1\max} = m - a_{1\max}.$$

Se $a=(a_1,\dots,a_n)$ é tal que $a_1 < a_{1\max}$ ou $a_1 = a_{1\max}$ e $i>0$, então

$$\deg_{x_1}\left(x_1^i x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}w_a(x_1,\dots,x_n)\right) > m - a_{1\max}.$$

Portanto,

$$\left(\sum_a x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}w_a(x_1,\dots,x_n)\right)_{a_{1\max}} \in I,$$

já que este polinômio é a componente multi-homogênea de grau $m - a_{1\max}$ em x_1 do polinômio $f(x_1+1,x_2,\dots,x_n)\in I$, vide Teorema 8. Sendo I é ideal,

$$\left(\sum_a x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}w_a(x_1,\dots,x_n)\right)_{a_1\max} \in I$$

donde

$$g(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n) - \left(\sum_a x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_{a_n}^{n}w_a(x_1,\dots,x_n)\right)_{a_1\max} \in I.$$

O polinômio g é da forma

$$g(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_a x_1^{a_1}x_2^2\dots x_n^n w_a(x_1,\dots,x_n)\right)_{a_1<a_1\max}.$$

Indutivamente, obtém-se que

$$\left(\sum_a x_2^2\dots x_n^n w_a(x_1,\dots,x_n)\right)_{a_1\ \mathit{fixado}} \in I.$$

Agora, basta repetir o mesmo processo, descrito acima, nas variáveis $x_2,\dots,x_n$ para obter que

$$w_a(x_1,\dots,x_n)\in I$$

para qualquer $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}_0$. □

Teorema 11. *Sejam F infinito e I um T-ideal de $F\langle X\rangle$, então*

$$I = \langle I \cap B(X)\rangle^T.$$

Denotando por $B_n(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, insto é, $B_n(X) = B(X) \cap P_n$, temos o seguinte:

Teorema 12. *Sejam F um corpo com característica zero e I um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Então, $(\langle I \cap B_n(X)\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ gera I completamente como T-ideal.*

1.7 Tipos Especiais de Identidades

Nessa seção abordaremos os *polinômios alternados*. Esses polinômios desempenham um papel indispensável no estudo das identidades e cocaracteres das PI-álgebras. Os polinômios *standard* e *Capelli* são dois dos principais exemplos de polinômios alternados na PI-teoria.

Definição 20. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) \in F\langle X\rangle$ um polinômio linear em cada uma das variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Dizemos que f é* alternado *nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ se, para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, f se anula quando substituímos x_i no lugar de x_j.*

Segue da linearidade de f nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ que se f é alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t),$$

e assim, obtemos que essa propriedade é equivalente à definição acima no caso em que $charF \neq 2$.

Observação 5. *É fato conhecido que toda permutação no grupo simétrico S_n é produto de transposições, donde segue que se $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ é alternado na variáveis $x_1, \ldots, x_n$, então*

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t) = (-1)^\sigma f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t),$$

para todo $\sigma \in S_n$. De fato, suponhamos $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Consideremos um monômio $\alpha x_{i_1} \cdots x_{i_k} \cdots x_{i_t} \cdots x_{i_n}$ que figure em f, então o monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_t} \cdots x_{i_k} \cdots x_{i_n}$ aparece em f com coeficiente $-\alpha$. Portanto, indutivamente, para qualquer $\sigma \in S_n$, o monômio $u_1 x_{\sigma(1)} u_2 x_{\sigma(2)} \cdots u_n x_{\sigma(n)} u_{n+1}$ aparece em f com coeficiente $(-1)^\sigma \alpha$, onde α é o coeficiente do monômio $u_1 x_1 u_2 x_2 \cdots u_n x_n u_{n+1}$ e os $u_{i's}$ são monômios, eventualmente a palavra vazia 1, nas variáveis $y_1, \ldots, y_t$.

Se um polinômio f é alternado em todas as suas variáveis, então diremos que f é alternado. Observemos que se $f(x_1,\ldots,x_n)$ é alternado em algum subconjunto $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_s}\}$ de $\{x_1,\ldots,x_n\}$, então também o será em todo subconjunto de $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_s}\}$.

Proposição 1. *Sejam $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_t)$ um polinômio alternado nas variáveis $x_1,\ldots,x_n$ e A uma álgebra. Se $a_1,\ldots,a_n\in A$ são elementos linearmente dependentes, então*
$f(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t)=0$ para quaisquer $b_1,\ldots,b_t\in A$.

Demonstração. Por hipótese, um dos $a_{i's}$, digamos a_1, pode ser escrito como combinação linear dos outros, isto é , $a_1=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i a_i$ com $\alpha_i\in F$. Assim,

$$\begin{aligned} f(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t) &= f(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i a_i,a_2,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t)\\ &= \sum_{i=2}^{n}\alpha_i f(a_i,a_2,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t)=0, \end{aligned}$$

uma vez que f é alternado em $x_1,\ldots,x_n$ e em cada termo $f(a_i,a_2,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t)$ temos $a_i\in\{a_2,\ldots,a_n\}$. □

Definição 21. *Definimos o* polinômio de Capelli *de grau m como sendo o polinômio*

$$Cap_m(x_1,\ldots,x_m;y_1,\ldots,y_{m+1})=\sum_{\sigma\in S_m}(-1)^{\sigma}y_1x_{\sigma(1)}y_2x_{\sigma(2)}\cdots y_mx_{\sigma(m)}y_{m+1}.$$

O polinômio de Capelli Cap_m é multilinear e alternado nas variáveis $x_1,\ldots,x_n$. Esse polinômio se destaca na classe dos polinômios alternados. A seguir, veremos que todo polinômio alternado pode ser escrito como combinação linear de polinômios de Capelli obtidos por especificações adequadas dos $y_{i's}$.

Proposição 2. *Se $f\in F\langle X\rangle$ um polinômio alternado nas variáveis $x_1,\ldots,x_m$, então*

$$f=\sum_{w_1,\ldots,w_{m+1}}\alpha_{w_1,\ldots,w_{n+1}}Cap_m(x_1,\ldots,x_m;w_1,\ldots,w_{m+1})$$

é uma combinação linear de polinômios de Capelli, onde $w_1,\ldots,w_{m+1}$ são monômios convenientes (eventualmente vazios) em $F\langle X\rangle$.

Demonstração. Tomemos um monômio não nulo $\beta w_1x_{i_1}w_2x_{i_2}\cdots x_{i_m}w_{m+1}$ que figure em f, onde os $w_{i's}$ são monômios nas outras variáveis das quais f depende. Desde que toda permutação é um produto de transposições, de maneira indutiva temos, para toda $\sigma\in S_m$, que o monômio $w_1x_{\sigma(i_1)}w_2x_{\sigma(i_2)}\cdots x_{\sigma(i_m)}w_{m+1}$ aparece em f com coeficiente $(-1)^{\sigma}\beta$. Assim, obtemos que $Cap_m(x_1,\ldots,x_m;w_1,\ldots,w_{m+1})$ é uma parcela de f com coeficiente $\pm\beta$ e que f é uma combinação linear de tais polinômios. □

Segue da proposição anterior que uma álgebra A satisfaz a *identidade de Capelli* de grau m se todos os polinômios alternados de grau m são identidades para A.

O polinômio $Cap_m(x_1, \dots, x_n; 1, \dots, 1)$, obtido a partir do polinômio de Capelli por 'trocar' as variáveis $y_{i's}$ por 1, denominado *polinômio standard*, também desempenha um papel importante na PI-teoria.

Existe uma versão simplificada da Proposição anterior para o polinômio standard do Exemplo 19.

Proposição 3. *Se $f(x_1, \dots, x_m)$ é um polinômio alternado de grau m, então*

$$f = \alpha St_m(x_1, \dots, x_m) = \alpha \left(\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} \right)$$

para algum $\alpha \in F$.

Demonstração. É um caso particular da Proposição 2, onde os monômios $w_1, \dots, w_{m+1}$ são triviais (vazios). □

Teorema 13. *Seja A uma álgebra de dimensão finita n, então A satisfaz a identidade de Capelli de grau $n+1$. Particularmente, $St_{n+1} \equiv 0$ em A.*

Demonstração. Sendo Cap_{n+1} multilinear, basta mostrar, segundo o Lema 5, que Cap_{n+1} se anula pra qualquer substituição de elementos da base de A. Mas Cap_{n+1} é alternado em $n+1$ elementos, e portanto o resultado segue facilmente da Proposição 1. □

Segue do teorema anterior que a álgebra $M_m(F)$ satisfaz as identidades de Capelli Cap_{m^2+1} e, consequentemente, St_{m^2+1}. Na verdade, mostra-se que m^2+1 é menor grau de uma identidade de Capelli para a álgebra das matrizes $M_m(F)$, ver detalhes na Proposição 1.7.1 em [40], mas esse fato não é válido para o polinômio standard. Amitsur e Levitski provaram em [3] que St_{2m} é um identidade polinomial da álgebra de matrizes $M_m(F)$ de menor grau possível, esse resultado é conhecido como *Teorema de Amitsur-Levitski*.

2 Representações de Grupos e S_n-Ações

Neste capítulo, apresentaremos os principais conceitos e resultados sobre representações de grupos finitos, em especial as representações do grupo simétrico S_n e sua estreita relação com as identidades multilineares de uma dada PI-álgebra. Nas últimas seções, introduziremos a S_n-ação no espaço dos polinômios multilineares em n variáveis, denotado por P_n, e veremos que, através dessa ação, a álgebra de grupo FS_n e P_n são FS_n-módulos isomorfos. Veremos que essa ação fornece ferramentas importantes no estudo do crescimento assintótico das identidades polinomiais multilineares das PI-álgebras.

Salvo menção explicita do contrário, doravante F denotará um corpo de caráterística zero.

2.1 Representações de Grupos

Nessa seção serão apresentados os conceitos e principais propriedades das representações de grupos finitos. Serão demonstrados apenas os resultados diretamente ligados com o tema da tese em questão, sendo indicados referências aos demais.

Definição 22. *Sejam A uma álgebra e V um F-espaço vetorial. Uma* representação linear *de A em V é definida como sendo um homomorfismo de álgebras*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & A & \longrightarrow & End_F(V) \\ & g & \longmapsto & \phi(g) = \phi_g \end{array},$$

onde $End_F(V)$ é a álgebra dos endomorfismos V

Definição 23. *Sejam G um grupo e V um F-espaço vetorial. Uma* representação linear *de G em V é definida como sendo um homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = \varphi_g \end{array},$$

onde $GL(V)$ denota o grupo das transformações lineares invertíveis do espaço vetorial V.

Observação 6. *O* grau de uma representação*, em quaisquer dos casos acima, é definido como sendo a dimensão do espaço vetorial V sobre o corpo F.*

No desenvolvimento desse trabalho, é suficiente considerar representações de grau finito. Dessa forma, notemos que se
$dim_F V = n$, então $GL(V)$ é isomorfo a $GL_n(F)$, onde $GL_n(F)$ denota o grupo das matrizes

invertíveis $n \times n$ com entradas no corpo F, e assim, podemos considerar uma representação de G em V como sendo um homomorfismo $\varphi : G \to GL_n(F)$. Ademais, se $n = 1$ temos $GL(V)$ isomorfo a $F^* = F - \{0\}$, o grupo multiplicativo do corpo F.

Observação 7. *Existe uma correspondência natural entre as representações de um grupo G e as representações da álgebra de grupo FG. De fato, como G é a base da álgebra de grupo FG, tal correspondência pode ser obtida considerando a extensão e a restrição natural, respectivamente. Por essa razão, quando não houver ambiguidades, poderemos escrever G-representações ou FG-representações para significar a mesma coisa. No presente trabalho, serão consideradas apenas representações de grupos ou, equivalentemente, representações de álgebras de grupo.*

Exemplo 22. *Sejam G um grupo e V um F-espaço vetorial de dimensão n, então a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \longrightarrow & GL_n(F) \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) = I_n \end{array}$$

é uma representação de grupo conhecida como representação trivial.

Exemplo 23. *Sendo C_∞ um grupo cíclico infinito e g um gerador de C_∞, então a aplicação definida por*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & C_\infty & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{R}) \\ & g^n & \longmapsto & \varphi(g^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

é uma representação de grau 2.

Definição 24. *Sejam G um grupo, V um F-espaço vetorial e $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação de G em V. Um subespaço W de V é dito ser* φ-invariante *se $\varphi_g(W) \subseteq W$, para todo $g \in G$. Além disso, se existir um subespaço W φ-invariante de V, tal que $\{0_V\} \neq W \neq V$, então diremos que φ é uma* representação redutível. *Do contrário, diremos que φ é uma* representação irredutível.

Consideremos um subespaço W de V φ-invariante, $g \in G$ e a restrição de φ_g a W, a qual denotaremos por $\varphi_g|_W$. Observemos que $\varphi_g(W) \subseteq W$ e $\varphi_{g^{-1}}(W) \subseteq W$, e assim temos que $\varphi_g(W) = W$, visto que $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$. Desde que φ_g é injetiva, obtemos que $\varphi_g|_W$ é bijetor, e, portanto, definimos a *sub-representação* φ_W de φ, como sendo a restrição de φ a W, dada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_W : & G & \longrightarrow & GL(W) \\ & g & \longmapsto & \varphi_W(g) = \varphi_g|_W \end{array}.$$

Definição 25. *Sejam G um grupo e $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação. A representação φ é dita ser* completamente redutível *se existem subespaços $W_1, W_2, \ldots, W_n$ de V φ-invariantes tais que:*

i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$;

ii) *As restrições de* φ *aos* $W_i's$ *são irredutíveis.*

Exemplo 24. *Sobre representações de grupos, temos:*

1. *Toda representação de grau* 1 *é irredutível;*

2. *Se* G *é um grupo finito (não trivial), então toda representação de* G *de grau maior ou igual a* $|G|$ *é redutível;*

3. *Toda representação irredutível é completamente redutível;*

4. *Toda representação trivial de grau finito é completamente redutível.*

Teorema 14. (Teorema de Maschke) *Seja* G *um grupo finito cuja ordem não é divisível pela caráterística do corpo* F*. Se* $\varphi : G \to GL(V)$ *é um representação de grau finito e* W *um subespaço* φ*-invariante de* V*, então existe um subespaço* W_1 φ*-invariante de* V *tal que* $V = W \oplus W_1$*. Consequentemente, obtemos que* φ *é completamente redutível.*

Demonstração. Veja [20], Teorema 10.8. □

Definição 26. *Sejam* G *um grupo,* V *e* W F*-espaços vetoriais, e* φ *e* ψ *representações de* G *em* V *e* W*, respectivamente. Dizemos que* φ *e* ψ *são* equivalentes *se existe uma transformação linear bijetora* $T : V \to W$ *tal que* $\psi_g T = T\varphi_g$*, para todo* $g \in G$*.*

Observação 8. *Dada duas representações equivalentes, então uma é irredutível se, e somente se, a outra o for. Além disso, duas representações equivalentes têm o mesmo grau.*

Existe uma correspondência biunívoca entre representações de um grupo G e os módulos sobre a álgebra de grupo FG. De fato, sendo $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação do grupo G, o produto

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot v = \sum_{g\in G} \lambda_g \varphi_g(v)$$

define uma estrutura de FG-módulo em V. Nesse caso, é comum se referir a V como G-módulo. Agora, sendo W um subespaço φ-invariante de V, temos que $\varphi_g(w) \in W$, donde $g \cdot w \in W$, para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Sendo G é uma base da álgebra de grupo FG, segue que W é submódulo do FG-módulo V. Por outro lado, seja M é um FG-módulo então as aplicações $\psi_g : M \to M$, dadas por $\psi_g(m) = gm$, são transformações lineares de M, tais que $\psi_{g_1 g_2} = \psi_{g_1}\psi_{g_2}$, $\psi_e = Id_M$ (onde e é o elemento neutro do grupo G) e $\psi_g \psi_{g^{-1}} = \psi_{g^{-1}} \psi_g = Id_M$, para todo $g, g_1, g_2 \in G$. Portanto, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi : & G & \longrightarrow & GL(M) \\ & g & \longmapsto & \psi(g) = \psi_g \end{array}$$

está bem definida e é uma representação de G em M. Se N é um submódulo de M, então $an \in N$, para quaisquer $a \in FG$ e $n \in N$, em particular $gn \in N$, donde $\psi_g(n) \in N$, para quaisquer $g \in G$ e $n \in N$. Dessa forma, N é um subespaço ψ-invariante de M.

Observação 9. *Ao combinarmos a correspondência comentada anteriormente com a Observação 7, temos a seguinte correspondência biunívoca:*

$$\left\{ FG\text{-módulos} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{representações de } G \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{representações de } FG \right\}.$$

Proposição 4. *Sejam $\varphi : G \to GL(V)$ e $\psi : G \to GL(W)$ representações de G. Então:*

i) ψ e φ são equivalentes se, e somente se, os FG-módulos correspondentes V e W são isomorfos como módulos;

ii) φ é irredutível se, e somente se, o FG-módulo V correspondente é irredutível.

Demonstração. Ver detalhes em [20]. □

Agora, consideremos a representação linear

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & G & \longrightarrow & GL(FG) \\ & g & \longmapsto & \sigma_g \end{array},$$

onde $\sigma_g : FG \to FG$ é definida por $\sigma_g(\alpha) = g\alpha$. Essa representação é denominada por *representação regular à esquerda de* G, cujo grau é $|G|$. Observemos que σ é a representação correspondente ao FG-módulo ${}_{FG}FG$, e, por isso, comumente, nos referimos à este como *módulo regular (à esquerda) de* G. Notemos que os subespaços σ-invariantes de FG correspondem aos ideais à esquerda da álgebra de grupos FG. Mais categoricamente, os ideais minimais à esquerda de FG (ou submódulos minimais de ${}_{FG}FG$) correspondem às sub-representações irredutíveis de σ.

Teorema 15. *Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível pela caráterística de F. Então, todo FG-módulo irredutível é isomorfo a algum ideal minimal à esquerda de FG. Equivalentemente, toda representação irredutível de G é equivalente a uma sub-representação irredutível da representação regular à esquerda de G.*

Demonstração. Ver detalhes em [20], Teorema 25.10, página 166. □

Proposição 5. *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo de dimensão finita (como espaço vetorial). Se existem $W_1, \ldots, W_r$ e $N_1, \ldots, N_s$ submódulos minimais não triviais de M tais $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r = M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, então $r = s$ e, a menos de permutação, $W_i \simeq N_i$ para $i = 1, \ldots, r$.*

Demonstração. Ver detalhes em [20], Teorema 14.5, página 83. □

Sendo G é um grupo finito cuja ordem não é divisível pela caráterística de F, observemos que segue do Teorema de Maschke e dos dois últimos resultados que FG é soma direta de uma quantidade finita de ideais minimais à esquerda e esses ideais são únicos a menos de isomorfismo. Equivalentemente, as representações irredutíveis de G são únicas à menos de equivalência. Como consequência desse fato, temos o seguinte lema:

Lema 7. *Sejam G um grupo finito e $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ as representações irredutíveis, não equivalentes, de grau finito de G, então a soma dos graus das $\varphi_{i's}$ é menor ou igual a $|G|$.*

Teorema 16. *Consideremos G um grupo finito cuja ordem não é divisível pela a caráterística de F. sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ as representações irredutíveis, à menos de equivalência, de G. Sejam $I_1, \dots, I_m$ os ideais minimais, dois a dois não isomorfos, à esquerda de FG correspondente às essas representações. Então, para cada $i = 1, \dots, m$, temos que $J_i = I_i FG$ é um ideal bilateral. Consequentemente*

$$FG = J_1 \oplus \cdots \oplus J_m.$$

Demonstração. Ver detalhes em[20], Teorema 25.10. □

Nas condições do teorema anterior, mostra-se sem dificuldades que os ideais J_i são ideais minimais bilaterais de FG, portanto, visto como álgebras, são álgebras simples.

Definição 27. *Uma álgebra A é dita ser* simples *se não contém ideal (bilateral) I tal que $\{0\} \subsetneq I \subsetneq A$.*

Agora, consideremos o seguinte teorema.

Teorema 17. (Wedderburn) *Seja A uma álgebra simples e I um ideal minimal à esquerda de A, então $A \simeq M_n(D)$, onde D é algum anel de divisão e $n = \dim_D(I)$.*

Dessa forma, se estivermos sob as hipóteses do teorema de *Maschke*, segue do teorema de *Wedderburn* que

$$FG \simeq M_{n_1}(D^1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D^k),$$

onde $D^1, \dots, D^k$ são álgebras de divisão com dimensão finita sobre F.

Agora, assumindo que F é algebricamente fechado, é fato conhecido que $F \simeq D^i$, e assim $J_i \simeq M_{n_i}(F)$, com $n_i =$

$dim_F J_i$ (vide [41]). Dessa forma, adicionando o fato de F ser algebricamente fechado às hipóteses do Teorema 16, este ganha a seguinte versão

$$FG \simeq M_{n_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{n_m}(F),$$

onde $n_i =$
$dim_F J_i$.

Em verdade, é possível decompor FG em soma direta de álgebra de matrizes exigindo menos do corpo.

Definição 28. *Um corpo F é dito ser um* corpo de decomposição *ou* splitting *de um grupo finito G, se a álgebra de grupo FG é isomorfo à uma soma direta de anéis de matrizes sobre F, isto é,*

$$FG \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(F).$$

De agora em diante, sempre que nos referirmos a álgebra de grupo FG, esta será considerada splitting, à menos de menção em contrário.

Teorema 18. *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que FG seja semissimples e* splitting. *Sendo $M_1, \ldots, M_k$ os FG-módulos irredutíveis dois a dois não isomorfos, então:*

i) $|G| = \sum_{i=1}^{k} (n_i)^2$, *onde* $n_i = \dim_F M_i$;

ii) Todo M_i aparece como fator de decomposição do módulo regular ${}_{FG}FG$ com multiplicidade n_i;

iii) k é o número de classe de conjugação de G.

Demonstração. Os detalhes podem ser encontrados em [63]. □

Nas condições do teorema acima, observemos que número de representações irredutíveis não equivalentes de G é igual ao número de classes de conjugação de G e a soma dos quadrados de seus graus é igual a $|G|$.

Exemplo 25. *Recordemos que o grupo simétrico S_3 tem ordem* 6 *e exatamente três classes de conjugação. Portanto, temos precisamente três S_3-representações irredutíveis de graus* $1, 1, 2$, *uma vez que essa é a única combinação de inteiros positivos satisfazendo*

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6.$$

2.2 Caracteres

Nessa seção abordaremos o conceito e principais resultados sobre os denominados *caracteres*, ferramenta central no presente texto e fundamental no estudo da teoria das representações.

Definição 29. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação linear de G em V. Definimos o* caráter de φ *(ou G-*caráter de φ*) como sendo a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \chi_\varphi : & G & \longrightarrow & F \\ & g & \longmapsto & \chi_\varphi(g) = tr\varphi_g \end{array},$$

onde, para cada $g \in G$, $tr\varphi_g$ é o traço da transformação linear φ_g. Além disso, diremos que χ_φ é um caráter irredutível *se φ o for. Por último,* o grau de χ_φ *é definido como sendo o grau de φ.*

Sejam $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações equivalentes. Temos que existe um isomorfismo de módulos $T : V \longrightarrow W$ tal que $\psi_g T = T\varphi_g$, para todo $g \in G$. Daí,

$$\chi_\psi(g) = tr(\psi_g) = tr(T\varphi_g T^{-1}) = tr(\varphi_g),$$

para todo $g \in G$, donde $\chi_\psi = \chi_\varphi$, ou seja, representações equivalentes possuem o mesmo caráter. Sendo e o elemento neutro do grupo G, temos que $\chi_\varphi(e) = tr(Id_V) = \dim V$. Agora, considerando elementos $g_1, g_2 \in G$, tais que $g_1 = x^{-1}g_2x$, para algum $x \in G$ (elementos conjugados), então

$$\chi(g_1) = tr(\varphi_g) = tr(\varphi_{x^{-1}}\varphi_{g_2}\varphi_x) = tr((\varphi_x)^{-1}\varphi_{g_2}\varphi_x) = tr(\varphi_{g_2}) = \chi(g_2),$$

donde dizemos que χ é uma função de classe, isto é, o valor do caráter é constante nas classes de conjugação de G.

Consideremos um G-módulo V de dimensão finita e φ a G-representação associada a V. O *caráter de V*, denotado por $\chi(V)$, é definido como sendo o caráter de φ. Diremos que o caráter de um G-módulo é *irredutível* se a representação correspondente é irredutível. Observe que G-módulos isomorfos tem G representações equivalentes, e assim possuem o mesmo caráter.

Exemplo 26. *Sejam G um grupo e $\varphi : G \to GL(V)$. Temos;*

1. *Se φ é a representação trivial de grau finito, então $\chi_\varphi(g) = tr(\varphi_g) = tr(I_V) = \dim V$, para todo $g \in G$.*

2. *Se $\psi : G \to F^*$ é uma representação linear de grau 1, temos que $\chi_\psi(g) = \psi(g)$.*

Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível pela caráterística do corpo F. Segue do *Teorema de Maschke* que uma representação linear de grau finito $\varphi : G \to GL(V)$ é completamente redutível, isto é, o FG-módulo correspondente é completamente redutível. Assim, existem $W_1, W_2, \ldots, W_q$ subespaços de V tais que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_q$, cada W_i é φ-invariante e a sub-representação $\varphi_i = \varphi_{W_i}$ é irredutível. Em particular, cada W_i é um FG-módulo irredutível. Dessa forma, tomando β_i base de W_i e $g \in G$ e sendo $B_i = [\varphi_i(g)]_{\beta_i}$, $i = 1, \ldots, q$, temos que $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_q$ é base de V e

$$[\varphi(g)]_\beta = \begin{pmatrix} [\varphi_1(g)]_{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\varphi_2(g)]_{\beta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\varphi_q(g)]_{\beta_q} \end{pmatrix}$$

é uma matriz diagonal em blocos. Portanto, sendo χ_i o caráter de φ_{W_i} e χ o caráter de φ, temos então $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_q$.

Mais geralmente, isto é, com uma representação não necessariamente completamente redutível, temos o seguinte resultado.

Teorema 19. *Todo caráter de um grupo G é soma de caracteres irredutíveis.*

Demonstração. De fato, sejam V um F-espaço vetorial de dimensão n, $\varphi : G \to GL(V)$ uma representação de G em V e χ seu caráter. Se φ for irredutível, então χ também o será e temos o resultado. Supondo φ redutível, seja W o menor subespaço não nulo φ-invariante de V de menor dimensão possível. Seja χ_1 o caráter da sub-representação φ_W. Como φ_W é irredutível, temos que χ_1 também o é. Escrevendo $r = \dim_F W$, γ_1 uma base de W e $\beta = \gamma \cup \gamma_1$ uma base para V, obtida por completação, temos

$$\varphi_g = \begin{pmatrix} B_1(g) & C(g) \\ 0 & B_2(g) \end{pmatrix},$$

onde $B_1(g)$ é um bloco $r \times r$, $C(g)$ é um bloco $r \times (n-r)$ e $B_2(g)$ é um bloco $(n-r) \times (n-r)$, para todo $g \in G$. Sendo φ uma representação, temos $[\varphi_{xy}]_\beta = [\varphi_x]_\beta [\varphi_y]_\beta$, isto é,

$$\begin{pmatrix} B_1(xy) & C(xy) \\ 0 & B_2(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(x)B_1(y) & B_1(x)C(y) + C(x)B_2(y) \\ 0 & B_2(x)B_2(y) \end{pmatrix}.$$

‘Portanto, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} B_2 : & G & \longrightarrow & GL_{n\times n-r(F)} \\ & g & B_2(g) & \end{array}$$

é uma representação linear cujo caráter χ_2 é dado por $\chi_2(g) = trB_2(g)$. Logo,

$$\chi(g) = trB_1(g) + trB_2(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$$

Como B_2 é uma representação de grau menor do que n, o resultado segue por indução.

□

Sendo G um grupo finito com caráterística de F não dividindo a ordem de G, então o número de G-caracteres irredutíveis é finito. Sejam $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_q$ esses caracteres irredutíveis. Se χ é um caráter de G, segue do resultado anterior que devem existir $n_1, n_2, \ldots, n_q$ inteiros não negativos tais que

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + \cdots + n_q\chi_q. \tag{2.1}$$

Consideremos o F-espaço vetorial $\mathcal{F}(G, F)$ de todas as funções de G em F, onde as operações são soma e produto usuais de funções. Sendo G finito e cuja ordem não seja divisível pela caráterística de F, definimos

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle_G : & \mathcal{F}(G,F) & \longrightarrow F & \\ & (f,g) & \longmapsto & \langle f, h\rangle_G = |G|^{-1} \displaystyle\sum_{x\in G} f(x^{-1})h(x) \end{array} .$$

Essa aplicação é uma forma bilinear não degenerada em $\mathcal{F}(G, F)$.

Proposição 6. *Seja F um corpo algebricamente fechado com caráterística zero e $J_1, \ldots, J_k$ todas as representações irredutíveis duas-a-duas não equivalentes de G, com caracteres correspondente $\chi_1, \ldots, \chi_k$, respetivamente. Sendo $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G e escrevendo $V \simeq m_1J_1 \oplus \cdots \oplus m_kJ_k$, com $m_i \geq 0$, temos*

1. $\chi_\rho = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i\chi_i$
2. $\langle\chi_\rho, \chi_i\rangle_G = m_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, k$;
3. $\langle\chi_\rho, \chi_\rho\rangle_G = \displaystyle\sum_{i}^{k} m_i^2$;
4. χ_ρ *é irredutível se, e somente se,* $\langle\chi_\rho, \chi_\rho\rangle_G = 1$;
5. $\langle\chi_i, \chi_j\rangle_G = 0$, *para quaisquer* $i, j = 1, \ldots, k$;
6. *Se* $\rho^{'}$ *é uma outra representação de* G, *então* $\rho^{'}$ *é equivalente à* ρ *se, e somente se,* $\chi_{\rho'} = \chi_\rho$.

Demonstração. Ver detalhes em [59]. □

Agora vamos estabelecer o conceito de produto tensorial de representações de um mesmo grupo e, posteriormente, para diferentes grupos.

Consideremos G um grupo e $\varphi : G \longrightarrow GL(V_1)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(V_2)$ representações lineares de G de graus n e m, respectivamente. Dado $g \in G$, considere a aplicação $F_g : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ dada por $F_g(v_1, v_2) = \varphi_g(v_1) \otimes \psi_g(v_2)$. Observemos que F_g está bem definida e, pela bilinearidade dos tensores e de φ_g e ψ_g, é bilinear. Segue da *propriedade universal* que existe uma transformação linear $\rho_g : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$ tal que $\rho_g(v_1 \otimes v_2) = \varphi_g(v_1) \otimes \psi_g(v_2)$. Como $\varphi_g \in GL(V_1)$ e $\psi_g \in GL(V_2)$, temos que $\rho_g \in GL(V_1 \otimes V_2)$. Logo, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \rho : & G & \longrightarrow & GL(V_1 \otimes V_2) \\ & g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g \end{array} .$$

é uma representação linear de G em $V_1 \otimes V_2$, a qual denotaremos por $\varphi \otimes \psi$. Chamamos essa representação de *produto tensorial* de φ e ψ. Temos que $\chi_\rho = \chi_\varphi \chi_\psi$, ou seja, $\chi_\rho(g) = \chi_\varphi(g)\chi_\psi(g)$, para $g \in G$ (ver [43], capítulo 5).

Agora, consideremos dois grupos finitos G_1 e G_2 de ordem n e m, respectivamente, e o produto direto $G_1 \times G_2$, cuja ordem é nm. Sejam $\varphi : G_1 \to GL(V_1)$ e $\psi : G_2 \to GL(V_2)$ representações lineares de G_1 em V_1 e de G_2 em V_2, respectivamente. Definimos, de modo análogo ao argumento anterior, uma representação linear $\varphi \# \psi$ de $G_1 \times G_2$ em $V_1 \otimes V_2$ da seguinte forma

$$(\varphi \# \psi)(g_1, g_2) = \varphi_{g_1} \otimes \psi_{g_2},$$

onde $(\varphi_{g_1} \otimes \psi_{g_2})(v_1 \otimes v_2) = \varphi_{g_1}(v_1) \otimes \psi_{g_2}(v_2)$, para quaisquer $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Essa representação também é chamada de *produto tensorial de φ e ψ*, mas é a representação do produto direto dos grupos G_1 e G_2. De modo análogo, mostra-se também que

$$\chi_{\varphi \# \psi}(g_1, g_2) = \chi_\varphi(g_1)\chi_\psi(g_2).$$

Portanto, sendo χ o caráter do produto tensorial de duas representações φ e ψ, de um mesmo grupo ou de grupos diferentes, em ambos os casos temos $\chi = \chi_\varphi \chi_\psi$. Então, por simplicidade, sempre escreveremos $\chi = \chi_\varphi \otimes \chi_\psi$, e, usando a notação de módulos, temos $\chi(V_1 \otimes V_2) = \chi_\varphi(V_1) \otimes \chi_\psi(V_2)$, omitindo os grupos, citaremos caso necessário (detalhes em [43]).

Consideremos $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação de G em V, K uma extensão do corpo F e β uma base de V. Notemos que $V_K = K \otimes_F V$ é um espaço vetorial sobre K com base $\beta_K = \{1 \otimes v : v \in \beta\}$. A aplicação $\rho_K : G \longrightarrow GL(V_K)$ dada por $\rho_K = \pi \otimes \rho$, onde π é a representação trivial de G em K, é uma representação. Sendo U é um subespaço ρ-invariante de V, temos que $U_K = K \otimes_F U$ é um subespaço ρ_K-invariante de V_K, e assim, se ρ_K é irredutível, então ρ é irredutível. Dizemos que ρ_K é a extensão de ρ, obtida por extensão de F.

Definição 30. *Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação irredutível. Dizemos que:*

i) ρ *é* absolutamente irredutível *se* ρ_K *é irredutível para toda extensão* K *do corpo base* F*;*

ii) O corpo F *é* "splitting field" *para o grupo* G *se toda representação irredutível de* G *é absolutamente irredutível.*

É possível, em algumas situações, estabelecer a completa redutibilidade de representações do produto direto de grupos $G_1 \times G_2$, a partir das representações de G_1 e G_2.

Teorema 20. *Consideremos* G_1, G_2 *grupos finitos e* ψ_1, ψ_2 *representações lineares de* G_1 *e* G_2*, respectivamente. Suponhamos que* F *é algebricamente fechado e a caráterística de* F *não divida a ordem de* $G_1 \times G_2$*. Então:*

i) Se ψ_1 *e* ψ_2 *são irredutíveis, então* $\psi_1 \otimes \psi_2$ *é uma representação irredutível de* $G_1 \times G_2$*.*

ii) Toda representação irredutível de $G_1 \times G_2$ *é equivalente a uma representação* $\psi_1 \otimes \psi_2$*, onde* ψ_i *é uma representação irredutível de* G_i*,* $i = 1, 2$*.*

Demonstração. Ver detalhes em [62], capítulo 8. □

Agora, consideremos G um grupo finito e H um subgrupo de G. Então, se V um G-módulo, claramente temos, por restrição, que V é um H-módulo, o qual denotaremos por $V^{\downarrow H}$ e o chamamos de *módulo induzido sobre* H. Reciprocamente, se V é um H-módulo, então não é difícil ver que o espaço $FG \otimes_{FH} V$ tem uma estrutura natural de G-módulo, o qual denotaremos por $V^{\uparrow G}$ e chamamos de *Módulo induzido por* V *em* G.

Outrossim, sendo χ o caráter do G-módulo (H-módulo, respectivamente) V, então $\chi^{\downarrow H}$ ($\chi^{\uparrow G}$, respectivamente) representa o caráter do módulo induzido. Quando um módulo é irredutível, este geralmente não permanece irredutível quando induzido. Contudo, em caráterística zero, temos a fórmula chamada *Reciprocidade de Frobenius* que relaciona esses dois objetos.

Teorema 21. ***(Reciprocidade de Frobenius)*** *Sejam* G *um grupo finito,* H *um subgrupo de* G *e* F *um um corpo cuja caráterística é zero ou* p*, com* p *não dividindo a ordem de* G*. Então, se* χ *um caráter de* H *e* ψ *é um caráter de* G*, temos*

$$\langle \psi^{\downarrow H}, \chi \rangle_H = \langle \psi, \chi^{\uparrow G} \rangle_G.$$

Demonstração. Ver detalhes em [20]. □

2.3 Representações do grupo simétrico S_n

Nessa seção abordaremos a teoria das representações do grupo simétrico S_n, $n \geq 1$. É fato bem conhecido na teoria das representações do grupo simétrico S_n que é suficiente trabalhar sobre os racionais. Mais precisamente, "toda" representação irredutível sobre um corpo de característica zero tem uma cópia sobre o corpo dos racionais. Usando esse fato, veremos que o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$, e, portanto, qualquer corpo de característica zero, será o que chamamos de *splitting field* para a álgebra de grupo FS_n. Sendo F um corpo de característica zero, segue que FS_n é isomorfa a uma soma direta de álgebras de matrizes sobre F. Mostraremos, a seguir, que essas componentes, e, por conseguinte, as S_n-representações irredutíveis, estão em correspondência biunívoca com as partições de n.

Definição 31. *Seja $n \geq 1$ um número inteiro. Definimos uma* partição *de n como sendo uma r-úpla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ de inteiros tais que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ e $\sum_i^r \lambda_i = n$. Nesse caso, usaremos a notação $\lambda \vdash n$ e $|\lambda| = r$.*

Sendo $n \geq 1$ um inteiro e $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1+,\ldots,+k_p})$, se

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k_1} = \mu_1, \ldots, \lambda_{k_1+,\ldots,+k_{p-1}+1} = \cdots = \lambda_{k_1+,\ldots,+k_p} = \mu_p,$$

então usaremos a notação

$$\lambda = (\mu_1^{k_1}, \ldots, \mu_p^{k_p}).$$

As partições de um mesmo número inteiro são ordenadas pela *ordem lexicográfica*, isto é, se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$ são partições de n, então diremos que $\lambda > \gamma$ se $\lambda_k > \gamma_k$, onde $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \neq \gamma_i\}$.

Sendo $\sigma \in S_n$, recordemos que podemos decompor σ de maneira única em produto de ciclos disjuntos, incluindo 1-ciclos, respeitando a ordem lexicográfica. Ou ainda, se exigirmos $\sigma = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_r$, onde $\pi_1, \ldots, \pi_r$ são ciclos de comprimentos $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1$, respectivamente. Então a partição $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$ determina unicamente a classe de conjugação de σ, pois é fato conhecido que duas permutações são conjugadas em S_n se, e somente se, possuem a mesma estrutura cíclica.

Por outro lado, vimos na *Seção 2.1* que as classes de conjugação de S_n estão em correspondência biunívoca com os S_n-módulos irredutíveis, que por sua vez também se correspondem, biunivocamente, com os caracteres irredutíveis de S_n. Portanto, dado $\lambda \vdash n$, denotaremos por χ_λ o S_n-caráter irredutível e por M_λ o S_n-módulo irredutível correspondente à λ. Além disso, denotaremos por $d_\lambda = \chi_\lambda(1) = \dim_F M_\lambda$, o grau de χ_λ.

Proposição 7. *Sejam F um corpo de caráterística zero e $n \geq 1$ um inteiro. Então existe uma correspondência biunívoca entre os S_n-caracteres irredutíveis e partições de n. Sejam*

$\{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ *o conjunto completo dos caracteres irredutíveis de* S_n *e* $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$*, o grau de* χ_λ*. Temos*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F),$$

onde $I_\lambda = e_\lambda F S_n \simeq M_{d_\lambda}(F)$ *é o ideal bilateral minimal de* FS_n *correspondente à* λ *e* $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ *é a unidade, à menos de escalar, de* I_λ*.*

Demonstração. Ver detalhes em [40], página 47. □

Lema 8. *O elemento* $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma)\sigma$ *é, a menos de um múltiplo por escalar, um idempotente central minimal da álgebra* FS_n*.*

Observação 10. *Considerando a representação regular* ρ *de* S_n*, ainda sob as notações da proposição anterior, temos que*

$$\chi_\rho = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda.$$

Adiante, introduziremos algumas ferramentas no sentido de calcular explicitamente o inteiro d_λ.

Agora, considerando $\lambda \vdash n$, temos então um S_n-módulo irredutível M_λ, e, consequentemente, um S_n-caráter irredutível χ_λ associado à λ. Quando conveniente, podemos denotar esse caráter simplesmente por $[\lambda]$. Sendo S_n finito, segue da equação (2.1) que se χ é o caráter de uma representação de S_n, então

$$\chi = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda [\lambda].$$

Observação 11. *Dados* n, m *inteiros positivos, então todo corpo de caráterística zero é splitting field para* S_n *e* $S_n \times S_m$ *(ver [43], capítulo 5).*

Sejam F um corpo de caráterística zero e K um corpo algebricamente fechado contendo F. Sendo ρ uma F-representação irredutível de $S_n \times S_m$ e ρ_K sua extensão, então segue da Observação 11 que ρ_K é uma K-representação irredutível de $S_n \times S_m$. Portanto, o Teorema 20 garante que ρ_K é o produto tensorial de representações irredutíveis de S_n e S_m, e assim, ρ é produto tensorial de representações irredutíveis de S_n e S_m (sobre o corpo F). Dessa forma, sendo ψ uma representação de $S_n \times S_m$ e χ_ψ seu caráter, temos

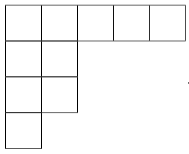
$$\chi_\psi = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} m_{\lambda,\mu} \chi_{\lambda,\mu} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} m_{\lambda,\mu} [\lambda] \otimes [\mu], \tag{2.2}$$

onde $\chi_{\lambda,\mu}$ é um caráter irredutível de ψ, o qual é produto de caracteres irredutíveis de representações irredutíveis de S_n e S_m, denotado por $[\lambda] \otimes [\mu]$.

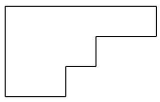
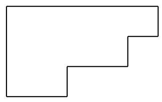
Definição 32. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$. O diagrama D_λ, chamado de* diagrama de Young associado a λ, *é um subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido como sendo*

$$D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Observemos que D_λ possui exatamente n elementos. Representaremos D_λ como uma matriz composta por n blocos distribuídos em r linhas, de modo que a primeira coordenada i (linha indexada) aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada j (coluna indexada) aumenta da esquerda para a direita e o número de bloco na i-ésima linha é exatamente λ_i. À titulo de ilustração, consideremos o exemplo em que $n = 10$ e $\lambda = (5,2,2,1) \vdash n$, logo

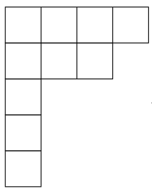
$$D_{(5,2,2,1)} =$$  .

Observação 12. *Como para cada partição $\lambda \vdash n$ temos seu diagrama D_λ correspondente, podemos, quando conveniente, escrever a equação (2.2) da seguinte forma*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} m_{\lambda,\mu} [\lambda] \otimes [\mu] = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} m_{\lambda,\mu}$$  $\otimes$  ,

substituindo os caracteres irredutíveis pelos seus respectivos diagramas.

Para a partição $\lambda \vdash n$. Definimos a *partição conjugada* de λ, denotada por $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_s')$, onde $\lambda_1', \ldots, \lambda_s'$ são os comprimentos das colunas de D_λ. Tomando o exemplo anterior, onde $n = 10$ e $\lambda = (5,2,2,1) \vdash n$, temos $\lambda' = (4,3,1^3)$, e

$$D_{\lambda'} =$$  .

Definição 33. *Seja $\lambda \vdash n$. Definimos uma* tabela de Young T_λ *do diagrama D_λ como sendo um preenchimento dos blocos de D_λ com os inteiros $1, ..., n$. T_λ é chamada de* tabela de Young do tipo λ. *Quando necessário, escreveremos $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é o inteiro no bloco (i,j).*

Simbolicamente, uma *tabela de Young* é entendida como sendo uma bijeção $T_\lambda : D_\lambda \to \{1, \ldots, n\}$, onde coloca-se o elemento $T(i,j)$ na posição correspondente ao elemento (i,j) (i-ésima linha e j-ésima coluna), para cada $(i,j) \in D_\lambda$. Sendo $\sigma \in S_n$, definimos σT_λ como sendo a composta $\sigma \circ T_\lambda : D_\lambda \to \{1, \ldots, n\}$. Observemos que se T_1 e

T_2 são duas tabelas associadas ao mesmo diagrama, existe uma única permutação $\sigma \in S_n$ tal que $T_2 = \sigma T_1$. Portanto, dado $\lambda \vdash n$, existem $n!$ tabelas de Young, distintas, do tipo λ. Um papel importante é desempenhando pelas denominadas *tabelas standard*.

Definição 34. *Uma Tabela de Young T_λ do tipo λ é dita ser* standard *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de T_λ crescem da esquerda para direita e de cima para baixo, respectivamente.*

Exemplo 27. *Seja $\lambda = (3, 2) \vdash 5$. Temos que*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

é standard. Enquanto que

$$T_\lambda^* = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

não é standard.

Existe uma relação muito importante entre as tabelas standard e os graus dos S_n-caracteres irredutíveis.

Teorema 22. *Seja $\lambda \vdash n$. Então, o número $ST(\lambda)$ de tabelas standard do tipo λ é igual a d_λ, grau de χ_λ, o S_n-caráter irredutível correspondente à λ.*

Demonstração. Ver detalhes em [10], Teorema 4.6. □

Apresentaremos, a seguir, duas fórmulas clássicas para o cálculo explicito do número d_λ. Para tanto, precisamos das seguintes terminologias.

Definição 35. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ e $(i_0, j_0) \in D_\lambda$. Definimos o* gancho (i_0, j_0) *de D_λ como sendo o conjunto*

$$\{(i_0, j) \mid j_0 \leq j \leq \lambda_{i_0}\} \cup \{(i, j_0) \mid i_0 \leq i \leq \lambda'_{j_0}\},$$

onde $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_s')$ é a partição conjugada de λ. Definimos, também, o número gancho

$$h_{i_0 j_0} = \lambda_{i_0} + \lambda'_{j_0} - i_0 - j_0 + 1,$$

o qual, na prática, conta os elementos do gancho (i_0, j_0).

Exemplo 28. *Consideremos $\lambda = (5, 4, 3, 2, 1) \vdash 15$. A representação do gancho $(2, 2)$ no diagrama D_λ é*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & X & X & X \\ \cline{1-4} & X & \\ \cline{1-3} & X \\ \cline{1-2} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Observe que $h_{2,2} = 5$.

Teorema 23. (Fórmula do Gancho) *Seja* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$. *O número* $ST(\lambda)$ *de tabelas Standard do diagrama* D_λ *é dado por*

$$ST(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}}.$$

Demonstração. Ver detalhes em [44], Teorema 2.3.21. □

Proposição 8. ***(Fórmula de Young-Frobenius)*** *Sejam* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ *e* $l_1 = \lambda_1 + k - 1, l_2 = \lambda_2 + k - 2, \ldots, l_k = k$. *Então,*

$$d_\lambda = \frac{n!}{l_1! \ldots l_k!} \prod_{1 \le i < j \le k} (l_i - l_j),$$

onde os produtos percorrem os blocos de D_λ.

As duas últimas fórmulas permitem o cálculo explicito dos graus dos S_n-caracteres irredutíveis, e, portanto, as dimensões dos ideais minimais de FS_n. Agora, iremos descrever esses ideias e seus geradores.

Definição 36. *Sejam* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ *e* $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$. *Definimos:*

1. *O* grupo estabilizador de linhas *de* T_λ *como sendo*

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{r\lambda_r}),$$

   onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\lambda_i})$ *denota o grupo simétrico* S_{λ_i} *agindo nos* λ_i *inteiros* $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\lambda_i}$ *contidos na i-ésima linha de* T_λ*;*

2. *O* grupo estabilizador de colunas *de* T_λ *como sendo*

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{\lambda'_1 1}) \times \cdots \times S_{\lambda'_s}(a_{1\lambda_1}, a_{2\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda'_s\lambda_1}),$$

   onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ *é a partição conjugada de* λ *e* $S_{\lambda'_j}(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{j\lambda'_j})$ *denota o grupo simétrico* $S_{\lambda'_j}$ *agindo nos* λ'_j *inteiros* $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{j\lambda'_j}$ *da* j*-ésima coluna de* $D_{\lambda'}$.

Observemos que R_{T_λ} e C_{T_λ} são subgrupos (imersos) de S_n , os quais consistem de todas as permutações de S_n que estabilizam as linhas e colunas, respectivamente, de T_λ.

Exemplo 29. *Sendo* $\lambda = (3, 2) \vdash 5$ *e*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \cline{1-2} \end{array},$$

temos

$$\begin{aligned} R_{T_\lambda} &= \{Id_{S_5}, (13), (15), (35), (135), (153), (24), \\ &\quad (13)(24), (15)(24), (35)(24), (135)(24), (153)(24)\} \end{aligned}$$

e

$$C_{T_\lambda} = \{Id_{S_5}, (12), (34), (12)(34)\}.$$

Definição 37. *Sejam A uma álgebra e $a \in A$ um elemento idempotente. Dizemos que:*

1. *O elemento a é* idempotente essencial *se existe algum $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, tal que $a^2 = \lambda a$;*

2. *O elemento a é* idempotente minimal *se o ideal gerado por ele for minimal.*

É fácil ver que se $a^2 = \lambda a$, com $\lambda \neq 0$, então $e = \lambda^{-1} a$ é um elemento idempotente. Portanto, de agora em diante, o adjetivo *essencial* será omitido.

Dada uma tabela de Young T_λ do tipo λ, consideremos o seguinte elemento da álgebra de grupo FS_n

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\mu \in C_{T_\lambda}} (-1)^\mu \sigma \mu, \tag{2.3}$$

onde $(-1)^\mu$ denota o sinal de μ.

O elemento em (2.3) desenvolve um papel importante no estudo dos S_n-caracteres irredutíveis. Primeiramente, mostra-se que $e_{T_\lambda}^2 = a e_{T_\lambda}$, onde $a = \dfrac{n!}{d_\lambda} = \prod_{i,j} h_{ij}$ é um inteiro não nulo, ver [10]. A proposição seguinte mostra que $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal minimal à esquerda (módulo irredutível) de FS_n, com caráter χ_λ, correspondente à partição $\lambda \vdash n$.

Proposição 9. *Seja $\lambda \vdash n$. Para toda tabela de Young T_λ do tipo λ, o elemento e_{T_λ} é um idempotente central minimal de FS_n e $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal minimal à esquerda de FS_n com caráter χ_λ. Além disso, se T_λ e T_λ^* são tabelas de Young do mesmo tipo, então e_{T_λ} e $e_{T_\lambda^*}$ são conjugados em FS_n para algum σ.*

Demonstração. Ver detalhes em [10], Teoremas 3.1 e 3.2. □

Segue da proposição acima que duas tabelas de Young T_λ e T_λ^* são do mesmo tipo λ se, e somente se, $FS_n e_{T_\lambda} \simeq FS_n e_{T_\lambda^*}$. Os ideais minimais da forma $FS_n e_{T_\lambda^{'s}}$, onde $T_\lambda^{'s}$ são tabelas standard do mesmo tipo λ, fornecem uma decomposição do ideal bilateral minimal I_λ de FS_n, correspondente à λ.

Proposição 10. *Sejam $T_1, \ldots, T_{d_\lambda}$ todas as tabelas de standard do tipo λ, então o ideal bilateral minimal I_λ de FS_n correspondente à λ, tem a seguinte decomposição*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_\lambda}.$$

Demonstração. Ver [40], proposição 2.2.14. □

Dessa forma, obtemos a seguinte decomposição para FS_n

$$FS_n = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ T_\lambda \text{ standard}}} FS_n e_{T_\lambda}.$$

2.4 S_n-Representações Induzidas

Nessa seção abordaremos as *representações induzidas* com destaque ao *Branching Theorem* e a *Regra de Littlewood-Richardson*. Esses dois resultados são fundamentais para entender a decomposição dos *caracteres Y-próprios*, objeto de interesse central nessa tese.

Começamos por considerar a imersão do grupo S_n em S_{n+1}. De fato, S_n é isomorfo ao subgrupo de S_{n+1} de todas as permutações de S_{n+1} que fixam o inteiro $n+1$. Agora, sendo M_λ o S_n-módulo irredutível correspondente a $\lambda \vdash n$, denotaremos por ${M_\lambda}^{\uparrow S_{n+1}}$ como sendo a indução de M_λ em S_{n+1}. Reciprocamente, sendo M_μ o S_{n+1}-módulo irredutível correspondente a partição $\mu \vdash n$, denotaremos por ${M_\mu}^{\downarrow S_n}$ como sendo a restrição de M_μ a S_n.

Teorema 24. ***(Branching Theorem)*** *Consideremos a imersão de S_n em S_{n+1} como o subgrupo fixando o inteiro $n+1$. Então,*

1. *Se $\lambda \vdash n$, temos*
$$ {M_\lambda}^{\uparrow S_{n+1}} \simeq \sum_{\mu \in \lambda^+} M_\mu $$
onde λ^+ é o conjunto de todas as partições de $n+1$ cujo diagrama de Young é obtido a partir de D_λ por adicionar um bloco.

2. *Se $\mu \vdash n+1$, então*
$$ {M_\mu}^{\downarrow S_n} \simeq \sum_{\lambda \in \mu^-} M_\lambda $$
onde μ^- é o conjunto de todas as partições de n cujo diagrama de Young é obtido a partir de D_μ por remover um bloco.

Demonstração. Ver detalhes em [44], Teorema 2.4.3. □

Observação 13. *Segue da Reciprocidade de Frobenius que* (1) *e* (2)*, no teorema anterior, são formulações equivalentes.*

Agora, consideraremos a imersão de $S_n \times S_m$ em S_{n+m}, obtida ao fazer S_n agir nos n primeiros inteiros $\{1, \ldots, n\}$, como usual, e S_m agir em $\{n+1, \ldots, n+m\}$.

Recordemos que se M é um S_n-módulo e N é um S_m-módulo, então $M \otimes_F N$ tem uma estrutura de $S_n \times S_m$-módulo.

Definição 38. *Se M é um S_n-módulo e N é um S_m-módulo, então o* produto tensorial externo *de M e N é definido como sendo.*

$$M \widehat{\otimes} N = (M \otimes N)^{\uparrow S_{n+m}}.$$

Dadas partições $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$, introduziremos um algorítimo denominado *Regra de Littlewood- Richardson* que calcula a multiplicidade dos caracteres irredutíveis que figuram na decomposição de $M_\lambda \widehat{\otimes} M_\mu$.

Definição 39. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ tal que $\sum_i \alpha_i = n$, onde os $\alpha_{i's}$ são inteiros positivos. Uma* tabela de Young generalizada *do tipo λ e* conteúdo *α é um preenchimento do diagrama D_λ com inteiros positivos tais que i ocorre em D_λ exatamente α_i vezes.*

Exemplo 30.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 1 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-3} 3 & \multicolumn{5}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

é a tabela de Young generalizada do tipo $\lambda = (6, 3, 1)$ e conteúdo $\alpha = (3, 4, 2, 1)$. Observe que uma tabela de Young T_λ, $\lambda \vdash n$, tem conteúdo $\alpha = (1^n)$.

Definição 40. *Uma tabela de Young é dita ser* semi-standard *se os números são crescentes, com eventuais repetições, ao longo das linhas e estritamente crescentes ao longo das colunas.*

Definição 41. *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q) \vdash m$. Dizemos que λ é maior ou igual a μ e denotamos por $\lambda \geq \mu$, se $p \geq q$ e $\lambda_i \geq \mu_i$ para todo $i = 1, \ldots, p$ (Quando $n = m$, essa ordem se reduz à ordem lexicográfica). Na linguagem de diagramas, dizer que $\lambda \geq \mu$ significa dizer que D_μ é um sub-diagrama de D_λ, isto é, $D_\lambda \supseteq D_\mu$.*

Consideremos $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$ com $\lambda \geq \mu$. Uma *partição distorcida* é entendida como sendo $\lambda \setminus \mu = (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \ldots)$ e o *diagrama distorcido* $D_{\lambda \setminus \mu}$ é o conjunto dos blocos de D_λ que, eventualmente, não pertençam a D_μ. Por exemplo, se $\lambda = (4, 2, 2, 1)$, $\mu = (3, 2)$, então $\lambda \setminus \mu = (1, 0, 2, 1)$ e

$$D_{\lambda \setminus \mu} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline * & * & * & \\ \hline * & * & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} & & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Definição 42. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ tal que $\sum_i \alpha_i = n$ e os $\alpha_{i's}$ são inteiros positivos. Dizemos que α é uma* permutação reticulada *se para cada j o número de $i's$ que ocorrem entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ é maior ou igual ao número de $(i+1)'s$ para cada i.*

Teorema 25. ***(Regra de Littlewood- Richardson)*** *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$. Então,*

$$M_\lambda \widehat{\otimes} M_\mu \simeq \sum_{\gamma \vdash n+m} k^{\mu}_{\gamma \setminus \lambda} M_\gamma,$$

onde $k^{\mu}_{\gamma\setminus\lambda}$ é o número de tabelas semi-standard do tipo $\gamma \setminus \lambda$ e conteúdo μ, o qual gera permutações reticuladas quando lemos suas entradas da direita para a esquerda e de cima pra baixo.

Demonstração. Ver detalhes em [44], Teorema 2.8.13. □

Na prática, o algoritmo do teorema anterior mostra como obter o diagrama D_γ associado à partição $\gamma = \lambda \widehat{\otimes} \mu \vdash n+m$ à partir dos diagramas D_λ e D_μ. Sejam $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash m$ e $\gamma \vdash n+m$. Consideremos $T_\mu = D(a_{ij})$, onde os $(a_{ij's})$ são símbolos. Então, *Regra de Littlewood-Richardson* é como segue:

1. Primeiramente, adicione em D_λ todos os blocos com os símbolos a_{1j}, após a adição, nenhuma linha da nova tabela pode ter mais blocos que a linha anterior.

2. Em seguida, adicione todos os blocos com os símbolos a_{2j} de acordo com a mesma regra, e assim por diante, até que todos os blocos com os símbolos sejam adicionados.

3. Esse processo de adição de blocos devem ser tais que para todo i, se $y < j$, então a_{iy} aparece em uma coluna posterior à de a_{ij} , e para todo j, se $x < i$, então a_{xj} aparece em uma linha anterior à de a_{ij}.

2.5 S_n-Ação no Espaço dos Polinômios Multilineares

Nessa seção introduziremos a ação natural do grupo simétrico S_n no espaço dos polinômios multilineares com n variáveis fixas. Essa ação possibilita o estudo do crescimento assintótico das identidades polinomiais multilineares das PI-álgebras através dos S_n-módulos irredutíveis e seus cocaracteres.

Teorema 26. *Seja M um S_n-módulo irredutível à esquerda com caráter $\chi(M) = \chi_\lambda$, onde $\lambda \vdash n$. Temos que M pode ser gerado, como um S_n-módulo, por um elemento da forma $e_{T_\lambda} f$, para algum $f \in M$ e alguma tabela de Young T_λ do tipo λ. Além disso, para qualquer tabela de Young T^*_λ do tipo λ existe $f' \in M$ tal que $M = FS_n e_{T^*_\lambda} f'$.*

Demonstração. Recordemos que temos a decomposição $FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$, onde I_λ é o ideal bilateral de FS_n correspondente a partição $\lambda \vdash n$, e, portanto, segue da Proposição 10 que

$$FS_n = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ T_\lambda \ standard}} FS_n e_{T_\lambda}.$$

Desde que $M = FS_n M$, temos que existem $\mu \vdash n$, T_μ tabela de Young do tipo μ e $f \in M$ tais que $0 \neq FS_n e_{T_\mu} f \subseteq M$. Logo, sendo M irredutível, temos $FS_n e_{T_\mu} f = M$. Como os S_n-caractres são definidos pelas partições de n e $\chi(M) = \chi_\lambda$, temos que $\lambda = \mu$.

Agora, suponhamos que T_λ^* seja uma outra tabela de Young do mesmo tipo λ. Segue da Proposição 9 que $e_{T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda^*} \sigma^{-1}$, para algum $\sigma \in S_n$. Tomando $f' = \sigma^{-1} f \in M$, obtemos que $M = FS_n e_{T_\lambda} f = FS_n \sigma e_{T_\lambda^*} \sigma^{-1} f = FS_n e_{T_\lambda^*} \sigma^{-1} f = FS_n e_{T_\lambda^*} f'$. □

O lema anterior nos garante que dada uma partição $\lambda \vdash n$ e uma tabela de Young do tipo λ, então todo S_n-módulo irredutível M com $\chi(M) = \chi_\lambda$ é gerado por um elemento da forma $e_{T_\lambda} f$, para algum $f \in M$.

Observação 14. *Um fato interessante sobre o elemento $e_{T_\lambda} f$ é que ele é invariante pela R_{T_λ}-ação. De fato, sendo $\rho \in R_{T_\lambda}$, temos*

$$\rho e_{T_\lambda} f = \rho \Big(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda} \tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \sigma \tau \Big) f = \Big(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda} \tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \underbrace{\rho \sigma} \tau \Big) f = e_{T_\lambda} f.$$

Como f pode ser, eventualmente, o elemento 1, temos que o elemento idempotente central e_{T_λ} é invariante pela R_{T_λ}-ação.

Seja M um S_n-módulo. O número de elementos invariantes pela ação à esquerda de R_{T_λ} em M tem uma estreita relação com o número de S_n-submódulos irredutíveis de M.

Lema 9. *Sejam T_λ uma tabela de Young correspondente a $\lambda \vdash n$ e M um S_n-módulo tal que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$, onde $M_1, \ldots, M_m$ são S_n-submódulos irredutíveis de M com caráter χ_λ. Então, m é igual ao número máximo de elementos linearmente independentes $g \in M$ tais que $\sigma g = g$ para todo $\sigma \in R_{T_\lambda}$.*

Demonstração. Ver detalhes em [40], Lema 2.4.2. □

Agora, abordaremos a S_n-ação no espaço P_n, dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, cuja base é

$$\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\},$$

no contexto da PI-teoria.

O produto

$$\begin{array}{rcl} \cdot\ : FS_n \times P_n & \longrightarrow & P_n \\ (\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma, f) & \longmapsto & (\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma\sigma)\cdot f \end{array} \tag{2.4}$$

onde $(\sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma\sigma)\cdot f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ induz uma estrutura de S_n-módulo à esquerda em P_n.

Além disso, considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : FS_n & \longrightarrow & P_n \\ \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma\sigma & \longmapsto & \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)} \end{array}$$

tal que $\varphi(a) = a\cdot(x_1\cdots x_n)$, para todo $a \in FS_n$. É fácil ver que φ é um isomorfismo de FS_n-módulos à esquerda. Ou melhor, P_n é isomorfo ao módulo regular de S_n. Portanto, temos uma correspondência biunívoca entre os elementos de FS_n e P_n e, por essa razão, comumente trataremos os elementos de FS_n como polinômios (multilineares) e vice-versa.

Recordemos que se A é uma PI-álgebra e F é um corpo com caraterística zero, então o T-ideal $T(A)$ das identidades polinomiais de A é gerado completamente pelos espaços $(T(A)\cap P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A seguir, introduziremos algumas terminologias e ferramentas objetivando um estudo mais detalhado desses espaços.

Observemos que os T-ideais são invariantes pela ação em (2.4), assim sendo $f(x_1,\ldots,x_n) \in T(A)\cap P_n$, temos

$$\sigma f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) \in T(A)\cap P_n$$

para todo $\sigma \in S_n$ e, portanto, segue que $T(A)\cap P_n$ é um S_n-submódulo à esquerda de P_n. Dessa forma, temos uma estrutura de S_n-módulo à esquerda induzida no espaço quociente

$$P_n(A) = \frac{P_n}{T(A)\cap P_n}.$$

Sendo $F\langle X\rangle$ a álgebra livre de posto enumerável em $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, então $P_n(A)$ é o espaço dos elementos multilineares nas n primeiras variáveis da álgebra relativamente livre $F\langle X\rangle/T(A)$.

Definição 43. *Dado $n \geq 1$, definimos o n-ésimo* cocaráter *de A, denotado por $\chi_n(A)$, como sendo o S_n-caráter de $P_n(A) = P_n/(T(A)\cap P_n)$.*

Mais adiante, iremos estudar o comportamento assintótico da *sequência de codimensões* $(c_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$, onde $c_n(A) = \chi_n(A)(1)$, e da *sequência de cocaracteres* $(\chi_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ de uma PI-álgebra.

Ao decompormos o n-ésimo cocaráter de A em caracteres irredutíveis, obtemos

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caráter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a respectiva multiplicidade.

Teorema 27. *Seja A uma PI-álgebra com n-ésimo cocaráter $\chi_n(A)$. Dada uma partição $\lambda \vdash n$, a multiplicidade m_λ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young T_λ do tipo λ e para qualquer $f \in P_n$, a álgebra A satisfaz a identidade $e_{T_\lambda} f \equiv 0$.*

Demonstração. Consideremos a seguinte decomposição

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda, P_n = Q \oplus J$$

onde I_λ é o ideal bilateral de FS_n correspondente à partição $\lambda \vdash n$, $Q = P_n \cap T(A)$ e $J \simeq P_n(A) = P_n/(T(A) \cap P_n)$. Fixemos uma partição $\mu \vdash n$ e seja M_μ o FS_n-módulo irredutível correspondente à μ. Observemos que $m_\mu = 0$ se, e somente se, M_μ não figura na decomposição de $J \simeq P_n(A) = P_n/(T(A) \cap P_n)$. Quanto à decomposição de J, podemos afirmar que $J \subseteq FS_n\overline{e_1} \oplus \cdots \oplus FS_n\overline{e_r}$, onde os $\overline{e_{i's}}$ são os elementos idempotentes centrais minimais correspondentes às partições $\lambda \neq \mu$ (vide Lema 8).

Seja $Ie_\mu = FS_n e_\mu$, onde e_μ é o elemento central minimal. Portanto, devemos ter

$$I_\mu J \subseteq FS_n e_\mu (FS_n\overline{e_1} \oplus \cdots \oplus FS_n\overline{e_r}) = FS_n e_\mu FS_n \overline{e_1} \oplus \cdots \oplus FS_n e_\mu FS_n \overline{e_r} = 0,$$

uma vez que os elementos idempotentes centrais minimais são ortogonais. Assim, $m_\mu = 0$, se e somente se, $I_\mu J = 0$. Por outro lado, desde que $I_\mu J = 0$ segue que $I_\mu(P_n/(T(A) \cap P_n)) = 0$, isto é, $I_\mu P_n \subseteq P_n \cap T(A) = Q$. Mas, pela Proposição 10 temos que $I_\mu = \bigoplus_{i=1}^{d_\mu} FS_n e_{T_{i,\mu}}$, donde $\Big(\bigoplus_{i=1}^{d_\mu} FS_n e_{T_{i,\mu}}\Big) P_n \subseteq Q$. Logo, devemos ter $e_{T_\mu} f \in Q$ para todo $f \in P_n$ e para qualquer tabela de Young T_μ. □

Teorema 28. *Dado um polinômio multilinear $f \in P_n$, existem polinômios $g_1, \ldots, g_r \in P_n$ e partições $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de n tais que*

$$FS_n f = FS_n e_{T_1} g_1 \oplus \cdots \oplus FS_n e_{T_r} g_r.$$

Demonstração. Consideremos $M = FS_n f$. Seja $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ uma decomposição de M em FS_n-módulos irredutíveis garantida pelo *Teorema de Maschke*. Segue do Teorema 26 que existem $g_1 \in M_1, \ldots, g_r \in M_r$ e tabelas de Young $T_1, \ldots, T_r$, tais que $FS_n f = FS_n e_{T_1} g_1 \oplus \cdots \oplus FS_n e_{T_r} g_r$. □

2.6 S_n-Representações e Ganchos

Nessa seção mostraremos alguns resultados técnicos sobre os polinômios do tipo $e_{T_\lambda} f$, onde λ é uma partição de n e T_λ é uma tabela de Young do tipo λ.

Por praticidade, sempre que escrevermos T_λ esta denotará uma tabela de Young do tipo λ.

Reconsideremos

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (-1)^\tau \sigma\tau = \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau \right),$$

o elemento idempotente essencial minimal de FS_n correspondente à T_λ, onde R_{T_λ} e C_{T_λ} são os subgrupos de S_n que estabilizam, respectivamente, as linhas e colunas de T_λ.

Lema 10. *Sejam H um subgrupo de C_{T_λ}, M um FS_n-módulo e $u \in M$ tal que $e_{T_\lambda} u \neq 0$. Então,*

$$\left(\sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma \right) e_{T_\lambda} u \neq 0.$$

Demonstração. De fato, escolhamos $\{a_1 = 1, a_2, \ldots, a_m\}$ um transversal às esquerda de H em C_{T_λ}, isto é, $C_{T_\lambda} = a_1 H \cup a_2 H \cup \cdots \cup a_m H$. Seja $r = \sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma$. Suponhamos que $r e_{T_\lambda} u = 0$ para todo $u \in M$, então $a_i r e_{T_\lambda} u = 0$ em M para todo $i = 1, \ldots, m$. Donde,

$$\begin{aligned} {e_{T_\lambda}}^2 u &= \left(\sum_{\tau \in R_{T_\lambda}} \tau \right) \left(\sum_{\sigma \in C_{T_\lambda}} (-1)^\sigma \sigma \right) e_{T_\lambda} u \\ &= \left(\sum_{\tau \in R_{T_\lambda}} \tau \right) (a_1 r e_{T_\lambda} u \pm \cdots \pm a_m r e_{T_\lambda} u) = 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, visto que ${e_{T_\lambda}}^2 = \gamma e_{T_\lambda}$ para algum inteiro $\gamma \neq 0$ e $e_{T_\lambda} u \neq 0$. □

Com algumas alterações apropriadas, temos o seguinte lema.

Lema 11. *Sejam H um subgrupo de R_{T_λ}, M um FS_n-módulo e $u \in M$ tal que $e_{T_\lambda} u \neq 0$. Então,*

$$\left(\sum_{\sigma \in H} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau \right) e_{T_\lambda} u \neq 0.$$

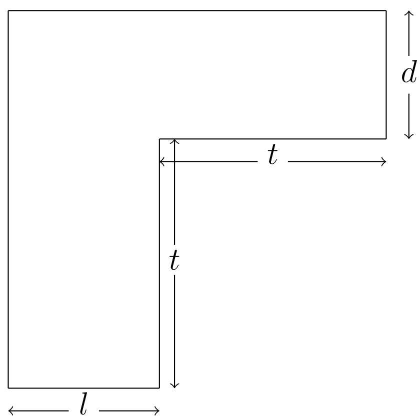
Definição 44. *Diremos que um* polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ corresponde à uma T_λ, *se $f = e_{T_\lambda} f_0$ para algum polinômio multilinear $f_0 \in P_n$.*

Observação 15. *Sendo $f \neq 0$ um polinômio multilinear correspondente à T_λ, então FS_nf é um S_n-módulo irredutível isomorfo a M_λ (vide o Teorema 26).*

Definição 45. *Dados inteiros $d, l, t \geq 0$, definamos a partição*

$$h(d,l,t) = (\underbrace{l+t,\ldots,l+t}_{d},\underbrace{l,\ldots,l}_{t}).$$

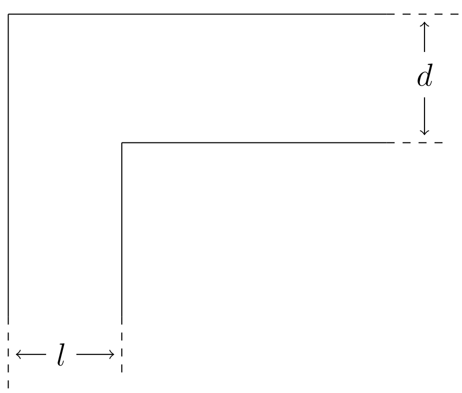
Claramente o diagrama associado à partição $h(d,l,h)$ é dado pelo gancho abaixo



Definição 46. *Definimos o* gancho infinito $H(d,l)$ *como sendo*

$$H(d,l) = \bigcup_{t\geq 1} h(d,l,t) = \bigcup_{n\geq 1}\{\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots)\vdash n \mid \lambda_{d+1}\leq l\}.$$

Dessa forma, o gancho infinito pode ser entendido como sendo o conjunto de todos os diagramas cuja forma (tipo) encontra-se na região em forma de gancho ilustrada abaixo.



O inteiro d é chamado *braço* e l de *pé* do gancho. Diremos que uma partição λ *encontra-se* no gancho $H(d,l)$ e denotamos por $\lambda \in H(d,l)$, se o diagrama de Young correspondente à D_λ está contido em $H(d,l)$, isto é, $\lambda_{d+1} \leq l$. Analogamente, sendo M um FS_n-módulo com caráter $\chi(M) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda\chi_\lambda$, escrevemos $\chi(M) \subseteq H(d,l)$ se $\lambda \in H(d,l)$ para toda partição λ tal que $m_\lambda \neq 0$.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ e D_λ seu diagrama de Young correspondente. Então, $h(\lambda) = k$ é dita ser a *altura* e λ_1 é *comprimento* de D_λ. Recordemos que se $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$, então $\lambda \geq \mu$ se $p \geq q$ e $\lambda_i \geq \mu_i$ para todo $i = 1, \ldots, p$ (vide Definição 41). Os dois lemas seguintes mostram como obter polinômios alternados e simétricos, em variáveis apropriadas, a partir de T_λ, os quais fornecem informações muito importantes sobre o caráter $[\lambda]$.

Lema 12. *Sejam $\lambda \vdash n$ tal que $\lambda \geq h(d, l, t)$ para inteiros apropriados $d, l, t \geq 0$. Consideremos o polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ correspondente à tabela de Young T_λ. Então, existe $r \in FS_n$ de modo que $rf \neq 0$ e um subconjunto Y de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que:*

1. *$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_d$, rf é simétrico em cada conjunto de variáveis Y_i, $i = 1, \ldots, d$ e $Y_i = t + l$;*

2. *rf pode ser decomposto em uma soma de polinômios multilineares $rf = f_1 + \cdots + f_k$ tais que para cada f_i existe uma partição $Y = Y_1^{'} \cup \cdots \cup Y = Y_{t+l}^{'}$ com $|Y_j^{'}| = d$ e f_i é alternado em cada conjunto de variáveis $Y_i^{'}$, $i = 1, \ldots, t + d$.*

Demonstração. De fato, por hipótese, a tabela T_λ deve conter uma tabela retangular T_0 com d linhas e $t + l$ colunas. Para $j = 1, \ldots, d$, seja N_j o conjunto dos inteiros na j-ésima linha de T_0, para $i = 1, \ldots, t + l$ seja $N_i^{'}$ o conjunto dos inteiros na i-ésima coluna de T_0 e $N = N_1 \cup \cdots \cup N_d$. Consideremos $H = \{\sigma \in R_{T_\lambda} \mid \sigma(i) = i \text{ para qualquer } i \notin N\}$ o conjunto que permuta apenas os elementos das linhas de T_0 e sejam

$$r_0 = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau \qquad \text{e} \qquad r = \left(\sum_{\sigma \in H} \sigma \right) r_0.$$

Sendo $Y_j = \{x_s \mid s \in N_j\}$ e $Z_i = \{x_s \mid s \in N_i^{'}\}$. O elemento $g = rf$ é simétrico nas variáveis de Y_j para cada j. De fato, para $\beta \in H$ temos

$$\beta g = \beta r f = \beta \left(\sum_{\sigma \in H} \sigma \right) r_0 f = \left(\sum_{\sigma \in H} \beta\sigma \right) r_0 f = \left(\sum_{\tau \in H} \tau \right) r_0 f = rf = g,$$

visto que $\{\tau = \beta\sigma \mid \sigma \in H\} = H$. Por outro lado, para cada $\beta \in C_{T_\lambda}$ temos

$$\beta(r_0 f) = \beta \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau f \right) = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \beta\tau f = (-1)^\beta \left(\sum_{\tilde{\beta} \in C_{T_\lambda}} (-1)^{\tilde{\beta}} \tilde{\beta} f \right) = (-1)^\beta r_0 f,$$

onde $\tilde{\beta} = \beta\tau$. Portanto, o polinômio $r_0 f$ é alternado nas variáveis dos $Z_{i's}$, e assim para todo $\sigma \in H$ o elemento $\sigma r_0 f$ é alternado nas variáveis de cada $Y_i^{'} = \sigma(Z_i)$, para cada $i = 1, \ldots, t + l$. Dessa forma, rf é o polinômio multilinear requerido. A não nulidade de rf segue claramente do Lema 11. $\square$

Lema 13. *Sejam $\lambda \vdash n$ tal que $\lambda \geq h(d,l,t)$ para inteiros apropriados $d,l,t \geq 0$. Consideremos o polinômio multilinear $f(x_1,\ldots,x_n)$ correspondente à tabela de Young T_λ. Então, existe $r \in FS_n$ de modo que $rf \neq 0$ e um subconjunto Y de $\{x_1,\ldots,x_n\}$ tal que:*

1. *$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_d$, rf é alternado em cada conjunto de variáveis Y_i, $i = 1,\ldots,d$ e $Y_i = t + l$;*
2. *rf pode ser decomposto em uma soma de polinômios multilineares $rf = f_1 + \cdots + f_k$ tais que para cada f_i existe uma partição $Y = Y_1^{'} \cup \cdots \cup Y = Y_{t+l}^{'}$ com $|Y_j^{'}| = d$ e f_i é simétrico em cada conjunto de variáveis $Y_i^{'}$, $i = 1,\ldots,t+d$.*

Demonstração. Analogamente ao lema anterior, T_λ contém uma tabela retangular T_0 com $d+l$ linhas e l colunas. Para $j = 1,\ldots,l$, seja N_j o conjunto dos inteiros na j-ésima coluna de T_0, para $i = 1,\ldots,t+d$ seja $N_i^{'}$ o conjunto dos inteiros na i-ésima linha de T_0 e $N = N_1 \cup \cdots \cup N_l$. Consideremos $H = \{\sigma \in C_{T_\lambda} \mid \sigma(i) = i \text{ para qualquer } i \notin N\}$ o conjunto que permuta apenas os elementos das colunas de T_0 e seja

$$r = \left(\sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma \right)$$

Sejam $Y_j = \{x_s \mid s \in N_j\}$ e $Z_i = \{x_s \mid s \in N_i^{'}\}$. Segue da Observação 14 que o elemento $f = e_{T_\lambda} f_0$ com $f_0 \in P_n$ é simétrico nas variáveis Z_i. Consequentemente, para todo $\sigma \in H$ temos que o polinômio σf é simétrico nas variáveis de $Y_i^{'} = \sigma f Z_i$. Logo, temos a segunda parte do lema. Ademais, o polinômio rf que é não nulo pelo Lema 10 é alternado nas variáveis de Y_j para todo $j = 1,\ldots,l$. □

Observação 16. *Consideremos $Y = \{y_1,\ldots,y_n\}$ um conjunto de variáveis. Notemos que:*

1. *se f é um polinômio multilinear alternado nas variáveis de Y e S_m age em pelo menos duas variáveis de Y, então*
$$\left(\sum_{\sigma \in S_m} \sigma \right) f = 0;$$
2. *se f é um polinômio multilinear simétrico nas variáveis de Y e S_m age em pelo menos duas variáveis de Y, então*
$$\left(\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \sigma \right) f = 0.$$

2.7 Cocaracteres de PI-álgebras

Quando a questão é o cálculo explícito dos cocaracteres de uma PI-álgebra, as técnicas usadas podem variar de acordo com o exemplo em questão. Nessa seção, exibiremos dois dos principais resultados, de caráter geral, que servem para delimitar o formato dos diagramas, cujos S_n-cocaracteres irredutíveis correspondentes têm multiplicidades não nulas na decomposição do n-ésimo cocaráter $\chi_n(A)$ das PI-álgebras.

Começamos por recordar que para quaisquer inteiros $d, l \geq 0$, temos

$$H(d,l) = \bigcup_{n\geq 1} \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} \leq l\}.$$

Dada uma PI-álgebra A sobre um corpo F de caraterística zero, diremos que seu n-ésimo cocaráter $\chi_n(A)$ encontra-se no gancho $H(d,l)$ se na decomposição

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

de $\chi_n(A)$ em S_n-cocaracteres irredutíveis, todas as multiplicidades m_λ são nulas para toda $\lambda \notin H(d,l)$.

O próximo resultado, devido a Amitsur e Regev, fornece uma caraterização para os cocaracteres irredutíveis de multiplicidades não nulas em uma decomposição. Sua demonstração é extensa e o leitor pode verificar os detalhes em [40], página 105.

Teorema 29. ***(Teorema do Gancho)*** *Para qualquer PI-álgebra A, existem inteiros $d, l \geq 0$ tais que*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ \lambda\in H(d,l)}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

O resultado que segue, conhecido como *Strip Theorem*, que pode ser encontrado em [40], estima as "alturas"dos diagramas correspondentes aos cocaracteres irredutíveis com multiplicidades não nulas em uma decomposição através da identidade de Capelli. Mais precisamente, como a identidade de Capelli de grau n é identidade polinomial para toda álgebra de dimensão menor do n, teremos que as alturas dos diagramas correspondentes aos cocaracteres irredutíveis com multilicidades não nulas em uma decomposição são limitadas pela dimensão da álgebra em questão.

Teorema 30. ***(Strip Theorem*)*** *Sejam A uma PI-álgebra e $\chi_n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o seu n-ésimo cocaráter. Então, A satisfaz a identidade de Capelli de grau k se, e somente se, $m_\lambda = 0$ sempre que $h(\lambda) \geq k$.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $Cap_k \in T(A)$ e tomemos $\lambda \vdash n$ tal que $h(\lambda) \geq k$. Segue do Teorema 27 que $m_\lambda = 0$ se, e somente se, $e_{T_\lambda} f \in T(A)$, para todo polinômio multilinear f de grau n e toda tabela de young T_λ do tipo λ.

Seja T_0 uma tabela de Young fixada do tipo λ. Se $e_{T_0}f = 0$, então $e_{T_0}f \in T(A)$. Suponhamos, então, que $e_{T_0}f \neq 0$, para algum f. Como e_{T_0} gera um S_n-módulo irredutível à esquerda, basta mostrar que $ae_{T_0}f \in T(A)$, para algum $a \in FS_n$ tal que $ae_{T_0}f \neq 0$. Seja

$$a = \sum_{\tau \in C_{T_0}} (-1)^\tau \tau,$$

onde C_{T_0} é o subgrupo de S_n das permutações que fixam as colunas de T_0.

Segue do Lema 10 que $ae_{T_0}f \neq 0$. Por outro lado, se $h = h(\lambda)$ e $i_1, \ldots, i_h$ são as entradas que figuram na primeira coluna de T_0, então $ae_{T_0}f$ é um polinômio alternando nas variáveis $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$. Dessa forma, como $Cap_k \in T(A)$ e $h \geq k$, segue da Definição (1.5.4) e Proposição (1.5.5) de [40] que $ae_{T_0}f \in T(A)$, e assim temos a primeira parte do teorema.

Reciprocamente, suponhamos $m_\lambda = 0$ sempre que $h(\lambda) \geq k$ e consideremos o polinômio

$$f = (x_1, \ldots, x_{2k-1}) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{k+1} x_{\sigma(2)} x_{k+2} \cdots x_{2k-1} x_{\sigma(k)}.$$

Mostremos que f é uma identidade de A, ou seja, $FS_{2k-1}f \subseteq T(A)$. Para tanto, é suficiente mostrar que $e_{T_\lambda}f \in T(A)$ para toda partição $\lambda \vdash 2k-1$ e toda tabela de Young T_λ do tipo λ. Observemos que se $h(\lambda) \geq k$, então $e_{T_\lambda}f \in T(A)$ pela definição de m_λ.

Suponhamos agora que $h(\lambda) < k$. Como f alterna em $x_1, \ldots, x_k$, segue que, para todo $\tau \in S_{2k-1}$, o polinômio

$$\tau f(x_1, \ldots, x_{2k-1})$$

alterna em $x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(k)}$. Agora, como $h(\lambda) = t < k$, o grupo R_{T_λ} é o produto direto de $t < k$ fatores, isto é, $R_{T_\lambda} = H_1 \times \cdots H_t$, onde H_i é o estabilizador da i-ésima linha de T_λ. Por conseguinte, $\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma$ é produto de $t < k$ fatores (que comutam)

$$\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma = \left(\sum_{\sigma \in H_1} \sigma \right) \cdots \left(\sum_{\sigma \in H_t} \sigma \right).$$

Desde que $t < k$, segue que pelo menos dois inteiros dentre $\tau(1), \ldots, \tau(k)$ pertencem à uma mesma linha de T_λ, digamos a i-ésima. Assim

$$\left(\sum_{\sigma \in H_i} \sigma \right) \tau f = 0,$$

isto é, este é o polinômio nulo em $F\langle X \rangle$, uma vez que τf alterna em $x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(k)}$. Portanto, $(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma)\tau f = 0$ e $e_{T_\lambda}f = 0$. Dessa forma, provamos que para toda partição $\lambda \vdash n$ com $h(\lambda) < k$, $e_{T_\lambda}f \in T(A)$, e assim $f \in T(A)$.

Por último, se substituirmos alguns das variáveis $x_{k+1}, \ldots, x_{2k-1}$ por 1 em f, então, usando a mesma prova vista acima, temos que o polinômio resultante ainda será uma identidade para A. $\square$

Combinando o último resultado com o Teorema 13, temos o seguinte:

Corolário 1. *Seja A uma álgebra de dimensão finita k. Então, para qualquer $n \geq 1$, temos*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq k}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Ou seja, a sequência de cocaráter de A está contida na faixa de largura k.

Observemos que sendo A uma álgebra comutativa, então qualquer polinômio alternado, particularmente o polinômio de Capelli, de grau maior ou igual a 2 é identidade polinomial para A. Portanto, temos o próximo resultado decorrente diretamente do Teorema 30.

Teorema 31. *Sendo A uma álgebra comutativa, então*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq 1}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

O teorema anterior garante que a sequência de cocaracteres das álgebras comutativas são "linhas"(faixas de largura 1).

3 Álgebras Graduadas e Variedades Minimais

As álgebras graduadas por um grupo e suas identidades graduadas desenvolvem um papel fundamental na PI-teoria. Várias propriedades do T-ideal das identidades polinomiais de uma PI-álgebra podem ser descritas em termos das identidades polinomiais graduadas. Por exemplo, Kemer provou que qualquer PI-álgebra é PI-equivalente ao envelope de Grassmann de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita. Nesse capítulo, estudaremos, também, os conceitos de codimensões, expoentes e variedades minimais, bem como suas relações com álgebras que admitem uma estrutura graduada.

3.1 Álgebras Graduadas e PI-Álgebras

Nessa seção introduziremos os conceitos e veremos alguns dos exemplos clássicos de álgebras e identidades graduadas por um grupo.

Definição 47. *Sejam A uma álgebra e G um grupo. Definimos uma G-*graduação *em A como sendo uma família $\left(A^g\right)_{g\in G}$ de subespaços vetoriais de A tais que*

$$A = \oplus_{g\in G} A^g \qquad e \qquad A^g A^h \subseteq A^{gh}$$

*para quaisquer $g, h \in G$. Nesse caso, também dizemos que a álgebra A é G-*graduada*.*

Quando livre de ambiguidades, adotaremos o termo *'álgebra graduada'* sem citar o grupo em questão.

Nos referimos aos subespaços A^g como *componentes homogêneas de grau g*. Particularmente, denotando por 1 o elemento neutro de G, a componente A^1 é chamada de *componente neutra*. Se $a \in A$ é tal que $a \in A^g$ para algum $g \in G$, então dizemos que a é um elemento *homogêneo de grau g*, escrevemos a^g e denotamos seu grau por $||a|| = g$ (ou $\deg a = g$). Notemos que todo elemento $a \in A$ pode ser escrito de forma única como soma finita $a = \Sigma_{g\in G} a^g$, onde $a^g \in A^g$. Sendo H um subgrupo de G, mostra-se que a soma $\Sigma_{h\in H} A^h$ é uma subálgebra de A. Particularmente, para $H = \{1\}$, temos que A^1 é uma subálgebra de A. Além disso, se A é uma álgebra unitária não é difícil ver que $1_A \in A^1$.

Exemplo 31. (Graduação Trivial) *Sejam G um grupo qualquer e A uma álgebra arbitrária. Defina os subespaços $A^1 = A$ e $A^g = \{0\}$, sempre que $g \neq 1_G$. Observe que temos uma G-graduação em A, esta é chamada de* graduação trivial.

Exemplo 32. *A decomposição natural da álgebra de Grassmann $E = E_0 \oplus E_1$, vista no Exemplo 3, é um exemplo de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação. Uma álgebra associativa que admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação é chamada de* superálgebra.

A seguinte graduação em $M_m(F)$ foi introduzida e estudada por Vasilovsky em 1999, vide [68].

Exemplo 33. ***(Graduação de Vasilovsky)*** *Consideremos a álgebra $M_m(F)$ com base $\beta = \{e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{m,m}\}$. A aplicação*

$$\| \ \|: \beta \longrightarrow \mathbb{Z}_m$$

definida por $\| e_{i,j} \| = \overline{j-i}$ induz uma $\mathbb{Z}_m$-graduação em $M_m(F)$, onde

$$M_m(F)^0 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

com $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{m,m} \in F$ e, para $1 \leq t \leq m-1$, $M_m(F)^t$ é o espaço das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & a_{2,t+2} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{m-t,m} \\ a_{m-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{m,t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

.

Definição 48. *Consideremos $A = \oplus_{g \in G} A^g$ uma álgebra G-graduada e $B \subseteq A$ um subespaço de A. Dizemos que B é* homogêneo *se $B = \oplus_{g \in G}(B \cap A^g)$. Equivalentemente, B é* homogêneo *se para todo $b \in B$, com $b = \sum_{g \in G} b^g$, implicar que $b^g \in B$ para todo $g \in G$.*

Na definição acima, B é uma subálgebra homogênea de A, claramente temos $(B \cap A^g)(B \cap A^h) \subseteq (B \cap A^{gh})$, para quaisquer $g, h \in G$, e assim temos uma G-graduação em B a partir da G-graduação de A, e, por essa razão, diz-se que B herda a G-graduação de A. Subálgebras e ideais graduada(o)s serão, sempre, considerada(o)s nesse sentido, à menos de menção do contrário.

Consideremos $A = \oplus_{g \in G} A^g$ uma álgebra G-graduada e I um ideal homogêneo. Notemos que a álgebra quociente A/I é naturalmente G-graduada, onde as componentes homogêneas são $(A/I)^g = \{a + I : a \in A^g\}$, para todo $g \in G$.

Definição 49. *Sejam G um grupo, e $A = \oplus_{g\in G}A^g$ e $B = \oplus_{g\in G}B^g$ duas álgebras G-graduadas.*

1. *Um homomorfismo de álgebra $\varphi : A \longrightarrow B$ é dito ser um* homomorfismo G-graduado *se $\varphi(A^g) \subseteq B^g$, para todo $g \in G$. Analogamente, definem-se endomorfismo, isomorfismo e automorfismo G-graduado. Notemos que, no caso de isomorfismo G-graduado, tem-se $\varphi(A^g) = B^g$, para todo $g \in G$.*

2. *Duas G-graduações $A = \oplus_{g\in G}A^g$ e $A = \oplus_{g\in G}B^g$, na mesma álgebra A, são ditas* isomorfas *(* ou equivalentes*) se existe um automorfismo $\varphi : A \longrightarrow A$ G-graduado tal que $\varphi(A^g) = B^g$, para todo $g \in G$.*

Observação 17. *Os teoremas de homomorfismos continuam válidos para o caso G-graduado, para mais detalhes ver [33] e [40].*

O conceito de graduação é muito importante na PI-Teoria e bem mais geral do que o apresentado acima. As graduações por grupos, em várias álgebras importantes, têm sido estudadas e classificadas, ver, por exemplo, [46], [68], [27], [40], [5], [33] e suas respectivas referências.

Nessa tese, estamos interessados nas *graduações elementares* da álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores a qual trataremos mais adiante, para tanto, precisamos desenvolver outros conceitos e terminologias, a exemplos das chamadas identidades graduadas, que serão essenciais nessa tarefa.

3.2 Identidades polinomiais graduadas

Assim como no caso ordinário, no contexto das álgebras graduadas por grupos, também temos a noção de identidades, as chamadas *identidades graduadas*. Veremos, a seguir, que muitas propriedades sobre a estrutura dos T-ideais das identidades polinomiais podem ser descritas na linguagem das identidades graduadas.

Sejam G um grupo e, para cada $g \in G$, $X^g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis não comutativas. Suponhamos que os conjuntos $X^{g's}$ sejam dois a dois disjuntos e seja $X = \bigcup\limits_{g\in G} X^g$. Consideremos $F\langle X|G\rangle$ como sendo a álgebra associativa livre livremente gerada por X sobre o corpo F. A álgebra $F\langle X|G\rangle$ possui uma estrutura natural de G-graduação. De fato, basta definir o grau homogêneo das variáveis como sendo $\deg x_i^g = g$, para todo $x_i^g \in X^g$, e, por extensão, o grau dos monômios $m = x_{i_1}^{g_1}x_{i_2}^{g_2}\cdots x_{i_r}^{g_r} \in F\langle G|X\rangle$ como $\deg m = \deg x_{i_1}^{g_1} \deg x_{i_2}^{g_2} \cdots \deg x_{i_r}^{g_r} = g_1g_2\cdots g_r$. Agora, para cada $g \in G$, consideremos $F\langle X|G\rangle^g$ como sendo o espaço vetorial gerado por todos os monômios, cujo grau homogêneo é g. Observemos que

$$F\langle X|G\rangle = \bigoplus_{g\in G} F\langle X|G\rangle^g$$

e $F\langle X|G\rangle^g F\langle X|G\rangle^h \subseteq F\langle X|G\rangle^{gh}$ para todo $g, h \in G$. Portanto, temos, de fato, uma G-graduação em $F\langle X|G\rangle$. Os elementos da álgebra $F\langle X|G\rangle$ são chamados de *polinômios G-graduados*. Um polinômio G-graduado f é dito ser *homogêneo de grau g*, denotado por $\deg f = g$, se existe $g \in G$ tal que $f \in F\langle X|G\rangle^g$. A álgebra $F\langle X|G\rangle$ será referida como *álgebra associativa livre G-graduada*.

Definição 50. *Sejam G um grupo, A uma álgebra G-graduada e $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X|G\rangle$ um polinômio G-graduado. Dizemos que f (ou a expressão $f \equiv 0$) é uma* identidade polinomial G-graduada *para A se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

para todo $a_1, \ldots, a_n \in \cup_{g\in G} A^g$, tais que $a_k \in A^{\deg x_k}$, com $k = 1, \ldots, n$. Se A satisfaz uma identidade polinomial graduada não nula, então diremos que A é uma álgebra PI-graduada.

Exemplo 34. *O polinômio $[x_1^0, x_2^0]$ é uma identidade $\mathbb{Z}_m$-graduada para a álgebra $M_m(F)$ com a graduação de Vasilovsky.*

Em algumas situações, as identidades graduadas podem ser usadas na descrição das identidades ordinárias. Por exemplo, foi provado em [5] e [9] que se G é um grupo abeliano finito e A é uma álgebra G-graduada, então A é uma PI-álgebra se, e somente se, A^1 é PI-álgebra.

Definição 51. *Dizemos que um ideal I de $F\langle X|G\rangle$ é um T_G-*ideal *se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $F\langle X|G\rangle$.*

Quando livre de ambiguidades, adotaremos os termos *'ideal graduado' e 'identidade graduada'*, sem citar o grupo em questão.

Os T-ideais graduados desfrutam de propriedades similares ao caso ordinário, e suas respectivas demonstrações também são demasiadamente semelhantes, e , por essa razão, serão omitidas.

Proposição 11. *A respeito dos T_G-ideais, temos o seguinte:*

1. *Um ideal I é um T_G-ideal se, e somente se, $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_i \in F\langle X|G\rangle^{\deg x_i}$, com $i = 1, \ldots, n$.*

2. *O T_G-*ideal gerado por um subconjunto *$S \subseteq F\langle X|G\rangle$, denotado por $\langle S\rangle^{T_G}$, é definido como sendo a intersecção de todos os T_G-ideais de $F\langle X|G\rangle$ que contêm S. Se $S = \emptyset$, por convenção $\langle S\rangle^{T_G} = \{0\}$.*

3. *Sendo A uma álgebra G-graduada, o conjunto de todas as identidades G-graduadas de A, o qual será denotado por $T_G(A)$, é um T_G-ideal de $F\langle X|G\rangle$. Reciprocamente, sendo I um T_G-ideal, então existe uma álgebra A G-graduada tal que $I = T_G(A)$.*

4. *No caso do corpo base ser infinito, todo T_G-ideal é gerado por seus polinômios multi-homogêneos, e por seus polinômios multilineares, no caso do corpo base ser de característica zero.*

O próximo resultado relaciona os conceitos de identidades graduadas e identidades ordinárias.

Teorema 32. *Sejam G um grupo, e A e B álgebras G-graduadas. Se $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Por conseguinte, se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

Demonstração. De fato, seja $F\langle Y\rangle$ a álgebra associativa livre, onde $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Consideremos $f(y_1, \ldots, y_n) \in T(A)$ e sejam $b_1, \ldots, b_n \in B$ arbitrários. Para cada $i = 1, \ldots, n$, tomemos $b_{ig} \in B^g$, tais que $b_i = \sum\limits_{g\in G} b_{ig}$. Para cada $b_{ig} \neq 0$, consideremos o polinômio

$$f^{'} = f(\sum_{g\in G} x_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} x_{ng}) \in F\langle X|G\rangle.$$

Como $f \in T(A)$, temos que $f^{'} \in T_G(A) \subseteq T_G(B)$. Fazendo as substituições $x_{ig} = b_{ig}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $g \in G$, temos

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f(\sum_{g\in G} b_{1g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{ng}) = 0,$$

e assim $f \in T(B)$. □

O $T_{\mathbb{Z}_m}$-ideal da álgebra $M_m(F)$ foi descrito por Vasilovsky em 1999 para corpos de caraterística zero (vide [68]), tendo sido generalizado em 2002 por Sergio S. Azevedo para corpos infinitos (vide [4]).

Teorema 33. *O $T_{\mathbb{Z}_m}$-ideal da álgebra $M_m(F)$ com a graduação de Vasilovsky é gerado, como $T_{\mathbb{Z}_m}$-ideal, por*

$$[x_1^0, x_2^0]$$

e

$$x_1^r x^{-r} x_2^r - x_2^r x^{-r} x_1^r.$$

Em 2003, Koshlukov e Valenti deram uma completa descrição do $T_{\mathbb{Z}_m}$-ideal da álgebra $UT_m(F)$ com a graduação induzida pela graduação de Vasilovsky, no caso de corpos infinitos (vide [49]).

Teorema 34. *O $T_{\mathbb{Z}_m}$-ideal de $UT_m(F)$ com a graduação induzida pela graduação de Vasilovsky é gerado, como $T_{\mathbb{Z}_m}$-ideal, por*

$$\{[x_1^0, x_2^0], x_1^i x_2^j \mid i + j > m\}$$

3.3 Codimensões e Expoentes

No capítulo 2, abordamos a ação natural do grupo simétrico S_n sobre o espaço das identidades polinomiais multilineares em um número fixo de variáveis $(T(A) \cap P_n)$, onde A denota uma álgebra. Nosso principal objetivo, naquele momento, foi entender a decomposição dos fatores $(P_n/(T(A) \cap P_n)$ em S_n-módulos irredutíveis.

Nessa seção introduziremos duas ferramentas correlatas: as *sequências de codimensões* e o n-ésimo *expoente* de uma PI-álgebra. Essas ferramentas servem para comensurar o comportamento do crescimento assintótico das identidades polinomiais das PI-álgebras. Por exemplo, veremos a seguir que uma álgebra A é PI se, e somente se, a sequência de codimensões de A é exponencialmente limitada.

Sejam F um corpo de característica zero, $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre de posto enumerável em $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e A uma PI-álgebra. Recordemos que o T-ideal $T(A)$ é gerado completamente pelos espaços

$$\Big(T(A) \cap P_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Definição 52. *Seja A uma álgebra. Definimos a n-*ésima codimensão de A *como sendo o número inteiro não negativo*

$$c_n(A) = \dim_F \frac{P_n}{T(A) \cap P_n}.$$

A sequência de codimensões *de A é definida como sendo a sequência numérica*

$$(c_n(A))_{n\in\mathbb{N}} = (c_1(A), c_2(A), \ldots, c_n(A), \ldots).$$

Segue diretamente da definição que se A é uma álgebra e n é um inteiro não negativo, então

$$c_n(A) = n! - \dim(P_n \cap T(A)) \leq n!.$$

Como toda PI-álgebra possui uma identidade multilinear não nula, temos que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A) < n!$ para algum $n \geq 1$.

Definição 53. *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade e A uma álgebra tal que $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A)$. Então definimos a n-ésima codimensão de $\mathcal{V}$, denotada por $c_n(\mathcal{V})$, como $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.*

Agora listaremos alguns exemplos de codimensões de álgebras que podem ser calculados sem maiores dificuldades. Os cálculos que foram omitidos podem ser encontrados detalhadamente em [40].

Exemplo 35. *Sendo A uma álgebra comutativa, temos que $[x_i, x_j] \in T(A)$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$, e consequentemente*

$$x_{\alpha(1)} \cdots x_{\alpha(n)} \equiv x_1 \cdots x_n \pmod{P_n \cap T(A)},$$

para qualquer $\alpha \in S_n$. Desse modo, $c_n(A) \leq 1$ para todo n não negativo.

Exemplo 36. *Se A é uma álgebra nilpotente de tal que $A^m = 0$, então $c_n(A) = 0$ para todo $n \geq m$.*

Exemplo 37. *Seja A uma álgebra de dimensão finita, digamos $\dim_F A = d$, então $c_n(A) \leq d^n$ para todo $n \geq 1$. De fato, seja $\{a_1, \ldots, a_d\}$ uma base de A. Um polinômio multilinear f é uma identidade polinômial de A se, e somente se, é nulo para qualquer avaliação φ, $\varphi(x_1) = a_{i_1}, \ldots, \varphi(x_n) = a_{i_n}$, isto é,*

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(i_1)} \cdots a_{\sigma(i_n)}) = 0.$$

Notemos que existem d^n avaliações possíveis, e assim podemos ver a equação acima como um sistema de d^n equações lineares e $n!$ indeterminadas α_σ e $\sigma \in S_n$. O espaço de solução de tal sistema tem dimensão $n! - r$, onde r é o seu posto, $r \leq d^n$. Além disso, toda $n!$-úpla de coeficientes α_σ com $\sigma \in S_n$ resulta em uma identidade multilinear de A, e portanto soluções linearmente independentes fornecem identidades linearmente independentes. Logo,

$$\dim_F(T(A) \cap P_n) = n! - r,$$

donde $c_n(A) = \dim_F P_n/(T(A) \cap P_n) = r \leq d^n$.

Os dois exemplos que seguem podem ser encontrados detalhadamente em [40], sendo o primeiro deles devido a Krakowski e Regev e o segundo a Yu. Malcev.

Exemplo 38. *Consideremos E a álgebra de Grassmann com o corpo base F de característica zero. Então, $c_n(E) = 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.*

Exemplo 39. *Seja $A = UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores com entrada no corpo F de característica zero. Então, $c_n(A) = 2^{n-1}(n-2) + 2$ para todo $n \geq 2$.*

O próximo teorema é um resultado chave na PI-teoria, pois este fornece informações sobre a taxa de crescimento das identidades polinomiais de uma PI-álgebra.

Teorema 35. ***(Regev)*** *Se A é uma álgebra que satisfaz alguma identidade polinomial de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para uma demonstração detalhada ver [40], página 95. □

Consideremos uma PI-álgebra A sobre um corpo de característica zero e $\left(c_n(A)\right)_{n\geq 1}$ a sua sequência de codimensões. Segue do teorema anterior que existe uma constante a tal que $c_n(A) \leq a^n$ para todo $n \geq 1$. Portanto,

$$0 \leq c_n(A) \leq a^n,$$

para todo $n \geq 1$. Dessa forma, a sequência $\left(\sqrt[n]{c_n(A)}\right)_{n\geq 1}$ é limitada e podemos considerar seus limites inferior e superior.

Definição 54. *Seja A uma PI-álgebra. Definimos:*

i) *O* expoente inferior de A *como sendo o limite*

$$\underline{\exp}(A) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

ii) *O* expoente superior de A *como sendo o limite*

$$\overline{\exp}(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Para uma sequência limitada arbitrária os limites definidos anteriormente podem não coincidir. Não obstante, quando esses limites coincidirem para um PI-álgebra definimos:

Definição 55. *O* expoente de A *como sendo o limite*

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Além disso, se $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A)$ é variedade gerada pela álgebra A, então definimos o expoente da variedade $\mathcal{V}$, *denotado por* $\exp(\mathcal{V})$, *como sendo* $\exp(\mathcal{V}) = \exp(A)$.

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebra e $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ uma subvariedade. Então, $\exp(\mathcal{U}) \leq exp(\mathcal{V})$. De fato, dada uma variedade de álgebra $\mathcal{V}$, temos

$$c_n(\mathcal{V}) = \dim_F(P_n/(P_n \cap T(\mathcal{V})).$$

Assim, se $T(\mathcal{V}) \subseteq T(\mathcal{U})$, logo $c_n(\mathcal{U}) \leq c_n(\mathcal{V})$. Portanto, $\exp(\mathcal{U}) \leq exp(\mathcal{V})$.

Exemplo 40. *Sendo E a álgebra de Grassmann e $A = UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2 com o corpo base F de característica zero. Como $c_n(E) = 2^{n-1}$ e $c_n(A) = 2^{n-1}(n-2)+2$ para todo $n \geq 1$, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}(n-2)+2} = 2,$$

donde $\exp(E) = exp(A) = 2$.

A principal vantagem de considerar o exponente de uma PI-álgebra é que este nos possibilita mensurar o crescimento da sequência de suas codimensões como podemos ver nas duas conjecturas a seguir, levantadas por Amitsur e Regev, respectivamente, no começo da década de 1980. Essas questões foram respondidas, positivamente, por Giambruno e Zaicev no final da década de 1990 em [37] e [38], todavia, para maiores detalhes aconselhamos o livro texto, dos mesmos autores, [40], capítulo 6.

Conjectura 1. ***(Amitsur)*** *Seja A uma PI-álgebra. Então,* $\exp(A)$ *existe e é um número inteiro não negativo.*

Conjectura 2. ***(Regev)*** *Seja A uma PI-álgebra. Então, existe uma constante C, um semi-inteiro q e um inteiro $d \geq 0$ tais que*

$$c_n(A) \approx Cn^q d^n.$$

Em verdade, sobre a última conjectura, Giambruno e Zaicev provaram, em [37] e [38], o seguinte:

Teorema 36. *Seja A uma PI-álgebra. Então, existem constantes C_1, C_2, q_1, q_2, com $C_1 \neq 0$, e um inteiro $d \geq 0$, tais que*

$$C_1 n^{q_1} d^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{q_2} d^n.$$

Observação 18. *Mostra-se que o inteiro d, do teorema acima, é definido pela estrutura da superálgebra B de dimensão finita relacionada com A, a saber, $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}\Big(G(B)\Big)$, onde $G(B)$ é o* envelope de Grassmann de B*, tal como previsto pelo teorema de Kemer, abordado na próxima seção. Além disso, mostra-se que* $\exp(A) = exp(G(B)) = d$ *(ver detalhes em [40]).*

No geral, o cálculo explicito do expoente de uma PI-álgebra arbitrária é uma tarefa bastante técnica e complicada, pois este processo exige o conhecimento estrutural da superálgebra de dimensão finita satisfazendo as propriedades previstas na observação anterior. Todavia, supondo o conhecimento de tal superálgerba, o método para o cálculo do expoente de uma PI-álgebra é descrito a seguir.

Primeiramente, consideremos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [40], seção 3.4.

Teorema 37. ***(Wedderburn-Malcev)*** *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica zero e $J(A)$ seu radical de Jacobson. Então, existe uma subálgebra semisimples maximal A_{ss} de A, tal que*

$$A = A_{ss} + J(A).$$

Além disso, se A_{ss} e $A^{'}_{ss}$ são subálgebras semisimples tais que $A = A_{ss} + J(A) = A^{'}_{ss} + J(A)$, então existe $x \in J(A)$ tal que $A^{'}_{ss} = (1 + x)A_{ss}(1 + x)^{-1}$.

Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero e A uma superálgebra de dimensão finita. Consideremos

$$A = A_{ss} + J(A),$$

onde A_{ss} é a subálgebra semissimples maximal e $J(A)$ e o radical de Jacobson da decomposição de Wedderburn-Malcev. Escrevemos $A_{ss} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, onde A_i é uma álgebra simples para $i = 1, \ldots, k$. Então, $\exp(A)$ é a dimensão máxima da subálgebra semissimples $A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}$, tal que

$$A_{i_1} J(A) A_{i_2} \cdots J(A) A_{i_r} \neq 0,$$

onde $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ são subálgebras distintas tomadas em $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Os detalhes dessa afirmação podem ser encontrados em [40], seção 6.2

3.4 Variedades Minimais e o Teorema de Kemer

A álgebra das matrizes triangulares superiores $UT_m(F)$ é um objeto de extrema importância na PI-teoria. A seguir, veremos que as identidades polinomiais de $UT_m(F)$ podem servir para mensurar a complexidade das identidades polinomiais de uma álgebra finitamente gerada que não satisfaz identidades polinomiais matriciais, assim como as identidades de $M_m(F)$ podem servir para mensurar a complexidade das identidades de uma álgebra arbitraria. Além disso, veremos, também, que as álgebras das matrizes triangulares superiores $UT_m(F)$ são geradoras das chamadas *variedades minimais* com expoentes 'fixados', objeto de grande destaque nas variedades das álgebras associativas.

Comecemos por considerar uma superálgebra A. A *envoltória (ou Envelope) de Grassmann de A* é definida(o) como sendo a álgebra

$$G(A) = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1).$$

O próximo teorema foi demonstrado por Kemer na década de 80, vide [46], o qual fez uso do envelope de Grassman para solucionar positivamente o famoso *problema de Specht*, levantado em 1950, sobre a questão da finitude da base do T-ideal das identidades polinomiais das PI-álgebras sobre um corpos de característica zero.

Teorema 38. ***(Teorema de Representabilidade)*** *Dada uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$ não trivial, existe uma superálgebra A de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var(G(A))$.*

De acordo com o teorema supracitado, dado A uma PI-álgebra qualquer sobre um corpo de característica zero, então existe uma superálgebra de dimensão finita B tal que $T(A) = T(G(B))$, onde $G(B)$ é o envelope de Grassmann de B.

Observação 19. *Recordemos que uma álgebra A é dita ser* semissimples *se seu radical de Jacobson $J(A)$ é nulo.*

Recordemos que, sob determinadas condições, a classificação das superálgebras de dimensão finita é uma questão solucionada (vide [70]). Assim, para além da decomposição do Teorema de Wedderburn-Malcev, temos o seguinte:

Teorema 39. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então,*

$$A = B + J(A)$$

onde $J(A)$ é o radical de Jacobson de A e B é uma soma direta finita de superálgebras simples , cada uma delas isomorfa a uma das seguintes álgebras

1. *$C = M_m(F)$ com a graduação trivial $C = C^0$ e $C^1 = 0$;*
2. *$C = M_{k,l} = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \right\}$, $k \geq l > 0$, onde P, R, Q, S são matrizes $k \times k$, $k \times l$, $l \times k$ e $l \times l$, respectivamente. Aqui C é equipada com a $\mathbb{Z}_2$-graduação definida por $C^0 = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right\}$ e $C^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \right\}$;*
3. *$C = M_m(F \oplus qF)$, $q^2 = 1$, com a $\mathbb{Z}_2$-graduação definida por $C^0 = M_m(F)$ e $C^1 = qM_m(F)$.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada de forma detalhada na Seção 3.4 de [40]. $\square$

Segue dos dois últimos resultados que a questão de determinar um conjunto gerador das identidades polinomiais de uma dada PI-álgebra, resume-se, em última instância, a encontrar as identidades das álgebras de matrizes com graduações adequadas. Todavia, essa questão é muito abrangente, a saber, as identidades da álgebra de matrizes $M_n(F)$, com a graduação trivial, é um problema em aberto, para $n \geq 3$.

Dentre as graduações na álgebra de matrizes $M_n(F)$, destacam-se as denominadas graduações *elementares* e *finas*.

Definição 56. *Seja $A = \oplus_{g \in G} A^g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que a G-graduação em A é* fina *se $dim A^g \leq 1$, para todo $g \in G$.*

Exemplo 41. *Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos $AB = -BA = I$, e assim, definindo $A_{(0,0)} = \langle I \rangle$, $A_{(0,1)} = \langle A \rangle$, $A_{(1,0)} = \langle B \rangle$ e $A_{(1,1)} = \langle I \rangle$, obtemos uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduação fina em $M_2(F)$.*

Definição 57. *Sejam G um grupo, $A = M_m(F)$ a álgebra das matrizes quadradas de ordem m e $\left(A^g\right)_{g\in G}$ uma G-graduação em A. Dizemos que $A = \oplus_{g\in G}A^g$ é uma G-*graduação elementar *se existe uma m-úpla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ de elementos de G de tal forma que cada componente homogênea A^g é o subespaço gerado pelas matrizes elementares e_{ij}, tais que $g = g_i^{-1}g_j$, com $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Nesse caso, dizemos que graduação $A = \oplus_{g\in G}A^g$ é induzida por ε e, comumente, denotamos por $(M_m(F), \varepsilon)$.*

Exemplo 42. *Observemos que a graduação de Vasilovsky do Exemplo 33 é uma graduação elementar induzida pela m-úpla $(0, 1, \ldots, m-1)$ de elementos de $\in \mathbb{Z}_m$. Mais geralmente, temos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada detalhadamente em [6].*

Proposição 12. *Existe uma correspondência biunívoca entre as G-graduações elementares em $M_m(F)$ e as m-úplas de elementos de G.*

Demonstração. De fato, sendo $M_m(F) = \oplus_{g\in G}A_g$ uma G-graduação elementar, segue, direto da definição, que as matrizes elementares e_{ij} são homogêneas, para $i, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Reciprocamente, suponhamos que as matrizes elementares e_{ij} sejam homogêneas, para $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Desde que $e_{ii}^2 = e_{ii}$, tomando $g \in G$ tal que $e_{ii} \in A^g$, temos que $g^2 = g$, donde $g = 1$. Além disso, como $e_{i(i+1)}$ é homogênea, seja $h_i \in G$ tal que $e_{i(i+1)} \in A^{h_i}$. Definamos $g_1 = 1$ e, indutivamente, $g_{i+1} = g_i h_i^{-1}$. Suponhamos $1 \le i \le j \le m$. Desde que

$$e_{ij} = e_{i(i+1)} \cdots e_{(j-1)j} \in A^{h_i} \cdots A^{h_{j-1}} \subseteq A^{g_i^{-1}g_j}$$

e os casos em que $m \ge i > i \ge 1$ resume-se a este por troca de sinal, concluímos que a G-graduação é elementar induzida pela m-úpla $(g_1, \ldots, g_m)$. □

Em 2001, vide [6], os autores Bahturin, Sehgal e Zaicev provaram que se G é um grupo abeliano e F é um corpo algebricamente fechado, então toda G-graduação na álgebra das matrizes $M_m(F)$ é isormorfa a um produto tensorial de uma graduação fina com uma elementar. Por razões como essa, as álgebras das matrizes $M_m(F)$, com graduações elementares, têm sido objeto de grande interesse de estudo, ver, por exemplo [5], [6], [68] e suas respectivas referências.

Teorema 40. *Sejam G um grupo abeliano, F um corpo algebricamente fechado e $M_m(F) = \oplus_{g\in}A^g$ uma G-graduação. Então, existem uma decomposição $n = tq$, um subgrupo H de G e uma q-úpla $(g_1, \ldots, g_q) \in G^q$ tais que $M_m(F)$ é isomorfa a $M_t(F) \otimes M_q(F)$ como álgebra G-graduada, onde $M_t(F)$ é uma álgebra H-graduada com uma graduação fina e $M_q(F)$ tem uma graduação elementar definida por $(g_1, \ldots, g_q) \in G^q$.*

Na presente tese, estamos interessados no estudo da estrutura algébrica da subálgebra das matrizes triangulares superiores de ordem m, $UT_m(F)$, de $M_m(F)$, com graduações elementares. Esse estudo será iniciado, minuciosamente, no próximo capítulo. Por enquanto, nos atenhamos a introduzir novos conceitos e terminologias afim de exibir resultados e propriedades importantes para o desenvolvimento do presente texto.

Recordemos que as álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos sobre o corpo F são da forma

$$UT(d_1,\dots,d_m) = \begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & M_{d_2}(F) & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{d_m}(F) \end{pmatrix},$$

onde as matrizes B_{ij} são matrizes retangulares sobre F de tamanho correspondentes.

Definição 58. *Uma variedade $\mathcal{V}$ de expoente d é chamada* minimal *se toda subvariedade própria tem expoente estritamente menor que d.*

Definição 59. *Seja $\mathcal{V} = var(A)$ uma variedade gerada por uma PI-álgebra A. Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma variedade de* posto básico finito*, se A for finitamente gerada,*

Em 2003, vide [39], Giambruno e Zaicev caracterizaram as variedades minimais, as quais são como no resultado que segue.

Teorema 41. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de posto básico finito e $\exp(\mathcal{V}) = d \geq 2$. Então, $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de expoente d se, e somente se, $\mathcal{V}$ é gerada por uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos $UT(d_1,\dots,d_m) \in \mathcal{V}$ com $d_1^2 + \cdots + d_m^2 = d$. Além disso, o número de variedades minimais de álgebras de posto básico finito dado um expoente $d \geq 2$ é finito.*

Agora, consideremos os seguinte teoremas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [40], seção 7.

Teorema 42. *Uma variedade $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard se, e somente se, a álgebra de Grasmann $E \notin \mathcal{V}$.*

Teorema 43. *Para uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\mathcal{V} = var(A)$, para alguma álgebra de dimensão finita A;*
2. *$\mathcal{V} = var(A)$, onde A é uma álgebra finitamente gerada;*
3. *$\mathcal{V}$ satisfaz a identidade de Capelli;*
4. *$\mathcal{V}$ satisfaz a identidade standard.*

Teorema 44. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras associativas sobre um corpo F de característica zero. Então,* $\exp(\mathcal{V}) \leq 1$ *se, e somente se,* $E, UT_2(F) \notin \mathcal{V}$*. Aqui,* E *denota a álgebra de Grassmann e* $UT_2(F)$ *denota a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2.*

Observação 20. *Seja $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A)$ uma variedade de posto básico finito. Em suma, temos:*

1. *Se* $\exp(\mathcal{V}) \geq 2$*, então, pelo Teorema 41,* $\mathcal{V}$ *é uma variedade minimal e é gerada pelas matrizes triangulares superiores em blocos;*

2. *Se* $\exp(\mathcal{V}) \leq 1$*, então, Pelo Teorema 44, tem-se que* $E, UT_2(F) \notin \mathcal{V}$*, donde, pelo Teorema 43,* A *não satisfaz identidades standard.*

Para um estudo mais detalhado sobre as variedades minimais, referenciamos [28], [39] e [40].

4 Cocaracteres Y-Próprios Graduados e a Dimensão de Gelfand-Kirillov de $UT_m(F)$

A principal ferramenta, no tocante à questão técnica dessa tese, é a álgebra dos *polinômios Y-próprios graduados*. Usaremos a completa descrição desses polinômios na álgebra relativamente livre G-graduada $UT_m(F)$, onde G é um grupo finito, dada por Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti e métodos combinatoriais para fornecer uma descrição dos cocaracteres Y-próprios graduados de $UT_m(F)$ para todas as G-graduações elementares.

4.1 Graduações Elementares em $UT_m(F)$ e suas Identidades Graduadas

Os trabalhos [27], devido a Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti, e [49], devido a Koshlukov e Valenti são fundamentais no desenvolvimento dessa. As definições, resultados e terminologias usados nessa seção são, em sua maioria, frutos do trabalho [27], os quais serão usados ao longo do presente texto , à saber, estudaremos as graduações elementares da álgebra $UT_m(F)$, sobre um corpo infinito, e veremos que estas são distinguíveis a partir de suas identidades graduadas.

Definição 60. *Sejam G um grupo, $A = UT_m(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem m e $\left(A^g\right)_{g\in G}$ uma G-graduação em A. Dizemos que $A = \oplus_{g\in G}A^g$ é uma* G-graduação elementar *se existe uma m-úpla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ de elementos de G de tal forma que cada componente homogênea A^g é o subespaço gerado pelas matrizes elementares e_{ij}, tais que $g = g_i^{-1}g_j$, com $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ e $i \leq j$. Nesse caso, dizemos que graduação $A = \oplus_{g\in G}A^g$ é induzida por ε e, comumente, denotamos por $(UT_m(F), \varepsilon)$.*

As graduações elementares em $UT_m(F)$ são "restrições" das graduações elementares em $M_m(F)$. Além disso, sendo G um grupo, vimos na Proposição 12 que existe uma correspondência biunívoca entre as G-graduações elementares em $M_m(F)$ e as m-úplas de elementos do grupo G. Esse fato é transferido para as subálgebras de $M_m(F)$, particularmente para $UT_m(F)$, e a demonstração é exatamente a mesma, bastando considerar $1 \leq i \leq j \leq m$.

Proposição 13. *Existe uma correspondência biunívoca entre as G-graduações elementares em $UT_m(F)$ e as m-úplas de elementos de G.*

Valenti e Zaicev provaram que as graduações em $UT_m(F)$ resumem-se, à menos de isomorfismos graduados, às graduações elementares. Como as técnicas usadas na demonstração desse fato destoam do propósito do presente texto, deixemos as referências [66] e [67] para maiores detalhes.

Teorema 45. *Sejam G um grupo qualquer, F um corpo arbitrário e $UT_m(F) = A = \oplus_{g\in G} A^g$ uma G-graduação na álgebra das matrizes triangulares superiores. Então, a álgebra A, é isomorfa, como álgebra G-graduada, a $UT_m(F)$ com uma G-graduação elementar.*

As proposições a seguir são bem conhecidas e fáceis de deduzir.

Proposição 14. *Toda graduação elementar em $UT_m(F)$ é unicamente determinada pelos graus homogêneos dos elementos da forma e_{1j}, $j = 1, \dots, m$.*

Demonstração. Sejam $UT_m(F) = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma G-graduação em $UT_m(F)$ e $e_{1r} \in A_{g_r}$. Considerando $i < j$, suponhamos que $e_{ij} \in A_g$, para algum $g \in G$. Desde que $e_{1i}e_{ij} = e_{1j}$, temos $g_i g = g_j$, e assim $g = g_i^{-1} g_j$ é unicamente determinado. □

Definição 61. *Consideremos G um grupo e $UT_m(F)$ com a G-graduação elementar induzida pela m-úpla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$. Definimos:*

1. *A* $(l-1)$-ésima diagonal, *$l \geq 2$, do radical de Jacobson de $UT_m(F)$ como sendo a sequência de elementos que se encontram nas posições $(1+j, l+j)$, com $j = 0, 1, \dots, m-l$.*
2. *A* sequência diagonal *como sendo $d(\tilde{\varepsilon}) = (\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}^{-1}\varepsilon_m)$, isto é, $d(\tilde{\varepsilon})$ é a sequência dos graus das matrizes elementares da primeira diagonal do radical de Jacobson de $UT_m(F)$.*

Os graus das matrizes elementares da primeira diagonal do radical de Jacobson de $UT_m(F)$ determinam a própria graduação como mostra o próximo resultado (ver [27]).

Proposição 15. *Toda graduação elementar em $UT_m(F)$ é unicamente determinada pelos graus homogêneos dos elementos da primeira diagonal do radical de Jacobson de $UT_m(F)$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, é suficiente descrever os graus homogêneos dos elementos da forma e_{1j} para $j = 1, \dots, m$. Consideremos $UT_m(F) = \oplus_{g\in G} A^g$ uma G-graduação elementar. Seja $e_{r,r+1\in A^{g_r}}$, para $g_r \in G$. Suponhamos que $e_{1j} \in A^g$, para $1 < j$. Desde que

$$e_{1j} = e_{12}e_{23}\cdots e_{j-1,j},$$

obtemos que $g = g_1 g_2 \cdots g_j$, donde temos que g é unicamente determinado. □

Consideremos a álgebra associativa livre G-graduada $F\langle X|G\rangle$. No que segue, escreveremos: Y para significar o conjunto de todas as variáveis de grau homogêneo 1, isto é, $Y = X^1$; Z como sendo o conjunto de todas as variáveis de grau homogêneo $g \neq 1$, ou seja, $Z = \bigcup_{g\in G, g\neq 1} X^g$. Usaremos a notação $F\langle Y \cup Z\rangle$, ao invés de $F\langle X|G\rangle$. Nesse caso, devemos denotar por y_i as variáveis em Y e por z_j as variáveis em Z, as quais são referidas como variáveis *pares* e *ímpares*, respectivamente.

Definição 62. *O* Z-grau *do monômio* $m \in F\langle Y \cup Z\rangle$ *é definido como sendo a quantidade de variáveis* $z \in Z$ *que figuram em* m. *Em conformidade, o* Z-grau *de um polinômio* $f \in F\langle Y \cup Z\rangle$ *é definido como sendo o máximo* Z*-grau de seus monômios* f.

Consideremos a álgebra $F\langle Y \cup Z\rangle$. Os *polinômios* Y*-próprios* são definidos como sendo os elementos da subálgebra unitária B gerada por todos os elementos de Z e por todos os comutadores não nulos. Mostra-se que se $f \in F\langle Y \cup Z\rangle$ é um polinômio Y-próprio, então todo $y \in Y$ que figura em f aparece dentro dos comutadores. A razão de considerarmos os polinômios Y-próprios é a seguinte: Os T_G-ideais são unicamente determinados por seus polinômios próprios. Os detalhes do seguinte resultado podem ser encontrados em [26].

Proposição 16. *Seja* I *o* T_G*-ideal das identidades* G*-graduadas de uma álgebra unitária* G*-graduada sobre um corpo infinito, então* $(B_Y \cap I)^{T_G} = I$.

A seguinte definição, bem como os os resultados correlatos, são muito importante para o desenvolvimento dessa tese, para mais detalhes ver [27].

Definição 63. *Seja* $\tilde{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ *uma sequência de elementos de* G. *Dizemos que* $\tilde{\eta}$ *é uma sequência* ε*-boa de* $(UT_m(F), \varepsilon)$ *se existe uma sequência de* n *matrizes unitárias* $(r_1, \ldots, r_n)$ *no radical de Jacobson de* $UT_m(F)$ *tal que* $r_1 \cdots r_n$ *é diferente de zero e o grau homogêneo de* r_i *é* η_i*, para todo* $i = 1, \ldots, n$. *Caso contrário, dizemos que* $\tilde{\eta}$ *é uma sequência* ε*-ruim.*

Agora, dada uma sequência $\tilde{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de elementos de G. Consideremos o seguinte polinômio multilinear

$$f_{\tilde{\eta}} = f_{\tilde{\eta},1} \cdots f_{\tilde{\eta},n},$$

onde $f_{\tilde{\eta},i} := [y_{2i-1}, y_{2i}]$, se $\eta_i = 1_G$, e $f_{\tilde{\eta},i} := x_i^{\eta_i}$, se $\eta_i \neq 1_G$.

Exemplo 43. *Se* $\tilde{\eta} = (0, 0, 1, 0)$ *é uma sequência de elementos de* $\mathbb{Z}_m$*, então*

$$f_{\tilde{\eta}} = [y_1, y_2][y_3, y_4]z[y_5, y_6].$$

Os polinômios multilineares da forma $f_{\tilde{\eta}}$ são muito importantes nas descrições dos T_G-ideais das identidades graduadas de $(UT_m(F), \varepsilon)$, e isso é evidenciado na seguinte proposição (para maiores detalhes, ver [27]).

Proposição 17. *O polinômio multilinear $f_{\tilde{\eta}}$ é uma identidade polinomial graduada para $(UT_m(F), \varepsilon)$ se, e somente se, $\tilde{\eta}$ é uma sequência ε-ruim.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $f_{\tilde{\eta}}$ não seja uma identidade polinomial graduada para $(UT_m(F), \varepsilon)$, então existem elementos homogêneos $r_1, \dots, r_t \in UT_m(F)$ tais que $f_{\tilde{\eta}}(r_1, \dots, r_t) \neq 0$. O polinômio $f_{\tilde{\eta}}$ é multilinear e as matrizes e_{ij} formam uma base, de elementos homogêneos, para as componentes homogêneas na G-graduação fixada, dessa forma podemos escolher as matrizes r_i entre as matrizes do tipo e_{ij}. Agora, observemos que se $\eta_i \neq 1$, então $f_{\tilde{\eta},i} = x_i^{\eta_i}$ e sua avaliação em matrizes da forma matrizes e_{ij} resulta em um elemento (não nulo) e_{a_i,b_i} no radical de Jacobson de $UT_m(F)$. Por outro lado, caso $\eta_i = 1$, então $f_{\tilde{\eta},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}]$ e uma avaliação desse polinômio em elementos da forma e_{ij} resulta em um elemento $[e_{a_{2i-1}}, e_{b_{2i-1}}, e_{a_{2i}}, e_{b_{2i}}]$ (não nulo), o qual, a menos de sinal, também é uma matriz da forma e_{ij} que pertence ao radical de Jacobson de $UT_m(F)$. Portanto, $\tilde{\eta}$ é uma sequência ε-boa.

($\Rightarrow$) Supondo que $\tilde{\eta}$ seja ε-boa, deve existir uma sequência de n matrizes $e_{a_1,a_2}, e_{a_2,a_3}, \dots, e_{a_{n-1},a_n}, e_{a_n,a_{n+1}}$ no radical de Jacobson de $UT_m(F)$ tais que o grau homogêneo $\varepsilon_{a_i}^{-1}\varepsilon_{a_{i+1}}$ de $e_{a_i,a_{i+1}}$ é η_i, para todo $i = 1, \dots, n$, e

$$e_{a_1,a_2}e_{a_2,a_3} \cdots e_{a_{n-1},a_n}e_{a_n,a_{n+1}} \neq 0. \tag{4.1}$$

Se $\eta_i = 1$, então $e_{a_i,a_{i+1}}$ tem grau 1 e podemos avaliar o polinômio $f_{\tilde{\eta},i} = [y_{2i-1}, y_{2i}]$ nas matrizes $e_{a_i,a_{i+1}}$ e $e_{a_{i+1},a_{i+1}}$, uma vez que essa última também tem grau homogêneo 1. Se tivermos $\eta_i \neq 1$, então $f_{\tilde{\eta},i} = x_i^{\eta_i}$ e $e_{a_i,a_{i+1}}$ tem grau homogêneo η_i, e assim podemos avaliar $f_{\tilde{\eta},i}$ em $e_{a_i,a_{i+1}}$. Observemos que a avaliação do polinômio $f_{\tilde{\eta}} = f_{\tilde{\eta},1} \cdots f_{\tilde{\eta},n}$ nesses elementos resultam exatamente na equação em (4.1), donde temos o resultado. □

O resultado que segue, de extrema importância nessa tese, devido a Di Vincenzo, Koshlukov e Valenti, nos fornece a quantidade de G-graduações em $UT_m(F)$, onde G é um grupo finito, e, além disso, que essas graduações são distinguíveis a partir de suas, respectivas, identidades graduadas (vide [27]).

Teorema 46. *Seja G um grupo finito. Existem $|G|^{m-1}$ graduações elementares não isomorfas na álgebra $UT_m(F)$. Além disso, quaisquer duas graduações elementares diferentes satisfazem identidades graduadas diferentes.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que as m-úplas $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ e $(1, g_1^{-1}g_2, \dots, g_1^{-1}g_m)$ produzem a mesma graduação em $UT_m(F)$, e assim temos exatamente $|G|^{m-1}$ m-úplas diferentes da forma $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$, onde $\varepsilon_1 = 1$. Mostremos que essas m-úplas fornecem graduações que satisfazem identidades diferentes, e, por essa razão, são não isomorfas. De fato, no radical de Jacobson de $UT_m(F)$ existe uma única sequência de $m - 1$ matrizes cujo produto $r_1 \cdots r_{m-1}$ é diferente de zero, a saber $(e_{1,2}, e_{2,3}, \dots, e_{m-1,m})$.

Portanto, sendo $\tilde{g} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ uma graduação fixada em $UT_m(F)$, temos que a sequência diagonal $d(\tilde{g}) = (\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1}\varepsilon_m)$ é a única sequência $\tilde{g}$-boa de tamanho $m-1$. Segue da Proposição 15 que diferentes graduações $\tilde{g}^{'}$ e $\tilde{g}$, em $UT_m(F)$, determinam sequências diagonais diferentes $d(\tilde{g}^{'})$ e $d(\tilde{g})$, respectivamente. Dessa forma, temos que o polinômio multilinear $f_{d(\tilde{g})}$ é uma identidade polinomial graduada de $UT_m(F)$ com respeito à graduação elementar $\tilde{g}^{'}$, mas não o é com respeito à $\tilde{g}^{'}$. □

Argumentamos anteriormente que os polinômios graduados em $F\langle Y \cup Z\rangle$ seguem dos polinômios Y-próprios. Seguindo essa terminologia, chamaremos as parcelas dos polinômios Y-próprios de *Y-comutadores.*

Lema 14. *Todo polinômio Y-próprio de grau positivo é uma combinação linear de produtos de Y-comutadores de Z-grau no máximo 1. Além disso, se a variável z ocorrer em um Y-comutador c, podemos assumir que z aparece na primeira entrada de c. Isto é, $c = z$ ou $c = [z, y_{i1}, \dots, y_{it}]$ para algum $t \geq 1$.*

Demonstração. Ver detalhes em [27]. □

Definição 64. *Um Y-comutador c de Z-grau no máximo 1 que satisfaz as condições do lema anterior é chamado de* comutador normal. *Além disso;*

1. *Um comutador normal $[y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_p}]$ de Z-grau 0 é dito ser* semistandard *se os índices $j_1, j_2, \dots, j_p$ satisfazem $j_1 \geq j_2 \leq, \cdots, \leq j_p$.*

2. *Um comutado normal $[z_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_p}]$ de Z-grau 1 e tamanho $p \geq 1$ é dito ser* semistandard *se os índices $j_2, \dots, j_p$ satisfazem $j_2 \leq, \cdots, \leq j_p$.*

Agora, seja $c = c_1 \cdots c_n$ um produto de comutadores normais. Consideremos a sequência $\tilde{\eta}_c = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in G^n$, onde $\eta_i = \deg_G c_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Observemos que o produto $c = c_1 \cdots c_n$ é consequência de $f_{\tilde{\eta}_c}$, e, por essa razão, se $\tilde{\eta}_c$ é uma sequência ε-ruim, temos que $f_{\tilde{\eta}_c}$, e portanto $c = c_1 \cdots c_n$, é uma identidade polinomial G-graduada de $(UT_m(F), \varepsilon)$.

Temos a seguinte caracterização das identidades graduadas em uma G-graduação elementar de $UT_m(F)$, a qual é válida para corpos infinitos. Os detalhes são bastante técnicos e podem ser encontrados em [27].

Teorema 47. *Sejam F um corpo infinito, G um grupo e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ uma G-graduação elementar em $UT_m(F)$. Então:*

1. *O ideal $T_G(UT_m(F), \varepsilon)$ é gerado pelos polinômios multilineares da forma $f_{\tilde{\eta}}$, onde $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ é ε-ruim e $n \leq m$;*

2. *Uma base linear para os polinômios Y-próprios na álgebra graduada relativamente livre $F\langle X\rangle/T_G(UT_m(F),\varepsilon)$ consiste de 1 e dos polinômios $c = c_1 \cdots c_n$, onde cada c_i é um comutador semistandard e a sequência $\tilde{\eta}_c$ é ε-boa.*

A questão de determinar o conjunto gerador para o T-ideal das identidades polinomiais de $UT_m(F)$ no caso ordinário foi resolvido por Maltsev para característica zero, e por outros autores no caso geral, ver [60] e [64]. No exemplo a seguir, resolveremos essa questão com as ferramentas introduzidas no presente texto.

Exemplo 44. *Consideremos $UT_m(F)$ graduada por um grupo trivial, isto é, $G = \{1\}$. Nesse caso, a G-graduação é induzida pela m-úpla $(1,\ldots,1)$ e as identidades graduadas são exatamente as identidades ordinárias. Pelo teorema anterior, as sequências $\tilde{\eta}'^s$ ε-ruins tais que $f_{\tilde{\eta}'^s}$ geram o T_G-ideal das identidades graduadas devem ter tamanho $n \le m$. Por outro lado, se $\tilde{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_n)$ é uma sequência de elementos de G de tamanho $n \le m-1$, basta tomar a sequência $e_{12},\ldots,e_{(n-1),n}$ na primeira diagonal de Jacobson de $UT_m(F)$ para ver que $\tilde{\eta}$ é ε-boa. Portanto, o T_G-ideal de $UT_m(F)$ é gerado pelo polinômio*

$$[y_1,y_2]\cdots[y_{2m-1},y_{2m}].$$

Na Proposição 15, vimos que as graduações em $UT_m(F)$ são determinadas pelos graus dos elementos na primeira diagonal do radical de Jacobson, enquanto que no Teorema 46 obtemos que as graduações em $UT_m(F)$ são diferenciadas por suas identidades graduadas. Na verdade, veremos na próxima proposição que as identidades graduadas de $(UT_m(F),\varepsilon)$ podem ser obtidas a partir da sequência diagonal $d(\varepsilon)$ relacionada a ε (para maiores detalhes, ver [27]).

Proposição 18. *Consideremos a álgebra $UT_m(F)$ com a G-graduação induzida pela m-upla $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)$ de elementos de G. Seja $d(\varepsilon) = (\eta_1,\ldots,\eta_{m-1})$ a sequência diagonal relacionada a essa ε-graduação, isto é, $\eta_i = \varepsilon_i^{-1}\varepsilon_{i+1} = \deg e_{i,i+1}$. Se $\tilde{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ é uma sequência de elementos de G, então $\tilde{\gamma}$ é ε-boa se, e somente se, existem $n+1$ inteiros positivos $1 \le t_1 \le \cdots \le t_{n+1} \le m$ tais que*

$$\gamma_i = \eta_{t_i}\cdots\eta_{t_{i+1}-1}$$

para todo $i = 1,\ldots,n$.

Demonstração. Segue da Definição 63 que a sequência $\tilde{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ é uma sequência ε-boa se, e somente se, existem n matrizes elementares $e_{t_1,t_2}, e_{t_2,t_3},\ldots,e_{t_{n-1},t_n}, e_{t_n,t_{n+1}}$ no radical de Jacobson de $UT_m(F)$ tais que $\deg e_{t_i,t_{i+1}} = \gamma_i$, para todo $i = 1,\ldots,n$, e $e_{t_1,t_2}e_{t_2,t_3}\cdots e_{t_{n-1}t_n}e_{t_n,t_{n+1}} \neq 0$. Observemos que $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_{n+1}$, e assim, sendo $j_i = t_{i+1} - t_i$, temos $t_i \le t_{i+1} - k \le \cdots \le t_{i+1} - 1 \le t_{i+1}$, onde $k = 1,\ldots,j_i$ e $i =,\ldots,n+1$.

Como

$$e_{t_i,t_{i+1}} = e_{t_i,t_i+1}e_{t_i+1,t_i+2}\cdots e_{t_{i+1}-1,t_{i+1}},$$

basta definir $\eta_{t_{i+1}-k} = \deg e_{(t_i-k),(t_i-k+1)}$, para $k = 1, \ldots, j_i$. $\square$

Centrone e Cirrito afim de fornecer uma completa descrição dos *cocaracteres Y-próprios $\mathbb{Z}_m$-graduados* e das *codimensões* da álgebra $(UT_m(F), \varepsilon)$, onde $\mathbb{Z}_m$ é o grupo cíclico de ordem m, $m = 3, 4, 5$ e $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-2)$, primeiramente deram a seguinte descrição de uma base dos respectivos $T_{\mathbb{Z}_m}$-ideais (ver [17], para mais detalhes).

Corolário 2. *Sejam $\mathbb{Z}_m$ o grupo cíclico de ordem m e $(UT_m(F), \varepsilon)$, onde $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-j)$ é uma m-úpla de elementos de $\mathbb{Z}_m$. Denotando por y_i as variáveis de grau homogêneo 0, por z_i as variáveis de grau homogêneo 1, por t_i as variáveis de grau homogêneo 2 e por r_i as variáveis de grau homogêneo 3, temos*

(1)

$$T_G(UT_3(F)) = \langle [y_1, y_2][y_3, y_4], z[y_1, y_2], z_1z_2\rangle^{T_G}$$

(2)

$$T_G(UT_4(F)) = \langle [y_1, y_2][y_3, y_4], zt, tz, z[y_1, y_2], t_1t_2, t[y_1, y_2], z_1z_2z_3\rangle^{T_G}$$

(3)

$$\begin{aligned} T_G(UT_5(F)) &= \langle [y_1, y_2][y_3, y_4], z_1z_2z_3z_4, z[y_1, y_2], t_1t_2, t[y_1, y_2], \\ &\quad z_1tz_2, tz_1z_2, t_1zt_2, z_1z_2t, r[y_1, y_2], rz, zr, tr, rt, r_1r_2\rangle^{T_G} \end{aligned}$$

Demonstração. De fato, sendo $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-j)$, temos: $d(\varepsilon) = (0, 1)$, para $UT_3(F)$; $d(\varepsilon) = (0, 1, 1)$, para $UT_4(F)$ e $d(\varepsilon) = (0, 1, 1, 1)$, para $UT_5(F)$. Portanto, aplicando o Teorema 47 juntamente com a Proposição 18, temos que as sequências ε-ruins são, respectivamente:

1. $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$;
2. $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ $(2, 2)$, $(2, 0)$, $(1, 1, 1)$;
3. $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 2)$, $(3, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$.

$\square$

Segue da Proposição 18, que o conhecimento das sequências ε-boas, bem como as ε-ruins, depende da sequência diagonal $d(\varepsilon)$, todavia, esta última nem sempre tem uma forma acessível. A seguir, mostraremos alguns resultados importantes que ajudam no processo dessa descrição.

Definição 65. *Dada uma $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$-graduação em $UT_m(F)$, dizemos que existe uma variação na posição i, se $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$.*

Observação 21. *Consideremos a sequência diagonal $d(\varepsilon) = (\eta_1, \ldots, \eta_{m-1})$. Observemos que existir uma variação na posição i em ε é equivalente a dizer que $\eta_i \neq 1_G$ em $d(\varepsilon)$.*

O número de variações em uma ε-graduação na álgebra $UT_m(F)$ é importante na determinação das sequências ε-boas como veremos no próximo resultado, para mais detalhes ver [27].

Proposição 19. *Seja t o número de variações numa ε-graduação em $UT_m(F)$. Se $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma sequência de elementos de G^n com Z-grau maior ou igual a $t+1$, então $f_{\tilde{\gamma}}$ é uma identidade polinomial graduada para $(UT_m(F), \varepsilon)$.*

Demonstração. Na sequência diagonal $d(\varepsilon)$ existem exatamente t elementos que são diferentes de 1_G. Portanto, segue da Proposição 18 que toda sequência ε-boa possui no máximo t elementos diferentes de 1_G. Dessa forma, se $f_{\tilde{\gamma}}$ tem Z-grau pelo menos $t+1$, então $\tilde{\gamma}$ é ε-ruim e , consequentemente, $f_{\tilde{\gamma}}$ é identidade graduada. □

Como veremos no próximo resultado, as variações em uma ε-graduação na álgebra $UT_m(F)$ determinam, também, as identidades da componente nula, ver mais detalhes em [27].

Proposição 20. *Sejam $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ uma G-graduação em $UT_m(F)$ e $h_1, \ldots, h_s$ os distintos elementos de G que figuram em ε. Se, para $i = 1, \ldots, s$, os elementos h_i aparecem m_i vezes em ε, temos*

$$UT_m(F)^0 \simeq UT_{m_1}(F) \oplus \cdots \oplus UT_{m_s}(F).$$

Consequentemente, sendo $M = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$, temos que as identidades polinomiais multilineares de Z-grau zero de $UT_m(F)$ seguem de

$$[y_1, y_2] \cdots [y_{2M-1}, y_{2M}].$$

Demonstração. De fato, sejam $j_1 < \cdots < j_{m_i}$ as posições na sequência $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, tais que $\varepsilon_{j_l} = h_i$ para todo $l = 1, \ldots, m_i$. Observemos que

$$\varepsilon_{j_p}^{-1} \varepsilon_{j_q} = h_i^{-1} h_i = 1 \in G,$$

e portanto as matrizes elementares $e_{j_p, j_q} \in (UT_m(F))^0$, para quaisquer $1 \leq p \leq q \leq m_i$. Consideremos A_{h_i} como sendo o espaço gerado pela matrizes $e_{j_p, j_q} \in (UT_m(F))^0$, para todo $1 \leq p \leq q \leq m_i$. Claramente, $(UT_m(F))^0 \simeq A_{h_1} \oplus \cdots \oplus A_{h_s}$. Por outro lado, $A_{h_i} \simeq UT_{m_i}(F)$, como álgebra, e assim

$$(UT_m(F))^0 \simeq UT_{m_1}(F) \oplus \cdots \oplus UT_{m_s}(F).$$

A soma é direta, pois os $h_{i's}$ são elementos distintos em G.

A última parte da proposição segue diretamente do fato de que

$$T_G(UT_m(F)^0) = \bigcap_{1 \leq i \leq s} T_G(UT_{m_i}(F)) = T_G(UT_M(F)).$$

□

A seguir, aplicaremos os métodos vistos anteriormente para calcular de forma explicita a base das identidades graduadas e da álgebra graduada relativamente livre de alguns exemplos (para maiores detalhes, ver [27]).

Consideremos $G \simeq \mathbb{Z}_2$ um grupo cíclico de ordem 2. Nesse caso, observemos que as variáveis impar z tem grau homogêneo -1. Para os próximos dois resultados, consideremos

$$\varepsilon = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m-k}).$$

Teorema 48. *Considerando as notações acima, suponhamos que $k > m - k$ e seja $(UT_m(F), \varepsilon)$. Então:*

1. *O ideal $T_{\mathbb{Z}_2}(UT_m(F), \varepsilon)$ é gerado pelos polinômios*

$$z_1 z_2, \qquad [y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}], \qquad z[y_1, y_2] \cdots [y_{2(m-k)-1}, y_{2(m-k)}];$$

2. *Uma base linear para os polinômios Y-próprios na álgebra graduada relativamente livre $F\langle X\rangle / T_{\mathbb{Z}_2}(UT_m(F), \varepsilon)$ consiste de 1 e dos polinômios*

$$[y_{i_1,1}, y_{i_2,1}, \ldots, y_{i_{p_1},1}] \cdots [y_{i_1,r}, y_{i_2,1}, \ldots, y_{i_{p_r},r}][z, y_{l_2}, \ldots, y_{l_t}] \times$$
$$\times [y_{j_1,1}, \ldots, y_{j_{q_1},1}] \cdots [y_{j_1,s}, \ldots, y_{j_{q_s},s}]$$

onde $0 \leq r \leq k-1,\ 0 \leq s \leq m-k-1,\ 1 \leq t$, e

$$[y_{i_1,1}, y_{i_2,1}, \ldots, y_{i_{t_1},1}] \cdots [y_{i_1,r}, y_{i_2,1}, \ldots, y_{i_{t_r},r}],$$

para todo $0 \leq r \leq k-1$. Para ambos os tipos de polinômios, os comutadores são semistandard, isto é, em $[y_{h_1}, \ldots, y_{h_u}]$ os índices satisfazem a seguinte desigualdade

$$h_1 > h_2 \leq \cdots \leq h_u,$$

enquanto que em $[z, y_{l_2}, \ldots, y_{l_t}]$, tem-se $l_2 \leq \cdots \leq l_t$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que $d(\varepsilon) = (1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$, onde -1 ocorre na k-ésima posição. Dessa forma, segue da Proposição 18 que as sequências ε-boas são:

1. $(\underbrace{1, \dots, 1}_{n})$, onde $n \leq k-1$.

2. $(\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, -1, \underbrace{1, \dots, 1}_{s})$, onde $r \leq k-1$ e $s \leq m-k-1$.

Portanto, a segunda afirmação do presente teorema segue diretamente do segundo item do Teorema 47.

Agora, usando o primeiro item do Teorema 47 temos que o ideal $T_G(UT_m(F), \varepsilon)$ é gerado pelos polinômios multilineares $f_{\tilde{\eta}}$, onde a sequência $\tilde{\eta} = \eta_1, \dots, \eta_n$ pertence ao conjunto das sequências ε-ruins com $n \leq m$. Assim, sendo $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ uma sequência ε-ruim de tamanho $n \leq m$. As possibilidades para $\tilde{\gamma}$ são:

1. O elemento -1 aparece pelo menos duas vezes em $\tilde{\gamma}$.

2. $\tilde{\gamma} = (1, \dots, 1)$, com $n \geq k$.

3. $$\tilde{\gamma} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{r}, -1, \underbrace{1, \dots, 1}_{s}),$$

   com $r \geq k$ ou $s \geq m-k$.

No primeiro caso, o polinômio multilinear $f_{\tilde{\gamma}}$ é consequência de z_1z_2. No segundo caso, $f_{\tilde{\gamma}}$ é consequência de $[y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}]$. Finalmente, no último caso, ou $f_{\tilde{\gamma}}$ é consequência de

$$[y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}]z$$

ou $f_{\tilde{\gamma}}$ é consequência de

$$z[y_1, y_2] \cdots [y_{2(m-k)-1}, y_{2(m-k)}].$$

Observemos que em todos os casos supra listados os polinômios encontrados são linearmente independentes, o que completa nossa demonstração. □

Teorema 49. *Assumamos as notações do teorema anterior, e suponhamos que $k \leq m-k$. Então:*

1. *Se $k < m-k$, temos que o ideal $T_{\mathbb{Z}_2}(UT_m(F), \varepsilon)$ é gerado pelos polinômios*

$$z_1z_2, [y_1, y_2] \cdots [y_{2(m-k)-1}, y_{2(m-k)}] \quad [y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}]z.$$

2. *Se $k = m - k$, então o ideal $T_{\mathbb{Z}_2}(UT_m(F), \varepsilon)$ é gerado pelos polinômios*

$$z_1 z_2, \quad [y_1, y_2] \cdots [y_{2k-1}, y_{2k}].$$

Como visto nos resultados acima, a questão de determinar uma base linear para o T_G-ideal das identidades graduadas e dos polinômios Y-próprios na álgebra graduada relativamente livre pode ser uma tarefa muito complicada. Nesse sentido, na próxima seção introduziremos outros conceitos e terminologias para continuarmos avançando nessa linha de pesquisa.

4.2 Cocaracteres Y-Próprios Graduados de $(UT_m(F), \varepsilon)$ com $\varepsilon = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, m-j)$ onde $m = 2, 3, 4$ e $j = 1, 2$

Nessa seção apresentaremos os trabalhos [16] e [17], devidos a Centrone e Cirrito, estes são basilares e norteadores para o desenvolvimento dessa tese, a qual tem como proposta a generalização dos resultados neles obtidos.

A teoria das representações do grupo simétrico S_n, bem como no caso ordinário, possui uma estreita relação, também, com as identidades polinomiais multilineares graduadas. Consideremos G um grupo, A uma álgebra G-graduada, $F\langle X|G\rangle$ a álgebra associativa livre graduada e o subespaço vetorial

$$P_n^G = span\langle x_{\sigma(1)}^{g_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{g_n} \mid g_i \in G, \sigma \in S_n\rangle,$$

de $F\langle X|G\rangle$, onde S_n é o grupo simétrico de ordem n. Os elementos de P_n^G são chamados de *polinômios multilineares G-graduados*.

O espaço P_n^G possui uma estrutura natural de S_n-módulo à esquerda, a mesma considerada no caso P_n, vide equação (2.4), Seção 2.5. Sendo A uma álgebra PI-graduada, temos que $P_n^G \cap T_G(A)$ é S_n-submódulo à esquerda de P_n^G, e portanto, essa ação induz uma estrutura de S_n-módulo à esquerda no espaço quociente

$$P_n^G(A) := \frac{P_n^G}{P_n^G \cap T_G(A)}.$$

Definição 66. *Sejam G um grupo e A uma álgebra G-graduada. Definimos:*

1. *O n-ésimo S_n-*cocaracter G-graduado *de A, denotado por $\chi_n^G(A)$, como sendo o S_n-caracter do espaço quociente $P_n^G(A)$;*

2. *A n-*ésima codimensão G-graduada *de A, denotada por $c_n^G(A)$, como sendo a dimensão do espaço $P_n^G(A)$ sobre F;*

3. *As sequências de cocaracteres e codimensões G-graduados como sendo*

$$\left(\chi_n^G(A)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad e \qquad \left(c_n^G(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \textit{respectivamente.}$$

As sequências de codimensões e cocaracteres graduados podem servir para obter informações sobre as codimenções e cocaracteres ordinários. De fato, sejam G um grupo qualquer e A uma PI-álgebra G-graduada. É provado em [23] que $P_n/(T(A)\cap P_n)$ é isomórfico a um S_n-submódulo de $P_n^G/(T_G(A)\cap P_n^G)$. Mais precisamente, é provado que

$$\frac{P_n}{T(A)\cap P_n} = \frac{P_n}{P_n\cap T_G(A)\cap P_n^G} \simeq \frac{P_n + (T_G(A)\cap P_n^G)}{T_G(A)\cap P_n^G} \leq \frac{P_n^G}{T_G(A)\cap P_n^G},$$

e assim

$$c_n^G(A) \geq c_n(A), \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}\ .$$

Além disso, não é difícil ver que as multiplicidades dos cocaracteres graduados também são um limitante superior para as multiplicidades dos cocaracteres no caso ordinário.

No caso de grupos finitos, é possível decompor os cocaracteres e codimensões graduadas da seguinte forma:

Sejam $G=\{g_1,\ldots,g_r\}$ um grupo finito de ordem r e $l_{g_1},\ldots,l_{g_r}\in\mathbb{N}$. Vamos olhar para as variáveis na álgebra livre graduada $F\langle X|G\rangle$ como segue:

$$x_1^{g_1},\ldots,x_{l_{g_1}}^{g_1},x_{l_{g_1}+1}^{g_2},\ldots,x_{l_{g_1}+l_{g_2}}^{g_2},\ldots, \tag{4.2}$$

e denotamos por $P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}$ o espaço vetorial gerado por elas. Observemos que o espaço $P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}$ é um $S_{l_{g_1}}\times\cdots\times S_{l_{g_r}}$-modulo à esquerda, onde, para cada $i=1,\ldots,r$, o grupo simétrico $S_{l_{g_i}}$ age nas variáveis em (4.2) de grau g_i como a ação natural à esquerda estudada na Seção (2.5). Sendo A uma álgebra PI-graduada, temos que $P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}\cap T_G(A)$ é um $S_{l_{g_1}}\times\cdots\times S_{l_{g_r}}$-submódulo à esquerda de $P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}$, e, como anteriormente, essa ação induz uma estrutura de $S_{l_{g_1}}\times\cdots\times S_{l_{g_r}}$-modulo à esquerda no espaço quociente

$$P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A) := P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}/(P^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}\cap T_G(A)).$$

Denotemos por $\chi^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A)$ e $c^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A)$ o seu cocaracter e codimensão G-graduada, respectivamente. Temos o seguinte resultado devido a Di Vincenzo, ver detalhes em [23].

Teorema 50. *Sejam $G=\{g_1,\ldots,g_r\}$ um grupo finito de ordem r, A uma álgebra G-graduada e $l_{g_1},\ldots,l_{g_r}\in\mathbb{N}$. Então,*

$$\chi_n^G(A) = \sum_{\substack{(l_{g_1},\ldots,l_{g_r})\\ l_{g_1}+\cdots+l_{g_r}=n}} \chi^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A)^{\uparrow S_n}.$$

Além disso,

$$c_n^G(A) = \sum_{\substack{(l_{g_1},\ldots,l_{g_r}) \\ l_{g_1}+\cdots+l_{g_r}=n}} \binom{n}{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}} c_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}^G(A)^{\uparrow S_n}.$$

A partir de agora, vamos tratar das *codimensões* e *cocaracteres Y-próprios* graduados. Para tanto, devemos considerar a álgebra $F\langle Y \cup Z\rangle$ introduzida no início desse capítulo. Denotaremos o espaço dos polinômios Y-próprios multilineares de P_n^G por Γ_n^G. De forma análoga ao que foi feito anteriormente (inclusive com a mesma S_n-ação à esquerda), Γ_n^G é um S_n-submodulo à esquerda de P_n^G, e sendo A uma álgebra PI-graduada, obtemos que $\Gamma_n^G \cap T_G(A)$ é um S_n-submódulo de Γ_n^G. Portanto, temos uma estrutura de S_n-módulo à esquerda no espaço quociente

$$\Gamma_n^G(A) \colon = \Gamma_n^G/(\Gamma_n^G \cap T_G(A)).$$

Definição 67. *Seja A uma álgebra PI-graduada. Definimos:*

1. *O n-ésimo* cocaracter Y-próprio G-graduado *de A, denotado por $\xi_n^G(A)$, como sendo o S_n-caracter G-graduado do espaço $\Gamma_n^G(A)$;*
2. *A n-ésima* codimensão Y-própria G-graduada *de A, denotada por $\gamma_n^G(A)$, como sendo a dimensão do espaço $\Gamma_n^G(A)$ sobre F;*
3. *As sequências de codimensões e cocaracteres Y-próprios G-graduados de A como sendo $\left(\chi_n^G(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(c_n^G(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente.*

Os cocaracteres e codimensões Y-próprios graduados possuem uma relação estreita com os cocaracteres e codimensões graduados. Nesse sentido, temos o seguinte resultado cuja demonstração, que pode ser encontrada (para o caso ordinário) no livro texto [33] (Teorema 12.5.4, para cocaracteres, e Teorema 4.3.12, para codimensões), pode ser escrita literalmente na linguagem de identidades graduadas através da Proposição 16.

Teorema 51. *Consideremos A uma álgebra unitária G-graduada satisfazendo uma identidade polinomial G-graduada. Sejam, respectivamente, $\chi_n^G(A) = \sigma_{\lambda\vdash n} m_\lambda^G(A)\chi_\lambda$, $c_n^G(A)$ e $\xi_n^G(A) = \sigma_{\lambda\vdash n} k_\nu^G(A)\chi_\nu$, $c_{n,Y}^G(A)$ o n-ésimo H-cocaracter e codimensão (G-graduado), e o H-cocaracter e codimensão Y-próprio(a) (G-graduado) do T^G-ideal $Id^G(A)$. Então as multiplicidades $m_\lambda^G(A)$ e $k_\nu^G(A)$ são relacionadas por*

$$m_\lambda^G(A) = \sum k_\nu^G(A),$$

onde para $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ o somatório percorre todas as partições $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ tal que $\lambda_1 \geq \nu_1 \geq \lambda_2 \geq \nu_2 \geq \cdots \lambda_n \geq \nu_n$. Além disso,

$$c_n^G(A) = \sum_{k\leq n} \binom{n}{k} \gamma_k^G(A).$$

De acordo com o resultado anterior, os cocaracteres e codimensões G-graduados podem ser descritos em termos dos cocaracteres e codimensões Y-próprios G-graduados. Então, no sentido de estender nosso estudo nessa linha de pesquisa, votaremos nossa atenção para o caso Y-próprio. Começaremos denotando por $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}$ o espaço dos polinômios Y-próprios de $P^G_{m_1,\ldots,m_r}$ tais que $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$. Observemos que $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}$ é um $S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_r}$-submodulo à esquerda de $P^G_{m_1,\ldots,m_r}$, portanto, sendo A uma álgebra PI-graduada, temos que $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}\cap T_G(A)$ é um $S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_r}$-submodulo à esquerda de $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}$. Logo, temos uma estrutura de $S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_r}$-módulo á esquerda no espaço quociente

$$\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}(A) := \Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}/(\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}\cap T_G(A)).$$

Denotamos o $S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_r}$-cocaracter e a $S_{m_1}\times\cdots\times S_{m_r}$-codimensão (sobre F) de $\Gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}(A)$ por $\xi^G_{m_1,\ldots,m_r}(A)$ e $\gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}(A)$, respectivamente. Ademais, quando livre de ambiguidades sobre a álgebra em questão, escrevemos simplesmente $\xi^G_{m_1,\ldots,m_r}$ e $\gamma^G_{m_1,\ldots,m_r}$, respectivamente.

Temos a seguinte versão do Teorema 50 para as codimensões e cocaracteres Y-próprios graduados cuja demonstração segue exatamente os mesmo passe da primeira versão (vide [23]).

Teorema 52. *Sejam $G=\{g_1,\ldots,g_r\}$ um grupo finito de ordem r e A uma álgebra PI-graduada. Então,*

$$\xi^G_n(A) = \sum_{\substack{(l_{g_1},\ldots,l_{g_r})\\ l_{g_1}+\cdots+l_{g_r}=n}} \xi^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A)^{\uparrow S_n}.$$

Além disso,

$$\gamma^G_n(A) = \sum_{\substack{(l_{g_1},\ldots,l_{g_r})\\ l_{g_1}+\cdots+l_{g_r}=n}} \binom{n}{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}} \gamma^G_{l_{g_1},\ldots,l_{g_r}}(A)^{\uparrow S_n}.$$

Agora, iniciaremos nosso estudo sobre as codimensões e cocarcateres Y-próprios graduados da álgebra $UT_m(F)$ com uma graduação elementar qualquer de elementos do grupo cíclico $G=\mathbb{Z}_m$ de ordem m.

As terminologias adotadas a seguir foram introduzidas em [16] e [17].

Definição 68. *Seja $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ uma sequência de elementos do grupo $\mathbb{Z}_m$. Definimos a sequência* relacionada *à α como*

$$\mu(\alpha) = (\mu_1,\ldots,\mu_m),$$

onde para cada $i=1,\ldots,m$

$$\mu_i = \text{ o número de } \alpha_j \text{ tal que } \alpha_j = \overline{i-1}.$$

Observemos que diferentes sequências podem ter a mesma sequência relacionada. Ademais, na prática, a sequência $\mu(\alpha) = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ é tal que: μ_i é o número de vezes que α_{i-1} aparece em $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, para $i = 1, \ldots, m$. Por exemplo: μ_1 é o número de vezes que 0 aparece em α; μ_2 é o número de vezes que 1 aparece em α, etc.

Em 2012, Centrone e Cirrito deram uma completa descrição das codimensões e cocaracteres Y-próprios graduados de $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$, com $m = 2, 3, 4$ (ver [16]). A seguir, veremos a sequência de resultados necessários para tal obtenção.

O resultado que segue mostra que podemos ordenar as variáveis de grau par módulo o T-ideal das identidades de $UT_m(F)$, para maios detalhes ver [17].

Lema 15. *Seja $m \geq 2$ e consideremos $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$. Então, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in S_n$, temos*

$$[z, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}] \equiv_{T_{\mathbb{Z}_m}(UT_m(F)} [z, y_1, \ldots, y_n],$$

onde $\equiv_{T_{\mathbb{Z}_m}(UT_m(F)}$ denota congruência módulo $T_{\mathbb{Z}_m}(UT_m(F)$.

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$[z, y_1, \ldots, y_a, y_{a+1}, \ldots, y_n] \equiv_{T_{\mathbb{Z}_m}(UT_m(F)} [z, y_1, \ldots, y_{a+1}, y_a, \ldots, y_n].$$

Escrevendo $c = [z, y_1, \ldots, y_{a-1}]$ e usando a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} [z, y_1, \ldots, y_a, y_{a+1}, \ldots, y_n] &= -[y_a, y_{a+1}, c, \ldots, y_n] - [y_{a+1}, c, y_a, \ldots, y_n] \\ &= [c, y_{a+1}, y_a, \ldots, y_n] - [[y_a, y_{a+1}], c, \ldots, y_n]. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos pelo Teorema 34, que $[y_a, y_{a+1}] \in T_{\mathbb{Z}_m}(UT_m(F))$, e assim temos resultado. $\square$

No seguinte resultado temos uma caracterização das sequências ε-boas em $UT_m(F)$, ver [17] para mais detalhes.

Lema 16. *Seja $m \geq 2$ e consideremos $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$. Então, uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de elementos de $\mathbb{Z}_m$ é ε-boa se, e somente se, $\mu_1 = 0$ e $\sum_{j+2}^{m} \mu_j(j-1) \leq m-1$.*

Demonstração. Por definição, uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ é ε-boa se existem $r_1, \ldots, r_k$ no radical de Jacobson de $UT_m(F)$ tais que $||r_i|| = \alpha_i$ e $r_1 \cdots r_k \neq 0$. Como, para $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$, uma matriz tem Z-grau 0 se, e somente se, é da forma $e_{jj} \notin J(UT_m(F))$, temos que $\mu_1 = 0$. Por último, o resultado segue observando que $\sum_{j+2}^{m} \mu_j(j-1) \leq m-1$ é decorrente de $r_1 \cdots r_k \neq 0$.

$\square$

Fixando $\tilde{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ tal que $\sum_{j=2}^{m} n_j(j-1) \leq m-1$, consideremos o seguinte conjunto

$$S_{\tilde{n}} = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \mid \mu(\alpha) = (0, n_2, \ldots, n_m)\}. \tag{4.3}$$

O resultado seguinte fornece uma descrição dos cocaracteres de $UT_m(F)$ dotada da $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-upla $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$ para $m = 2, 3, 4$, sendo este o principal resultado do trabalho [16], devido a Centrone e Cirrito, de 2012.

Teorema 53. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Considere $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-upla $\varepsilon = (0, 1, \ldots, m-1)$. Então, para quaisquer $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_{j=2}^{m} n_j(j-1) \leq m-1$, temos*

$$\begin{aligned} \xi^G_{n_1,\ldots,n_m}(A) &= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in S_{\tilde{n}}} \sum_{s_1+\cdots+s_k=n_1} (\boxed{s_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{s_k})^{\uparrow S_{n_1}} \\ &\otimes (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_2}} \otimes \cdots \otimes (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_m}} \end{aligned}$$

Temos temos a seguinte generalização do Lema 15 para a álgebra $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-j)$.

Lema 17. *Seja $m \geq 2$. Consideremos $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-j)$. Então, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in S_n$,*

$$[z, y_{\alpha(1)}, \ldots, y_{\alpha(n)}] \equiv \Big([z, y_1, \ldots, y_n] + \sum_{i\in I} \alpha_i g_i\Big) \pmod{UT_m(F)}$$

onde I é um conjunto finito de índices, os polinômios $g_{i's}$ é um produto de dois comutadores semistandard, onde o primeiro deles tem Z-grau 0 e o segundo Z-grau 1.

Demonstração. Ver detalhes em [17]. $\square$

Também temos a seguinte generalização do Lema 16 para a álgebra $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-j)$.

Lema 18. *Seja $m \geq 2$ e consideremos $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-2)$. Então, uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de elementos de $\mathbb{Z}_m$ é ε-boa se, e somente se, $\mu_1 \leq 1$ e $\sum_{j+2}^{m} \mu_j(j-1) \leq m-2$.*

Demonstração. Ver detalhes em [17]. $\square$

Agora, de maneira análoga ao conjunto em (4.3), para $\tilde{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ fixo tal que $\sum_{j=2}^{m} n_j(j-1) \leq m-2$, consideremos o seguinte conjunto

$$S_{\tilde{n}} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mid \mu(\alpha) = (\mu_1, n_2, \dots, n_m)\}.$$

Temos a seguinte generalização do Teorema 53, esta fornece uma descrição dos cocaracteres de $UT_m(F)$ dotada da $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-upla $\varepsilon = (0, 0, 1, \dots, m-j)$ para $m = 2, 3, 4, 5$. Essa generalização, obtida pelos mesmos autores Centrone e Cirrito, em 2015, é o principal resultado do trabalho [17].

Teorema 54. *Seja $m \geq 2$. Consideremos a álgebra $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (0, 0, 1, \dots, m-2)$. Então, para quaisquer $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_{j=2}^{m} l_j(j-1) \leq m-2$, temos*

$$\begin{aligned} \xi^G_{n_1,\dots,n_m}(A) \; = \; & \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in S_{\tilde{n}}} \; \sum_{s_1+\cdots+s_k=n_1} \\ & \Big([\lambda(s_1)] \otimes \boxed{}\boxed{\;\dots\;}\boxed{} \otimes \cdots \otimes \boxed{}\boxed{\;\dots\;}\boxed{}\Big)^{\uparrow S_{n_1}} \\ \otimes \; & (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_2}} \otimes \cdots \otimes (\square \otimes \cdots \otimes \square)^{\uparrow S_{n_m}} \end{aligned}$$

onde $\lambda(s_1)$ é a partição $(s_1 - 1, 1)$ associada com cocaracter irredutível

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array} \; .$$

4.3 Cocaracteres de $UT_m(F)$

Os resultados que seguem são contribuições dessa tese, os quais são no sentido de generalizar aqueles obtidos em [16] e [17]. No que segue, o símbolo $' \equiv'_{UT_m(F)}$ (ou simplesmente $' \equiv'$) denotará a relação de congruência com respeito ao T-ideal $T_G(UT_m(F), \varepsilon)$, onde G é um grupo finito.

No que segue, consideremos

$$\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \dots, g_L^{l_L}) = (\underbrace{g_1, \dots, g_1}_{l_1}, \underbrace{g_2, \dots, g_2}_{l_2}, \dots, \underbrace{g_L, \dots, g_L}_{l_L}),$$

onde $l_1 = \max\{l_1, \dots, l_L\}$ e $g_1 = 1_G$.

Por simplicidade de notação, devemos escrever $[Y]$ para denotar um comutador multilinear de Z-grau 0 e $[z, Y]$ um comutador multilinear de Z-grau 1, sendo a variável z ocorrendo na primeira entrada. Em ambos os casos, os índices dos $y's$ não estão necessariamente ordenados.

O seguinte resultado, que consta no trabalho [18], devido a Centrone e ao autor dessa tese, é uma contribuição dessa tese.

Lema 19. *Considere a álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores com a G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \ldots, g_L^{l_L})$, se $s \geq l_1$ ou $r \geq l_1$, então*

$$g = \underbrace{[Y]\cdots[Y]}_{s}[z, Y]\underbrace{[Y]\cdots[Y]}_{r},$$

é identidade polinomial graduada de $(UT_m(F), \varepsilon)$.

Demonstração. De fato, temos que a sequência diagonal

$$d(\varepsilon) = (\underbrace{1_G, \ldots, 1_G}_{l_1-1}, g_1^{-1}g_2, \underbrace{1_G, \ldots, 1_G}_{l_2-1}, g_2^{-1}g_3, \ldots, g_{L-1}^{-1}g_L, \underbrace{1_G, \ldots, 1_G}_{l_L-1}),$$

e assim, considerando as sequências do tipo

$$\alpha_{s,r} = (\underbrace{1_G, \ldots, 1_G}_{s}, g, \underbrace{1_G, \ldots, 1_G}_{r}),$$

onde $g \neq 1_G$ e $s \geq l_1$ ou $r \geq l_1$, observemos que não existem inteiros $1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{(s+r+1)+1} \leq m$ satisfazendo as hipóteses da Proposição 18 para $\alpha_{s,r}$. Portanto, as sequências $\alpha_{s,r}$ são ε-ruins, e, consequentemente, temos o resultado do presente lema garantido pela Proposição 17. □

No que segue, em um comutador $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_h}, \overline{x}_2, y_{j_1}, \ldots, x_{j_l}, \overline{x}_1, x_{t_1}, \ldots, x_{t_m}]$ a barra indica 'alternação' entre os elementos correspondentes, por exemplo

$$[\overline{x}_1, x_2, \overline{x}_3] = [x_1, x_2, x_3] - [x_3, x_2, x_1].$$

O resultado que segue, contribuição dessa tese, é uma generalização do Lema 7.3 do trabalho [19] e dos Lemas 3.6 e 3.8 dos trabalhos [16] e [17], respectivamente. O resultado seguinte também consta no trabalho [18], devido a Centrone e ao autor dessa tese.

Proposição 21. *Considere a álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores com a G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \ldots, g_L^{l_L})$. Denotando por y_i as variáveis de G-grau homogêneo 1 e por z_j as variáveis de G-grau homogêneo $g \neq 1$, temos*

i) $[y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, z, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] \equiv_{T_G(UT_m(F))} \sum_{i \in I} \alpha_i f_i$, *onde I é um conjunto finito de índices, $h, k \geq 0$, $\alpha_i \in F$ e* $f_i = \underbrace{[Y]\cdots[Y]}_{<l_1}[z, Y]\underbrace{[Y]\cdots[Y]}_{<l_1}$.

ii) $[z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, y_2, y_1, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] \equiv_{T_G(UT_m(F))} [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, y_1, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] + \sum_{i \in I} \alpha_i f_i,$

onde $i_1, \ldots, i_h$ *são índices não necessariamente ordenados,* $h, k \geq 0$, $\alpha_i \in F$, I *é um conjunto finito de índices e* $f_i = \underbrace{[Y] \cdots [Y]}_{<l_1}[z, Y]\underbrace{[Y] \cdots [Y]}_{<l_1}$.

iii)

$$[z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, \overline{y}_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, \overline{y}_1, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \equiv_{T_G(UT_m(F))} \sum_{i \in I} \alpha_i f_i$$

onde $h, l, m \geq 0$, I *é um conjunto finito de índices,*$h \geq 0$, $k \geq 2$ $\alpha_i \in F$, *e* $f_i = \underbrace{[Y] \cdots [Y]}_{<l_1}[z, Y]\underbrace{[Y] \cdots [Y]}_{<l_1}$.

Demonstração. $i)$ Se $h = 0, 1$ e $k \geq 0$, então basta aplicar a anticomutatividade no comutador e temos o resultado. Suponhamos $h \geq 2$ e seja $c = [y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_h}]$. Nesse caso, observemos que se $k = 0$, então $[c, z] = cz - zc$, e o resultado segue. Sendo $k \geq 1$ arbitrário, segue da Identidade de Jacobi e da linearidade do comutador que

$$\begin{aligned}
[c, z, y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] &= -[z, y_{j_1}, c, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] - [y_{j_1}, c, z, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] \\
&= [c, y_{j_1}, z, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] - [[z, y_{j_1}], c, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] \\
&= [[c, y_{j_1}], z, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] + [c, [z, y_{j_1}], y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] \\
&= [[c, y_{j_1}]z - z[c, y_{j_1}], y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] \\
&+ [c[z, y_{j_1}] - [z, y_{j_1}]c, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] \\
&= [[c, y_{j_1}]z, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] - [z[c, y_{j_1}], y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] \\
&+ [c[z, y_{j_1}], y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] - [[z, y_{j_1}]c, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}]
\end{aligned}$$

Agora, usando o lema 3 na última igualdade acima, obtermos que

$$\begin{aligned}
[c, z, y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] &= \sum [[c, y_{j_1}], \ldots][z, \ldots] - \sum [z, \ldots][[c, y_{j_1}], \ldots] \\
&+ \sum [c, \ldots][[z, y_{j_1}], \ldots] - \sum [[z, y_{j_1}], \ldots][c, \ldots] \\
&= \sum [[c, y_{j_1}], \ldots][z, \ldots] + \sum [y_{j_t}, z, \ldots][[c, y_{j_1}], \ldots] \\
&+ \sum [c, \ldots][z, y_{j_1}, \ldots] + \sum [y_{j_1}, z, \ldots][c, \ldots].
\end{aligned}$$

Desde que $h \geq 2$, os comutados $[z, \ldots]$, $[y_{j_t}, z, \ldots]$, $[z, y_{j_1}, \ldots]$ e $[y_{j_1}, z, \ldots]$ são menores do que $[c, z, y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}] = [y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, z, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}]$, e assim o resultado segue por um processo de indução no tamanho dos comutadores juntamente com o lema 19.

$ii)$Usaremos indução no tamanho de $[z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, y_2, y_1, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}]$. Primeiramente, suponha $k = 0$ e $h \geq 0$. Pondo $c = [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}]$, temos pela identidade de Jacobi que

$$[z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, y_2, y_1] = [c, y_2, y_1] = -[y_2, y_1, c] - [y_1, c, y_2] = [c, y_1, y_2] + [y_1, y_2]c - c[y_1, y_2],$$

e o resultado segue usando o processo de indução no tamanho de c juntamente com o Lema 19. Agora, suponha $k \geq 1$ e $h \geq 0$. Sendo $c = [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}]$, segue da identidade de Jacobi que

$$\begin{aligned}
& [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, y_2, y_1, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] = [c, y_2, y_1, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] \\
= \; & -[y_2, y_1, c, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] - [y_1, c, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] \\
= \; & [c, y_1, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] + [y_1, y_2, c, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] \\
= \; & [c, y_1, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] + [[y_1, y_2]c, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}] - [c[y_1, y_2], y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}].
\end{aligned}$$

O resultado segue usando os Lemas 19 e 3 em conjunto com o processo de indução indução no tamanho de c.

$iii)$ Escrevendo $c = [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}]$ e, para cada $1 \leq i \leq l$, $c_i = [c, y_{j_1}, \ldots, y_{j_i}]$, temos

$$\begin{aligned}
& [z, y_{i_1}, \ldots, y_{i_h}, \overline{y}_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, \overline{y}_1, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
= \; & [c, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, y_1, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] - [c, y_1, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
= \; & [c, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, y_1, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] + [y_1, y_{j_1}, c, \ldots, y_{j_l}, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
+ \; & [y_{j_1}, c, y_1, \ldots, y_{j_l}, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
\equiv \; & [c, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, y_1, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] + \underbrace{[c, [y_{j_1}, y_1], \ldots, y_{j_l}, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}]}_{\sum \alpha_i f_i} \\
- \; & [c_1, y_1, y_{j_2}, \ldots, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
\equiv \; & [c, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, y_1, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] + \sum \alpha_i f_i + [y_1, y_{j_2}, c_1, \ldots, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
+ \; & [y_{j_2}, c_1, y_1, \ldots, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
\equiv \; & [c, y_2, y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}, y_1, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] + \sum \alpha_i f_i + [c_1, [y_{j_2}, y_1], \ldots, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}] \\
- \; & [c_2, y_1, \ldots, y_2, y_{t_1}, \ldots, y_{t_m}].
\end{aligned}$$

No processo acima, o resultado é obtido a usarmos a identidade de Jacobi $2l + 1$ vezes juntamente com o primeiro item desse mesmo lema.

□

Fixemos um grupo finito G e consideremos a álgebra $UT_m(F)$ dotada da G-graduação elementar induzida por $\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \ldots, g_L^{l_L})$. O *suporte da* G*-graduação elementar induzida* *por* ε é definido como sendo o subconjunto $S = \{g \in G \mid (UT_m(F), \varepsilon)^g \neq 0\}$ de G. Reordenemos o grupo G como segue:

$$G = \{g_1, \ldots, g_{|S|}, g_{|S|+1}, \ldots, g_{|G|}\},$$

onde $g_i \in S$, caso $i \leq |S|$, e $g_i \notin S$, caso contrário.

Dada uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de elementos de G, associamos a α a seguinte $|G|$-úpla

$$\mu(\alpha) = (\mu_1, \ldots, \mu_{|G|}),$$

onde para cada $i = 1, \ldots, |G|$

$$\mu_i = \text{ o número de } \alpha_j \text{ tal que } \alpha_j = g_i.$$

Observemos que $\mu_i = 0$ sempre que $i > |G|$.

Agora, dada uma sequência $\mu(\alpha) = (\mu_1, n_2, \ldots, n_{|G|}) \in \mathbb{N}_0^{|G|}$. Consideremos o seguinte conjunto

$$S_{\tilde{n}} = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \mid \mu(\alpha) = (\mu_1, n_2, \ldots, n_{|G|})\}.$$

O próximo resultado, que também consta no trabalho [18], devido a Centrone e ao autor dessa tese, é a principal contribuição dessa tese, o qual fornece uma generalização dos resultados obtidos por Centrone e Cirrito sobre a descrição dos cocaracteres Y-próprios graduados da álgebra $UT_m(F)$ com a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky induzida pela m-upla $\varepsilon = (0, 0, 1, \ldots, m-j)$, com $j = 1, 2$ e $m = 2, 3, 4, 5$ (vide [16] e [17]). No que segue, sendo M um $F[G]$-modulo e $m \in M$, denotaremos por $F[G]m$ a ação de $F[G]$ sobre m. Assumiremos, implicitamente, o fato de que duas representações fornecem o mesmo G-caracter se elas representam $F[G]$-módulos isomorfos.

Teorema 55. *Sejam F um corpo de característica zero, G um grupo finito e a álgebra $UT_m(F)$ das matrizes triangulares superiores de ordem m com a G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (g_1^{l_1}, g_2^{l_2}, \ldots, g_L^{l_L})$. Então, para quaisquer inteiros não negativos $n_1, \ldots, n_m$, temos*

$$\xi^G_{n_1,\ldots,n_{|G|}}(UT_m(F)) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in S_{\tilde{n}}} \sum_{\sum_i r_i + \sum_j s_j = n_1}$$

$$\left(\sum_{\lambda_1 \vdash r_1} m_{\lambda_1}\chi_{\lambda_1} \otimes \sum_{\lambda_2 \vdash r_2} m_{\lambda_2}\chi_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \sum_{\lambda_{k+1} \vdash r_{k+1}} m_{\lambda_{k+1}}\chi_{\lambda_{k+1}} \otimes \boxed{s_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{s_k} \right)^{\uparrow S_{n_1}}$$

$$\otimes \left(\square \otimes \cdots \otimes \square \right)^{\uparrow S_{n_2}} \otimes \cdots \otimes \left(\square \otimes \cdots \otimes \square \right)^{\uparrow S_{n_{|G|}}},$$

onde $\sum_{\lambda_i \vdash r_i} m_{\lambda_i}\chi_{\lambda_i}$ *faz parte da decomposição do r_i-ésimo cocaracter Y-próprio de $UT_{l_1}(F)$ e as sequências α são ε-boas. Além disso, a soma dos braços dos ganchos de largura infinita dos* $\sum_{\lambda_i \vdash r_i} m_{\lambda_i}\chi_{\lambda_i}$ *não pode ser maior do l_1.*

Proof. Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ uma sequência ε-boa tal que $\mu(\alpha) = (\mu_1, n_2, \dots, n_{|G|})$ e $\mu_1 \leq m - (t+1)$. Consideremos $n_1 \in \mathbb{N}$ de maneira que $\sum_{i=1}^{|G|} n_i = n$. Agora, escrevamos $A = UT_m(F)$ e tomemos $f \in \Gamma_{n_1,\dots,n_{|G|}} \subseteq \Gamma_n^G(A)$. Sendo $H = S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_{|G|}}$, segue do Teorema de Frobenius que $F[H]^{\uparrow S_n}$ tem dimensão $|S_n : H| \dim_F F[H]f$. Por outro lado, segue das Proposições 19, 21 e da Observação 20 que $F[S_n]f$ é gerado pelos polinômios

$$[Y][z^{\alpha_i}, y_{i_1}, \dots, y_{i_{s_1}}][Y][z^{\alpha_j}, y_{j_1}, \dots, y_{j_{s_2}}][Y] \cdots [Y][z^{\alpha_r}, y_{r_1}, \dots, y_{r_{s_3}}][Y], \tag{4.4}$$

onde os $[Y]'s$ denotam 'produtos' de comutadores de Z-grau zero. Na verdade, como a componente homogênea de grau 1_G de $UT_m(F)$ é isomorfa a $UT_{l_1}(F)$ em virtude da da Proposição 20, o número dos comutadores em $[Y]$ não pode exceder l_1. Além disso, podemos assumir os $[Y]'s$ como sendo elementos de uma base da álgebra relativamente livre de $UT_{l_1}(F)$. Esse último fato justifica que o número total dos braços dos ganchos de largura infinita não pode ser superior a l_1. Obtemos, também, que os índices dos $y's$ são estritamente crescente e $\sum_i s_i + \sum_j r_j = n_1$. Notemos que os comutadores em (4.4) são linearmente independentes, e assim temos que $\dim_F F[S_n]f = |S_n : H| \dim_F F[H]f$. Por último, observemos que a demonstração segue pelo fato das S_n-ações em ambos os casos serem as mesmas, sendo a ação nas variáveis $z's$ a trivial. $\square$

No resultado anterior exigimos que $\mu_1 \leq m-(t+1)$, do contrário teríamos identidades polinomiais. Adiante, mostraremos como estimar com precisão o número $m-(t+1)$ no caso geral.

4.4 Encontrando Sequências ε-boas

Nosso principal objetivo nessa seção é fornecer uma forma explicita de calcular as sequências ε-boas em alguns casos particulares.

Recordemos que estamos considerando $UT_m(F)$ com a G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, onde G é um grupo finito. Reconsideremos $\tilde{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}_0^m$ e $S_{\tilde{n}} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mid \mu(\alpha) = (\mu_1, n_2, \dots, n_m)\}$, onde $\mu_1 \leq m-(t+1)$ e t denota o número de variações em ε. Em [16] os autores consideraram a $\mathbb{Z}_m$-graduação de Vasilovsky em $UT_m(F)$, i.e., a graduação gerada pela m-úpla $v = (\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1})$ e eles estabeleceram que

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \text{ é } v\text{-boa se, e somente se, } \mu_1 = 0 \text{ e } \sum_{j=2}^{m} \mu_j(j-1) \leq m-1.$$

Nesse caso, notemos que $d(v) = (\overline{1}, \ldots, \overline{1})$ e $t = m-1$.

Em [16] os mesmos autores consideraram a $\mathbb{Z}_m$-graduação na álgebra $UT_m(F)$ induzida pela m-úpla $\varepsilon = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-2})$, onde $d(\varepsilon) = (\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{1})$ and $t = m-2$. Eles provaram que

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \text{ é } \varepsilon\text{-boa se, e somente se,}$$
$$\mu_1 = 0 \text{ e } \sum_{j=2}^{m} \mu_j(j-1) \leq m-2 \text{ se } \alpha_1 \neq \overline{0};$$
$$\mu_1 = 1 \text{ e } \sum_{j=2}^{m} \mu_j(j-1) \leq m-2, \text{ caso contrário.}$$

Observemos que nos dois casos considerados acima, temos a validade das seguintes relações:

$$\mu_1 \leq m-(t+1) \text{ e } \sum_{j=2}^{m} \mu_j(j-1) \leq t. \tag{4.5}$$

Em verdade, como destacado em [16], as desigualdades acima não caracterizam as sequências ε-boas. De fato, na $\mathbb{Z}_m$-graduação de $UT_m(F)$ induzida pela m-úpla $\varepsilon = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-2})$, o polinômio $f_1 = z^g[y_1, y_2]$ é sempre uma identidade, enquanto que o polinômio $f_2 = [y_1, y_2]z^g$, eventualmente, não o é. O fato interessante é que o polinômio f_1 fornece a sequência $\alpha_1 = (g, \overline{0})$ (ε-ruim), enquanto que f_2 fornece $\alpha_2 = (\overline{0}, g)$ (eventualmente, ε-boa), contudo α_1 e α_2 satisfazem as desigualdades em (4.5). Nesse sentido, temos o resultado de carácter mais geral.

O resultado que segue consta no trabalho [18], devido a Centrone e ao autor dessa tese, é, também, uma contribuição dessa tese.

Proposição 22. *Sejam G um grupo qualquer e $g \in G$, $g \neq 1_G$. Consideremos a álgebra $UT_m(F)$ dotada da G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (1_G^l, g, g^2, \ldots, g^r)$, onde $l+r = m$ e $o(g) > m$. Sendo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in G^k$, temos que α é ε-boa se, e somente se, existe $r_1, \ldots, r_{\mu_1} \in J\big(UT_l(F)\big)$ tal que $\|r_i\| = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, \mu_1$, $r_1 \cdots r_{\mu_1} \neq 0$ e*

$$\sum_{j=2}^{r+1} \mu_j(j-1) \leq t.$$

Aqui, $J(UT_l(F))$ denota o radical de Jacobson de $UT_l(F)$ e $\mu_j = |\{\alpha_i | \alpha_i = g^{(j-1)}\}|$.

Proof. Primeiramente, como $o(g) > m$, então $g^i \neq g^j$ sempre que $i \neq j$. Consideremos a sequência diagonal

$$d(\varepsilon) = (1_G^{l_1-1}, g, \ldots, g).$$

Observemos que se $\alpha_i \neq 1_G$ e $\alpha_{i+1} = 1_G$, para algum $1 \leq i \leq k$, então α é uma sequência ε-ruim, pois $f_\alpha = [y_1, y_2] \cdots [y_{2i-1}, y_{2i}] z^{\alpha_{i+1}} [y_{2i+1}, y_{2i+2}] f_{\alpha_{1+2},2} \cdots f_{\alpha_k,k}$ é uma identidade graduada de $(UT_m(F), \varepsilon)$, uma vez que $z^{\alpha_{i+1}}[y_{2i+1}, y_{2i+2}]$ o é. Suponha ainda que α não satisfaz as desigualdades acima, então segue da Proposição 18, de novo, que α é uma sequência ε-ruim e o resultado segue.

Reciprocamente, tomemos uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu_1}, \alpha_{\mu_1+1}, \ldots, \alpha_k)$ de maneira que existam $r_1, \ldots, r_{\mu_1} \in J\big(UT_l(F)\big)$ tal que $\|r_i\| = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, \mu_1$, $r_1 \cdots r_{\mu_1} \neq 0$ e $\sum\limits_{j=2}^{r+1} \mu_j(j-1) \leq t$. Observemos que podemos considerar $f_\alpha = f_1 f_2$ na álgebra relativamente livre de $UT_m(F)$, onde f_1 denota o produto de μ_1 comutadores em Y's e f_2 como sendo a parte restante. Agora, observemos que o conjunto

$$e_{1,l+1}, e_{2,l+1}, \ldots, e_{l,l+1} e_{l+1,l+j+1}, e_{l+2,l+j+2}, \ldots, e_{l+s,l+j+s},$$

com $l + j + s \leq m$, é uma base para a componente homogênea $UT_m^{g^j}$, $g^j \neq 1_g$. Assim, podemos associar cada variável $x_i^{g^j}$ a uma matriz triangular superior $m \times m$ tendo as mesmas entradas não nulas de $UT_m^{g^j}$ e, como entradas, as variáveis comutativas sendo do conjunto X_i. Na verdade, o polinômio f_α é uma identidade graduada se este for a matriz nula. Agora, notemos que a G-graduação em questão satisfaz $UT_m(F)^{g^t} UT_m(F)^{g^u} = UT_m(F)^{g^{tu}}$. Isso significa que a avaliação de f_2 é uma matriz triangular superior $m \times m$ tendo as mesmas entradas não nulas de $UT_m^{g^{\sum_{j=2}^{r+1} \mu_j}} = UT_m^{g^u}(F)$ para algum $u \leq r$ e como as entradas não nulas, polinômios nas variáveis comutativas de $\bigcup\limits_i X_i$. Analogamente, o polinômio f_1 é uma matriz triangular superior $m \times m$ tendo as primeiras μ_1 diagonais preenchidas completamente com entradas nulas. É fácil ver que o produto é não nulo, o que significa que α é ε-boa. □

Na prática, podemos encontrar as sequências ε-boas da recíproca do resultado anterior como segue: Suponhamos que para uma sequência $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu_1}, \alpha_{\mu_1+1}, \ldots, \alpha_k)$ existam $r_1, \ldots, r_{\mu_1} \in J\big(UT_l(F)\big)$ tais que $\|r_i\| = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, \mu_1$,

$$r_1 \cdots r_{\mu_1} \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=2}^{r+1} \mu_j(j-1) \leq t. \tag{4.6}$$

A seguinte matriz representa os graus das componentes de $UT_m(F)$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & g^6 & g^7 & g^8 & \cdots \\
0 & 1 & 1 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & g^6 & g^7 & g^8 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & g^6 & g^7 & g^8 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & g^6 & g^7 & g^8 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & g^6 & g^7 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & g^6 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & g^5 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & g^2 & g^3 & g^4 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & g^2 & g^3 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & g^2 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Então, tomemos

as μ_1 matrizes r_i de grau 1_G como $e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{\mu_1,\mu_1+1}$;

as μ_2 matrizes de grau g como $e_{\mu_1+1,\mu_1+2}, e_{\mu_1+2,\mu_1+3}, \ldots, e_{\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2+1}$;

as μ_3 matrizes de grau g^2 como $e_{\mu_1+\mu_2+1,\mu_1+\mu_2+2}, \ldots, e_{\mu_1+\mu_2+\mu_3,\mu_1+\mu_2+\mu_3+1}$;

$$\vdots$$

Notemos que, por construção, as matrizes acima satisfazem (4.6). Por outro lado, observemos que essas matrizes estão no radical de Jacobson de $UT_m(F)$ e seu produto é não nulo, implicando α é uma sequência ε-boa.

O resultado que segue é uma generalização dos resultados obtidos por Centrone em [16] e [17].

Teorema 56. *Sejam G um grupo finito e $UT_m(F)$ equipada com a G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (1_G^l, g, g^2, \ldots, g^r)$, onde $l + r = m$ e $o(g) > m$. Então, para quaisquer $n_1, \ldots, n_{|G|}$ tais que $n_1 \leq l - 1$ e $\sum_{j=2}^{r+1} \mu_j(j-1) \leq t$, onde $\mu_j = |\{\alpha_i | \alpha_i = g^{(j-1)}\}|$, temos*

$$\begin{aligned}
\xi^G_{n_1,\ldots,n_{|G|}}(UT_m(F)) \quad = \quad & \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in S_{\tilde{n}}} \sum_{r+\sum_j s_j = n_1} \left(\sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda \chi_\lambda \otimes \boxed{s_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{s_k} \right)^{\uparrow S_{n_1}} \\
& \otimes \Big(\square \otimes \cdots \otimes \square \Big)^{\uparrow S_{n_2}} \otimes \cdots \otimes \Big(\square \otimes \cdots \otimes \square \Big)^{\uparrow S_{n_{|G|}}}
\end{aligned}$$

onde $\sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda \chi_\lambda$ é o r-ésimo cocaracter Y-próprio de $UT_l(F)$ e as sequências α são ε-boas.

Demonstração. A demonstração desse resultado segue exatamente os mesmos passes da demonstração do Teorema 55, sendo essencial o uso da Proposição 22. A grosso modo falando, o que importa ocorre 'depois' do radical de Jacobson de $UT_l(F)$. □

Observação 22. *Um cálculo explícito para a lista completa dos cocaracteres Y-próprios para os casos $m = 2, 3$ pode ser encontrado em [16] e [17].*

4.5 As dimensões de Gelfand-Kirillov da Álgebra Relativamente Livre de $UT_m(F)$

A dimensão de *Gelfand-Kirillov* mede a taxa do crescimento assintótico das álgebras, fornecendo informações importantes sobre suas estruturas. Nesse capítulo calcularemos as dimensões de Gelfand-Kirillov da álgebra relativamente livre Y-propria de $UT_m(F)$ dotada da G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (1_G^l, g, g^2, \ldots, g^r)$, onde G é um grupo finito, $l + r = m$ e $o(g) > m$.

Consideremos A uma álgebra associativa, unitária e finitamente gerada. Seja V um subespaço de dimensão finita gerador de A como álgebra. Denotemos $V^0 = F$ e, para $n \geq 1$, V^n como sendo o subespaço de A gerado pelos monômios de tamanho n, temos

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad \text{onde} \quad V_n = F + V^1 + V^2 + \cdots + V^n.$$

A função $g_V(n) = dim_F(V_n)$ é chamada a *função crescimento de A* com respeito a $V = V^1$.

Definição 69. *A dimensão* Gelfand-Kirillov *de A é definida como sendo*

$$\text{GKdim}(A) = \limsup_{n\to\infty}(\log_n g_V(n)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log g_V(n)}{\log n}.$$

Observação 23. *Sobre a definição da dimensão de Gelfand-Kirillov, temos:*

1. *Supondo que A é gerada, como álgebra, pelo conjunto $\{a_1, \ldots, a_m\}$, então basta tomar V como sendo o subespaço vetorial gerado por esse mesmo conjunto, i.é,*

$$V = Fa_1 + \cdots + Fa_m;$$

2. *Na escolha de V exigimos que $1 \in V$, donde $V^i \subseteq V^{i+1}$, e assim $g_V(n) = dim_F(V_n)$ é uma função monótona não decrescente;*

3. *Observemos que a função crescimento g_V, e portanto a dimensão de Gelfand-Kirillov, está dependendo do espaço gerador V. Por outro lado, usando uma relação de equivalência adequada vemos que essa dependência pode ser removida, donde temos uma boa definição da $GKdim(A)$ (ver detalhes em [51], Lemma 1.1).*

Dentre as várias propriedades da dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra, gostaríamos de destacar que esta coincide com a dimensão de Krull quando tratam-se de álgebras comutativas finitamente geradas. No caso não comutativo, a noção de dimensão de Krull perde o sentido, uma vez que não temos a simetria entre os ideias à esquerda e à direita. Por outro lado, a dimensão de Gelfand-Kirillov continua sendo uma ferramente extremamente poderosa para avaliar o quão grande pode ser uma álgebra, sendo ela comutativa ou não, por exemplo, mostra-se que:

Teorema 57. *Seja A uma álgebra. Então, $GKdim(A) = 0$ se, e somente se, A tem dimensão finita. Nos outros casos, tem-se*

$$GKdim(A) = 1 \qquad ou \qquad GKdim(A) \geq 2.$$

De certa forma, a dimensão de Gelfand-Kirillov mede o quão uma álgebra finitamente gerada falha em ter dimensão finita. Existem várias propriedades e resultados extremamente importantes na teoria algébrica e na PI-teoria a despeito da dimensão de Gelfand-Kirillov, para mais detalhes referenciamos os livros [51], devido a Krause e Lenagan, e [57], devido a McConnell e Robson. Aqui, focaremos em obter alguns resultados acerca da dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra relativamente livre de algumas álgebras em especial.

Definição 70. *Seja A uma PI álgebra e $r \geq 1$ um inteiro. Denotemos por $GKdim_r(A)$ como sendo a dimensão de Gelfand-Kirillov de $F\langle X_r\rangle/(F\langle X_r\rangle \cap T(A))$, onde $X_r := \{x_1, \ldots, x_r\}$.*

Belov, em [7], estudou várias propriedades sobre $\mathrm{GKdim}_r(A)$. Em particular, mostrou que $\mathrm{GKdim}_r(A)$ é definida pela complexidade de A ou por um conjunto de produtos semidiretos de álgebra de matrizes sobre o anel de polinômios da variedade gerada por A. Para o cálculo explícito da dimensão de Gelfand-Kirillov de algumas PI-álgebras clássicas, referenciamos os trabalhos[8], devido a Berele, ou [32], devido a Drensky e [14], devido a Centrone. Este último autor, generalizou a definição da dimensão de Gelfand-Kirillov para as álgebras graduadas (vide [13] e [15]), a qual passamos a abordar.

Definição 71. *Sejam G é um grupo finito, A uma PI-álgebra G-graduada e $r \geq 1$ um inteiro. Denotemos por*

$$GKdim_r^G(A) := \mathrm{GKdim}(F\langle X_r|G\rangle/(F\langle X_r|G\rangle \cap T(A))),$$

onde $X_r := \{x_1^{g_1}, \ldots, x_r^{g_1}, \ldots, x_1^{g_{|G|}}, \ldots, x_r^{g_{|G|}}\}$.

A seguir, veremos a estreita e demasiada importante relação existente entre a dimensão de Gelfand-Kirillov (graduada) de uma PI-álgebra e seu PI-expoente (graduado), descrita por Centrone em [15].

Teorema 58. *Seja A uma álgebra G-graduada de dimensão finita. Então, $\mathrm{GKdim}_r^G(A) = \exp^G(A)r + \alpha$, onde $\alpha \leq 0$ é um inteiro.*

Dessa forma, para o cálculo da dimensão de Gelfand-Kirillov de $UT_m(F)$ é necessário obter seu expoente graduado. Em [50] os autores provaram, independente do grupo e da graduação, que o expoente graduado de $UT_m(F)$ é m. Essa informação pode ser obtida diretamente da sequência de cocaracteres $UT_m(F)$. Em verdade, por um resultado de Aljadeff e Giambruno (vide [2]), segue que o expoente graduado de uma álgebra de dimensão finita é simplesmente o número de 'braços' de largura infinita na sequência de cocaracteres graduados de A.

Voltando nossas atenções para a álgebra $UT_m(F)$, segue do Teorema 55 que o número de 'braços' de largura infinita na sequência cocaracteres Y-próprios graduados de $UT_m(F)$ é $m-1$. Da versão graduada da Proposição 16, obtemos que o número de 'braços' de largura infinita na sequência de cocaracteres graduados de $UT_m(F)$ é $m-1+1=m$, e assim temos o seguinte:

Teorema 59. *Seja $r \geq 2$, então*

$$\mathrm{GKdim}_r^G(UT_m(F)) = mr + \alpha,$$

onde $\alpha \leq 0$ é um inteiro.

Outra consequência do conhecimento da sequência de cocaracteres graduados de uma PI-álgebra graduada depende do conhecimento da série de Hilbert de sua álgebra relativamente livre graduada. Acerca disto, temos a generalização (graduada) de um resultado obtido independentemente por Berele e Drensky.

Teorema 60. *Sejam G um grupo finito e A uma PI-álgebra G-graduada com cocaracter graduado*

$$\chi_{n_1,n_2,\ldots,n_{|G|}} = \sum m_{\lambda_1,\ldots,m_{\lambda_{|G|}}} \chi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda_{|G|}},$$

então a série de Hilbert da álgebra relativamente livre G-graduada de $UT_m(F)$ é

$$H^G(A,T) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_{|G|}=n} \sum m_{\lambda_1,\ldots,m_{\lambda_{|G|}}} S_{\lambda_1}(T) \cdot \cdots \cdot S_{\lambda_{|G|}}(T),$$

onde $S_\lambda(T)$ denota o polinômio de Schur do tipo λ nas variáveis T.

Em 2012, Centrone demostrou o seguinte resultado (para maiores detalhes, ver [13]).

Teorema 61. *Seja G um grupo qualquer. Consideremos a álgebra $UT_m(F)$ com a G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (1, g, g^2, \ldots, g^{m-1})$, onde g é tal que $o(g) > m$. Se $r \geq 2$, então*

$$\mathrm{GKdim}_r^G(UT_m(F)) = mr.$$

Estamos em condições de exibir um dos resultados centrais dessa tese, o qual consta no trabalho [18], devido a Centrone e ao autor dessa tese.

Teorema 62. *Seja G um grupo qualquer. Consideremos a álgebra $UT_m(F)$ dotada da G-graduação induzida pela m-úpla $\varepsilon = (1, 1, g, g^2, \dots, g^{m-2})$, onde g é tal que $o(g) > m-1$. Se $r \geq 2$, então*

$$\mathrm{GKdim}(B_r^G(UT_m(F))) = (m-1)r.$$

Demonstração. Por completude dessa demonstração, devemos calcular a dimensão de Gelfand-Kirillov de $B_r^G(UT_m(F))$, a álgebra Y-própria relativamente livre de $UT_m(F)$ em r-variáveis. Segue do trabalho [16] que os polinômios homogêneos dos seguintes tipos

$$[z_b, Y_b] \cdots [z_c, Y_c], \qquad [y_a, Y_a][z_b, Y_b] \cdots [z_c, Y_c],$$

formam uma base homogênea para $B_r^G(UT_m(F))$, onde os Y_i's são conjuntos de variáveis ordenadas de Z-grau zero e as sequências são ε-boas. Dessa maneira, precisamos apenas contar esses polinômios. Mais precisamente, a dimensão da componente homogênea de grau n de $B_r^G(UT_m(F))$ é

$$\begin{aligned} & c \cdot \sum_{i_1+\cdots+i_k=n} \binom{i_1+r}{r} \cdots \binom{i_k+r}{r} \\ + & \left(\sum_{j=2}^{n} \sum_{a=2}^{r} \sum_{i=1}^{a-1} \binom{j+r-a}{r-i+1} \right) \left(\sum_{i_1+\cdots+i_k=n-j} \binom{i_1+r}{r} \cdots \binom{i_k+r}{r} \right), \end{aligned}$$

onde

$$c \cdot \sum_{i_1+\cdots+i_k=n} \binom{i_1+r}{r} \cdots \binom{i_k+r}{r}$$

é o número de polinômios do primeiro tipo, enquanto

$$\left(\sum_{j=2}^{n} \sum_{a=2}^{r} \sum_{i=1}^{a-1} \binom{j+r-a}{r-i+1} \right) \left(\sum_{i_1+\cdots+i_k=n-j} \binom{i_1+r}{r} \cdots \binom{i_k+r}{r} \right)$$

é o número de polinômios do segundo tipo. Além disso, c denota o número de sequências $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ε-boas . Agora, observemos que ambos os somatórios são polinômios em n de grau $\max_k\{kr-1\}$ que também, como um polinômio em n, deve ter grau $(m-1)k-1$. Isso implica que a função crescimento de $B_r^G(UT_m(F))$ deve ser um polinômio em n de grau $(m-1)k-1+1 = (m-1)k$, e assim $\mathrm{GKdim}(B_r^G(UT_m(F))) = (m-1)k$.

Os resultados anteriores sugerem a seguinte conjectura.

Conjectura 3. *Sejam* G *um grupo qualquer e* $UT_m(F)$ *com uma* G*-graduação. Se* $r \geq 2$*, então*

$$\mathrm{GKdim}_r^G(UT_m(F)) = mr.$$

$\square$

Referências

[1] A.R. Kemer *Identities of finitely generated algebras over an infinite field*, Math. USSR-Izv. **37** (1) (1991), p. 69.

[2] E. Aljadeff, A. Giambruno, *Multialternating graded polynomials and growth of polynomial identities*, Proc. Amer. Math. Soc. 141(9) (2013), 3055–3065.

[3] A. S. Amitsur, J. Levitzki., *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449–463.

[4] S.S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order over an infinite field*, Comm. Algebra **30** (12) (2002), 5849–5860.

[5] Y.A. Bahturin, A. Giambruno, D.M Riley, *Group-graded algebras with polynomial identity*,Israel J. Math. **104** (1) (1998), 145–155.

[6] Y.A. Bahturin, S.K. Sehgal, M. Zaicev , *Group gradings on associative algebras*, J. Algebra **241** (2) (2001), 677–698.

[7] A.Ya. Belov, *The Gel'fand-Kirillov dimension of relatively free associative algebras* (Russian), Mat. Sb. **195**(12) (2004), 3-26. Transl: Sb. Math. **195**(11-12) (2004), 1703-1726.

[8] A. Berele, *Generic verbally prime PI-algebras and their GK-dimensions*, Commun. Algebra **21** (1993), 1487-1504.

[9] J. Bergen, M. Cohen, *Actions of commutative Hopf algebras*, Bull. London Math. Soc. bf 18 (2) (1986), 159–164.

[10] H. Boerner, *Representations of Groups*, North-Holland 2nd ed. Amsterdam, 1963.

[11] S. Boumova, V. Drensky *Cocharacters of polynomial identities of upper triangular matrices*, J. Algebra Appl. **11**(1) (2012), Article ID 1250018, 24 p.

[12] L. Centrone, *Ordinary and $\mathbb{Z}_2$-Graded Cocharacters of $UT_2(E)$*, Comm. Algebra **39** (7) (2011), 2554–2572.

[13] L. Centrone *A note on graded Gelfand-Kirillov dimension of graded algebras*, J. Algebra Appl. 10(5) (2011), 865–889.

[14] L. Centrone, *On some recent results about the graded Gelfand-Kirillov dimension of graded PI-algebras*, Serdica Math. J. **38**(1-3) (2012), 43–68.

[15] L. Centrone, *The GK dimension of relatively free algebras of PI-algebras*, J. Pure Appl. Algebra **223**(7) (2019), 2977–2996.

[16] L. Centrone, A. Cirrito , *Y-proper graded cocharacters and codimensions of upper triangular matrices of size* $2, 3, 4$, J. Algebra **367** (2012), 75–94.

[17] L. Centrone, A. Cirrito, *Y-proper graded cocharacters of upper triangular matrices of order m graded by the m-tuple $\phi = (0, 0, 1, \ldots, m-2)$*, J. Algebra **425** (2015), 546–562.

[18] L. Centrone, T.F. Silva Y-proper graded cocharacters of the algebra $UT_m(F)$ of $m \times m$ upper triangular matrices over F, J. Algebra **618** (2023), 96-119.

[19] A. Cirrito, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices of size three*, Linear Algebra Appl. **438**, (11) (2013), 4520–4538.

[20] W. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, John Willey & Sons*, Inc., New York, 1962.

[21] S. Dăscălescu, B. Ion, C. Năstăsescu, J.R. Montes, *Group gradings on full matrix rings*, J. Algebra **220** (2) (1999) 709–728.

[22] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, Springer (1922), 184–194.

[23] O.M Di Vincenzo, *Cocharacters of G-graded algebras*, J. Algebra **24** (10) (1996), 323–335.

[24] O.M Di Vincenzo, V. R. T. Da Silva, *On $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities of the Grassmann algebra*, Lin. Algebra Appl. **431** (2018), 56–72.

[25] O.M. Di Vincenzo, V.R.T Da Silva,P. Koshlukov, *On $\mathbb{Z}_p$-graded identities and cocharacters of the Grassmann algebra*, Commun. Algebra **45** (2017), 343–356.

[26] O.M Di Vincenzo, V. Drensky, V. Nardozza, *Subvarieties of the varieties generated by the superalgebra $M_{1,1}(E)$ or $M_2(F)$*, Commun. Algebra **31** (1) (2003), 437–461.

[27] O.M Di Vincenzo, P. Koshlukov, A. Valenti, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, J. Algebra **275** (2004) (2), 550–566.

[28] V. Drensky, *A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra Logic **20** (1981), 188—194.

[29] V. Drensky, *Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras* J. Algebra **91** (1) (1984), 1–17.

[30] V. DRENSKY, *Extremal varieties of algebras II*, Serdica **14** (1) (1988), 20–27.

[31] V. DRENSKY, *Polynomial identities for* 2×2 *matrices*, Topics in Comput. Algebra (1990), 137–161.

[32] V. DRENSKY, *Gelfand-Kirillov dimension of PI-algebras*, In: Methods in Ring Theory. Proceedings of the Trento Conference, Trento, Italy. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **198** (1998), 97-113.

[33] V. DRENSKY, *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*, Springer Verlag, 2000.

[34] J. DUBNOV, J. IVANOV, *Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs, CR (Doklady) Acad*, Sci. USSR **41** (1943), 96–98.

[35] G.K. GENOV, *Spechtinianness of Certain Varieties of Associative Algebras over Field of Zero Characteristic*, Dokladi na Bolgarskata Ak. na Nauk. **29** (7) (1976), 939–941.

[36] G.K. GENOV, *Some Specht varieties of associative algebras*, Pliska Stud. Math. Bulgar **2** (1981), 30–40.

[37] A. GIAMBRUNO, M. ZAICEV, *On codimension growth of finitely generated associative algebras*, Adv. Math. **140** (2) (1998), 145–155.

[38] A. GIAMBRUNO, M. ZAICEV *Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate*, Adv. Math. **142** (2) (1999) 221–243.

[39] A. GIAMBRUNO, M. ZAICEV, *Minimal varieties of algebras of exponential growth*, Adv. Math. **174** (2) (2003), 310–323.

[40] A. GIAMBRUNO, M. ZAICEV, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, (2005).

[41] I.N. HERSTEIN, *Noncommutative rings* Amer. Math. Soc. **15**, 1994.

[42] N. JACOBSON, *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math. (1945), 695–707.

[43] N. JACOBSON *Basic Algebra II*, Dover 2nd ed., New York, 2009.

[44] G. JAMES, A. KERBER, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Math. and Its Appl. **16** 1981.

[45] I. KAPLANSKY, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 575—580.

[46] A.R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra Logic **26** (5) (1987), 362–397.

[47] A.R Kemer, *Varieties and-graded algebras*, Math. USSR-Izv. **25** (2) (1985), 359–374.

[48] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$*, J. Algebra **241** (1) (2001), 410–434.

[49] P. Koshlukov, A. Valenti, *Graded identities for the algebra of $n\times\ n$ upper triangular matrices over an infinite field*, Internat. J. Algebra Comput. **13** (05) (2003), 517–526.

[50] P. Koshlukov, F. Y. Yasumura, *Asymptotics of graded codimension of upper triangular matrices*, Israel J. Math. **228** (2018), 423–439.

[51] G. R. Krause, T. H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension. Revised edition*, Graduate Studies in Mathematics, 22. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[52] V. N. Latyshev, *Generalization of Hilbert's theorem on the finiteness of bases*, Siberian Math. Journal **7** (6) (1966), 1112–1113.

[53] V. N. Latyshev, *Partially ordered sets and nonmatrix identities of associative algebras*, Algebra and Logic **15** (1) (1976), 34–45.

[54] V. N. Latyshev. *Complexity of nonmatrix varieties of associative algebras. II*, Algebra and Logic **16**, (2) (1976), 122–133.

[55] J. Levitzki, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (12) (1946), 1033–1035.

[56] Y.N. Mal'tsev, *Basis for identities of the algebra of upper triangular matrices*, Algebra Logic **10** (4) (1971), 242–247.

[57] J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings. With the cooperation of L. W. Small. Revised edition*, Graduate Studies in Math., 30. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2001.

[58] A. P. Popov *On the Specht property of some varieties of associative algebras*, Pliska Stud. Math. Bulgar **2** (1981), 41–53.

[59] B.M Puttaswamaiah, J.D. Dixon, *Modular representations of finite groups*, Academic press, 1977.

[60] S.V Polin, *Identity of an algebra of triangular matrices*, Sibirskii Matem. Zh. 21 (4) (1980), 206–215.

[61] Y. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra Logic **12** (1) (1973), 47–63.

[62] D.J.S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups, 2nd edition*, Springer-Verlag 1995.

[63] J.J. Rotman, *Advanced modern algebra*, Prentice Hall, New York, 2002.

[64] P.N. Siderov, *A basis for identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field*, Pliska Stud. Math. Bulgar **2** (1981), 143–152.

[65] A. Valenti, *The graded identities of upper triangular matrices of size two*, J. Pure Appl. Algebra, **172** (2002) (2-3), 325–335.

[66] A. Valenti, M. Zaicev, *Abelian gradings on upper-triangular matrices*, Arch. Math. 80 (1) (2003), 12–17.

[67] A. Valenti, M. Zaicev, *Group gradings on upper triangular matrices*, Arch. Math. 89 (1) (2007), 33–40.

[68] S.Y Vasilovsky, $\mathbb{Z}_m$*-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order* m, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (12) (1999), 3517–3524.

[69] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, Annals of Math. **113** (1) (1937), 528–567.

[70] C. T. C. Wall, Graded Brauer Groups, J. reine angewandte Math. **213**, (1964).