

Projeto de Controladores de Ordem Reduzida Através de Otimização Sequencial Irrestrita

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Wilbert Josías Ramírez Pongo
Engenheiro Eletricista - IEE/EFEI

em julho de 1998 perante a banca examinadora

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira
Prof. Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho
Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Orientador
DAS/UFSC
FEEC/UNICAMP

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por Wilbert Josías Ramírez Pongo e aprovada pela Comissão Julgada em: 17 / 07 / 98

Paulo Augusto Valente Ferreira
Orientador

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	I/UNICAMP
	R145p
V. Ex.	
TOMBO BC/	35056
PROC.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	12/09/98
N.º GPD	

CM-00115897-B

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R145p Ramírez Pongo, Wilbert Josías
Projeto de controladores de ordem reduzida através
de otimização sequencial irrestrita. / Wilbert Josías
Ramírez Pongo.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sistemas de controle por realimentação. 2.
Otimização matemática. 3. Controle automático. I.
Ferreira, Paulo Augusto Valente. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação. III. Título.

Dedicatória

Dedico este trabalho à memória de um homem muito importante na minha vida. Um homem que ensinou-me através do seu exemplo a lutar para atingir cada um dos objetivos traçados na vida. Um homem que mostrou-me o real sentido da vida e que incentivou cada um dos meus passos neste sacrificado mundo que é o da vida acadêmica. Um homem que enquanto pôde compartilhou, ao meu lado, das minhas alegrias e tristezas, das minhas conquistas e dissabores, e que hoje no lugar onde se encontra orgulhoso estará, compartilhando comigo esta enorme satisfação de poder dizer-lhe: *“Querido pai, tarefa cumprida”*.

A tua memória, Rómulo, o meu sempre querido e recordado Pai !!!

Wilbert Josías Ramírez Pongo

*Nunca encontrei nada incompatível entre as coisas do homem,
que podem ser conhecidas por seu espírito
e as coisas mais elevadas concernentes a seu futuro,
que não podem ser conhecidas por aquele espírito.*

Michael Faraday

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a Deus por ter-me permitido concluir esta nova etapa de minha vida acadêmica.

Sou grato ao carinho e apoio de minha mãe Esther, dos meus irmãos Ruth, Edith, Yolanda e Albert, e a todos os amigos que “torceram” por mim desde Lima-Perú.

Sou grato ao Prof. Paulo A. V. Ferreira, pela sua colaboração, pelo seu apoio e principalmente pela sua compreensão nos momentos difíceis que passei durante este período de tempo investido no desenvolvimento deste trabalho.

Sou grato também aos doutores e amigos, Ely C. de Paiva e José Reginaldo H. Carvalho, pela sua orientação e disposição em colaborar comigo.

Sou grato também ao interesse e apoio dos amigos, Marcelo Tadao, Luiz F. T. Guedes, Jean P. Barcelos, Mario F. Veloso e demais colegas e professores do Departamento.

Agradeço também a uma pessoa muito especial por todo o seu carinho, apoio e incentivo durante esta etapa final do trabalho. Foi você, Silmara, quem colocou na minha vida uma motivação especial.

Resta expressar minha gratidão ao CNPq, por ter financiado a parte inicial deste trabalho de pesquisa e à FAEP pela Bolsa Ponte que viabilizou a conclusão do mesmo.

Conteúdo

Resumo	1
Abstract	2
1 Introdução Geral	3
1.1 Motivação	3
1.2 Proposição da Tese	4
1.3 Aspectos Bibliográficos	5
1.4 Organização da Tese	5
2 Projeto de Sistemas de Controle	7
2.1 Introdução	7
2.2 Sistema de Controle Padrão	7
2.2.1 Arquitetura Clássica	7
2.2.2 Nova Arquitetura	8
2.3 Parametrização dos Controladores Estabilizantes	9
2.3.1 Problema de Estabilidade	9
2.3.2 Parametrização Q	11
2.3.3 Parametrização em Espaço de Estados	16
2.4 Especificações de Projeto em Malha Fechada	21
2.4.1 Realizabilidade	21
2.4.2 Estabilidade	21
2.4.3 Desempenho	22
2.5 Problema Geral de Projeto	25
3 Otimização Sequencial Irrestrita	27
3.1 Introdução	27
3.2 Formulação Não-Convexa do Problema de Projeto	27
3.2.1 Minimização Através de Direções Independentes	27
3.2.2 O Intervalo de Incerteza	28
3.3 Conceito de Função Penalidade	29
3.3.1 Interpretação Geométrica das Funções Penalidades	30
3.3.2 Problemas Não-Convexos	31
3.4 Método da Função Penalidade	32
3.4.1 Problema Primal	32
3.4.2 Problema Penalidade	32

3.4.3	Resumo do Método da Função Penalidade	34
3.4.4	Dificuldades Computacionais Associadas às Funções Penalidades	34
3.5	Método da Função Barreira	35
3.5.1	Problema Primal	35
3.5.2	Problema Barreira	35
3.5.3	Resumo do Método da Função Barreira	36
3.5.4	Dificuldades Computacionais Associadas às Funções Barreira	37
3.6	Algoritmo de Rosenbrock	37
3.6.1	Construção das Direções de Busca	38
3.6.2	Resumo do Algoritmo de Rosenbrock com Busca Unidimensional	39
3.6.3	Convergência do Método de Rosenbrock	39
3.6.4	Método da Seção Áurea	39
3.7	Problema Geral de Projeto Através de Otimização Sequencial Irrestrita	41
4	Redução de Ordem Através de Transformações de Similaridade	43
4.1	Introdução	43
4.2	Condições Suficientes para Redução de Ordem	43
4.3	Controlador Baseado no Observador de Ordem Reduzida	46
4.3.1	Controladores de Ordem $(n - l)$	46
4.3.2	Controladores de Ordem menor que $(n - l)$	47
4.4	Resultados Adicionais sobre Redução de Ordem de Controladores	52
5	Resultados Computacionais	54
5.1	Introdução	54
5.2	Implementação do Problema	54
5.3	Problemas de Otimização	56
5.4	Resultados Relativos ao Método de Penalidades	57
5.4.1	Exemplo 1	57
5.4.2	Exemplo 2	58
5.4.3	Exemplo 3	60
5.5	Resultados Relativos ao Método de Barreiras	61
5.5.1	Exemplo 1	61
5.5.2	Exemplo 2	63
5.5.3	Exemplo 3	64
5.6	Resultados Relativos a Redução de Ordem	66
5.6.1	Exemplo 1	66
5.6.2	Exemplo 2	67
5.6.3	Exemplo 3	68
5.7	Comparações e Comentários	69
5.7.1	Penalidades vs. Barreiras	69
5.7.2	Comparação entre os Métodos de Otimização	70
6	Conclusões	72
	Bibliografia	73

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é abordar o problema de síntese de sistemas de controle através de técnicas de otimização sequencial irrestrita. Trabalhos recentes mostram a viabilidade computacional de se traduzir especificações de desempenho através de restrições e funcionais, na sua grande maioria convexos, tornando o problema tratável por técnicas de otimização eficientes. A técnica implementada apresenta como principal vantagem a eliminação do cálculo do subgradiente dos funcionais, o que possibilita a resolução de problemas de síntese que incluam funcionais quase-convexos na sua formulação. Na primeira parte deste trabalho, apresenta-se o problema de projeto de um sistema de controle via otimização, os métodos de solução utilizados e a proposta geral para o problema de projeto. Na segunda parte é abordado um dos principais problemas gerados pela utilização de técnicas de otimização no projeto de sistemas de controle: a elevada ordem que, em geral, os controladores projetados assumem. Baseado em condições suficientes estabelecidas a partir da teoria dos observadores e algumas transformações de similaridade, é implementado um algoritmo para a redução de ordem dos controladores obtidos via otimização.

Abstract

The objective of this work is to address the problem of designing control systems through sequential unconstrained optimization techniques. Recent works demonstrate the computational viability of translating performance specifications through convex closed-loop functionals, which allow an efficient treatment of the control design problem. The main advantage of the techniques employed in this work is to avoid the time-consuming computation of subgradients. The first part of the work discusses the formulation of the control design problem as a standard optimization problem and the specific methods used to obtain optimal solutions. The second part of the work deals with the problem of reducing the optimal (but higher orders) controllers through the observers theory and certain similarity transformations that can be carried out over the nominal controllers obtained by optimization techniques.

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Motivação

Esta tese trata do problema de projeto de sistemas de controle através de otimização não-convexa para plantas lineares invariantes no tempo. Embora os processos práticos sejam não-lineares eles podem ser analisados através de uma aproximação linear em torno de um determinado ponto de operação. O projeto tem como finalidades básicas estabilizar e satisfazer certas especificações de desempenho para o sistema controlado.

Quando o número de parâmetros envolvidos é relativamente pequeno e as especificações de desempenho não são complexas, técnicas de tentativa e erro baseadas no Lugar das Raízes ou nos Diagramas de Bode e Nyquist ([Oga90]) podem ser aplicadas para se obter, por exemplo, controladores do tipo PID amplamente utilizados em ambientes industriais.

No caso de sistemas multivariáveis complexos, estes procedimentos tornam-se inviáveis e a assistência do computador, é obrigatória. Um exemplo típico de projeto nestas condições é a síntese de reguladores do tipo LQG - Linear Quadrático Gaussiano - baseada em técnicas analíticas de otimização, isto é, na minimização de um determinado funcional quadrático. Embora sempre forneça controladores estabilizantes, este tipo de projeto apresenta como desvantagem a necessidade de se traduzir as especificações de desempenho em termos das matrizes de ponderação do funcional mencionado, o que exige grande experiência prática do projetista.

Trabalhos recentes (Boyd e Barratt [BB91]; Boyd et al. [BBB88]; Cruz Jr. [Cruz94]) demonstram a viabilidade computacional de se traduzir especificações de desempenho através de restrições e funcionais, na sua grande maioria convexos, tornando desnecessária a representação de todas estas especificações em termos de um único critério de desempenho, como no caso do regulador LQG, e tornando o problema tratável por técnicas de otimização extremamente eficientes.

Uma das principais desvantagens no emprego de técnicas de otimização para o projeto de sistemas de controle é a elevada ordem que, em geral, os controladores obtidos assumem. Por outro lado, sabe-se que a complexidade dos sistemas a serem controlados está diretamente relacionada com o grau do controlador estabilizante. Assim sendo, surge a necessidade de se pesquisar novas técnicas para a solução do problema de síntese que considerem na sua formulação o problema de redução de ordem para os controladores resultantes.

O avanço na tecnologia de computadores, isto é, o incremento da velocidade de processa-

mento, tem servido como estímulo para o desenvolvimento de pesquisa utilizando métodos envolvendo técnicas de otimização sequenciais, assim como a sua integração com as denominadas tecnologias emergentes, tais como as redes neurais, os algoritmos evolutivos e os sistemas inteligentes, na procura de soluções para o problema de projeto com redução de ordem.

Analisando-se os diferentes métodos propostos percebe-se que aqueles baseados em aproximações elipsoidais ([BB91]) apresentam como principal desvantagem a complexidade na formulação do problema, enquanto que os baseados em algoritmos de planos de corte ([Cruz94]) apresentam algumas dificuldades na definição do subgradiente dos funcionais envolvidos na formulação.

Uma maneira de tratar o problema de síntese sem incorrer em formulações complexas e no cálculo de subgradientes é discutida neste trabalho.

1.2 Proposição da Tese

Esta tese faz uma abordagem do problema de projeto de sistemas de controle através de técnicas de otimização sequencial irrestrita. Esta técnica permite transformar um problema de projeto em um problema de otimização irrestrito, o qual pode ser resolvido através de eficientes métodos de otimização. O método selecionado para a implementação da técnica de otimização sequencial irrestrita tem como principal vantagem a eliminação do cálculo dos subgradientes dos funcionais envolvidos.

O método proposto inicia a formulação do problema de síntese fixando a ordem de uma matriz que parametrizará o sistema em malha fechada, e conseqüentemente, a dimensão do espaço no qual se resolverá o problema de otimização. A seguir, estabelecem-se condições necessárias e suficientes que garantam a estabilidade do parâmetro matricial e do sistema realimentado. A partir das condições anteriores, define-se o sub-espaço no qual finalmente são determinados os controladores, denominados de *controladores nominais*. Estes controladores contemplam o aspecto de redução de ordem, tendo em vista que a ordem do parâmetro matricial é selecionada como sendo a menor possível.

O método utiliza uma rotina de busca unidimensional baseada no algoritmo da Seção Áurea, uma rotina para o cálculo de direções ortonormais baseada no algoritmo de Gram-Schmidt, uma rotina para a transformação do problema restrito em irrestrito baseada nas chamadas funções penalidade e barreira, e uma rotina para a otimização do problema irrestrito resultante, baseada em uma versão modificada do Algoritmo de Rosenbrock.

No que se refere ao problema de redução de ordem dos controladores, discute-se as condições necessárias e algumas transformações de similaridade que permitem elaborar um algoritmo para a obtenção de controladores estabilizantes de ordem reduzida, a partir dos *controladores nominais*.

Finalmente, estabelecem-se algumas diretrizes para a obtenção de controladores de menor ordem possível, os menores em relação ao método de redução proposto. Este assunto pode ser explorado com mais detalhes em trabalhos futuros.

1.3 Aspectos Bibliográficos

Resultados recentes na área de controle linear multivariável obtidos através do emprego da técnica denominada de *Abordagem por Fatoração* formam a base teórica sobre a qual desenvolveu-se a idéia e os algoritmos utilizados no presente trabalho. A idéia central desta abordagem consiste em *fatorar* a matriz de transferência de um sistema (não necessariamente estável) como a “razão” de duas matrizes estáveis. Esta idéia aparentemente simples deu origem a uma elegante metodologia para a solução de importantes problemas de controle de uma forma mais simples e natural ([Vid85]). Esta idéia foi usada pela primeira vez em um trabalho de M. Vidyasagar em 1972 ([Vid72]), mas a ênfase era para a análise da estabilidade do sistema do que na síntese de controle. O ponto de partida da *Abordagem por Fatorização* é obter uma parametrização de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta. Com isso pode-se, em princípio, selecionar o melhor controlador para várias aplicações. Esta idéia foi apresentada em 1976 por Youla, Jabr e Bongiorno ([YJBI76]). O ponto de vista adotado nesta tese - caracterização da classe de todos os controladores que estabilizam uma planta como um anel¹ - foi inicialmente proposto em 1980 por Desoer et al. ([DLM80]). Neste último trabalho, os autores exploram o ponto de vista de Youla et al. ([YJBI76]) e ([YJBII76]), e reduzem o problema ao essencial. Seguindo a mesma idéia e com maior detalhamento, Vidyasagar ([Vid85]) apresenta um estudo completo do emprego de técnicas de parametrização em problemas de controle, explorando suas propriedades de convexidade.

A utilização das técnicas de otimização sequencial irrestrita, implementadas através da utilização das chamadas funções penalidade e barreira, tem um longo retrospecto na resolução de problemas de engenharia. Isto ocorre de diversas formas e frequentemente são denominadas por nomes especiais em cada uma das diferentes aplicações. Por exemplo a função penalidade *Valor Absoluto* vem sendo usada há muitos anos em problemas de projetos mecânicos. Na referência [FM68], encontramos detalhes históricos e uma série de resultados relativos às aplicações práticas destas técnicas. Na década de 60, a proposição do código SMUT (*Sequential Unconstrained Minimization Techniques*) por parte de Fiacco e McCormick, impulsiona os trabalhos de pesquisa envolvendo a utilização destas técnicas. Trabalhos recentes têm utilizado estas técnicas como ponto de partida na proposição de novas metodologias.

1.4 Organização da Tese

A seguir, apresenta-se uma síntese do conteúdo dos demais capítulos da tese:

Capítulo 2: Neste capítulo é apresentada a arquitetura de controle sobre a qual desenvolve-se a formulação do problema, descreve-se o conjunto afim de matrizes de transferência em malha fechada realizáveis pelos controladores que estabilizam a planta, e são introduzidas as especificações de projeto em malha fechada através de funcionais e restrições não necessariamente convexas, as quais são úteis na formulação do problema. Finalmente, é apresentado e formulado o problema de projeto de controle via otimização.

¹ Conjunto de funções de transferência, que satisfazem determinadas especificações de projeto, cujas somas e produtos dos seus elementos estão contidas nele.

Capítulo 3: O objetivo central deste capítulo é a descrição da formulação do projeto de sistemas de controle utilizando as técnicas de otimização sequencial irrestrita. Descreve-se os mecanismos de transformação de um problema restrito em um problema irrestrito ou em uma sequência destes, assim como o algoritmo selecionado para a resolução do problema de otimização irrestrito. Finalmente, apresenta-se a formulação geral do problema de projeto de controladores de ordem reduzida.

Capítulo 4: Neste capítulo, a partir da teoria dos observadores de ordem reduzida, são discutidas as condições necessárias assim como algumas transformações de similaridade para a partir de um *controlador nominal*, obter-se um controlador de ordem reduzida. Algumas proposições são discutidas para a caracterização de um conjunto de controladores estabilizantes de menor ordem possível, os menores em relação ao método de redução de ordem proposto.

Capítulo 5: Neste capítulo são apresentados, analisados e comentados os resultados de cada um dos mecanismos utilizados na implementação do método de otimização sequencial irrestrita. Também compara-se os resultados deste método com aqueles obtidos através de métodos de otimização baseados no algoritmo de planos de corte.

Capítulo 6: Neste capítulo apresenta-se um pequeno resumo referente ao método proposto e as principais conclusões do trabalho. Também são descritas algumas dificuldades encontradas durante a implementação do método e, finalmente, as sugestões para trabalhos posteriores.

Capítulo 2

Projeto de Sistemas de Controle

2.1 Introdução

Neste capítulo, a caracterização do *problema de projeto do controlador* em um anel \mathcal{R}^1 é introduzida juntamente com os conceitos algébricos necessários. As especificações de projeto são tratadas na Seção 2.4. O problema de estabilização do sistema consiste no primeiro passo em direção à solução do *problema de projeto do controlador*. Em termos mais formais, o problema de estabilização pode ser assim descrito:

Dada uma planta P_0 e um anel \mathcal{R} das funções de transferência estáveis², encontre um controlador K tal que o par (P_0, K) seja estável, isto é, $(P_0, K) \in \mathcal{R}$.

2.2 Sistema de Controle Padrão

Para o equacionamento de nosso problema utiliza-se uma arquitetura de controle explícita, no sentido de mostrar com clareza os sinais de entrada e saída da mesma. Esta nova arquitetura está baseada na representação clássica conhecida como 1-DOF, a qual descreve-se a seguir.

2.2.1 Arquitetura Clássica

A figura 2.1 mostra a representação clássica para sistemas conhecida como *sistema de controle com um grau de liberdade* (1-DOF); ver [BB91]. Neste sistema o sinal de referência, denotado por r , é uma entrada externa que varia com o tempo. O principal objetivo do projeto de um sistema 1-DOF é manter a saída y_p da planta o mais próximo possível do sinal de referência r , a despeito das perturbações n_{proc} (ruído no processo) e n_{sen} (ruído no sensor), e ao mesmo tempo minimizar o esforço do atuador, isto é, o sinal u .

Uma representação racional e explícita para o sistema 1-DOF consiste em definir adequadamente os sinais que *entram* e os sinais que *saem* da planta controlada, tal como será mostrado na seção seguinte.

¹Anel de funções de transferência que satisfazem determinadas especificações de projeto. Para mais detalhes sobre este enfoque, ver Desoer et al. ([DLM80]).

²Esta é uma particularização para o anel \mathcal{R} .

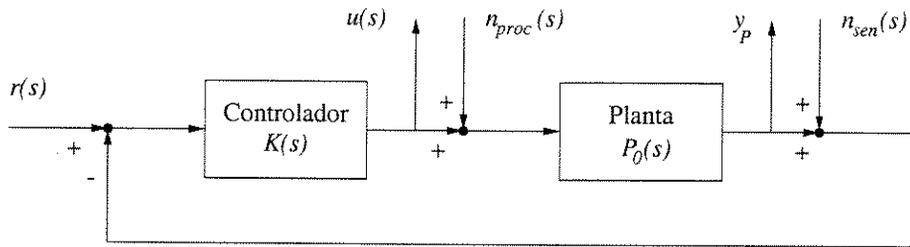


Figura 2.1: Representação Clássica do Sistema.

2.2.2 Nova Arquitetura

Esta nova arquitetura representa de maneira mais racional e explícita os sinais da planta controlada, agrupando-os em sinais de saída e de entrada como mostra a figura 2.2.

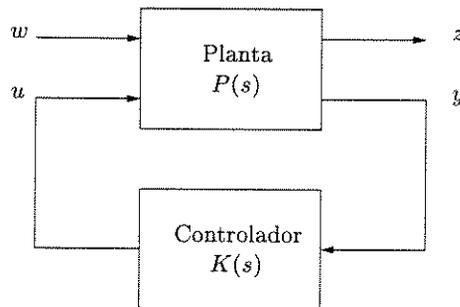


Figura 2.2: Nova Representação para o Sistema.

Os sinais de entrada da planta estão agrupados em dois vetores:

- *vetor de entradas controladas* (u): formado pelas entradas que são geradas pelo controlador.
- *vetor de entradas exógenas* (w): formado por todas as demais entradas da planta, como ruídos, referências, perturbações físicas e até sinais fictícios que ajudam na análise do sistema.

Os sinais de saída da planta estão agrupados em dois vetores:

- *vetor de saídas medidas* (y): formado por sinais provenientes de sensores e/ou de comandos de entrada (ver [BB91]). Estes sinais são acessíveis ao controlador.
- *vetor de saídas reguladas* (z): formado por qualquer sinal do sistema sobre o qual deseje-se expressar uma especificação de desempenho, independentemente de sua acessibilidade ao controlador. Exemplos: temperatura, força, posição real, enfim qualquer variável que se deseje regular ou controlar. Este vetor pode conter componentes de y ou de u e até variáveis de estado internas ao sistema.

Por definição, o controlador somente possui entrada y e saída u e o sistema como um todo possui entrada w e saída z . As dimensões dos vetores w, u, z e y , são denotadas por

n_w, n_u, n_z e n_y respectivamente. Note que a relação entre w e z é extremamente interessante ao projetista, pois um controlador candidato ao sistema em malha fechada pode ser avaliado através de simulações ou testes envolvendo apenas w e z .

A figura 2.3 ilustra esta estrutura de maneira mais geral, ou seja, com a inclusão de sinais adicionais de comandos e diagnósticos que podem estar presentes no controlador. Nesta figura o vetor de sinais de comando (w_{com}) é incluído no vetor de sinais exógenos, e passa através da planta $P(s)$ para ser acessado diretamente pelo controlador. Do mesmo modo, o vetor de sinais de diagnóstico (u_{diag}) parte do controlador diretamente para a saída regulada (z_{diag}) que é usada para monitoramento do sistema. Maiores detalhes podem ser encontradas em Boyd e Barratt ([BB91]) e Boyd et al. ([BBB88]).

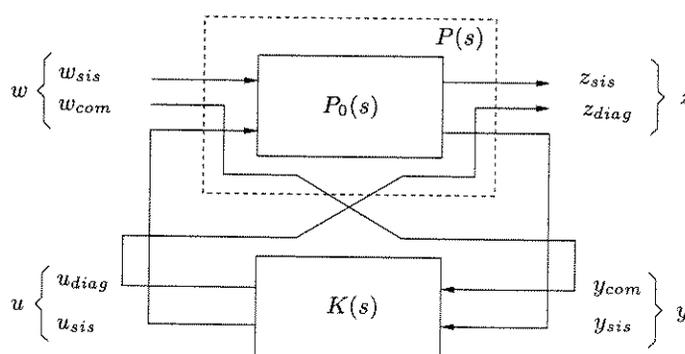


Figura 2.3: Nova Arquitetura - Estrutura Geral.

2.3 Parametrização dos Controladores Estabilizantes

Um dos resultados desta seção pode ser resumido como: seja \mathcal{R} o conjunto de funções de transferência que satisfazem determinadas especificações de projeto. Então somas e produtos de elementos de \mathcal{R} também pertencem a \mathcal{R} , isto é pode-se caracterizar \mathcal{R} como um anel.

2.3.1 Problema de Estabilidade

Seja $P_0 \in \mathcal{R}$, onde \mathcal{R} representa o campo das funções racionais em s com coeficientes reais (funções de transferência de sistemas lineares invariantes no tempo). Para a obtenção do controlador K (ou do par $(P_0, K) \in \mathcal{R}$) utiliza-se o esquema do tipo por realimentação (malha fechada). Este esquema é considerado o melhor do ponto de vista da redução de sensibilidade e robustez contra imperfeições do modelo, dentre outros.

Considere o esquema de um sistema genérico mostrado na figura 2.4 na sua representação clássica:

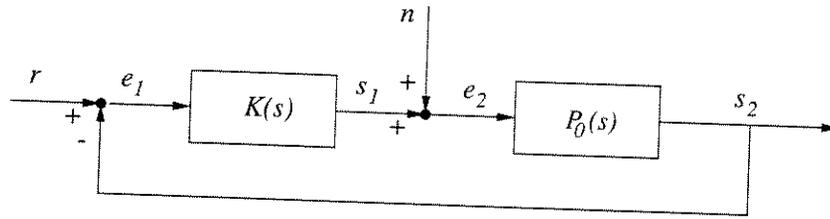


Figura 2.4: Sistema Genérico - Representação Clássica.

Na figura 2.5 tem-se o sistema *traduzido* para a nova arquitetura.

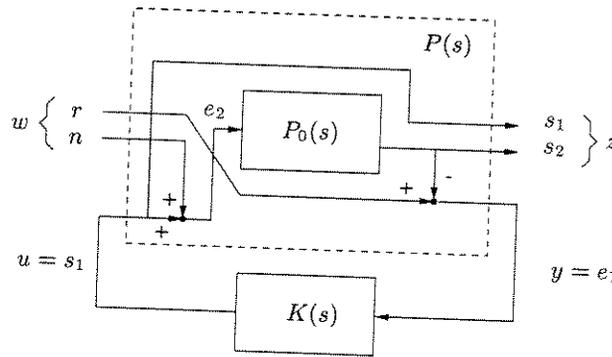


Figura 2.5: Sistema Genérico - Nova Representação .

A matriz de transferência H das duas entradas externas r e n (entradas exógenas w) para as saídas s_1 do controlador $K(s)$ e s_2 da planta $P_0(s)$ (saídas reguladas z) é dada por

$$H = \begin{bmatrix} K(I + P_0K)^{-1} & -P_0K(I + P_0K)^{-1} \\ KP_0(I + KP_0)^{-1} & P_0(I + KP_0)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Definindo as matrizes G e F como:

$$G = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se escrever H de uma maneira compacta. Com isso ([Vid85]),

$$H = G(I + FG)^{-1} \quad (2.2)$$

O sistema da figura 2.4 é estável se todos os elementos de H pertencerem ao anel \mathcal{R} das funções de transferência estáveis. Resolvendo a equação (2.2) para G , tem-se,

$$G = (I - HF)^{-1}H = \left[\frac{\text{adj}(I - HF)}{\det(I - HF)} \right] H \quad (2.3)$$

Esta última expressão mostra que todo elemento da matriz G (formado por K que estabiliza H e P_0) pode ser expresso como a *razão* de duas funções pertencentes a \mathcal{R} . Conclui-se que uma vez especificado um anel \mathcal{R} de funções de transferência estáveis, os elementos da classe de todas as possíveis (e eventualmente instáveis) funções de transferência G podem ser escritos como a *razão* de duas funções de transferência estáveis. Com este resultado fundamental, pode-se agora descrever de maneira precisa o problema de estabilização.

Dado um anel \mathcal{R} de funções de transferência estáveis e a matriz de transferência de uma planta P_0 , onde cada elemento de P_0 é a razão de funções em \mathcal{R} , encontre todos os controladores K que resultem em uma matriz de transferência em malha fechada H cujos elementos pertençam a \mathcal{R} .

2.3.2 Parametrização Q

Nesta seção apresenta-se de maneira sucinta a abordagem por fatorização para a parametrização de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta.

O símbolo \mathcal{S} é utilizado para denotar o conjunto de funções racionais estáveis próprias e \mathcal{U} denota o conjunto de unidades de \mathcal{S} , isto é, funções em \mathcal{S} que possuem inversa em \mathcal{S} .

Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso SISO

Admitindo que $P_0, K \in \mathcal{R}$ e trabalhando com a arquitetura mostrada na figura 2.4 teremos a matriz de transferência em malha fechada H de (r, n) para (s_1, s_2) dada pela expressão (2.1).

Diz-se que o par (P_0, K) é *estável* ou que K *estabiliza* P_0 , se e somente se $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$. Esta noção de estabilidade requer que *cada* um dos quatro elementos de H representem um sistema BIBO-estável ² e não apenas $P_0(I + P_0K)^{-1}$.

Com base nas observações anteriores, podemos afirmar que:

- Se K é estável, então $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ se e somente se $P_0(I + P_0K)^{-1} \in \mathcal{S}$.
- Estabilidade em malha fechada implica em estabilidade interna e externa do sistema.

Com isso, tem-se que $H \in \mathcal{S}^{2 \times 2}$ é uma condição necessária e suficiente para se garantir a estabilidade do sistema.

Teorema 2.1 *Suponha $P_0, K \in \mathcal{R}$, e seja $P_0 = \frac{N}{M}$, $K = \frac{U}{V}$, onde $N, M, U, V \in \mathcal{S}$; N, M são coprimas e U, V são coprimas. Defina*

$$\Delta(P_0, K) = NU + MV \quad (2.4)$$

Então o par (P_0, K) é estável se e somente se $\Delta(P_0, K) \in \mathcal{U}$.

Corolário 2.1 *Suponha que $P_0 \in \mathcal{R}$, e seja $P_0 = \frac{N}{M}$ onde $N, M \in \mathcal{S}$ são coprimas. Então $K \in \mathcal{R}$ estabiliza P_0 se e somente se $K = \frac{U}{V}$ para $U, V \in \mathcal{S}$ que satisfazem*

$$NU + MV = 1 \quad (2.5)$$

²BIBO: Bounded Input (Entrada Limitada) - Bounded Output (Saída Limitada).

O resultado central deste capítulo, que leva à parametrização de todos os compensadores que estabilizam uma dada planta pode agora ser enunciado.

Teorema 2.2 *Suponha $P_0 \in \mathcal{R}(s)$ e seja $P_0 = \frac{N}{M}$ onde $N, M \in \mathcal{S}$ são coprimas. Selecione $X, Y \in \mathcal{S}$ tais que*

$$XN + YM = 1 \quad (2.6)$$

Então o conjunto de todos os controladores que estabilizam P_0 , denotado por $\mathcal{Q}(P_0)$, é dado por

$$\mathcal{Q}(P_0) = \left\{ K = \frac{X + QM}{Y - QN} : Q \in \mathcal{S} \text{ e } Y - QN \neq 0 \right\} \quad (2.7)$$

Em geral existe uma descrição do conjunto $\mathcal{H}_{estável}$ das matrizes de transferência em malha fechada H realizáveis através de controladores estabilizantes. Este conjunto é descrito em função do *parâmetro livre* Q .

Parametrização de Todos os Controladores Estabilizantes - Caso MIMO

Considere uma planta P multivariável, particionada em termos das variáveis w, u, z e y , que representam vetores de sinais exógenos, de controle, regulados e medidos, respectivamente:

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} z &= P_{zw}w + P_{zu}u \\ y &= P_{yw}w + P_{yu}u \\ u &= Ky \end{aligned}$$

As matrizes P e K são, por hipótese, racionais e próprias. Por simplicidade, assume-se também que a matriz de transferência P_{yu} é estritamente própria.

Teorema 2.3 *Para cada matriz racional própria P existem oito matrizes $M, \tilde{M}, N, \tilde{N}, X, \tilde{X}, Y$ e \tilde{Y} , pertencentes a $M(\mathcal{S})$, conjunto de todas as matrizes racionais cujos elementos são estáveis e próprios, que satisfazem as equações*

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I$$

Estas equações constituem a denominada *fatoração duplamente coprima de P* . Note que N e M são coprimas à direita e \tilde{N} e \tilde{M} são coprimas à esquerda. Veja [Fran87] para a obtenção de fórmulas explícitas para as oito matrizes envolvidas, utilizando-se realizações em espaço de estados.

Análise da Estabilidade

A definição de estabilidade interna exige que os quatro elementos da matriz de transferência H pertençam a $M(S)$. Para verificar esta condição, usualmente introduzem-se ruídos de atuação no modelo da planta conforme ilustrado na figura 2.6.

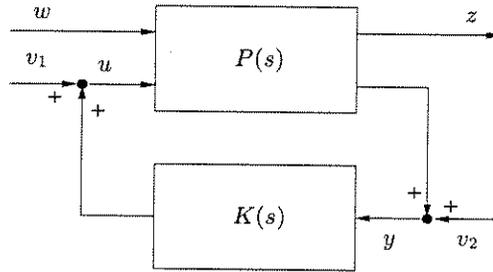


Figura 2.6: Definição de Estabilidade Interna - Sinais Externos.

Neste caso diz-se que K estabiliza P se e somente se as nove matrizes de transferência que relacionam w, v_1 e v_2 com z, y e u pertencem a $M(S)$.

Uma planta P é *estabilizável* se existe uma matriz racional própria K que a estabilize. Do ponto de vista do conceito de estabilidade, o principal resultado pode ser enunciado através do seguinte teorema.

Teorema 2.4 K estabiliza P se e somente se K estabiliza P_{yu} .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Fran87]. Observe que a parte necessária do teorema é trivial. A parte suficiente baseia-se no fato de que P e P_{yu} compartilham os mesmos pólos instáveis, e portanto, para estabilizar P é suficiente estabilizar P_{yu} . Finalmente, note que K estabiliza P_{yu} se e somente se as quatro matrizes de transferência, de v_1 e v_2 para u e y pertencem a $M(S)$.

Teorema 2.5 O conjunto de todas as matrizes racionais próprias K que estabilizam P_{yu} está parametrizado pelas equações

$$K = (Y + MQ)(X + NQ)^{-1} \quad (2.8)$$

$$= (\tilde{X} + Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} + Q\tilde{M}), \quad Q \in M(S) \quad (2.9)$$

Este teorema é importante por estabelecer que K estabiliza P_{yu} se e somente se K possui a estrutura evidenciada pela equação (2.8) e/ou (2.9).

Representação Afim do Sistema Realimentado

A seguir obtêm-se a matriz em malha fechada do sistema como uma representação afim envolvendo o parâmetro Q .

Considere uma fatoração duplamente coprima de P_{yu}

$$P_{yu} = N_{yu}M_{yu}^{-1} = \tilde{M}_{yu}^{-1}\tilde{N}_{yu} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_{yu} & -\tilde{Y}_{yu} \\ -\tilde{N}_{yu} & \tilde{M}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{yu} & Y_{yu} \\ N_{yu} & X_{yu} \end{bmatrix} = I$$

Neste caso, a expressão para K é

$$K = (Y_{yu} + M_{yu}Q)(X_{yu} + N_{yu}Q)^{-1} \quad (2.11)$$

$$= (\tilde{X}_{yu} + Q\tilde{N}_{yu})^{-1}(\tilde{Y}_{yu} + Q\tilde{M}_{yu}), \quad Q \in M(\mathcal{S}) \quad (2.12)$$

Equacionando o sistema em malha fechada tem-se:

$$H = P_{zw} + P_{zu}(I - KP_{yu})^{-1}KP_{yw} \quad (2.13)$$

Substituindo as expressões (2.10) e (2.12) na equação (2.13) tem-se

$$H = P_{zw} + P_{zu}M_{yu}(\tilde{X}_{yu} - Q\tilde{M}_{yu})P_{yw} \quad (2.14)$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} T_1 &= P_{zw} + P_{zu}M_{yu}\tilde{Y}_{yu}P_{yw} \\ T_2 &= P_{zu}M_{yu} \\ T_3 &= \tilde{M}_{yu}P_{yw} \end{aligned}$$

e substituindo na equação (2.14), encontra-se

$$H = T_1 + T_2QT_3. \quad (2.15)$$

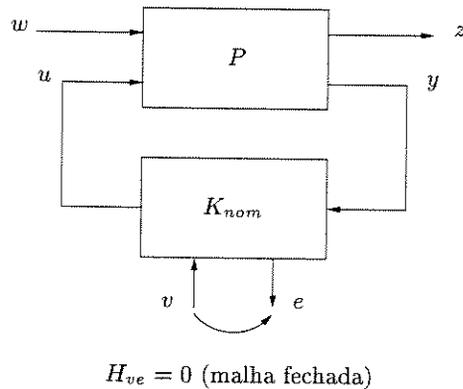
Percebe-se que a matriz de transferência de malha fechada H agora é caracterizada como uma relação afim em termos do parâmetro Q . Esta propriedade é fundamental no sentido de expressar o problema de projeto de controladores como um problema convexo.

Paradigma do Controlador Modificado

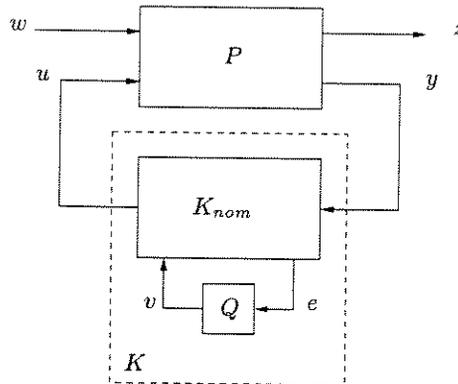
Nesta seção aborda-se o problema de como gerar um subconjunto representativo de controladores que estabilizam a planta P .

O procedimento a ser utilizado baseia-se nos seguintes pontos:

1. Dado um controlador nominal K_{nom} que estabiliza P , modifica-se ou aumenta-se este controlador, de tal forma que o mesmo produza um sinal de saída auxiliar e (de mesma dimensão de y) e aceite um sinal auxiliar de entrada v (de mesma dimensão de u) conforme ilustrado na figura 2.7.
2. Esta modificação deve ser feita de tal maneira que a matriz de transferência de malha fechada de v para e seja nula e que a matriz de transferência de malha aberta de y para u permaneça K_{nom} .

Figura 2.7: Controlador nominal K aumentado.

3. Conecta-se então uma matriz de transferência Q de e para v , como mostrado na figura 2.8. Um novo controlador é então definido através de K_{nom} e Q .

Figura 2.8: Modificação de K_{nom} com Q .

Define-se as seguintes seguintes matrizes de transferência em malha fechada:

$$\begin{aligned} U_1 & : \text{ de } w \text{ para } z \\ U_2 & : \text{ de } v \text{ para } z \\ U_3 & : \text{ de } w \text{ para } e \end{aligned}$$

É razoável imaginar que K também estabiliza P , pois o parâmetro Q adicionado a K_{nom} não gera realimentação e, portanto, não pode instabilizar a planta.

Como a matriz de transferência de v para e é nula, a figura 2.8 pode ser redesenhada como na figura 2.9. Após algumas manipulações a matriz de transferência em malha fechada de w para z é dada por

$$H = U_1 + U_2QU_3$$

que é estável, pois U_1, U_2, U_3 e Q são estáveis.

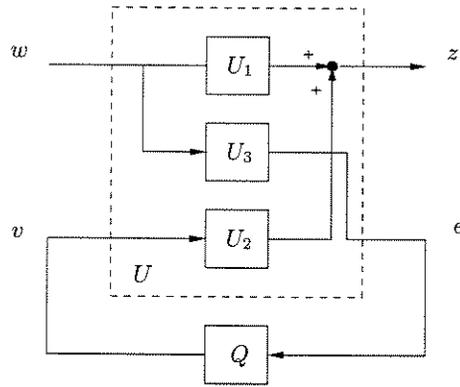


Figura 2.9: Modificação de K_{nom} com Q - Explicitada.

2.3.3 Parametrização em Espaço de Estados

Os algoritmos apresentados nesta tese são baseados na representação do sistema em espaço de estados. Esta representação é necessária devido a problemas numéricos inerentes à representação por funções de transferência, como a geração de matrizes mal-condicionadas.

A seguir obtêm-se as representações de estado da planta $P(s)$, do controlador $K(s)$ e do sistema em malha fechada $H(s)$.

Planta $P(s)$

Uma planta $P(s)$ de um sistema MIMO com dois vetores de entrada (w e u) e dois vetores de saída (z e y), possui a seguinte realização de estado:

$$\dot{x} = A_p x + B_w w + B_u u \quad (2.16)$$

$$z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \quad (2.17)$$

$$y = C_y x + D_{yw} w + D_{yu} u \quad (2.18)$$

de tal forma que

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p + D_p \quad (2.19)$$

onde

$$B_p = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}$$

$$D_p = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix}$$

Muitos modelos de plantas encontrados na prática possuem a propriedade de que $D_{yu} = 0$, ou equivalentemente, $P_{yu}(\infty) = 0$; tais plantas são denominadas de *estritamente próprias*. Esta propriedade facilita o equacionamento do problema e não compromete a utilização da técnica aqui discutida.

Controlador $K(s)$

Suponha que o controlador possua a seguinte realização no espaço de estado

$$\dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \quad (2.20)$$

$$u = C_K x_K + D_K y \quad (2.21)$$

de tal forma que

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K \quad (2.22)$$

Sistema Realimentado

Uma realização em espaço de estado do sistema em malha fechada pode ser encontrada eliminando-se u e y em (2.16) a (2.18) e (2.20) a (2.21):

$$\dot{x} = (A_P + B_u D_K C_y)x + B_u C_K x_K + (B_w + B_u D_K D_{yw})w \quad (2.23)$$

$$\dot{x}_K = B_K C_y x + A_K x_K + B_K D_{yw} w \quad (2.24)$$

$$z = (C_z + D_{zu} D_K C_y)x + D_{zu} C_K x_K + (D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw})w \quad (2.25)$$

de tal forma que

$$H(s) = C_H(sI - A_H)^{-1}B_H + D_H \quad (2.26)$$

onde

$$A_H = \begin{bmatrix} A_P + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix}$$

$$B_H = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{bmatrix}$$

$$C_H = \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K \end{bmatrix}$$

$$D_H = \begin{bmatrix} D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw} \end{bmatrix}$$

Implementação do Paradigma

Um método geral para se aplicar o paradigma do controlador modificado começa por um controlador nominal que é uma realimentação de estados estimado, o qual é dado por

$$u = -F\hat{x} \quad (2.27)$$

sendo F uma matriz apropriada (o ganho de realimentação do estado estimado) e \hat{x} é uma estimativa de x devida apenas a u , que é governada pela equação do observador

$$\dot{\hat{x}} = A_P \hat{x} + B_u u + L(y - C_y \hat{x}) \quad (2.28)$$

onde L é o ganho do estimador. A matriz de transferência deste controlador é

$$K_{nom}(s) = -F(sI - A_P + B_u F + L C_y)^{-1}L \quad (2.29)$$

Note que K_{nom} estabiliza P para F e L tais que $A_P - B_u F$ e $A_P - LC_y$ são estáveis, o que será assumido a partir daqui.

Para aumentar este controlador nominal via realimentação de estado estimado, incorpora-se v em u , na saída do observador, significando que (2.27) é substituída por

$$u = -F\hat{x} + v \quad (2.30)$$

e, portanto, o sinal v não induz qualquer erro de observação, como mostrado na figura 2.10. Para o sinal e , toma-se a predição do erro da saída:

$$e = y - C_y \hat{x} \quad (2.31)$$

A imposição de que a matriz de transferência em malha fechada de v para e deva ser zero é satisfeita, pois a diferença $(x - \hat{x})$ não é influenciada por v , isto é, o erro $(x - \hat{x})$ não é controlável a partir de v . De fato, manipulações simples levam a seguinte expressão independente de v :

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A_P - LC_y)(x - \hat{x}) \quad (2.32)$$

Portanto, a matriz de transferência de v para $(x - \hat{x})$ é zero. A matriz de transferência de v para e é C_y vezes esta última, isto é zero.

A aplicação do paradigma do controlador modificado ao controlador de estado estimado por realimentação leva ao *controlador baseado no observador* mostrado na figura 2.10. Este controlador é apenas um controlador de estado estimado por realimentação, com a predição de erro da saída processada através de uma matriz estável Q e adicionada ao sinal do atuador na saída do observador. De fato, este aumento é tal que o paradigma do controlador modificado gera todos os controladores que estabilizam a planta. Todo controlador estabilizante pode ser realizado como um controlador baseado no observador, para alguma escolha da matriz de transferência estável Q .

A partir do controlador baseado no observador pode-se obter as equações de estado para a parametrização de todos os controladores que estabilizam a planta, e todas as matrizes de transferência em malha fechada realizáveis pelos controladores que estabilizam a planta. É possível mostrar ([Fran87]), que este método é uma implementação da fatoração duplamente coprima discutida anteriormente.

Partindo das equações (2.27) a (2.31) obtêm-se as equações em espaço de estados para o controlador nominal aumentado

$$\dot{\hat{x}} = (A_P - B_u F - LC_y)\hat{x} + Ly + B_u v \quad (2.33)$$

$$u = -F\hat{x} + v \quad (2.34)$$

$$e = y - C_y \hat{x} \quad (2.35)$$

As equações em espaço de estados para o sistema em malha fechada com o controlador aumentado são encontradas eliminando-se u e y das equações (2.33) a (2.35), assim como

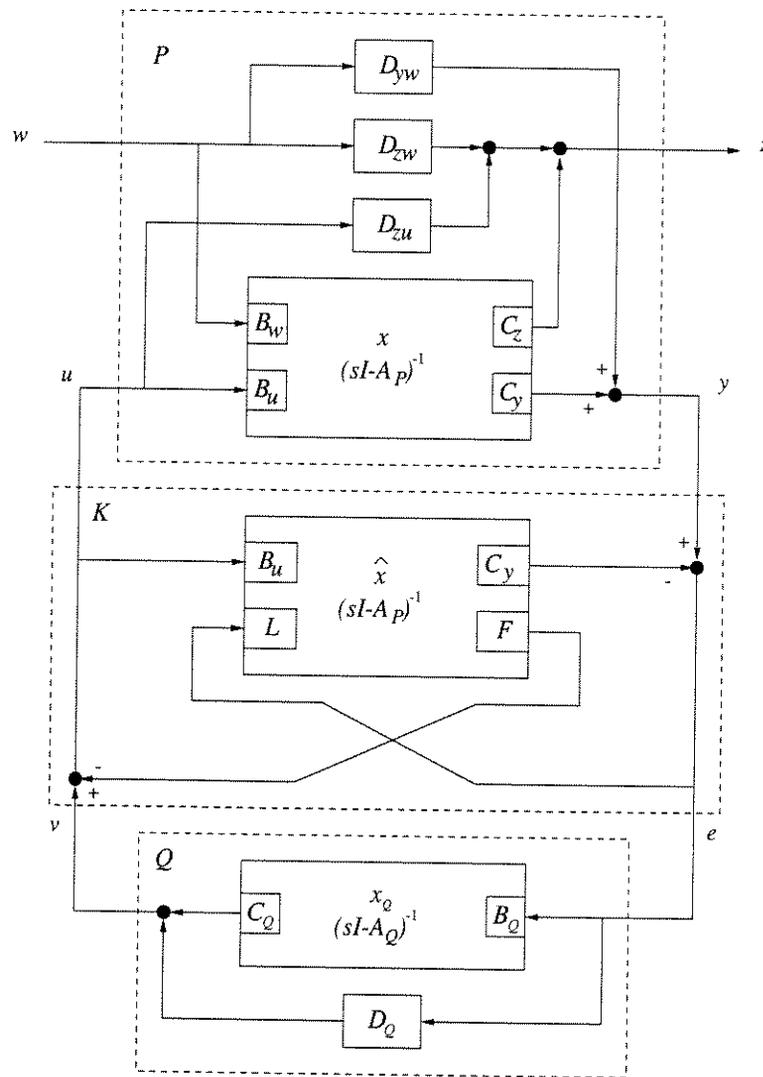


Figura 2.10: Paradigma do Controlador Modificado.

as da planta (2.16) a (2.18):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A_P x - B_u F \hat{x} + B_w w + B_u v \\ \dot{\hat{x}} &= LC_y x + (A_P - B_u F - LC_y) \hat{x} + LD_{yw} w + B_u v \\ z &= C_z x - D_{zu} F \hat{x} + D_{zw} w + D_{zu} v \\ e &= C_y x - C_y \hat{x} + D_{yw} w\end{aligned}$$

As matrizes de transferência T_1, T_2 e T_3 podem ser realizadas como

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix} = C_T (sI - A_T)^{-1} B_T + D_T \quad (2.36)$$

onde

$$\begin{aligned}A_T &= \begin{bmatrix} A_P & -B_u F \\ LC_y & A_P - B_u F - LC_y \end{bmatrix} \\ B_T &= \begin{bmatrix} B_w & B_u \\ LD_{yw} & B_u \end{bmatrix} \\ C_T &= \begin{bmatrix} C_z & -D_{zu} F \\ C_y & -C_y \end{bmatrix} \\ D_T &= \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Admitindo que Q tenha a seguinte realização em espaço de estado

$$\dot{x}_Q = A_Q x_Q + B_Q e \quad (2.37)$$

$$v = C_Q x_Q + D_Q e \quad (2.38)$$

então a realização em espaço de estado do controlador baseado no observador pode ser encontrada eliminando-se e e v das equações do controlador aumentado (2.33) a (2.35).

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A_P - B_u F - LC_y - B_u D_Q C_y) \hat{x} + B_u C_Q x_Q + (L + B_u D_Q) y \\ \dot{x}_Q &= -B_Q C_y \hat{x} + A_Q x_Q + B_Q y \\ u &= -(F + D_Q C_y) \hat{x} + C_Q x_Q + D_Q y\end{aligned}$$

tal que

$$K(s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K + D_K \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned}A_K &= \begin{bmatrix} A_P - B_u F - LC_y - B_u D_Q C_y & B_u C_Q \\ -B_Q C_y & A_Q \end{bmatrix} \\ B_K &= \begin{bmatrix} L + B_u D_Q \\ B_Q \end{bmatrix} \\ C_K &= \begin{bmatrix} -F - D_Q C_y & C_Q \end{bmatrix} \\ D_K &= \begin{bmatrix} D_Q \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Com um pouco de álgebra pode-se verificar que a matriz de transferência de malha fechada H dada por (2.26) é igual a $T_1 + T_2QT_3$.

2.4 Especificações de Projeto em Malha Fechada

Primeiramente apresenta-se algumas propriedades geométricas das especificações de projeto. Assim tem-se uma noção de *especificação de projeto convexa em malha fechada*. Muitas especificações de projeto possuem a propriedade de que o conjunto das matrizes de transferência que satisfazem estas especificações é um conjunto convexo.

2.4.1 Realizabilidade

Uma importante restrição sobre a matriz de transferência em malha fechada $H \in \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é o conjunto das matrizes de transferência que satisfazem uma especificação de projeto, é que H deve ser obtida através de algum controlador K ou, em outras palavras, H deve ser da forma $H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw}$ para algum K . Esta restrição é denominada de *realizabilidade*:

$$\mathcal{H}_{rtvel} \triangleq \{H | H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \text{ para algum } K\} \quad (2.40)$$

O conjunto descrito mostra que a dependência de H com K é não-linear. Contudo pode-se afirmar que no caso geral \mathcal{H}_{rtvel} é afim. Isto pode ser mostrado da seguinte forma: dada qualquer matriz de transferência K de dimensão $n_u \times n_y$, define-se a matriz de transferência R como

$$R = K(I - P_{yu}K)^{-1} \quad (2.41)$$

Esta correspondência é *bi-unívoca*, isto é, dada qualquer matriz de transferência R de dimensão $n_u \times n_y$, a matriz K $n_u \times n_y$ é dada por

$$K = (I + RP_{yu})^{-1}R \quad (2.42)$$

Com isso pode-se expressar a equação (2.40) como

$$\mathcal{H}_{rtvel} \triangleq \{H | H = P_{zw} + P_{zu}RP_{yw} \text{ para algum } R_{n_u \times n_y}\} \quad (2.43)$$

2.4.2 Estabilidade

Como foi discutido anteriormente, uma matriz de transferência é estável se todos os seus elementos forem funções de transferência estáveis. Esta definição é necessária e suficiente para garantir a estabilidade interna e externa do sistema em malha fechada. Cabe salientar que a estabilidade interna requer que um pequeno ruído, seja do processo ou de sensores, não resulte em um esforço grande do sinal de controle u nem aumente demasiadamente o sinal y proveniente dos sensores.

Desoer e Chan ([DC75]) propõem uma definição de estabilidade interna que serve para demonstração da convexidade desta especificação de desempenho.

Considere agora a especificação de que H seja uma matriz de transferência gerada por algum controlador que estabilize a planta

$$\mathcal{H}_{estável} = \left\{ H \mid \begin{array}{l} H = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} \\ \text{para algum } K \text{ que estabilize } P. \end{array} \right\} \quad (2.44)$$

Note que esta especificação é mais restrita do que a de realizabilidade. Assim como \mathcal{H}_{rivel} , $\mathcal{H}_{estável}$ também é um conjunto afim. Utilizando a mesma técnica da seção anterior pode-se mostrar que o conjunto $\mathcal{H}_{estável}$ pode ser expresso como

$$\mathcal{H}_{estável} = \left\{ P_{zw} + P_{zu}RP_{yu} \mid \begin{array}{l} RP_{yu}, \\ R, \\ I + P_{yu}R, \\ (I + P_{yu}R)P_{yu}, \end{array} \text{ são estáveis.} \right\} \quad (2.45)$$

Se a planta P for estável, então em particular P_{yu} é estável. Também é verdade que se R for estável, então RP_{yu} , $I + P_{yu}R$ e $(I + P_{yu}R)P_{yu}$ são também estáveis. Este fato leva a

$$\mathcal{H}_{estável} = \{P_{zw} + P_{zu}RP_{yu} \mid R \text{ estável}\} \quad (2.46)$$

Note que a equação (2.46) é a descrição de \mathcal{H}_{rivel} com a restrição adicional de que R deva ser estável.

Dada qualquer matriz R estável, o controlador que estabiliza P e gera uma matriz de transferência em malha fechada $H = P_{zw} + P_{zu}RP_{yu}$ é

$$K = (I + RP_{yu})^{-1}R \quad (2.47)$$

De maneira inversa, todo controlador que estabiliza P pode ser expresso através de (2.47) para alguma matriz R estável.

2.4.3 Desempenho

Analisa-se as especificações de desempenho que limitam a resposta do sistema em malha fechada com relação a vários sinais de comando e perturbações que podem agir no sistema. Tais especificações são convexas em malha fechada.

Particiona-se os vetores w e z da seguinte forma:

$$w = \begin{bmatrix} w_c \\ w_d \\ w_{etc} \end{bmatrix}$$

Os n_c elementos de w_c são sinais de comando, referências ou sinais de set-point - *referências*, na terminologia clássica de controle. Os n_d elementos de w_d são perturbações ou sinais de ruídos. O vetor de sinal w_{etc} contém todas as outras entradas.

Particiona-se o vetor de variáveis reguladas como:

$$z = \begin{bmatrix} z_c \\ z_a \\ z_o \\ z_{etc} \end{bmatrix}$$

As n_c componentes de z_c são as variáveis reguladas por w_c - *saídas*, na terminologia clássica. Os outros vetores são: z_a , o vetor de sinais do atuador; z_o , outros sinais críticos como sinais de sensores ou variáveis de estados; z_{etc} , os sinais restantes. Conforme o particionamento feito anteriormente, a matriz H deve ter o seguinte aspecto

$$\begin{bmatrix} z_c \\ z_a \\ z_o \\ z_{etc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{cc} & H_{cd} & \star \\ H_{ac} & H_{ad} & \star \\ H_{oc} & H_{od} & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_c \\ w_d \\ w_{etc} \end{bmatrix}$$

O símbolo \star denota qualquer submatriz de H que não é usada para formular especificações de desempenho.

Overshoot e Undershoot

Define-se dois funcionais de H_{cc} : o *overshoot*,

$$\phi_{os}(H_{cc}) \triangleq \sup_{t \geq 0} s(t) - 1$$

onde $s(t)$ é a resposta ao degrau unitário de H_{cc} , e o *undershoot*,

$$\phi_{us}(H_{cc}) \triangleq \sup_{t \geq 0} [1 - s(t)]$$

Estes funcionais são convexos de tal forma que as especificações

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{os} &\triangleq \{H | \phi_{os}(H_{cc}) \leq \alpha\}, \\ \mathcal{H}_{us} &\triangleq \{H | \phi_{us}(H_{cc}) \leq \alpha\} \end{aligned}$$

são convexas: por exemplo, se duas respostas ao degrau unitário de um sistema não excedem 10% de *overshoot*, a combinação convexa dessas duas respostas também não excederá.

Resposta RMS a um Ruído Particular

Uma medida muito usada para se avaliar o *tamanho* de uma função de transferência H é o valor RMS de sua saída quando em sua entrada é aplicado algum processo estocástico estacionário. Suponha uma entrada particular w , com densidade espectral de potência

$S_w(\omega)$, e H uma função de transferência estável. Então, a densidade espectral de potência da saída z de H é

$$S_z(\omega) = S_w(\omega)|H(j\omega)|^2$$

e com isso

$$\|z\|_{rms} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_w(\omega) d\omega \right)^{1/2}$$

Denomina-se de norma RMS de H a função

$$\|H\|_{rms,w} \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_w(\omega) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.48)$$

Norma H_2 : Resposta ao Ruído Branco

Considere a norma RMS discutida anteriormente. Se $S_w(\omega) \approx 1$ nas frequências para as quais $|H(j\omega)|$ possui valor significativo, então

$$\|H\|_{rms,w} \approx \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

É conveniente pensar neste sinal como uma aproximação de um sinal do tipo *ruído branco*, um sinal de entrada aleatório com $S_w(\omega) = 1$ para todo ω . Esta importante norma de um sistema estável é denotada por

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (2.49)$$

e é denominada de norma \mathbf{H}_2 de H . Se H for instável, $\|H\|_2 = \infty$. A norma \mathbf{H}_2 de uma função de transferência mede o valor RMS da resposta saída quando uma excitação do tipo ruído branco está presente na entrada. A norma \mathbf{H}_2 pode ter uma outra interpretação. Pelo Teorema de Parseval,

$$\|H\|_2 = \left(\int_0^{\infty} h(t)^2 dt \right)^{1/2} = \|h\|_2 \quad (2.50)$$

é denominada de norma \mathbf{L}_2 da resposta ao impulso h da matriz de transferência H . Com isso, pode-se interpretar a norma \mathbf{H}_2 de um sistema como a norma \mathbf{L}_2 da resposta a um sinal de entrada particular $\delta(t)$, o impulso unitário.

Ganho de Pico

O Ganho de Pico de um sistema linear invariante no tempo é definido como

$$\|H\|_{pg} \triangleq \sup_{\|w\|_{\infty} \neq 0} \frac{\|Hw\|_{\infty}}{\|w\|_{\infty}} \quad (2.51)$$

Pode ser mostrado que o ganho de pico de uma função H é igual a norma \mathbf{L}_1 da sua resposta ao impulso:

$$\|H\|_{pg} = \int_0^{\infty} |h(t)| dt = \|h\|_1 \quad (2.52)$$

O ganho de pico de uma função de transferência é finito se e somente se a função de transferência é estável.

Rastreamento Assintótico

Uma especificação comum sobre H_{cc} é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{cc}(t) = 1,$$

o que significa que z_c tende para w_c quando $t \rightarrow \infty$, ou equivalentemente, a função de transferência em malha fechada de z_c para w_c vale 1 em $s = 0$. O conjunto das matrizes que correspondem a esta especificação é

$$\mathcal{H}_{rastr_ass} = \{H \mid H_{cc}(0) = 1\} \quad (2.53)$$

Este conjunto pode ser expresso da seguinte forma

$$\mathcal{H}_{rastr_ass} = \{H \mid \phi_{rastr_ass}(H) = 1\} \quad (2.54)$$

onde $\phi_{rastr_ass}(H) \triangleq H_{cc}(0)$ é um funcional afim.

2.5 Problema Geral de Projeto

Apresenta-se a formulação do problema de projeto do controlador em um espaço de dimensão previamente especificada. Um método baseado na parametrização Q conduz a uma aproximação *externa* da região das especificações atingíveis ou realizáveis no espaço das especificações de desempenho. Através dessas aproximações o problema de projeto é formulado.

Formulação do Problema de Projeto

O problema de projeto de controlador pode ser formulado como

$$\min_{H \in \Omega} \Phi(H) \quad (2.55)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é um critério de desempenho convexo no espaço das matrizes de transferência H , e Ω é o conjunto determinado por restrições de projeto. Em vista da parametrização Q , o mesmo problema pode ser expresso como

$$\min_{Q \in \Omega^*} \Phi^*(Q) \quad (2.56)$$

sendo que $\Phi^*(Q) = \Phi(T_1 + T_2QT_3)$ e

$$\Omega^* = \{Q : \Psi^*(Q) \leq 0\}$$

onde $\Psi^*(Q) = \Psi(T_1 + T_2QT_3)$ é um vetor de funcionais convexos que determinam o conjunto Ω^* . Uma vez que o parâmetro Q representa uma matriz estável, as restrições de realizabilidade e estabilidade são preservadas.

Neste último caso a dependência do funcional e das restrições com a variável de decisão é simples. Como $\Phi(\cdot)$ e $\Psi(\cdot)$ são funcionais convexos sobre H , e H pode ser representada

por uma relação afim com o parâmetro Q , as propriedades de convexidade do problema são mantidas.

O funcional $\Phi(\cdot)$ e o conjunto Ω podem envolver especificações de desempenho em termos de rastreamento assintótico das variáveis reguladas, rejeição de entradas indesejadas à planta, limites de *overshoot*, *undershoot* e tempo de estabelecimento, limites nos valores de pico de certos sinais de malha fechada, entre outras ([BBB88]). Na verdade a distinção entre funcionais (critérios) e restrições não é rígida e pode-se considerar o problema de projeto no contexto das técnicas de otimização multicritério ([FG90]).

Capítulo 3

Otimização Sequencial Irrestrita

3.1 Introdução

A ideia principal da formulação do problema de projeto de sistemas de controle utilizando técnicas de otimização, é a de transformar um problema de projeto em um problema de otimização no qual as especificações de desempenho são representadas através de funcionais, os quais podem ser convexos ou não.

Como foi visto, na formulação do problema geral de projeto, o problema de otimização envolve os referidos funcionais na definição tanto da função objetivo quanto das restrições.

3.2 Formulação Não-Convexa do Problema de Projeto

Neste ponto discute-se o problema de programação não-linear envolvendo restrições de igualdade e de desigualdade. Uma aproximação é a de converter este problema num problema irrestrito ou em uma sequência de problemas irrestritos equivalentes, possibilitando desta maneira a utilização das técnicas de otimização irrestrita.

Basicamente, existem dois métodos para realizar esta conversão. O primeiro é denominado Método da Função Penalidade, de acordo com o qual um termo penalidade é adicionado à função objetivo para qualquer violação das restrições. Este método gera uma sequência de pontos infactíveis cujo limite é uma solução ótima do problema original. O segundo método é denominado Método da Função Barreira, através do qual um termo barreira incorporado à função objetivo impede que os pontos gerados saiam da região factível. Este método gera uma sequência de pontos factíveis cujo limite é uma solução ótima do problema original. Este último método pode ser utilizado apenas em problemas com restrições de desigualdade.

3.2.1 Minimização Através de Direções Independentes

Através do teorema apresentado a seguir, estabelece-se a convergência de uma classe de algoritmos que resolvem o problema da forma minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in E_n$. Adotando algumas premissas, mostra-se que um algoritmo que gera n direções de busca linearmente independentes e obtém um novo ponto através de otimizações sequenciais de f ao longo destas direções, converge para um ponto estacionário. O teorema também estabelece a convergência do algoritmo usando direções de busca ortogonais.

Teorema 3.1 *Seja uma função diferenciável $f : E_n \rightarrow E_1$ e considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in E_n$. Considere um algoritmo cujo mapeamento A é definido por $y \in A(x)$, de modo que y é obtido através da minimização sequencial de f ao longo das direções d_1, \dots, d_n partindo de x . Aqui as direções de busca d_1, \dots, d_n dependem de x , e possuem norma unitária. Suponha que as seguintes propriedades sejam verdadeiras:*

1. *Sempre existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\det[D(x)] \geq \varepsilon$ para cada $x \in E_n$, onde $D(x)$ é uma matriz $n \times n$ cujas colunas são formadas pelas direções de busca geradas pelo algoritmo, e $\det[D(x)]$ denota o determinante de $D(x)$.*
2. *O mínimo de f ao longo de qualquer direção de E_n é único.*

Dado um ponto de partida x_1 , suponha que o algoritmo gera uma sequência $\{x_k\}$ do seguinte modo. Se $\nabla f(x_k) = 0$, então o algoritmo para em x_k ; caso contrário $x_{k+1} \in A(x_k)$, k é substituído por $k + 1$, e o processo é repetido. Se a sequência $\{x_k\}$ estiver contida num subconjunto compacto de E_n , então cada ponto de acumulação x da sequência $\{x_k\}$ deve satisfazer $\nabla f(x_k) = 0$.

Perceba que não é assumida nenhuma hipótese em relação à continuidade do mapeamento formado pelas direções de busca. É apenas requerido que as direções de busca usadas em cada iteração sejam linearmente independentes e desde que estas direções convergem, as direções limite devem ser também linearmente independentes. Obviamente isto é verdade se um conjunto de direções linearmente independentes são utilizados em cada iteração. Por outro lado, se as direções de busca utilizadas em cada iteração são mutuamente ortonormais, então a matriz D satisfaz $D^T D = I$. Assim sendo, $\det[D] = 1$, e deste modo a primeira condição do teorema é satisfeita.

Perceba também que a segunda proposição do teorema é usada para garantir a seguinte propriedade. Se uma função diferenciável f é minimizada ao longo de n direções independentes partindo de um ponto x e resultando em x' , então $f(x') < f(x)$, desde que $\nabla f(x) \neq 0$. Desconsiderando a proposição, esta última afirmação é falsa.

3.2.2 O Intervalo de Incerteza

Considere o problema de busca unidimensional dado por minimizar $\theta(\lambda)$ sujeito a $a \leq \lambda \leq b$. Desde que a localização exata do mínimo de θ em $[a, b]$ é desconhecida, este intervalo é denominado de *intervalo de incerteza*. Se durante a rotina de busca fosse possível excluir partes do intervalo que não contivessem o mínimo, então o intervalo de incerteza pode ser reduzido.

Teorema 3.2 *Seja $\theta : E_1 \rightarrow E_1$ uma função estritamente quasi-convexa sobre o intervalo $[a, b]$. Seja $\lambda, \mu \in [a, b]$ tal que $\lambda < \mu$. Se $\theta(\lambda) > \theta(\mu)$, então $\theta(z) \geq \theta(\mu)$ para todo $z \in [a, \lambda]$. Se $\theta(\lambda) \leq \theta(\mu)$, então $\theta(z) \geq \theta(\lambda)$ para todo $z \in (\mu, b]$.*

Do teorema acima, sob estrita quasi-convexidade, se $\theta(\lambda) > \theta(\mu)$, o novo intervalo de incerteza é $[\lambda, b]$. Por outro lado, se $\theta(\lambda) \leq \theta(\mu)$, o novo intervalo de incerteza é dado por $[a, \mu]$. Estas duas situações são ilustradas na figura 3.1.

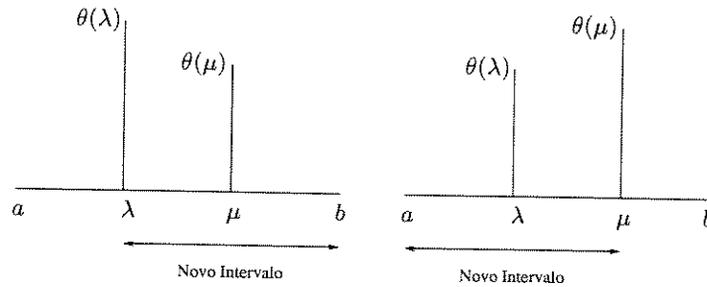


Figura 3.1: Redução do Intervalo de Incerteza.

A literatura de programação não-linear frequentemente usa o conceito de *unimodalidade* para reduzir o intervalo de incerteza. Neste trabalho utiliza-se o conceito equivalente de quasi-convexidade.

3.3 Conceito de Função Penalidade

Neste método, as restrições são incorporadas à função objetivo através de um parâmetro que penaliza qualquer violação das restrições. Para discutir a função penalidade, considere o seguinte problema com uma única restrição, $h(x) = 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{s.a.} & h(x) = 0 \end{array}$$

Suponha que este problema é substituído pelo seguinte problema irrestrito, onde $\mu > 0$ é um número grande.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) + \mu h^2(x) \\ \text{s.a.} & x \in E_n \end{array}$$

Intuitivamente pode-se perceber que uma solução ótima para o problema acima deve apresentar $h^2(x)$ próximo de zero, porque de outra maneira ter-se-ia provocado uma grande penalidade dada por $\mu h^2(x)$.

Agora considere o seguinte problema com uma única restrição de desigualdade, $g(x) \leq 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{s.a.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Percebe-se que a expressão $f(x) + \mu g^2(x)$ não é apropriada, uma vez que provocar-se-ia uma penalização quando $g(x) < 0$ ou $g(x) > 0$. É evidente que deseja-se penalizar apenas se o ponto x não é factível, isto é, quando $g(x) > 0$. Um problema irrestrito apropriado e equivalente é:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) + \mu \max\{0, g(x)\} \\ \text{s.a.} & x \in E_n \end{array}$$

Se $g(x) \leq 0$, tem-se que, $\max\{0, g(x)\} = 0$, e nenhuma penalidade é provocada. De outro modo, se $g(x) > 0$, então, $\max\{0, g(x)\} > 0$, e o termo penalidade $\mu g(x)$ é introduzido.

Em geral, uma função penalidade apropriada deve atuar apenas para pontos inactíveis e não em pontos factíveis. Se as restrições são da forma $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1, \dots, m$, e

$h_i(x) = 0$ para $i = 1, \dots, l$, então uma *função penalidade* α apropriada seria definida por

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m \phi[g_i(x)] + \sum_{i=1}^l \psi[h_i(x)] \quad (3.1)$$

onde ϕ e ψ são funções contínuas satisfazendo as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= 0 & \text{se } y \leq 0 & \quad \text{e} \quad \phi(y) > 0 & \text{se } y > 0 \\ \psi(y) &= 0 & \text{se } y = 0 & \quad \text{e} \quad \psi(y) > 0 & \text{se } y \neq 0 \end{aligned}$$

Tipicamente, ϕ e ψ são da forma:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= [\max\{0, y\}]^p \\ \psi(y) &= |y|^p \end{aligned}$$

onde p é um inteiro positivo. Assim, a *função penalidade* α é usualmente da forma

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^p + \sum_{i=1}^l |h_i(x)|^p$$

Na literatura, refere-se à função $f(x) + \mu\alpha(x)$ como *função auxiliar*.

3.3.1 Interpretação Geométrica das Funções Penalidades

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Tem-se que o ponto ótimo é dado por $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e o valor da função objetivo por $\frac{1}{2}$. Considere agora o seguinte problema penalidade, para $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_1 + x_2 - 1)^2 \\ \text{s.a.} \quad & (x_1, x_2) \in E_2 \end{aligned}$$

Percebe-se que para qualquer valor positivo de μ , a função objetivo é convexa. Logo, a condição necessária e suficiente de otimalidade é que o gradiente da função objetivo seja nulo, isto é:

$$\begin{aligned} x_1 + \mu(x_1 + x_2 - 1) &= 0 \\ x_2 + \mu(x_1 + x_2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema de equações obtém-se $x_1 = x_2 = \frac{\mu}{2\mu+1}$. Deste modo a solução ótima do problema pode ser feita arbitrariamente próxima da solução do problema original através da escolha de um valor apropriado de μ .

Supondo que a restrição $h(x)$ seja perturbada de modo que $h(x) = \varepsilon$, isto é, $x_1 + x_2 - 1 = \varepsilon$. Teremos:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - 1 = \varepsilon \end{aligned}$$

Substituindo $x_2 = 1 + \varepsilon - x_1$ na função objetivo, o problema se reduz à minimização de $x_1^2 + (1 + \varepsilon - x_1)^2$. O ótimo ocorre quando a derivada é nula, ou seja $2x_1 - 2(1 + \varepsilon - x_1) = 0$. Portanto, para qualquer valor de ε , a solução ótima deste problema é dada por $x_1 = x_2 = \frac{1+\varepsilon}{2}$, sendo $\frac{(1+\varepsilon)^2}{2}$ o valor da função objetivo. Além disso, para qualquer valor de ε , o supremo do problema é igual a infinito. Portanto, dado um ponto $(x_1, x_2) \in E_2$ tal que $x_1 + x_2 - 1 = \varepsilon$, o seu valor objetivo está contido em $[\frac{(1+\varepsilon)^2}{2}, \infty]$. Na figura 3.2 é mostrado um conjunto $\{[h(x), f(x)] \mid x \in E_2\}$. O limitante inferior é dado pela parábola $\frac{(1+h)^2}{2} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{2}$. Para um dado $\mu > 0$, o problema penalidade é minimizar $f(x) + \mu h(x)^2$ sujeito a $x \in E_2$. O contorno $f + \mu h^2 = k$ é ilustrado no espaço (h, f) através de uma parábola tracejada. A interseção da parábola com o eixo f é igual a k . Assim, se $f + \mu h^2$ é minimizada, então a parábola deve-se deslocar para baixo, tanto quanto possível, de modo que ainda possua ao menos um ponto em comum com o conjunto achurado. Este processo continuará até que a parábola comece a tangenciar o conjunto achurado (ver figura 3.2). Percebe-se que para um valor de μ , o valor ótimo do problema penalidade é a interseção da parábola com o eixo f . Observe que a solução ótima ao problema penalidade é ligeiramente infactível, em relação ao problema original, pois no ponto de tangência tem-se $h \neq 0$. Além disso, o valor objetivo do problema penalidade é ligeiramente menor em relação ao valor ótimo primal. Note também que assim que o valor de μ é incrementado, a parábola $f + \mu h^2$ se torna íngreme, e o ponto de tangência se aproxima ao verdadeiro valor da solução do problema original.

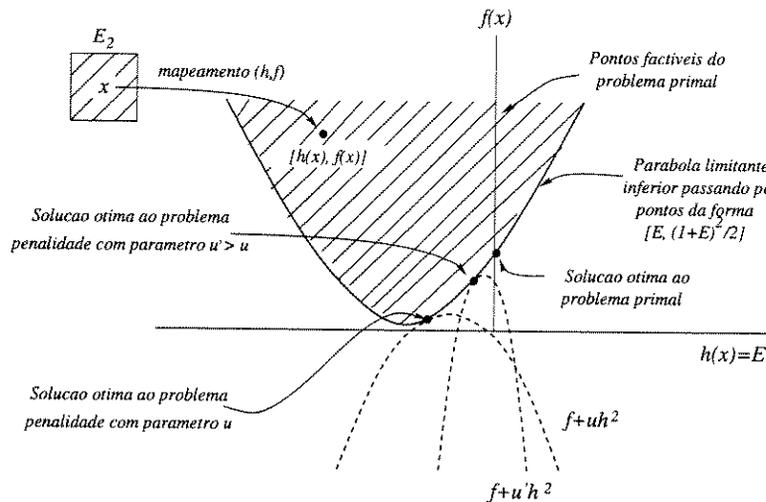


Figura 3.2: Geometria das funções penalidades no espaço (h, f) .

3.3.2 Problemas Não-Convexos

Quando as funções penalidades são aplicadas para resolver um problema convexo pode-se obter soluções arbitrariamente próximas da solução ótima do problema. A figura 3.3 ilustra um caso não-convexo, no qual a aproximação do Lagrangeano do dual pode falhar na obtenção uma solução ótima do problema primal devido à presença do gap de dualidade. Uma vez que as funções penalidades usam um suporte não-linear em oposição ao suporte linear usado pela função dual (ver figura 3.3), as funções penalidades podem deslocar-se através da fronteira do conjunto achurado e chegar arbitrariamente próximo da solução

ótima do problema original, desde que, naturalmente, um parâmetro penalidade de valor apropriado seja utilizado.

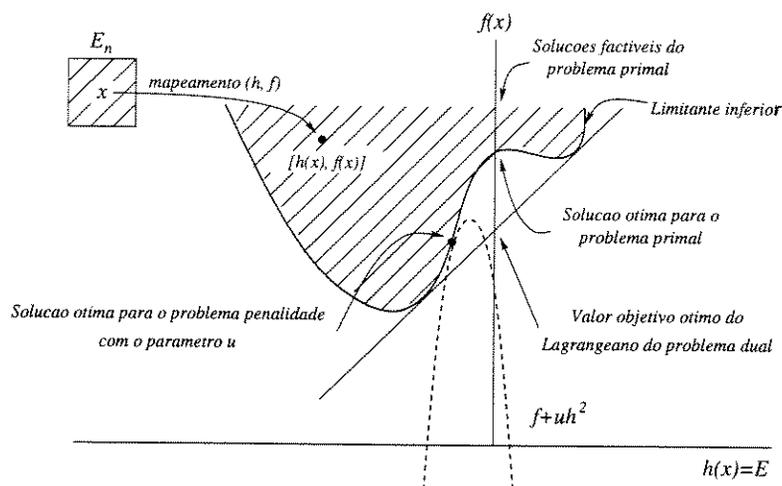


Figura 3.3: Funções penalidades e problemas não-convexos.

3.4 Método da Função Penalidade

A seguir, apresenta-se um resultado importante que justifica o uso das funções penalidades como um método para resolver problemas irrestritos. Considere os seguintes problemas primal e penalidade.

3.4.1 Problema Primal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{s.a.} && g(x) \leq 0 \\ &&& h(x) = 0 \\ &&& x \in \Omega \end{aligned}$$

onde g é um vetor função com componentes g_1, \dots, g_m e h é um vetor função com componentes h_1, \dots, h_l . Aqui $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_l$ são funções contínuas sobre E_n , e Ω é um conjunto não-vazio em E_n . O conjunto Ω representa uma restrição simples, que pode ser facilmente explicitada, como os limites superiores e inferiores das variáveis.

3.4.2 Problema Penalidade

Seja α uma função contínua do tipo (3.1). A função penalidade tenta aproximar a solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \theta(\mu) \\ &\text{s.a.} && \mu \geq 0 \end{aligned}$$

onde $\theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu\alpha(x) : x \in \Omega\}$. O principal teorema desta seção mostra que

$$\inf\{f(x) : x \in \Omega, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} = \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta(\mu)$$

Partindo deste resultado, percebe-se que pode-se obter valores da função primal arbitrariamente próximos do ótimo através do cálculo de $\theta(\mu)$ para um valor de μ suficientemente grande. Este resultado é estabelecido no Teorema 3.3. Antes é necessário apresentar o seguinte lema.

Lema 3.1 *Suponha que $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_l$ sejam funções contínuas sobre E_n , e seja Ω um conjunto não-vazio em E_n . Seja α uma função contínua sobre E_n do tipo (3.1), e suponha que para cada μ , exista um $x_\mu \in \Omega$ de modo tal que $\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu\alpha(x_\mu)$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\inf\{f(x) : x \in \Omega, g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \geq \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu)$ onde $\theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu\alpha(x) : x \in \Omega\}$.
2. $f(x_\mu)$ é uma função não-decrescente de $\mu \geq 0$, $\theta(\mu)$ é uma função não-decrescente de μ , e $\alpha(x_\mu)$ é uma função não-crescente de μ .

Teorema 3.3 *Considere o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{s.a. } \quad g_i(x) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad h_i(x) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, l \\ & \quad \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

onde $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_l$ são funções contínuas sobre E_n , e Ω é um conjunto não-vazio em E_n . Suponha que o problema tem solução factível, e seja α uma função contínua do tipo (3.1). Além disso, suponha que para cada μ , existe uma solução $x_\mu \in \Omega$, e que a sequência $\{x_\mu\}$ está contida em um subconjunto compacto de Ω . Então

$$\inf\{f(x) : g(x) \leq 0, h(x) = 0, x \in \Omega\} = \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta(\mu)$$

onde $\theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu\alpha(x) : x \in \Omega\} = f(x_\mu) + \mu\alpha(x_\mu)$. Além disso, o limite \bar{x} de qualquer subsequência convergente de $\{x_\mu\}$ é uma solução ótima do problema original, e $\mu\alpha(x_\mu) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow \infty$.

Corolário 3.1 *Se $\alpha(x_\mu) = 0$ para algum μ , então x_μ é uma solução ótima do problema original.*

Demonstração

Se $\alpha(x_\mu) = 0$, então x_μ é uma solução factível ao problema. Além disso, desde que

$$\inf\{f(x) : g(x) \leq 0, h(x) = 0, x \in \Omega\} \geq \theta(x_\mu) = f(x_\mu) + \mu\alpha(x_\mu) = f(x_\mu)$$

conclui-se imediatamente que x_μ é uma solução ótima. \square

Observe a importância de assumir que $\{x_\mu\}$ está contida num subconjunto compacto em Ω . Obviamente esta premissa é verdadeira se Ω é compacto. Sem esta premissa, é possível que os valores ótimos dos problemas primal e penalidade não sejam iguais.

Do teorema 3.3 segue-se que a solução ótima x_μ do problema de minimizar $f(x) + \mu\alpha(x)$ sujeito a $x \in \Omega$ pode ser feita arbitrariamente próxima à região factível através da seleção de um valor alto para μ . Além disso, através da escolha de μ , o valor de $f(x_\mu) + \mu\alpha(x_\mu)$ pode ser feito arbitrariamente próximo do valor ótimo do problema primal.

3.4.3 Resumo do Método da Função Penalidade

Como resultado das dificuldades associadas aos altos valores do parâmetro penalidade, muitos algoritmos utilizam uma sequência crescente de parâmetros penalidades. A cada novo valor do parâmetro, um novo problema irrestrito é resolvido partindo da solução ótima correspondente ao valor do parâmetro obtido previamente.

A seguir, apresenta-se um resumo do método da função penalidade para resolver o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$, e $x \in \Omega$. A função penalidade α usada é da forma especificada em (3.1). Este método não impõe nenhuma restrição sobre f , g , e h , com exceção da continuidade. Contudo, pode ser efetivamente usado apenas naqueles casos onde uma rotina eficiente está disponível para resolver o problema especificado no passo 1.

Inicialização: Defina o critério de parada $\varepsilon > 0$. Escolha um ponto inicial x_1 , um parâmetro penalidade $\mu_1 > 0$, e um escalar $\beta > 1$. Faça $k = 1$ e vá para o procedimento principal.

Procedimento Principal

1. Partindo de x_k , resolva o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) + \mu_k \alpha(x) \\ \text{s.a.} & x \in \Omega \end{array}$$

Seja x_{k+1} uma solução ótima, e vá para o passo 2.

2. Se $\mu_k \alpha(x_{k+1}) < \varepsilon$, pare; caso contrário, faça $\mu_{k+1} = \beta \mu_k$, substitua k por $k + 1$, e vá para o passo 1.

3.4.4 Dificuldades Computacionais Associadas às Funções Penalidades

Através da seleção de um valor suficientemente grande para μ , a solução do problema de penalidade pode ser feita arbitrariamente próxima da solução ótima do problema original. Contudo, escolhendo-se um valor muito grande para μ e tentando resolver o problema de penalidade, pode-se introduzir algumas dificuldades computacionais associadas ao mau condicionamento do problema resultante. Para grandes valores de μ , maior ênfase é colocada na factibilidade, e mais iterações são necessárias para deslocar-se rapidamente em torno a um ponto factível na otimização irrestrita. Ainda, este ponto pode estar afastado em relação ao ponto ótimo. Assim, há risco de uma finalização prematura do algoritmo. Para ilustrar, suponha que durante o processo de otimização atingimos um ponto factível com $\alpha(x) = 0$. Especialmente na presença de restrições de igualdade não-lineares, um deslocamento de x ao longo da direção d pode resultar em um ponto infactível ou pontos factíveis com valores objetivos muito elevados. Em ambos casos, o valor da função auxiliar $f(x + \lambda d) + \mu \alpha(x + \lambda d)$ é maior do que $f(x) + \mu \alpha(x)$ para valores não infinitesimais do passo λ . Isto é obviamente no pior caso. No caso anterior $\alpha(x + \lambda d) > 0$, desde que μ é muito grande, então, qualquer redução em $f(x + \lambda d)$ sobre $f(x)$ será usualmente compensada pelo termo $\mu \alpha(x + \lambda d)$. Assim, uma melhora somente será possível se o comprimento do passo λ for muito pequeno, de modo a que o termo $\mu \alpha(x + \lambda d)$ seja pequeno, não obstante sabermos que μ é grande. Neste caso uma melhora em $f(x + \lambda d)$ sobre $f(x)$ pode compensar o fato de que

$\mu\alpha(x + \lambda d) > 0$. A necessidade de utilizar um passo muito pequeno pode resultar numa convergência lenta e uma finalização prematura da otimização.

3.5 Método da Função Barreira

Semelhantes às funções penalidades, as funções barreira são também utilizadas para transformar um problema restrito em um problema irrestrito ou em uma sequência de problemas irrestritos. Estas funções formam uma barreira em torno da região factível. Se uma solução ótima ocorre no limite da região factível, o algoritmo se desloca do interior até o limite da região. A seguir formula-se os problemas primal e barreira.

3.5.1 Problema Primal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{s.a.} && g(x) \leq 0 \\ &&& x \in \Omega \end{aligned}$$

onde g é um vetor função cujas componentes são g_1, \dots, g_m . Aqui, f, g_1, \dots, g_m são funções contínuas sobre E_n , e Ω é um conjunto não-vazio em E_n . Note a ausência das restrições de igualdade. Se uma restrição do tipo $h(x) = 0$ fosse introduzida, então os métodos utilizando funções barreira teriam requerido que o interior do conjunto $\{x : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ seja não-vazio, o que é obviamente impossível.

3.5.2 Problema Barreira

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \theta(\mu) \\ &\text{s.a.} && \mu \leq 0 \end{aligned}$$

onde $\theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in \Omega\}$. Aqui B é uma *função barreira* não-negativa e contínua sobre a região $\{x : g(x) \leq 0\}$, tendendo ao infinito quando a fronteira da região $\{x : g(x) \leq 0\}$ é atingida a partir da região interior. Mais especificamente, a função barreira B é definida como

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \phi[g_i(x)] \tag{3.2}$$

onde ϕ é uma função monovariável e contínua sobre $\{y : y < 0\}$ que satisfaz

$$\phi(y) \leq 0 \quad \text{se } y < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(y) = \infty$$

Assim, uma função barreira típica é da forma:

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{-1}{g_i(x)}$$

A função $f(x) + \mu B(x)$ é denominada de *função auxiliar*. Idealmente é conveniente que a função B tenha valor zero sobre a região $\{x : g(x) < 0\}$ e valor infinito na fronteira.

Isto garante a permanência na região $\{x : g(x) \leq 0\}$, se o problema de minimização fosse inicializado num ponto interior. Contudo, esta discontinuidade traz sérias dificuldades para qualquer rotina computacional. Por esta razão, esta construção ideal de B é substituída por exigências mais realísticas, como a de que B seja não-negativa e contínua sobre a região $\{x : g(x) < 0\}$ e que se aproxime de infinito a medida em que o ponto interior se aproxima da fronteira. Perceba que μB se aproxima da função barreira ideal quando μ se aproxima de zero. Dado $\mu > 0$, avaliando $\theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in \Omega\}$ parece não simplificar em nada a resolução do problema original por causa da presença da restrição $g(x) < 0$. Contudo, como resultado da estrutura de B , se começarmos a otimização de um ponto interior da região $S = \{x : g(x) < 0\} \cap \Omega$, e ignorarmos a restrição $g(x) < 0$, atingiremos um ponto ótimo em S . Este resultado decorre do fato de que quando nos aproximamos da fronteira de $\{x : g(x) \leq 0\}$ a partir de um ponto interior, B tende a infinito, o qual garante a permanência na região S .

Lema 3.2 *Sejam f, g_1, \dots, g_m funções contínuas sobre E_n , e seja Ω um conjunto não-vazio e fechado em E_n . Suponha que o conjunto $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$ seja não-vazio e que B é uma função barreira e contínua sobre $\{x : g(x) < 0\}$ satisfazendo (3.2). Além disto, suponha que para qualquer $\mu > 0$ dado, se $\{x_k\}$ em Ω satisfaz $g(x_k) < 0$ e $f(x_k) + \mu B(x_k) \rightarrow \theta(\mu)$, então $\{x_k\}$ possui uma subsequência convergente¹. Neste caso,*

1. Para cada $\mu > 0$, existe um $x_\mu \in \Omega$ com $g(x_\mu) < 0$ tal que

$$\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu B(x_\mu) = \inf\{f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in \Omega\}$$

2. $\inf\{f(x) : g(x) \leq 0, x \in \Omega\} \leq \inf\{\theta(\mu) : \mu > 0\}$
3. Para $\mu > 0$, $f(x_\mu)$ e $\theta(\mu)$ são funções não-decrescentes de μ , e $B(x_\mu)$ é uma função não-decrescente de μ .

Teorema 3.4 *Sejam $f : E_n \rightarrow E_1$, e $g : E_n \rightarrow E_m$ funções contínuas, e seja Ω um conjunto fechado e não-vazio em E_n . Suponha que o conjunto $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$ é não-vazio. Além disto, suponha que a solução do problema primal de minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0, x \in \Omega$ possua uma solução ótima \bar{x} com a seguinte propriedade: dada qualquer vizinhança N em torno de \bar{x} , existe um $x \in \Omega \cap N$ tal que $g(x) < 0$. Então*

$$\min\{f(x) : g(x) \leq 0, x \in \Omega\} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \theta(\mu) = \inf_{\mu > 0} \theta(\mu)$$

Fazendo $\theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu B(x_\mu)$, onde $x_\mu \in \Omega$ e $g(x_\mu) < 0$, então o limite de qualquer subsequência convergente de $\{x_\mu\}$ é uma solução ótima do problema primal, e além disso $\mu B(x_\mu) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 0^+$.

3.5.3 Resumo do Método da Função Barreira

A seguir, mostra-se um esquema usando funções barreira para problemas de programação não-lineares da forma minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$ e $x \in \Omega$. A função barreira a ser usada satisfaz a relação dada por (3.2).

¹Esta premissa é verdadeira se $\{x \in \Omega : g(x) \leq 0\}$ é compacto.

²As premissas sob as quais o ponto x_μ existe são dadas no Lema 3.2.

O problema começa no passo 1, mostrado a seguir, incorporando a restrição $g(x) < 0$. Se $g(x_k) < 0$, e como a função barreira se aproxima de infinito quando a fronteira da região $G = \{x : g(x) < 0\}$ é atingida, então a restrição $g(x) < 0$ pode ser ignorada, de modo que um técnica de otimização irrestrita pode ser utilizada para encontrar um ponto ótimo $x_{k+1} \in G$. Contudo, uma vez que a maioria dos métodos de busca unidimensional utilizam passos discretos, ao se aproximarem da fronteira, um passo a frente poderia conduzir a um ponto fora da região factível, onde o valor da função B é um número negativo grande. Mesmo assim, o problema pode ser tratado como um problema de otimização irrestrita apenas se fazendo uma verificação explícita da factibilidade.

Inicialização : Defina o critério de parada $\varepsilon > 0$, e escolha um ponto $x_1 \in \Omega$ com $g(x_1) < 0$. Faça $\mu_1 > 0$, $\beta \in (0, 1)$, faça $k = 1$, e vá para o procedimento principal.

Procedimento Principal

1. Partindo de x_k , resolva o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) + \mu_k B(x) \\ \text{s.a.} & g(x) < 0 \\ & x \in \Omega \end{array}$$

Seja x_{k+1} uma solução ótima, e vá para o passo 2.

2. Se $\mu_k B(x_{k+1}) < \varepsilon$, pare; caso contrário, faça $\mu_{k+1} = \beta \mu_k$, substitua k por $k + 1$, e repita o passo 1.

3.5.4 Dificuldades Computacionais Associadas às Funções Barreira

A utilização das funções barreira para a resolução de problemas de programação não-lineares envolve também algumas dificuldades computacionais. Primeiro, a busca deve começar em um ponto $x \in \Omega$ com $g(x) < 0$. Para alguns problemas, a determinação destes pontos não é uma tarefa simples. Também por causa da estrutura da função barreira B , e porque para pequenos valores do parâmetro μ , a maioria das técnicas de busca unidimensional pode apresentar sérios problemas de condicionamento numérico durante a resolução do problema de minimização: $\min f(x) + \mu B(x)$ sobre $x \in \Omega$, especialmente quando a fronteira da região $\{x : g(x) \leq 0\}$ é atingida. De fato, quando a fronteira é atingida, e desde que as técnicas de busca unidimensional utilizam passos discretos, um passo a frente poderá sair fora da região $\{x : g(x) \leq 0\}$ indicando um decréscimo no valor de $f(x) + \mu B(x)$. Assim, uma verificação explícita dos valores da função restrição g é necessária para garantir a permanência do problema na região factível.

3.6 Algoritmo de Rosenbrock

Como foi originalmente proposto, o método de Rosenbrock não utilizava a denominada busca unidimensional e sim um mecanismo de passos discretos ao longo das direções de busca. No presente trabalho utiliza-se uma versão contínua do método utilizando a busca unidimensional. Para cada iteração, o algoritmo procura iterativamente ao longo de n

direções ortogonais. Quando um ponto é atingido no fim da cada iteração, um novo conjunto de vetores ortogonais é construído. Na figura 3.4, as novas direções são denotadas por \bar{d}_1 e \bar{d}_2 .

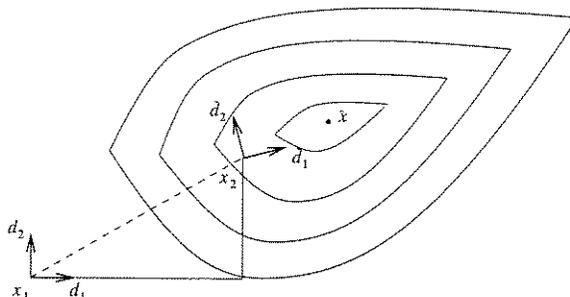


Figura 3.4: Construção das novas direções de busca no algoritmo de Rosenbrock.

3.6.1 Construção das Direções de Busca

Sejam d_1, \dots, d_n vetores linearmente independentes, cada um com norma unitária. Além disso, suponha que estes vetores são mutuamente ortogonais, isto é $d_i^T d_j = 0$ para $i \neq j$. Partindo do vetor corrente x_k , a função objetivo f é minimizada ao longo de cada uma das direções sequencialmente, resultando no ponto x_{k+1} . Em particular, $x_{k+1} - x_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j d_j$, onde λ_j é a distância percorrida ao longo de d_j . A nova coleção de direções $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$ é determinada pelo algoritmo de Gram-Schmidt, resumido a seguir.

$$a_j = \begin{cases} d_j & \text{se } \lambda_j = 0 \\ \sum_{i=j}^n \lambda_i d_i & \text{se } \lambda_j \neq 0 \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} a_j & j = 1 \\ a_j - \sum_{i=1}^{j-1} (a_j^T \bar{d}_i) \bar{d}_i & j \geq 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\bar{d}_j = \frac{b_j}{\|b_j\|}$$

O Lema 3.3 estabelece que as novas direções geradas pelo Algoritmo de Rosenbrock são de fato ortogonais.

Lema 3.3 *Suponha que os vetores d_1, \dots, d_n sejam mutuamente ortogonais. Então as direções $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$ definidas por (3.3) são também mutuamente ortogonais para qualquer conjunto $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Além disso, se $\lambda_i = 0$ então $\bar{d}_j = d_j$.*

3.6.2 Resumo do Algoritmo de Rosenbrock com Busca Unidimensional

A seguir, apresenta-se um resumo do Método de Rosenbrock usando busca unidimensional para a minimização de uma função f de várias variáveis. Como se demonstrará brevemente, se f é diferenciável, então o método converge para um ponto com gradiente nulo.

Procedimento Principal

1. Seja λ_j uma solução ótima do problema de minimizar $f(y_j + \lambda d_j)$ sujeito a $\lambda_j \in E_1$, e faça $y_{j+1} = y_j + \lambda_j d_j$. Se $j < n$, substitua j por $j + 1$, e repita o passo 1. Senão, vá para o passo 2.
2. Faça $x_{k+1} = y_{n+1}$. Se $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$, então pare; senão, faça $y_1 = x_{k+1}$, substitua k por $k + 1$, faça $j = 1$, e vá para o passo 3.
3. Obtenha um novo conjunto de direções de busca ortogonais através do algoritmo de Gram-Schmith. Denote estas novas direções por d_1, \dots, d_n e repita o passo 1.

3.6.3 Convergência do Método de Rosenbrock

Observa-se que, de acordo com o Lema 3.3, as direções de busca utilizadas pelo método são mutuamente ortogonais, e cada uma delas possui norma unitária. Assim, para uma dada iteração, a matriz D denotando as direções de busca, satisfaz $D^T D = I$. Assim, $\det[D] = 1$, satisfazendo a primeira proposição do Teorema 3.1. Por este teorema, conclui-se que o método de Rosenbrock usando busca unidimensional converge para um ponto estacionário se as seguintes proposições são verdadeiras:

1. O mínimo de f ao longo de qualquer direção é único.
2. A sequência de pontos gerados pelo algoritmo está contida num subconjunto compacto de E_n .

3.6.4 Método da Seção Áurea

Método a ser utilizado nas rotinas de busca unidimensional. Este método é utilizado na minimização de funções estritamente quasi-convexas.

Na iteração k , seja o intervalo de incerteza $[a_k, b_k]$. Pelo Teorema 3.2, o novo intervalo de incerteza $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ é dado por $[\lambda_k, b_k]$, se $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ e por $[a_k, \mu_k]$, se $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$. Os pontos λ_k e μ_k são selecionados como descrito a seguir.

1. O tamanho do novo intervalo de incerteza $b_{k+1} - a_{k+1}$ não depende do resultado da k -ésima iteração, isto é, se $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ ou se $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$. Contudo, deve-se ter $b_k - \lambda_k = \mu_k - a_k$. Assim, se λ_k é da forma

$$\lambda_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k) \quad (3.4)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, então μ_k deve ser da forma

$$\mu_k = a_k + \alpha(b_k - a_k) \quad (3.5)$$

logo

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha(b_k - a_k)$$

2. Como λ_{k+1} e μ_{k+1} são selecionados visando a nova iteração, λ_{k+1} coincide com μ_k ou μ_{k+1} coincide com λ_k . Se isto pode ser realizado, então na iteração $k + 1$, apenas uma observação adicional é necessária. Para ilustrar, considere a figura 3.5 e as seguintes duas situações.

Caso 1: $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$

Neste caso, $a_{k+1} = \lambda_k$ e $b_{k+1} = b_k$. De modo a satisfazer $\lambda_{k+1} = \mu_k$, e aplicando (3.4) com k substituído por $k + 1$, obtêm-se

$$\mu_k = \lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1}) = \lambda_k + (1 - \alpha)(b_k - \lambda_k)$$

Substituindo as expressões de λ_k e μ_k dadas por (3.4) e (3.5) na equação acima, obtêm-se $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.

Caso 2: $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$

Neste caso, $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = \mu_k$. De modo a satisfazer $\mu_{k+1} = \lambda_k$, e aplicando (3.5) com k substituído por $k + 1$, obtêm-se

$$\lambda_k = \mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \alpha(\mu_k - a_k)$$

Considerando as expressões (3.4) e (3.5) na expressão acima, obtêm-se a equação inicial $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.

As raízes da equação $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ são $\alpha \cong 0.618$ e $\alpha \cong -1.618$. Como α deve pertencer ao intervalo $(0,1)$ então $\alpha \cong 0.618$. Para resumir, se na iteração k , μ_k e λ_k são escolhidos de acordo com (3.4) e (3.5), onde $\alpha = 0.618$, então o intervalo de incerteza é reduzido pelo fator 0.618. Na primeira iteração, duas avaliações são necessárias para λ_1 e μ_1 , mais para cada iteração subsequente, apenas uma avaliação será necessária, uma vez que $\lambda_{k+1} = \mu_k$ ou $\mu_{k+1} = \lambda_k$.

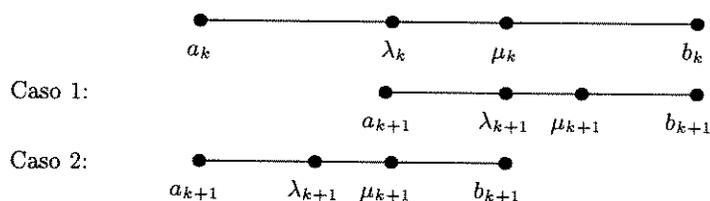


Figura 3.5: Ilustração das regras do método da Seção Áurea.

Resumo do Método da Seção Áurea

A seguir, apresenta-se um resumo do método da seção áurea para minimização de funções estritamente quase-convexas sobre o intervalo $[a_1, b_1]$.

Inicialização: Escolha um comprimento apropriado para o intervalo final de incerteza $l > 0$. Defina $[a_1, b_1]$ como o intervalo inicial de incerteza, e faça $\lambda_1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1)$ e $\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$, onde $\alpha = 0,618$. Avalie $\theta(\lambda_1)$ e $\theta(\mu_1)$, faça $k = 1$, e vá para o procedimento principal.

Procedimento Principal

1. Se $b_k - a_k < l$, pare; a solução ótima se encontra no intervalo $[a_k, b_k]$. Senão, se $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$, vá para o passo 2, e se $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$, vá para o passo 3.
2. Faça $a_{k+1} = \lambda_k$ e $b_{k+1} = b_k$. Além disso, faça $\lambda_{k+1} = \mu_k$ e $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$. Avalie $\theta(\mu_{k+1})$, e vá para o passo 4.
3. Faça $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = \mu_k$. Além disso, faça $\mu_{k+1} = \lambda_k$ e $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$. Avalie $\theta(\lambda_{k+1})$, e vá para o passo 4.
4. Substitua k por $k + 1$, e vá para o passo 1.

3.7 Problema Geral de Projeto Através de Otimização Sequencial Irrestrita

Seja a formulação do problema geral de projeto utilizando as técnicas de otimização sequencial irrestrita. As equações (2.55) e (2.56) podem ser reescritas como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \Phi(H) \\ \text{s.a.} & \Psi(H) \leq 0 \end{array} \quad (3.6)$$

onde $H = T_1 + T_2QT_3$ sendo que $H \in \mathcal{H}$, e

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \tilde{\Phi}(Q) \\ \text{s.a.} & \tilde{\Psi}(Q) \leq 0 \end{array} \quad (3.7)$$

onde $Q \in M(S)$.

Na elaboração desta dissertação define-se o parâmetro Q a partir da seguinte estrutura:

$$Q_{n_q}(x, s) = \frac{x_1 s^{n_q-1} + x_2 s^{n_q-2} + \dots + x_{n_q-1} s + x_{n_q}}{s^{n_q} + x_{n_q+1} s^{n_q-1} + \dots + x_{2n_q-1} s + x_{2n_q}} \quad (3.8)$$

onde n_q é definida como sendo a ordem do parâmetro Q , com $n_q \in \mathbb{N}^3$, e x_i os coeficientes da equação de transferência do mesmo.

Considerando esta definição, o problema geral de projeto através de otimização pode ser formulado como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \tilde{\Phi}(x) \\ \text{s.a.} & \tilde{\Psi}(x) \leq 0 \end{array} \quad (3.9)$$

onde $x \in \Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n_q}$, e satisfaz certas propriedades estabelecidas para cada valor de n_q a fim de garantir $Q \in M(S)$. Ao garantir a estabilidade de Q assegura-se também

³Conjunto dos números naturais.

a estabilidade dos controladores obtidos via otimização. Estas propriedades estão baseadas no critério de Routh-Hurwitz ([Oga90]) para sistemas estáveis.

No presente trabalho define-se os seguintes subconjuntos:

- Para $n_q = 1$, deve-se ter $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$.
- Para $n_q = 2$, deve-se ter $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 > 0, x_4 > 0\}$.

Finalmente, tem-se a formulação do problema geral de projeto através de otimização sequencial irrestrita, como sendo

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \tilde{\Phi}(x) + \mu \tilde{\Psi}(x) \\ & && x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde μ é o denominado parâmetro penalidade.

Capítulo 4

Redução de Ordem Através de Transformações de Similaridade

4.1 Introdução

O grau dos controladores está diretamente relacionado à ordem do sistema a ser controlado, isto é, quanto maior complexidade do sistema e de suas especificações de desempenho, maior a complexidade do controlador resultante.

Os denominados controladores de ordem reduzida apresentam vantagens em relação aos controladores nominais devido ao fato de serem de fácil implementação, supervisão e manutenção.

Diversos métodos de redução de ordem tem sido abordados na literatura técnica. A redução de ordem apresenta como principal desvantagem a de que, uma vez obtido o controlador de ordem reduzida, é necessário avaliar o projeto para verificar se proporciona um desempenho adequado ou inadequado ao sistema em malha fechada.

Para o projeto de controladores, um limite inferior da ordem de um controlador estabilizante (dinâmico) é derivado da alocação arbitrária de pólos. Não obstante, o problema de estabilização para ordens reduzidas, ainda é um problema amplamente aberto para pesquisas e todos os resultados existentes proporcionam apenas condições suficientes para a existência de controladores estabilizantes de uma certa ordem.

Uma alternativa seria definir o problema do projeto de controlador de ordem reduzida propriamente dito. Nesta tese apresenta-se um método baseado em uma aproximação construtiva com condições suficientes para resolver este problema. Usa-se a Parametrização Q de todos os controladores estabilizantes de menor ordem possível (internamente), os menores em relação ao algoritmo a ser usado.

4.2 Condições Suficientes para Redução de Ordem

Vamos considerar a configuração de realimentação da figura 4.1, onde P é a planta a ser controlada e K é um controlador a ser projetado para proporcionar uma estabilização interna do sistema.

Sem perda de generalidade assume-se que P é mínima, estritamente própria e possui a

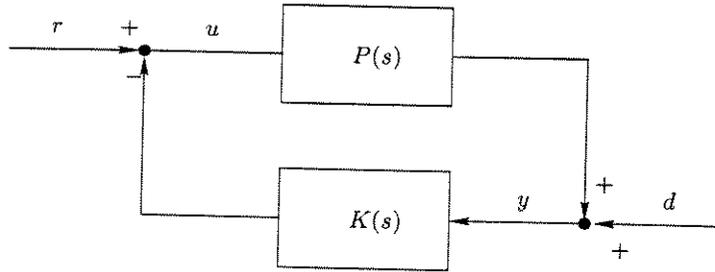


Figura 4.1: Diagrama para estabilidade interna.

seguinte realização no espaço de estados

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (4.1)$$

onde as dimensões das matrizes (A, B, C) são $n \times n, n \times m$, e $l \times n$, respectivamente. A matriz C é assumida como sendo de rank completo em relação às linhas.

Além disso, P possui a seguinte fatoração duplamente copríma

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (4.2)$$

e sejam X, Y, \tilde{X} , e \tilde{Y} satisfazendo a identidade de Bezout, isto é

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & -\tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = I \quad (4.3)$$

onde as matrizes $(N, M, \tilde{N}, \tilde{M}, X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y})$ pertencem ao $M(S)$. As matrizes (N, M, X, Y) podem ser representadas, cada uma delas no espaço de estados, através da seleção das matrizes reais F e L de modo que $A + BF$ e $A + LC$ sejam estáveis, da seguinte forma:

$$N(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (4.4)$$

$$M(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B \\ \hline F & I \end{array} \right] \quad (4.5)$$

$$X(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + BF & -L \\ \hline C & I \end{array} \right] \quad (4.6)$$

$$Y(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + BF & -L \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (4.7)$$

O conjunto de todos os controladores estabilizantes para uma dada planta $P(s)$ pode ser parametrizado por

$$K = -(Y - MQ)(X - NQ)^{-1}, \quad \text{para } Q \in M(S) \quad (4.8)$$

Admita que Q tenha a seguinte realização no espaço de estados

$$Q(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right] \quad (4.9)$$

com A_Q estável e onde as dimensões das matrizes (A_Q, B_Q, C_Q, D_Q) são $n_q \times n_q, n_q \times l, m \times n_q$ e $m \times l$ respectivamente.

Substituindo as equações (4.4)-(4.7) e (4.9) na equação (4.8), e após realizar algumas operações matriciais obtém-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} K(s) &= \left[\begin{array}{cc|c} A + BF + LC + BD_Q C & BC_Q & L + BD_Q \\ B_Q C & A_Q & B_Q \\ \hline F + D_Q C & C_Q & D_Q \end{array} \right] \\ &:= \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para um determinado valor de n_q , obtêm-se a realização de um conjunto de controladores estabilizantes. Estas realizações não são necessariamente mínimas. Procura-se determinar um subconjunto para o qual algum número de modos são não-observáveis ou não-controláveis. Assim sendo, pode-se determinar um conjunto de controladores cuja ordem seja menor do que $n + n_q$. Uma maneira de se fazer isto é aplicando uma transformação de coordenadas de estados em (4.10) usando uma matriz não-singular da forma

$$T := \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ X & I \end{array} \right] \quad (4.11)$$

onde X é uma matriz a ser determinada. Utilizando esta matriz T obteremos uma nova realização de estados para $K = (TA_k T^{-1}, TB_k, C_k T^{-1}, D_k)$ dada por

$$K(s) := \left[\begin{array}{cc|c} K_{a11} & K_{a12} & K_{b1} \\ K_{a21} & XBC_Q + A_Q & XL + XBD_Q + B_Q \\ \hline K_{c1} & C_Q & D_Q \end{array} \right] \quad (4.12)$$

sendo

$$\begin{aligned} K_{a11} &= A + BF + LC + BD_Q C - BC_Q X \\ K_{a12} &= BC_Q \\ K_{a21} &= XA + XBF + XLC + XBD_Q C + B_Q C - XBC_Q X - A_Q X \\ K_{b1} &= L + BD_Q \\ K_{c1} &= F + D_Q C - C_Q X \end{aligned}$$

A realização (4.12) pode ser simplificada para obter-se o controlador de ordem n_q :

$$K_r(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_Q + XBC_Q & B_Q + XL + XBD_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right] \quad (4.13)$$

sempre que existir uma matriz X de dimensões $n_q \times n$ satisfazendo as seguintes equações matriciais

$$A_Q X - X(A + LC) - B_Q C = 0 \quad (4.14)$$

$$F + D_Q C - C_Q X = 0 \quad (4.15)$$

isto é, se $K_{a21} = 0$ e $K_{c1} = 0$. Observe que K_r em (4.13) possui ordem máxima n_q , a qual evidentemente é menor do que $(n + n_q)$ que seria a ordem formal de K em (4.12). A ordem formal é a ordem que o controlador possui quando não é realizado nenhum cancelamento de pólos ou zeros.

A equação (4.14) é conhecida como a equação de Silvester, e junto com a equação (4.15) são importantes na obtenção dos resultados deste capítulo. O problema de projeto de controladores estabilizantes de ordem reduzida foi transformado em um problema de determinar o menor valor de n_q (ordem de Q) de modo que o par de equações simultâneas (4.14) e (4.15) tenha uma solução $X \in \mathbb{R}^{n_q \times n}$.

4.3 Controlador Baseado no Observador de Ordem Reduzida

A seguir, descreve-se um método para projeto de controladores estabilizantes de ordem reduzida. Será mostrado que para algumas plantas, a ordem dos controladores pode ser menor ou igual a l , onde l é o número de saídas da planta.

4.3.1 Controladores de Ordem $(n - l)$

Um resultado conhecido da teoria de observadores é o referente à existência de observadores de ordem $(n - l)$ se o rank da matriz C é l . Assim sendo, consideraremos o caso especial no qual a ordem do parâmetro Q seja $(n - l)$.

Assumir que C apresenta a seguinte estrutura

$$C = \begin{bmatrix} I_l & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Particiona-se A como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde as matrizes $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ têm respectivamente as seguintes dimensões $l \times l$, $l \times (n - l)$, $(n - l) \times l$ e $(n - l) \times (n - l)$. De acordo com um resultado da teoria de observadores tem-se que (A_{22}, A_{12}) será completamente observável se o par (A, C) for completamente observável.

Assumir que as matrizes X e L apresentam a seguinte estrutura

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

e

$$L = \begin{bmatrix} L_1^T & L_2^T \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

onde as dimensões das matrizes X_1, X_2, L_1, L_2 são respectivamente $(n - l) \times l$, $(n - l) \times (n - l)$, $l \times l$ e $(n - l) \times l$.

Partindo da equação (4.14), obtêm-se o seguinte par de equações :

$$A_Q X_1 - \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & L_1 \\ A_{21} & L_2 \end{bmatrix} = B_Q \quad (4.20)$$

$$A_Q X_2 - \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.21)$$

O lema seguinte mostra a existência das matrizes X_1 e X_2 que resolvem a equação (4.21).

Lema 4.1 *Para qualquer matriz A_Q estável e com autovalores distintos, sempre existe uma matriz X_1 e uma matriz não-singular X_2 satisfazendo (4.21) para $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$.*

Demonstração

A equação (4.21) pode ser reescrita como

$$X_2 A_{22} + X_1 A_{12} = A_Q X_2 \quad (4.22)$$

Desde que o par (A_{22}, A_{12}) é completamente observável, os autovalores de $A_{22} + Y A_{12}$ podem ser arbitrariamente alocados através de uma seleção apropriada de Y . Em outras palavras, para qualquer matriz A_Q , estável e com autovalores distintos, sempre existe uma matriz Y e uma matriz não-singular W de modo que $A_{22} + Y A_{12} = W^{-1} A_Q W$. Comparando este resultado com a equação (4.22), é evidente que pode-se fazer $X_1 = WY$ e $X_2 = W$ como sendo as soluções de (4.22), e satisfazendo a condição da não-singularidade de X_2 . \square

A matriz B_Q pode ser obtida a partir da equação (4.20). Desde que a equação (4.15) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} C_Q & -D_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} = F \quad (4.23)$$

onde $\begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}$ é quadrada e tem rank completo, C_Q e D_Q podem ser calculados para qualquer $F := \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$, através de $C_Q = F_2 X_2^{-1}$ e $D_Q = -F_1 + F_2 X_2^{-1} X_1$.

Observe com relação ao Lema 4.1, que a matriz não-singular X_2 pode não ser única devido à relação de similaridade entre $(A_{22} + X_2^{-1} X_1 A_{12})$ e A_Q . Contudo, se estamos interessados apenas nos autovalores de A_Q e não na sua forma exata, então segue da prova do Lema 4.1 que existe uma matriz Y de modo que $A_{22} + Y A_{12}$ tenha os mesmos autovalores de A_Q . Neste caso, pode-se simplificar e fazer $A_Q = A_{22} + Y A_{12}$, e consequentemente, $X_2 = I$ e $X_1 = Y$.

Portanto, foi mostrado que sob a premissa de C possuir rank completo, sempre existirão controladores estabilizantes de ordem $(n - l)$, e que para a obtenção destes controladores, a única restrição é que F e L devem estabilizar $A + BF$ e $A + LC$, respectivamente.

4.3.2 Controladores de Ordem menor que $(n - l)$

Para alguns sistemas industriais, o número de estados da planta pode exceder em muito o número de saídas, isto é, $n \gg l$. Assim, os resultados anteriores nos levariam a obter controladores ainda de ordem elevada e portanto impraticáveis.

Nesta seção, explora-se a possibilidade de deduzir controladores estabilizantes de ordem menor do que $(n - l)$. Sabemos que para alguns sistemas, a ordem dos seus controladores estabilizantes pode ser menor ou igual a l , o número de saídas da planta.

Por conveniência, reescreve-se as equações (4.14) e (4.15) da seguinte maneira:

$$A_Q X - X(A + LC) = B_Q C \quad (4.24)$$

$$C_Q X - D_Q C = F \quad (4.25)$$

Admitir que o par (A, C) está representado na sua forma canônica observável, isto é, C é assumido com a estrutura mostrada em (4.16) e A está representada como mostrado a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ A_{v-1,1} & & \cdots & & & A_{v-1,v} \\ A_{v1} & A_{v2} & A_{v3} & A_{v4} & \cdots & A_{v,v} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

onde v é o denominado *índice de observabilidade* do par (A, C) , ver ([Chen84]), as matrizes $A_{i,i+1}$ apresentam rank de coluna cheio e são de dimensão $m_i \times m_{i+1}$ com $i = 1, \dots, v - 1$, e as matrizes $A_{i,i}$ são de dimensão $m_i \times m_i$ com $i = 1, \dots, v$. Os m_i com $i = 1, \dots, v$ são os denominados *índices conjugados de Kronecker* do par (A, C) , os quais satisfazem as seguintes relações $l = m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{v-1} \geq m_v$ e $m_1 + m_2 + \dots + m_v = n$. A forma (A, C) que satisfaz estas propriedades é denominada de *forma canônica ortogonal* e existem algoritmos numericamente estáveis para aproximar esta forma.

O lema seguinte deve ser utilizado na obtenção da solução de X que resolva a equação (4.24).

Lema 4.2 *Dado o par (A, C) completamente observável, cada par $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)$ para $i = 1, \dots, v - 1$, é completamente observável, sendo:*

$$\tilde{A}_i := \begin{bmatrix} A_{i+1,i+1} & A_{i+1,i+2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{i+2,i+1} & A_{i+2,i+2} & A_{i+2,i+3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{v-1,i+1} & & \cdots & & & A_{v-1,v} \\ A_{v,i+1} & A_{v,i+2} & A_{v,i+3} & A_{v,i+4} & \cdots & A_{v,v} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\tilde{C}_i := \begin{bmatrix} A_{i,i+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde as dimensões de \tilde{A}_i e \tilde{C}_i são respectivamente $(n - m_1 - m_2 - \dots - m_i) \times (n - m_1 - m_2 - \dots - m_i)$ e $m_i \times (n - m_1 - m_2 - \dots - m_i)$.

Demonstração

As conclusões podem ser demonstradas a partir da construção da matriz observabilidade de $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)$. No caso teremos $[\tilde{C}_i^T \tilde{A}_i^T \tilde{C}_i^T \dots (\tilde{A}_i^T)^{n-m_1-\dots-m_i-1} \tilde{C}_i^T]^T$ e então verificando se a matriz de observabilidade possui rank completo. \square

Tomando a equação (4.24) como base, trata-se de determinar uma solução X de rank completo. Esta solução deve apresentar o menor valor possível para n_q .

O Teorema 4.1 e o Corolário 1, os quais são apresentados a seguir, proporcionam os mecanismos para se determinar o menor valor de n_q .

Teorema 4.1 *A equação (4.24) possui uma solução X de rank de linha completo e de dimensões $m_v \times n$.*

Demonstração

Particiona-se a matriz L da seguinte maneira

$$L = \begin{bmatrix} L_1^T & L_2^T & \dots & L_v^T \end{bmatrix}^T \quad (4.29)$$

onde H_i é uma matriz de ordem $m_i \times l$ com $i = 1, \dots, v$. A matriz X é particionada da seguinte forma:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_v \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde X_i é uma matriz de ordem $m_v \times m_i$ com $i = 1, \dots, v$, definindo-se ainda

$$\tilde{X} := \begin{bmatrix} X_i & X_{i+1} & \dots & X_v \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Partindo da equação (4.24) obtemos o seguinte par de equações

$$A_Q X_1 - \begin{bmatrix} X_1 & \tilde{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} + L_1 \\ A_{21} + L_2 \\ \vdots \\ A_{v1} + L_v \end{bmatrix} = B_Q \quad (4.32)$$

$$A_Q \tilde{X}_2 - \begin{bmatrix} X_1 & \tilde{X}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{A}_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.33)$$

Para uma dada matriz A_Q estável, podemos obter a matriz B_Q diretamente da equação (4.32), uma vez determinadas as matrizes X_1 e X_2 . A determinação de X_1 e X_2 pode ser feita através da resolução da equação (4.33). Neste ponto podemos reescrever (4.33) da seguinte maneira

$$A_Q \tilde{X}_2 - \tilde{X}_2 \tilde{A}_1 = X_1 \tilde{C}_1 \quad (4.34)$$

isto é

$$A_Q \begin{bmatrix} X_2 & \tilde{X}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_2 & \tilde{X}_3 \end{bmatrix} \tilde{A}_1 = X_1 \tilde{C}_1 \quad (4.35)$$

Observe que a equação (4.35) apresenta a mesma estrutura que a equação (4.24). Assim sendo, podemos decompor (4.35) em duas como mostraremos a seguir:

$$A_Q X_2 - \begin{bmatrix} X_2 & \tilde{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} \\ A_{32} \\ \vdots \\ A_{v2} \end{bmatrix} = X_1 A_{12} \quad (4.36)$$

$$A_Q \tilde{X}_3 - \begin{bmatrix} X_2 & \tilde{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \\ \tilde{A}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

Uma vez que tenhamos os valores de X_2 e \tilde{X}_3 , o valor de X_1 poderá ser calculado da equação (4.36) desde que A_{12} seja de rank completo (coluna). A equação (4.37) pode ser analisada exatamente da mesma forma que a equação (4.33). Este processo dedutivo pode ser continuado até chegarmos nas expressões

$$A_Q X_v - \begin{bmatrix} X_{v-1} & \tilde{X}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_{v-1} \\ \tilde{A}_{v-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.38)$$

$$X_v A_{v,v} + X_{v-1} A_{v-1,v} = A_Q X_v \quad (4.39)$$

Como foi demonstrado no Lema 4.1, sempre podemos determinar uma matriz X_{v-1} e uma matriz não-singular X_v para qualquer matriz A_Q tal que

$$A_{v,v} + X_v^{-1} X_{v-1} A_{v-1,v} = X_v^{-1} A_Q X_v \quad (4.40)$$

desde que o par $(A_{v,v}, A_{v-1,v})$ seja observável.

A equação (4.40) é exatamente igual á (4.39), e através de cálculos regressivos, poderemos determinar $X_{v-2}, X_{v-3}, \dots, X_1$ e também B_Q . A solução X da equação (4.30) é de rank de linha completo, desde que X_v seja inversível. Deste modo completamos a prova. \square

A prova do Teorema 4.1 é na verdade um algoritmo computacional para resolver a equação (4.24). Existe uma liberdade na escolha das partes de X_i para $i = 1, \dots, v-2$ se $m_i > m_{i+1}$, e como foi destacado na seção anterior, pode-se fazer a seleção de X_v como sendo igual à matriz identidade.

Desde que o par $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)$ é observável, resultado obtido a partir do lema 4.2, segue-se o seguinte corolário.

Corolário 4.1 *Seja $n_q = m_v, m_v + m_{v-1}, \dots, n$, respectivamente; sempre existirá uma matriz X de rank completo de linha que resolve a equação (4.24).*

Retornando à equação (4.25). Suponha que a matriz X com dimensão $m_v \times n$, solução de (4.24), apresenta a seguinte estrutura

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{v-1} & I \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Admitamos que exista uma matriz não-singular T de dimensão $n \times n$ de tal modo que

$$\bar{X} = XT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Usando esta matriz T e aplicando uma transformação de similaridade às matrizes representativas da planta (A, B, C) tem-se

$$\bar{A} = T^{-1}AT \quad \bar{B} = T^{-1}B \quad \bar{C} = CT \quad (4.43)$$

Observe que $\bar{C} = C$, e que o par (\bar{A}, \bar{C}) permanece na sua forma canônica observável.

A equação (4.25) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} C_Q & -D_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = FT \quad (4.44)$$

Para a existência de $\begin{bmatrix} C_Q & -D_Q \end{bmatrix}$ satisfazendo (4.44), deve-se ter $\bar{F} = FT$ com a seguinte estrutura:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{F}_v \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Deve-se ter F que estabilize $A + BF$ ou equivalentemente \bar{F} que estabilize $\bar{A} + \bar{B}\bar{F}$. Assim, se existem \bar{F} 's na forma dada por (4.45) que estabilizam $\bar{A} + \bar{B}\bar{F}$, então pode-se determinar C_Q e D_Q satisfazendo a equação (4.44). Consequentemente, tem-se um controlador estabilizante de ordem menor ou igual a m_v , como é formalmente estabelecido pelo Teorema 4.2.

Teorema 4.2 *O sistema (A, B, C) possui controladores estabilizantes de ordem menor ou igual a m_v , se existe um ganho de realimentação estabilizante \bar{F} com a estrutura dada em (4.45) para o par (\bar{A}, \bar{C}) descritos na equação (4.43).*

Observe que na construção dos controladores estabilizantes existe liberdade quanto a escolha da matriz L . Se a condição dada pelo Teorema 4.2 não é satisfeita, então pode-se utilizar o Corolário 4.1 sucessivamente até obter-se um controlador de ordem “reduzida”. Primeiramente tentaria-se determinar um controlador estabilizante de ordem $(m_v + m_{v-1})$. Matrizes de realimentação de estados de estruturas similares às dadas em (4.45) são procuradas novamente com maior grau de liberdade. Naturalmente, este procedimento pode ser continuado até obter-se a matriz de realimentação de estados necessária. Além disso, o sistema pode ser estabilizado através de uma matriz de realimentação estática se existe uma matriz \bar{F} dada em (4.45) que possua a submatriz $\bar{F}_v = 0$ e para qual $\bar{A} + \bar{B}\bar{F}$ seja estável.

O problema de determinar uma matriz apropriada F dada por (4.45), ou estruturas similares para ordens $m_v + m_{v-1}, \dots, n$, é equivalente ao problema de determinar uma saída de realimentação estática $\bar{K} := \begin{bmatrix} C_Q & -D_Q \end{bmatrix}$ a qual estabiliza o sistema $\left(\bar{A}, \bar{B}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$. Mesmo assim, \bar{K} sempre pode ser determinado se n_q é escolhido de modo que $n_q \geq n - m - l + 1$, devido aos resultados apresentados na referência [Kim75]. Contudo, o problema da existência é ainda um problema amplamente aberto. Alguns desenvolvimentos recentes nesse sentido podem ser encontrados na referência [OGS93].

4.4 Resultados Adicionais sobre Redução de Ordem de Controladores

A forma canônica observável do par (A, C) pode ser ainda avaliada com a finalidade de obter uma caracterização explícita de um conjunto de controladores estabilizantes de ordem reduzida. Suponha que a matriz A apresente a seguinte estrutura

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & 0 & \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{v-1,1} & 0 & \cdots & & & \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_{v1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

e seja C com a estrutura exibida pela equação (4.16).

Considerando $n_q = m_v$ e $X_v = I$, tem-se uma forma explícita de $X = \left[\begin{bmatrix} A_Q^{v-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_Q^{v-2} & 0 \end{bmatrix} \cdots I \right]$.

Suponham que exista uma matriz \bar{F} com a estrutura dada em (4.45), de modo que estabilize $\bar{A} + \bar{B}\bar{F}$, onde

$$\bar{B} = T^{-1}B = \left[\bar{B}_1^T \quad \bar{B}_2^T \quad \cdots \quad \bar{B}_v^T \right]^T \quad (4.47)$$

e

$$\bar{L} = T^{-1}L = \left[\bar{L}_1^T \quad \bar{L}_2^T \quad \cdots \quad \bar{L}_v^T \right]^T \quad (4.48)$$

Como foi mostrado na seção anterior, através de cálculos sequenciais em termos de $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{F}, \bar{L})$, tem-se as seguintes expressões para \bar{X} e (A_Q, B_Q, C_Q, D_Q) :

$$\bar{X} = \left[0 \quad \cdots \quad 0 \quad I \right] \quad (4.49)$$

$$A_Q = (\text{qualquer matriz estável com autovalores distintos}) \quad (4.50)$$

$$B_Q = \left[A_Q^v \quad 0 \right] - \left[A_Q^{v-1} \quad 0 \right] A_{11} - \left[A_Q^{v-2} \quad 0 \right] A_{21} - \left[A_Q^{v-3} \quad 0 \right] A_{31} - \cdots - \left[A_Q \quad 0 \right] A_{v-1,1} - A_{v,1} - \bar{L}_v \quad (4.51)$$

$$C_Q = \bar{F}_v \quad (4.52)$$

$$D_Q = -\bar{F}_1 \quad (4.53)$$

sendo as dimensões das matrizes $\bar{X}, A_Q, B_Q, C_Q, D_Q$ iguais a $m_v \times n, m_v \times m_v, m_v \times l, m \times m_v, m \times l$, respectivamente.

Isto nos proporciona um conjunto de funções de transferência estáveis Q de ordem m_v , em termos de todas as matrizes estáveis A_Q e \bar{L} e \bar{F} dados. Fazendo a substituição desta caracterização de Q na definição de K_r dada pela equação (4.13), obtém-se o conjunto de todos os controladores estabilizantes com ordem menor ou igual a m_v . Todas estas conclusões são resumidas no seguinte Teorema.

Teorema 4.3 *Se as condições estabelecidas no Teorema 4.2 forem satisfeitas, então um conjunto de controladores estabilizantes de ordem menor ou igual a m_v é dado por $K_r(s) := [A_{kr}, B_{kr}, C_{kr}, D_{kr}]$, onde*

$$A_{kr} = A_Q + \overline{B}_v \overline{F}_v \quad (4.54)$$

$$B_{kr} = \begin{bmatrix} A_Q^v & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_Q^{v-1} & 0 \end{bmatrix} A_{11} - \begin{bmatrix} A_Q^{v-2} & 0 \end{bmatrix} A_{21} - \\ \begin{bmatrix} A_Q^{v-3} & 0 \end{bmatrix} A_{31} - \dots - \begin{bmatrix} A_Q & 0 \end{bmatrix} A_{v-1,1} - A_{v,1} - \overline{B}_v \overline{F}_1 \quad (4.55)$$

$$C_{kr} = \overline{F}_v \quad (4.56)$$

$$D_{kr} = -\overline{F}_1 \quad (4.57)$$

Demonstração

A prova deste Teorema esta baseada na manipulação direta das equações (4.13), (4.46) e (4.49)-(4.53).

É interessante perceber que a matriz H não desempenha um papel importante na definição de K_r . Finalmente, formulações para controladores de outras ordens, isto é, $m_v + m_{v-1}, \dots, m_v + \dots + m_2 = n - l$, podem também ser derivadas seguindo-se o mesmo procedimento. \square

Capítulo 5

Resultados Computacionais

5.1 Introdução

O *software* utilizado para a implementação das técnicas discutidas neste trabalho foi desenvolvido em MATLAB ([MAT40]), versão 5.2, em ambiente UNIX, tendo como *hardware* estações de trabalho do tipo SUN.

Utilizou-se o *Control Toolbox* ([MATCT]) do MATLAB nas fases de definição do problema, obtenção de representações em espaço de estados e obtenção de resultados, incluindo-se nesta última, os aspectos de simulação.

Os métodos de otimização sequencial discutidos no capítulo anterior foram implementados através dos algoritmos da Seção Áurea, para as buscas unidimensionais, Gram Schmidt para o cálculo das novas direções de busca no problema multivariável e o de Rosenbrock na resolução do problema de otimização multivariável irrestrito.

A abordagem utilizada neste trabalho, onde operações de somas e multiplicações de funções de transferência são frequentes, tende a gerar matrizes de transferência de malha fechada de ordens elevadas. Visando minimizar este efeito, sempre que possível, o resultado de qualquer operação envolvendo funções de transferência foi submetido a um processo de redução de modelo, de forma a eliminar modos fracamente controláveis e/ou observáveis. Para maiores detalhes sobre o método de redução de modelo utilizado, ver [MATCT].

5.2 Implementação do Problema

Considere o sistema de controle com um grau de liberdade, conforme representado na figura 2.1. O sinal de referência r é uma entrada exógena, assim como os ruídos n_{proc} e n_{sen} . O vetor de entradas exógenas w é definido como

$$w = \begin{bmatrix} n_{proc} \\ n_{sen} \\ r \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

A entrada de controle da planta é o sinal do atuador u , e considere-se tomar o vetor das variáveis reguladas como

$$z = \begin{bmatrix} y_p \\ u \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

O controlador no sistema de controle 1-DOF não tem acesso direto à saída *corrompida* do sistema, $y_p + n_{sen}$. A entrada do controlador K é dada por

$$y = r - y_p - n_{sen} \quad (5.3)$$

De acordo com a arquitetura mostrada na figura 2.2, a planta P possui quatro entradas e três saídas. A matriz de transferência é

$$P = \begin{bmatrix} P_{zw} & P_{zu} \\ P_{yw} & P_{yu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 & P_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -P_0 & -1 & 1 & -P_0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

A matriz de transferência em malha fechada H possui três entradas e duas saídas:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_0}{(1+P_0K)} & -\frac{P_0K}{(1+P_0K)} & \frac{P_0K}{(1+P_0K)} \\ -\frac{P_0K}{(1+P_0K)} & -\frac{K}{(1+P_0K)} & \frac{K}{(1+P_0K)} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Considere que o sistema de controle 1-DOF acima possui planta P_0 , a qual é BIBO (*Bounded Input - Bounded Output*) instável e de fase não-mínima, consistindo de

$$P_0(s) = \frac{1}{s^2} \frac{10 - s}{10 + s} \quad (5.6)$$

Suponha que n_{proc} e n_{sen} sejam processos estocásticos independentes com médias zero e densidades espectrais de potência

$$\begin{aligned} S_{proc}(\omega) &= W_{proc}^2 \\ S_{sen}(\omega) &= W_{sen}^2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} W_{proc} &= 0.04 \\ W_{sen} &= 0.01 \end{aligned}$$

Dentre todos os possíveis funcionais que determinam as especificações de projeto, utiliza-se os valores RMS das variáveis de saída medida (y_p) e de controle (u), *overshoot*, ganho de pico e rastreamento assintótico.

As regulações RMS de y_p e u são definidas como segue:

$$RMS(y_p) \triangleq \phi_{rms-y_p}(H) = (\|H_{11}W_{sen}\|_2^2 + \|H_{12}W_{proc}\|_2^2)^{1/2} \quad (5.7)$$

$$RMS(u) \triangleq \phi_{rms-u}(H) = (\|H_{21}W_{proc}\|_2^2 + \|H_{22}W_{sen}\|_2^2)^{1/2} \quad (5.8)$$

O controlador nominal K_{nom} (o mesmo utilizado em [BB91] e [FJ94] para efeitos de comparação de resultados) é caracterizado pelos seguintes ganhos

$$F = \begin{bmatrix} 1.4276 & 10.2948 & 2.4495 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -3.1623 \\ -1.1115 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

A estrutura geral da função de transferência estável Q , que parametriza o sistema em malha fechada é dada por:

$$Q_{n_q}(s) = \frac{x_1 s^{n_q-1} + x_2 s^{n_q-2} + \dots + x_{n_q-1} s + x_{n_q}}{s^{n_q} + x_{n_q+1} s^{n_q-1} + \dots + x_{2n_q-1} s + x_{2n_q}} \quad (5.11)$$

onde n_q , é a ordem do parâmetro Q . A escolha de n_q permitire definir a dimensão do vetor x , o qual contem os coeficientes da função de transferência Q e representa a variável de otimização do problema de projeto. Neste caso, $x \in \mathbb{R}^{2n_q}$.

Finalmente a formulação do problema de otimização sequencial irrestrito discutido no capítulo 3 é dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \Phi(x) + \mu\Psi(x) \\ &&& x \in \Omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

Conforme apresentado no Capítulo 3, $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n_q}$ e deve satisfazer certas propriedades que permitam garantir a obtenção de controladores estabilizantes, em particular,

- para $n_q = 1$, tem-se que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$.
- para $n_q = 2$, tem-se que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 > 0, x_4 > 0\}$.
- para $n_q \geq 2$, adiciona-se ao Problema de Otimização uma nova restrição baseada no critério de Routh-Hurwitz.

A seguir, apresenta-se três exemplos que ilustram a aplicação da síntese de controle de sistemas lineares via otimização sequencial irrestrita.

5.3 Problemas de Otimização

Analisa-se o desempenho da metodologia no projeto de controladores de ordem reduzida através dos três exemplos definidos a seguir, onde $\phi_{rms-y_p}(H)$ e $\phi_{rms-u}(H)$ são dados por (5.7) e (5.8), respectivamente.

Exemplo 1

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \phi_{rms-u}(H) \\ &\text{s.a.} && \phi_{rms-y_p}(H) \leq 0.1 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \phi_{rms-u}(H) \\ &\text{s.a.} && \begin{cases} \phi_{rms-y_p}(H) \leq 0.1 \\ \phi_{os}(H_{13}) \leq 0.1 \\ \phi_{rast-ass}(H_{13}) = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \phi_{rms_u}(H) \\ & \text{s.a. } \begin{cases} \phi_{rms_yp}(H) \leq 0.1 \\ \phi_{gp}(H_{13}) \leq 1.3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.4 Resultados Relativos ao Método de Penalidades

A seguir, apresenta-se os resultados obtidos pelo método de otimização sequencial irrestrita baseado no método da função penalidade.

5.4.1 Exemplo 1

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 1$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -30.0051 & 0.7997 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -30.0051 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -2.2250 & 1.0000 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -30.0051 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned} \phi_{rms_u}(H) &= 0.0428 \\ \phi_{rms_yp}(H) &= 0.1097 \end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.1).

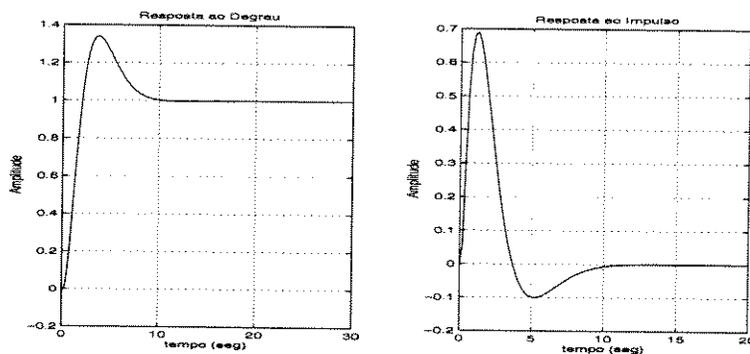


Figura 5.1: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 1

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 2$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -26.2495 & -5.4186 & 0.4687 & -0.2184 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{ccccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -26.2495 & -5.4186 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -1.5979 & -0.8038 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -26.2495 & -5.4186 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned} \phi_{rms_u}(H) &= 0.0427 \\ \phi_{rms_yp}(H) &= 0.1047 \end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.2).

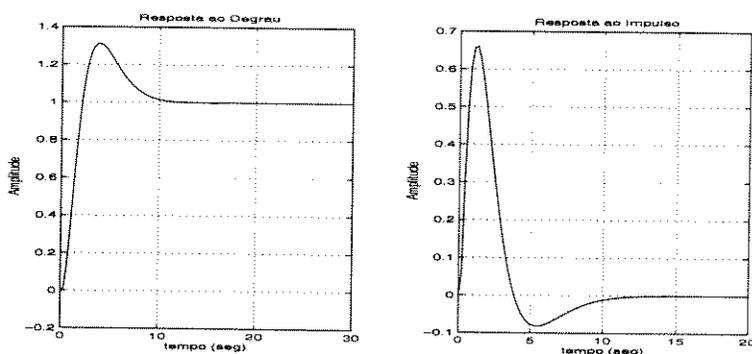


Figura 5.2: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 1

5.4.2 Exemplo 2

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 1$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -7.2040 & -2.3083 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -7.2040 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.0994 & 1.0000 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -7.2040 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.0739 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.1388 \\ \phi_{os}(H_{13}) &= 0.1284 \\ \phi_{rast_ass}(H_{13}) &= 1\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.3).

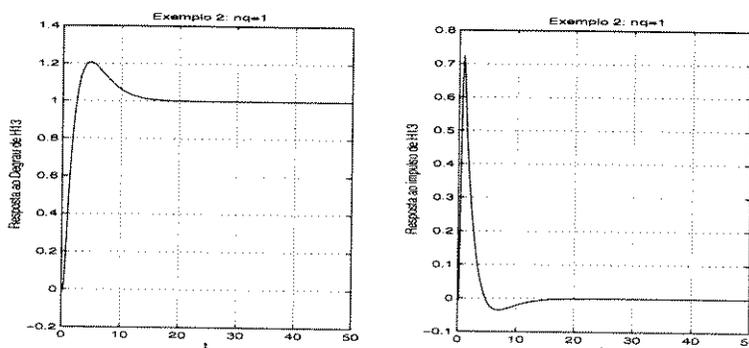


Figura 5.3: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 2

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 2$ obtêm-se os seguintes resultados:

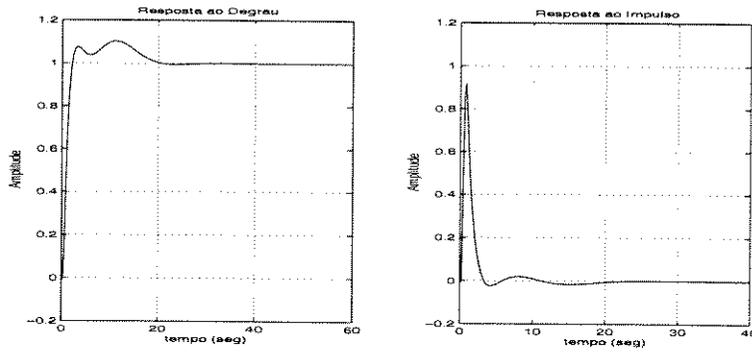
- Valor do vetor $x^* = [6.7517 \quad -4.2037 \quad -0.7338 \quad -1.8639]^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{ccccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & 6.7517 & -4.2037 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.4801 & -0.1551 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & 6.7517 & -4.2037 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.1074 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.1096 \\ \phi_{os}(H_{13}) &= 0.1028 \\ \phi_{rast_ass}(H_{13}) &= 1\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.4).

Figura 5.4: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 2

5.4.3 Exemplo 3

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 1$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -4.0010 & -1.8643 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -4.0010 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.1550 & 1.0000 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -4.0010 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned} \phi_{rms_u}(H) &= 0.0819 \\ \phi_{rms_{y_p}}(H) &= 0.1078 \\ \phi_{gp}(H_{13}) &= 1.2984 \end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.5).

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 2$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -1.3111 & -1.0489 & -0.9698 & -3.1568 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{ccccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -1.3111 & -1.0489 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.3792 & -0.0426 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -1.3111 & -1.0489 & 0 \end{array} \right]$$

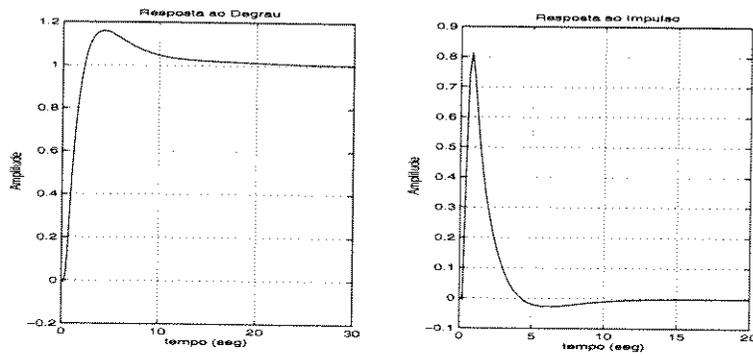


Figura 5.5: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 3

- Valores finais dos funcionais utilizando o controlador nominal:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.0884 \\ \phi_{rms_yp}(H) &= 0.1022 \\ \phi_{gp}(H_{13}) &= 1.2948\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.6).

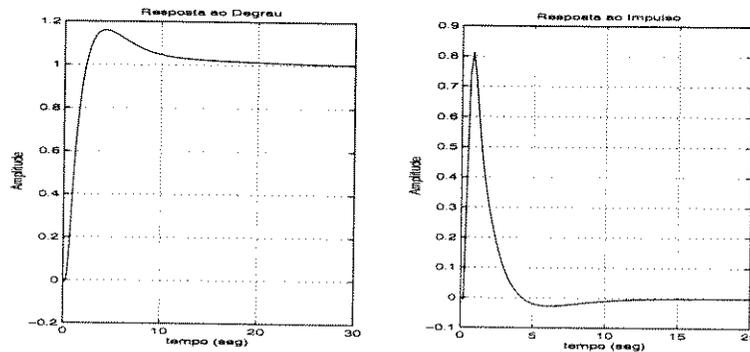


Figura 5.6: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 3

5.5 Resultados Relativos ao Método de Barreiras

A seguir, apresenta-se os resultados obtidos pelo método de otimização sequencial irrestrita baseado no método da função barreira.

5.5.1 Exemplo 1

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 1$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -20.9244 & 0.9999 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -20.9244 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -2.7181 & 1.0000 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -20.9244 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned} \phi_{rms_u}(H) &= 0.0546 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.1000 \end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.7).

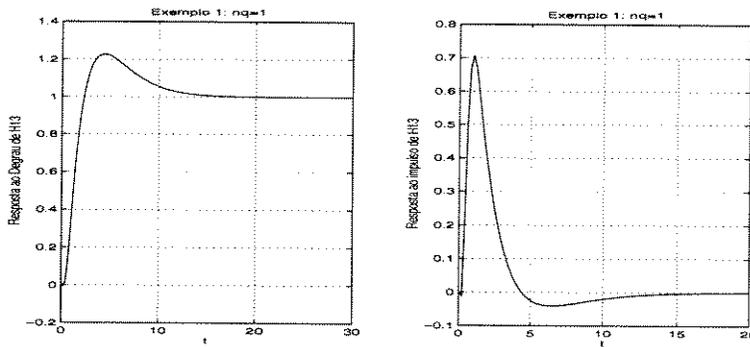


Figura 5.7: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 1

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 2$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -21.4202 & -3.4000 & 0.4000 & -0.2000 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{ccccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -21.4202 & -3.4000 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -1.4918 & -0.8187 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -21.4202 & -3.4000 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.0491 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.1000\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.8).

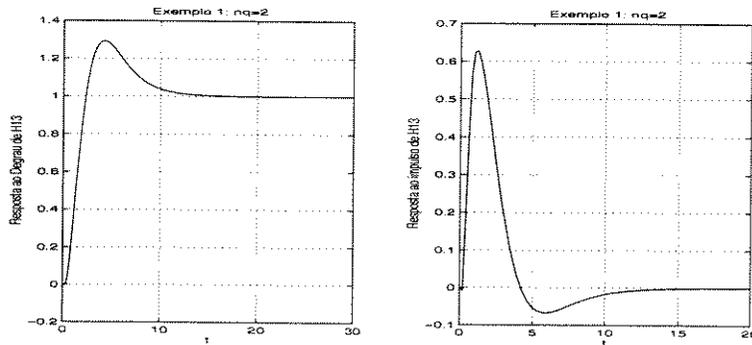


Figura 5.8: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 1

5.5.2 Exemplo 2

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 1$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -6.3709 & -0.3619 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -6.3709 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.6964 & 1.0000 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -6.3709 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.0769 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.1000 \\ \phi_{os}(H_{13}) &= 0.2061 \\ \phi_{rast_ass}(H_{13}) &= 1\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.9).

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 2$ obtêm-se os seguintes resultados:

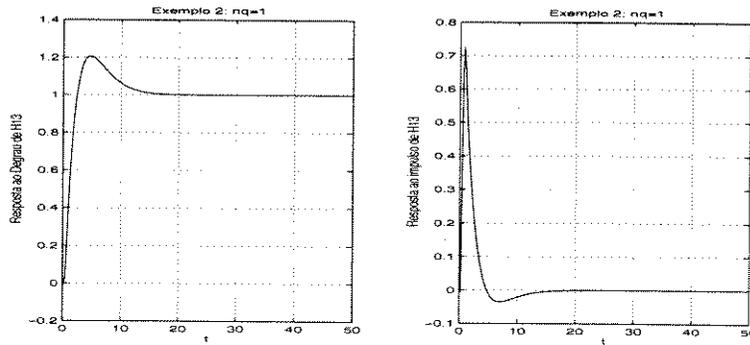


Figura 5.9: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 2

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} 9.3703 & -3.2446 & -0.6740 & -1.8952 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{ccccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & 9.3703 & -3.2446 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.5097 & -0.1503 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & 9.3703 & -3.2446 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned} \phi_{rms_u}(H) &= 0.1140 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.0991 \\ \phi_{os}(H_{13}) &= 0.1107 \\ \phi_{rast_ass}(H_{13}) &= 1 \end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.10).

5.5.3 Exemplo 3

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 1$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -3.0007 & -1.5658 \end{bmatrix}^T$
- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -3.0007 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.2089 & 1.0000 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -3.0007 & 0 \end{array} \right]$$

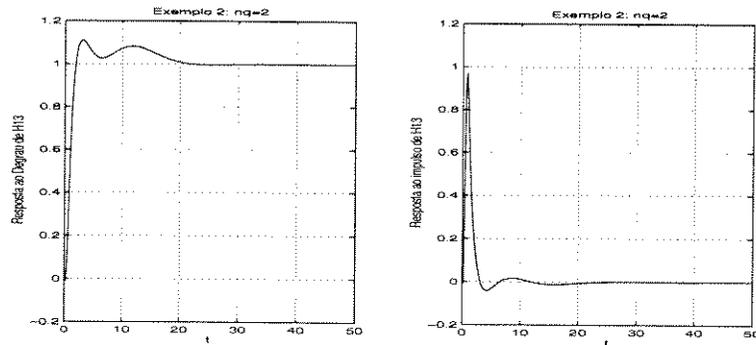


Figura 5.10: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 2

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.0844 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.1000 \\ \phi_{gp}(H_{13}) &= 1.3317\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.11).

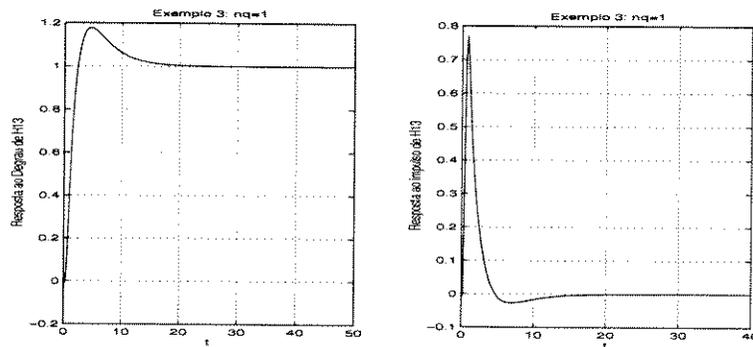


Figura 5.11: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 3

Para o parâmetro Q de ordem $n_q = 2$ obtêm-se os seguintes resultados:

- Valor do vetor $x^* = \begin{bmatrix} -0.4659 & -1.0000 & -1.0000 & -3.2000 \end{bmatrix}^T$

- Representação no espaço de estados do controlador nominal:

$$K_n(s) = \left[\begin{array}{ccccc|c} -11.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -0.4659 & -1.0000 & 0 \\ 1.0000 & 3.1623 & -31.6228 & 0 & 0 & -3.1623 \\ 0 & 2.1115 & -11.1150 & 0 & 0 & -1.1115 \\ 0 & -1.0000 & 10.0000 & -0.3679 & -0.0408 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ \hline -1.4276 & -10.2948 & -2.4495 & -0.4659 & -1.0000 & 0 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador nominal:

$$\begin{aligned} \phi_{rms_u}(H) &= 0.0905 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.1000 \\ \phi_{gp}(H_{13}) &= 1.3021 \end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal (ver figura 5.12).

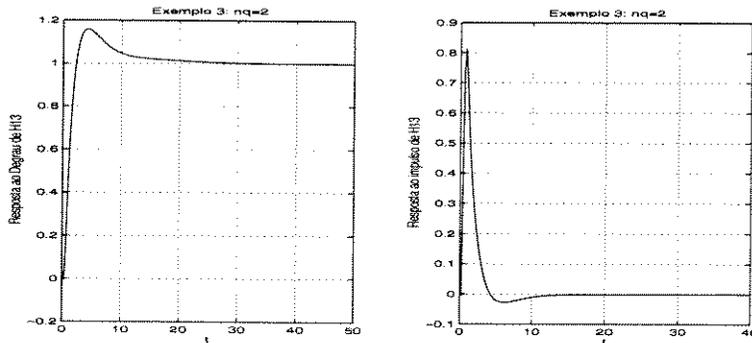


Figura 5.12: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 3

5.6 Resultados Relativos a Redução de Ordem

A seguir, apresenta-se os resultados obtidos através da aplicação do algoritmo de redução de ordem baseado na teoria de observadores. Os controladores obtidos são de ordem $(n-l)$, onde n e l representam a ordem da planta e o número de saídas da planta, respectivamente.

5.6.1 Exemplo 1

- Valor da matriz $X = \begin{bmatrix} 8.4507 & -1.0000 & 0 \\ -42.5326 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$

- Representação no espaço de estados do controlador de ordem reduzida:

$$K_r(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 9.3374 & 2.2368 & -15.5236 \\ -51.5694 & -12.2568 & 82.7114 \\ \hline -1.0241 & -0.2457 & 1.9359 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais utilizando o controlador de ordem reduzida:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.0407 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.0799\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal e o respectivo controlador de ordem reduzida (ver figura 5.13).

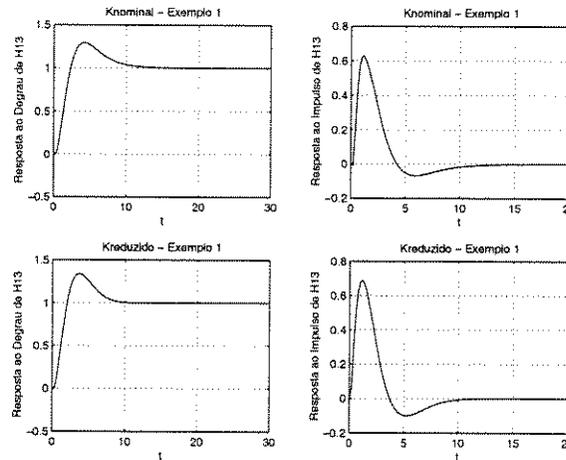


Figura 5.13: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 1

5.6.2 Exemplo 2

- Valor da matriz $X = \begin{bmatrix} 9.4377 & -1.0000 & 0 \\ -47.0560 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$

- Representação no espaço de estados do controlador de ordem reduzida:

$$K_r(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 10.3195 & 2.2368 & -7.0582 \\ -56.0706 & -12.2568 & 44.3251 \\ \hline -1.0241 & -0.2457 & 2.0364 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador de ordem reduzida:

$$\begin{aligned}\phi_{rms_u}(H) &= 0.0657 \\ \phi_{rms_y_p}(H) &= 0.3984 \\ \phi_{os}(H_{13}) &= 1.3065 \\ \phi_{rast_ass}(H_{13}) &= 1\end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal e o respectivo controlador de ordem reduzida (ver figura 5.14).

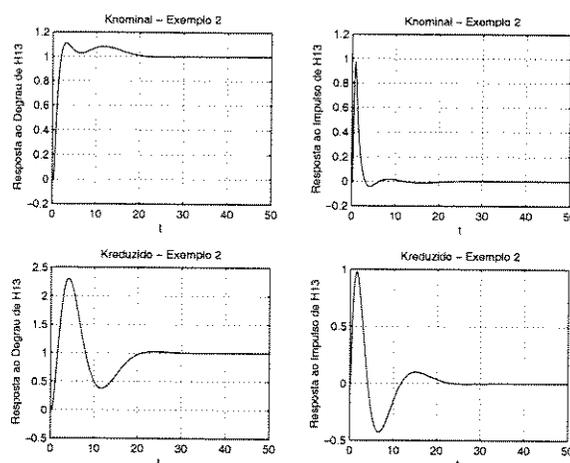


Figura 5.14: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 2

5.6.3 Exemplo 3

- Valor da matriz $X = \begin{bmatrix} 9.5802 & -1.0000 & 0 \\ -47.7024 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$

- Representação no espaço de estados do controlador de ordem reduzida:

$$K_r(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 10.4613 & 2.2368 & -5.6613 \\ -56.7138 & -12.2568 & 38.0329 \\ -1.0241 & -0.2457 & 2.0493 \end{array} \right]$$

- Valores finais dos funcionais fornecidos pelo controlador de ordem reduzida:

$$\begin{aligned} \phi_{rms,u}(H) &= 0.0740 \\ \phi_{rms,y_p}(H) &= 1.2198 \\ \phi_{gp}(H_{13}) &= 5.4737 \end{aligned}$$

- Respostas ao degrau e ao impulso do elemento H_{13} obtidas pelo controlador nominal e o respectivo controlador de ordem reduzida (ver figura 5.15).

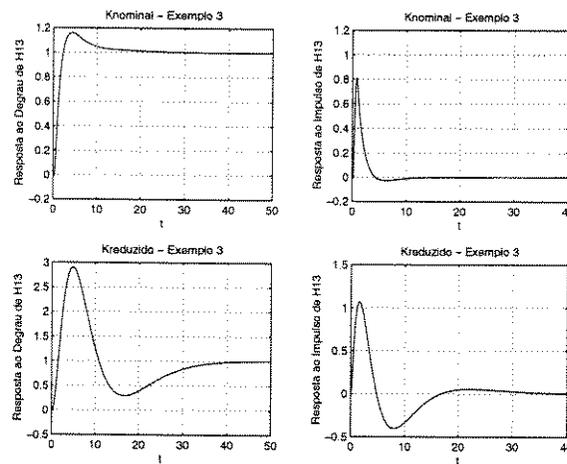


Figura 5.15: Respostas de H_{13} ao degrau e ao impulso - Exemplo 3

5.7 Comparações e Comentários

Nesta seção são apresentadas algumas tabelas contendo os resultados obtidos na resolução do problema de projeto. Numa primeira etapa faremos uma comparação do desempenho das técnicas selecionadas e numa segunda etapa uma comparação entre os resultados obtidos através do método proposto e aqueles obtidos através de outros métodos.

5.7.1 Penalidades vs. Barreiras

Neste ponto será feita uma comparação do desempenho das rotinas de Otimização Sequencial Irrestrita baseadas nas funções Penalidades e Barreiras.

Exemplo 1

$n + n_q$	Valor dos Funcionais	Via Penalidades	Via Barreiras
$n_K = 4$	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0428	0.0546
	$\phi_{rms_y_p}(H)$	0.1097	0.1000
$n_K = 5$	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0427	0.0491
	$\phi_{rms_y_p}(H)$	0.1047	0.1000

Tabela 5.3: Resultados da Otimização Sequencial Irrestrita - Exemplo 1.

Exemplo 2

$n + n_q$	Valor dos Funcionais	Via Penalidades	Via Barreiras
$n_K = 4$	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0739	0.0769
	$\phi_{rms_y_p}(H)$	0.1388	0.1000
	$\phi_{os}(H_{13})$	0.1284	0.2061
$n_K = 5$	$\phi_{rms_u}(H)$	0.1074	0.1140
	$\phi_{rms_y_p}(H)$	0.1096	0.0991
	$\phi_{os}(H_{13})$	0.1028	0.1107

Tabela 5.4: Resultados da Otimização Sequencial Irrestrita - Exemplo 2.**Exemplo 3**

$n + n_q$	Valor dos Funcionais	Via Penalidades	Via Barreiras
$n_K = 4$	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0819	0.0844
	$\phi_{rms_y_p}(H)$	0.1078	0.1000
	$\phi_{gp}(H_{13})$	1.2984	1.3317
$n_K = 5$	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0884	0.0905
	$\phi_{rms_y_p}(H)$	0.1022	0.1000
	$\phi_{gp}(H_{13})$	1.2948	1.3021

Tabela 5.5: Resultados da Otimização Sequencial Irrestrita - Exemplo 3.

Observa-se que os controladores obtidos Via Barreiras apresentam um melhor desempenho, em termos de precisão, em relação aqueles obtidos via Penalidades. Verifica-se o fato de que quanto maior a ordem do controlador, menor é o esforço de controle gasto.

5.7.2 Comparação entre os Métodos de Otimização

Serão apresentados os valores dos funcionais obtidos através de um método de Otimização baseado em Planos de Corte, ver [FJ94], um baseado em Penalidades e outro baseado em Barreiras.

Exemplo	Função Objetivo	Via Planos de Corte	Via Penalidades		Via Barreiras	
1	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0399	0.0428	0.0427	0.0546	0.0491
	n_K	7	4	5	4	5
2	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0917	0.0739	0.1074	0.0769	0.1140
	n_K	8	4	5	4	5
3	$\phi_{rms_u}(H)$	0.0716	0.0819	0.0884	0.0844	0.0905
	n_K	8	4	5	4	5

Tabela 5.6: Comparação dos Resultados utilizando diferentes Métodos de Otimização.

Observa-se de modo geral que os controladores obtidos através das técnicas de otimização sequencial irrestrita apresentam um ganho significativo no que diz respeito à redução de ordem. Isto é possível devido a natureza da formulação do problema de projeto, enquanto que na formulação via planos de corte o processo de otimização é realizado em um espaço de ordem sempre crescente, na formulação via otimização sequencial irrestrita o espaço sobre o qual se desenvolverá o processo de otimização é fixado através da escolha da ordem do parâmetro Q .

Embora o projeto de controladores via otimização sequencial irrestrita apresente uma formulação relativamente simples, a maior dificuldade do método está focalizada na seleção apropriada dos parâmetros envolvidos nas subrotinas do programa. Como foi colocado no capítulo 3, uma escolha inadequada destes parâmetros pode nos levar a sérios problemas de condicionamento numérico ou a uma prematura finalização do algoritmo.

No que diz respeito à redução de ordem, a principal característica apresentada pelos controladores de ordem reduzida obtidos é a preservação dos pólos em malha fechada do sistema realimentado original. Para trabalhos posteriores pode-se explorar de maneira mais ampla a inclusão das restrições do projeto.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho abordou o problema de projeto de controladores através de técnicas de otimização irrestrita, com o processo de otimização baseado no Algoritmo de Rosenbrock. Partindo de técnicas de fatoração de matrizes de transferência, obteve-se uma parametrização de todos os controladores que estabilizam uma determinada planta e uma representação afim para a matriz de transferência de malha fechada do sistema. Como muitas das especificações de projeto podem ser descritas em termos da matriz de malha fechada do sistema, foi possível a formulação do problema de síntese como um problema de otimização, tendo como variável de otimização um vetor $x \in \mathbb{R}^{2n_q}$ contendo os coeficientes do elemento do espaço das matrizes de transferência racionais estáveis próprias Q , de ordem n_q . Uma transformação adequada do problema de otimização restrita através de métodos apropriados como os de penalidades e barreiras, permite obter problemas de otimização irrestritos.

Em relação ao método proposto, podem-se destacar as seguintes vantagens: a eliminação do cálculo do subgradiente dos funcionais envolvidos na formulação o que possibilita a inclusão de funcionais quase-convexos na formulação do problema de projeto, a definição do espaço no qual se desenvolverá o processo de otimização para a determinação do controlador estabilizante do sistema, através da definição da ordem do parâmetro Q .

As maiores dificuldades encontradas durante a implementação do presente trabalho, estiveram focalizadas na seleção apropriada dos parâmetros envolvidos em cada um dos processos utilizados pelo algoritmo de otimização irrestrita. Uma escolha inadequada destes parâmetros pode provocar problema de condicionamento numérico ou truncar o problema antes de obter-se a solução ótima.

Os resultados obtidos mostram a viabilidade deste tipo de enfoque e a eficiência do método selecionado no que diz respeito à ordem dos controladores obtidos. Entretanto outros aspectos não abordados por este trabalho, como por exemplo uma redução de ordem que considere na formulação as restrições do problema de projeto original, precisariam ainda ser investigados.

Como principal tema para trabalhos futuros, encontra-se a integração dos procedimentos de otimização sequencial irrestrita com os de obtenção de controladores de ordem reduzida através de transformações de similaridade.

Bibliografia

- [BB91] Boyd, S. P. & C. H. Barratt. **Linear Controller Design-Limits of Performance**, Prentice Hall, 1991.
- [BBB88] S. Boyd, V. Balakrishnam, C. Barratt, N. Kraishi, X. Li, D. Meyer, and S. Norman. **A New Method and Associated Architectures for Linear Controllers**. IEEE Trans. Aut. Control, AC-33(3): 268-283, March 1988.
- [CF92] Carvalho, J. R. H. & P. A. V. Ferreira. **Uma Abordagem Para o Problema de Controle Multicritério de Sistemas Dinâmicos**. Anais do 9º Congr. Bras. de Automática. Vitoria - ES, 1992.
- [Chen84] Chen, C. T. **Linear System Theory and Design**. Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [Cruz94] Cruz Jr., O. A. **Síntese de Controle Via Otimização Convexa**. Tese de Mestrado, FEEC/UNICAMP, 1994.
- [DC75] Desoer, C. A. and W. S. Chan. **The Feedback Interconnection of Lumped Linear Time-Invariant Systems**. J. Franklin Inst., 300(5 and 6):335-351, 1975.
- [DLM80] C. A. Desoer, R. W. Liu, J. Murray, and R. Saeks. **Feedback System Design: The Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis**. IEEE Trans. Aut. Control, AC-25(3):399-412, June 1980.
- [FG90] Ferreira, P. A. V. & J. C. Geromel. **An Iterative Projection Method for Multicriteria Optimization Problems**. IEEE Trans. Sys., Man, and Cyb., vol. SMC-20, nº 3, 1990.
- [FM68] Fiacco & McCormick. **Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques**, Prentice Hall, 1968.
- [Fran87] Francis, B. **A Course in H^∞ Control Theory**. Springer-Verlag, 1987.
- [GCP93] Gu, D. W., B. W. Choi and I. Postlethwaitte. **Low-Order Stabilizing Controllers**. IEEE Trans. Aut. Control, Nov. 1993.
- [GMW81] Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H. **Practical Optimization**. Academic Press, 1981.
- [KB90] Keel K. H. and S. P. Bhattacharyya. **State-space Design of Low-order Stabilizers**. IEEE Trans. Aut. Control, Feb. 1990.

- [Kim75] Kimura, H. **Pole Assignment by Gain Output Feedback**. IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-20, pp 509-516, Aug. 1972.
- [Las70] Lasdon, L. S. **Optimization Theory for Large Systems**. Macmillan Publishing Co., Inc., 1970.
- [Lips85] Lipschultz S. **Álgebra Linear**. Coleção Schaum, 1985.
- [MAT40] **MATLAB 4.0 Reference Guide**. The MathWorks Inc. August, 1992.
- [MATCT] **MATLAB 4.0 Control Toolbox**. The MathWorks Inc. July, 1992.
- [OGS93] Oh, M., D. W. Gu, and S. K. Spurgeon. **Robust Pole Assignment in a Specific Region using Output Feedback**. to appear in Optimal Contr. Appl. Methods, vol 14, pp. 57-66, 1993.
- [Oga90] Ogata, K. **Modern Control Engineering**. Prentice- Hall, 1990.
- [Vid72] Vidyasagar, M. **Input-Output Stability of a Broad Class of Linear-Invariant Multivariable Feedback System**. SIAM J. Control 10, pp. 203-209, Feb. 1972.
- [Vid85] Vidyasagar. **Control System Synthesis: A Factorization Approach**. MIT Press, 1985.
- [YJBI76] Youla, D. C., H. A. Jabr, & J. J. Bongiorno. **Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers - Part I: The Single-Input Case**. IEEE Trans. Aut. Control. AC-21:319-338, Feb. 1976.
- [YJBII76] Youla, D. C., H. A. Jabr, & J. J. Bongiorno. **Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers - Part II: The Multivariable Case**. IEEE Trans. Aut. Control. AC-21:3-14, June 1976.