



1290004073

TCC/UNICAMP
So89e
IE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
INSTITUTO DE ECONOMIA

CEDOC - IE - UNICAMP
Estudo dos Ativos do Ibovespa utilizando a
Análise de Redes Sociais

Uma Contribuição ao Tradicional Processo
De Formação de Carteiras

Rafael Galvão de Souza

Monografia apresentada ao Curso
de Graduação em Economia da
UNICAMP.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Carlos Lenz

CEDOC - IE - UNICAMP

Campinas

2009

Souza, Rafael G.

Estudo dos Ativos do Ibovespa utilizando a Análise de Redes Sociais. -
Uma Contribuição ao Tradicional Processo de Formação de Carteiras /
Rafael Galvão de Souza. Campinas, 2009.

Monografia – Curso de Graduação em Economia da UNICAMP, 2009.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Lenz

1. Econofísica, Análise de Portfólio, Markowitz.
2. Análise de Redes Sociais (ARS), *Minimum Spanning Trees*, Espaços Ultramétricos

Agradecimentos

- Primeiramente, à minha mãe por tudo o que fez e faz por mim.
- Ao Prof. Lenz, agradeço pela paciência, dedicação e por ter aceitado me orientar em um tema ainda não estudado neste curso.
- Aos professores e funcionários do IE, da UNICAMP.
- Aos amigos...

É um erro capital teorizar antes de se ter os dados. Invariavelmente começamos a torcer os factos para se ajustarem à teoria, em vez de ser a teoria a ajustar-se aos factos.

Sherlock Holmes -Um escândalo na Boémia

Resumo

Neste trabalho, utilizamos alguns conceitos da física, em especial, da mecânica estatística, aplicados no estudo de dados financeiros, para estudar novos elementos de análise de portfólios complementares ao tradicional processo de formação de carteiras de investimento. Apresentamos um método de solução analítica do problema de otimização de Markowitz, através do encontro do Portfólio de Black (permitindo *short-selling*) e aplicação das restrições de Markowitz. Para isso, desenvolvemos um algoritmo de solução, usando a função Solver do Excel. Utilizando-se séries temporais dos retornos diários de 64 ações presentes no Índice Bovespa no período de janeiro de 2007 e dezembro de 2008, encontramos o Portfólio Eficiente de Markowitz e de Black, os quais apresentaram um desempenho consistentemente superior ao Ibovespa. Utilizamos o conceito de Espaço Ultramétrico e Teoria de Grafos para construir a árvore de extensão mínima que representa o Ibovespa naquele período a fim de obtermos informações sobre o agrupamento das ações e extraís informações comuns partilhadas entre elas. Argumentamos que o conhecimento das propriedades estatísticas dos dados – em especial a matriz de correlação entre cada par de ativos – e deferentes métodos de análise são essenciais na formação de estratégias de investimento e, conseqüentemente, uma boa gestão de portfólio.

Abstract

In this work, we use some physical concepts, particularly, from statistical mechanics, applied in the study of financial data, to study new elements of portfólio analysis that complement the traditional process of portfólio selection. We show a method of analytical solution for the Markowitz's optimization problem, through finding the Black's Portfolio (which allows short-selling) and then applying the restrictions of the Markowitz's model. For this solution, we have developed an algorithm using the Solver function in Excel. Using the daily price returns of a set of 64 stocks presents in the Bovespa Index between January 2007 and December 2008, we found both Markowitz and Black Efficient Portfolios, which showed a performance consistently superior to the Bovespa Index. We use concepts of Ultrametric Distance and Graph Theory, in the context of Social Network Analysis (SNA), to obtain the minimum spanning tree that best characterizes the Sao Paulo Stock Exchange, in order to get useful information on the stock clustering and to extract common information shared by them. We argument that the comprehension of the statistical properties of the time series – in special, the correlation matrix among every pair of asset – and different methods of analysis are essential in the investment strategy construction and, consequently, for a good portfolio management.

Sumário

Agradecimentos	4
Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	10
Capítulo 1. Introdução	
1.1 Física e Finanças – Introdução Histórica à Econofísica	11
1.2 Motivação	13
1.3 Foco Atual	14
Capítulo 2. O Modelo Tradicional de Formação de Carteiras	
2.1 Revisão da Literatura	17
2.2 Conceitos e definições: Markowitz, Tobin e Black	24
2.3 O Modelo de Precificação de Ativos Financeiros de Sharpe (CAPM)	35
2.4 Resolução do problema de otimização de Black	41
2.5 A Hipótese de Mercados Eficientes	46
Capítulo 3. Processos Estocásticos e Teoria de Grafos	
3.1 Distribuições de Probabilidade	49
3.3 Movimento Browniano Geométrico	56
3.4 Leis de Potência no mercado financeiro	58
3.5 Teoria de Grafos	
3.5.1 Distância entre Ações	63
3.5.2 Espaços Ultramétricos	65
Capítulo 4. Análise dos Dados	
4.1 Metodologia de Construção da Carteira Teórica do Índice Bovespa	67
4.2 Construção de Carteiras Eficientes	70
4.3 Construção da Árvore de Extensão Mínima utilizando o Pajek	75
Capítulo 5. Conclusões e Perspectivas	81
Apêndice A. Curvas por Equações Paramétricas	84
Referências	86

Lista de Figuras

2.1	Risco <i>Versus</i> Retorno. Fronteira Eficiente de Markowitz na presença de um ativo livre de risco, como apresentado por Tobin.	20
2.2	Relação Risco $\times$ Retorno pra um Portfólio com dois ativos.. . . .	27
2.3	Exemplo de Fronteira Eficiente de Markowitz com 6 ativos.	29
2.4	Exemplo de Fronteira Eficiente de Black e Markowitz com 6 ativos.	30
2.5	Combinando um ativo arriscado com empréstimos à taxa livre de risco.	
2.6	Fronteira Eficiente com dois ativos arriscados, com a possibilidade de empréstimos à taxa livre de risco.	33
2.7	Fronteira Eficiente com vários ativos arriscados e Portfólio com maior Índice de Sharpe.	34
2.8	<i>Security Market Line (SML)</i>	39
3.1	Distribuição Gaussiana.	51
3.2	Exemplos de densidade de probabilidade Gaussiana e Log-normal.	56
3.3	Exemplos de densidade de probabilidade de Lévy e t-Student.	56
3.4	<i>Black Monday</i>	58
3.5	Índice Dow Jones – Volatilidade Histórica (1954-2004).	
4.1	Log-retorno cumulativo – Índice Bovespa.	68
4.2	Lista das 64 ações que compunham o Índice Bovespa no quadrimestre Jan – Abril de 2009.	69
4.3	Oscilação do log-retorno das 64 ações durante 2 anos.	70
4.4	Log-retorno cumulativo das 64 ações e do Índice Bovespa.	71
4.5	Algoritmo de solução para a otimização de Markowitz.	73
4.6	Linha do Mercado de Capitais, Fronteira Eficiente de Black e de Markowitz.	74
4.7	Log-retorno cumulativo do Índice Bovespa, Portfólio de Black e Portfólio de Markowitz.	75
4.8	Algoritmo MST.	77
4.9	<i>Minimum Spanning Tree (MST)</i> de 64 ações do Ibovespa.	78
4.10	<i>Minimum Spanning Tree (MST)</i> de 45 ações da Bolsa de São Paulo	79
4.11	Dendograma das 64 ações do Ibovespa.	80

Lista de Tabelas

2.1	Como fazer ou tomar empréstimos à taxa livre de risco afeta as escolhas Dos investidores.	31
3.1	Dez maiores quedas do Índice Dow Jones no período 1954-2004. . .	60

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Física e Finanças – Introdução Histórica a Econofísica

O contato de físicos com Finanças é de longa data. Isaac Newton perdeu muito de sua fortuna uma das primeiras bolhas financeiras da história, na Bolsa de Londres. Ele assim definiu sua frustração com a imprevisibilidade do mercado: “Posso calcular o movimento das estrelas, mas não a loucura dos homens”.

Carl Friederich Gauss (1777-1855) teve muito êxito em suas operações financeiras. Isto é evidenciado por sua fortuna deixada de 170.000 Taler (unidade monetária local na época) ao morrer, enquanto seu salário era de 1.000 Taler. Acredita-se que ele derivou a distribuição normal de probabilidade (Gaussiana) ao estimar o risco ao fornecer crédito a seus vizinhos [1].

Mas podemos considerar como uma raiz da área conhecida como Econofísica a primeira formalização do passeio aleatório (*random walk*). Esse trabalho não se deu em uma publicação de Einstein, mas em uma tese de doutorado de Bachelier. O matemático francês Louis Bachelier defendeu sua tese na Academia de Paris em 29 de março de 1900 intitulada "Théorie de la Spéculation"(Teoria da Especulação)[2]. Sua tese foi precursora em apreçamento de opções em mercados especulativos, uma atividade que hoje é extremamente importante nos mercados financeiros em que derivativos são negociados em vários mercados. Bachelier determinou a probabilidade de mudanças de preços ao escrever a equação que atualmente é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov, e ao reconhecer que o processo de Wiener satisfaz a equação de difusão (este ponto foi redescoberto por Einstein em seu artigo sobre o Movimento Browniano em 1905)¹ [3].

Outra contribuição importante nessa área foi dada pelo economista Vilfredo Pareto (1848-1923). [6] Ele investigou o caráter estatístico das riquezas individuais

¹ Para uma revisão dos desenvolvimentos matemáticos que aproximaram a Física da Economia, bem como da importância do trabalho de Bachelier, ver Davis, M. & Etheridge, A. (2006)[4]. Ver também uma revisão do trabalho de Bachelier em Courtault, J.M. et al. 2000[5].

em uma economia estável usando um modelo de distribuição segundo uma lei de potência. Pareto usou uma lei de potência para descrever a distribuição de riquezas entre os indivíduos, uma vez que ela descrevia muito bem o fato de uma grande parte da riqueza de qualquer sociedade pertencer a uma pequena fração das pessoas dessa sociedade. Este estudo serviu de base para modelos da teoria de probabilidade [3].

Analogias à física desempenharam um papel importante no desenvolvimento da Teoria Econômica durante o século XIX, e alguns fundadores da Teoria Econômica Neoclássica, incluindo Irving Fisher, tiveram uma formação básica em física; Fisher foi aluno de Willard Gibbs [7].

De acordo com Chakrabarti (2005)[8], o termo econofísica foi criado em 1995 na segunda conferência Statphys-Kolkata em Calcutá, Índia, pelo físico Eugene Stanley, quem também foi o primeiro autor a publicá-lo em artigo (Stanley, 1996)[9]². Desde então, fóruns de discussão, conferências e dois jornais foram criados para divulgar e debater esta disciplina emergente.³ Em 2006, a revista *Nature*, em seu editorial, discutiu a resistência das comunidades tradicionais tanto no campo da Economia como da Física de aceitarem a Econofísica.[11] A revista aponta a necessidade haver uma aproximação maior entre as áreas, o que resultaria em mais debate e críticas necessárias à evolução da ciência⁴. E, não só na academia, como também no mundo das finanças muitos físicos e economistas dividem espaço atualmente, como aponta Pimbley (1997) [13].

Certamente um dos mais notáveis campos da Econofísica é a aplicação de distribuições de leis de potência⁵ a dados econômicos e, em especial, nas finanças quantitativas. Observações de taxas de crescimento como uma função do tamanho da companhia e o número de ações em transações no mercado financeiro já foram efetivamente modeladas com distribuições de leis de potência. Leis de potência

² Rosario Mantegna e H. Eugene Stanley propuseram a seguinte definição: "the multidisciplinary field of econophysics ...[as] a neologism that denotes the activities of physicists who are working on economics problems to test a variety of new conceptual approaches deriving from the physical sciences." [3]

³ Para um excelente debate sobre o papel da Econofísica, bem como extensiva revisão bibliográfica sobre o tema, ver Rosser, J. (2008) [10]

⁴ Para um debate acerca da importância atual da Econofísica, ver Ball, P. (2006) [12]

⁵ Distribuições de Leis de Potência tratam de fenômenos que não obedecem a uma lei de distribuição normal (Gaussiana). Eventos em que a maioria das variáveis não está em torno da média são na verdade os mais comuns na natureza. E, como afirma Taleb em seu famoso livro, *O Cisne Negro*, "as finanças e a história são dominadas por eventos raros e imprevisíveis".[14] As distribuições normais e não-gaussianas são discutidas no capítulo 3.

também estão sendo aplicadas como alternativas ao modelo de Black_Scholes em previsão de movimento de preços.

Segundo Pinbley (1997) [13], alguns tópicos de pesquisa dos físicos em finanças são: a observação empírica de regularidades em dados do mercado financeiro, a dinâmica da formação de preços, o entendimento de bolhas e pânico, métodos para precificação de opções e outros derivativos, a construção de portfólios ótimos, distância métrica e ultramétrica entre ativos e *minimal spanning trees*.

Portanto, a econofísica é uma disciplina emergente procurando ainda seu espaço e respeito no meio acadêmico e aplicações prática difundidas. Por este mesmo motivo, e por ainda ter seus “*fundamental principles yet to be defined*”, é cercada de muita discussão e controvérsias. Parindo de autores que sugerem que a Economia poderia ser “*the next physical science*” [7] até outros que afirmam que a “*Economics desperately needs econophysics*” [15,16], temos uma ampla e crescente agenda de pesquisa, de onde podem surgir novas maneiras de vermos o sistema econômico e estudarmos as relações sociais.

1.2 Motivação

Passando pelo auge da Economia Neoclássica, a Revolução Keynesiana nos anos 30, até o auge do pós-Keynesianismo do pós-Guerra, a Ciência Econômica avançou sobremaneira no século XX, ramificando-se, criando e incorporando novos conceitos para explicar a sociedade. Neste mesmo período, a matemática também evoluía e trazia novas soluções para explicar as variáveis cada vez mais complexas do mundo econômico.

A década de 70 reservava novos passos à evolução da Ciência. Por um lado, a macroeconomia era balanceada pelo debate entre monetaristas e keynesianos. No lado da microeconomia, as novas soluções matemáticas abriam um enorme campo de pesquisa. E, nesse contexto, Markowitz começou a criar a chamada moderna teoria do portfólio e estabelecer um novo ramo da Economia, as chamadas finanças quantitativas.

Obviamente, a evolução da ciência quase sempre acompanha a evolução de algum elemento sobre o qual ela se propõe a fornecer soluções e explicações. E, a partir de 1970, uma série de mudanças significativas ocorreu no mercado financeiro.

Neste mesmo período, Robert C. Merton e Myron S. Scholes, com a colaboração de Fisher Black desenvolveram uma fórmula de apreçamento de derivativos até hoje amplamente utilizada no mundo das finanças. Esse trabalho deu origem a novas formas de tratar os instrumentos financeiros e facilitou a administração do risco.

Na década de 80, a revolução no mundo da eletrônica e dos meios de comunicações levou a uma expansão da negociação eletrônica para bolsas de valores em diversas regiões do mundo, além do uso cada vez maior de instrumentos derivativos. Isto gerou uma quantidade muito grande de dados disponíveis eletronicamente para análise quando, ao mesmo tempo, ferramentas computacionais mais poderosas eram criadas.

De volta à macroeconomia, os monetaristas parecem ter vencido o debate contra o keynesianismo na década anterior e evoluíram para a escola novo-clássica, sob a égide do postulado das expectativas racionais. Neste momento, temos uma certa união no *mainstream* de macro com microeconomistas, onde as finanças tornam-se cada vez mais liberalizadas e desregulamentadas. Prevalece uma ortodoxia liberalizante na ciência econômica e na agenda política pública.

1.3 Foco Atual

Segundo Ormerod (1993) [17], a Economia Convencional vê a economia e a sociedade como máquinas, em que seu comportamento, não importa o quão complicado seja, é em última instância previsível e controlável. O autor, no entanto, argumenta que a sociedade humana deve, ao contrário, ser tratada como um organismo vivo e em mutação, que se adapta e aprende. Nesse sentido, o comportamento do mesmo só pode ser entendido através da análise das complexas interações das suas partes individuais.

Esta idéia de que a Economia deveria buscar inspiração na biologia não é nova. Alfred Marshall foi o primeiro acadêmico a articular esta visão. Friedrich Hayek, um dos grandes cientistas sociais do século XX, apontou a importância de se adotar uma análise dinâmica, evolucionária para trabalhos em ciência social e sistemas econômicos. E, Joseph Schumpeter, criou o conceito de “destruição criadora” para definir o funcionamento de economias capitalistas.

Estas idéias, no entanto, nunca foram realmente absorvidas pelo *mainstream Economics*. Ao contrário, a disciplina continua a enfatizar a estabilidade, ordem e equilíbrio quando o mundo real é caracterizado por constante mudança, evolução e desequilíbrio.

A economia ortodoxa assume que os gostos e preferências dos indivíduos são completamente fixos. No entanto, sabe-se que o comportamento de um indivíduo pode ser diretamente afetado pela observação do comportamento de outros. Em outras palavras, as pessoas vêem o que as outras fazem, e podem ser influenciadas por isto. Porém, a matemática dos modelos ortodoxos não é capaz de modelar situações passíveis de mudança de acordo com o comportamento das pessoas. Sistemas em que indivíduos copiam os comportamentos uns dos outros requerem diferentes técnicas de análise – resultados matemáticos somente disponíveis nos últimos vinte anos, além de computadores para simular artificialmente o comportamento de tais sociedades.

Uma vez que pensamos a economia e a sociedade como sistemas complexos, os freqüentes fracassos de política podem ser rapidamente entendidos. Sistemas como estes são inerentemente extremamente difíceis de prever e controlar. Isto implica que muito do que os economistas e governos acreditam que podem controlar sobre a sociedade na verdade é na verdade uma ilusão.

Desta maneira, torna-se imprescindível uma visão da sociedade como um sistema complexo, onde as interações entre os agentes são fundamentais para o entendimento das relações sociais. E, nesta tarefa, uma metodologia de análise poderosa é a *Social Network Analysis* (S.N.A), que surge no contexto das Ciências Humanas em meados dos anos 30. Nos anos 60 é conduzido para o estudo da teoria dos gráficos (grafos) e a partir dos anos 70 é aplicada a diversas áreas do conhecimento, especialmente utilizada na Sociologia como instrumento para mapear os movimentos sociais.

A Análise de Redes Sociais trata-se de uma técnica interdisciplinar que propicia uma leitura dinâmica das interações sociais. Propicia uma alternativa à interpretação “estática” (no momento da leitura) do papel social do indivíduo ou grupo dentro de um contexto. Pressupõe uma análise de tendência em um determinado contexto e não afirmações absolutas, isto é, a técnica é utilizada para oferecer uma perspectiva.

Na análise de redes sociais são observados os atores sociais, seus papéis e suas ligações. A análise de rede social é uma ciência interdisciplinar especializada no

comportamento. Ela está fundamentada na observação que os atores sociais são interdependentes e que as conexões entre eles possuem importantes consequências para cada indivíduo. [18]

Neste contexto, as ciências exatas também evoluiu no estudo de sistemas complexos, propiciando novas técnicas de análise de redes e interações sociais. Alguns físicos da área da Mecânica Estatística no final do século passado começaram a fazer pesquisas com as flutuações observadas no mercado financeiro. Na física, o conceito de sistemas complexos não tem uma definição muito precisa, mas uma característica presente todos eles é a presença da não-linearidade e de um número muito grande de unidades em interação. O comportamento coletivo desses sistemas exhibe padrões espaciais e temporais em suas propriedades dinâmicas.

Os mercados financeiros exibem várias das propriedades que caracterizam sistemas complexos [19]. As regras que os governam são estáveis e a evolução temporal do sistema é continuamente monitorada. É possível desenvolver modelos e testar sua validade, além de fazer previsões a partir dos dados disponíveis, de modo que o sistema financeiro se apresenta como um verdadeiro laboratório para aplicar as idéias desenvolvidas na área de Mecânica Estatística fora do equilíbrio, particularmente aquelas relativas aos processos estocásticos.

Neste trabalho, focamos nosso estudo na moderna teoria de portfólios, no estudo da correlação entre os ativos e no estudo de redes sociais aplicados ao mercado financeiro utilizando as mesmas correlações. Primeiramente procuramos entender os fundamentos daquela teoria, também apresentando o modelo matemático para construção de carteiras eficientes, e construindo o portfólio de Markowitz e de Black para os retornos das ações presentes no Índice Bovespa entre janeiro de 2007 e dezembro de 2008. Em segundo lugar, focamos em algumas características dos preços das ações, apresentando algumas evoluções neste estudo oferecidas pela Econofísica. Finalmente, usamos conceitos de Espaço Ultramétrico e Teoria de Grafos para obter informações quanto ao agrupamento das ações e extrair informações comuns compartilhadas entre elas.

CAPÍTULO 2

O Modelo Tradicional de Formação de Carteiras

2.1 Revisão da Literatura

Brealey (1991)[20], em seu artigo sobre as contribuições de Markowitz à Economia Financeira, reconhece que poucos avanços na Economia no pós-Guerra podem ser comparados ao desenvolvimento da teoria do portfólio por Markowitz, tanto em termos de sua originalidade como da extensão de subseqüentes trabalhos que propiciou, além de sua aplicação normativa e prática no mundo dos negócios. No entanto, embora não seja fácil traçar uma ligação direta entre seu trabalho e a literatura anterior, é possível destacar algumas idéias antecedentes.

Hicks (1935)[21] enfatizou que a demanda por dinheiro dependia não somente da taxa esperada de juros (retorno), mas também do que ele chamou de “*penumbra of doubt*”. Desenvolvendo seu pensamento, ele elaborou o que pode ser considerado como os primeiros elementos do problema do portfólio:

“Where risk is present, the particular expectation of a riskless situation is replaced by a band of possibilities, each of which is considered more or less probable. It is convenient to represent these probabilities to oneself, in a statistical fashion, by a mean value, and some appropriate measure of dispersion. (No single measure will be wholly satisfactory, but here this difficult may be overlooked.)...

It is one of the peculiarities of risk that the total risk incurred when more than one risky investment is undertaken, does not bear any relation to the risk involved in each of the particular investments taken separately. In most cases, the ‘law of large numbers’ comes into play (quite how, cannot be discussed here), so that the risk incurred by undertaking a number of separate risky investments will be less than that which would be incurred if the same capital had been invested altogether in one direction. When the number of separate investments is very large, the total risk may sometimes be reduced very low indeed.”

Chambers (1934)⁶ [22] também estudou o fator risco na demanda por dinheiro. Ele imaginou um indivíduo confrontando o valor médio e o desvio-padrão de cada investimento e notou que esta atitude em relação a esses investimentos poderia ser expressa por um conjunto de curvas de indiferença⁷. Por fim, conclui ser uma atitude desejável que os indivíduos busquem diversificar seus investimentos.

A análise da demanda por dinheiro de Hicks-Chambers claramente antecipou e influenciou o trabalho de Tobin (1958).⁸ [25] No entanto, ela apenas esboça os elementos do problema do portfólio. Segundo Brealey [20], coube a Markowitz fornecer uma fundação baseada na utilidade para a análise de média-variância, enfatizar o papel da correlação como limitante da oportunidade de redução de risco, desenvolver o conceito de eficiência de media-variância, reconhecer que o problema trata-se de maximizar uma função objetiva convexa sujeita a restrições e oferecer um algoritmo para resolver o problema.

Markowitz publicou seu brilhante trabalho em 1952, quando tinha apenas 25 anos. Nele o autor começou a reunir seus três principais interesses até então – teoria da utilidade, programação matemática e problemas de gestão de investimentos – para desenhar sua famosa teoria de portfólios.

No artigo *Portfólio Selection* de 1952 [26], Markowitz dividiu o processo de investimento em dois estágios – a formação de crenças probabilísticas (“*security analysis*”) e a escolha do portfólio. Ele argumentou que na escolha de um portfólio o objetivo de maximizar o retorno esperado não era consistente com a prática de diversificação até então. Ele também apontou que a lei de grandes números não se aplica, como Williams (1938) [28] sugeriu e, como Hicks (1935) [21] apontou, que o risco pode ser eliminado, desde que os retornos dos ativos sejam muito inter-correlacionados.

Markowitz então sugeriu que o comportamento do investidor era consistente com a maximização da utilidade esperada onde a utilidade era uma função da média e variância e apontou que este objetivo implicava em uma função de utilidade côncava. Ele criou expressões para retorno esperado do portfólio e variância do portfólio e definiu portfólios eficientes baseados na média-variância. Utilizando-se de análise

⁶ Ver contribuição de Chambers em Mães (1989)[23].

⁷ Marschak (1938) [24] também discute medidas de dispersão da distribuição de probabilidades dos retornos e sugere que em certas circunstâncias o coeficiente de variação poderia ser usado como medida de risco.

⁸ Outros autores na década de 1930 referiram brevemente à importância da dispersão dos retornos na escolha de um portfólio e preços de ativos, como Keynes na *Teoria Geral* e Marschak [24].

gráfica do problema do portfólio com três ativos, os portfólios eficientes são identificados traçando-se dentro do conjunto possível os pontos tangentes entre o plano formado entre o retorno esperado do portfólio e a parábola formada pela variância do portfólio.

O artigo de 1952 estabeleceu os elementos básicos da teoria de média-variância incluindo a proposição da função objetivo, a expressão para a variância do portfólio e a natureza da solução. Dentre os aspectos do modelo a ser desenvolvido, como o desenvolvimento de técnicas para computação de portfólios eficientes, seu trabalho de 1956 avança bastante no assunto. Markowitz (1956) [28] apresenta o problema geral de seleção de portfólios e desenvolve a linha crítica para resolvê-lo.⁹

Quatro outros pontos do problema de seleção de portfólios são introduzidos no livro de 1959. Primeiramente, Markowitz analisa as implicações de utilidade das regras de seleção entre as alternativas e, no caso do critério de semi-variância, ele discute o processo de solução. Em segundo lugar, Markowitz inclui uma discussão de seleção de portfólio sob utilidade logarítmica e aponta que o portfólio que maximiza a média geométrica dos retornos é aproximadamente média-variância eficiente¹⁰. Em terceiro lugar, ele mostrou como, com o número de ativos do portfólio aumentando, a variância do portfólio aproxima-se da covariância média. Finalmente, ele sugeriu que a matriz de covariância pode ser simplificada se as correlações entre os retornos dos ativos resultam simplesmente da influencia comum do mercado.¹¹

Com este quarto aspecto introduzido por Markowitz e sua extensiva discussão sobre um modelo com “*cross-sectionally independent residuals*” apontaram o caminho para o desenvolvimento do modelo diagonal de Sharpe [34] e indiretamente para o “*capital asset price model (CAPM)*”. Sharpe empregou a sugestão de Markowitz de um modelo de índice para diagonalizar a matriz de covariância e isto, por sua vez, levaram Treynor [35] e Black [36] à separação do processo de seleção de portfólios em um componente passivo e outro ativo.

⁹ Na mesma década, Markowitz ainda publicou um livro em 1959 [29] incluindo os artigos de 1952 e 1956, mais também indo além para preencher espaços deixados em aberto. Entre as discussões aqui incluídas está possibilidade de se usar programação dinâmica para maximizar diretamente uma função multi-periódica. Ele mostra como a alternativa de se trabalhar com média e variâncias implica em uma função de utilidade quadrática.

¹⁰ Para maiores detalhe sobre portfólios de semi-variância, ver Ballesterio (2005)[30] e Bond & Satchell (2002)[31]. Para uma aplicação do processo de otimização através da média-semivariância utilizando ações do Ibovespa, ver Matsumoto & Pinheiro (2006)[32]

¹¹ Markowitz ainda publicou outros artigos debatendo com seus contemporâneos e evoluindo aspectos de sua teoria e, em 1987, publicou um segundo livro [33].

Em outro brilhante insight, Markowitz notou que colocando *cash* como um dos ativos, a fronteira eficiente torna-se linear. Porém, a demonstração de que a escolha entre ativos arriscados poderia ser separada da aversão individual ao risco foi feita por Tobin (1958) [25]. Neste ponto, com o avanço de Tobin implicando que o risco poderia ser separadamente negociado e precificado, já se faziam presentes os principais elementos para o desenvolvimento do *capital asset price model* (CAPM).

Markowitz (1952) mostrou que, mediante a aplicação de técnicas de programação quadrática, seria possível otimizar a relação entre risco e retorno de um conjunto de ativos com risco. A correta aplicação das técnicas apresentadas levaria à formação de uma fronteira eficiente - conjunto de pontos onde dado o risco, o *portfólio* apresentaria maior nível de retorno esperado, ou, dado o retorno, mostraria o menor nível de risco.

Em 1958, complementando os trabalhos de Markowitz (1952), James Tobin ressaltou a importância do estudo da preferência pela liquidez, introduzindo uma taxa livre de risco na análise de investimentos. A depender do seu grau de aversão ao risco, o investidor poderia concentrar seus recursos em um ativo com taxa de retorno predeterminada, sem possibilidades de variações. Dada a existência dessa taxa livre de risco, existiria apenas uma combinação ótima de ativos com risco, que maximizaria a relação entre risco e retorno, independentemente das preferências do investidor entre risco e retorno, representado pelo ponto M da Figura 2.1.

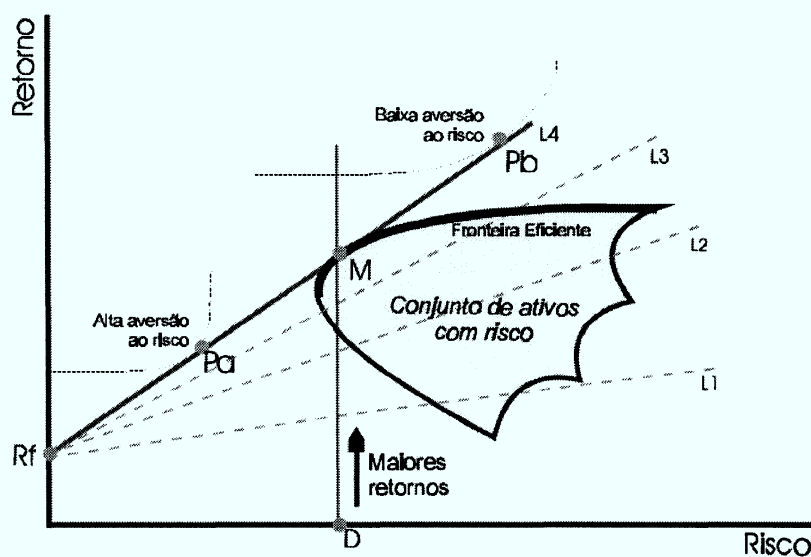


Figura 2.1 – Risco *Versus* Retorno, apud Bruni, A. & Fama, R.pag. 4 [37]

A Figura 1 ilustra os trabalhos de Markowitz (1952) e Tobin (1958). De acordo com Bruni & Fama [37], com base em técnicas de programação quadrática, poder-se-ia determinar um conjunto de pontos ótimos com base na relação entre risco e retorno (fronteira eficiente) dos ativos com risco. Supondo a existência de um ativo livre de risco, um investidor, de acordo com as suas preferências por risco e retorno, poderia distribuir seus investimentos entre ativos com risco e livre de risco (carteira P_a , formada por um investidor com alta aversão ao risco, e P_b , formada por um investidor de baixa aversão ao risco). Assim, melhores relações seriam obtidas entre pontos otimizados da fronteira eficiente - que apresentariam a melhor combinação dos ativos com risco - e o ativo livre de risco. Mais especificamente, entre o ponto tangente a fronteira eficiente e o ativo livre de risco. Este ponto tangente, M , maximizaria os retornos esperados, ilustrando o teorema da separação¹².

Os investimentos dos diferentes investidores passariam a ser representado pelo segmento de reta formado entre R_f e M . Dado o seu nível de aversão ao risco, um investidor poderia distribuir seus recursos entre o ativo livre de risco (R_f) e o conjunto ótimo de ativos com risco (carteira M), concentrando-os da forma que melhor lhe agradasse. Pontos à direita do portfólio de risco podem ser alcançados através de alavancagem, isto é, tomando dinheiro empresta à taxa R , e investido no portfólio arriscado.

Segundo Varian (1993) [39], *"Tobin's discovery dramatically simplified portfolio selection: his analysis showed that the same portfolio of risky assets is appropriate for everyone. All that varies is how much money you choose to put in risky assets and how much you choose to put in the riskless asset. But one still needs to determine just which stocks, and which proportions of stocks, comprise the magic portfolio m -and that is a difficult and costly computation. The next contribution to portfolio theory was a simplified way to perform this computation"*.

¹² "In essence, the Theorem postulates that an investor can control the risk of a basket of risky investments by either borrowing at the risk free rate and leveraging the portfolio (and its risk), or alternately, lending at the risk free rate and tempering risk. Since most investors are risk averse, the clear preference of most investors is to combine the risky basket of securities with risk free bonds, and thereby lower the downside risk of the portfolio". [25] Para maiores desenvolvimentos em relação ao teorema da separação, ver [38].

A partir dos trabalhos de Markowitz (1952) e Tobin (1958), Sharpe (1964) elaborou o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), modelo que representou a formação de preços de ativos financeiros nos mercados de capitais em equilíbrio¹³.

Segundo Litzenberger [42], o trabalho de Sharpe teve enorme importância não só para a pesquisa acadêmica em economia financeira, como também para o desenvolvimento de várias aplicações práticas para problemas de alocação financeira e de investimentos. Estas aplicações vão desde o modelo de precificação binomial, que forneceu um método eficiente para a determinação do valor de complicadas opções americanas; método de mensuração da performance ajustada ao risco para fundos mútuos e fundos de pensão; até a determinação de preços para monopólios naturais regulados.

No entanto, o maior legado de Sharpe para as finanças foi o Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM). O CAPM faz uma descrição teórica da relação de equilíbrio entre as taxas de retorno esperadas e o risco. Basicamente, o prêmio de risco de um ativo (isto é, a taxa esperada de retorno acima da taxa de juros livre de risco) é proporcional ao seu beta. O beta de um ativo é definido como uma medida da sensibilidade de sua taxa de retorno a uma mudança na taxa de retorno geral do mercado.

Sharpe avançou em um importante aspecto do modelo de escolha de portfólios. Até então, a análise de Markowitz da fronteira eficiente era focada no impacto de restrições não-negativas na escolha de um portfólio de ativos (isto é, não se permitia *short-selling*) e não considerava a presença de um ativo livre de risco. Já os subseqüentes desenvolvimentos do CAPM incluíram tanto a existência de um ativo livre de risco como oportunidades de *short-selling*.¹⁴

Por fim, um último avanço fundamental para o que consideramos a moderna teoria do portfólio foi feito por Fisher Black em seu artigo de 1972 [37]¹⁵. Até então o modelo de Sharpe-Lintner não considerava nenhuma restrição a fazer ou tomar

¹³ A criação e o desenvolvimento do CAPM é geralmente atribuída a mais três autores que eram contemporâneos, mas que trabalharam na maior parte do tempo de maneira independente: Treynor (1962)[35], Lintner (1965)[40a,b] e Mossin (1966)[41].

¹⁴ Para uma revisão da contribuição de Sharpe à Teoria do Portfólio, ver, primeiramente, o discurso do próprio Sharpe quando recebeu o Premio Nobel, em 1990, que, em seguida foi publicado como artigo. [43]. Ver também: Litzenberger [41], Fama, E. & French, K. [44] Perold, A. [45] e Varian, H. [39]. Em Milani, L. [46] pode-se observar um teste empírico do CAPM na Bovespa no período de 1996 a 2000. Além disso, existe uma extensa literatura a respeito de testes e aplicações empíricas do CAPM, os quais não são objetos deste estudo. No entanto, referências para esta literatura podem ser encontradas nos textos mencionados acima.

¹⁵ Par uma revisão do trabalho de Black, ver Mehrling, P. [47]

empréstimos à taxa livre de risco, uma hipótese considerada pelo autor como irrealista. Black mostra que o principal resultado do CAPM – que o portfólio de mercado é eficiente segundo a média e variância – pode, ao contrário, ser obtido permitindo vendas irrestritas de ativos arriscados. Em resumo, se não há o ativo livre de risco, os investidores selecionam portfólios ao longo da fronteira eficiente de média-variância na Figura 2.1. O processo de formação de preços no mercado implica que quando um investidor distribui sua riqueza em uma carteira, o portfólio eficiente escolhido por investidores por sua parcelas (positivas) da riqueza agregada investida, o portfólio resultante será o portfólio de mercado. O portfólio de mercado é então um portfólio de portfólios eficientes escolhidos pelos investidores. Com vendas irrestritas de ativos arriscados, portfólios compostos de eficientes são eles mesmos eficientes. Então o portfólio de mercado é eficiente, o que significa que a condição de mínima variância para M (Figura 1) se mantém, e é a relação esperada de risco-retorno do CAPM de Black.

2.2 Conceitos e definições: Markowitz, Tobin e Black

Tendo em vista a complexidade do tema, bem como o inter-relacionamento das variáveis que estão envolvidas no estudo, torna-se necessário definir e conceituar os principais termos utilizados no trabalho, permitindo desta forma, uma melhor compreensão dos objetivos propostos:

a) **Portfólio**: um portfólio de aplicações financeiras é uma carteira de investimentos mantida por uma instituição ou indivíduo. Manter um portfólio de aplicações faz parte de uma estratégia de diversificação, com o intuito de diminuir o risco. Se supusermos que w_o é o patrimônio do investidor, sua restrição orçamentária é dada por:

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_A v_A = w_o \quad (2.1)$$

onde n_i é o número de ativos e v_i é o preço do ativo (valor corrente). A fração do patrimônio investida no ativo i é definida por $x_i = \frac{n_i v_i}{w_o}$. Neste caso, a equação da restrição orçamentária pode ser reescrita como $\sum_i \frac{n_i v_i}{w_o} = \sum_i x_i = 1$. Então um portfólio será o vetor:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ com } \sum_i x_i = 1. \quad (2.2)$$

b) **Portfólio de arbitragem**: um portfólio em que $\sum_i x_i = 0$, ou seja, o investidor não entra com dinheiro próprio no portfólio, ele usa crédito para comprar ativos. Desta forma, suas “*long positions*” cancelam as “*short positions*”.

c) **Comprador** ($x_i > 0$): quem assume a posição de compra – entrega dinheiro em troca do ativo. Efetuada a compra ele se diz *comprado* ou *coberto* (“*long position*”).

d) **Vendedor**: ($x_i < 0$): quem assume a posição de venda – recebe dinheiro e entrega um ativo. Efetuada a operação ele se diz *vendido* ou *descoberto* (“*short position*”).

e) Retorno: o retorno de um ativo é definido como:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2.3)$$

Somando-se 1 em ambos os lados da equação, temos:

$$1 + R_t = 1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2.4)$$

Se definimos $Z = 1 + r$, então $Z^n = (1 + r)^n$. Assim temos a relação entre os tempos i e f como:

$$P_f = Z^n P_i \quad (2.5)$$

Passando P_i para o lado esquerdo e fazendo o logaritmo neperiano de ambos os lados, temos:

$$\ln \frac{P_f}{P_i} = n \ln Z \quad (2.6)$$

$$Z = \ln(1 + R) \quad (2.7)$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned} 1) e^x = y &\longrightarrow \ln e^x = \ln y \longrightarrow x = \ln y \\ 2) e^{\ln y} &= y \\ 3) \ln e^x &= x \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo a equação 2.8 em 2.5, temos:

$$P_t = P_0 e^{\ln Z t} = P_0 e^{rt} \quad (2.9)$$

$$P_1 = P_0 e^r$$

$$\frac{P_1}{P_0} = e^r \quad (2.10)$$

Fazendo o logaritmo neperiano e invertendo os lados da equação 9, temos:

$$r = \ln \frac{P_1}{P_0} \quad (2.11)$$

A equação 10 é definida como *Log-Retorno*.

Assim, substituindo a equação 2.4 em 2.11, temos:

$$r = \ln(1 + R) \quad (2.12)$$

Como $Z = 1 + R = e^r$ (Equações 4 e 10) ¹⁶ Substituindo em 12, temos:

$e^r = 1 + R$ Rearranjando, temos:

$$R = e^r - 1 \quad (2.13)$$

f) Retorno médio, Covariância, Índice de Correlação e Variância: para um portfólio com 2 ativos arriscados, sem arbitragem e sem “short position” ($x_1 + x_2 = 1$ e $x_i \geq 0$), podemos definir as seguintes relações: as esperanças de retorno $\bar{r}_1$ e $\bar{r}_2$ são definidas por $\bar{r}_1 = E[r_1]$ e $\bar{r}_2 = E[r_2]$; as variâncias σ_1^2 e σ_2^2 são definidas por $\sigma_1^2 = E[(r_1 - \bar{r}_1)^2]$ e $\sigma_2^2 = E[(r_2 - \bar{r}_2)^2]$; a covariância σ_{12} é definida por $\sigma_{12} = E[(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2)]$; e a correlação ρ_{12} é definida por $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ ($-1 \leq \rho \leq 1$).

Então o retorno e o retorno médio deste portfólio serão, respectivamente:

$$r = x_1 r_1 + x_2 r_2 \quad (2.14)$$

$$\bar{r} = x_1 \bar{r}_1 + x_2 \bar{r}_2 \quad (2.15)$$

Fazendo (2.14) – (2.15), temos:

$$r - \bar{r} = x_1 (r_1 - \bar{r}_1) + x_2 (r_2 - \bar{r}_2)$$

Agora podemos calcular a esperança de retorno do portfólio. Temos que:

$$\begin{aligned} E[(r - \bar{r})^2] &= E[\{x_1 (r_1 - \bar{r}_1) + x_2 (r_2 - \bar{r}_2)\}^2] \\ &= E[x_1^2 (r_1 - \bar{r}_1)^2 + x_2^2 (r_2 - \bar{r}_2)^2 + 2x_1 x_2 (r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo na equação 16 com as relações definidas anteriormente, temos a medida da variância do portfólio:

$$\sigma^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12} = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 \quad (2.17)$$

Não existem ativos que não guardam nenhuma relação entre si, ou seja, não estão correlacionados. Se dois ativos são perfeitamente correlacionados de forma positiva ($\rho_{12} = 1$), a equação 17 pode ser reescrita como:

$$\sigma^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 = (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2)^2 \quad (2.18)$$

Fazendo a raiz quadrada, temos, para $\rho_{12} = 1$:

$$\sigma = (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2) \quad (2.19)$$

¹⁶ Assim, se temos uma taxa diária e queremos transformá-la em uma taxa anual, teremos:

$Z^{252} = (1 + R)^{252} = e^{r \cdot 252}$. Se temos uma taxa anual de 9,25%, o retorno será $R = e^{9,5\%} - 1$.

Se dois ativos são perfeitamente correlacionados de forma negativa ($\rho_{12} = -1$), a equação 3 pode ser reescrita como:

$$\sigma^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 = (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2)^2$$

$$\sigma = |x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2| \quad (2.19)$$

O desvio-padrão, definido como a raiz quadrada da variância, será igual a zero, $\sigma = 0$, se $x_1 \sigma_1 = x_2 \sigma_2$. Desta forma, traçamos o Figura 2.1 relacionando o risco e o retorno do portfólio de dois ativos. Nele podemos visualizar que através da combinação (diversificação) dos títulos 1 e 2, com correlação negativa, quando $\rho < 0$, o risco (medido por σ) diminui.

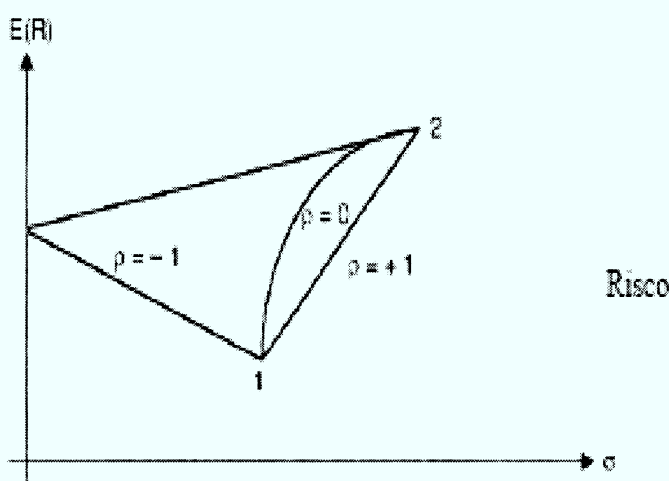


Figura 2.2: Relação Risco x Retorno para um Portfólio com dois ativos

Assim, analisando o caso em que os ativos não são perfeitamente correlacionados ($\rho < 0$), observamos que existe uma relação não-linear entre o risco do portfólio e os riscos dos ativos originais. Neste caso, pelo menos uma parte do risco de um ativo será contrabalanceado pelo risco do outro ativo, fazendo com que o desvio-padrão do portfólio seja sempre menor que a média ponderada dos riscos individuais dos ativos. O benefício da diversificação será tanto maior quanto mais distante a correlação ρ de 1.

Estes são importantes *insights* de Markowitz: i) que a diversificação não se relaciona ao fato de riscos individuais serem não correlacionados, mas eles serem imperfeitamente correlacionados e, ii) que a redução do risco através da diversificação é limitada pela extensão em que os retornos dos ativos individuais são correlacionados.

Segundo Markowitz, através da diversificação, o risco pode ser reduzido (mas não eliminado totalmente) sem mudar o retorno esperado do portfólio. O autor postula que um investidor deve maximizar o retorno esperado do portfólio (μ_p^2) e ao mesmo tempo minimizar a variância dos retornos desse mesmo portfólio (σ_p^2).

Rubinstein (2002) [48] diz ainda que provavelmente o aspecto mais importante do trabalho de Markowitz foi mostrar que não é o risco em si de um ativo que é importante para um investidor, mas a contribuição que este ativo traz à variância de todo o portfólio – e que isto era primeiramente uma questão de sua covariância com todos os outros ativos do portfólio. Isto segue da relação entre a variância do retorno do portfólio (σ_p^2) e a variância de retorno dos ativos que o constituem (σ_j^2 para $j = 1, 2, \dots, m$):

$$\sigma_p^2 = \sum_j x_j^2 \sigma_j^2 + \sum_j \sum_{k \neq j} x_j x_k \rho_{jk} \sigma_j \sigma_k \quad (2.21)$$

onde os x_j são as proporções do portfólio (isto é, a fração do valor total do portfólio referente ao ativo j para que $\sum_j x_j = 1$ e ρ_{jk} é a correlação dos retornos dos ativos j e k . Assim, $\rho_{jk} \sigma_j \sigma_k$ é a covariância entre seus retornos. Rubinstein afirma que o artigo de 1952 de Markowitz foi o primeiro a conter essa equação publicada em um trabalho de economia financeira.

Segundo Milani (2001) [46] e Macastropa (2006) [49], Markowitz introduziu dois outros conceitos importantes: fronteira eficiente e portfólio eficiente. A fronteira eficiente nada mais é que a linha de combinações eficientes entre os ativos, vista como o lugar geométrico das oportunidades de investimento que não são dominadas por outros. Bodie, Kane & Marcus (2000, p.199) [50] definem a fronteira eficiente como sendo o “gráfico que representa um conjunto de carteiras que maximizam o retorno esperado em cada nível de risco da carteira”. Na fronteira eficiente não existem títulos individuais, apenas portfólios, sendo que somente nos dois extremos é que pode haver um único título. Para Markowitz, uma unidade econômica deverá buscar uma carteira de títulos situada sobre a fronteira eficiente. A fronteira eficiente está interligada ao conjunto de oportunidades que representa todas as carteiras possíveis de ativos financeiros disponíveis para investimentos pelos indivíduos.

A fronteira mostra ainda a compensação entre risco e valor esperado do retorno. Sua declividade depende da correlação entre as combinações de ativos financeiros situados sobre a curva. Para Markowitz, uma unidade econômica deverá

buscar uma carteira de títulos situada sobre a fronteira eficiente. A fronteira eficiente está interligada ao conjunto de oportunidades que representa todas as carteiras possíveis de ativos financeiros disponíveis para investimentos pelos indivíduos. Dadas as oportunidades de investimentos e as preferências dos investidores, representadas pela sua função de utilidade, a seleção do portfólio será aquela que maximiza a utilidade destes investidores. Este será o ponto de tangência entre a fronteira eficiente e a mais alta curva de indiferença possível, como ilustrado na figura 2.

A Figura 2.2 mostra a curva de indiferença e a fronteira eficiente calculada com seis ativos.

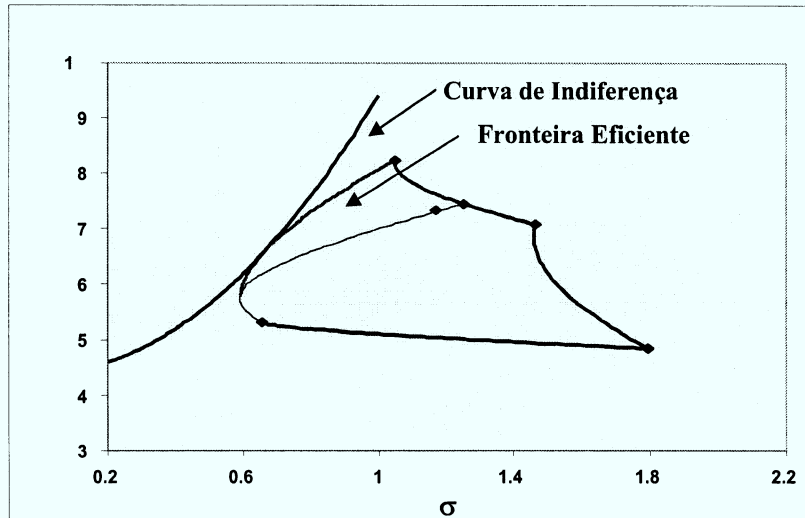


Figura 2.3: Exemplo de Fronteira Eficiente de Markowitz com 6 ativos

Assim, para um dado valor do retorno médio $\bar{r}$ podemos procurar o portfólio $\bar{x}$ que minimiza a variância σ^2 , sujeito às restrições $\sum x_i \bar{r}_i = \bar{r}$ e $\sum x_i = 1$. Em outras palavras, temos um problema otimização que, para o modelo de Markowitz, pode ser definido como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \sigma^2 = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j \text{ sujeito às} \\ &\text{restrições: } \sum x_i = 1; \sum x_i \bar{r}_i = \bar{r} \text{ e } x_i \geq 0 \quad \forall i. \\ &\text{Definindo } V_{ij} = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)]. \end{aligned}$$

De acordo com Litzenberger (1991)[42], “*Markowitz analysis of the efficiency frontier focuses on the impact of non-negativity constraints on security holding and does not consider a riskless asset. The subsequent development of CAPM necessitated*

the aggregation of individual asset demands, which requires either the existence of a riskless asset or short-selling opportunities”.

Desta forma, Black (1972)[36] fez um importante avanço no modelo de Markowitz. Ele retirou a restrição $x_i \geq 0$ e, assim, o modelo passou a permitir a compra e venda de ativos de modo que o investidor possa ficar *vendido* (permitiu “short position”). O modelo Black incorporou o modelo de Markowitz, deixando-o mais realista. E, sem aquela restrição, a fronteira eficiente de Black deve incluir (“dominar”) a de Markowitz, como ilustra a Figura 2.3.

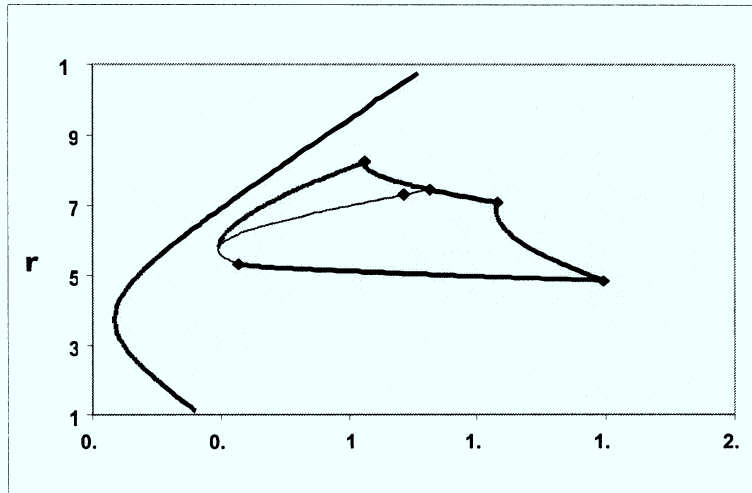


Figura 2.4: Exemplo de Fronteira Eficiente de Black e Markowitz com 6 ativos

O problema de otimização do modelo de Black pode ser definido como:

$$\text{Minimizar } \sigma^2 = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j \text{ sujeito às}$$

$$\text{restrições } \sum x_i = 1 \text{ e } \sum x_i \bar{r}_i = \bar{r}.$$

Antes de introduzir no modelo a possibilidade de oportunidades “*short selling*”, Tobin (1958)[25] abriu a possibilidade de os investidores escolherem entre os ativos arriscados e um ativo sem risco. Neste trabalho Tobin usou o modelo de média-variância para estudar a preferência por liquidez dos agentes. Segundo Litzenberger [42], ele mostrou que os investidores tendo uma escolha entre *cash* (um ativo sem risco que não paga juros) e ativos com diferentes maturidades (ativos arriscados), escolherão portfólios de ativos arriscados idênticos. Apenas a alocação entre *cash* e o portfólio ótimo depende da sua preferência por risco.

O modelo de Tobin usa as condições de Markowitz com as seguintes modificações: introduz um ativo de renda fixa com risco zero e permite “*short selling*” apenas desse ativo, com todos os outros em “*long position*”. Sabendo que a renda fixa tem risco zero ($\sigma_f = 0$) e definido r_f como sendo o retorno deste ativo, o retorno deste novo portfólio é dado por:

$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_f}{\sigma_i} \sigma \quad (2.22)$$

Esta equação é uma reta que passa pelo ponto $(0, r_f)$ e tem inclinação $\frac{\bar{r}_i - \bar{r}_f}{\sigma_i}$.

A nova fronteira eficiente, ilustrada na Figura 2.6, é a reta tangente que passa por $(0, r_f)$ e encontra a fronteira de Markowitz. Qualquer ponto dessa fronteira pode ser alcançado com apenas dois portfólios: renda fixa e o portfólio na tangência, que chamaremos portfólio de mercado $\bar{X}_m$, com rendimento $\bar{r}_m$ e desvio-padrão σ_m . Os investidores irão escolher seus portfólios ao longo essa reta de acordo com seus mapas de preferência.

Para ilustrar como a possibilidade de tomar e fazer empréstimos à taxa livre de risco afeta as escolhas dos investidores, Perold (2004)[45] usou um exemplo de escolha em três ativos, sendo um livre de risco, um com alto retorno e risco e outro de perfil moderado.

	Retorno Esperado	Risco (D.P)
Ativo livre de risco	5% (r_f)	0%
Ativo M	10% (E_M)	20% (σ_M)
Ativo H	12% (E_H)	40% (σ_H)

Tabela 2.1: Como fazer ou tomar empréstimos à taxa livre de risco afeta as escolhas dos investidores.

(Apud Perold, A. pag. 10 [45])

Supondo que se possa tomar e fazer empréstimo à taxa livre de risco, e o que investidor formará seu portfólio dividindo sua riqueza entre uma parcela aplicada no ativo livre de risco e outra no ativo H. Se x é a fração da riqueza aplicada no ativo H, então $1 - x$ é a fração investida no ativo livre de risco. Quando $x < 1$, você está fazendo um empréstimo à taxa livre de risco; quando $x > 1$, você está tomando emprestado a taxa livre de risco. O retorno esperado deste portfólio é

$(1-x)r_f + xE_H$, que é igual a $r_f + x(E_H - r_f)$, e o risco do portfólio é $x\sigma_H$. Portanto, o risco do portfólio é proporcional ao risco do ativo H, desde que o ativo H seja a única fonte de risco no portfólio.

A relação linear entre risco e retorno esperado é mostrada na figura 2.5. Cada ponto da linha ligando o ativo livre de risco ao ativo H representa uma particular alocação (x) do ativo H com um balanço entre tomada / contração de empréstimo à taxa livre de risco. A inclinação da reta é chamada Índice de Sharpe – o prêmio de risco do ativo H dividido pelo risco do ativo H.

$$\text{Índice de Sharpe} = (E_H - r_f) / \sigma_H \quad (2.23)$$

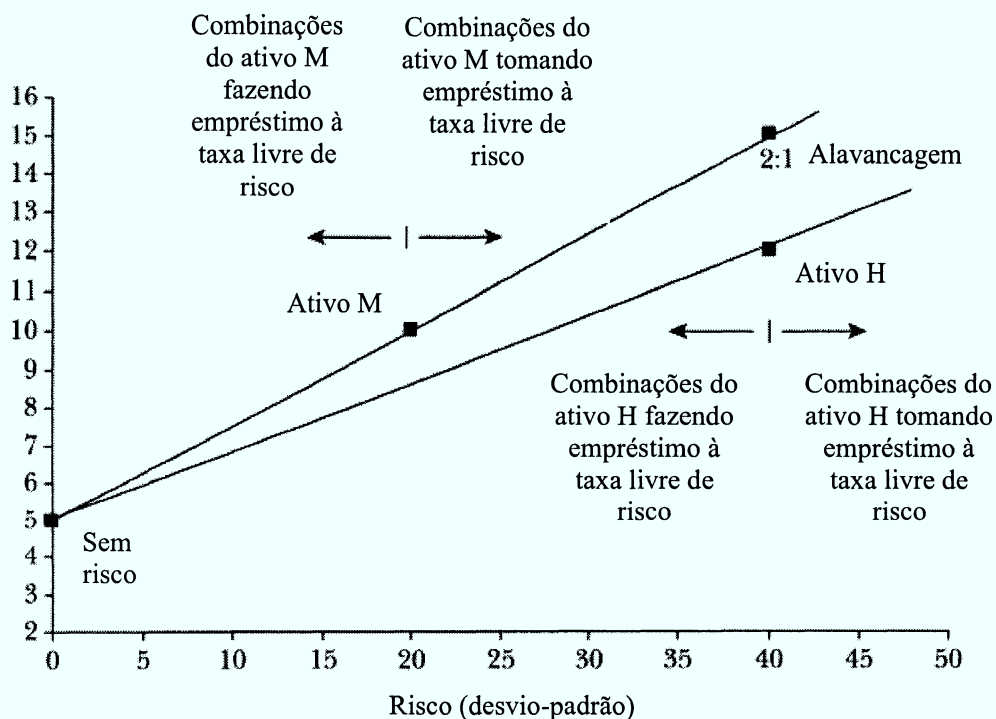


Figura 2.5: Combinando um ativo arriscado com empréstimos à taxa livre de risco. (Apud Perold, A. pag. 11 [45])

O Índice de Sharpe do ativo H é 0,175 ($= (12\% - 5\%) / 40\%$) e todas as combinações do ativo H com possibilidade de empréstimo à taxa livre de risco possuem a o mesmo Índice de Sharpe.

A figura 2.5 também mostra os riscos e retornos esperados possíveis com a combinação do ativo M com o ativo livre de risco. O Índice de Sharpe do ativo M (0.25) é maior que do ativo H, e qualquer nível de risco e retorno esperado que podem ser obtidos com uma combinação do ativo H com o ativo livre de risco é dominado

por qualquer combinação do ativo M com o ativo livre de risco. Assim, se fosse possível apenas investir em apenas um ativo juntamente com o ativo livre de risco, certamente seria o ativo M.

Conclui-se deste argumento que a possibilidade de tomar e fazer empréstimos à taxa livre de risco muda significativamente as escolhas de investimentos. Primeiramente, a escolha do ativo – se fosse possível escolher apenas um ativo – será aquele com o maior Índice de Sharpe. A segunda decisão será a quantidade deste ativo alocar em seu portfólio, o que dependerá da tolerância ao risco do investidor.

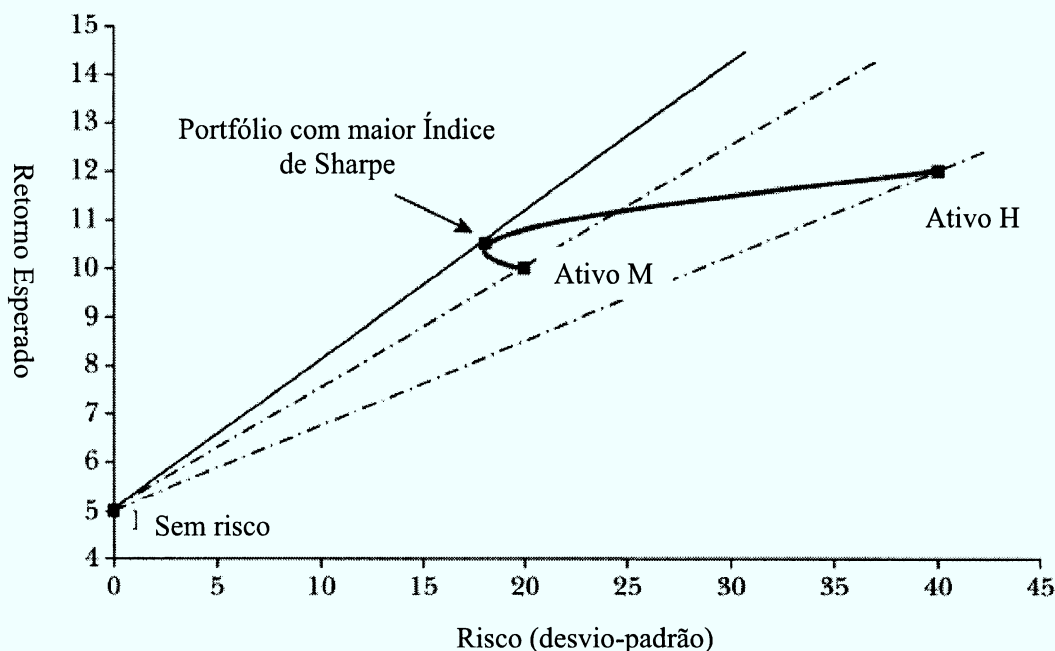
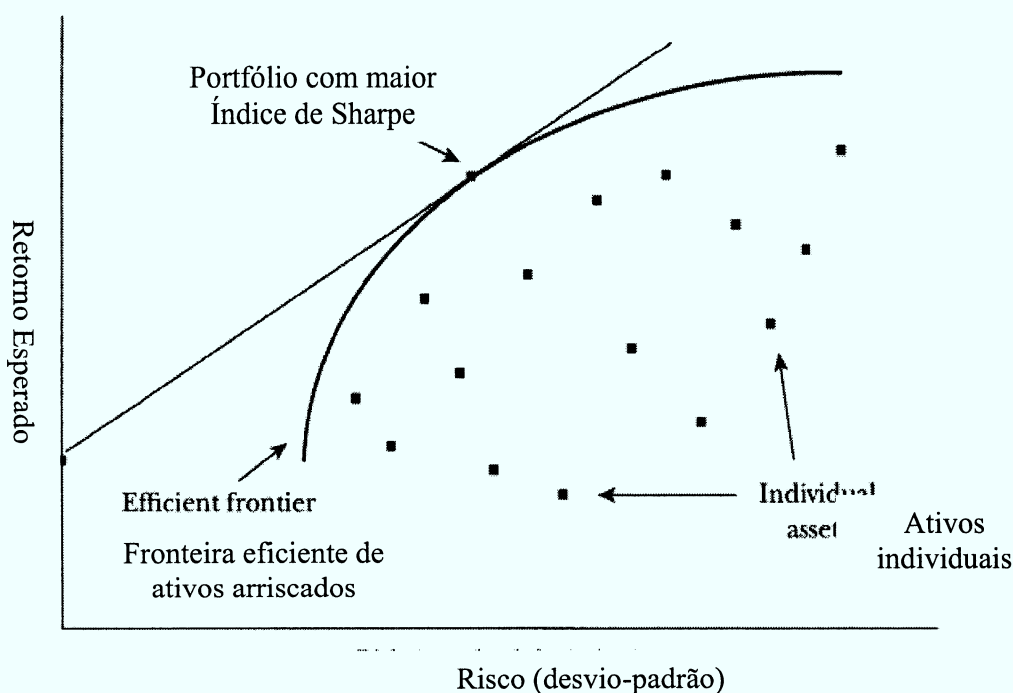


Figura 2.6: Fronteira Eficiente com dois ativos arriscados, com a possibilidade de empréstimos à taxa livre de risco. (Apud Perold, A., pag. 12 [45])

A figura 2.6 ilustra o caso onde o investido pode alocar seu portfólio entre os ativos arriscados M e H, além de poder fazer e tomar empréstimos à taxa livre de risco. (Assume-se uma correlação entre os retornos dos ativos H e M igual a zero). A curva ligando os ativos M e H representa todos os pares retorno esperado $\times$ desvio-padrão que pode ser obtidas através da combinação dos ativos M e H, sendo o ponto A o portfólio com maior Índice de Sharpe (ponto de tangência). Todos os investidores que têm as mesmas estimativas de retorno e risco irão alocar seus portfólios na linha de tangência ligando o ativo livre de risco à fronteira.

De maneira similar podemos encontrar o portfólio ótimo com muitos ativos arriscados, como ilustra a figura 2.7. Primeiramente, utiliza-se o algoritmo de Markowitz para se obter a fronteira eficiente de muitos ativos arriscados. Então se encontra o portfólio na fronteira eficiente que possui o maior Índice de Sharpe, que será o ponto de tangência da reta iniciando no ativo livre de risco com a fronteira eficiente. Por fim, de acordo com o grau de tolerância ao risco, se aloca a riqueza entre este portfólio com maior Índice de Sharpe e o ativo de risco (fazendo ou tomando empréstimo).



2.7: Fronteira Eficiente com vários ativos arriscados e Portfólio com maior Índice de Sharpe. (Apud Perold, A. pag. 12 [45])

Uma versão modificada do modelo de Tobin retira a restrição $x_i > 0$ como no modelo de Black e, da mesma forma que no modelo de Tobin, se introduz o ativo de renda fixa. Tudo fica como antes só que a fronteira eficiente para o cálculo da tangente é a fronteira de Black. Como esta é uma hipérbole só haverá um portfólio de tangência, o portfólio de mercado $\bar{X}_m$, e a que passa pelo ponto $(0, r_f)$ e tem inclinação $\frac{\bar{r}_i - \bar{r}_f}{\sigma_i}$ receberá o nome de Linha do Mercado de Capitais (*Capital Market*

Line – CML). Assim, a Linha do Mercado de Capitais é a linha tangente à fronteira eficiente que passa pela taxa livre de risco no eixo dos retornos esperados.

O ponto de tangência corresponde ao portfólio na fronteira eficiente. Este portfólio é chamado *portfólio super-eficiente*. Assim, utilizando o ativo livre de risco, os investidores que possuem o portfólio super-eficiente poderão: i) alavancar sua posição através da venda do ativo livre de risco e investimento da renda resultante na ampliação da sua posição no portfólio super-eficiente; ii) desalavancar sua posição através da venda de uma parcela de sua posição no super-portfólio e investir a renda resultante no ativo livre de risco.

Os portfólios resultantes terão perfis de risco-retorno que sempre recairão sobre a linha de mercado de capitais. Portanto, portfólios que combinam o ativo livre de risco com o super-eficiente portfólio são superiores do ponto de vista de risco-retorno aos portfólios na fronteira eficiente.

Este processo de construção da fronteira eficiente foi chamado por Tobin de “Teorema da Separação”. Os investidores com as mesmas crenças sobre retornos esperados, riscos e correlações vão investir no portfólio de ativos arriscados com o maior Índice de Sharpe. No entanto, vão diferir em suas alocações entre este portfólio e os ativos livres de risco dependendo do seu grau de tolerância ao risco. Assim, Tobin concluiu que o processo de construção de portfólios seria feito através de duas decisões: i) a composição da porção arriscada do portfólio do investidor e, ii) o grau de alavancagem usada. Vale notar que a primeira etapa, a composição do portfólio ótimo de ativos arriscados, não depende do nível de tolerância ao risco do investidor.

2.3 O Modelo de Precificação de Ativos Financeiros de Sharpe (CAPM)

Até aqui apresentamos as fundações do Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM – *Capital Asset Price Model*). De acordo com Sharpe [43], o CAPM originou-se dos trabalhos apresentados por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966). No entanto, suas fundações estão nos trabalhos de Markowitz (1952, 1959) e Tobin (1958), além da contribuição fundamental de Black (1972).

De acordo com Sanvicente e Mellagi Filho (1988, p.41)[51], para poder evoluir suas idéias, Sharpe assumiu as seguintes premissas¹⁷:

1. Os investidores preocupar-se-iam apenas com o valor esperado e com a variância (ou o desvio-padrão) da taxa de retorno;
2. Os investidores teriam preferência por retorno maior e por risco menor;
3. Os investidores desejariam ter carteiras eficientes: aquelas que dessem máximo retorno esperado, dado o risco, ou mínimo risco, dado o retorno esperado;
4. Os investidores estariam de acordo com quanto à distribuição de probabilidades das taxas de retorno dos ativos, o que asseguraria a existência de um único conjunto de carteiras eficientes;
5. Os ativos seriam perfeitamente divisíveis;
6. Existiria um ativo sem risco, e os investidores poderiam comprá-lo e vendê-lo em qualquer quantidade;
7. Não existiriam custos de transação ou impostos, ou, alternativamente, eles seriam idênticos para todos os indivíduos.

Se todos os investidores usam as mesmas avaliações de $\bar{r}$, V_{ij} e r_f então todos terão a mesma fronteira eficiente do modelo de Tobin modificado. Essa fronteira se resume a combinar um portfólio $\bar{X}_m$ de ativos arriscados com a renda fixa¹⁸. As posições de cada investidor serão diferentes, mas todas na mesma reta, a CML.

Podemos agora definir o portfólio de mercado. Para tal, suponha o k-ésimo investidor. Quanto ele gastou no total de ativos arriscados e quanto no ativo i? O total gasto com o ativo i em relação o total de ativos arriscados é dado por $X_{ik} = \frac{W_{ki}}{W_k}$, onde W_{ki} é o total despendido no ativo i pelo investidor k, e W_k é o total gasto no

¹⁷ Estas suposições representam um mundo extremamente simplificado e idealizado, mas são necessárias para se obter o CAPM na sua forma original. Posteriormente este modelo foi estendido de diversas formas para aproximá-lo do mundo real.

¹⁸ Dados os preços correntes, os investidores irão determinar portfólio de ativos arriscados com maior Índice de Sharpe. Dependendo de sua tolerância ao risco, cada investidor vai alocar uma porção de sua riqueza no portfólio ótimo e o restante no ativo de renda fixa. Os investidores vão ter ativos arriscados na mesma proporção relativa. E, em equilíbrio, o portfólio de ativos arriscados com o maior Índice de Sharpe deve ser o portfólio de mercado.

portfólio pelo investidor k. Fazendo $W_{ki} = x_{ik}W_k$, temos que

$$\sum_i W_{ki} = \sum_i X_{ik}W_k = W_k \sum_i X_{ik} = W_k \text{ pois } \sum_i X_{ik} = 1.$$

O que as suposições do CAPM mostram é que todos os investidores terão o mesmo X_{ik} , logo $X_{ik} = X_i$, não depende de k. Entretanto W_k muda de investidor para investidor. Somando todos os gastos no ativo i, temos: $\sum_k W_{ki} = \sum_k X_{ik}W_k = X_i \sum_k W_k$

$$\text{e } X_i = \frac{\sum_k W_{ki}}{\sum_k W_k}.$$

Em uma bolsa de valores esses números são observáveis, logo podemos determinar o portfólio de mercado $\bar{X}_m$. Para tanto, precisamos, além das informações sobre r_{it} , dos volumes de compra e venda de cada ativo. E, se temos esse volume ao longo do tempo podemos, inclusive, observar r_{nt} e calcular $\bar{r}_m$ e σ_m . O portfólio de mercado deve conter todos os ativos negociados no mercado, ou seja, $X_i \neq 0, \forall i$.

Podemos então definir a variância e o retorno da carteira utilizando o CAPM. Antes, porém, faz-se necessário apresentar a “*Security Market Line (SML)*”. Para isso, vamos formar um portfólio composto pela mistura de apenas dois portfólios, o portfólio de mercado $\bar{X}_m$ e outro contendo só o ativo i.

$$\text{Temos } \bar{X}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \bar{X}_m = \begin{pmatrix} X_{1m} \\ X_{2m} \\ \vdots \\ X_{Am} \end{pmatrix} \text{ para formar } \bar{X} = x_i \bar{X}_i + (1 - x_i) \bar{X}_m.$$

Para $x_i > 0$ estamos aumentando a fração do ativo i no portfólio de mercado, deixando todo o resto relativamente fixo. Se $x_i = 1$, só compramos o ativo i. Se $x_i = 0$ adquirimos o portfólio $\bar{X}_m$. Podemos fazer $x_i < 0$ até que não exista o i-ésimo ativo no portfólio final. Todas essas combinações estão dentro da região limitada pela fronteira eficiente tangenciando-a no portfólio de mercado.

Fazendo $r = x_i r_i + (1 - x_i) r_m$ menos $\bar{r} = x_i \bar{r}_i + (1 - x_i) \bar{r}_m$, temos:

$$(r - \bar{r}) = x_i (r_i - \bar{r}_i) + (1 - x_i) (r_m - \bar{r}_m)$$

Elevando os dois lados ao quadrado e fazendo a esperança, temos:

$$E[(r - \bar{r})^2] = x_i^2 E[(r_i - \bar{r})^2] + (1 - x_i)^2 E[(r_m - \bar{r})^2] + 2x_i(1 - x_i)E[(r_i - \bar{r})(r_m - \bar{r})]$$

Substituindo e sabendo que $\sigma_{im} = \text{cov}(r_i, r_m) = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_m - \bar{r}_m)]$, temos:

$$\sigma^2 = x_i^2 \sigma_i^2 + (1 - x_i)^2 \sigma_m^2 + 2x_i(1 - x_i)\sigma_{im}$$

Temos então duas equações:

$$\bar{r} = x_i \bar{r}_i + (1 - x_i) \bar{r}_m \quad (2.24)$$

$$\sigma^2 = x_i^2 \sigma_i^2 + (1 - x_i)^2 \sigma_m^2 + 2x_i(1 - x_i)\sigma_{im} \quad (2.25)$$

Das quais podemos extrair $\frac{d\bar{r}}{d\sigma}$ fazendo $\frac{dx_i}{\frac{d\sigma}{dx_i}} = \frac{d\bar{r}}{d\sigma}$. Queremos calcular $\frac{d\bar{r}}{d\sigma}$ em

$x_i = 0$, quando tangencia a CML.

Derivando a primeira equação, temos: $\frac{d\bar{r}}{dx_i} = \bar{r}_i - \bar{r}_m$.

Derivando a segunda equação em relação à x_i , temos: $\frac{d\sigma}{dx_i} = \frac{\sigma_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_m}$.

Assim, para $x_i = 0$ e $\sigma_i = \sigma_m$ temos que: $\frac{d\bar{r}}{d\sigma} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} \sigma_m$.

Por outro lado, essa deve ser a inclinação da CML, logo:

$$\frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} \sigma_m$$

Reorganizando, temos:

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{\bar{r}_m - r_f}{\sigma_m^2} \sigma_{im} \quad (2.26)$$

Esta equação é a reta que chamamos *Security Market Line (SML)*, representada na Figura 2.8.

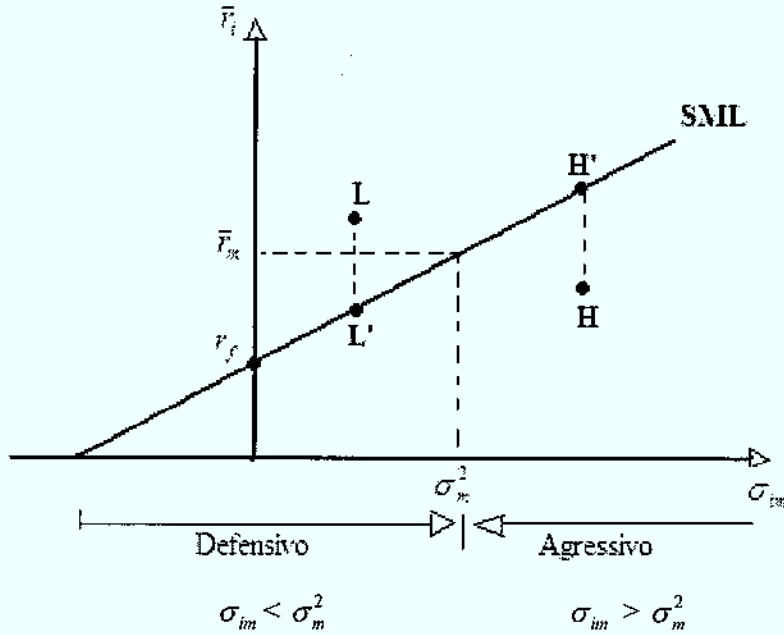


Figura 2.8: Security Market Line (SML)

Ativos com $\sigma_{im} < 0$, anticorrelacionados com o portfólio de mercado, podem dar retornos abaixo até do que a renda fixa. São muito vantajosos pela possibilidade de seu uso na diminuição do risco, e por isso têm preço alto. L é um ativo com preço baixo, *underpriced*. O ativo H está com preço alto, *overpriced*. A demanda do ativo L será alta, encarecendo-o e trazendo de volta à SML. Por outro lado, ninguém vai querer o ativo H, tornando-o mais barato até reencontrar com o ativo H' na SML. Aqui se nota que o importante é a covariância com o portfólio de mercado.

Na equação da reta da SML (equação 25), fazendo $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, temos:

$$\begin{aligned}\bar{r}_i &= r_f + (\bar{r}_m - r_f)\beta_i \\ \bar{r}_i &= (1 - \beta_i)r_f + \beta_i\bar{r}_m\end{aligned}\quad (2.27)$$

Fazendo $\alpha_i = (1 - \beta_i)r_f$, temos:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i\bar{r}_m$$

No modelo se assume que o ativo i sofre influência de um indicador do mercado e_i , de modo que:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i\bar{r}_m + e_i \quad (2.28)$$

Onde e_i é uma variável aleatória com $E(e_i) = 0$. Neste caso:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_m \quad (2.29)$$

Assume-se também que e_i é independente do comportamento do mercado, isto é, $\text{cov}[e_i, r_m] = 0$. A variância do ativo i será:

$$\begin{aligned} r_i - \bar{r}_i &= \beta_i (r_m - \bar{r}_m) e_i \\ (r_i - \bar{r}_i)^2 &= \beta_i^2 (r_m - \bar{r}_m)^2 + e_i^2 + 2\beta_i (r_m - \bar{r}_m) e_i \\ E[(r_i - \bar{r}_i)^2] &= \beta_i^2 E[(r_m - \bar{r}_m)^2] + E[e_i^2] + 2\beta_i E[(r_m - \bar{r}_m) e_i] \\ \sigma_i^2 &= \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

A covariância entre dois ativos V_{ij} pode ser encontrada através do fator comum r_m :

$$\begin{aligned} (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j) &= [\beta_i (r_m - \bar{r}_m) + e_i][\beta_j (r_m - \bar{r}_m) + e_j] \\ V_{ij} &= \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \beta_i E[e_j (r_m - \bar{r}_m)] + \beta_j E[e_i (r_m - \bar{r}_m)] + E[e_i e_j] \\ V_{ij} &= \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Para um portfólio qualquer, temos:

$$r = \sum_i x_i r_i \quad (2.32)$$

Substituindo a equação 27 em 30, temos:

$$\begin{aligned} r &= \sum_i x_i (\alpha_i + \beta_i r_m + e_i) = \sum_i x_i (\alpha_i + e_i) + \left(\sum_i x_i \beta_i \right) r_m \\ r &= \sum_i x_i \alpha_i + \sum_i x_i e_i + \left(\sum_i x_i \beta_i \right) r_m \quad \text{Equação 31, e} \\ \bar{r} &= \sum_i x_i \alpha_i + \left(\sum_i x_i \beta_i \right) \bar{r}_m \end{aligned} \quad (2.33)$$

Fazendo $(r - \bar{r})$, temos:

$$\begin{aligned} (r - \bar{r}) &= \sum_i x_i e_i + \left(\sum_i x_i \beta_i \right) (r_m - \bar{r}_m) \\ (r - \bar{r})^2 &= \sum_i \sum_j x_i x_j e_i e_j + 2 \sum_i x_i \beta_i \sum_j x_j e_j (r_m - \bar{r}_m) + \left(\sum_i x_i \beta_i \right)^2 (r_m - \bar{r}_m)^2 \\ E[(r - \bar{r})^2] &= \sum_i \sum_j x_i x_j E[e_i e_j] + 2 \sum_i \sum_j x_i \beta_i x_j E[e_j (r_m - \bar{r}_m)] + \left(\sum_i x_i \beta_i \right)^2 E[(r_m - \bar{r}_m)^2] \end{aligned}$$

$$E(e_i e_j) = \begin{cases} \sigma_i^2 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Encontramos então a variância do portfólio, que é dada por:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \sigma_i^2 + \left(\sum x_i \beta_i \right)^2 \sigma_m^2 \quad (2.34)$$

Assim, segundo o CAPM, para se calcular o retorno esperado de uma ação, o investidor conhecer duas variáveis: o prêmio de risco geral do mercado de ações $\bar{r}_m - r_f$ (assumindo que ações são os únicos ativos arriscados) e o beta da ação em relação ao mercado. O prêmio de risco da ação é determinado pelo componente do seu retorno que é perfeitamente correlacionado com o mercado – isto é, na medida em que a ação é um substituto por investir no mercado. O componente do retorno da ação que não é correlacionado com o mercado pode ser diversificado e não requer um prêmio de risco.

2.3) Resolução do problema de otimização de Black

O problema de otimização do modelo de Black pode ser definido como:

$$\text{Minimizar } \sigma^2 = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j \text{ sujeito às}$$

$$\text{restrições } \sum x_i = 1 \text{ e } \sum x_i \bar{r}_i = \bar{r}.$$

Resolvendo por Lagrangeano, temos:

$$l = \sum_i \sum_j x_i x_j V_{ij} - \lambda_1 [\sum x_i \bar{r}_i - \bar{r}] - \lambda_2 [\sum x_i - 1] \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_k} = 0 \quad \forall k \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_k} = \sum_i \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j V_{ij} + \sum_i \sum_j x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} V_{ij} - \lambda_1 \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \bar{r}_i - \lambda_2 \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\sum_j x_j V_{kj} + \sum_i x_i V_{ik} - \lambda_1 \bar{r}_k - \lambda_2 = 0 \quad (2.39)$$

$$V_{ik} = V_{ki}$$

$$\sum_j x_j V_{kj} + \sum_i x_i V_{ik} - \lambda_1 \bar{r}_k - \lambda_2 = 0 \quad (2.40)$$

$$2 \sum V_{ki} x_i - \lambda_1 \bar{r}_k - \lambda_2 = 0 \quad (2.41)$$

$$C_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \quad (2.42)$$

$$\sigma^2 = \sum_i \sum_j x_i V_{ij} x_j \quad (2.43)$$

2.43 será uma multiplicação de matrizes da forma:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} & & & \\ & V & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A resolução, na forma matricial, será dada por:

$$V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\lambda_1 \begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_n \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Assumindo as seguintes restrições:

$$\sum \bar{r}_i x_i = r \quad (2.46)$$

$$\sum x_i = 1 \quad (2.47)$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \dots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \dots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Definindo em 2.49 a variável A , representada pela multiplicação:

$$A_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Substituindo 2.50 em 2.49, temos:

$$\frac{1}{2} A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 2 A^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} 2 A^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Portanto, o Portfólio de Black será dado por:

$$(\bar{x}) = V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

E sua variância será definida como:

$$\sigma_r^2 = \bar{x}' V \bar{x} \quad (2.56)$$

Onde a transposta de $(\bar{x})$ é definida como:

$$(\bar{x}') = (r \quad 1) A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} V^{-1} \quad (2.57)$$

Substituindo 2.57 em 2.56, temos:

$$\sigma_r^2 = (r \quad 1) A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} V^{-1} V V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$\sigma_r^2 = (r \quad 1)A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 1 \\ \bar{r}_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{r}_n & 1 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$\sigma_r^2 = (r \quad 1)A^{-1}AA^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Assim, a variância do portfólio também pode ser definida como:

$$\sigma_r^2 = (r \quad 1)A^{-1} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Podemos agora calcular os parâmetros da curva da fronteira eficiente: (Ver Anexo A).

Definindo a matriz A como:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{xz - y^2} \begin{pmatrix} z & -y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{xz - y^2} (r \quad 1) \begin{pmatrix} z & -y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{xz - y^2} (r \quad 1) \begin{pmatrix} rz - y \\ -ry + x \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{xz - y^2} \{r^2 z - ry - ry + x\} \quad (2.66)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{xz - y^2} \{r^2 z - 2yr + x\} \quad (2.67)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{xz - y^2} \left\{ z \left(r^2 - 2\frac{y}{z}r + \frac{y^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} \right) + x \right\} \quad (2.68)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{xz - y^2} \left\{ z \left(r - \frac{y}{z} \right)^2 - \frac{y^2}{z} + x \right\} \quad (2.69)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{xz - y^2} \left\{ z \left(r - \frac{y}{z} \right)^2 - \frac{(xz - y^2)}{z} \right\} \quad (2.70)$$

$$\sigma_r^2 = z \frac{\left(r - \frac{y}{z}\right)^2}{(xz - y^2)} + \frac{1}{z} \quad (2.71)$$

$$z\sigma_r^2 = \frac{z^2 \left(r - \frac{y}{z}\right)^2}{(xz - y^2)} + 1 \quad (2.72)$$

$$\frac{\sigma_r^2}{\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{\left(r - \frac{y}{z}\right)^2}{\frac{(xz - y^2)}{z^2}} = 1 \quad (2.73)$$

$$\frac{\sigma_r^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{z}}\right)^2} - \frac{\left(r - \frac{y}{z}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{xz - y^2}}{z}\right)^2} = 1 \quad (2.74)$$

Temos assim definida uma hipérbole, conforme a equação característica da Hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.75)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2.76)$$

Por fim, os parâmetros da curva serão dados por:

$$a = \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (2.77)$$

$$b = \frac{\sqrt{xz - y^2}}{z} \quad (2.78)$$

$$y_0 = \frac{y}{z} \quad (2.79)$$

Assim, partindo-se da resolução do problema de otimização de Black, torna-se mais simples a resolução do problema de otimização de Markowitz, definido por:

$$\min \sigma^2 = \sum \sum x_i x_j V_{ij}$$

Dadas as restrições $restrição1 = \sum x_i = 1$, $restrição2 = \sum x_i \bar{r}_i = 1$ e $x_i \geq 0$.

2.4 A Hipótese de Eficiência dos Mercados

O conceito de eficiência dos mercados é um dos principais fundamentos da moderna teoria de Finanças. Um dos paradigmas mais aceitos no mundo das finanças é que o mercado é extremamente eficiente na determinação do preço mais racional do ativo negociado. Segundo [3], os mercados são sistemas complexos que incorporam as informações sobre um determinado ativo em sua série de preços. Para [54], o mercado é dito eficiente se todas as informações são instantaneamente processadas quando atingem o mercado e são imediatamente refletidas em um novo valor de preços dos ativos negociados¹⁹.

Segundo [3], a motivação teórica para a hipótese de mercados eficientes tem suas raízes no trabalho pioneiro de Bachelier [2], que em 1900 propôs que o preço de um ativo em um mercado especulativo pode ser descrito como um processo estocástico. Este trabalho permaneceu quase desconhecido até quem na década de 50, quando resultados empíricos [53] sobre a correlação serial da taxa de retorno mostraram que as correlações em uma escala de curto prazo são negligenciáveis e que o comportamento aproximado da série de retornos é de fato similar a passeios aleatórios sem correlação.

A hipótese de mercados eficientes foi formulada explicitamente em 1965 por Samuelson [54], que mostrou matematicamente que preços antecipados apropriadamente flutuam aleatoriamente. Utilizando a hipótese de comportamento racional e eficiência de mercado, ele foi capaz de demonstrar como Y_{t+1} , o valor esperado do preço de um ativo no tempo $t + 1$, está relacionado com os valores anteriores dos preços $Y_0, Y_1, \dots, Y_t$ através da relação:

$$E\{Y_{t+1}|Y_0, Y_1, \dots, Y_t\} = Y_t. \quad (2.80)$$

Supondo a existência de mercados eficientes, Markowitz, Tobin, Sharpe, Lintner, Treynor, Mossin e Black apresentaram estudos das quais se originou o *capital asset pricing model* – modelo de precificação de ativos financeiros.

Essa hipótese começou a ser elaborada a partir dos fracassos em se encontrar padrões recorrentes nos movimentos dos preços de ações, já nas primeiras aplicações

¹⁹ A hipótese de mercados eficientes foi originalmente formulada nos anos 1960 por Eugene Fama [54].

de computadores em economia, nos anos 50. Kendall (1953)[55] descobriu que não podia identificar nenhum padrão previsível nos preços das ações. Na década de 60, diversos estudos empíricos foram realizados para testar a hipótese de mercados eficientes.[56] Na grande maioria dos estudos, a correlação temporal entre as mudanças de preços provou-se negligentemente pequena, suportando a hipótese de mercados eficientes. Já nos anos 80 foi mostrado que a utilização de informações presentes em séries históricas adicionais como “*earning/price ratios, dividend yields and term structure variable*”s, é possível fazer previsões da taxa de retorno de um dado ativo em uma grande escala temporal, muito superior a um mês. Assim, observações empíricas mudaram a forma estrita da hipótese de mercados eficientes.

Conforme observa Stanley & Mantegna [3], observações empíricas e considerações teóricas mostram que as mudanças de preços são difíceis, se não impossíveis, de se prever se partimos da série temporal das mudanças de preços. Em sua forma estrita, um mercado eficiente é um sistema idealizado. Nos mercados reais, ineficiências residuais estão sempre presentes. A procura e exploração constante por oportunidades de arbitragem é um modo de eliminação das ineficiências de mercado.

O mesmo autor, seguindo uma linha desenvolvida por Kolmogorov e Chairin nas teorias de complexidade algorítmica e teoria da informação nos anos 60, explica que as séries temporais financeiras parecem imprevisíveis, e seus valores futuros são essencialmente impossíveis de se prever. Esta propriedade das séries temporais financeiras não é uma manifestação do fato de que as séries históricas de preços de ativos financeiros não refletem qualquer informação útil e importantes informações econômicas. Na verdade, o oposto é o verdadeiro. As séries históricas de preços em mercados financeiros contêm uma quantidade enorme de informações não-redundantes. E, porque a quantidade de informações é tão grande, é difícil extrair um sub-conjunto de informações econômicas associadas com algum aspecto específico.

Assim, a dificuldade de se fazer previsões está associado com a abundância de informações em dados financeiros, e não na falta delas. Quando um dado conjunto de informações afeta os preços em um mercado de um modo específico, o mercado não é completamente eficiente. Isto nos permite detectar, a partir de uma série temporal de preços, a presença destas informações. Em casos similares, estratégias de arbitragem podem ser criadas e elas irão durar até que o mercado recupere sua eficiência através da mixagem de todas as fontes de informação durante o processo de formação do preço.

No entanto, a Hipótese de Eficiência dos Mercados nunca foi amplamente aceita entre os investidores. O debate sobre até que ponto a análise de títulos pode melhorar o desempenho do investimento continua presente no mercado financeiro e em trabalhos acadêmicos. Uma pequena indústria surgiu no mundo acadêmico, documentando “anomalias” do mercado que são inconsistentes com a Teoria dos Mercados Eficientes. Keane.S. [57] e Lo, Andrew [58] fazem uma extensão discussão sobre a Hipótese de Mercados Eficientes, apresentam as principais formas de eficiência e discutem diversos testes empíricos. Guimarães, T. [59] apresenta testes empíricos da eficiência do mercado acionário brasileiro.

CAPÍTULO 3

Processos Estocásticos e Teoria de Grafos

O conceito de mercados eficientes é útil que qualquer tentativa de modelar os mercados financeiros. Aceitado este paradigma, um importante passo é caracterizar a propriedades estatísticas dos processos aleatórios observados nos mercados financeiros [1] [60]²⁰

3.1 Distribuições de Probabilidade

Para descrever um processo descrito por uma variável aleatória X para a qual o resultado é um número real x , usamos a densidade de probabilidade $P(x)$. A probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor no intervalo $[a,b]$ é

$$\int_a^b P(x)dx \quad (3.1)$$

sendo que $P(x)$ deve ter as propriedades

$$P(x) \geq 0 \quad (3.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1 \quad (3.3)$$

Os momentos μ_n da distribuição $P(x)$ são definidos como

$$\mu_n \equiv \langle x^n \rangle = \int x^n P(X)dx \quad (3.4)$$

A média μ é o primeiro momento ($n = 1$) e a dispersão ou variância está relacionada ao segundo momento ($\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$). A eq. (3.4) é válida somente se a integral converge, o que requer que $P(x)$ decresça suficientemente rápido para grandes valores de $|x|$.

²⁰ Este não é o objetivo fundamental deste trabalho, mas julgamos fundamental para o fechamento do ciclo teórico sobre os mercados financeiros aqui apresentados um satisfatório entendimento das propriedades estatísticas dos dados de mercados financeiros.

O conhecimento de todos os momentos de uma distribuição equivale ao conhecimento da própria distribuição $P(x)$. Na análise de dados coletados em experimentos reais, na maioria das vezes, apenas o primeiro e segundo momentos são considerados. Por exemplo, no caso de séries temporais, para se avaliar momentos de ordem maior do que dois, necessitamos de séries muito longas; caso contrário há certa perda de precisão ao se determinar a distribuição.

A função característica de uma variável aleatória X é definida como a transformada de Fourier da densidade de probabilidade associada a ela

$$\tilde{P} \equiv \int e^{ix} P(x) dx = \langle e^{ix} \rangle \quad (3.5)$$

Definimos os cumulantes c_n de uma distribuição pelas derivadas sucessivas do logaritmo da função característica:

$$c_n = (-i)^n \frac{d^n}{dz^n} \log \tilde{P}(z) \Big|_{z=0} \quad (3.6)$$

Os cumulantes c_n são combinações polinomiais dos momentos μ_p com $p \leq n$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu_1 \\ c_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2 \\ c_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 \\ c_4 &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4 \end{aligned} \quad (3.7)$$

É útil normalizar os cumulantes por uma potência da variância apropriada, de maneira que obtemos quantidades adimensionais. Os cumulantes normalizados λ_n são definidos por

$$\lambda_n \equiv c_n / \sigma_n \quad (3.8)$$

Destacamos aqui o terceiro e quarto cumulantes normalizados, chamados de obliquidade²¹ (skewness) (ς) e curtose (kurtosis)²² (κ), respectivamente

$$\varsigma \equiv \frac{\langle (x - \mu)^3 \rangle}{\sigma^3} \quad (3.9)$$

²¹ Obliquidade é uma medida da assimetria de uma determinada distribuição de probabilidade.

²² Curtose é uma medida de dispersão que caracteriza o "achatamento" da curva da função de distribuição. Note que é possível encontrar $\kappa+3$, e não κ , sendo chamado de curtose.

$$\kappa \equiv \frac{\langle (x - \mu)^4 \rangle}{\sigma^4} - 3 \quad (3.10)$$

A definição acima de cumulantes pode parecer arbitrária, mas essas quantidades possuem propriedades interessantes. Por exemplo, cumulantes se adicionam quando variáveis aleatórias independentes são somadas. Além disso, uma distribuição Gaussiana é caracterizada pelo fato de todos os seus cumulantes de ordem maior que dois serem identicamente nulos. Conseqüentemente, os cumulantes, em especial κ , podem ser interpretados como uma medida da distância entre uma dada distribuição $P(x)$ e uma Gaussiana.

Se uma distribuição possui $\kappa > 0$, isto significa que relativamente a uma distribuição Gaussiana, ela apresenta um pico mais acentuado no valor médio e uma cauda que decresce mais suavemente. Por outro lado, se $\kappa < 0$, a distribuição é mais achatada em torno do valor médio e sua cauda decresce mais abruptamente.



Figura 3.1: Distribuição Gaussiana

Uma densidade de probabilidade Gaussiana de média μ e variância σ é definida como:

$$P(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.11)$$

Uma variável com uma distribuição Gaussiana é peculiar porque ‘grandes desvios’ são extremamente raros. A quantidade $\exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$ decai tão rapidamente para grandes valores de x que desvios algumas vezes maiores que σ são quase impossíveis. Por exemplo, uma variável Gaussiana se desvia de seu valor mais provável por 2σ apenas em 5% das vezes, enquanto flutuações de 10σ possuem uma probabilidade de ocorrência de 2×10^{-23} .

Definimos uma densidade de probabilidade para a distribuição log-normal por

$$P(x) \equiv \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.12)$$

válida somente para $x > 0$.

As distribuições normal e log-normal estão relacionadas entre si. Se X possui distribuição log-normal com parâmetros μ e σ^2 , então $\log X$ possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 . A log-normal é aplicável quando a quantidade de interesse deve ser positiva. Essa distribuição é utilizada em matemática financeira para modelar a distribuição de riquezas, por exemplo.

Quando a probabilidade de se medir um valor particular de uma dada quantidade variar inversamente como uma potência desse valor, essa quantidade possui comportamento tipo lei de potência²³, também conhecida na literatura como distribuição de Pareto. A densidade de probabilidade é definida por

$$P(x) \equiv Cx^{-\alpha} \quad (3.13)$$

sendo α o expoente da lei de potência. Deve haver um valor mínimo $x_{\min}$ para o qual a distribuição seja ainda válida, uma vez que ela diverge à medida que $x \rightarrow 0$. A constante C é determinada através da condição de normalização,

$$C = (a-1)x_{\min}^{a-1} \text{ para } a > 1 \quad (3.14)$$

Note que para $\alpha = 1$, a distribuição não é normalizável.

A média, ou primeiro momento, é dada por

$$\mu_1 = \int_{x_{\min}}^{\infty} xP(x)dx = \frac{a-1}{a-2}x_{\min} \quad (3.15)$$

sendo que leis de potência com $1 < \alpha \leq 2$ não possuem média finita.

O segundo momento é dado por

²³ Para um estudo sobre como analisar, discernir e quantificar comportamentos de leis de potência em dados empíricos, ver Clauset *et al.* [62]

$$\mu_2 = \frac{C}{3-a} \left[x^{-a+3} \right]_{x_{\min}}^{\infty} = \frac{a-1}{a-3} x_{\min}^2 \quad (3.16)$$

que diverge para $1 < a \leq 3$. De maneira geral, todos os momentos μ_n são finitos para $n < a - 1$ enquanto que todos os momentos de ordem maior divergem.

A distribuição de riqueza dos indivíduos em um país e a intensidade das manchas solares são exemplos de distribuições que seguem leis de potência. Outra situação na qual pode aparecer distribuição do tipo lei de potência é em transições de fase. Alguns sistemas podem apresentar apenas uma escala de comprimento ou de tempo que os governam. Um exemplo clássico é o de um magneto, que possui um comprimento característico que mede o tamanho típico das correlações magnéticas. Sob certas circunstâncias, esta escala de comprimento pode divergir, deixando o sistema sem uma escala característica. Neste caso, o comportamento de certas quantidades macroscópicas segue leis de potência. No caso de sistemas ferromagnéticos, esse comportamento surge nas vizinhanças de seu ponto crítico.

Segundo Gléria *et al.* [61], as distribuições gaussianas são, supostamente, a norma da natureza, cuja larga aplicabilidade resulta do *teorema do limite central*: em qualquer caso onde um grande número de eventos aleatórios independentes contribuem para um determinado resultado, este seguirá a distribuição normal. No entanto, nem tudo na natureza segue uma curva normal. Porém, mesmo eventos não-gaussianos podem ainda apresentar um tipo de regularidade na forma de leis de potência não-gaussianas. E estas são incompatíveis com noção de que a média representa a escala característica. Os sistemas com escala descrevem quase tudo na natureza, às vezes até sistemas desordenados. Mas existem os sistemas que não possuem escala característica, descritos por leis de potência, que são soluções de equações funcionais da forma $f(\lambda x) = \lambda p f(x)$ (*)

Quando físicos analisam um fenômeno, acabam resolvendo algum tipo de equação diferencial, onde as funções possuem alguma escala característica. Em geral, podemos expressar as funções em termos de exponenciais, em que aparece um parâmetro que determina a escala do problema.

Outra distribuição importante é a de Lévy, que aparece no contexto do Teorema Central do Limite²⁴, devido a sua propriedade de estabilidade²⁵ sob adição. A cauda de certas distribuições de Lévy decai menos abruptamente que a da Gaussiana e é, conseqüentemente, mais útil para descrever fenômenos para os quais valores muito grandes ou muito pequenos de uma quantidade podem ser observados, como, por exemplo, riquezas pessoais, tamanho de fundos de pensão, amplitudes de terremotos ou qualquer outra catástrofe natural.

Lévy [3] resolveu o problema de determinar uma classe inteira de distribuições estáveis. A forma mais geral para a função característica de um processo estável é:

$$\tilde{P}(z) = \begin{cases} \exp\{i\mu z - c|z|^a[1 - i\beta \frac{z}{|z|} \tan(\frac{\pi}{2}a)]\} & [a \neq 1] \\ \exp\{i\mu z - c|z|[1 - i\beta \frac{z}{|z|} \frac{2}{\pi} \ln|z|]\} & [a = 1] \end{cases} \quad (3.17)$$

sendo μ qualquer número real, $0 < a \leq 2$, c um fator de escala positivo, que é uma medida da largura da distribuição, e β um parâmetro de assimetria variando no intervalo $[-1, 1]$. O caso simétrico ocorre para $\beta = 0$.

A forma analítica da distribuição estável de Lévy é conhecida apenas para alguns valores de a e β :

- $a = 1, \beta = 0$ (Cauchy ou Lorentziana)

$$P_{a=1}(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)} \quad (3.18)$$

- $a = 1/2, \beta = 1$ (Lévy-Smirnov)

$$P_{a=1/2}(x) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{e^{-c/2(x-x_0)}}{(x-x_0)^{3/2}} \quad (3.19)$$

sendo x_0 um parâmetro de desvio da curva.

²⁴ O Teorema Central do Limite afirma que se a soma (combinação linear) de variáveis aleatórias independentes possui variância finita, então a distribuição da soma tenderá a uma distribuição Gaussiana, à medida que o número de variáveis aleatórias torna-se muito grande. Para o caso em que não haja independência ou variância finita das variáveis aleatórias, então há generalizações desse teorema.

²⁵ Se um conjunto de variáveis aleatórias independentes possui uma distribuição estável, então uma combinação linear dessas variáveis terá a mesma distribuição, mas com parâmetros de escala diferentes. Gaussiana, Lorentziana e Lévy simétrica são exemplos de distribuições estáveis.

- $\alpha = 2$ (Gaussiana)

Uma importante propriedade das distribuições de Lévy é o seu comportamento do tipo lei de potência para grandes valores de seu argumento:

$$P_a(x) \approx \frac{aA_{\pm}^a}{|x|^{1+a}} \text{ para } x \rightarrow \pm\infty \quad (3.20)$$

sendo $A_{\pm}^a$ duas constantes chamadas de parâmetros de escala que indicam a ordem de magnitude de grandes flutuações (positivas ou negativas), $\beta \equiv (A_+^a - A_-^a)/(A_+^a + A_-^a)$ e α um expoente $0 \leq \alpha \leq 2$. Pode-se observar, entretanto, comportamentos de lei de potência para $\alpha \geq 2$, mas essas distribuições não correspondem ao comportamento assintótico de uma distribuição de Lévy.

Em particular, todos os processos de Lévy estáveis com $\alpha < 2$ possuem variância infinita. Conseqüentemente, processos estocásticos estáveis não-Gaussianos não possuem escala característica - a variância é infinita! No caso de $\alpha \leq 1$, a densidade de probabilidade decai tão lentamente que mesmo a média não é mais finita.

Outra densidade de probabilidade é a distribuição t-Student [3], que possui Também caudas do tipo lei de potência:

$$P(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \frac{\Gamma[(1+\gamma)/2]}{\Gamma(\gamma/2)} \frac{1}{(1+x^2/\gamma)^{(1+\gamma)/2}} \quad (3.21)$$

que coincide com a distribuição de Lorentz para $\gamma=1$, e para $\gamma \rightarrow \infty$ esta distribuição é Gaussiana. Um processo estocástico caracterizado por esta distribuição pode ter momentos finitos ou infinitos, dependendo do parâmetro γ selecionado.

A Fig. (3.2) ilustra as densidades de probabilidade Gaussiana (a) e Log-normal (b). A Fig. (3.3) mostra as densidades de probabilidade de Lévy (a) e t-Student (b), ambas com casos especiais que se reduzem a Lorentziana e à Gaussiana. Notem como as densidades diferem entre si na cauda e em torno do centro da distribuição. Nas legendas de cada densidade ilustrada estão os parâmetros e expoentes utilizados.

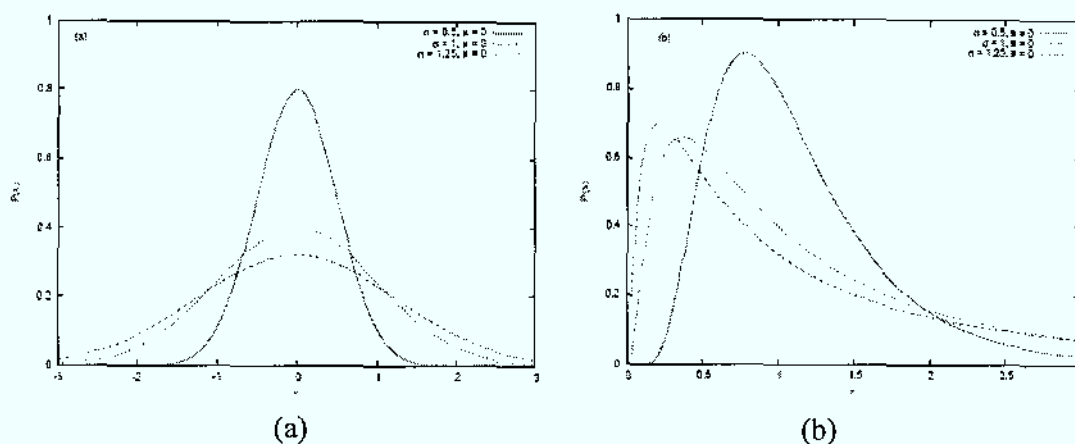


Figura 3.2: Exemplos de densidade de probabilidade Gaussiana (a) e Log-normal (b). (Apud Santos, R. pág. 16 [60])

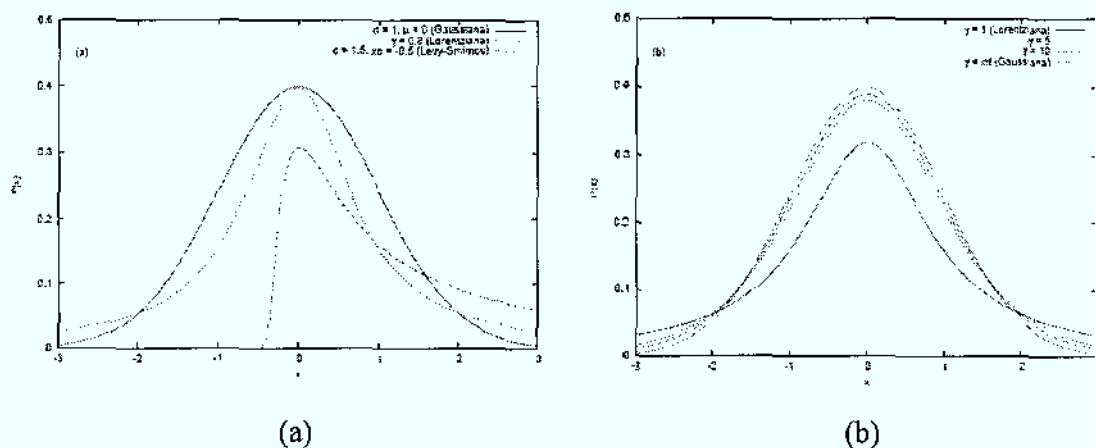


Figura 3.3: Exemplo de densidade de probabilidade de Lévy (a) e t-Student. (Apud Santos, R. pág. 17 [60])

3.2) Movimento Browniano Geométrico

O modelo estocástico mais comum da dinâmica de preços assume que $P_i(t)$, o preço do ativo financeiro i no instante t , é um processo difusivo, e que os incrementos de $\ln P_i(t)$ são distribuídos de acordo com uma distribuição Gaussiana. Esse modelo, conhecido como Movimento Browniano Geométrico fornece uma primeira aproximação do comportamento observado em dados empíricos.

O movimento Browniano geométrico faz duas hipóteses fundamentais sobre Um processo estocástico:

1. Acontecimentos sucessivos da variável estocástica são estatisticamente independentes;

2. O retorno de preços, ou mudanças relativas da variável estocástica são dados por uma função densidade de probabilidade Gaussiana, e assim, a função densidade da variável estocástica, isto é, dos preços, é Log-normal.

O movimento Browniano geométrico é definido como a solução da equação diferencial estocástica

$$dP = \mu P dt + \sigma P dW \quad (3.22)$$

sendo μ e σ constantes, sujeitas a uma condição genérica inicial $P(t_0) = P_0$ $P(t_0) = P_0$, e dW representa o processo estocástico de Wiener (ver pág. 75, Apêndice B, Santos, R. [60]). Fazendo a mudança de variável, $G = \ln P$ e aplicando a Fórmula de Itô, (ver pág. 76, Apêndice B, Santos, R. [60]) dada no Apêndice B com $a = \mu S$ e $b = \sigma S$ e $F(S) = \ln S$, temos

$$dG = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW \quad (3.23)$$

O $\ln P$ segue um processo de Wiener generalizado com uma tendência efetiva $\mu - \frac{1}{2} \sigma^2$ e desvio padrão σ . Note que tanto dS como dG são afetados pela mesma fonte de incerteza: o processo estocástico $dW(t)$. Após integração de dG , obtemos a equação

$$G(t) = G_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma [W(t) - W(t_0)] \quad (3.24)$$

sendo $G_0 = \ln S_0$. Podemos obter, assim, a solução da eq. (2.22)

$$P(t) = P_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma [W(t) - W(t_0)] \right\} \quad (3.25)$$

Da eq. (2.24), vemos que $G(t) - G_0$ se distribui segundo a densidade de probabilidade Gaussiana $N\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right)$, sendo $\tau = t - t_0$. Assim, o movimento

Browniano geométrico com valor inicial $P(t_0)=P_0$ possui a seguinte distribuição Log-normal:

$$P(P(t)) = \frac{1}{P\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln(P/P_0) - \left(\mu - 1/2\sigma^2\right)\tau\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right\} \quad (3.26)$$

3.3) Leis de Potência no mercado financeiro

Se os mercados financeiros forem também criticamente organizados, *crashes* em bolsas de valores não seriam anomalias, mas eventos ordinários (embora raros). Quando oferta e demanda se encontram em mercados eficientes, o preço expressa o valor compatível com os "fundamentos" estruturais da economia. Na ausência de grandes choques de demanda e oferta, teremos que esperar apenas a ocorrência de pequenas flutuações para ajustar excessos de demanda e oferta. Grandes variações de preços seriam altamente improváveis. Em outras palavras, as variações do preço teriam que se comportar de acordo com uma distribuição gaussiana. Seriam um *random walk*, na linguagem da física estatística.

Não houve nenhum grande choque justificando bruscas alterações nos fundamentos em 19 de outubro de 1987. Mas este foi o dia de um *crash* financeiro quase duas vezes mais severo do que o colapso de 1929. O índice Dow Jones caiu 22% neste dia, que ficou conhecido como *Black Monday* (Figura 8).

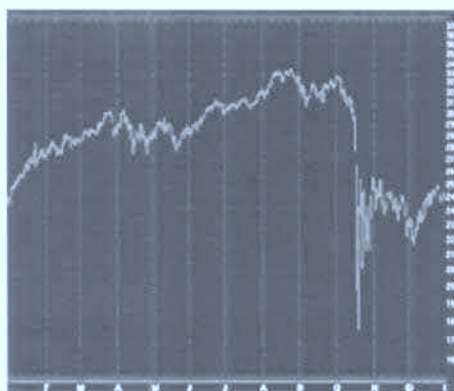


Figura 3.4. *Black Monday*, apud Gleria, I. et alli. [58]

É impensável atribuir ao evento uma súbita alteração nos fundamentos da economia que levou, em poucas horas, a uma queda de mais de 20% nos retornos das

ações. Embora haja explicações *a posteriori* que apontam para alterações dos fundamentos, estas são pouco convincentes, dada a magnitude do *crash*. Há ainda a explicação pitoresca de que o *crash* foi provocado por erros em programas de computador, que venderam ações ininterruptamente assim que os preços começaram a cair.

Quando Mandelbrot (1963)[63a] descobriu que não havia distribuição gaussiana nem escala típica nas variações do preço do algodão, isto possibilitou encararmos grandes flutuações de preço como resultado de um arranjo "natural" no funcionamento dos mercados. Ou seja, estes podem oscilar ferozmente de tempos em tempos mesmo que nada de excepcional ocorra nos fundamentos da economia (veja também Mandelbrot 1972 e 1997 [63b, 63c]).

As funções de distribuição mais adequadas para a análise do problema não podem então decair exponencialmente, como a gaussiana. Eles devem decair seguindo uma lei de potência, caracterizando ausência de escala. As distribuições usadas por Mandelbrot foram as distribuições de Lévy, como observamos anteriormente.

Gabaix *et al.* [64], se definirmos p_t como o preços de uma dada ação e o retorno desta ação r_t como a variação do logaritmo do preço da ação em um dado intervalo de tempo Δt , $r = \ln p_t - \ln p_{t-\Delta t}$. Então a probabilidade do retorno ter um valor absoluto maior que x é dada por:

$$P(|r_t| > x) \approx x^{-\xi} \quad (3.27)$$

Assim, mesmo os eventos mais extremos - como os *crashes* de 1929 e 1987 - se conformam à equação 2.27, demonstrando que *crashes* não são um evento anormal segundo a distribuição.

Cada vez mais leis de potência são descobertas, em mercados financeiros, pelos econofísicos. Para enumerar apenas algumas, as flutuações no índice S&P 500 mostraram ser dezesseis vezes menos frequentes cada vez que dobramos seu valor (Gopikrishnan *et alli* 1998)[65]. Leis de escala neste índice também foram observadas por Mantegna e Stanley (1995)[66]. Uma lei de potência similar vale para os preços de ações de companhias individuais (Plerou *et al.* 1999)[67]. Leis de potência foram observadas na bolsa de Milão (Mantegna 1991)[68] e, na bolsa de São Paulo (Gleria *et alli* 2002)[69], bem como em taxas de câmbio (Figueiredo *et alli* 2003a, Müller *et alli* 1990)[70 e 71]. Leis de potência foram ainda observadas na volatilidade dos

mercados, sugerindo a inexistência de um tamanho típico para os "pânicos financeiros" (Liu *et alli* 1999)[72].

As deficiências da distribuição Normal para representar as séries temporais de preços do Índice Dow Jones da Bolsa de Nova Iorque foram estudas por Beirlant, J. *et alli* [73]. No seu artigo de 2004, os autores apresentam (Tabela 3.1) os dez maiores movimentos de queda do Índice Dow Jones durante 50 anos (1954-2004).

Date	Closing	logreturn
19-Oct-87	1738.74	-0.2563
26-Oct-87	1793.93	-0.0838
27-Oct-97	7161.15	-0.0745
17-Sep-01	8920.70	-0.0740
13-Oct-89	2569.26	-0.0716
08-Jan-88	1911.31	-0.0710
26-Sep-55	455.56	-0.0677
31-Aug-98	7539.07	-0.0658
28-May-62	576.93	-0.0588
14-Apr-00	10305.77	-0.0582

Tablea 3.1: Dez maiores quedas do Índice Dow Jones (1954-2004), apud Beirlant, J. *et alli*. 2004, pag. 2 [73].

O autor questiona qual seria a probabilidade, segundo o modelo de Black-Scholes, de o Índice Dow Jones sofrer uma grande queda amanhã? A resposta dependerá da volatilidade considerada. A figura 3.1 mostra a volatilidade histórica anualizada estimada segunda uma janela de 3 anos. Claramente, a volatilidade não é constante e comporta-se estocasticamente – outro ponto mostrado por Mandelbrot. Na figura, a volatilidade é tipicamente menor que 25%. Desta forma, considerando uma vol. de 25%, o autor calcula qual seria a frequência de log-retornos negativos de -0,0582 ou pior. Sob a condição de Normalidade, esse fato ocorria apenas uma vez a cada 55 anos, quando, na realidade, observando dados empíricos, o autor apresente 10 deles em uma janela 50 anos.

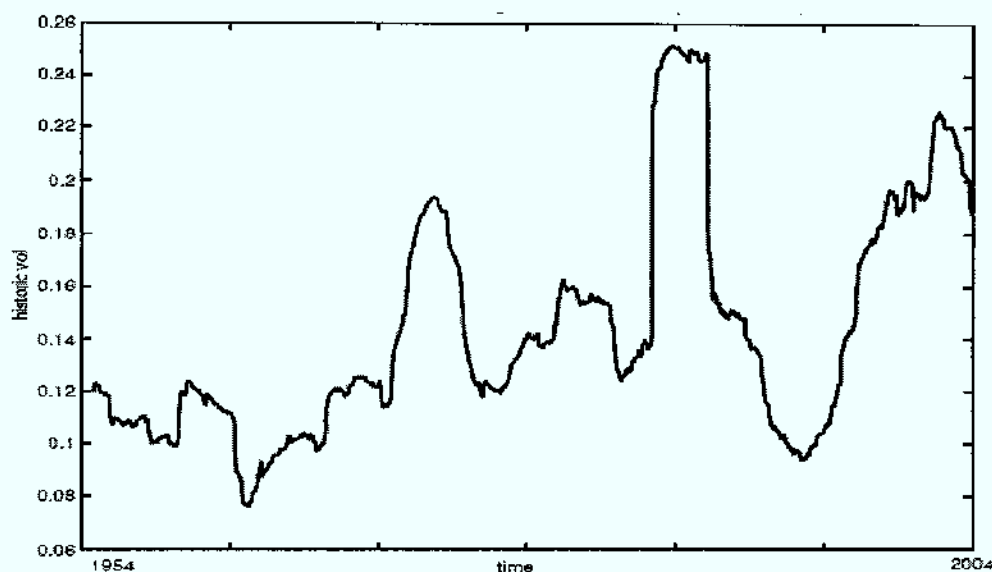


Figura 3.5: Índice Dow Jones – Volatilidade Histórica (1954-2004), *apud* Beirlant, J. et alli. 2004, pag. 3 [73].

Por fim, o mesmo autor pergunta quais seriam os principais problemas com o modelo de Black-Schoes (construído sobre as mesmas premissas gerais do CAPM). Segundo ele, o modelo postula a distribuição Normal para os log-retorno, perdendo completamente o estudo dos eventos representados pela cauda da distribuição. Em segundo lugar, o ambiente está mudando, e a volatilidade está comportando estocasticamente ao longo do tempo. Em terceiro lugar, “*the sample paths of the driving*” Movimento Browniano são contínuos, enquanto há uma clara evidência que na realidade os preços gostam de “dar saltos”.

As leis de potência podem conviver pacificamente com a teoria financeira vigente. De fato, os econofísicos propõem uma certa conciliação. Uma vez que não descartam a hipótese de mercados eficientes, eles apenas reduzem a sua significância a um caso limite.

3.3 Teoria de Grafos

A Teoria de Grafos²⁶ tem sido amplamente utilizada na análise de sistemas Complexos [74 e 75]. Ela é usada para extrair informações de sistemas que apresentam elementos correlacionados entre si. Considere um sistema de n elementos.

²⁶ Grafo é um conjunto de pontos ou vértices e um conjunto de linhas unindo todos ou alguns desses pontos.

O coeficiente de correlação pode ser interpretado como a magnitude da ligação conectando pares de elementos. Em outras palavras, o sistema pode ser descrito por uma rede de elementos conectados entre si, por um peso associado às ligações de acordo com o coeficiente de correlação.

A idéia é extrair um sub-grafo da rede completa considerando os pesos das ligações entre os elementos. O objetivo deste procedimento é transferir as informações contidas na matriz de correlação do sistema em uma estrutura topológica do sub-grafo e então explorar técnicas da Teoria de Grafos para analisar tais informações.

Um sub-grafo da rede completa amplamente utilizado é a árvore de extensão mínima (*minimal spanning tree*). O número de ligações da árvore é $n - 1$ para um sistema de n elementos e a árvore é um grafo conectado.

Estudos feitos utilizando árvores de extensão mínima revelam ser este um método excelente para estudar sistemas financeiros [76, 77, 78a,b, c, 79]. Um resultado interessante obtido ao se investigar as propriedades da árvore de extensão mínima está relacionado ao comportamento do mercado nas proximidades de uma quebra nas Bolsas como, por exemplo, a segunda-feira negra de 1987, onde uma mudança topológica na árvore foi observada [80]

Onnela, J. *et alli* (2002) [78a], ao estudar as propriedades da MST no estudo de portfólios, para 116 ações presentes no Índice S&P 500 no período de 1986 até 2000, chegaram à seguinte conclusão:

"We believe these results have potential for practical application. Due to the clustering properties of the MST, as well as the overlap of tree clusters with business sectors as defined by a third party institution. It seems plausible that companies of the same cluster face similar risks, imposed by the external economic environment. These dynamic risks influence the stock prices of the companies, in coarse terms, leading to their clustering in the MST. In addition, because the stock included in the minimum risk portfólio are consistently located on the outskirts of the tree, the distance of the node from the root of the tree (i.e., layer) must be meaningful. Thus, it can be conjectured that the location of a company within the cluster reflects its position with regard to internal, or cluster specific, risk. Characterization of stocks by their branch enables us to identify the degree of interchangeability of different stocks in the portfólio. Therefore, dynamic asst trees provide an intuition-friendly approach to and facilitate incorporation of subjective judgment in the portfólio optimization problem.

3.3.1 Distância entre Ações

A matriz dos coeficientes de correlação entre uma série de ativos pode ser utilizada para se estudar a organização hierárquica presente dentro de um portfólio. No entanto, o coeficiente de correlação de um par de ativos não pode ser usado como uma medida de distância ²⁷. Devemos então criar uma métrica para a definição da distância entre ativos, como função do coeficiente de correlação.

Ao analisarmos uma série histórica da evolução dos preços de um par de ativos i e j , podemos definir o retorno para um ativo i como:

$$R_i \equiv \ln Y_i(t) - \ln Y_i(t-1) \quad (3.1)$$

E a correlação entre i e j pode ser definida como segue:

$$\rho_{ij} = \frac{\langle R_i R_j \rangle - \langle R_i \rangle \langle R_j \rangle}{\sqrt{\langle R_i^2 - \langle R_i \rangle^2 \rangle \langle R_j^2 - \langle R_j \rangle^2 \rangle}} \quad (3.2)$$

Podemos então definir uma variável $\tilde{R}_i$ como sendo o retorno menos sua média, dividido pelo desvio-padrão computado para aquele período:

$$\tilde{R}_i \equiv \frac{R_i - \langle R_i \rangle}{\sqrt{\langle R_i^2 \rangle - \langle R_i \rangle^2}} \quad (3.3)$$

Consideremos então os n valores de $\tilde{R}_i$ presentes no mesmo intervalo como os componentes $\tilde{S}_{ij}$ de um vetor n -dimensional $\tilde{S}_i$. Então a distância Euclidiana d_{ij} entre os vetores $\tilde{S}_i$ e $\tilde{S}_j$ é obtida através da relação de Pitágoras:

$$d_{ij}^2 = \left\| \tilde{R}_i - \tilde{R}_j \right\|^2 = \sum_{k=1}^n (\tilde{R}_{ik} - \tilde{R}_{jk})^2 \quad (3.4)$$

²⁷ Pois não preenche três propriedades necessárias para a definição de uma distância Euclidiana.

O vetor $\tilde{S}_i$ tem uma *unit length* pois, por definição (3.1),

$$\sum_{k=1}^n \tilde{R}_{ik}^2 = 1 \quad (3.5)$$

Assim, podemos reescrever a equação 3.4 como:

$$d_{ij}^2 = \sum_{k=1}^n (\tilde{R}_{ik}^2 + \tilde{R}_{jk}^2 - 2\tilde{R}_{ik}\tilde{R}_{jk}) = 2 - 2\sum_{k=1}^n \tilde{R}_{ik}\tilde{R}_{jk} \quad (3.6)$$

Onde o somatório do lado direito da equação 3.6, $\sum_{k=1}^n \tilde{R}_{ik}\tilde{R}_{jk}$ coincide com ρ_{ij} da equação 3.2. Desta forma, podemos reescrever a equação 3.6 como:

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})} \quad (3.7)$$

Como a equação 3.4 define uma distância Euclidiana, três propriedades devem ser observadas:

$$\text{Propriedade (i):} \quad d_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$$

$$\text{Propriedade (ii):} \quad d_{ij} = d_{ji}$$

$$\text{Propriedade (iii):} \quad d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}$$

As propriedades (i) e (ii) são facilmente verificadas já que $\rho_{ij} = 1$ implica $d_{ij} = 0$, enquanto $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ implica $d_{ij} = d_{ji}$. A validade da Propriedade (iii), a “desigualdade triangular”, vem da equivalência entre as equações 3.4 e 3.7. Portanto, a quantidade d_{ij} preenche todas as três propriedades que devem ser satisfeitas por uma distância métrica.

A introdução de uma distância entre pares de ativos foi inicialmente proposta por [a1], onde uma distância verificável numericamente foi usada para provar as três propriedades acima. A partir do conhecimento da matriz de distâncias entre um conjunto de ativos, podemos decompô-la em subconjuntos de ativos que apresentam maior correlação.

3.3.2 Espaços Ultramétricos

Como mostrado acima, a partir da matriz dos coeficientes de correlação de n ativos (ρ_{ij}) para um período t podemos construir a matriz de distâncias (d_{ij}). Então fazemos uma hipótese de trabalho que um espaço útil para conectar n ativos é um espaço ultramétrico. Segundo Mantegna & Stanley [3], esta hipótese é motivada *a posteriori* pelo fato de que a taxonomia associada possui significado de um ponto de vista econômico. Um espaço ultramétrico é um espaço em que a distância entre objetos é uma distância ultramétrica. Uma distância ultramétrica $\hat{d}_{ij}$ deve satisfazer as duas primeiras propriedades da distância ultramétrica, (i) $\hat{d}_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$ e (ii) $\hat{d}_{ij} = \hat{d}_{ji}$, enquanto a desigualdade triangular da propriedade (iii) é substituída por uma desigualdade mais forte, chamada desigualdade ultramétrica,

$$\hat{d}_{ij} \leq \max\{\hat{d}_{ik}, \hat{d}_{kj}\}$$

Os espaços ultramétricos oferecem uma maneira natural de descrever hierarquicamente sistemas complexos estruturados, já que o conceito de ultrametricidade é diretamente conectado com o conceito de hierarquia.

Dado que uma distância métrica entre n objetos existe, muitos espaços ultramétricos podem ser obtidos fazendo qualquer partição dada de um conjunto de n objetos. Entre todas as possíveis estruturas ultramétricas associadas com a distância ultramétrica $\hat{d}_{ij}$, uma delas se destaca devido a sua simplicidade e propriedades importantes. Trata-se da ultramétrica subdominante. Considerando a existência de um espaço ultramétrico em que n objetos estão interligados, a estrutura ultramétrica subdominante pode ser determinada calculando-se a - *minimall spanning tree* (MST) – árvore de extensão mínima - conectando os n objetos.

Em um gráfico conectado cujas ligações possuem pesos de n objetos, a MST é a árvore que minimiza a soma total das distâncias entre os n objetos. O espaço ultramétrico subdominante associado com um espaço métrico fornece um arranjo topológico bem definido que possui uma hierarquia indexada única. Portanto, a investigação de ultramétricas subdominantes permite determinar de maneira única a hierarquia do sistema.

CAPÍTULO 4

Análise dos Dados

4.1 Metodologia de Construção da Carteira Teórica do Índice Bovespa

O valor absoluto do índice Bovespa corresponde ao valor de mercado de uma carteira selecionada de ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo em um determinado momento. A variação do valor do índice, portanto, corresponde uma taxa de lucratividade ao longo de um determinado período.

Segundo Nakamura [42], o conceito-chave na metodologia de construção do índice Bovespa é a negociabilidade.

O índice de negociabilidade é dado pela seguinte fórmula:

$$Neg = \sqrt{\left(\frac{n}{N}\right) * \left(\frac{v}{V}\right)}$$

onde:

Neg = negociabilidade da ação num dado período

n = número de negócios (mercado a vista) com a ação num dado período

N = número total de negócios da bolsa no mercado a vista num dado período

v = volume (em R\$) dos negócios com a ação no mercado a vista num dado período

V = volume total (em R\$) dos negócios realizados na bolsa (mercado a vista) num dado período.

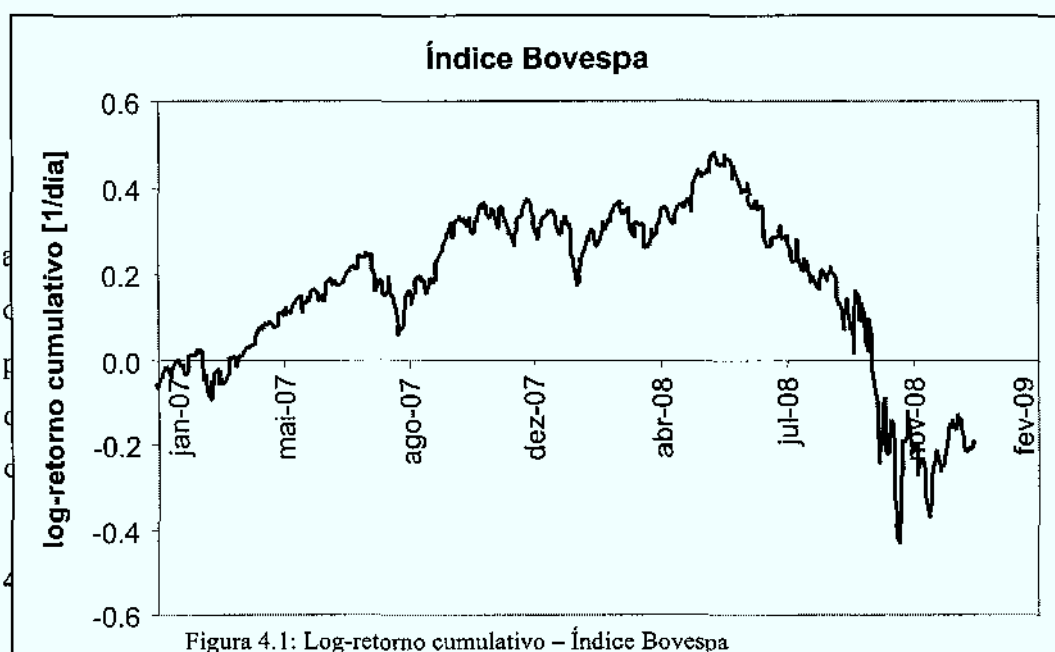
Fazem parte da carteira teórica as ações que cumulativamente compreendem 80% dos índices de negociabilidade apurados para todas as ações negociadas a vista nos pregões da Bolsa de Valores de São Paulo. É exigido, também, que cada ação selecionada tenha participado de pelo menos 80% dos pregões do período considerado, e que seu volume de negócios no mercado a vista (em R\$), no período,

represente mais do que 0,1% do volume total (em R\$) de negociações no mercado a vista da Bolsa, no mesmo período.

A carteira teórica do Índice é revista a cada quatro meses, sendo as proporções da cada ação na carteira determinadas pelos respectivos índices de negociabilidade. Na tabela 4.1 apresentamos 64 ações com as quais trabalharemos, e que compunham o Índice Bovespa no primeiro quadrimestre de 2009, com sua participação relativa no índice, seu setor e sub-setor.

O gráfico 4.1 apresenta o log-retorno cumulativo do Índice Bovespa durante o período estudo, isto é, de 1º de janeiro de 2007 até 31 de dezembro de 2008. Este período é marcado claramente por 3 fases: até julho de 2007 o mercado vive uma fase de euforia, com alta generalizada de preços; entre agosto de 2007 e junho de 2008 o Índice rapidamente busca um novo pico, segue um longo período de acumulação e atinge o ponto máximo em 20 de maio; a partir de então o Índice inicia um movimento de queda que toma um caráter de pânico a partir de setembro com a quebra do Lehman Brothers.

Assim, até o pico, o Índice acumulou um log-retorno de 48,2%. Ao final de 2008, quem manteve um investimento no Ibovespa durante dois anos, acumulou uma perda de 18,9%. Já aquelas pessoas que entraram no momento de euforia em meados de 2008 perderam, entre maio e dezembro, 67%. Estes números evidenciam a necessidade de se estudar as estratégias de construção e gestão de portfólios. Com bons conhecimentos e uma boa estratégia de administração de risco, diminui-se a probabilidade de perdas e aumenta as chances de “bater” o Ibovespa.



Código	Ação	Part.(%)	Setor	Subsetor
PETR3	PETROBRAS	3.06	Petróleo, Gás e Biocombustíveis	Petróleo, Gás e Biocombustíveis
PETR4	PETROBRAS	16.72		
VALE3	VALE R DOCE	3.27	Materiais Básicos	Siderurgia e Mineração
VALE5	VALE R DOCE	11.88		
GGBR4	GERDAU	3.10		
GOAU4	GERDAU MET	0.92		
CSNA3	SID NACIONAL	3.45		
USIM3	USIMINAS	0.62		
USIM5	USIMINAS	3.05		
BRKM5	BRASKEM	0.55		Químicos
ARCZ6	ARACRUZ	0.78		Madeira e Papel
KLBN4	KLABIN S/A	0.36		
DURA4	DURATEX	0.55		
VCPA4	V C P	0.62		Bens Industriais
EMBR3	EMBRAER	0.66	Consumo não-Cíclico	Alimentos
SDIA4	SADIA S/A	1.14		Bebidas
PRGA3	PERDIGAO S/A	0.89		Fumo
AMBV4	AMBEV	1.12		Comércio
CRUZ3	SOUZA CRUZ	0.49		Alimentos Processados
PCAR4	P.ACUCAR-CBD	0.55		Prudutos de Uso
CSAN3	COSAN	0.60		
JBSS3	JBS	0.66		
NATU3	NATURA	0.64	Consumo Cíclico	Comércio
LAME4	LOJAS AMERIC	1.20		Mídia
LREN3	LOJAS RENNEN	0.86		
BTOW3	B2W VAREJO	0.90	Telecomunicações	Telefonia Fixa
NETC4	NET	0.95		
BRTP3	BRASIL T PAR	0.28		
BRT4	BRASIL T PAR	0.44		
BRT04	BRASIL TELECOM	0.42		
TNLP3	TELEMAR	0.42		
TNLP4	TELEMAR	1.09		
TMAR5	TELEMAR N L	0.30		Telefonia Móvel
TLPP4	TELESP	0.19		
TCSL3	TIM PART S/A	0.20		
TCSL4	TIM PART S/A	0.76		
VIVO4	VIVO	0.72	Utilidade Pública	Energia Elétrica
CLSC6	CELESC	0.12		
CMIG4	CEMIG	1.64		
CESP6	CESP	1.22		
CPL6	COPEL	0.65		
CPFE3	CPFL ENERGIA	0.52		
ELET3	ELETRONBRAS	0.95		
ELET6	ELETRONBRAS	0.95		
ELPL6	ELETROPOL	0.69		
TRPL4	TRAN PAULIST	0.37		
LIGT3	LIGHT S/A	0.20		
SBSP3	SABESP	0.40		Água e Saneamento
CGAS5	COMGAS	0.11		Gás
BBAS3	B. BRASIL	2.40		Intermediários Financeiros
BBDC4	BRABESCO	3.70		
BNCA3	NOSSA CAIXA	0.40		
ITAU4	ITAU BANCO	3.47		
ITSA4	ITAUSA	2.24		Holdings Diversificadas
UBBR11	UNIBANCO	2.42		
BRAP4	BRABESPAR	1.20		
UGPA4	ULTRAPAR	0.44		
ALLL11	ALL AMER LAT	1.42	Transporte	Transporte Ferroviário
CCRO3	CCR RODOVIAS	0.61	Construção e Transporte	Transporte
GOLL4	GOL	0.74		Transporte Aereo
TAMM4	TAM S/A	0.71		
CYRE3	CYRELA REALT	1.26		Construção e Engenharia
GFA3	GAFISA	0.93		
RSID3	ROSSI RESID	0.57		

Tabela 4.2: Lista das 66 ações que compunham o Índice Bovespa no quadrimestre Jan - Abr 2009. A primeira coluna indica o símbolo de negociação da empresa que é composto por 4 letras e um número: 3 indica ações do tipo ON, 4 PN, 5 PNA e 6 PNB; a segunda coluna identifica as empresas pelo nome de pregão; a terceira mostra a quantidade teórica válida para o período de vigência; a quarta coluna mostra o setor e a quinta o sub-setor econômico ao qual a companhia pertence.

4.2 Construção de Carteiras Eficientes

No 1º quadrimestre de 2009 o Índice Bovespa era composto por 66 ações. Porém, como trabalharemos com as séries de preços de 01 de janeiro de 2007 até 31 de dezembro de 2008, não consideramos os papéis RDCD3 (REDECARD) e BVMF3 (BM&F Bovespa), pois os mesmo começaram a ser negociado somente em julho e outubro de 2007, respectivamente²⁸. Os dados das séries históricas dos preços de fechamento diário ajustados das ações foram obtidos no site: <http://br.finance.yahoo.com/>.

Com os fechamentos dos 515 dias considerados, são calculados os 514 log-retornos correspondentes, com os quais é plotado o gráfico a seguir onde pode-se observar a oscilação dos retornos. Verifica-se que, na maioria dos dias, a variação dos preços fica dentro do intervalo $[-5\%, 5\%]$. Já no final da série, ocorre uma expansão considerável deste intervalo, com um aumento da amplitude de variação dos preços.

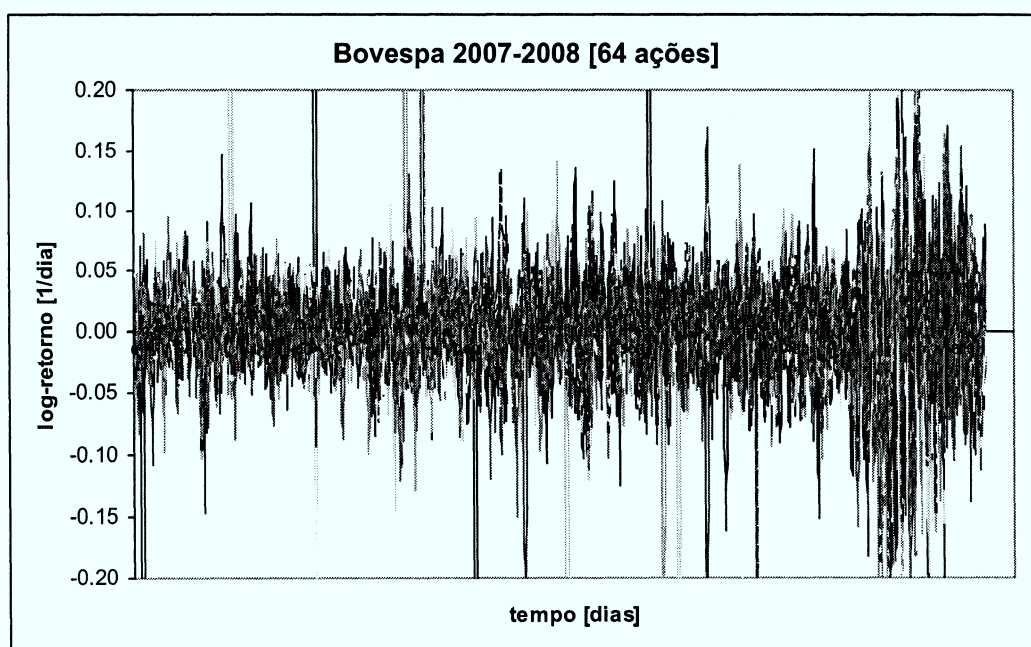


Figura 4.3: Oscilação do log-retorno das 64 ações durante 2 anos

Esta maior oscilação dos retornos na parte final da série histórica está em linha com o crescimento da instabilidade nos mercados financeiros a partir do segundo

²⁸ O ativo JBSS3 começou a ser negociado em 29 de março de 2007. Para efeito de cálculo, consideramos o preço de fechamento deste dia para todos os dias anteriores até 01 de janeiro de 2007.

semestre de 2008. No entanto, apesar deste período ser considerado como uma queda generalizada dos preços, vale notar movimentos de fortes altas também ocorreram neste período, mostrando que uma gestão ativa de portfólio poderia proporcionar uma performance melhor que a do Índice Bovespa. Além disso, uma gestão ativa de portfólio inclui a consideração de posições vendidas, bastante úteis em momentos de queda generalizada de preços.

A Figura 4.3 apresenta o retorno cumulativo durante os dois anos para cada ativo, sendo que a linha vermelha em destaque representa o Índice Bovespa. Aqui observamos muitas ações apresentando retornos superiores ao Ibovespa, mostrando que uma boa seleção de carteira de investimentos permite ao investidor obter retornos maiores que o Índice.

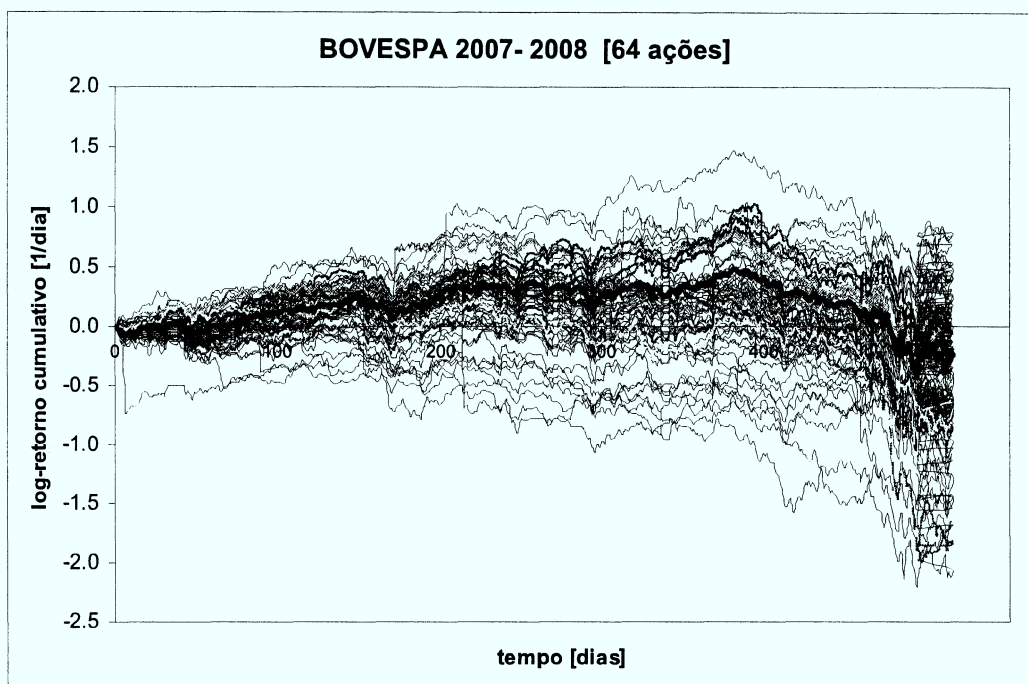


Figura 4.4: Log-retorno cumulativo das 64 ações e do Índice Bovespa

Desta forma, neste trabalho estudamos duas estratégias de seleção de portfólios, a saber, a otimização de Markowitz e a versão de Black, com possibilidade de *short-selling*.

Para isto, foi calculada no Excel a matriz de covariância V_{ij} e a matriz de correlação para cada par de ativos, bem como matriz inversa da matriz de covariância V_{ij}^{-1} . Para isto, foi necessário baixar e instalar no Excel o suplemento *Matrix* (disponível no site: <http://digilander.libero.it/foxes/SoftwareDownload.htm>). Este

suplemento oferece diversas funções para se trabalhar com matrizes no Excel. Como exemplo, abaixo são apresentadas as fórmulas utilizadas para calcular a matriz de covariância e de correlação, sendo no intervalo de células E9:BP520 estão os log-retornos dos ativos. Da mesma forma, os suplemento *Matrix* oferece funções de inversão, transposição e multiplicação de matrizes.

V_{ij}	RSID3	GFS3A3	CYRE3	TAMM4
RSID3	=MatCovar(E9:BP522)			0.0006
GFS3A3	0.0012	0.0023	0.0017	0.0009
CYRE3	0.0011	0.0017	0.0021	0.0008
TAMM4	0.0006	0.0009	0.0008	0.0012

	RSID3	GFS3A3	CYRE3	TAMM4
RSID3	=MatCorr(\$E\$9:\$BP\$520)			0.287461
GFS3A3	0.451041	1	0.77286	0.531539
CYRE3	0.446228	0.77286	1	0.508889
TAMM4	0.287461	0.531539	0.508889	1

Deve-se calcular também a matriz

dos retornos $\begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ e sua transposta.

Assim, dado pela Fórmula 2.50, pode-se calcular as matrizes A_{ij} e A_{ij}^{-1} , chegando-se a:

A_{ij}
0,0952846 2,2775402
2,2775402 6246,3022

A_{ij}^{-1}
10,587148 -0,00386
-0,00386 0,0001615

Pode-se agora calcular os parâmetros da hipérbole que definirá a Fronteira Eficiente de Black (Ver Anexo A sobre Curvas por Equações Paramétricas).

Considerando os valores da matriz A_{ij} acima, a qual corresponde à matriz definida em 2.62, podemos calcular os parâmetros a , b e r_0 ($=y_0$), conforme as fórmulas 2.77, 2.78 e 2.79, respectivamente, chegando a:

$a = 0,012653$
$b = 0,003889$
$r_0 = 0,000365$

$r_{\max} = 0,01$
$\theta_{\max} = 1,673494$
$\delta\theta = 0,016735$

Onde :

$$\theta_{\max} = A \operatorname{Senh}(r_{\max} / b)$$

$$\delta\theta = \theta_{\max} / 100$$

Dados os parâmetros acima, pode-se calcular 200 valores para θ , partindo do $\theta_{\max}$ e variando segundo $\delta\theta$. Para cada valor, calculamos o σ (eixo x) e o $r_{\text{médio}}$ (eixo y) correspondente, segundo as fórmulas (Anexo A):

$$\sigma = a \cosh(\theta)$$

$$r_{\text{médio}} = b \sinh(\theta) + r_0$$

Temos então definida a Fronteira Eficiente de Black. O Portfólio de Black está definido em 2.57 por:

$$(\bar{x}') = (r - 1)A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \cdots & \bar{r}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} V^{-1}$$

assumindo que $-0,01 < r < 0,01$.

Assim, após o cálculo do Portfólio de Black, pode-se criar um algoritmo (mostrado no Quadro X) para o cálculo do Portfólio de Markowitz a partir da matriz de valores do Portfólio de Black, a qual colamos (como valores), em uma planilha do Excel, na célula CA202. (Temos uma matriz de valores da célula CA202 a EL252).

```
Sub Markowitz()
    For Row = 202 To 252
        Set myRange = Range(Cells(Row, "CA"), Cells(Row, "EL"))
        Set restricao1 = Cells(Row, "EO")
        Set restricao2 = Cells(Row, "EP")
        Set target = Cells(Row, "EQ")
        SolverReset
        SolverAdd CellRef:=restricao1, Relation:=2, FormulaText:="0"
        SolverAdd CellRef:=restricao2, Relation:=2, FormulaText:="0"
        SolverOptions MaxTime:=100, Iterations:=100, Precision:=0.000001, AssumeLinear _
            :=False, StepThru:=False, Estimates:=1, Derivatives:=1, SearchOption:=1, _
            IntTolerance:=5, Scaling:=False, Convergence:=0.0001, AssumeNonNeg:=True
        SolverOk SetCell:=target, MaxMinVal:=2, ValueOf:="0", ByChange:=myRange
        SolverFinish keepFinal:=1
        SolverSolve userFinish:=True
    Next
End Sub
```

Tabela 4.5: Algoritmo de solução para a otimização de Markowitz

Dado que $restricao1 = \sum x_i = 1$, $restricao2 = \sum x_i \bar{r}_i = 1$ e $target = \sigma^2 = \sum \sum x_i x_j V_{ij}$. É importante ressaltar que os $\bar{r}$ devem ser menores ou igual ao $\bar{r}_{\max}$ e maiores ou igual ao $\bar{r}_{\min}$ dos ativos em análise (neste caso, $-0,0036 \leq \bar{r} \leq 0,0014$).

Por fim, calcula-se os parâmetros para o cálculo da Linha do Mercado de Capitais, assumindo um retorno de 10% a.a. para o ativo de renda fixa. Assim, poder-se-á definir o Portfólio de Markowitz, isto é, aquele portfólio da fronteira eficiente que tangencia a LMC.

Portanto, temos:

Rf =	10.00%	
rf =	0.095310	1/ano
rf =	0.000378	1/dia

Sendo a inclinação da reta definida como a inclinação máxima da fronteira eficiente de Markowitz.

Portanto, a Figura 4.6 apresenta a Fronteira Eficiente de Markowitz e de Black para as 64 ações do Índice Bovespa em 2007 e 2008, sendo o ponto azul em destaque o portfólio constante.

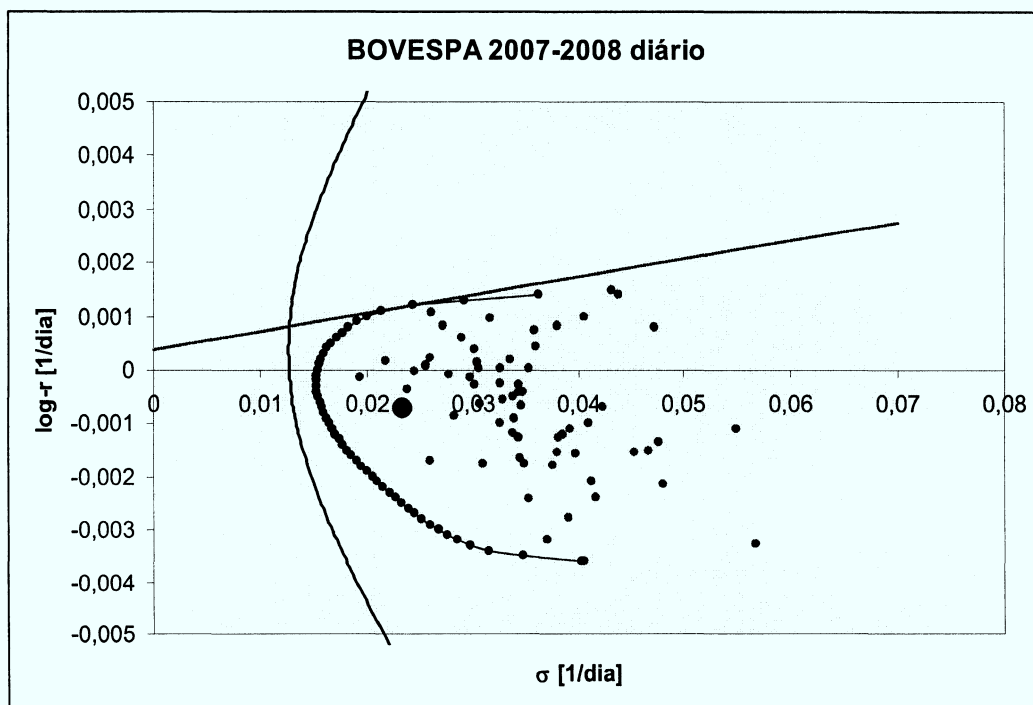


Figura 4.6: Linha do Mercado de Capitais, Fronteira Eficiente de Black e de Markowitz

Desta forma, pode-se definir o portfólio de tangência, isto é, o Portfólio de Markowitz e calcular seu log-retorno cumulativo. Pode-se também calcular o Portfólio de Black e calcular seu log-retorno cumulativo. Ambos são incluídos na Figura 4.4 para comparação dos desempenhos relativos. Na Figura 4.7, observamos que ambos sempre obtêm um retorno superior ao Ibovespa, sendo que o Portfólio de Black se destaca principalmente no final da série, quando há uma queda generalizada dos preços. Comparado ao rendimento acumulado do Ibovespa de -18%, o Portfólio

de Markowitz apresentou um log-retorno acumulado de 66,8%, enquanto do Portfólio de Black apresentou um log-retorno acumulado de 154%!

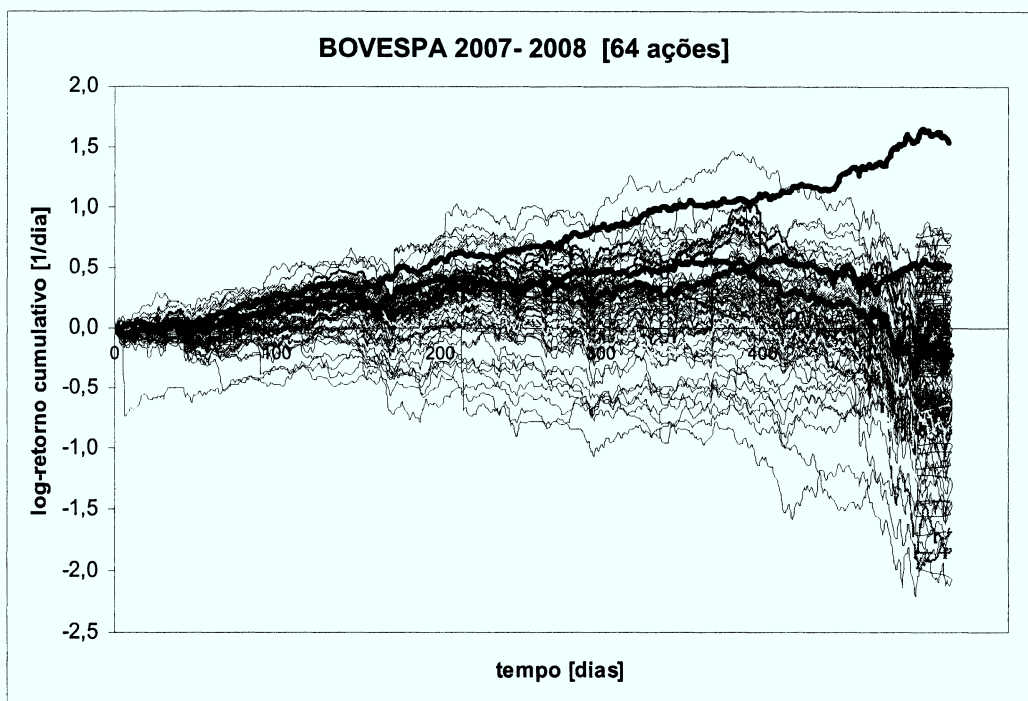


Figura 4.7: Log-retorno cumulativo do Índice Bovespa, Portfólio de Black e Portfólio de Markowitz

4.3 Construção da Árvore de Extensão Mínima utilizando o Pajek

O próximo passo do trabalho consiste em construir a árvore de extensão mínima (*minimum spanning tree*) que representa o mercado durante esses dois anos. Para isto, utilizamos o software *Pajek*, um programa para análise de grandes redes (o software é livre e está disponível para download em: <http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/>)²⁹.

No Pajek, as informações são representadas por:

- Vértices: Indica o ponto de ligação entre dois *edges*;

²⁹ Uma ótima introdução ao Pajek e um manual podem ser encontrados em [82 e 83]. Também no site onde se pode fazer o download existe um extenso material sobre o software e suas funções.

- *Edges*: Linhas que representam uma ligação entre 2 Vértices. A espessura da linha pode representar um valor diferente para cada *edge*;
- *Arcs*: Linhas que representam uma ligação entre 2 Vértices, porém com sinalização de direção. Neste caso um dos lados da linha terá uma seta indicando a direção.

A geração de dados para criação de uma rede no Pajek pode ser feita manualmente estabelecendo os vértices, *edges* e *arcs*. Deve ser criado um arquivo texto, com a extensão .net. Além disso, os arquivos podem ser .clu (partições), .vec (vetores) e .per (permutações).

A primeira informação do arquivo são os vértices, enumerando a lista e colocando a quantidade de vértices que farão parte de arquivo. Em seguida, definem-se os *edges*, que representam as ligações entre os vértices e são definidos individualmente. Neste caso, definimos os *edges* pela matriz de distâncias.

Exemplo:
 *Vertices 64
 1 "ALLLI1"
 2 "AMBV4"
 3 "ARCZ6"
 ...
 *Matrix
 (colamos a matriz de distâncias e salvamos como .net)

A matriz de distâncias é calculada a partir da matriz de correlações, definido pela fórmula 3.7.

Em seguida definimos a partição e o vetor. Fizemos uma partição dividindo os dados em setores e outra em sub-setores. O vetor definirá o tamanho de cada vértice e será representado pela porcentagem daquela ação no Índice Bovespa.

Temos então a rede criada, mas estamos procurando um sub-grafo definido no espaço ultramétrico em que as 64 ações estão interligadas. A estrutura subdominante pode ser determinada calculando-se a *minimal spanning tree* (MST) – árvore de extensão mínima – conectando as 64 ações. Segundo [3], “o espaço ultramétrico subdominante associado com um espaço métrico fornece um arranjo topológico bem definido que possui uma hierarquia indexada única. Portanto, a investigação de ultramétricas subdominantes permite determinar de maneira única a hierarquia do sistema”.

Como as distâncias definem as correlações, queremos encontrar um sub-grafo que localize aquelas ações mais correlacionadas o mais próximo possível, portanto

devemos encontrar os *edges* entre os vértices com menor distância. Para isto, criamos um algoritmo que, partindo da localização de cada vértice no grafo simetrizado (onde todos os *arcs* foram transformados em *edges*), retornará a localização dos vértices mais próximos segundo suas correlações.

```
Sub MST()
'
  For Row = 35 To 96
    Range(Cells(Row, "C"), Cells(2049, "H")).Select
    Selection.Sort Key1:=Range(Cells(Row, "E"), Cells(2049, "E")), Order1:=xlDescending
    Key2:=Range(Cells(Row, "H"), Cells(2049, "H")) _
    , Order2:=xlAscending, Header:=xlGuess, OrderCustom:=1, MatchCase:= _
    False, Orientation:=xlTopToBottom, DataOption1:=xlSortNormal, DataOption2 _
    :=xlSortNormal
    Range(Cells(Row, "F"), Cells(Row, "H")).Select
    Selection.Cut Destination:=Range(Cells(Row, "K"), Cells(Row, "M"))
    Range(Cells(Row, "C"), Cells(Row, "E")).Select
    Selection.ClearContents
  Next
End Sub
```

Figura 4.8: Algoritmo MST

Executando o algoritmo em nossa planilha, obtivemos a posição dos 64 vértices e 63 *edges* ligando as ações pela menor distância possível entre elas. Podemos assim criar uma nova rede .net, e utilizar as mesmas partições e vetores definidos anteriormente.

Exemplo:

*Vertices 64
1 "ALLL11"
2 "AMBV4"
3 "ARCZ6"

...

*Edges
22 23 0.4538
18 22 0.8251
22 43 0.8367
42 43 0.4697

onde os dois primeiros números identificam um par de ativos e o terceiro número indica a distância ultramétrica entre eles.

Podemos agora desenhar a árvore de extensão mínima para as ações do Ibovespa, segundo as correlações entre os retornos durante os anos de 2007 e 2008, conforme mostrado na Figura 4.9.

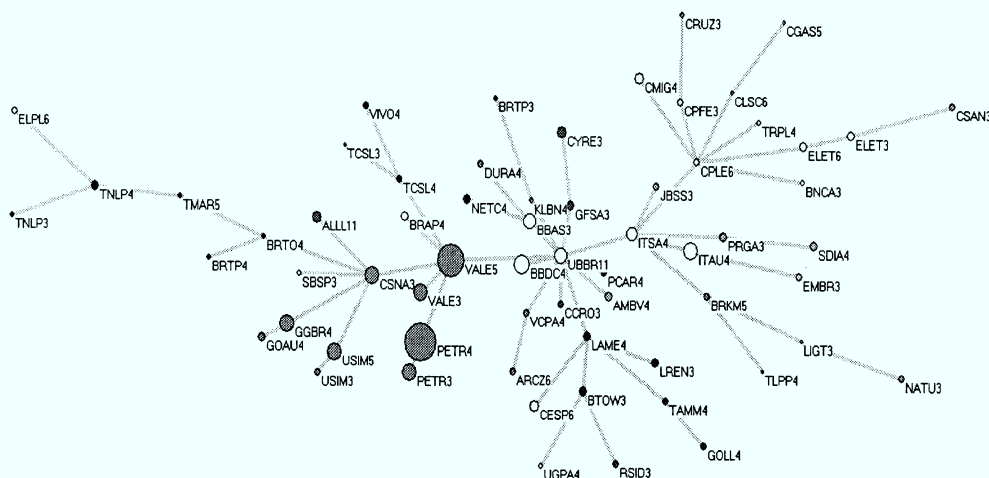


Figura 4.9: Minimum Spanning Tree (MST) de 64 ações do Ibovespa

Na Figura 4.9, observamos que muitas ações se ligam por apenas um link enquanto algumas ações possuem diversos links. Estas ações funcionam como peças centrais, que recebem sinais transmitidos pelo mercado ou fatores externos e os transmite para todas as demais. Exemplos são CSNA3 e VALE5 para os setores de Petróleo e Matérias Básicas, CPFE6 para o setor de Utilidade Pública e LAME4 para o setor de Consumo Cíclico.

É importante ressaltar que as ações da Petrobrás (PETR4 e PETR3) não ocupam um lugar central, mas possuem grande volume de negociação. Assim, apesar de possuir apenas um link, sua liquidez e peso relativo também a tornam um importante receptor de sinais e formador de mercado.

Nota-se também que as ações do setor financeiro tendem a situar-se na parte central da rede, devido principalmente à ligação dos bancos com as empresas através do crédito e também à liquidez destes ativos.

As empresas suas ações localizam-se nas mesmas ramificações provavelmente encaram os mesmos riscos de mercado e, neste aspecto, são substitutas na escolha de um portfólio. Além disso, tendem a apresentar uma forte correlação positiva.

Na Figura 4.10, apresentamos uma segunda rede, construída usando cotações de 15 minutos de 45 ações listadas na Bolsa de Valores de São Paulo, no período de 13 de março a 13 de abril de 2009.

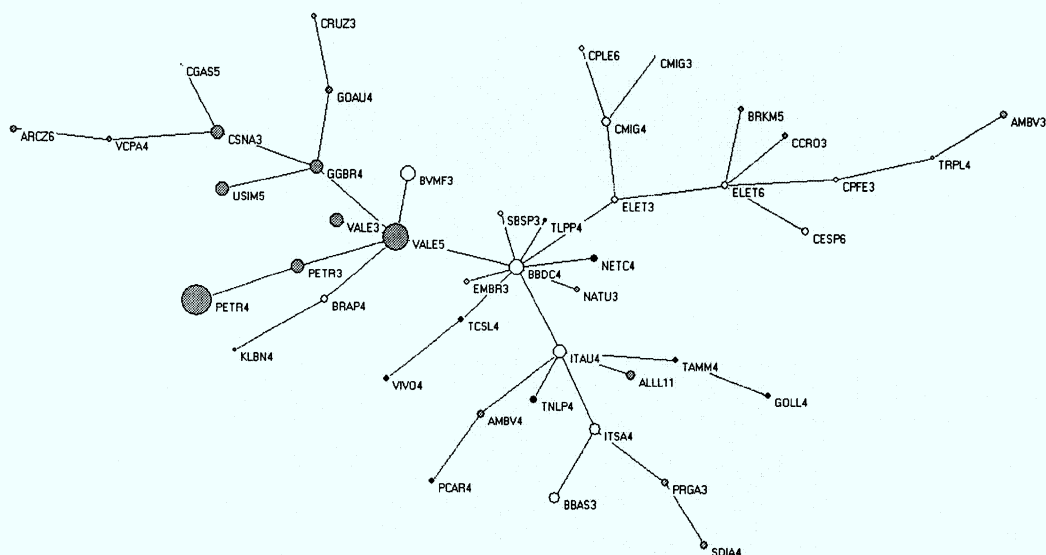
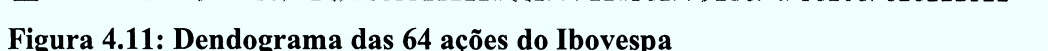


Figura 4.10: Minimum Spanning Tree (MST) de 45 ações da Bolsa de São Paulo

Nos parece que a utilização de uma série histórica de preços mensal, com pequenos intervalos, fornece uma rede mais informativa. Nesta rede, observamos que as ações do setor financeiro, como BBDC4 e ITAU4, aparecem no centro rede. Ações do setor de bens de consumo aparecem ligadas diretamente às ações do setor financeiro. Observamos também que VALE5 e ELET3 funcionam como importantes peças centrais.

Uma outra possibilidade é a extração de uma hierarquia do Pajek, isto é, um dendograma. Os dendogramas são freqüentemente usados para mostrar relações entre clusters. Um dendograma mostra as distâncias multidimensionais entre objetos na forma de uma árvore. Objetos que estão mais próximos uns dos outros no espaço de dados multidimensionais são conectados por uma linha horizontal, formando um cluster que pode ser considerado como um “novo” objeto. O novo cluster e os dados



CAPÍTULO 5

Conclusão e Perspectivas

No capítulo 2, estudamos os elementos fundamentais para a construção da moderna teoria do portfólio, com foco nos trabalhos de Markowitz, Tobin, Black e Sharpe. Apresentamos um método de solução para o problema de otimização quadrática de Black fizemos uma revisão da Hipótese de Mercados Eficientes.

No capítulo 3, estudamos alguns processos estocásticos que descrevem as flutuações de preços de ativos financeiros, bem como propriedades estatísticas aplicáveis a séries temporais, com destaque para a introdução das leis de potência na análise de dados do mercado financeiro. Também estudamos elementos da Teoria de Grafos como a distância métrica e espaços ultramétricos para extrair informações de séries temporais.

No capítulo 4, estudamos as correlações cruzadas entre flutuações de preços de diferentes ações. Calculamos a matriz de covariância de correlação a partir dos retornos diários de 64 ações que faziam parte do Índice Bovespa no último quadrimestre de 2008, para o período compreendido entre janeiro de 2007 a dezembro de 2008. Utilizando o método de solução do problema de otimização de Black apresentado no capítulo anterior, calculamos a fronteira eficiente de Black e o Portfólio de Black. E, a partir do resultado da otimização de Black, desenvolvemos um algoritmo que utilizamos a função Solver do Excel para adicionar a restrição de proibição de short-selling e resolver o problema de otimização quadrática de Markowitz. Pudemos então construir a fronteira eficiente de Markowitz e calcular o portfólio de Markowitz.

Observamos que para os dois anos estudados, ambos sempre obtêm um retorno superior ao Ibovespa, sendo que o Portfólio de Black se destaca principalmente no final da série, quando há uma queda generalizada dos preços. Comparado ao rendimento acumulado do Ibovespa de -18%, o Portfólio de Markowitz apresentou um log-retorno acumulado de 66,8%, enquanto do Portfólio de Black apresentou um log-retorno acumulado de 154%.

Ainda no mesmo capítulo apresentamos a árvore de extensão mínima que representa o Ibovespa para o período analisado e fazendo uma comparação com outra

árvore construída com dados dos preços de 45 ações a cada 15 minutos durante um mês, isto é, entre 13 de março e 13 de abril de 2009. O estudo do Espaço Ultramétrico em dados financeiros nos possibilita obter informações interessantes quanto ao agrupamento das ações analisadas, e a comparação das árvores de extensão mínima para diferentes períodos nos possibilita entender as flutuações dos preços ao longo do tempo. Ações que estão intensamente conectadas a outras, como, por exemplo, UBBR11 e CSNA3, indicam que suas flutuações servem frequentemente de referência para um dado grupo de ações.

Vimos, portanto, que as séries históricas de preços das ações carregam uma enorme quantidade de informações econômicas. O conhecimento das propriedades estatísticas dos dados e diferentes métodos de análise torna-se um importante aliado na tarefa de construir portfólios de investimentos, onde se procura obter maiores retornos com o menor risco possível. Utilizando o método de construção de carteiras de Markowitz e Black, construímos um portfólio que apresentou retornos consideravelmente superiores ao Índice Bovespa. Destacamos ainda a performance do portfólio de Black, que não coloca restrição quanto a *short selling*, principalmente no 2º semestre de 2008, com o agravamento da crise financeira e queda generalizada das ações.

Enfim, qualquer modelagem dos mercados financeiros precisa levar em conta a presença de um alto grau de sincronização entre pares de ativos. Já foi detectado que um pequeno número de fatores econômicos influencia um grande número de ativos. Estas conclusões não são inconsistentes com a hipótese de mercados eficientes porque não implicam diretamente a previsibilidade temporal de preços de ativos no futuro. No entanto, correlações durante certo período, e o conhecimento preciso da natureza dos fatores e suas dinâmicas, se presentes, fornecem oportunidades de arbitragem e desvios da eficiência de mercado.

Concluimos que podemos extrair parte das informações econômicas presentes em séries históricas de preços se calculamos a distância entre cada par de ativos em um portfólio, e se consideramos o espaço ultramétrico apropriado para a representação das árvores de extensões mínimas.

Para um próximo trabalho, pretendemos evoluir no cálculo de um portfólio eficiente, calculando o “portfólio de semi-variância” para a mesma base de dados. Outra evolução, que sempre deve aproximar os resultados da realidade, é trabalhar com dados de menor intervalo, por exemplo, cotações a cada 15 minutos.

O estudo de redes de ativos em mercados financeiros e suas propriedades é um assunto atual e em desenvolvimento. Árvores dinâmicas análise de portfólios.

A partir do estudo das séries dos retornos dos ativos e do conhecimento das correlações entre eles, podemos também estudar e formular estratégias de *trading*. Um exemplo seria estudar as correlações entre ativos a cada 20 dias, obtidas a partir das cotações a cada 20 minutos, e calcular o Portfólio de Markowitz e Black. Após 20 dias, fazer o mesmo processo para as cotações dos 20 dias precedentes e assim continuar, formando um “portfólio adaptativo”.

Outra estratégia já bastante utilizada é conhecida como “*pair trading*” . Aqui, o principal é conhecer ativos correlacionados e explorar momentos que eles divergem de suas correlações. Nesta estratégia, também conhecida como “statistical arbitrage” ou “spread trading”, o investidor não está propriamente negociando os dois ativos, mas um diferencial de preços baseado unicamente no conhecimento da correlação. Vendendo um ativo e simultaneamente comprando um outro, você está se hedgiando em relação ao mercado. Esta neutralidade ao mercado permite realizar lucros quando o mercado está subindo, caindo ou ‘de lado’. Deste forma, assim como esta, diversas outras estratégias *long/short* podem ser criadas, sendo o conhecimento e compreensão das correlações o aspecto fundamental. Por fim, acreditamos que a análise das árvores de extensão mínima também podem oferecer informações valiosas para a formação dessas estratégias.

Anexo A

Curvas por Equações Paramétricas

Equação do Círculo: $x^2 + y^2 = R^2$

$$\theta \quad x(\theta) \quad y(\theta)$$

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

$$\frac{x^2 = R^2 \cos^2 \theta}{y^2 = R^2 \sin^2 \theta} = \frac{x^2 + y^2 = R^2}{x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

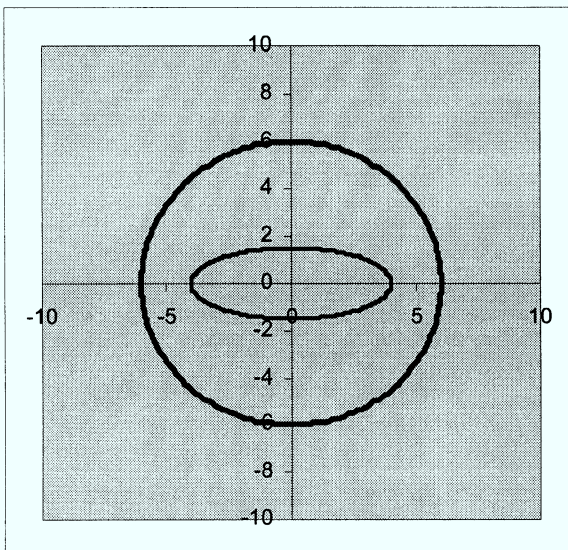
Equação da Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$x = a \cos \theta \quad \frac{x}{a} = \cos \theta \quad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 \theta \quad (1)$$

$$y = b \sin \theta \quad \frac{y}{b} = \sin \theta \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \theta \quad (2)$$

$$(1) + (2) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exemplo:



Parâmetros:

Círculo	Elipse
xo= 0	xo= 0
yo= 0	yo= 0
R= 6	a= 4
δθ= 0,0314	b= 1,5

Para a construção de ambas as curvas, consideramos 200 pontos. Assim, $\delta\theta = 2\pi/200$. Primeiro, encontramos os 200 valores de θ , começando em 0 e variando segundo o fator $\delta\theta$. Então calculamos os valores de x e y para cada θ .

Equação da Hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

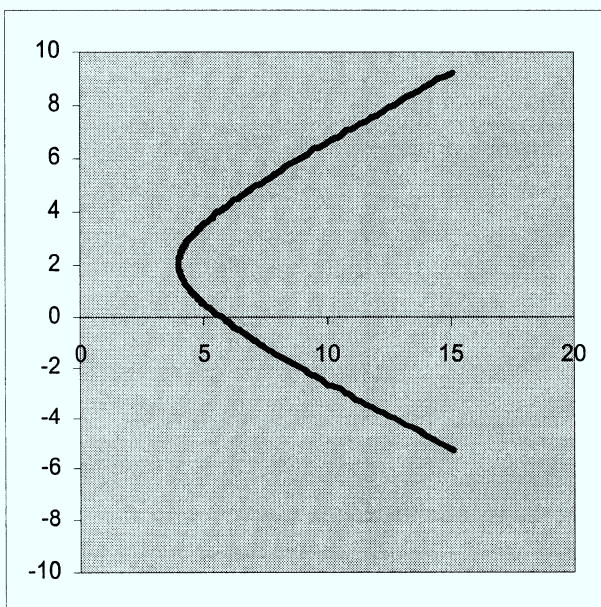
$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

$$\frac{(e^{\theta} + e^{-\theta})^2}{4} - \frac{(e^{\theta} - e^{-\theta})^2}{4} = \frac{e^{2\theta} + 2 + e^{-2\theta}}{4} - \frac{e^{2\theta} - 2 + e^{-2\theta}}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

Exemplo:



Parâmetros:

Hipérbole

$x_0 = 0$

$y_0 = 2$

$a = 4$

$b = 2$

$\eta M = 0,02$

Para a construção da curva, consideramos 200 pontos. Assim, $\delta\theta = 4/200$.

Primeiro, encontramos os 200 valores de θ , começando em 0 e variando segundo o fator $\delta\theta$. Então calculamos os valores de x e y para cada θ .

$$x = a \cosh \theta + x_0$$

$$y = b \sinh \theta + y_0$$

REFERÊNCIAS

- [1] Voit, J.: The Statistical Mechanics of Financial Markets (Springer, 2001).
- [2] Bachelier, L.: "Théorie de la Spéculation", Ph. D. Thesis, Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure III-17, 21-86 (1900).
- [3] Mantegna, R., Stanley, H. E.: An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).
- [4] Davis, M., Etheridge, A. Louis.: Louis Bachalier's Theory of Speculation: the Origins of Modern Finance. Chapter 1, pp. 1-15. Princeton University Press. 2006.
- [5] Courtault, J. M. et al.: Louis Bachalier on the centenary of Théorie de la Spéculation. Mathematical Finance, Vol. 10, N.3 (July 2000), 341-353.
- [6] Rhinesmith, J.: Finance Gets Physical. Yale Economic Review, Spring 2006.
- [7] Farmer, M., Shubik & Smith, E.: Physics Today , September 2005.
- [8] Chakrabarti, Bikas K. 2005. "Econphys-Kolkata: A Short Story," in Arnab Chatterjee, Sudhakar Yarlagadda, and Bikas K. Charkrabarti, eds. Econophysics of Wealth Distributions. Milan: Springer, 225-228.
- [9] Stanley, E. H, V. Afanasyev, L.A.N. Amaral, S.V. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, Rosario N. Mantegna, C.-K. Peng, P.A. Prince, M.A. Salinger, M.H.R. Stanley, and G.M. Viswanathan. 1996. "Anomalous Fluctuations in the Dynamics of Complex Systems: From DNA and Physiology to Econophysics," Physica A 224, 302-321.
- [10] Rosser, J. B.: Debating the Role of Econophysics. Department of Economics, James Madison University, Harrisonburg, USA. January, 2008.
- [11] The great econophysics debate. Econophysicists Matter. Editorial. Nature 441 (7094). 2006.
- [12] Ball, P.: Econophysics: Culture Crash. Nature 441, 686-688 (8 June 2006) | doi: 10.1038/441686a; Published online 7 June 2006.
- [13] Pimbley, J. M.: Physicists in finance. Physics Today, January 1997. American Institute of Physics.
- [14] Taleb, N.: A Lógica do Cisne Negro – O Impacto do Altamente Improvável. Editora Best Seller. 2008.
- [15] Ormerod, P., Gallegati, M., Keen, S.: Worrying trends in Econophysics. Science Direct, Physica A. 370 (2006). 1-6.

- [16] McCauley, J. Response to "Worrying Trends in Econophysics". *Physics and Society*. 2006
- [17] Ormerod, P.: *Butterfly Economics: A new Theory of Social and Economic Behavior*. Pantheon, 1999.
- [18] Guimarães, F., Melo, E.: *Diagnóstico Utilizando Análise de Redes Sociais*. COPPE/UFRJ, Especialização, Engenharia de Produção, 2005.
- [19] Marschinski, R. & Matassini, L.: *Financial Markets as Complex System: A Short Time Scale Perspective*. Research Notes in Economics & Statistics. Deutsche Bank Research. 2001.
- [20] Brealey, R. A.: Harry Markowitz's contributions to Financial Economics. *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 93, Nº 1. (Mar., 1991), pp. 7-17.
- [21] Hicks, J. R.: A suggestion for simplifying the theory of money. *Economica*, 1-19, Fevereiro, 1935.
- [22] Chambers, S.P.: Fluctuations in capital and the demand for money. *Review of Economic Studies* 2, 38-50, 1934.
- [23] Maes, I.: On the origins of portfolio theory. Unpublished paper, 1989.
- [24] Marschak, J.: Money and the theory of assets. *Econometrica* 6, October 1938.
- [25] Tobin, J.: Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*, 65-86, February, 1958.
- [26] Markowitz, H. M.: Portfolio selection. *Journal of Finance*, v.7, n.1, p. 77-91, mar. 1952.
- [27] Williams, J. B.: *The Theory of Investment Value*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1938.
- [28] Markowitz, H. M.: Markowitz, H., "The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints," *Naval Research Logistics Quarterly*, 1956, 3.
- [29] Markowitz, H. M.: *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. Yale University. 1959. Markowitz, H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. New York: Wiley, 1959.
- [30] Ballesterio, E. Mean-Semivariance Efficient Frontier: A Downside Risk Model for Portfolio Selection. *Applied Mathematical Finance*, v.12, n.1, p.1-15, 2005.
- [31] Bond, S. A. e Satchell, S. E. Statistical properties of the sample semi-variance. *Applied Mathematical Finance*, n. 9, p. 219-239, 2002.
- [32] Matsumoto, A. & Pinheiro, C.: *Gestão de portfólios: uma proposta de otimização através da média-semivariância*. 2006.

- [33] Markowitz, H. M.: Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. New York: Blackwell, 1987.
- [34] Sharpe, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, n.19, p. 425-442, 1964.
- [35] Treynor, J. L.: Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. Unpublished manuscript, 1962. Final version in *Asset Pricing and Portfolio Performance*, 1999, Robert A. Korajczyk, ed., London: Risk Books, pp. 15-22.
- [36] Black, F. Capital market equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*, Julho, pp.444-455, 1972.
- [37] Bruni, A. & Famá, R.: Mercados eficientes, CAPM e anomalias: uma análise das ações negociadas na Bovespa (1988-1996). III Semead.
- [38] Fousseni, C., Ghysels, E., Renault, E.: On portfolio separation theorems with heterogeneous beliefs and attitudes towards risk. February, 2008.
- [39] Varian, H.: A Portfolio of Nobel Laureates: Markowitz, Miller and Sharpe *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 7, No. 1. (Winter, 1993), pp. 159-169.
- [40a] Lintner, John. 1965a. "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets." *Review of Economics and Statistics*. February, 47, pp. 13-37.
- [40b] Lintner, John. 1965b. "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification." *Journal of Finance*. December, 20, pp. 587-615.
- [41] Mossin, Jan. 1966. "Equilibrium in a Capital Asset Market." *Econometrica*. October, 3.5, pp. 768-83.
- [42] Litzenberger, R.: William F. Sharpe's Contributions to Financial Economics. *Scand. J. of Economics* 93 (1), 37-46, 1991.
- [43] Sharpe, W.: Capital Asset Prices With and Without Negative Holdings. Nobel Lecture, December 7, 1990.
- [44] Fama, E. & French, K.: The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 18, N°3, pp. 25-46, 2004.
- [45] Perold, A.: The Capital Asset Pricing Model. *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 18, N°3, pp. 3-24, 2004.
- [46] Milani, L.: Uma Contribuição para o entendimento do Mercado de ações, através de um teste empírico do CAPM na Bovespa no período de 1996 a 2000. Dissertação de Mestrado, UFSC. Florianópolis, 2001.

- [47] Mehrling, P.: Understanding Fisher Black. Barnard College, Columbia University, New York, 2000.
- [48] Rubinstein, M.: Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective. *Journal of Finance* Vol. LVII, No. 3, 2002.
- [49] Macastropa, F.: A aplicabilidade da moderna teoria de portfólios em títulos de renda fixa internacionais. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, USP. 2006.
- [50] Bodie, Z., Kane, A. & Marcus, A.: *Investments*. McGraw-Hill/Irwin. 2006.
- [51] Sanvicente, A.Z, Mellagi Filho, A.: *Mercados de capitais e estratégias de investimento*. São Paulo: Atlas. 1988.
- [52] Fama, E.: Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance* 25, 383-417, 1970.
- [53] Cootner, P. ed.: *The Radom Character of Stock Market Prices*. MIT Press, Cambridge MA, 1964.
- [54] Samuelson, P.: Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review* 6, 41-45, 1965.
- [55] Kendall, M.: *The Analytics of Economic Time Series*, Part 1. 1953.
- [56] Fama, E.: Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance* 25, 383-417, 1970.
- [57] Keane, S.: *Stock Market Efficiency: Theory, evidence, and implications*. P. Allan. 1983.
- [58] Lo, Andrew: *Market Efficiency: Stock Market Behaviour in Theory and Practice*. Edward Elgar Publishing. 1997.
- [59] Guimarães, T.: *Testes Empíricos da Eficiência do Mercado Acionário Brasileiro*. Dissertação de Mestrado da EESP, FGV. 2009. Disponível em: <http://virtualbib.fgv.br/dspace/handle/10438/2648>.
- [60] Santos, R.: *Estudo de Flutuações e Correlações em Séries Financeiras*. Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da UFCS. Florianópolis, 2008.
- [61] Gléria, I., Matsushita, R. & Da Silva, S.: *Sistemas Complexo, Criticalidade e Leis de Potência*.
- [62] Clauset, A., Shalizi, C. & Newman, J.: *Power-Law Distributions in Empirical Data*. 2009.

- [63a] Mandelbrot, B.: The Variation of Certain Speculative Prices. The Journal of Business, Volume 36, 394-419, 1963.
- [63b] Mandelbrot, B.: Correction of an Error in "The Variation of Certain Speculative Prices". The Journal of Business, Volume 45, Issue 4, 542-543, 1972.
- [63c] Mandelbrot, B. Fractals and Scaling in Finance, New York: Springer-Verlag. 1997
- [64] Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V. & Stanley, E.: A theory of Power-law distributions in financial market fluctuations. Nature, Vol. 423, May, 2003.
- [65] Gopikrishnan, P., Meyer, M., Amaral, L. & Stanley, H. Inverse cubic law for the distributions of stock price variations. The European Physical Journal B3(2), 139-40, 1998.
- [66] Mantegna, R. & Stanley, E. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. Nature 376, 46-9, 1995.
- [67] Plerou, V., Gopikrishnan, P., Amaral, L., Meyer, M. & Stanley, E. Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies. 1999.
- [68] Mantegna, R. Levy walks and enhanced diffusion in the Milan stock Exchange. Physica A 179, 232-9. 1991.
- [69] Gleria, I., Matsushita, R. & Da Silva, S.: Scaling power laws in the Sao Paulo Stock Exchange. Economics Bulletin, 7(3), 1-12, 2002.
- [70] Figueiredo, A., Gleria, I., Matsushita, R., & Da Silva, S. Autocorrelation as a source of truncated Lévy flights in foreign exchange rates. Physica A 323, 601-625, 2003.
- [71] Müller, U., Dacorogna, M., Olsen, R., Richard, B., Pictet, *et alii.*: Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intraday analysis. Journal of Banking & Finance 14(6), 1189-208, 1990.
- [72] Liu, Y., Gopikrishnan, P., Cizeau, P., Meyer, M. *et alii.* Statistical properties of the volatility of price fluctuations. Physical Review E 60, 1390-400, 1999.
- [73] Beirlant, J., Schoutens, W. & Segers, J.: Mandelbrot's Extremism. Discussion Paper No. 125. Tilburg University. 2004.
- [74] M. Tumminello, C. Coronello, F. Lillo, S. Micciché, R. N. Mantegna, IJBC, **17**, 2319-2329 (2007).
- [75] Albert, R. & Barabási, A.: Statistical mechanics of complex networks. Reviews of Modern Physics, Volume 74, 2002.
- [76] Mantegna, R. Hierarchical structure in financial markets, Eur. Phys. J. B **11** 193-197, 1999.

- [77] Onnela, J.: Complex Networks in the Financial and Social Systems. Dissertation for the degree of Doctor of Science in Technology. Helsinki University of Technology. 2006.
- [78a] Onnela, J., Chakraborti, A., Kaski, K. & Kertész, J.: Dynamic asset trees and portfolio analysis. *The European Physical Journal B* 30, 285-288, 2002.
- [78b] Onnela, J., Chakraborti, A., Kaski, K.: Dynamics of market correlations: Taxonomy and portfolio analysis. *Physical Review E* 68, 2003.
- [78c] Onnela, J., Kaski, K. & Kertész, J.: Clustering and information in correlation based financial networks. *The European Physical Journal B* 38, 353-362, 2004.
- [79] Bonanno, G., Caldarelli, G., Lillo, F., Micciché, S., Vandewalle, N. & Mantegna, R.: Networks of Equities in financial markets. *The European Physical Journal B* 38, 363-371 (2004).
- [80] Onnela, J., Chakraborti, A., Kaski, K. & Kertész, J.: Dynamic asset trees and Black Monday. *Physica A* 324, 247-252, 2003.
- [81] Nakamura, W.: Estudo Empírico sobre a eficiência da Carteira Teórica do Índice Bovespa. *Revista de Administração Mackenzie*. Ano 1, n. 1, p. 67-81, 2001.
- [82] Mrvar, A., Batagelj, V. & Noov, W.: Exploratory Social Network Analysis with Pajek (Structural Analysis in the Social Sciences). Cambridge University Press. 2005.
- [83] Hillman, H.: Social network theory: first day. 2007. (Disponível em: http://www.stanford.edu/~tylers/notes/social_network/Social_networks.pdf)