

Universidade Estadual de Campinas

UNICAMP

Instituto de Economia

Monografia

**Análise de Modelos Estocásticos Aplicados aos
Mercados Financeiros:**

**Modelo Black&Scholes, Teorema do Limite
Central e Distribuições Estáveis**

Henrique Guilherme do Amaral Santos

Orientador: Carlos Lenz Cesar

Campinas

Dezembro de 2002

Capítulo 1:	3
Introdução	3
Capítulo 2:	7
O Mercado de Capitais e de Derivativos	7
Álgebra do Investimento	7
Mercado Financeiro	8
Mercado de Derivativos	10
Mercado a Termo	10
Mercado de Futuros	11
Mercado de Opções	11
Capítulo 3:	15
Série de Taylor	15
Casos Particulares	17
Truque do Logaritmo	20
Cálculo do Resto	21
Teorema do Valor Médio de Cauchy	21
Resto da Série de Taylor	22
Passos Aleatórios	24
Forma Assimptótica da Distribuição Binomial	26
Movimento Browniano Padrão	31
Movimento Browniano com Viés	32
Composição de Movimentos Brownianos	32
Lema de Itô	36

Capítulo 4:	38
Modelo de Black & Scholes	38
Condições Iniciais	40
Solução para uma Opção de Compra	41
Capítulo 5:	44
Momentos de Distribuições Estatísticas	44
Relação entre Momentos Centrados e Não-Centrados	45
Truque da Derivada	46
Função Geradora de Momentos	48
FGM da Distribuição Normal	50
FGM de Distribuições Independentes	51
Função Característica	51
Função Delta de Dirac	53
Função de Heaviside	60
Transformadas	63
Achando Transformadas	68
Teorema da Convolução	70
Intuição sobre a Convolução	72
Capítulo 6:	77
Síntese dos Resultados Obtidos	78
Teorema do Limite Central	81
Distribuições Estáveis	90
Conclusão	94
Bibliografia	96

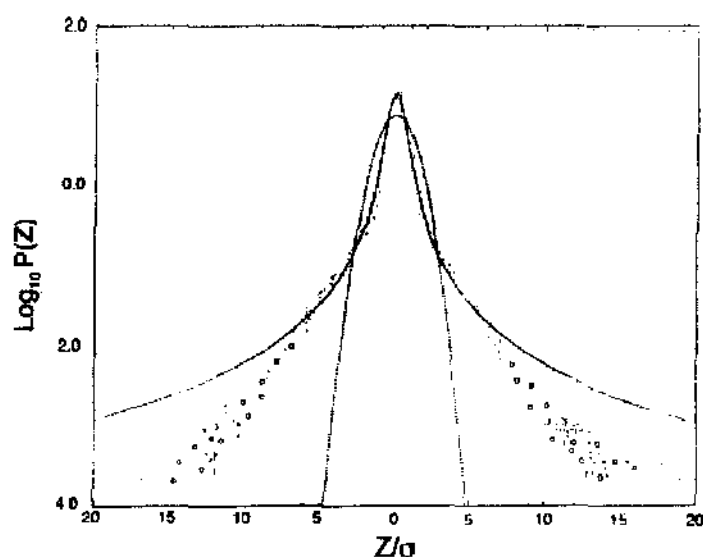
Capítulo 1

Introdução

Muito recentemente dois físicos, Rosario Mantegna e H. Eugene Stanley, publicaram um livro chamado “An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance” no qual apresentam uma visão crítica dos modelos atualmente utilizados na análise dos mercados financeiros. Stanley é considerado o pioneiro de um novo campo de pesquisas que ele denominou de Econophysics, tendo sido professor do MIT por 30 anos onde trabalhou como físico teórico na área de Física Estatística. Dado o enorme interesse da área econômica, especialmente do mercado financeiro, muitos físicos estão se dedicando a esse campo, com a grande maioria de suas publicações em revistas de física, e não de economia. Os físicos apontam para uma tendência altamente “conservadora” dos economistas, que, por seu lado, parecem considerar os trabalhos dos físicos pouco rigorosos do ponto de vista formal. De qualquer forma seria interessante que os economistas pudessem entender do que se trata o assunto. Infelizmente, isso nos pareceu ser impossível com o livro de Mantegna&Stanley (MS). Eles escreveram o livro como se escreve um artigo de física, economizando ao máximo qualquer demonstração, utilizando linguagem técnica e remetendo aos autores originais, o que obriga o leitor a ter que acompanhar o raciocínio em centenas de livros e artigos. Como nos pareceu que isso é contrário ao espírito de um livro cuja leitura deveria ser, ao máximo, autocontida, decidimos utilizar parte desse livro como um guia para o desenvolvimento dessa monografia, demonstrando quase toda a matemática necessária para seu entendimento. Estamos seguindo principalmente os capítulos 3, 4, 9 e 14.

Dessa forma, aqui faremos um estudo das bases matemáticas teóricas do modelo de precificação de derivativos opções em mercados financeiros Black & Scholes. O Modelo Black & Scholes apresenta como base principal a suposição

de que o preço dos derivativos se movimentam numa dinâmica que segue o Movimento Browniano Geométrico (MBG). O que essa monografia pretende é explicar se o mercado realmente segue essa lei, ou seja, se os preços desses derivativos realmente se formam em compasso com um MBG. A figura 1.1 abaixo mostra a evolução no tempo do logarítmo da distribuição para as variações do índice de preços das ações S&P 500. Perecebe-se que a distribuição observada não obedece a uma MBG, tendo um pico mais acentuado e caudas mais “espalhadas”, para compensar a área perdida na região central.



Comparison of the $\Delta t = 1$ probability density function for high-frequency S&P 500 price changes with the Gaussian distribution (dotted line) and with a Lévy stable distribution (solid line) of index $\alpha = 1.40$ obtained from the scaling analysis and scale factor $\gamma = 0.00375$ obtained from $P(0)$ measured when $\Delta t = 1$ minute.

Figura 1.1

A grande motivação no uso da MBG vem do Teorema do Limite Central (TLC), que garante que uma distribuição com variância finita converge para uma Distribuição Gaussiana, ou distribuição normal. Contudo, dados empíricos mostram que isso não é realidade. A quantidade de dados que se tem sobre os mercados financeiros hoje é muito grande, e não confirmam a suposição do TLC. O gráfico da figura 1.2, que mostra variações nos valores da taxa de câmbio US\$/DM para intervalos τ de 5 minutos, é outro exemplo em que não se observa uma MBG. Novamente nota-se um contraste explícito com a Distribuição Gaussiana, apresentando um pico mais fino central mais elevado. Distribuições

mais estreitas no pico e alargada nas caudas em relação à Gaussiana, são chamadas de leptokurticas. A kurtose é definida em relação a Gaussiana para a qual vale zero. A kurtose é definida em relação a Gaussiana para a qual vale zero. A kurtose da distribuição da figura 1.2 vale 74.

Figura 1.2.

Assim, concluímos que existem algumas distribuições que não obedecem ao TLC. Essas distribuições têm algumas características importantes: elas são estáveis, todas têm variância infinita, apresentando o fenômeno conhecido por ubiquidade (estar ao mesmo tempo em toda parte). Uma distribuição é considerada estável se a soma das suas variáveis aleatórias independentes possuem a mesma distribuição das variáveis individuais. A família de todas essas distribuições é conhecida como Distribuições Estáveis de Lévy (DEL), dentre as quais a gaussiana é só um caso particular e a única com variância finita.

Para definir matematicamente a classe de distribuições estáveis, será necessário usar o Teorema da Convolução para as Transformadas de Fourier. Com esse instrumental, poderemos definir que tipo de distribuição é estável. Assim, iremos organizar a monografia de acordo com o seguinte esquema de capítulos: no segundo capítulo, uma introdução sobre o mercado financeiro e o mercado de derivativos; no terceiro capítulo, iremos explicar a Série de Taylor, falar sobre os Passos Aleatórios e sobre o MBG; no quarto capítulo, explicaremos o Modelo de Black & Scholes; no quinto capítulo descreveremos as propriedades da Função Geradora de Momentos e da Função Característica, abordaremos as Funções Delta de Dirac (também conhecidas como Funções de Impulso), as Transformadas de Fourier e o Teorema da Convolução, todos instrumentos importantes para deduzir o TLC, e; no sexto capítulo, consolidaremos o TLC, explicaremos a velocidade de convergência, apresentaremos as Distribuições de Lévy Estáveis e concluiremos o trabalho.

CAPÍTULO 2

O Mercado de Capitais e de Derivativos

Álgebra do Investimento

Suponha que existam N_a ativos para escolha de um investidor que pode comprá-los e vendê-los em um período T e N_s cenários financeiros possíveis para o período. Para cada cenário S os rendimentos dos ativos mudam.

Vamos definir:

v_i = valor corrente de uma unidade do i ésimo ativo;

y_{si} = valor de uma unidade do i ésimo ativo no final do período se o cenário s ocorrer;

$R_{si} = \frac{y_{si}}{v_i} = 1 + r_{si}$ o retorno do i ésimo ativo no cenário s e r_{si} = sua taxa de retorno.

O investidor compra n_i unidades do ativo i . O número n_i pode ser positivo ou negativo, com o seguinte significado econômico: se $n_i > 0$ o investidor está na “long position” (coberto) e terá o direito de receber $n_i y_{si}$ no final do período; se $n_i < 0$ o investidor está na “short position” (descoberto) e terá que pagar o valor $n_i y_{si}$ no final do período. Seja W_o o patrimônio do investidor em ativos e $x_i = \frac{n_i v_i}{W_o}$

a fração de seu patrimônio investida no ativo i , de modo que sua restrição orçamentária pode ser escrita como $\sum_{i=1}^{N_a} x_i = 1$. Vamos definir os vetores portfólio

$\vec{X}$ como $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_a})$ e retorno no cenário s $\vec{R}_s$ como

$\vec{R}_s = (r_{s1}, r_{s2}, \dots, r_{sN_a})$. Um portfólio é chamado sem risco se $\vec{R}_s$ é o mesmo para qualquer cenário s . Um estado s^* é chamado de securitizável se existir um portfólio $\vec{X}_{s^*}$ tal que $\sum_{i=1}^{N_a} R_{s^*i} x_{s^*i} > 0$ para $s = s^*$ e $\sum_{i=1}^{N_a} R_{si} x_{si} = 0$ para todo $s \neq s^*$.

Um portfólio é chamado de arbitragem se $\sum_{i=1}^{N_a} x_i = 0$ em lugar de $\sum_{i=1}^{N_a} x_i = 1$,

ou seja, o investidor não usa seu próprio patrimônio, mas usa crédito para comprar ativos de modo que suas posições a descoberto cancelem as posições cobertas.

Nesse caso a fração x não pode mais ser definida como $x_i = \frac{n_i v_i}{W_o}$, uma vez que

$W_o = 0$, mas podemos redefinir W_o como $W_o = \sum_{i=1}^{N_a} |n_i| v_i > 0$ em lugar de

$W_o = \sum_{i=1}^{N_a} n_i v_i$. A matriz $(N_s \times N_a)$ dada por R_{si} é chamada de matriz retorno. Essa

matriz define a possibilidade de existência de portfólios sem risco e securitizáveis. Da álgebra linear sabemos que se posto de $R = N_s$, então o sistema de equações $R\vec{X} = \vec{R}_o$ admite apenas uma solução para qualquer $\vec{R}_o$. Logo a solução $\vec{X}$ para $\vec{R}_o = (1, 1, \dots, 1)$ é um portfólio sem risco, assim como a solução $\vec{X}$ para $\vec{R}_o = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, em que apenas o termo para $s = s^*$ é diferente de zero, fornece o portfólio que segura o estado s^* .

Mercado Financeiro

O Sistema Financeiro é composto por um conjunto de instituições responsáveis pela captação de recursos financeiros, distribuição e circulação de valores e regulação e controle do processo. No Brasil quem define as diretrizes de funcionamento do SFN é o Conselho Monetário Nacional (CMN) a quem estão ligados o Banco Central do Brasil, seu braço executivo, e a Comissão de Valores

Mobiliários (CVM), uma autarquia vinculada ao Ministério da Fazenda que tem a função de disciplinar, fiscalizar e promover o mercado de valores mobiliários.

As bolsas de valores são instituições civis que atuam como delegados do poder público. Oferecem um mercado para cotação dos títulos nelas registrados, orientam e fiscalizam os serviços financeiros, facilitam o acesso às informações sobre as empresas e dão liquidez às aplicações de curto e de longo prazos, por meio de um mercado diário. As bolsas de valores têm como membros as sociedades corretoras, que podem negociar valores mobiliários em pregão.

Vários motivos levam um agente a investir, dentre os quais, segurança, rentabilidade, valorização, proteção, desenvolvimento econômico e liquidez. No entanto, o agente tem que ponderar três fatores antes de tomar uma decisão de investimento. Esses fatores são rentabilidade, grau de risco e liquidez. A rentabilidade é diretamente proporcional ao risco, ou seja, ativos que são muito arriscados na maioria das vezes prometem remunerar muito melhor o investidor. Cabe ao agente definir o grau de risco disposto a correr para obter certa rentabilidade.

O mercado de capitais é um sistema de distribuição de valores mobiliários. Ele tem o objetivo de fornecer liquidez aos títulos emitidos pelas empresas e possibilitar seu processo de capitalização. É constituído por bolsas de valores, sociedades corretoras e outras instituições financeiras autorizadas. O mercado de capitais negocia ações, debêntures conversíveis em ações, bônus de subscrição, commercial papers, direitos e recibos de subscrição de valores mobiliários, certificados de depósitos de ações e demais derivativos.

De acordo com a dinâmica econômica, as empresas se desenvolvem e crescem, e precisam cada vez de mais recursos para financiar seu funcionamento e expansão. Esses recursos podem ser obtidos por meio de empréstimos de terceiros, reinvestimento de lucros e abertura de capital. O mercado de capitais tem maior relação com a terceira forma de captar recursos: abertura de capitais. Abrindo o capital para o público, a empresa pode ganhar novos sócios, fontes de recursos não exigíveis.

Os ativos principais do mercado de capitais são os ativos privados de renda variável, os ativos privados de renda fixa e os ativos públicos de renda fixa. Os ativos privados de renda fixa podem ser representados por debêntures, Commercial Papers, Letras de Câmbio, Bônus, Letras Imobiliárias, Cadernetas de Poupança, Certificados de Depósitos Bancários (CDB) e Recibos de Depósitos Bancários (RDB). Os ativos públicos de renda fixa são representados por Bônus do Banco Central, Notas do Tesouro Nacional, Letras Financeiras do Tesouro, Notas do Banco Central e Letras Financeiras dos Tesouros Estaduais ou Municipais. Os ativos privados de renda variável são ações de renda variável negociadas nas bolsas de valores ou recém emitidas. O agente que compra ações é um dos proprietários da sociedade anônima das qual é acionista, com direito de participar de seus resultados. A rentabilidade, ou retorno, das ações de renda variável é composta por dividendos ou participação nos resultados, e uma outra parte que advém das oscilações do preço da ação.

Mercado de Derivativos

O mercado de derivativos é o mercado em que se negocia os derivativos financeiros, que têm preços ligados a valores mobiliários previamente emitidos e constituem ferramentas de redução de risco muito úteis. Essas ferramentas são os contratos a termo, os contratos futuros, as swaps e as opções.

Mercados a Termo

Os contratos a termo são acordos entre duas partes para se engajarem em uma transação financeira no futuro. O preço a termo da ação é resultado da adição, ao valor cotado no mercado a vista, de uma parcela correspondente aos juros, que são fixados livremente em mercado, em função do prazo do contrato. O mercado a termo envolve uma série de questões nas quais não nos envolveremos, como garantias, coberturas, margem, margem adicional, remuneração das margens, direitos e proventos, liquidação e custos de transação.

Mercado de Futuros

O mercado de futuros tem por objetivo principal dar proteção aos agentes econômicos contra oscilações nos preços de seus produtos e de seus investimentos em ativos financeiros. Ou seja, tem a função de transferir e distribuir o risco. Dessa forma, define os preços futuros de mercadorias e ativos financeiros de acordo com a dinâmica do mercado.

Esse mercado permite operações de arbitragem se o preço futuro do ativo for maior do que o preço à vista adicionando as despesas da operação. Por exemplo, pode-se tomar crédito, comprar um ativo à vista e vendê-lo no mercado futuro. Ou então, vender um ativo à vista para fazer caixa e entrar no mercado futuro. Depois da negociação, há a possibilidade de liquidação do contrato com a entrega física do ativo. Apenas 2% das operações são liquidadas pela entrega efetiva do bem negociado. Ou seja, compram-se e vendem-se ativos físicos e financeiros apenas no papel.

Os agentes desse mercado são basicamente os hedgers e os especuladores. Os hedgers que participam do mercado de futuros têm vínculo com a mercadoria. Por exemplo, um produtor de café acredita que em um semestre o preço do café terá caído e não vai conseguir cobrir os custos. Ele pode comprar um contrato de venda futura por um semestre, se o preço for vantajoso. Ou seja, ele se protege (hedge). Nesse mercado, o papel do especulador também é muito importante. Ele toma a posição contrária à do hedger, assumindo os riscos e dando liquidez ao mercado.

Mercado de Opções

As opções sobre ações são os direitos de comprar ou vender um certo lote de ações, a um determinado preço, em um determinado período. Para obter uma opção se paga um prêmio ao vendedor. Os prêmios das opções são negociados nas bolsas de valores. As opções de compra garantem o direito do proprietário comprar certo número de ações do vendedor da opção, a um certo preço, em qualquer momento até a data de vencimento da opção. As opções de venda

garantem ao proprietário vender um certo número de ação, a um certo preço, em qualquer momento até o vencimento da opção.

Os pontos principais do mercado de opções são a ação objeto, que é a ação sobre a qual a opção é lançada, o mês de vencimento, que é o mês em que expira a opção, e o preço de exercício, que é o preço pelo qual a opção será exercida. Quando um grupo de opções tem sua negociação em pregão autorizada, permanece válida até o seu vencimento. Mas podem ser introduzidos novos grupos com diferentes preços de exercício. O mercado de opções também é conhecido pelo seu controle totalmente escritural. As posições resultam do registro das operações em bolsa, com códigos diferentes para cada cliente.

O mercado de opções é diferente do mercado futuro pelo fato de que o comprador da opção pode desistir do negócio caso tenha opção mais vantajosa. Assim, suponha um agente que comprou uma opção de compra (Call) de uma ação pelo valor X (strike price) para o momento T no futuro. Para isso ele paga um prêmio Pr . No momento T o preço da ação pode estar acima ou abaixo de X . Se estiver acima ele exercita seu direito de comprar pelo valor X e ganha a diferença $P - X$ subtraída do prêmio que já pagou no início da operação. Caso esteja abaixo ele prefere comprar no mercado à vista por P e perde o valor do prêmio já pago. O retorno desse agente depende, então, do preço da ação no futuro e está representado pelo gráfico da figura 2.1. Obviamente que o retorno para o vendedor da opção de compra é o reverso do comprador, o que um ganha o outro perde, e está representado na figura 2.2.



Figura 2.1 (a)

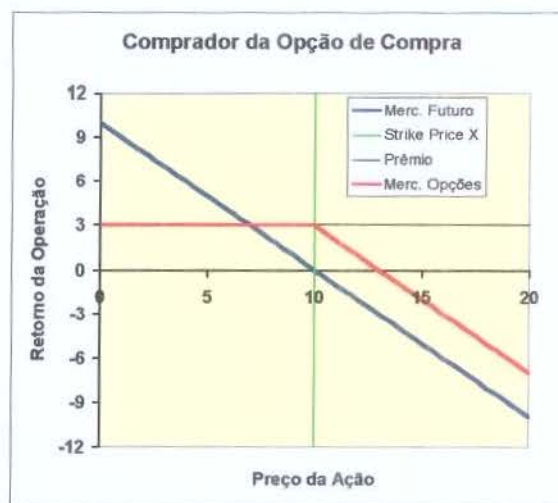


Figura 2.1 (b)



Figura 2.2 (a)

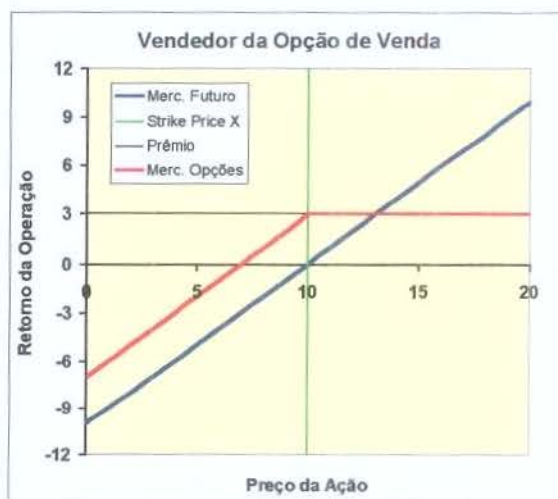


Figura 2.2 (b)

Suponha agora o comprador de uma opção de venda (Put). Ele contratou a opção de venda por X. Se no tempo T o preço da ação P for menor do que X ele exercita seu direito de venda e ganha a diferença $X - P$ subtraído, novamente, do prêmio, que já pagou. Caso o preço seja maior do que X ele prefere vender no mercado à vista por P perdendo apenas o prêmio já pago. Esse retorno está representado pelo gráfico da figura 2.1. O retorno do vendedor da opção de venda é o reverso do retorno do comprador e está representado pelo gráfico da figura 2.2.

Cada um dos agentes que atuam nesse mercado possui uma motivação diferente. Quando um agente decide comprar uma opção de compra (Call), ele espera se beneficiar de uma elevação do preço da ação objeto. Assim, o aplicador

pode: utilizar opções de compra para obter maior retorno (caso o preço da ação suba); utilizar opções de compra como alternativa para adquirir uma ação objeto; utilizar opções de compra como proteção de uma venda em margem (prevenindo-se de uma possível alta), e; utilizar opções de compra para fixar o preço de uma futura aquisição de determinada ação (caso esteja sem dinheiro e queira fixar o preço para uma futura aquisição das ações).

Já o agente que compra uma opção de venda (Put) espera uma queda do preço a vista da opção objeto. Dessa forma, o aplicador pode: realizar operação oposta de opção de venda (se espera que o preço da ação objeto no mercado a vista vai cair); utilizar opções de venda como proteção para uma compra a termo (garantir certo preço de venda da ação); utilizar opções de venda para proteger ações de sua carteira (garantir preço de venda das ações), e; utilizar opções de venda para atender expectativas de queda.

O lançamento de opções pode dar um bom retorno para o aplicador que acredita numa certa estabilidade ou em baixas no nível de preço. Se os preços baixarem ou a inflação corroer o preço da ação, a opção não será exercida e o lançador terá ganho com a venda das opções de compra. O lançamento de opções de venda deve depositar como garantia de sua posição, uma margem em valor. Esta modalidade de lançamento serve aqueles que esperam tendências altistas de mercado. Ou seja, que os preços à vista subam e ninguém o procure para fazê-lo comprar as ações a um preço desvantajoso. Caso contrário, terá que comprar as ações.

No mercado de opções, o comprador só tem direitos e o vendedor só tem deveres. Por isso esse contrato exige o pagamento de um prêmio por parte do comprador. Esse prêmio depende do valor da ação e da expectativa de seu comportamento no futuro. **A grande questão nesse mercado é: qual o prêmio que o vendedor deve exigir para assumir as obrigações em lugar do comprador? Essa é a questão básica que o modelo de Black & Scholes se propôs a responder e a qual esse trabalho está conectado.**

CAPÍTULO 3

A suposição mais importante do modelo de Black & Scholes, justamente a que é posta em dúvida por Stanley&Mantegna, é a de que os preços das ações seguem uma distribuição Browniana Geométrica. Por isso, vamos iniciar pela álgebra das distribuições Brownianas obtidas com o modelo simples de Passo Aleatório (Random Walk). Outra ferramenta básica, utilizada tanto na demonstração do movimento browniano geométrico, como na própria demonstração dos teoremas do Limite Central em várias formas, é a série de Taylor. Por isso esse capítulo se inicia com o estudo da série de Taylor, passando para o estudo dos Passos Aleatórios e termina com o Lema de Itô para estabelecer a equação diferencial estocástica utilizada no modelo de Black & Scholes.

Série de Taylor

A Série de Taylor de uma função que possui derivadas de todas as ordens pode ser entendida de forma simples e intuitiva. Desejamos aproximar uma função $f(x)$ em torno de $x = x_0$ por uma série de potências na forma

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. O índice n define a ordem da aproximação, com

$f(x) = a_0$ para aproximação de ordem 0, ou seja, uma reta horizontal, $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$, ou seja uma reta com coeficiente angular a_1 , para aproximação de ordem 1, $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$ para a aproximação de ordem 2, e assim por diante. É intuitivo que a melhor aproximação seja aquela em que, no ponto $x = x_0$ tanto a função quanto sua aproximação sejam idênticas. Nesse caso,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \big|_{x=x_0} = a_0$, logo $a_0 = f(x_0)$. Para determinar os outros coeficientes

a_n também vamos exigir que os valores das derivadas da função e da aproximação sejam idênticos em $x = x_0$, como mostra o gráfico da figura 3.1, abaixo, para uma aproximação de ordem 2.

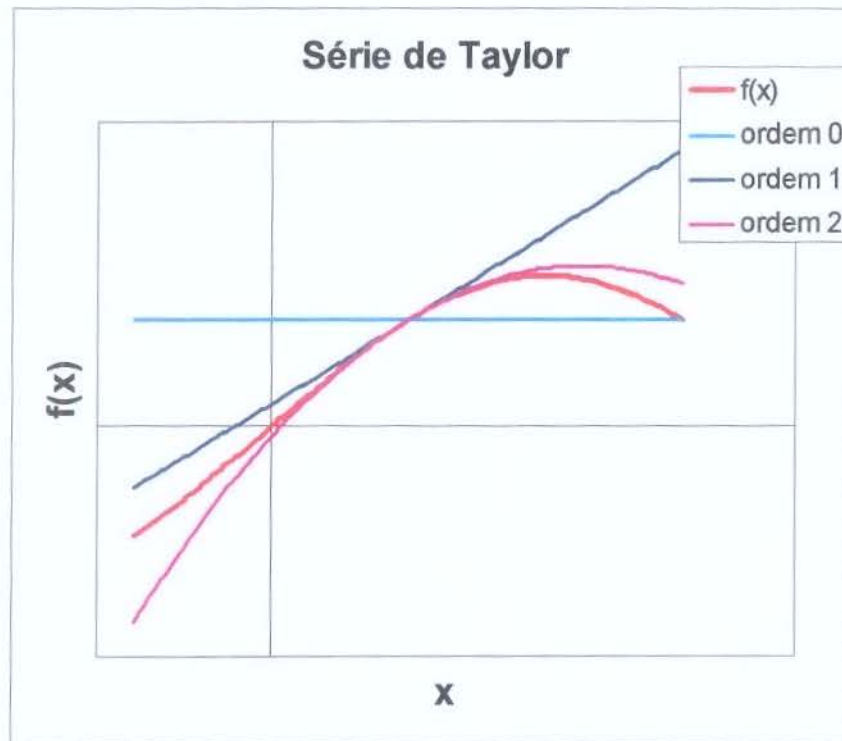


Figura 3.1. Série de Taylor.

Podemos demonstrar que os coeficientes $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, onde

$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$, através dos seguintes passos.

$$1. \frac{d^k}{dx^k} (x - x_0)^n = n(n-1)\dots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (x - x_0)^{n-k} \quad k < n$$

$$2. \frac{d^k}{dx^k} (x - x_0)^n = 0 \quad k > n$$

$$3. \frac{d^n}{dx^n} (x-x_0)^n = n!$$

$$4. \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{n!}{(n-k)!} (x-x_0)^{k-n}$$

$$5. \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \big|_{x=x_0} = n! a_n$$

6. Finalmente impondo que $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \big|_{x=x_0}$ chegamos a:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Dessa forma, a Série de Taylor, portanto, é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \dots$$

Um caso particular da série de Taylor é a série de Taylor-MacLaurin, para a qual $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Em princípio essa é uma série infinita. Entretanto, uma série infinita só será útil se for possível mostrar que ela pode ser truncada em determinado número de termos e que o erro cometido com essa truncagem tende a zero à medida que o número de termos incluídos cresce. O erro cometido com essa truncagem chama-se Resto.

Casos Particulares

Os casos particulares de séries de Taylor utilizados nesse trabalho são os casos dos binômios de Newton para n negativo ou não inteiro e o logaritmo. Podemos mostrar que a série de Taylor e o binômio de Newton são idênticos. Considere a expansão em série de Taylor-MacLaurin da função $f(x) = (a+x)^n$.

Sabendo que $f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k}$, a série de Taylor-MacLaurin,

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k, \text{ é o próprio binômio de Newton.}$$

Nesse caso a série de Taylor pode ser usada para estender o binômio de Newton para valores de n negativos ou não inteiros, em que a série se torna infinita. Se n

é negativo não escrevemos $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ pela

dificuldade dos fatoriais de números negativos. Nesse caso é melhor colocar (-1) em evidência em cada termo e usar:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{(-1)^k (|n|+k-1)!}{(|n|-1)!}$$

No caso particular de $n = -1$:

$$(-1)(-2)(-3)\dots(-1-k+1) = \frac{(-1)^k (1+k-1)!}{(1-1)!} = (-1)^k k!$$

Esse resultado pode ser usado para a expansão de $f(x) = (1+x)^{-1}$. Nesse caso:

$$f(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Já para $f(x) = (1-x)^{-1}$ obtemos:

$$f(x) = (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k!} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Duas expansões muito utilizadas em estatística são a da exponencial $f(x) = e^x$ e a do logaritmo $f(x) = \ln(1+x)$. A expansão da exponencial é imediata se

notarmos que $\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x$ e que, portanto, $f^{(k)}(0) = 1$. Nesse caso:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

A famosa fórmula de Euler para a função de variável complexa $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, onde $i^2 = -1$ pode ser deduzida diretamente dessa expansão em série fazendo $x = ix$. Usando o fato de que $i^{2k} = (-1)^k$ e $i^{2k+1} = (-1)^k i$ reescrevemos:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \left\{ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \right\} + i \left\{ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Por outro lado, expandindo a função $f(x) = \cos(x)$, sabendo que

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \cos x = (-1)^k \cos x \quad \text{e} \quad \frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \cos x = (-1)^{k+1} \sin x, \quad \text{percebemos que}$$

$f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ e que $f^{(2k+1)}(0) = 0$ que nos fornece a expansão do cosseno:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

Já para $f(x) = \text{sen}(x)$, $\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \text{sen} x = (-1)^k \cos x$ enquanto

$\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} \text{sen} x = (-1)^{k+1} \text{sen} x$. Logo $f^{(2k)}(0) = 0$ e $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, nos

fornece a expansão do seno:

$$\text{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

Comparando os resultados vemos que $e^{ix} = \cos x + i \text{sen} x$.

Já para o caso do logaritmo, $f(0) = \text{Ln}(1) = 0$, e $f'(x) = (1+x)^{-1}$, as derivadas podem ser facilmente calculadas usando:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^{(k-1)}}{dx^{k-1}} (1+x)^{-1} = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k},$$

para obter $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$. Desse resultado mostra-se que:

$$\text{Ln}(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

e:

$$\text{Ln}(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} (-x)^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots].$$

Truque do Logarítmo

O truque do logarítmo é muito útil em casos em que a convergência da série de Taylor é problemática. Suponha o caso da função $f(y) = (1 + y)^{-n}$, com $y \ll 1$ e $n \gg 1$. Melhor dizendo, com y tendendo a 0 e n tendendo a infinito. Se fizermos a expansão de Taylor centrada em 0 para esta função, obteremos:

$$f(y) = 1 - ny + \frac{n(n+1)y^2}{2} - \frac{n(n+1)(n+2)y^3}{6} + \dots$$

Cuja convergência depende se o produto (ny) é maior ou menor do que 1. Em lugar de fazer a expansão direta da função vamos expandir seu logarítmo na forma: $\ln(1+y)^{-n} = -n \ln(1+y) = -n\{y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\}$, que não apresenta problemas de convergência para $|y| < 1$. Agora retorna-se à função inicial para

reescreve-la como $f(y) = e^{-n(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots)}$.

Cálculo do Resto

Para calcular o Resto da Série de Taylor, precisaremos do Teorema do Valor Médio de Cauchy. Partimos do teorema de Rolle: se f é contínua e diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$ então existe um número ζ entre a e b em que a derivada primeira dessa função é igual a 0. Pode existir mais de um ζ no intervalo, mas o teorema garante que existe pelo menos um.

Teorema do Valor Médio de Cauchy (TVM)

Tomemos duas funções diferenciáveis $f(x)$ e $g(x)$ tal que $f(a) \neq f(b)$ e $g(a) \neq g(b)$. Assim, construímos uma nova função $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ determinando λ que obrigue a $F(x)$ a satisfazer as condições do Teorema de Rolle, ou seja, que

$F(a) = F(b)$. Dessa forma, $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$ e $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x), \text{ satisfaz as condições do Teorema de Rolle.}$$

Logo, existe um número $\zeta \in (a, b)$, i.e., $a \leq \zeta \leq b$, em que $F'(\zeta)$ é igual a zero. Por outro lado $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$, logo $\exists \zeta \in (a, b) / F'(\zeta) = 0$,

ou seja, $F'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\zeta) = 0$. O teorema do Valor Médio de

Cauchy afirma que $\exists \zeta \in (a, b) / \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. No caso particular em

que $g(x) = x$, $g'(x) = 1$, ele se reduz a $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Resto da Série de Taylor

Seja $F(x) = f(b) - \left[\frac{f(x)(b-x)^0}{0!} + \frac{f'(x)(b-x)^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^n}{n!} \right]$ o erro cometido na truncagem da série de Taylor até ordem n e seja $G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$. Como F e G satisfazem as condições do TVM de Cauchy:

$$\exists \zeta \in (a, b) / \frac{F'(\zeta)}{G'(\zeta)} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}.$$

Por outro lado, derivando diretamente a função $F(x)$, obtemos:

$$F'(x) = - \left[\frac{f'(x)(b-x)^0}{0!} - \frac{f'(x)(b-x)^0}{0!} + \frac{f''(x)(b-x)^1}{1!} - \frac{f''(x)(b-x)^1}{1!} + \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} - \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!} \right]$$

Como os termos intermediários se cancelam:

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}.$$

Derivando diretamente G(x) obtemos $G'(x) = -\frac{(n+1)(b-x)^n}{(n+1)!} = -\frac{(b-x)^n}{n!}.$

Usando esses resultados no TVM de Cauchy:

$$\frac{F'(\zeta)}{G'(\zeta)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\zeta)(b-\zeta)^n}{n!}}{-\frac{(b-\zeta)^n}{n!}} = f^{(n+1)}(\zeta)$$

Percebendo que $F(b) = G(b) = 0$, então $\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F(a)}{G(a)} = f^{(n+1)}(\zeta).$

Logo, $F(a) = f^{(n+1)}(\zeta)G(a) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(b-a)^n.$ Fazendo $x = a$ na $F(a)$

obtemos:

$$f(b) - \left[f(a) + \frac{f'(a)(b-a)^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} \right] = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

de onde tiramos que existe $a \leq \zeta \leq b$ tal que:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)(b-a)^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + \left\{ \frac{f^{(n+1)}(\zeta)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right\}.$$

O erro em truncar com n termos, também chamado de resto, é dado por

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ e tende a zero quando n tende a infinito para valores}$$

de x suficientemente próximos de x_0 . Um caso particular que será utilizado na demonstração do teorema do Limite Central é para $a = 0$ e um série truncada em

primeira ordem, $n = 1$. Nesse caso existe $0 \leq \zeta \leq b$ tal que

$$f(b) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}b + \frac{f''(\zeta)}{2!}b^2.$$

Passos Aleatórios (Random Walk)

Suponha um bêbado tentando voltar para casa caminhando em uma rua com um tamanho de passo constante L . Ele só pode dar passos para a direita ou para a esquerda, e perde a memória de qual foi a direção do último passo dado a todo momento. Ele tem uma probabilidade p de dar um passo para a direita e q de dar um passo para a esquerda de modo que $p + q = 1$. Suponhamos então, que são dados N passos, n_1 para a direita e n_2 para a esquerda, de forma que $n_1 + n_2 = N$. Seja $m = n_1 - n_2$ o número de passos a mais dados em uma determinada direção, de forma que $-N \leq m \leq N$, e seja x o comprimento total percorrido após N passos. Assim, teremos:

$$x = m L = (n_1 - n_2) L = (2n_1 - N) L$$

Para saber a probabilidade do bêbado alcançar a posição x basta saber a probabilidade dele ter dado n_1 passos para a direita. Esse é um problema idêntico ao de colocar N passos em duas caixas, direita e esquerda, com n_1 passos na caixa direita e $N - n_1$ na caixa esquerda. Para o primeiro passo escolhido temos N opções, $N - 1$ para o segundo, até $N - n_1 + 1$ para o último passo dos quais devemos descontar as $n_1!$ permutações. Logo o número de possibilidades de

obter n_1 passos para a direita é dado por $N_d = \frac{N!}{(N - n_1)!} \times \frac{1}{n_1!} = \binom{N}{n_1}$ com

$$\binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!}.$$

Logo, a probabilidade de encontrar um dado n_1 depois de N passos aleatórios é dada por:

$$P(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p_1^{n_1} p_2^{N-n_1} \quad \text{ou} \quad P(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p_1^{n_1} p_2^{(N-n_1)}.$$

Podemos usar binômio de Newton para mostrar que essa probabilidade somada em todas as opções para n_1 , de zero a N , vale 1. Basta notar que, por um lado $p + q = 1$ e por outro $(p + q)^N = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} = 1$. Essa é a distribuição binomial:

$$b(x, n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)}.$$

Esperança de n_1 : $E(n_1) = \bar{n}_1 = \sum_{n_1=0}^N P(n_1) n_1 = \sum_{n_1=0}^N \frac{n_1 N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)}$

pode ser obtida com o **truque da derivada**. Nesse truque usamos o fato de que

$$p \frac{\partial (p^{n_1} q^{(N-n_1)})}{\partial p} = n_1 p^{n_1} q^{(N-n_1)} \quad \text{para reescrever:}$$

$$\bar{n}_1 = p \frac{\partial \sum \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} (p^{n_1} q^{(N-n_1)})}{\partial p} = p \frac{\partial (p+q)^N}{\partial p} = p N (p+q)^{N-1} = Np.$$

Com truque idêntico mostramos que $\bar{n}_2 = qN$.

Variância de n_1 : $E(n_1^2) - E(n_1)^2$. Para isso vamos usar o fato de que

$$\overline{n_1^2} = \sum \frac{n_1^2 N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} \quad \text{pode ser escrito como:}$$

$$\overline{n_1^2} = p \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial}{\partial p} \left[\sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} \right] \right\}.$$

Logo $\overline{n_1^2} = p[N(p+q)^{N-1} + pN(N-1)(p+q)^{N-2}]$. Como $p+q=1$:

$$\overline{n_1^2} = pN[1 + p(N-1)] = pN(1 + pN - p) = pN(pN + q) = (pN)^2 - Npq.$$

Portanto, $Var(n_1) = \overline{n_1^2} - \overline{n_1}^2 = (pN)^2 + Npq - (pN)^2 = Npq$. Se

definimos $\delta n_1 = \sqrt{Var(n_1)} = \sqrt{Npq}$ então $\frac{\delta n_1}{\overline{n_1}} = \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{N}}$, tende a zero à

medida que N tende a infinito. Isso significa que a distribuição vai se tornando mais e mais centrada em torno de $\overline{n_1}$ à medida que N aumenta.

Forma Assimptótica da distribuição Binomial

Nessa seção estaremos, no fundo, demonstrando o Teorema do Limite Central para a distribuição Binomial quando $N \rightarrow \infty$, na forma típica dos físicos, que sacrificam o rigor matemático em troca da intuição. O raciocínio é feito da seguinte forma: o fato de que $\delta n_1/n_1$ tende a zero quando N tende a infinito significa que a distribuição vai se acentuando em torno de seu máximo, próximo de $n_1^* = \overline{n_1}$. Note-se que $n_1 \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$. Para valores de n muito grandes a função de argumentos inteiros se torna quase contínua pois $|P(n_1+1) - P(n_1)| \ll P(n_1)$ se n_1 está próximo de $n_1^* \gg 1$, e faz sentido falar em

derivada da função no ponto, i.e., $\frac{f(n+1) - f(n)}{1} \cong \frac{df}{dn}$. Nesse caso, o máximo

ocorre quando: $\frac{dP(n^*)}{dn} = 0$ ou $\frac{dLn P(n^*)}{dn} = 0$, pois o logaritmo é uma função

monotônica crescente. Usando o truque do logaritmo até segunda ordem em P(n):

$$Ln P(n) = Ln P(n^*) + \left. \frac{dLn P(n)}{dn} \right|_{n^*} (n - n^*) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 Ln P(n)}{dn^2} \right|_{n^*} (n - n^*)^2 + \dots$$

Se n^* é o ponto de máximo então $\left. \frac{d \ln P(n)}{dn} \right|_{n^*} = 0$ e

$$\left. \frac{d^2 \ln P(n)}{dn^2} \right|_{n^*} = -B < 0. \text{ Logo:}$$

$$\ln P(n) \cong \ln P(n^*) - \frac{1}{2} B (n - n^*)^2 + \dots \text{ ou } P(n) \cong P(n^*) e^{-\frac{1}{2} B (n - n^*)^2}.$$

Falta achar $P(n^*)$ e B . Para tanto extraímos o logaritmo de

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}, \text{ obtendo:}$$

$$\ln P = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n \ln p + (N-n) \ln q.$$

Se n é muito grande, então:

$$\frac{d \ln(n!)}{dn} = \frac{\ln[(n+1)!] - \ln(n!)}{1} = \ln\left[\frac{(n+1)!}{n!}\right] = \ln(n+1) \cong \ln(n).$$

Usando essa aproximação calculamos a derivada do $\ln[P(n)]$:

$$\frac{d \ln P}{dn} = -\ln n + \ln(N-n) + \ln p - \ln q = \ln\left[\frac{(N-n)p}{nq}\right] = 0,$$

que implica em $\frac{(N-n^*)p}{n^*q} = 1$ ou $(N-n^*)p = n^*q$, logo $Np = n^*(q+p) = n^*$, já

que $p+q=1$. Depois de encontrar que $n^* = Np$ para N tendendo a infinito, falta

achar o valor de $B = -\left. \frac{d^2 \ln P(n)}{dn^2} \right|_{n^*}$. Para tanto vamos derivar o $\ln[P(n)]$

novamente:

$$\frac{d^2 \ln P}{dn^2} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{N-n} = -\frac{N-n+n}{n(N-n)} = -\frac{N}{n(N-n)}.$$

Usando $n = n^* = \bar{n} = Np$, obtemos:

$$B = -\frac{N}{n(N-n)} = -\frac{N}{Np(N-Np)} = -\frac{1}{Npq}.$$

Finalmente, retornando à expansão original:

$$P(n) = P_0 e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2Npq}}.$$

O valor de P_0 é determinado impondo $\int_{-\infty}^{+\infty} P(n) dn = 1$. Substituindo a $P(n)$

obtemos:

$$P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2Npq}} dn = P_0 \sqrt{2Npq} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{n-\bar{n}}{\sqrt{2Npq}}\right]^2} d\left[\frac{n-\bar{n}}{\sqrt{2Npq}}\right] = P_0 \sqrt{2Npq} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

O truque moderno para mostrar que a integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ é o

seguinte:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\text{plano } x-y} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Trocando de coordenadas cartesianas para polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ de forma que $x^2 + y^2 = r^2$ e $dx dy = r dr d\theta$ podemos reescrever:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2r dr.$$

Mudando a variável para $u = r^2$ de forma que $du = 2r dr$,

$$I^2 = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi [-e^{-u}]_0^{\infty} = \pi, \text{ que demonstra que } I = \sqrt{\pi}.$$

Substituindo esse valor no resultado obtido concluímos que $P_0 \sqrt{2Npq} \sqrt{\pi} = 1$.

Dessa forma encontramos P_0 :

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}.$$

Fazendo $\mu = \bar{n}$ e $\sigma = \sqrt{Npq}$, é fácil ver que nossa distribuição binomial se transformou na distribuição Normal, ou Gaussiana, dada por:

$$P(n) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Para obter a probabilidade de encontrar o bêbado em uma determinada posição x em função do tempo vamos reescrever nossos resultados em termos de N e m . Usando $m = n_1 - n_2$ e $N = n_1 + n_2$ obtemos $n_1 = \frac{N+m}{2}$ e $n_2 = \frac{N-m}{2}$.

Substituindo na probabilidade obtida, temos:

$$P\left(\frac{N+n}{2}\right) = \frac{N!}{\left(\frac{N+n}{2}\right)! \left(\frac{N-n}{2}\right)!} p^{\left(\frac{N+n}{2}\right)} q^{\left(\frac{N-n}{2}\right)}.$$

Porém, queremos $P(x)$, e não $P(n)$. Para isso usamos $n_1 = \frac{N+m}{2}$ e $\bar{n}_1 = Np$,

para obter $n_1 - \bar{n}_1 = \frac{N+m}{2} - Np = \frac{m - N(2p-1)}{2} = \frac{m - N(p-q)}{2}$.

A nossa distribuição em função de m é dada por:

$$P(m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[m - N(p-q)]^2}{8\sigma^2}}.$$

Se x for muito maior que L ($x \gg L$), m terá que ser muito maior que 1 ($m \gg 1$), e poderemos falar em dx . Mantendo N constante, Δm é par, pois $n_1 + n_2 = N$. Logo, n_1 varia por Δn_1 , e n_2 varia por $-\Delta n_1$. Assim, $n_1 - n_2$ varia por $2\Delta n_1$. Dessa forma, a probabilidade de se encontrar o bêbado entre x e $x + dx$ será

a probabilidade de se encontrar $m = \frac{x}{l}$ vezes o número de Δm 's dentro do intervalo

dx , ou seja, $\frac{dx}{2l}$. Então $P(x)dx = P(m)\frac{dx}{2l}$ leva $P(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\frac{x}{l} - N(p-q)]^2}{8\sigma^2}} \frac{dx}{2l}$, ou

seja, a densidade de probabilidade de encontrar o bêbado na posição x é dada pela distribuição normal:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma 2l\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x - N(p-q)l]^2}{l^2 8\sigma^2}},$$

com $\sigma_x = 2\sigma l$ e $\bar{x} = N(p-q)l$.

Finalmente, N pode ser escrito em função do tempo. Se cada passo demora τ então $N = \frac{t_2 - t_1}{\tau}$, onde N é o número de passos entre t_2 e t_1 . Para t_1 igual a zero,

e t_2 igual a t , temos que $N = \frac{t}{\tau}$. Assim $\bar{x} = N(p-q)l = \frac{t}{\tau}(p-q)l = (p-q)vt$ onde $v = \frac{l}{\tau}$,

seria a velocidade do bêbado se andasse sempre na mesma direção. Também pode ser pensada como a velocidade intrínseca entre os passos até o bêbado mudar de direção. Para uma partícula que sofre colisões o tempo todo é a velocidade média da partícula entre dois choques sucessivos. Nesse caso

$$\sigma_x = 2\sigma l = 2l\sqrt{Npq} = 2\frac{l}{\tau}\tau\sqrt{\frac{t}{\tau}pq} = 2v\sqrt{pq\tau t} \quad \text{logo} \quad \bar{x} = (p-q)vt \quad \text{e}$$

$$\sigma_x = 2v\sqrt{pq\tau t}.$$

O movimento será Browniano puro, sem viés, se $p = q = \frac{1}{2}$. Neste caso,

$\bar{x} = 0$ e $\sigma_x = v\sqrt{\tau t}$ a distribuição Browniana padrão é dada por:

$$B(x)dx = \frac{1}{v\tau\sqrt{\frac{t}{\tau}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x - \bar{x}]^2}{2v^2\tau t}} dx.$$

Essa é a situação em que o bêbado está tão bêbado que perdeu completamente a noção da direção de sua casa. Se ele ainda conseguir manter algum discernimento e $p > q$ ele vai aos poucos se aproximando de sua casa, ou seja, com o tempo ele se desloca na direção correta. Esse é o Movimento Padrão com Viés ou com “drift”. Podemos agora formalizar os resultados do movimento Browniano.

Movimento Browniano Padrão

Movimento Browniano Padrão é um processo estocástico que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $x(0) = 0$.
2. $x(t_2) - x(t_1)$ é uma distribuição normal com esperança nula e variância $|t_2 - t_1|$.
3. Os incrementos são independentes entre si, ou seja, $x(t_i) - x(t_{i-1})$ não guarda memória do $x(t_{i-1}) - x(t_{i-2})$.

Nesse caso a distribuição é dada por: $B(\Delta x) = \frac{e^{-\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\Delta t}}$, onde $x(t)$ é a

função posição em relação ao tempo.

Movimento Browniano com Viés

O movimento Browniano com viés, ou drift, tem as propriedades 1 e 3 idênticas ao Movimento Browniano Padrão, mudando apenas a 2:

1. $x(0) = 0$.
2. $x(t_2) - x(t_1)$ é uma distribuição normal com média $E[x(t_2) - x(t_1)] = \mu(t_2 - t_1)$ e variância $V[x(t_2) - x(t_1)] = \sigma(t_2 - t_1)$, $t_2 > t_1$.
3. Os incrementos são independentes entre si, ou seja, $x(t_i) - x(t_{i-1})$ não guarda memória do $x(t_{i-1}) - x(t_{i-2})$.

Dessa forma, se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, o movimento com Viés se torna padrão.

Composição de Movimentos Brownianos

Dado x_0 , a probabilidade de encontrar x entre x_1 e $x_1 + dx_1$ será dada por:

$$P[x_1|x_0]dx_1 = \frac{e^{-\frac{[x_1 - x_0 - \mu(t_1 - t_0)]^2}{2\sigma^2(t_1 - t_0)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} dx_1.$$

Por outro lado, dado x_1 , a probabilidade de encontrar x_2 é dada por:

$$P[x_2|x_1]dx_2 = \frac{e^{-\frac{[x_2 - x_1 - \mu(t_2 - t_1)]^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} dx_2.$$

Como se compõem as duas distribuições para encontrar a probabilidade de achar x_2 dado x_0 , e não x_1 ? Ou seja, como fica $P[x_2|x_0]dx_2$? Podemos somar em x_1 para todas as possibilidades de x_1 . Nesse caso:

$$P[x_2|x_0]dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P[x_2|x_1]P[x_1|x_0]dx_1 dx_2$$

Ou seja:

$$P[x_2|x_0]dx_2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\frac{[x_2-x_1-\mu(t_2-t_1)]^2}{2\sigma^2(t_2-t_1)} + \frac{[x_1-x_0-\mu(t_1-t_0)]^2}{2\sigma^2(t_1-t_0)}\right\}} dx_1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^2 \sqrt{(t_2-t_1)(t_1-t_0)}} dx_2.$$

No expoente vamos colocar $\frac{1}{2\sigma^2}$ em evidência e definir

$$\Delta_1 = \frac{[x_2-x_1-\mu(t_2-t_1)]^2}{(t_2-t_1)}, \quad \Delta_2 = \frac{[x_1-x_0-\mu(t_1-t_0)]^2}{(t_1-t_0)} \quad \text{e} \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2. \quad \text{Expandindo:}$$

$$\Delta_1 = \frac{x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 - 2\mu x_2(t_2-t_1) + 2\mu x_1(t_2-t_1) + \mu^2(t_2-t_1)^2}{(t_2-t_1)};$$

$$\Delta_2 = \frac{x_1^2 + x_0^2 - 2x_1x_0 - 2\mu x_1(t_1-t_0) + 2\mu x_0(t_1-t_0) + \mu^2(t_1-t_0)^2}{(t_1-t_0)},$$

e somando os termos, após alguma álgebra, se obtém:

$$\Delta = \frac{(t_2-t_0)}{(t_1-t_0)(t_2-t_1)} [x_1-s]^2 + \frac{[x_2-x_0-\mu(t_2-t_0)]^2}{(t_2-t_0)}, \quad \text{onde} \quad s = \frac{x_0(t_2-t_1) + x_2(t_1-t_0)}{(t_2-t_0)}.$$

Substituindo de volta:

$$P[x_2|x_0]dx_2 = \frac{e^{-\frac{[x_2-x_0-\mu(t_2-t_0)]^2}{2\sigma^2(t_2-t_0)}}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^2 \sqrt{(t_2-t_1)(t_1-t_0)}} dx_2 \int e^{-\frac{(t_2-t_1)(x_1-s)^2}{2\sigma^2(t_2-t_1)(t_1-t_0)}} dx_1,$$

agora facilmente resolvida para obter:

$$P[x_2|x_0]dx_2 = \frac{e^{-\frac{[x_2-x_0-\mu(t_2-t_0)]^2}{2\sigma^2(t_2-t_0)}}}{\sigma\sqrt{2\pi} \sqrt{(t_2-t_0)}}.$$

A composição de dois movimentos Brownianos é um movimento Browniano, só interessando o intervalo de tempo entre o momento em que se observou a posição x_0 e o seguinte.

Sabemos que $x(t)$ segue uma normal. Sabemos também a regra de composição entre t_2 e t_1 e que $[x(t_2) - x(t_1)]$ também segue uma normal. Assim, falta achar $x(t)$. Vamos afirmar que $x(t) = \mu t + \sigma B(t)$ satisfaz aos requisitos para $x(t)$.

1. $E[x(t)] = E[\mu t + \sigma B(t)] = \mu t + \sigma E[B(t)] = \mu t$, pois $E[B(t)] = 0$.
2. $V[x(t)] = V[\mu t + \sigma B(t)] = \sigma^2 V[B(t)] = \sigma^2 t$, pois $\text{Var}[B(t)] = t$.
3. $\text{Cov}[x(t_1), x(t_2)] = \text{Cov}[x(t_1), x(t_2) - x(t_1) + x(t_1)]$ usando o fato de que $\text{Cov}[x(t_1), x(t_2) - x(t_1)] = 0$ pela independência estatística entre o passo seguinte e a posição atual, chegamos a:

$$\text{Cov}[x(t_1), x(t_2)] = \text{Cov}[x(t_1), x(t_2) - x(t_1)] + \text{cov}[x(t_1), x(t_1)] = V[x(t_1)] = \sigma^2 t_1.$$

Agora, se definimos $dB = \lim_{h \rightarrow dt} B(t+h) - B(t)$ temos que levar em conta de que esse não é um diferencial comum, mas sim um diferencial estocástico. Não existe a derivada. Se $B(t+h) - B(t)$ fosse uma curva suave, com derivada e diferenciável, poderíamos prever o valor de $dB = \lim_{h \rightarrow dt} B(t+h) - B(t)$ sabendo

$B(t) - B(t-h)$. Mas os passos são independentes. Note também que $V\left[\frac{B(t+h) - B(t)}{h}\right] = \frac{1}{h^2} h = \frac{1}{h}$, vai para infinito se h tende a zero. Então, a curva

não é diferenciável. Mesmo assim podemos escrever o diferencial como:

$$dx(t) = \mu dt + \sigma dB(t), \text{ embora não seja possível calcular } \frac{dB(t)}{dt}.$$

Por outro lado, sabemos que, $E[dB] = \lim_{h \rightarrow dt} E[B(t+h) - B(t)] = 0$, pois B tem média zero ($\mu = 0$), e que $V[dB] = \lim_{h \rightarrow dt} V[B(t+h) - B(t)] = \lim_{h \rightarrow dt} h = dt$.

Dessa forma calculamos os termos de segunda ordem:

$$E[dB dB] = E[(dB - E(dB))^2] = V[dB] = dt.$$

$$V[dB dB] = \lim_{h \rightarrow dt} E[(dB)^4 - h^2]$$

$$E[dB dt] = dt E[dB] = 0 \text{ e,}$$

$$V[dB dt] = dt^2 V[dB] = dt^3.$$

Com esses resultados percebe-se que dB segue uma distribuição normal com média zero e variância infinitesimal dt, mas não é desprezível frente ao μdt , pois sua variância é da ordem de dt. Com isso obtemos a seguinte regra de multiplicação dos diferenciais estocásticos:

x	dB	dt
dB	dt	0
dt	0	0

A aplicação dessa regra pode ser exemplificada com dx^2 :

$$(dx)^2 = (\mu dt + \sigma dB)^2 = \mu^2 (dt)^2 + \sigma^2 (dB)^2 + 2\mu\sigma dBdt = \sigma^2 dt.$$

Lema de Itô

Itô demonstrou que essa regra de multiplicação pode ser usada na expansão em série de Taylor de qualquer função de $x(t)$. Em particular os diferenciais agora precisam incluir termos de segunda ordem. Se $dx = \mu dt + \sigma dB$ e queremos o diferencial de uma $f(x(t), t)$, podemos usar a regra de Itô de multiplicação dos diferenciais estocásticos da seguinte forma:

1. Expandir f até segunda ordem:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dt^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} dt dx$$

2. Desprezar termos da ordem de dt^2 :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2$$

Não é difícil de aplicar a regra. Vejamos um exemplo do movimento Browniano Geométrico. Suponha que $p(t) = \ln P(t)$ é o logaritmo natural do preço $P(t)$ de um ativo. Se $p(t)$ satisfaz o Movimento Browniano ($dp = \mu dt + \sigma dB$), então o diferencial de $P(t) = e^{p(t)}$ será dado por:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial p} dp + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial p^2} (dp)^2 = e^p dp + \frac{1}{2} e^p (dp)^2 = P dp + \frac{P}{2} dp^2,$$

ou:

$$dP = P[\mu dt + \sigma dB] + \frac{1}{2} P \sigma^2 dt = (\mu + \frac{1}{2} \sigma^2) P dt + \sigma P dB = \mu' P dt + \sigma P dB.$$

Distribuições que obedecem a $dP = \mu P dt + \sigma P dB$ são chamadas de Distribuição Browniana Geométrica. Nesse caso:

$$dP^2 = \mu^2 P^2 dt^2 + \mu \sigma P^2 dB dt + \sigma^2 P^2 dB^2 = \sigma^2 P^2 dt$$

Se $P(t)$ segue uma distribuição Browniana Geométrica então o diferencial de uma função $C(P, t)$ será dado por:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} dP^2 = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial P} [\mu P dt + \sigma P dB] + \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} dt,$$

e finalmente:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial P} \mu P + \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial P} \sigma P dB.$$

CAPÍTULO 4

O Modelo Black & Scholes

O modelo de Black & Scholes foi desenvolvido para calcular o prêmio a ser cobrado para negociar uma opção de compra ou de venda no mercado de derivativos. Ele é construído com as seguintes suposições:

1. Mercado sem imperfeições.
2. Pode-se tomar crédito ou emprestar dinheiro sem limite e sem risco na taxa de retorno r da renda fixa, $r = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$, portanto, $dD = r D dt$.
3. O preço das ações segue uma Distribuição Browniana Geométrica: $dP = \mu P dt + \sigma P dB$.
4. O retorno de portfólios de arbitragem sem riscos é nulo.

Seja $C(P, t)$ o preço da opção (prêmio). Aplicando o Lema de Itô:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu P \frac{\partial C}{\partial P} + \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} \right) dt + \sigma P \frac{\partial C}{\partial P} dB = \mu_c C dt + \sigma_c C dB,$$

$$\text{onde } \mu_c = \frac{1}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu P \frac{\partial C}{\partial P} + \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} \right) \text{ e } \sigma_c = \frac{\sigma P}{C} \frac{\partial C}{\partial P}.$$

Agora, vamos criar um portfólio de arbitragem com os seguintes ativos: ações (I_p), opções (I_c) e ativos de renda fixa (I_d). Para ser um portfólio de arbitragem é necessário que $I_p + I_c + I_d = 0$. O retorno desse portfólio é dado

por $dI = \frac{I_p}{P} dP + \frac{I_c}{C} dC + \frac{I_d}{D} dD$. Entretanto, $dP = \mu P dt + \sigma P dB$, $dD = rD dt$ e

$dC = \mu_c C dt + \sigma_c C dB$, logo:

$$dI = I_p \mu dt + I_p \sigma dB + rI_d dt + \mu_c I_c dC + \sigma_c I_c dB,$$

ou,

$$dI = (I_p \mu + \mu_c I_c + rI_d) dt + (I_p \sigma + \sigma_c I_c) dB.$$

Usando a condição de arbitragem $I_d = -I_p - I_c$, temos:

$$dI = [I_p (\mu - r) + I_c (\mu_c - r)] dt + (I_p \sigma + \sigma_c I_c) dB.$$

Para esse portfólio se tornar sem risco, é preciso anular o termo estocástico que contém dB , ou seja, investir em I_p^* e I_c^* na proporção que faça $\sigma I_p^* + \sigma_c I_c^* = 0$. Calculando o termo estocástico, encontramos:

$$\frac{I_p^*}{I_c^*} = -\frac{\sigma_c}{\sigma} = -\frac{\frac{\sigma P}{C} \frac{\partial C}{\partial P}}{\sigma} = -\frac{P}{C} \frac{\partial C}{\partial P}.$$

Fica mais intuitivo se escrito na forma:

$$\frac{\frac{I_p^*}{P}}{\frac{I_c^*}{C}} = -\frac{\partial C}{\partial P},$$

onde $\frac{I_p^*}{P} = n_P^*$ é o número de ações compradas do portfólio e $\frac{I_c^*}{C} = n_C^*$ é o número de opções sobre essas ações.

Note que, como $\frac{\partial C}{\partial P}$ varia com o tempo, o investidor precisa estar corrigindo seu portfólio o tempo todo. O retorno de um portfólio de arbitragem sem risco seria $dI = [I_p^*(\mu - r) + I_c^*(\mu_c - r)]dt$ que tem que ser nulo para evitar ganhos através de portfólios de arbitragem sem risco. Se houvesse essa possibilidade todos os agentes, ou alguns agentes, transfeririam toda a renda social gerada para si, pois o modelo supõe crédito ilimitado. Impondo que $dI = 0$ obtemos:

$$I_p^*(\mu - r) + I_c^*(\mu_c - r) = 0$$

Usando a razão $\frac{I_p^*}{I_c^*} = -\frac{\sigma_c}{\sigma}$, obtemos $-\frac{(\mu - r)\sigma_c}{\sigma}I_c^* + (\mu_c - r)I_c^* = 0$ e,

finalmente, $(\mu_c - r) = (\mu - r)\frac{\sigma_c}{\sigma}$. Substituindo μ_c e σ_c :

$$\frac{1}{C} \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} + \mu P \frac{\partial C}{\partial P} + \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} \right\} - r = (\mu - r) \frac{\sigma P}{\sigma} \frac{\partial C}{\partial P},$$

de onde se extrai a equação diferencial do modelo de Black & Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rP \frac{\partial C}{\partial P} + \frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} - rC = 0.$$

Condições Iniciais

Essa equação diferencial deve ser resolvida com determinadas condições iniciais. Vamos determinar a solução apenas para o caso de uma opção de compra. Se a opção fosse derivativa de um ativo de valor zero, não haveria prêmio [$C(0,t) = 0$]. Se a opção for para o mesmo dia, $t = T$, temos duas alternativas: ou $P(T) > x$, caso em que o vendedor vai exigir $C = P(T) - x$; ou $P(T) < x$, caso em que o comprador comprará a ação diretamente no mercado à vista. Assim, as condições iniciais são $C[0,t] = 0$ e $C[P(T), T] = \text{Max}[P(T) - x, 0]$.

Solução para uma Opção de Compra

A seguir vamos mostrar que $C = P\Phi(d_1) - X\Phi(d_2)e^{-r(T-t)}$ com P sendo o preço da ação, X o strike price (preço combinado), t o tempo, T o tempo de

maturidade da opção, $d_1 = \frac{\ln(\frac{P}{X})}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{T-t}$,

$d_2 = \frac{\ln(\frac{P}{X})}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\sqrt{T-t}$ e $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$ é a solução da

equação diferencial de Black & Scholes que satisfaz as condições iniciais.

Usando o fato de que $\Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ calculamos

$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial t} = \frac{e^{-\frac{d^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial d}{\partial t}$. Com as expressões de d_1 e d_2 obtemos:

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{\ln \frac{P}{X}}{2\sigma\sqrt{(T-t)^3}} - \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma\sqrt{T-t}} \text{ e } \frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{\ln \frac{P}{X}}{2\sigma\sqrt{(T-t)^3}} - \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Derivando C em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} = & P e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\ln \frac{P}{X}}{2\sigma\sqrt{(T-t)^3}} - \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma\sqrt{T-t}} \right] - r X e^{rt} e^{-rT} \phi(d_2) \\ & - X e^{rt} e^{-rT} \frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\ln \frac{P}{X}}{2\sigma\sqrt{(T-t)^3}} - \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \end{aligned}$$

continuando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} = & \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)^3}\sqrt{\pi}} \left\{ Pe^{-\frac{d_1^2}{2}} \operatorname{Ln} \frac{P}{X} - X \operatorname{Ln} \frac{P}{X} e^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \right\} \\ & - \frac{1}{2\sigma\sqrt{(T-t)}\sqrt{\pi}} \left\{ \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) Pe^{-\frac{d_1^2}{2}} - X e^{-r(T-t)} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\frac{d_2^2}{2}} \right\} \\ & - r X e^{-r(T-t)} \phi(d_2)\end{aligned}$$

Agora derivando em relação à P:

$$\frac{\partial C}{\partial P} = \phi(d_1) + P \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial d_1}{\partial P} - X e^{-r(T-t)} \frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial d_2}{\partial P}.$$

Mas $\frac{\partial d_1}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{\operatorname{Ln} P - \operatorname{Ln} x}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] = \frac{1}{P\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\partial d_2}{\partial P}$ portanto:

$$\frac{\partial C}{\partial P} = \phi(d_1) + \frac{1}{P\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{\pi}} \left\{ Pe^{-\frac{d_1^2}{2}} - X e^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \right\}.$$

Precisamos também da segunda derivada em relação à P, para a qual

utilizaremos $\frac{\partial^2 d_1}{\partial P^2} = \frac{\partial^2 d_2}{\partial P^2} = -\frac{1}{P^2\sigma\sqrt{T-t}}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial P^2} = & \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{P\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{\pi}} - \frac{1}{P^2\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{\pi}} \left\{ Pe^{-\frac{d_1^2}{2}} - X e^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \right\} \\ & + \frac{1}{P\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-\frac{d_1^2}{2}} - \frac{d_1 e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{X d_2 e^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{P\sigma\sqrt{T-t}} \right\}\end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em $\frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} + rP \frac{\partial C}{\partial P} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC$

verificamos após cancelar todos os termos que

$$\frac{\sigma^2 P^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial P^2} + rP \frac{\partial C}{\partial P} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0 \text{ como afirmamos.}$$

Falta apenas verificar que essa solução satisfaz as condições iniciais. Se

$$P = 0 \quad \text{então} \quad C = P\Phi(d_1) - X\Phi(d_2)e^{-r(T-t)} = -X\Phi(d_2)e^{-r(T-t)} \quad \text{mas}$$

$$\lim_{P \rightarrow 0} d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \lim_{P \rightarrow 0} \ln\left(\frac{P}{X}\right) = -\infty \quad \text{e} \quad \Phi(d_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0, \quad \text{portanto}$$

$$C(0, t) = 0.$$

Já para $t = T$, $C = P\Phi(d_1) - X\Phi(d_2)$ com:

$$d_1 = d_2 = \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\ln\left(\frac{P}{X}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } P > X \\ -\infty & \text{se } P < X \end{cases}.$$

Como $\Phi(-\infty) = 0$ e $\Phi(\infty) = 1$ então $C(P, T) = P - X$ se $P > X$ e $C(P, T) = 0$ se $P < X$. Assim mostramos que a solução da equação diferencial satisfaz às condições iniciais.

CAPÍTULO 5

Função Geradora de Momentos, Função Característica, Transformadas de Fourier e Teorema da Convolução

Momentos de Distribuições Estatísticas

Os momentos de uma função de distribuição estatística discreta são definidos como:

1. $I_0 = \sum_i (x_i - \bar{x})^0 p_i = \sum_i p_i = 1$ é o momento de ordem zero;

2. $I_1 = \sum_i (x_i - \bar{x}) p_i = 0$, é o momento de ordem 1;

3. $I_2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p_i$, é o momento de ordem 2 e idêntico a variância;

4. $I_k = \sum_i (x_i - \bar{x})^k p_i$, é o momento de ordem k.

Para uma distribuição contínua com densidade de probabilidade $f(x)$ eles são redefinidos como

1. $m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ é o momento de ordem zero;

2. $m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^1 f(x) dx = 0$ é o momento de ordem 1;

$$3. \quad m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2 \quad \text{é o momento de ordem 2 idêntica à}$$

variância e,

$$4. \quad m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad \text{é o momento de ordem } k.$$

Esses são momentos centrados na média. Também se pode definir momentos centrados na origem em que $M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$. Caso a média de uma distribuição seja nula os dois momentos coincidem.

Relação entre os Momentos Centrados e Não-Centrados

Valem as seguintes relações entre os momentos centrados e não centrados:

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^0 f(x) dx = m_0 = 1;$$

para o momento de ordem zero.

$$\text{Para o momento de ordem 1: } M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 f(x) dx = \mu \quad \text{enquanto}$$

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^1 f(x) dx = 0.$$

$$\text{Para ordem 2: } m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2. \quad \text{Por outro lado:}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\mu f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 f(x) dx \\ &= M_2 - 2\mu M_1 + \mu^2 = M_2 - \mu^2 \end{aligned}$$

Portanto, $M_2 = \sigma^2 + \mu^2$.

Para o momento de ordem 3:

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \mu f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 3x \mu^2 f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^3 f(x) dx$$

portanto:

$$m_3 = M_3 - 3\mu M_2 + 3\mu^2 M_1 - \mu^3 M_0 = M_3 - 3\mu(\sigma^2 + \mu^2) + 3\mu^2 \mu - \mu^3,$$

levando ao resultado final $M_3 = m_3 + 3\mu\sigma^2 + \mu^3$.

Para momentos de ordens superiores é necessário usar binômio de Newton e cada vez mais termos serão agregados aos momentos não centrados. Apenas esses 4 casos são importantes no contexto dessa monografia.

Caso particular importante: momentos de uma distribuição normal centrada em zero $N(0, \sigma)$.

Truque da Derivada

Considere o caso de uma distribuição normal centrada em zero cuja

densidade de probabilidade é dada por: $N(0, \sigma) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. A esperança de x é

nula por paridade.

Relembrando:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^{+a} f(x) dx = - \int_0^{+a} f(-x) dx + \int_0^{+a} f(x) dx \\ &= \int_0^{+a} f(x) dx + \int_0^{+a} f(-x) dx = \int_0^{+a} [f(x) + f(-x)] dx \end{aligned}$$

Se $f(-x) = -f(x)$, função ímpar, então $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$. Já se $f(-x) = f(x)$, função

par, então $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^{+a} f(x) dx$.

A média é dada por $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = 0$ pois $x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ é uma função

ímpar. Consequência desse fato é que todos os momentos de ordem ímpar são

nulos, pois $m_{2k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^{2k+1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = 0$ uma vez

que $x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ é uma função ímpar. Note que isso é válido para qualquer distribuição simétrica em relação à origem, não apenas a Gaussiana. Falta calcular os momentos pares:

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^{2k} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$$

Para isso usamos o truque da derivada. Vamos definir a seguinte função de

x $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2} du$. Note que $-\frac{dI(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial}{\partial x} e^{-xu^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-xu^2} du$; e

também que $[-\frac{d}{dx}]^2 I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\frac{\partial}{\partial x}]^2 e^{-xu^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-xu^2} du$. Generalizando:

$$[-\frac{d}{dx}]^k I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\frac{\partial}{\partial x}]^k e^{-xu^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k} e^{-xu^2} du.$$

O que nos permite afirmar que $\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k} e^{-xu^2} du = [-\frac{d}{dx}]^k I(x) |_{x=1}$.

Por outro lado $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2} d(\sqrt{x}u) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} x^{-\frac{1}{2}}.$

Podemos estabelecer a regra geral para a k-ésima derivada por indução notando que:

$$-\frac{d}{dx} I(x) = \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} \right] x^{-\frac{3}{2}};$$

$$\left[-\frac{d}{dx} \right]^2 I(x) = \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right] x^{-\frac{5}{2}};$$

$$\left[-\frac{d}{dx} \right]^3 I(x) = \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \right] x^{-\frac{7}{2}}$$

da qual extraímos a regra geral:

$$\left[-\frac{d}{dx} \right]^k I(x) = \sqrt{\pi} \left[\frac{(2k-1)!!}{2^k} \right] x^{-\frac{(2k+1)}{2}},$$

onde o duplo fatorial é definido por $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 1$ se n é ímpar e $n!! = n(n-2)(n-4)\dots 2$ se n é par. Assim mostramos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k} e^{-xu^2} du = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}.$$

Os momentos podem ser calculados facilmente agora com uma mudança de variável:

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx = \frac{(2\sigma^2)^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x^2}{2\sigma^2} \right]^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\left[\frac{x}{\sqrt{2\sigma}} \right] \\ &= \frac{(2\sigma^2)^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2k} e^{-u^2} du = \frac{2^k \sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} \times \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Que nos fornece a fórmula geral $m_{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}$ e $m_{2k+1} = 0$ e os casos particulares $m_0 = 1$; $m_2 = \sigma^2$; $m_4 = 3\sigma^4$ e $m_6 = 15\sigma^6$.

Nesse ponto vale a pena fazer um parêntese para a definição da “skewness” e “kurtosis” de uma distribuição estatística. São parâmetros definidos a partir de uma comparação com a distribuição normal.

A skewness mede a assimetria da distribuição através do momento de ordem 3, que é nulo em distribuições simétricas, e é definida como: $r = \frac{m_3}{\sigma^3}$. Se $r < 0$ diz-se que a distribuição está “skewed to the left” e se $r > 0$, “skewed to the right”. Uma boa intuição sobre a skewness pode ser obtida com distribuições assimétricas da forma $H(x)e^{-qx}$ para $x > 0$ ou $[1-H(x)]e^{qx}$ para $x < 0$. Os gráficos da Figura 5.1 mostram a forma assimétrica dessas duas distribuições.

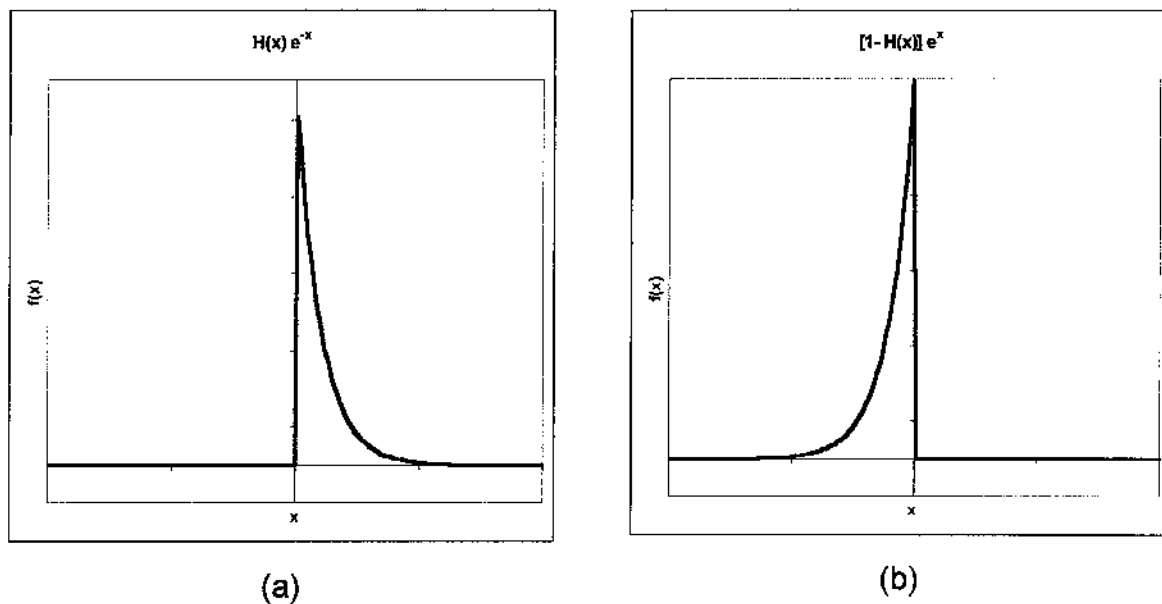


Figura 5.1. Distribuições assimétricas skewed à direita (a) e à esquerda (b)

Facilita muito, para achar os momentos de ordem 1 e 2 dessa distribuição, usar a função fatorial $z! = \int_0^{+\infty} x^z e^{-x} dx$. Para z positivo e inteiro se demonstra facilmente fazendo a integral por partes:

$$\int_0^{+\infty} x^z e^{-x} dx = -x^z e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx = z \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

que nos permite obter a relação de recorrência

$$z! = \int_0^{+\infty} x^z e^{-x} dx = z \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx = z(z-1)!. \text{ Continuando o processo:}$$

$$z! = z(z-1)(z-2)\dots(z-z)! = z(z-1)(z-2)\dots 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = z(z-1)(z-2)\dots 1.$$

Para z não inteiro ou negativo usamos essa integral como definição da

função fatorial, ou em termos da função Gama: $(z-1)! = \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$

Para achar os fatores de normalização dessas distribuições, ou seja,

constantes A e B tal que: $A \int_0^{+\infty} e^{-qx} dx = 1$ ou $B \int_{-\infty}^0 e^{qx} dx = 1$. Facilmente se percebe

que $A \int_0^{+\infty} e^{-qx} dx = \frac{A}{q} \int_0^{+\infty} e^{-qx} d(qx) = \frac{A}{q} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{A}{q} 0! = \frac{A}{q} = 1 \Rightarrow A = q$ e que

$$B \int_{-\infty}^0 e^{qx} dx = \frac{B}{q} \int_{-\infty}^0 e^{qx} d(qx) = -\frac{B}{q} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = -\frac{B}{q} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = -\frac{B}{q} 0! = 1 \Rightarrow B = q.$$

O momento de ordem 1 é dado para a distribuição skewed to the right por:

$$\mu = \int_0^{\infty} qx e^{-qx} dx = \frac{1}{q} \int_0^{\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{q} 1! = \frac{1}{q},$$

e da skewed to the left por:

$$\mu = \int_{-\infty}^0 qx e^{qx} dx = -\frac{1}{q} \int_{-\infty}^0 u e^{-u} du = -\frac{1}{q} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = -\frac{1}{q} 1! = -\frac{1}{q}.$$

Os momentos de ordem dois são idênticos e valem $\frac{1}{q^2}$:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{q}\right)^2 e^{-qx} dx = \frac{1}{q^2} \int_0^{+\infty} (qx - 1)^2 e^{-qx} d(qx) = \frac{1}{q^2} \int_0^{+\infty} (u - 1)^2 e^{-u} du \\ &= \frac{1}{q^2} \left\{ \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du - 2 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du + \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right\} = \frac{1}{q^2} \{2! - 2 \times 1! + 0!\} = \frac{1}{q^2}\end{aligned}$$

Já os momentos de ordem 3 têm sinais trocados e valem $\pm \frac{2}{q^3}$. Fácil mostrar

através dos fatoriais:

$$\begin{aligned}m_3 &= \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{q}\right)^3 e^{-qx} dx = \frac{1}{q^3} \int_0^{+\infty} (qx - 1)^3 e^{-qx} d(qx) = \frac{1}{q^3} \int_0^{+\infty} (u - 1)^3 e^{-u} du \\ &= \frac{1}{q^3} \left\{ \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du - 3 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du + 3 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du - \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right\} \\ &= \frac{1}{q^3} \{3! - 3 \times 2! + 3 \times 1! - 0!\} = \frac{1}{q^3} \{6 - 6 + 3 - 1\} = \frac{2}{q^3}\end{aligned}$$

Logo o skewness será dado por:

$$r = \frac{\frac{\pm 2}{q^3}}{\left[\sqrt{\frac{1}{q^2}}\right]^3} = \pm 2.$$

Já a kurtosis está relacionada com o momento de ordem 4. Quanto mais espalhada a distribuição maior o momento de ordem 4. Novamente, trata-se de uma comparação com a distribuição normal, e a kurtosis é definida por:

$$k = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3, \text{ de forma que a distribuição normal tem kurtosis nula. Se uma}$$

distribuição é mais concentrada em $x = \mu$ do que a normal, para manter a área unitária ela tem menor densidade de probabilidade nas caudas e o inverso. Se uma distribuição tem um pico mais pronunciado do que a normal então seu momento de ordem 4 será menor, pois a densidade na região em que $x - \mu$ é grande será menor. Logo $K < 0$. Lepto significa fino, delgado logo leptocúrtico é

uma distribuição mais delgada do que a normal. Já para $K > 0$ teremos uma distribuição menos delgada, ou mais achatada, do que a normal. Figura 5.2 mostra exemplos dos dois casos.

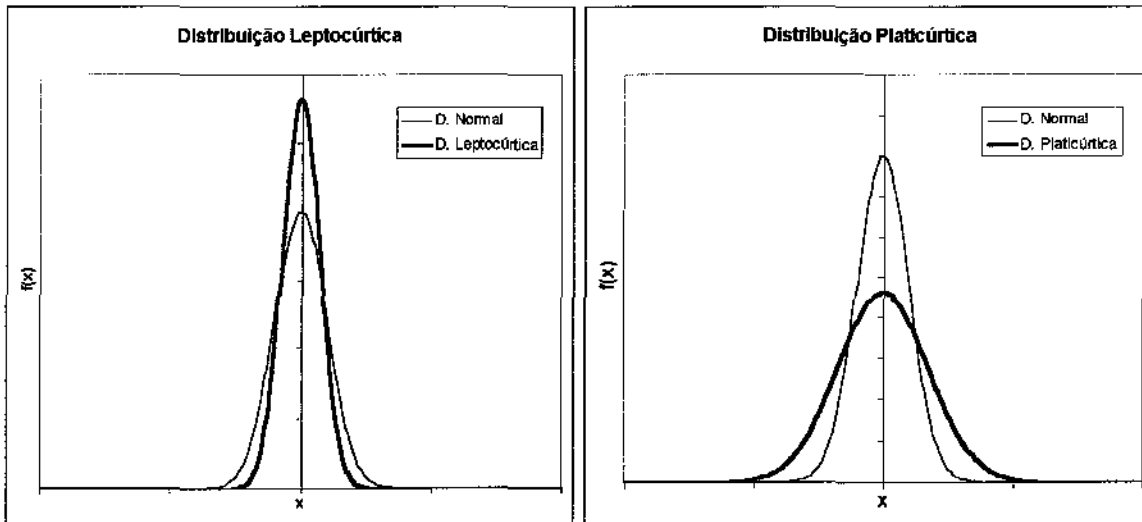


Figura 5.2. Uma distribuição leptocúrtica $k < 0$ (a) e platicúrtica $k > 0$ (b).

Função Geradora de Momentos (FGM)

Considere a seguinte função da variável t : $M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$.

Vamos expandir o e^{tx} dentro da integral em série de Taylor:

$$e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!},$$

para obter:

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx}{n!} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E(x^n) t^n}{n!}.$$

Entretanto $E(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$ é **Momento de ordem n centrado em zero**

M_n. Logo $M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!} t^n$.

Por outro lado, a expansão da Série de Taylor-MacLaurin de M(t) é

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{(n)}(0)t^n}{n!}, \text{ o que nos permite concluir que } E(x^n) = M^{(n)}(0), \text{ caso o}$$

momento exista. Para tanto a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$ deve convergir. Por isso a

M(t) é chamada função geradora dos momentos. Ela nem sempre existe devido à

dificuldade que a função e^{tx} traz para que a integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$ convirja. É

necessário que a f(x) caia assintoticamente a zero mais rápido do que e^{tx} para garantir a convergência.

FGM da Distribuição Normal

Um caso particular importante é o da FGM da distribuição normal:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{xt}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2 - 2xt\sigma^2}{2\sigma^2}} dx$$

Com álgebra de completar quadrados obtemos:

$$\begin{aligned} (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 xt &= x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2t\sigma^2 &= x^2 - 2[\mu + \sigma^2 t]x + \mu^2 &= \\ x^2 - 2[\mu + \sigma^2 t]x + [\mu + \sigma^2 t]^2 - [\mu + \sigma^2 t]^2 + \mu^2 &= [x - \mu - \sigma^2 t]^2 - \mu^2 - 2t\sigma^2 \mu - t^2 \sigma^4 + \mu^2 &= \\ [x - \mu - \sigma^2 t]^2 - 2t\sigma^2 \mu - t^2 \sigma^4. \end{aligned}$$

Assim:

$$M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[x-\mu-t\sigma^2]^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{2\mu t\sigma^2 + \sigma^4 t^2}{2\sigma^2}} dx$$

Logo:

$$M(t) = \frac{e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[\frac{x-\mu-t\sigma^2}{\sigma\sqrt{2}}]^2} d(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}) = \frac{e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

Finalmente chegamos a:

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

No **caso particular** em que a distribuição é centrada, ou seja, $N(0, 1)$, a FGM é dada por $M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

FGM de Distribuições Independentes

Se os eventos são independentes então: $F(x,y) = f(x) g(y)$. Nesse caso:

$$E(xy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y) dx dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} yg(y) dy \right] = E(x)E(y)$$

Da mesma forma a Esperança de qualquer função multiplicativa da forma $p(x,y)=q(x) h(y)$:

$$E[q(x)h(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x)h(y)f(x,y) dx dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)f(x) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)g(y) dy \right]$$

$$E[q(x) \times h(x)] = E[q(x)] \times E[h(y)]$$

Para uma distribuição conjunta a FGM é definida por:

$$\begin{aligned}
 M(t_1, t_2) &= E(e^{t_1 x} e^{t_2 y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x + t_2 y} f(x, y) dx dy \\
 &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x} f(x) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_2 y} g(y) dy \right]
 \end{aligned}$$

Logo, $M(t_1, t_2) = M_1(t_1) \times M_2(t_2)$.

Função Característica

O fato de que a FGM frequentemente não existe devido a problemas de convergência torna mais prático definir uma nova função geradora de momentos. Essa outra função é a Função Característica definida por:

$$charf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Agora não há mais problemas de convergência uma vez que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ é uma função que oscila com módulo sempre menor do que 1. Quando a FGM existe então $charf(t) = FGM(it)$. O que significa que a função característica da distribuição normal vale:

$$charf(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}};$$

ou,

$$charf(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}},$$

para $\mu = 0$.

A conexão da função característica com os momentos é quase igual, a não ser por um fator complexo, à da FGM. Usando $e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n x^n}{n!}$ obtemos:

$$charf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n E(x^n) t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{M_n}{n!} t^n.$$

Novamente, a expansão da Série de Taylor-MacLaurin de $charf(t)$ é

$$charf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{charf^{(n)}(0) t^n}{n!}, \quad \text{o que nos permite concluir que}$$

$$E(x^n) = \frac{charf^{(n)}(0)}{i^n}. \quad \text{Da mesma forma que a FGM, a função característica de}$$

eventos indepentés é a multiplicação das funções características de cada uma das distribuições: $charf(t_1, t_2) = charf_1(t_1) \times charf_2(t_2)$.

No fundo tanto a função geradora de momentos quanto a função característica são transformadas integrais das suas respectivas densidades de probabilidade. A FGM é uma Transformada de Laplace e a Função Característica é uma Transformada de Fourier. O tópico transformada de Fourier é muito mais importante para a estatística do que a própria função característica e joga um papel fundamental no desenvolvimento desse trabalho e, por isso, será discutido em uma próxima seção, junto com algumas propriedades das funções características. Várias dessas propriedades são comuns a todas as transformadas de Fourier e algumas específicas para transformadas de Fourier da classe de funções que podem descrever uma densidade de probabilidade.

Aqui vale ainda comentar a existência da função conhecida por segunda função característica, também conhecida como função geradora dos cumulantes, definida por $\Phi(t) = \text{Ln}[charf(t)]$. No fundo essa foi a função utilizada no truque do logarítimo e será utilizada novamente na demonstração do teorema do limite central e na velocidade de convergência das distribuições. Entretanto, isso será feito sem qualquer menção mais exaustiva quanto ao tópico. Gostaríamos apenas de deixar registrado sua existência e o fato de que pode ser uma ferramenta útil em alguns problemas.

Função Delta de Dirac

Essa “função” torna muito mais fácil entender, aplicar e demonstrar vários teoremas, dentre eles, o teorema da convolução e da transformada de Fourier inversa. Dessa forma introduziremos o conceito da função delta de Dirac ou função Impulso, antes da seção de Transformada de Fourier. Vale salientar que além dos casos que estudaremos essa função encontra muitas outras aplicações em diferentes áreas, entre elas no formalismo de funções de Green para solução de equações diferenciais lineares não homogêneas. Compensa, portanto, o trabalho de dominar essa ferramenta.

Algumas vezes, lidamos com fenômenos de uma natureza impulsiva como voltagens e forças de grande magnitude agem por períodos de tempo muito curtos. Exemplo típico é o de uma colisão. Tais casos costumam apresentar uma função $g(t)$ que é muito intensa em um intervalo de tempo muito pequeno $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$, e nula fora desse intervalo. A função impulso $I(\tau)$ seria definida

por $I(\tau) = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} g(t) dt$, se $g(t)$ é uma força, $I(\tau)$ seria o impulso total de força $g(t)$

durante o intervalo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. Considere o caso de uma força constante com intensidade $1/(2\tau)$ no intervalo $[-\tau, \tau]$, nesse caso $g(t)$ é dada por:

$$d_{\tau}(t) = g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau} & t \in [-\tau, +\tau] \\ 0 & t \notin [-\tau, +\tau] \end{cases}.$$

Vemos imediatamente que $I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\tau} dt = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} dt = \frac{2\tau}{2\tau} = 1$,

independentemente do valor de τ . Isso significa que a área sobre a curva vale 1 para qualquer valor de τ . Para manter a área à medida que τ diminui a altura da função $\frac{1}{2\tau}$ diverge para infinito, conforme figura 5.3 abaixo:

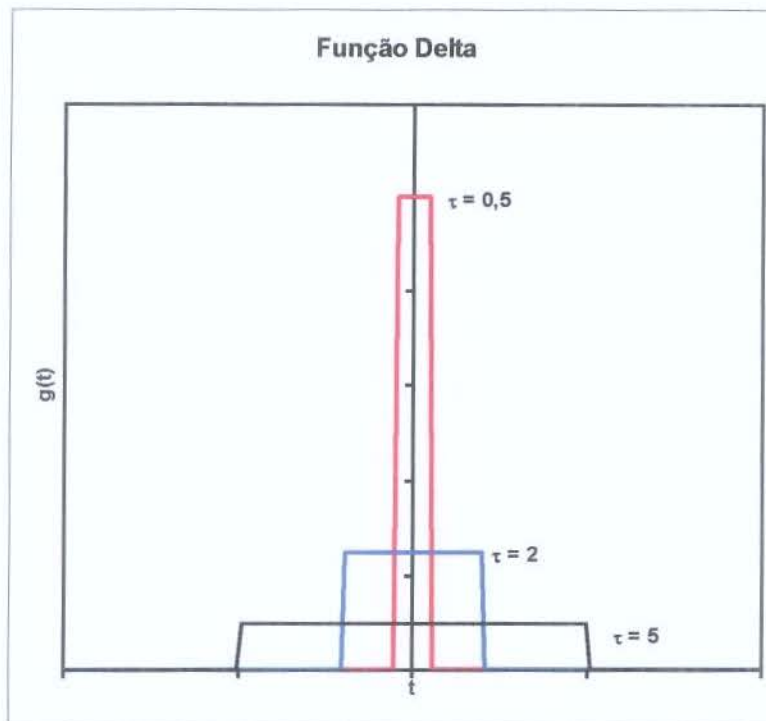


Figura 5.3. Função retângulo com área igual a 1.

Agora podemos idealizar a função delta de Dirac $d_\tau(t)$ como uma função que age sobre intervalos cada vez menores, ou seja tendendo a 0. Como resultado obtemos uma função estranha com as seguintes propriedades:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} d_\tau(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} d_\tau(t) = \infty \quad t = 0.$$

Por outro lado, $\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} d_\tau(t) dt = 1.$

A partir dessas equações vamos definir uma função de impulso unitário δ idealizada com as seguintes propriedades:

$$d_\tau(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{mas com} \quad \int_{t_1}^{t_2} d_\tau(t) dt = \begin{cases} 1 & 0 \in (t_1, t_2) \\ 0 & 0 \notin (t_1, t_2) \end{cases}.$$

Assim apresentamos a função Delta de Dirac como uma função nula em todos os pontos, exceto quando x for igual a 0, onde ela vale ∞ . Qualquer função que se torne cada vez mais localizada ao variar um dado parâmetro mantendo sua

área unitária, independente do valor do parâmetro, pode ser usada para construir a função Delta de Dirac. Essa não é uma função usual e sua formalização matemática é feita através da teoria das distribuições. Para nossos propósitos é suficiente a idéia intuitiva da função delta e um conjunto de propriedades apresentada pela mesma.

Agora, usaremos a $\delta(x)$ uniforme definida acima para extrair uma importante propriedade das funções Delta:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta_{\tau}(t) dt = \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\tau}^{+\tau} f(t) \frac{1}{2\tau} dt & \text{se } 0 \in (t_1, t_2) \\ 0 & \text{se } 0 \notin (t_1, t_2) \end{cases}.$$

Com a mudança de variável $z = \frac{t}{\tau}$ então

$$\int_{-\tau}^{+\tau} f(t) \frac{1}{2\tau} dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(z\tau) dz = f(0) \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dz = f(0).$$

Mudando a variável para $t - t_o$ essa propriedade pode ser escrita como:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_o) dt = \begin{cases} f(t_o) & \text{se } t_o \in (t_1, t_2) \\ 0 & \text{se } t_o \notin (t_1, t_2) \end{cases}.$$

Uma das identidades das funções delta mais utilizada é:

$$f(t_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_o) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t_o - t) dt.$$

De modo geral as distribuições estatísticas gozam da propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1,$$

de modo que todas as distribuições que se tornem mais e mais localizadas podem ser utilizadas na construção da função delta de Dirac. Vejamos alguns exemplos:

a) Usando a distribuição normal: $\delta_n(x) = A e^{-n^2 x^2}$.

Primeiro passo: escolher A tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-n^2 x^2} dx = 1$. Para tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-n^2 x^2} dx = \frac{A}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dn x = \frac{A}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{A}{n} \sqrt{\pi}, \text{ logo } A = \frac{n}{\sqrt{\pi}}. \text{ Portanto,}$$

$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ é uma boa seqüência para a função de Dirac e

$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \right]$. Veja, nos gráficos da figura 5.4, como a função δ_n se

torna cada vez mais localizada à medida que n cresce mantendo, entretanto, a área constante.

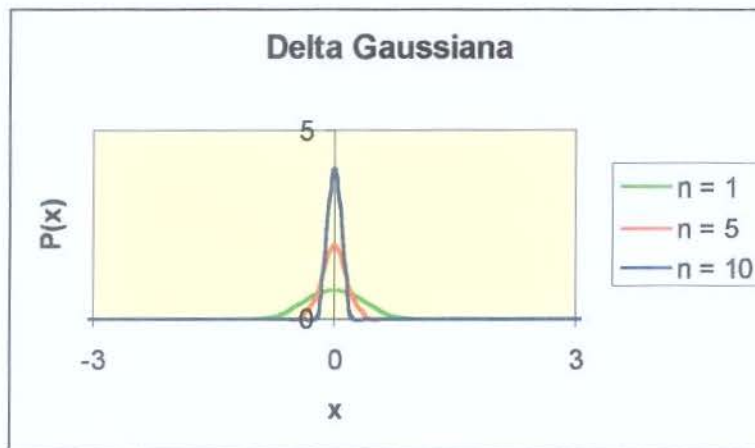


Figura 5.4. Delta da Gaussiana.

b) Distribuição de Cauchy é dada por $\delta_n(x) = \frac{A}{1 + n^2 x^2}$.

Na física essa função é conhecida como Lorentziana que a utilizou no estudo dos osciladores harmônicos no final do século 19, posterior a Cauchy,

portanto. Novamente, escolher A $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1 + x^2 n^2} dx = 1$. Isso pode ser feito facilmente

através de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2n^2} dx = \frac{A}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2n^2} dx = \frac{A}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} dz$. Já a integral

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} dz$ é feita através da substituição trigonométrica $u = \tan \theta$, de forma que

$du = \sec^2 \theta d\theta$, quando $u \rightarrow \pm\infty \quad \theta \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$, logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi \quad \text{uma vez que } 1+\tan^2 \theta = \sec^2 \theta.$$

Portanto $\frac{A}{n} \pi \rightarrow A = \frac{n}{\pi}$, e a sequência $\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$ é uma boa sequência

para a função de Dirac $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \right]$. Notamos pela figura 5.5, que

quanto menor o n mais plano é o gráfico, o que também acontece para a gaussiana.

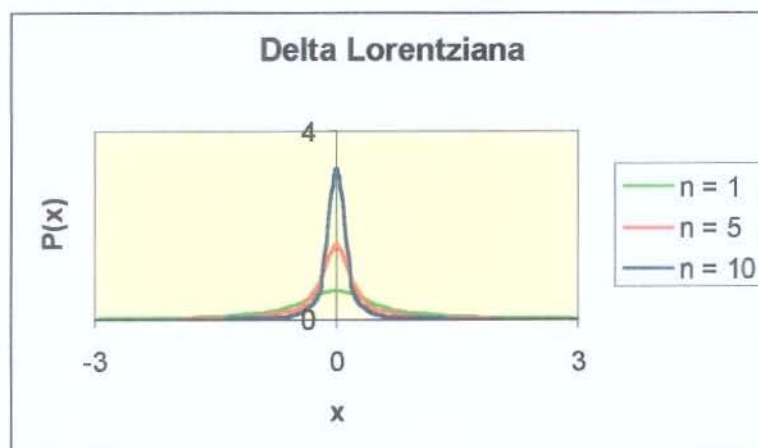


Figura 5.5. Delta da Lorentziana.

c) Uma seqüência muito importante, que não é uma distribuição pois assume valores negativos, como podemos ver na figura 5.6, é a função sinc(x)

$$\delta_n(x) = A \frac{\text{sen } nx}{x}.$$

$$\text{Usando o fato que } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } nx}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } nx}{nx} dnx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } u}{u} du = \pi, \text{ [essa}$$

integral definida pode ser feita facilmente por resíduos e consta em qualquer

tabela de integrais], encontramos que $A = \frac{1}{\pi}$. Portanto, a seqüência

$$\delta_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{\pi x} \text{ leva à função Delta de Dirac } \delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } nx}{\pi x}.$$

Essa forma de função delta permite desenvolver uma outra seqüência muito útil:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{itx} dt.$$

Note que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{itx} dt = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{itx}}{ix} \right|_{-n}^{+n} = \frac{1}{\pi x} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{\text{sen } nx}{\pi x}$$

Assim extraímos a seguinte PROPRIEDADE IMPORTANTE:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dt.$$

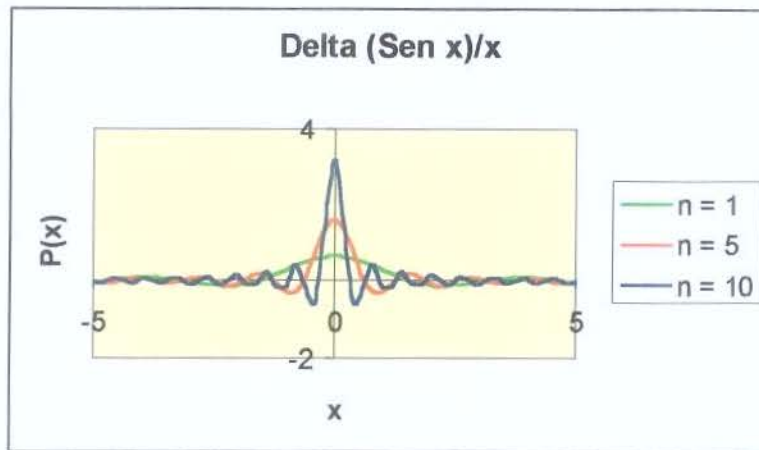


Figura 5.6. Delta de $\delta_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{\pi x}$.

Função de Heaviside

A função de Heaviside, ou função degrau, é definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Essa função tem as propriedades requeridas por uma função distribuição de probabilidade (não densidade de probabilidade), ou seja, $0 \leq H(x) \leq 1$; $H(-\infty) = 0$ e $H(\infty) = 1$. Ela também é conhecida como Distribuição Degenerada. Note que essa função não é sequer contínua em $x = 0$, muito menos diferenciável.

Podemos pensar em uma seqüência de uma função diferenciável que, no limite, se torna a função de Heaviside. Observe no gráfico da figura 5.7 o comportamento da função logística $H_\Gamma(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\Gamma}}}$ à medida que Γ diminui. Ela vai

se tornando a função degrau de Heaviside.

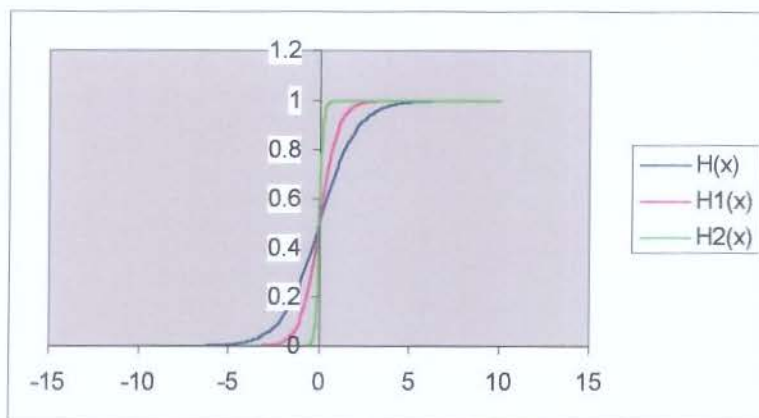


Figura 5.7. Função de Heaviside.

Agora, note o gráfico da figura 5.8 como a derivada da função logística tem o comportamento requerido para uma boa sequência de uma função delta. Quanto menor o Γ mais localizada se torna a derivada. Basta mostrar então que a área sobre a curva da derivada é unitária. Mas isso é imediato uma vez que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} H_{\Gamma}(x) dx = H_{\Gamma}(+\infty) - H_{\Gamma}(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

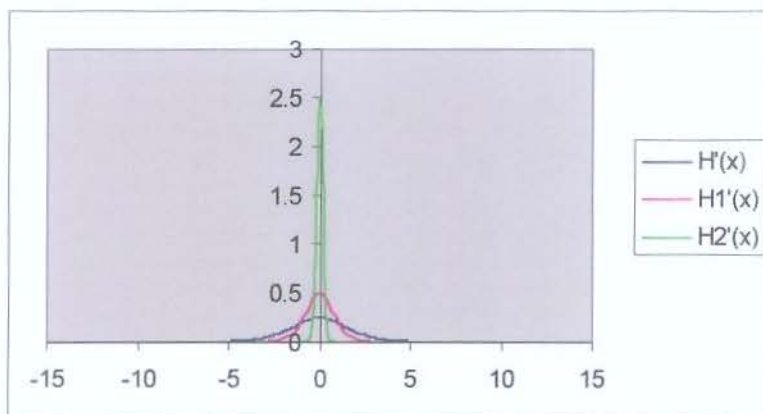


Figura 5.8. Derivada da função logística.

Assim, também podemos escrever $\delta(x) = \frac{d}{dx}H(x)$ ou

$$\delta(x - x_o) = \frac{d}{dx}H(x - x_o) \text{ onde } H(x - x_o) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > x_o \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = x_o \\ 0 & \text{se } x < x_o \end{cases}.$$

Transformadas

Transformadas integrais na forma $F(s) = \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) f(t) dt$ são artifícios

matemáticos com vastíssimas aplicações, desde processamento de imagens, (tomografia é uma transformada de Hadamard), solução de equações diferenciais lineares até a estatística avançada e formam a base da teoria das distribuições. O teorema do Limite Central utiliza o teorema da convolução das transformadas de Fourier, por exemplo. As funções geradoras dos momentos são uma transformada de Laplace de dois lados e as funções características são transformadas de Fourier. Todo nosso trabalho depende fundamentalmente das transformadas de Fourier e alguma de suas propriedades, por isso essa seção será devotada ao estudo das transformadas, em especial, a de Fourier.

Uma transformada integral é uma relação que se apresenta na forma

$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) f(t) dt$, onde a função $f(t)$ é transformada em uma outra função

$F(s)$ por meio de uma integral. Diz-se que $F(s)$ é a função transformada de $f(t)$, e que a função $K(s, t)$ é o Kernel da transformação.

A estrutura básica das Transformadas de Fourier é $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx$.

As transformadas precisam ser inversíveis para serem úteis. Existem vários tipos de transformadas, cada uma com um método de inversão próprio. As Transformadas de Fourier apresentam uma das transformadas inversas mais

simples. Enquanto a transformada direta é $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx$ a transformada

inversa é dada por $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds$. Com o uso da função delta isso é

facilmente demonstrável:

Vamos assumir que $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds$, então:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s') e^{-is'x} ds' \right\} dx = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(s') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s-s')x} dx \right\} ds' &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(s') \delta(s-s') ds' = F(s) \end{aligned}$$

Se $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds$ então $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx$.

Conversivelmente, se $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx$ então $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds$,

pois, novamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{isx'} dx' \right\} ds = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(s') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s-s')x} dx \right\} ds' &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(s') \delta(s-s') ds' = F(s) \end{aligned}$$

Note então que a cada $f(x)$ corresponde uma $F(s)$ e vice-versa. Duas $f(x)$

diferentes só podem dar origem à mesma $F(s)$ se a $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - g(x)| dx = 0$, que

é uma propriedade de funções de medida nula. Sem entrar em detalhes, exceto pelos casos de funções de medida nula, existe uma correspondência biunívoca entre uma função e sua transformada – o que significa que para cada função característica existe uma, e só uma, função densidade de probabilidade e vice versa.

Antes de passar para as transformadas das funções necessárias nos próximos capítulos, vamos estabelecer algumas propriedades das transformadas de Fourier.

1. A transformada de uma função par $f(-x) = f(x)$ é real e par.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\cos sx + i \sin sx] dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos sx dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin sx dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos sx dx$$

uma vez que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin sx dx = 0$ por paridade $\{f(x) \sin(sx) \text{ é função ímpar se } f(x)$

é par}. Isso demonstra que a transformada de uma função par é real. Por outro

lado $F(-s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(-sx) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(sx) dx = F(s)$ é par.

2. A transformada de uma função ímpar $f(-x) = -f(x)$ é imaginária e ímpar.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\cos sx + i \sin sx] dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos sx dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin sx dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin sx dx$$

uma vez que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos sx dx = 0$ por paridade $\{f(x) \cos(sx) \text{ é função ímpar se } f(x)$

é ímpar}. Isso demonstra que a transformada de uma função par é real. Por

outro lado $F(-s) = i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(-sx) dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(sx) dx = -F(s)$ é

ímpar.

3. Se $F(s)$ é a transformada de uma função $f(x)$ par então a transformada de

$F(x)$ é $\frac{f(s)}{2\pi}$. Se $f(x)$ é par então $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos sx dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos sx dx$ é

uma função par. Por outro lado, $F(s)$ também é par, logo a sua transformada inversa será:

4.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) [\cos sx - i \operatorname{sen} sx] ds =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cos sx ds - i \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \operatorname{sen} sx ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cos sx ds$$

Logo, se $f(x)$ é par as duas relações abaixo que facilitam encontrar várias transformadas, valem:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos sx dx \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) \cos sx ds.$$

5. Transformada de derivadas: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} e^{isx} dx = (-is)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx.$

Para valer o teorema basta que $f(\pm\infty)=0$. Nesse caso devemos fazer a integral por partes com $du = \frac{df}{dx} dx \rightarrow u = f(x)$ e $v = e^{isx} \rightarrow dv = is dx$,

da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{isx} dx = e^{isx} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - is \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx = -is \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx$$

Para provar a enésima derivada basta iterar n vezes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} e^{isx} dx = -is \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} e^{isx} dx = (-is)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-2} f(x)}{dx^{n-2}} e^{isx} dx =$$

$$\dots = (-is)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-k} f(x)}{dx^{n-k}} e^{isx} dx$$

Para $k = n$ chega-se na fórmula acima com a convenção $\frac{d^0 f(x)}{dx^0} = f(x)$.

6. Derivadas de Transformadas: $\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (ix)^n e^{isx} dx$.

Fácil porque a derivada pode entrar na integral, uma vez que os limites são fixos:

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{isx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (ix)^n e^{isx} dx,$$

c.q.d.

7. Finalmente duas propriedades importantes das funções características e que justifica fazer uma expansão em série de Taylor em torno de zero das mesmas. Se $f(x)$ é uma densidade de probabilidade então (a) $|F(0)| = F(0) = 1$ e (b) $|F(s)| \leq |F(0)| = 1$.

Se $f(x)$ é uma densidade de probabilidade então $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Logo $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i0x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Por outro lado da desigualdade de

Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{isx}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{isx}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(0) = 1$$

, pois $|e^{isx}| = \sqrt{e^{isx} e^{-isx}} = 1$.

Achando Transformadas

Veremos agora alguns casos:

a) Funções delta de Dirac e suas combinações: $f_1(x) = \delta(x - x_0)$; função par de dois impulsos $f_2(x) = \frac{\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)}{2}$ e função ímpar de dois impulsos $f_3(x) = \frac{\delta(x - x_0) - \delta(x + x_0)}{2}$.

Essas são as transformadas mais simples que existem:

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) e^{isx} dx = e^{isx_0};$$

$$F_2(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \delta(x - x_0) + \frac{1}{2} \delta(x + x_0) \right\} e^{isx} dx = \frac{e^{isx_0} + e^{-isx_0}}{2} = \cos sx_0,$$

obedecendo ao fato de que a transformada de uma função par é real e par;

$$F_3(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \delta(x - x_0) - \frac{1}{2} \delta(x + x_0) \right\} e^{isx} dx = i \frac{e^{isx_0} - e^{-isx_0}}{2i} = i \operatorname{sen} sx_0,$$

obedecendo ao fato de que a transformada de uma função ímpar é imaginária e ímpar.

b) Funções de Heaviside ou distribuição degenerada e similares:

$$f(x) = H(x - x_0).$$

Sabendo que a delta é a derivada da função degrau fica fácil calcular a transformada da degrau pelo teorema da derivada:

$$e^{isx_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dH(x - x_0)}{dx} e^{isx} dx = -is \int_{-\infty}^{+\infty} H(x - x_0) e^{isx} dx,$$

portanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x - x_0) e^{isx} dx = i \frac{e^{isx_0}}{s}.$$

Dois outros casos que serão utilizados são das funções exponenciais e Gaussianas. A Gaussiana já foi feita quando calculamos a função característica de

uma distribuição normal e vale: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{isx} dx = e^{i\mu s - \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$. As exponenciais

vão nos permitir achar a transformada da Lorentziana, ou a função característica da distribuição de Cauchy.

c) Funções exponenciais: $f_1(x) = H(x) e^{-qx}$; $f_2(x) = H(-x) e^{qx}$ e $f_3(x) = e^{-q|x|}$, com $q > 0$ e $H(x)$ a função de Heaviside. Note que essas funções se tornam bem comportadas para x tendendo a mais ou menos infinito com a multiplicação da função degrau e com o sinal positivo de q . A f_3 é simétrica (par) convergindo para ambos os lados.

A primeira é calculada facilmente por:

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-qx} e^{isx} dx = \int_0^{+\infty} e^{(is-q)x} dx = \frac{e^{(is-q)x}}{is-q} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{is-q}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{is-q} = \frac{q}{s^2 + q^2} + i \frac{s}{s^2 + q^2}$$

Da mesma forma a segunda:

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(-x) e^{qx} e^{isx} dx = \int_{-\infty}^0 e^{(is+q)x} dx = \frac{e^{(is+q)x}}{is+q} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{is+q}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{is+q} = \frac{q}{s^2 + q^2} - i \frac{s}{s^2 + q^2}$$

Já a terceira pode ser colocada em termos das duas primeiras uma vez que

$$e^{-q|x|} = H(x) e^{-qx} + H(-x) e^{qx}, \text{ logo } F_3(s) = F_1(s) + F_2(s) = \frac{2q}{q^2 + s^2}. \text{ Como}$$

$f_3(x)$ e $F_3(s)$ são funções pares podemos usar F_3 para achar a transformada da

função Lorentziana ou distribuição de Cauchy: $f(x) = \frac{q}{\pi(q^2 + x^2)}$. Notando que

$$f(x) = \frac{F_3(x)}{2\pi} \text{ percebemos que sua transformada é justamente a transformada}$$

$$\text{inversa de } F_3. \text{ Então } F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\pi(q^2 + x^2)} e^{isx} dx = e^{-q|x|}.$$

Teorema da Convolução

Vamos introduzir a operação convolução com o seguinte problema estatístico. Seja a função contínua $f(x)$ a densidade de probabilidade da variável aleatória x e $g(y)$ a densidade de probabilidade da variável y , independente de x . Qual a densidade de probabilidade $h(z)$ da variável aleatória $z = x + y$? A probabilidade de encontrar x entre x e $x+dx$ é dada por $dP_x = f(x) dx$ e de encontrar y entre y e $y + dy$ por $dP_y = g(y) dy$. A probabilidade de encontrar os dois, x e y , no intervalo $x, x + dx$ e $y, y + dy$, como são eventos independentes, é $dP_{x+y} = f(x) g(y) dx dy$. Entretanto essa não é ainda a probabilidade de encontrar z entre $x + y$ e $x + y + dx + dy$, porque, se para cada x e y só existe um z possível, o inverso não é verdadeiro. Na realidade todo x, y na reta $x + y = z$, levam ao mesmo valor de z . Isso significa que devemos somar (integrar para o caso contínuo) em todas as possibilidades. Matematicamente expressamos isso da seguinte forma:

$$dP_z = \iint_{z \leq x+y \leq z+dz} f(x) g(y) dx dy.$$

Liberando x e usando y para satisfazer a restrição $z - x \leq y \leq z - x + dz$ de integração, obtemos:

$$dP_z = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left\{ \int_{z-x}^{z-x+dz} g(y) dy \right\} dx.$$

Agora,

$$\int_{z-x}^{z-x+dz} g(y) dy = G(z-x+dz) - G(z-x) = \frac{G(z-x+dz) - G(z-x)}{dz} dz = \frac{dG}{dz} dz = g(z-x)$$

$$\text{Portanto, } dP_z = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(z-x) dx \right\} dz \text{ e } h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(z-x) dx.$$

Esse “produto” $h(x) = f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(x-y) dy$ é chamado de convolução. Note que $f(x) \otimes g(x) = g(x) \otimes f(x)$ pois a mudança de variável $u = x - y$; $y = x - u$; $dy = -du$ e $y \rightarrow \pm\infty \rightarrow u \rightarrow \mp\infty$ na integral acima leva a:

$$g(x) \otimes f(x) = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u) g(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) g(u) du = f(x) \otimes g(x).$$

Intuição sobre a Convolução

Considere, para exemplificar, a convolução da função $f(x) = H(x) e^{-qx}$ com ela mesma. A função $f(x-y)$ é a função $f(y)$ refletida no eixo y e deslocada de x para a direita conforme mostra a figura 5.9.

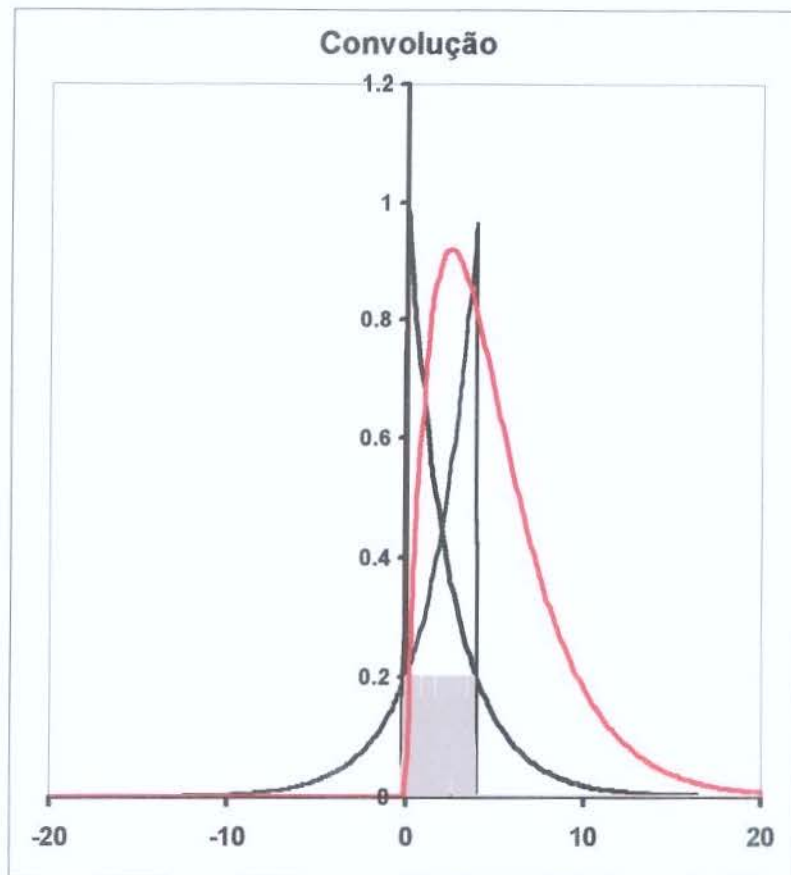


Figura 5.9. Convolução.

A curva para direita é e^{-qy} , para a esquerda é $e^{-q(4-y)}$, a área cinza mostra a região em que as duas curvas se superpõem. A curva vermelha mostra a função convolução que mede essa área para diferentes valores de x .

Assim, para achar a convolução, basta usar as transformadas direta e inversa de Fourier:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx \text{ e } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds.$$

Então:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-is(x-y)} ds \right] dy$$

$$f(x) \otimes g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{isy} dy \right] F(s) e^{-isx} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) F(s) e^{-isx} ds.$$

Ou seja: $f(x) \otimes g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[f(x)] \times \mathcal{F}[g(x)]\}$.

Em palavras: a convolução é a transformada inversa do produto das transformadas. Esse é teorema da convolução. Também pode ser enunciado como: a transformada da convolução é o produto das transformadas, $\mathcal{F}\{f(x) \otimes g(x)\} = \mathcal{F}[f(x)] \times \mathcal{F}[g(x)]$.

Desse modo, podemos achar a convolução entre as duas funções sem precisar integrar adotando os seguintes procedimentos:

1. Achar a transformada de Fourier de g : $\mathcal{F}[g]$;
2. Achar a transformada de Fourier de f : $\mathcal{F}[f]$;
3. Multiplicar uma pela outra: $\mathcal{F}[g] * \mathcal{F}[f]$;
4. Achar a transformada inversa do produto: $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[g] * \mathcal{F}[f]\}$.

A convolução $f \otimes g$ tem muitas das propriedades da multiplicação simples, tais como:

1. $f \otimes g = g \otimes f$ (Lei Comutativa);
2. $f \otimes (g_1 + g_2) = f \otimes g_1 + f \otimes g_2$ (Lei Distributiva);
3. $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$ (Lei Associativa);
4. $f \otimes 0 = 0 \otimes f = 0$.

Uma forma particularmente elegante de generalizar o teorema da convolução é através do uso da função delta de Dirac. Vamos generalizar o problema inicial para n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ independentes com densidades de probabilidades $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$ das quais queremos extrair a densidade de probabilidade para a variável aleatória $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Repetindo o mesmo raciocínio chega-se a que:

$$dP_z = \int\limits_{z \leq \sum x_i \leq z+dz} \int\int\int \dots \int f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Aqui, em lugar de manter a restrição nos limites de integração vamos liberá-los e introduzir uma delta de Dirac que garanta que o integrando seja nulo caso a restrição não seja satisfeita, ou seja $\delta[\sum x_i - z] dz$. Portanto:

$$dP_z = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \delta[\sum x_i - z] dx_1 dx_2 \dots dx_n \right\} dz.$$

Agora vamos usar a identidade:

$$\delta[\sum x_i - z] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sum x_j - z)s} ds,$$

e mudar a ordem de integração para obter:

$$\begin{aligned} dP_z &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\sum x_j} e^{-isz} ds \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n \right\} dz = \\ &= \frac{dz}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isz} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) e^{isx_1} dx_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) e^{isx_2} dx_2 \right] \dots \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x_n) e^{isx_n} dx_n \right] = \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s) F_2(s) \dots F_n(s) e^{-isz} ds \right\} dz \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } f(z) = f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes \dots \otimes f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s) F_2(s) \dots F_n(s) e^{-isz} ds$$

é o teorema generalizado da convolução. Com esse teorema completamos a base matemática necessária para acompanhar o desenvolvimento do capítulo 6.

CAPÍTULO 6

Nesse capítulo vamos utilizar os resultados obtidos nos capítulos anteriores para finalizar o propósito inicial dessa monografia sobre as bases matemáticas do modelo de Black&Scholes. A suposição importante para nossa discussão, e que está colocada em dúvida, é a suposição de que os preços das ações seguem um movimento Browniano geométrico. No entanto existem razões fortes para justificar essa suposição, sendo a mais forte delas o Teorema do Limite Central, que garante que se uma variável aleatória segue uma distribuição estatística com

variância finita então a variável aleatória $z = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, como os eventos i independentes entre si, tende a uma distribuição normal quando n tende a infinito.

Dessa forma a distribuição normal aparece normalmente em variáveis que dependem de um número muito grande de outras variáveis independentes, mesmo que essas variáveis não obedeçam a uma distribuição gaussiana. A primeira parte desse capítulo, portanto, será devotada ao estudo do teorema do limite central. Além disso, se vamos abrir mão da distribuição normal, será necessário, então, justificar que classe de distribuições poderia substituí-la.

Mostraremos que apenas as distribuições estáveis têm as propriedades desejáveis para a distribuição de uma variável aleatória que dependem de um número muito grande de outras variáveis independentes. Mostraremos que, exceto pela distribuição normal, que é uma distribuição estável, todas as outras distribuições estáveis têm variância infinita. Essas distribuições são chamadas distribuições de Lévy.

Síntese dos Resultados Obtidos

Vamos começar reproduzindo aqui os resultados que serão necessários a seguir.

Série de Taylor:

$$f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

Taylor-MacLaurin ($x_0 = 0$):

$$f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Resto da série de Taylor:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Existe $0 \leq \zeta \leq b$ tal que $f(b) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} b + \frac{f''(\zeta)}{2!} b^2.$

Casos particulares:

$$\frac{1}{(1 \mp x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k x^k = 1 \pm x + x^2 \pm x^3 + \dots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Momentos:

$$\text{Centrados: } m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \text{ e Não centrados: } M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

Relação entre os Momentos Centrados e Não-Centrados:

$$m_0 = M_0 = 1$$

$$m_1 = 0 \text{ e } M_1 = \mu$$

$$m_2 = \sigma^2 \text{ e } M_2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$M_3 = m_3 + 3\mu\sigma^2 + \mu^3.$$

Função Geradora de Momentos (FGM):

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \text{ e } M_n = M^{(n)}(0).$$

$$\text{Para variáveis independentes } M(t_1, t_2) = M_1(t_1) \times M_2(t_2)$$

Função Característica:

$$\text{charf}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \text{ e } M_n = \frac{\text{charf}^{(n)}(0)}{i^n}.$$

$$\text{Para variáveis independentes } \text{charf}(t_1, t_2) = \text{charf}_1(t_1) \times \text{charf}_2(t_2).$$

Propriedades da Distribuição Normal (Gaussiana):

$$\text{Momentos da normal centrada } N(0, \sigma) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}: m_{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k} \text{ e}$$

$$m_{2k+1} = 0.$$

$$\text{FGM: } M(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \text{ para } N(\mu, \sigma) \text{ e } M(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \text{ para } N(0, 1).$$

Função Característica: $charf(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ para $N(\mu, \sigma)$ e

$$charf(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ para } N(0, 1).$$

Transformadas de Fourier:

Transformada direta: $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx.$

Transformada inversa: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds.$

Transformada de densidade de probabilidades: $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ e

$$|F(s)| \leq |F(0)| = 1.$$

Transformada de distribuição Normal: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{isx} dx = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$

Transformada de distribuição de Cauchy (Lorentziana):

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\pi(q^2 + x^2)} e^{isx} dx = e^{-q|x|}.$$

Teorema da Convolução:

Operação convolução: $f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(x-y) dy.$

Teorema da convolução: $f(x) \otimes g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) F(s) e^{-isx} ds.$

$$f(x) \otimes g(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(x)] \times \mathcal{L}[g(x)]\} \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}\{f(x) \otimes g(x)\} = \mathcal{L}[f(x)] \times \mathcal{L}[g(x)].$$

Teorema da convolução generalizado:

$$f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes \dots \otimes f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s) F_2(s) \dots F_n(s) e^{-isz} ds$$

Teorema do Limite Central

Considere uma variável aleatória x cuja função densidade de probabilidade obedece a:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \mu \neq \infty;$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2 \neq \infty.$

O Teorema do Limite Central afirma que para n observações

independentes da variável aleatória x então $z_n = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \mu)}{\sigma \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=0}^n x_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}$ segue uma distribuição $N(0, 1)$ no limite de n tendendo a infinito ($n \rightarrow \infty$).

1. A primeira propriedade dessa variável z_n é que sua esperança é nula, independente do valor de n .

$$E[z_n] = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = \frac{E[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)]}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n E[(x_i - \mu)]}{\sigma\sqrt{n}} = 0$$

2. A segunda é que sua variância vale 1, independente do valor de n.

Se $E[z_n] = 0 \rightarrow V[z_n] = E[z_n^2]$. O truque é separar a somatória

$[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)][\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)]$ em dois termos, um com $i = j$ e outro com $i \neq j$ e usar

o fato de que para eventos independentes $\text{cov}[x_i, x_j] = E[(x_i - \mu)(x_j - \mu)] = 0$.

Assim:

$$\begin{aligned} E[z_n^2] &= E\left\{\frac{[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)][\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)]}{n\sigma^2}\right\} = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + \sum_{i \neq j} (x_i - \mu)(x_j - \mu)}{n\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n E[(x_i - \mu)^2] + \sum_{i \neq j} E[(x_i - \mu)(x_j - \mu)]}{n\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2}{n\sigma^2} = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2} = 1 \end{aligned}$$

A função geradora dos momentos da variável z_n é dada por:

$$M(t; n) = E[e^{z_n t}] = E[e^{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} t}] = E[e^{\frac{x_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} t} e^{\frac{x_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} t} \dots e^{\frac{x_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} t}]$$

usando o fato de que são eventos idênticos e independentes:

$$M(t; n) = E[e^{\frac{x_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} t}] E[e^{\frac{x_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} t}] \dots E[e^{\frac{x_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} t}] = \{E[e^{\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{n}} t}]\}^n.$$

Definindo $m(t) = E[e^{(x - \mu)t}] = e^{-\mu t} E[e^{xt}] = e^{-\mu t} M(t)$ percebemos que

$$m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = E[e^{\frac{(x - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} t}], \text{ logo } M(t; n) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

A expansão em série de Taylor-MacLaurin de $m(t)$ é dada, até segunda ordem, por:

$$m(t) = \frac{m(0)t^0}{0!} + \frac{m'(0)t^1}{1!} + \frac{m''(\zeta)t^2}{2!} = 1 + 0 + \frac{m''(\zeta)t^2}{2!} = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{[m''(\zeta) - \sigma^2]t^2}{2}$$

com $0 \leq \zeta \leq t$, pois $m(0) = 1$; $m'(0) = 0$ e $m''(0) = \sigma^2$. Note que $m''(\zeta) \neq m''(0)$, por isso somamos e subtraímos termos com $m''(0)$. Para usar

esse resultado na equação para $M(t;n)$ basta mudar a variável $t \rightarrow \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$. Neste

$$\text{caso: } M(t;n) = \left\{ 1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2n\sigma^2} + \frac{[m''(\zeta) - \sigma^2]t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n \text{ com } 0 \leq \zeta \leq \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Agora queremos:

$$M(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(t;n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2n\sigma^2} + \frac{[m''(\zeta) - \sigma^2]t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n.$$

Note que quando $n \rightarrow \infty$ então:

$$0 \leq \zeta \leq \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \zeta \rightarrow 0 \quad m''(\zeta) \rightarrow m''(0) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad [m''(\zeta) - \sigma^2] \rightarrow 0.$$

Portanto, usando o fato de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x}{n} \right]^n = e^x$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2n\sigma^2} + \frac{[m''(\zeta) - \sigma^2]t^2}{2n\sigma^2} \right\}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{t^2}{2n} \right]^n = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Com isso mostramos que $M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ que é a FGM da $N(0,1)$. Dada a relação biúnivoca entre as distribuições e suas FGM's mostramos que a variável

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \text{ segue a distribuição normal centrada } N(0,1). \text{ Note que não foi}$$

necessário a existência dos momentos de terceira ordem e acima para garantir a

convergência à distribuição normal, apenas o momento de ordem 2, ou seja a variância. Dificuldades podem ocorrer na situação em que a função $m(t)$ não exista, embora a sua expansão em série de Taylor até segunda ordem esteja garantida pela existência da variância.

A segunda forma de demonstrar o Teorema do Limite Central usa a função característica em lugar da FGM. É possível seguir todos os passos da demonstração acima para a função característica, entretanto, queremos extrair ao mesmo tempo a velocidade de convergência da distribuição, por isso usaremos

outro método. Vamos agora definir a variável $z_n = \sum_{i=1}^n x_i$ em que x_i são variáveis

idênticas e independentes que seguem a uma distribuição com densidade de probabilidade $f(x)$ cuja função característica, ou transformada de Fourier, é $\varphi(t)$. A densidade de probabilidade $F(z_n)$ de z_n é dada pela convolução das n 's x_i 's, ou seja:

$$F(z_n) = f_1(t) \otimes f_2(t) \otimes \dots \otimes f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_n(t) e^{-iz_n t} dt .$$

Como são variáveis idênticas:

$$f(z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^n(t) e^{-iz_n t} dt .$$

A função característica $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixt} dx$ tem a propriedade de que

$\varphi(t) \leq \varphi(0) = 1$, será elevada a uma potência muito grande n . Para $t=0 \Rightarrow 1^n = 1$, independente de n , mas para $t \neq 0 \Rightarrow \varphi^n(t) \rightarrow 0$ pois $\varphi(t) < 1$. Isso significa que a função $\varphi^n(t)$, para n muito grande, está concentrada e torno de $t = 0$, ponto em que vale 1. Assim poderíamos fazer a expansão em série de Taylor-MacLaurin diretamente de $\varphi^n(t)$, mas encontraríamos os mesmos problemas de convergência da série que nos levaram

ao truque do logarítmo. Por isso usamos, novamente, aqui o truque do logarítmo e fazemos a expansão de $Ln[\varphi^n(t)] = n Ln[\varphi(t)]$. Vamos fazer a expansão até ordem 3 para já obter a velocidade de convergência, embora seja necessário expandir apenas até ordem 2 para demonstrar o TLC.

Sabendo que $\varphi(0) = M_0 = 1$; $\varphi'(0) = iM_1 = i\mu$; $\varphi''(0) = i^2 M_2 = -(\sigma^2 + \mu^2)$; $\varphi'''(0) = i^3 M_3 = -i[m_3 + 3\mu\sigma^2 + \mu^3]$ obtemos a expansão de $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2 + \frac{\varphi'''(0)}{6}t^3$$

$$\varphi(t) = 1 + i\mu t - (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2} - i(m_3 + \mu^3 + 3\mu\sigma^2)\frac{t^3}{6} + 0(t^4).$$

Mas queremos a expansão de $Ln[\varphi(t)]$ até a terceira ordem. Usando a expansão do logarítmo $Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0(x^4)$ para a variável x:

$$x = i\mu t - (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2} - i(m_3 + \mu^3 + 3\mu\sigma^2)\frac{t^3}{6} + 0(t^4).$$

Devemos coletar termos de mesma ordem em t, assim:

$$x^2 = -\mu^2 t^2 - i\mu(\mu^2 + \sigma^2)t^3 + 0(t^4) \text{ e } x^3 = -i\mu^3 t^3.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \\ i\mu t - (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2} - i(m_3 + \mu^3 + 3\mu\sigma^2)\frac{t^3}{6} + \frac{\mu^2 t^2}{2} + i\frac{(\mu^3 + \mu\sigma^2)t^3}{2} - i\frac{\mu^3 t^3}{3} = \\ i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} - i\frac{m_3 t^3}{6} \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$nLn\varphi(t) = in\mu t - \frac{n\sigma^2 t^2}{2} - i \frac{nm_3 t^3}{6} + O(t^4).$$

De modo que $f(z_n) \cong \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\mu t} e^{-\frac{n\sigma^2 t^2}{2}} e^{-i \frac{nm_3 t^3}{6}} e^{-iz_n t} dt$. O Teorema

do Limite Central é recuperado facilmente daqui desprezando o termo de ordem t^3

e percebendo que $f(z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\mu t - \frac{n\sigma^2 t^2}{2}} e^{-iz_n t} dt$ é transformada inversa de

Fourier da Gaussiana $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma) = \frac{e^{-\frac{(z_n - n\mu)^2}{2n\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi n}\sigma}$. Isso significa que a variável

$z_n = \sum_{i=1}^n x_i$ tende a uma distribuição normal centrada em $n\mu$ com variância $n\sigma^2$

(desvio padrão $\sigma\sqrt{n}$) e que a variável $\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ tende a uma distribuição

normal centrada em $\frac{n\mu}{n} = \mu$ e variância $\frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ (desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Agora vamos analisar a velocidade de convergência para a distribuição normal. Para facilitar, sem perda de generalidade, vamos supor que a variável x é

centrada de modo que $\mu = 0$ e trabalhar com $s_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{z_n}{\sigma\sqrt{n}}$, $dz_n = \sigma\sqrt{n} ds_n$

de modo que para $f_z(z_n) dz_n = f_z(z_n) \sigma\sqrt{n} ds_n = f_s(s_n) ds_n$ a densidade de probabilidade da variável s_n é dada por: $f_s(s_n) = \sigma\sqrt{n} f_z(\sigma\sqrt{n} s_n)$. Para $\mu = 0$:

$$f_z(z_n) \cong \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\sigma^2 t^2}{2}} e^{-\frac{im_3 t^3}{6}} e^{-iz_n t} dt,$$

então:

$$f_s(s_n) \cong \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\sigma^2 t^2}{2}} e^{-\frac{im_3 t^3}{6}} e^{-i\sigma\sqrt{n} s_n t} dt$$

Chamando $u = \sigma\sqrt{n} t \Rightarrow du = \sigma\sqrt{n} dt$ obtemos:

$$f_s(s_n) \cong \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i\frac{m_3 u^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}} e^{-is_n u} du.$$

Agora vamos analisar a velocidade da convergência da função distribuição

de probabilidade $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$ para a distribuição normal

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} ds$. A distribuição para n variáveis até terceira ordem é dada por:

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{im_3 u^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}} e^{-ius} du ds.$$

Por outro lado, usando a transformada de Fourier da distribuição normal:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-ius} du ds$$

Portanto a diferença entre as duas:

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{im_3 u^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}} e^{-ius} du ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-ius} du ds,$$

pode ser escrita como:

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x ds \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\frac{im_3 u^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}}} - 1) e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-ius} du.$$

Note que essa diferença vai a zero quando n tende a infinito devido ao

termo entre parênteses, $(e^0 - 1) = 0$. Assim, expandindo $e^{-\frac{im_3 u^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}}}$ em torno de 0:

$$e^{-\frac{im_3 u^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}}} = 1 - \frac{im_3 u^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} + \dots \text{ [como já desprezamos termos de ordens superiores a } u^3, \text{ considerar qualquer termo de ordem superior aqui é suspeito] e substituindo na}$$

integral acima:

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x ds \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-im_3 u^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2} - ius} du = \frac{-im_3}{12\sigma^3 \pi \sqrt{n}} \int_{-\infty}^x ds \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{u^2}{2} - ius} du$$

Por ora, vamos nos concentrar em $\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{u^2}{2} - ius} du$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{u^2}{2} - ius} du &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{1}{2}(u^2 + 2isu + s^2 - s^2)} du = e^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{1}{2}(u^2 + 2isu + s^2)} du = \\ e^{-\frac{s^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{1}{2}(u+is)^2} du \end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{u+is}{\sqrt{2}}$, de forma que $u = z\sqrt{2} - is$ e $du = dz\sqrt{2}$, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (z\sqrt{2}-is)^3 e^{-z^2} \sqrt{2} dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} (z^3\sqrt{2^3}-i6sz^2-3\sqrt{2}s^2z+is^3)e^{-z^2} \sqrt{2} dz = \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 e^{-z^2} dz - i6\sqrt{2}s \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz - 6s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2} dz + i\sqrt{2}s^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz \end{aligned}$$

Como z^3 e z são funções ímpares, $\int_{-\infty}^{+\infty} z^3 e^{-z^2} dz = 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2} dz = 0$.

Assim, ficamos com:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z\sqrt{2}-is)^3 e^{-z^2} \sqrt{2} dz = i\sqrt{2}s \left\{ s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz - 6 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz \right\}.$$

No capítulo 4, usando o truque da derivada, mostramos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \text{ e que } \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ logo:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z\sqrt{2}-is)^3 e^{-z^2} \sqrt{2} dz = i\sqrt{2}\pi s(s^2-3).$$

Substituindo na diferença das distribuições obtemos:

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{-im_3}{12\sigma^3\pi\sqrt{n}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} is\sqrt{2\pi}(s^2-3)ds = \frac{m_3}{6\sigma^3\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} (s^2-3)s ds$$

Mudando a variável para $u = \frac{s^2}{2}$ de forma que $du = sds$ a integral em s fica:

$$\frac{m_3}{6\sigma^3\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} (s^2-3)s ds = \frac{m_3}{6\sigma^3\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\frac{x^2}{2}} e^{-u} (2u-3) du$$

Por parte vemos que $\int ue^{-u} du = -ue^{-u} + \int e^{-u} du$ logo:

$$2 \int_{+\infty}^{\frac{x^2}{2}} u e^{-u} du - 3 \int_{+\infty}^{\frac{x^2}{2}} e^{-u} du = -2ue^{-u} \Big|_{+\infty}^{\frac{x^2}{2}} - \int_{+\infty}^{\frac{x^2}{2}} e^{-u} du = e^{-\frac{x^2}{2}} [1 - x^2].$$

Finalmente:

$$F_n(x) - \Phi(x) \cong \frac{m_3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (1 - x^2).$$

O que mostra que a velocidade de convergência depende de com $1/\sqrt{n}$ e da razão entre os momentos de terceira e segunda ordem na forma m_3/σ^3 . Berry-Esséen [William Feller; "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", vol II, pág. 542] colocaram um limite para essa diferença mostrando que $|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{3m_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} = \frac{3r}{\sqrt{n}}$.

Distribuições Estáveis

A partir do Teorema do Limite Central pode-se ficar com a falsa impressão de que apenas a distribuição normal interessa para distribuições advindas da soma de muitas variáveis idênticas e independentes. Dadas as condições do teorema, qualquer distribuição inicial da variável vai convergir para uma Gaussiana. Entretanto a condição fundamental do TLC foi a de que a variância da distribuição inicial existe e é finita. A distribuição de Cauchy, por exemplo, não satisfaz as condições desse teorema pois sua variância é infinita. A pergunta que se faz, nesse caso, é se podem existir distribuições estáveis no seguinte sentido. Se a variável segue uma classe de distribuição a soma de qualquer número delas segue a mesma classe de distribuição.

Para analisar que tipo de distribuições podem ser estáveis usamos o teorema da convolução, pois se a variável x segue uma distribuição com densidade de probabilidade $f(x)$ cuja função característica, ou transformada de

Fourier, é $\varphi(t)$, então a densidade de probabilidade $f(z_n)$ da soma de n dessas variáveis é dada por:

$$f(z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^n(t) e^{-iz_n t} dt .$$

A questão é saber se existem funções tais que n convoluções dela consigo própria continua sendo uma função de mesmo tipo. Denotando a função característica da $f(z_n)$ por $\psi_n(t)$ sabemos que $f(z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) e^{-iz_n t} dt$ logo $\psi_n(t) = \varphi^n(t)$. A condição para que $\psi_n(t)$ seja da mesma classe de funções que $\varphi(t)$ é que $\varphi^n(t)$ seja da mesma classe que $\varphi(t)$. Já encontramos duas dessas funções.

A primeira foi a Gaussiana cuja função característica é $\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, logo $\varphi^n(t) = e^{in\mu t - \frac{n\sigma^2 t^2}{2}}$ continua do mesmo tipo. A segunda foi a distribuição de Cauchy (Lorentziana) cuja função característica é $\varphi(t) = e^{-\gamma|t|}$, levando a função característica da convolução de n variáveis a ser $\varphi^n(t) = e^{-n\gamma|t|}$ também do mesmo tipo que a função inicial. Isso mostra que a soma de n variáveis idênticas que seguem uma distribuição de Cauchy jamais vai convergir para uma distribuição normal. Uma distribuição cuja função característica seja dada por $\varphi(t) = e^{-\gamma|t|^\alpha}$ com $\alpha > 0$ também é uma distribuição estável, pois $\varphi^n(t) = e^{-n\gamma|t|^\alpha}$. Note que $\alpha = 2$ corresponde ao caso da Gaussiana e que $\alpha = 1$ o da Lorentziana. Lèvy foi o primeiro a estudar a classe de distribuições estáveis e por isso elas se chamam hoje de distribuições de Lèvy.

As condições para que uma distribuição seja estável foram estabelecidas, sendo as funções do tipo $\varphi(t) = e^{-\gamma|t|^\alpha}$, o caso particular delas que têm média nula e são simétricas. Esses resultados estão descritos de forma rigorosa e, até certo ponto, didática por Eugene Lukacs; “Characteristic Functions”, página 128 em diante. Vamos nos restringir ao caso particular das distribuições simétricas e centradas.

Queremos saber qual o comportamento assintótico da densidade de probabilidades desse tipo de distribuição. Para tanto precisamos encontrar a transformada inversa da função característica:

$$f_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|^\alpha} e^{-ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|^\alpha} \cos xt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t^\alpha} \cos xt dt,$$

pelo fato de que $\varphi(t)$ é uma função par. Podemos então reescreve-la como:

$$f_L(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{\gamma t^\alpha} e^{-i|x|t} dt \right\},$$

e mudar a variável para:

$$z = i|x|t \Rightarrow t = \frac{z}{|x|i} = \frac{-iz}{|x|} = \frac{z}{|x|} e^{-i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow dt = -i \frac{dz}{|x|},$$

obtendo o resultado:

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} z^\alpha}{|x|^\alpha}} e^{-z} \frac{-i}{|x|} dz \right\} = \frac{1}{|x|\pi} \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma e^{\frac{i\alpha\pi}{2}} z^\alpha}{|x|^\alpha}} e^{-z} dz \right\}.$$

Para $x \rightarrow \infty$ o termo $e^{-\frac{\gamma}{2} \frac{i\alpha\pi}{|x|^\alpha} z^\alpha} \rightarrow e^0 = 1$. Assim podemos expandir em

série de Taylor-MacLaurin a exponencial $e^{-\frac{\gamma}{2} \frac{i\alpha\pi}{|x|^\alpha} z^\alpha}$ da forma:

$$e^{-\frac{\gamma}{2} \frac{i\alpha\pi}{|x|^\alpha} z^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k e^{-\frac{i\alpha\pi k}{2} z^\alpha}}{k! |x|^{\alpha k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k z^{\alpha k}}{k! |x|^{\alpha k}} \left[\cos \frac{\pi \alpha k}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\pi \alpha k}{2} \right].$$

Usando a função Γ definida como $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} z^{s-1} e^{-z} dz$ obtemos:

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \frac{1}{\pi x} \operatorname{Re} \left\{ -i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k \left[\cos \frac{\pi \alpha k}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\pi \alpha k}{2} \right]}{k! |x|^{\alpha k}} \int_0^{+\infty} z^{\alpha k + 1 - 1} e^{-z} dz \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi x} \operatorname{Re} \left\{ -i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k \cos \frac{\alpha \pi k}{2} \Gamma(\alpha k + 1)}{k! |x|^{\alpha k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k \operatorname{sen} \frac{\alpha \pi k}{2} \Gamma(\alpha k + 1)}{k! |x|^{\alpha k}} \right\} = \\ &= -\frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma^k \operatorname{sen} \frac{\alpha \pi k}{2} \Gamma(\alpha k + 1)}{|x|^{\alpha k}} \end{aligned}$$

O termo de ordem mais baixa, cujo k vale 1 ($k=1$) fornece o comportamento assintótico das Funções de Lévy:

$$f_L(x) = \frac{\gamma \operatorname{sen} \frac{\alpha \pi}{2} \Gamma(\alpha + 1)}{\pi |x|^{\alpha + 1}}.$$

Resta a pergunta sobre que valores α pode assumir para garantir que seja uma distribuição estável. Como vimos uma distribuição estável centrada não gaussiana deve, necessariamente, ter variância infinita, pois se $V(x)$ for finita, a

função converge para uma gaussiana. Então, $V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ tem que

divergir. Percebe-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\alpha+1}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{1-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha+1}}{1-\alpha+1} = \frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}$ diverge para

$2 - \alpha > 0$ ou $\alpha < 2$. Logo $0 \leq \alpha \leq 2$ é o intervalo de possibilidades para α .

Conclusão

O objetivo desse trabalho foi mostrar a base matemática que permite acompanhar os resultados da elaboração de modelos como o Black & Scholes, sacrificando sempre o rigor teórico e a formalidade em benefício da instrução, do entendimento, da aplicabilidade e da operacionalidade dos conceitos. Esperamos que mesmo um leitor que não esteja familiarizado com os conceitos de Transformadas de Fourier, Teorema da Convolução, Distribuições Estáveis, Movimentos Brownianos, Função Geradora de Momentos, entre outros, consiga acompanhar o texto a partir de conhecimentos básicos de cálculo. Por isso, estruturamos os capítulos na ordem vista. Dessa forma concluímos que as distribuições de Lévy simétricas e centradas seguem uma distribuição que cai assintoticamente com x^{-q} , ($0 < q < 3$).

A mensagem final dessa monografia, portanto, é que deve-se ficar atento sobre a possibilidade de um fenômeno natural, ou social, seguir uma distribuição de Lévy. As características principais dessas distribuições são variâncias infinitas e uma lei de potência do tipo x^{-q} . Disse-se que as distribuições com variância infinita apresentam ubiquidade, que significa estar em todo lugar, e a ubiquidade tem sido observada. Uma famosa distribuição estável não gaussiana é a distribuição de renda que segue uma distribuição de Pareto. Consideramos, assim, que cumprimos nosso objetivo de apresentar de forma didática a matemática necessária para que um leitor familiarizado apenas com cálculo II possa acompanhar as contribuições advindas do campo de estudos denominado por Econofísica.

Bibliografia

Mantegna, Rosario & Stanley, Eugene. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. Cambridge University Press. Cambridge, 2000.

Lukacs, Eugene. Characteristic Functions. Charles Griffin & Company Limited. Washington, 1970.

Ruud, Paul. An Introduction to Classical Econometric Theory. Oxford University Press. Berkeley, 2000.

Feller, William. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. John Wiley & Sons, Inc. Nova Iorque, 1971.

Boyce, William & DiPrima, Richard. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. John Wiley & Sons, Inc.

Stewart, James. Cálculo Volume 2. Ed. Pioneira – Thompson Learning. 2001.

Sneddon, Ian. Fourier Transform. McGraw – Hill Book Company, Inc. Glasgow, 1951.

Bussab, Wilton & Morettin, Pedro. Estatística Básica. Ed. Atual. São Paulo, 1987.