Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Economia

Monografia

Os fundamentos teóricos do *hedging finance* *e sua aplicação nos mercados futuros e de opções no Brasil*

Fernando Antonio Slaibe Postali
RA: 930170

Orientadora: Profª. Drª. Maria Carolina Leme

Banca: Prof. José Maria da Silveira

Dezembro de 1996

Agradecimentos

Em primeiro lugar, à minha orientadora, Profª Carolina Leme, não só pela paciência e atenção, mas também pela oportunidade que tive de aprender novos conceitos enquanto fui monitor em seus cursos de Matemática e Microeconomia ministrados na Unicamp, cujo instrumental me foi extremamente útil para a realização deste trabalho.

Ao professor Tomás (FGV/SP), pelo material de apoio fornecido, que contribuiu de modo fundamental para o término desta monografia; ao prof. José Maria da Silveira, pelas valiosas sugestões apresentadas e pelo incentivo.

Aos professores Maurício Coutinho, Ângela Kageyama e Flávio Rabelo, com os quais também exerci o trabalho de monitor, fundamental para meu aprendizado quanto a vários conceitos aqui utilizados.

Ao pessoal do SPD (em especial Marli), da biblioteca e da Secretaria de Graduação.

A todos os amigos de faculdade, em especial Priscila, Reginaldo, Raquel e Cristiane, pelo apoio e solidariedade.

Esta monografia foi desenvolvida com o auxílio de Bolsa de Iniciação Científica da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP.

Índice

Índice de tabelas

Índice de gráficos

Introdução

O objetivo deste trabalho é estabelecer uma relação entre as estratégias de minimização de risco levadas avante nos modernos mercados financeiros e a teoria da escolha sob incerteza, bem como estudar os mercados de ativos de risco em um plano teórico.

As perspectivas de instabilidade no cenário macroeconômico mundial, decorrentes da desregulamentação financeira que se seguiu ao desmoronamento do sistema de Bretton Woods estimularam os mercados financeiros a desenvolverem produtos que assegurassem aos agentes um menor grau de incerteza quanto aos retornos de seus investimentos. Tais produtos são os **derivativos**, ou seja, contratos derivados de outros ativos ou de variáveis macroeconômicas, como taxa de juro e taxa de câmbio.

O nosso estudo se concentra em uma parcela específica de tais contratos: os mercados futuros e de opções, nos quais agentes econômicos desenvolvem estratégias destinadas a assegurar o valor de seu portfólio ou o retorno de determinadas operações comerciais ou financeiras. Os indivíduos que se comportam desta maneira são denominados *hedgers*, e diferem dos especuladores por visarem não o lucro, mas fixar um resultado adequado para suas operações de investimento.

Ao estabelecermos um paralelo com as teorias da escolha sob incerteza e dos mercados de ativos de risco, descobrimos que os *hedgers* que atuam no mercado financeiro contemporâneo possuem o perfil do agente avesso ao risco caracterizado pela microeconomia, de modo que o *hedge* representa um fator de vital importância para a tomada de decisão pelos agentes econômicos.

No primeiro capítulo, faremos uma recuperação teórica dos tópicos relevantes da teoria da escolha sob incerteza, como função de utilidade esperada e aversão ao risco ; no capítulo 2, estudaremos a teoria dos mercados de ativos de risco e abordaremos modelos clássicos de administração de portfólios; no capítulo 3, descreveremos estratégias de *hedge* mercados futuros contemporâneos; no capítulo 4, estudaremos as estratégias básicas de minimização de riscos nos mercados de opções; por fim, no quinto capítulo, analisaremos dados sobre contratos derivativos no Brasil.

Devemos ressaltar que, embora o instrumental matemático tenha sido usado em muitas passagens, não temos a pretensão de desenvolver e propor modelos de abordagem do mercado financeiro, mas apenas de realizar um estudo da teoria clássica da minimização de riscos, com vistas a descobrir os fundamentos microeconômicos do "*hedging finance*".

Capítulo I

A teoria da escolha sob incerteza

A incerteza é um fator inerente aos fatos econômicos, o que sempre obrigou os indivíduos a tomarem decisões sem saber com exatidão o resultado das mesmas. Apesar disto, apenas depois da Segunda Guerra Mundial os economistas procuraram desenvolver teorias que procurassem explicar a ação dos agentes em situações incertas. Tais abordagens teóricas serviram, posteriormente, para o estudo de mercados de ativos de risco, com o objetivo de fornecer aos seus participantes um instrumento de orientação para suas decisões de investir. Neste sentido, para podermos compreender as estratégias contemporâneas de minimização de riscos no mercado financeiro, precisamos realizar um estudo dos seus fundamentos microeconômicos.

Antes de prosseguirmos com os aspectos relevantes da mencionada teoria, precisamos estabelecer duas distinções conceituais: a primeira delas refere-se à diferença entre *economia de incerteza* e *economia de informação:* na visão de Hirshleifer & Riley (1992), economia de incerteza refere-se à adaptação de cada indivíduo ao seu estado limitado de informações e a partir daí, a escolha da melhor atitude possível. Na economia de informação, por sua vez, cada agente procura superar sua ignorância através da obtenção de informações adicionais no intuito de decidir a melhor ação; a outra distinção fundamental é entre *incerteza de mercado* e *evento incerto:* a incerteza de mercado está associada ao fato de os agentes ignorarem informações quanto a determinadas variáveis próprias do sistema econômicos, tais quais preços, estoques, demanda, etc., ao passo que evento incerto refere-se, basicamente, ao risco de acontecimentos exógenos ao funcionamento do mercado, como quebra de safra diante de fatores climáticos adversos.

O nosso estudo englobará apenas a *economia de incerteza* e os *eventos incertos*. Isso significa que não estaremos preocupado com a possibilidade de os agentes investirem recursos na obtenção de informações privilegiadas e, neste sentido, assumiremos a *hipótese dos mercados eficientes*, segundo a qual os preços refletem plenamente as informações disponíveis, ou seja, os investidores não podem usufruir de lucros anormais com base no conjunto de informações existente.

O presente capítulo está dividido em quatro sub-itens: no primeiro item, estabeleceremos hipóteses a respeito do comportamento do consumidor diante de eventos incertos, como loterias; no item 1.2, derivaremos a função de utilidade dos indivíduos quando se defrontam com tais situações; no item 1.3, caracterizaremos o conceito de aversão ao risco; finalmente no item 1.4 derivaremos teoremas de risco e analisaremos suas conseqüências para as decisões de investir dos agentes.

1.1. Loterias, prospectos e função de conseqüência:

Por se tratarem de situações que envolvem eventos puramente aleatórios, as loterias constituem um exemplo bastante útil para estudar o comportamento do consumidor diante do risco. Isso significa que o conjunto de escolhas com que o agente se defronta assume a forma de *loteria*, isto é, possibilidade de dois ou mais resultados de um evento, a cada um dos quais podemos associar uma probabilidade. Em outras palavras, o conjunto de resultados futuros possíveis de um evento pode ser considerado uma variável aleatória.

Em termos mais amplos, um indivíduo que se defronta com uma situação de incerteza levará em consideração os seguintes elementos para tomar sua decisão:

a) Um conjunto de ações (1,...,x,...,X) possíveis para ele;

b) Um conjunto de estados da Natureza (1,...,s,...S) possíveis;

c) Uma função de conseqüência c(x,s), que descreve a combinação de todos os resultados possíveis entre ação e estado da Natureza; e

d) Uma função de probabilidade $\pi(s)$, associada a cada estado; e

e) Uma função elementar de utilidade v(c) da conseqüência, medido o grau de desejabilidade dos diferentes resultados possíveis para o indivíduo.

Antes de prosseguirmos, precisamos fazer algumas considerações sobre a distinção entre probabilidade *objetiva* e probabilidade *subjetiva*. Entende-se por probabilidade objetiva aquela baseada em estimações empíricas da freqüência dos resultados como, por exemplo, a probabilidade de extrair a face nº 5 no lançamento de um dado. No que se refere a eventos econômicos, por outro lado, nem sempre é possível estimar de modo objetivo a probabilidade associada a cada resultado, de modo que deve-se lançar mão, na maioria das vezes, do conceito de probabilidade subjetiva, isto é, baseada no "grau de confiança" do indivíduo quanto à determinado acontecimento[1]. Doravante neste trabalho, não faremos menção a esta distinção e, sempre que nos referirmos a probabilidade, estaremos utilizando o conceito subjetivo, ou seja, as probabilidades associadas a cada estado dependem das crenças do agente quanto à possibilidade de seu acontecimento.

---

[1]Esta discussão está diretamente associada à distinção entre risco e incerteza. Entende-se por risco à possibilidade de quantificação probabilística de determinados eventos incertos, ao passo que incerteza está associada mais fortemente aos riscos não quantificáveis. Muitos autores, como Frank H. Knight, estabelecem tal distinção, mas, neste trabalho, trataremos risco e incerteza como sinônimos.

A partir das considerações acima sobre o problema da escolha sob risco, podemos definir o conceito de utilidade esperada. O nosso ponto de partida será a análise da função de conseqüência, isto é, aquela que descreve todos os resultados possíveis da combinação atitude-estado da Natureza, como, por exemplo, as possíveis conseqüências de sair de casa em um dia nublado sem levar o guarda-chuva: ficar molhado, chegar atrasado no trabalho, etc. Para os nossos propósitos, a função de conseqüência irá descrever os possíveis resultados monetários (renda do indivíduo) decorrentes da combinação ação-estado, ou seja, a renda do indivíduo irá variar de acordo com o estado de Natureza.

A escolha sob incerteza envolve sempre a existência de um prospecto, isto é, o conjunto que descreve todas as conseqüências possíveis de uma determinada ação. Em termos matemáticos, tem-se:

$$C_x = (c_{x1}, c_{x2}, \ldots, c_{xs} ; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s)$$

onde C_x define o conjunto de conseqüências possíveis da ação x e suas respectivas probabilidades π_s, tal que $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$. É importante ressaltar que cada um dos estados da Natureza são mutuamente exclusivos, de modo que, para nossos propósitos, não existe a possibilidade de combinar estados de modo a produzir outros resultados.

A derivação da função de Utilidade Esperada exige a conceituação de alguns axiomas referentes à estrutura das preferências do consumidor. São três axiomas que estabelecem, em linhas gerais, hipóteses sobre a *ordenação*, *continuidade* e *independência* das preferências:

1) *Axioma da Ordenação Completa*: Se A > B e B > C, então A > C; por outro lado, se A ~ B e B ~ C, então A ~ C.[2] Tal axioma estabelece um critério de consistência para as preferências dos agentes, de modo que estes sabem ordená-las claramente.

2) *Axioma da Continuidade*: Suponha que A > B e B > C. Existe uma probabilidade π ($0<\pi<1$) tal que o agente é indiferente entre obter B com certeza e uma loteria composta por A e C com probabilidades π e $1-\pi$ respectivamente. Em termos matemáticos, tem-se que:

$\exists\pi$, $\pi \subset [0,1]$, tal que $B \sim (A,C,\pi,1-\pi)$, onde este último representa o prospecto da mencionada loteria.

3) *Axioma da Independência*: Seja A ~ B e C um resultado qualquer. Sejam L_1 e L_2 prospectos, tais que:

$L_1 = (\pi,1-\pi,A,C)$ e $L_2 = (\pi,1-\pi,B,C)$. Então, $L_1 \sim L_2$.

Em palavras, o axioma da independência estabelece que o consumidor é indiferente entre duas loterias com distribuições de probabilidades iguais, desde que também seja indiferente entre as cestas oferecidas por ambas as loterias. Este axioma é importante para a definição da hipótese da Utilidade estado-independente, à qual faremos menção posteriormente.

Existem, ainda, outros dois axiomas que constituem desdobramentos daqueles acima mencionados. São eles:

4) *Axioma da Probabilidade Desigual*: Sejam A > B e $L_1 = (\pi_1,1-\pi_1,A,B)$ e $L_2 = (\pi_2,1-\pi_2,A,B)$ duas loterias. Um consumidor irá preferir L_1 à L_2 se e somente se $\pi_1 > \pi_2$.

[2] Este axioma também é conhecido como Princípio da Transitividade Completa. Os símbolos >, < e ~ indicam, respectivamente, "preferível à", "inferior à" (em termos de preferência) e "indiferente à". As letras maiúsculas A, B e C representam cestas de consumo.

5) *Axioma da Loteria Composta*: Sejam $L_1=(\pi_1,1-\pi_1,A,B)$ e $L_2=(\pi_2,1-\pi_2,L_3,L_4)$, onde $L_3=(\pi_3,1-\pi_3,A,B)$ e $L_4=(\pi_4,1-\pi_4,A,B)$. Se $L_2 \sim L_1$, então:

$$\pi_1 = \pi_2\pi_3 + (1-\pi_2)\pi_4$$

Este último axioma não é tão evidente e pode ser compreendido quanto se tem em mente a teoria das probabilidades. Dado L_2, a probabilidade de obter L_3 é π_2; conseqüentemente, a probabilidade de se obter A através de L_2 é $\pi_2\pi_3$. Similarmente, a probabilidade de obter L_4 é $1-\pi_2$ e a probabilidade de obter A através de L_4 é $(1-\pi_2)\pi_4$.

A importância dos axiomas acima descritos reside na exclusão de determinados comportamentos incompatíveis com o Princípio da Utilidade Esperada (como a propensão ao risco, por exemplo); não entraremos na discussão a respeito da validade de tais hipóteses, bem como das conseqüências da eliminação de algumas delas[3].Partiremos do suposto de que tais axiomas são válidos para as preferências dos indivíduos.

1.2. A função de Utilidade Esperada:

Von Neumann e Morgenstern (1947, 1953) contribuíram de modo fundamental para a teoria da escolha sob incerteza ao desenvolverem o Teorema de Utilidade Esperada, cujo enunciado pode ser assim formulado: *Se os axiomas relativos às preferências dos consumidores forem satisfeitos, existe uma função de Utilidade Esperada U(x), definida no conjunto de resultados possíveis C_x tal que:*

$$U(x) = \pi_1 v(c_{x1}) + \pi_2 v(c_{x2}) + \ldots + \pi_S v(c_{xS}) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s v(c_{xs}) \quad (1.1)$$

[3]Para uma discussão a respeito, veja-se Sugden(1987), pp. 5 a 7.

A demonstração do teorema será feita para dois estados x e y, ou seja, queremos provar que, respeitados os axiomas acima, existe uma função u que satisfaz a propriedade da utilidade esperada:

$$u(px + (1-p)y) = pu(x) + (1-p)u(y)$$

Define-se, em primeiro lugar, as utilidades do melhor (b) e do pior (w) estado possível, tais que u(b) = 1 e u(w) = 0. Para encontrar a utilidade de uma loteria arbitrária z, definimos também $u(z) = p_z$, onde p_z é definido por:

$$p_z b + (1-p_z)w \sim z \qquad (1.2)$$

De acordo com a relação acima, o consumidor é indiferente entre z e uma loteria entre o melhor (com probabilidade p_z) e o pior resultado. Para assegurarmos de que a relação está bem definida, devemos checar duas questões:

a) p_z existe? Os *sets* $\{p \subset [0,1]: pb + (1-p)w \geq z\}$ e $\{p \subset [0,1]: z \geq pb + (1-p)w\}$ são fechados e não vazios e todos os pontos entre 0 e 1 estão em um ou outro intervalo. Já que ambos os intervalos unitários se interceptam, deve haver um p nos dois intervalos, que é justamente o desejado p_z.

b) p_z é único? Suponha que p_z e p_z' sejam dois números distintos que satisfazem $p_z b + (1-p_z)w \sim z$. Um deve ser maior que o outro. Uma loteria que possui certa probabilidade de pagar determinado prêmio não deve ter o mesmo valor esperado de uma loteria que possui uma probabilidade maior de pagar a mesma quantia. Assim, p_z é único.

Para checarmos que u possui a propriedade da utilidade esperada, devemos realizar algumas substituições:

$$px + (1-p)y =$$

Usando a relação (1.2):

$$= p[p_x b + (1-p_x)w] + (1-p)[p_y b + (1-p_y)w] =$$

$$= [pp_x + (1-p)p_y]b + [1-pp_x-(1-p)p_y]w =$$

$$= [pu(x) + (1-p)u(y)]b + [1-pu(x)-(1-p)u(y)]w.$$

Aplicando a construção da Utilidade esperada:

$$u(px + (1-p)y) = [pu(x) + (1-p)u(y)]u(b) + [1-pu(x)-(1-p)u(y)]u(w)$$

Dado que $u(b) = 1$ e $u(w) = 0$:

$$u(px + (1-p)y) = pu(x) + (1-p)u(y).$$

Finalmente, verificamos que u é uma função de utilidade. Suponhamos que x seja preferível a y ($x > y$). Então:

$$u(x) = p_x \text{ tal que } x \sim p_x b + (1-p_x)w$$

$$u(y) = p_y \text{ tal que } y \sim p_y b + (1-p_y)w$$

Pelo axioma da Probabilidade Desigual, devemos ter que $u(x) > u(y)$, o que demonstra o teorema.

Em palavras, a equação (1.1) afirma que a utilidade esperada de uma ação x é a média ponderada das utilidades de cada conseqüência c_{xs} possível (c_{xs} representa a conseqüência de se ter tomado a decisão *x* caso o estado *s* ocorra). Vale ressaltar que é importante distinguir entre v(c) e U(x): a primeira representa a utilidade de uma determinada conseqüência *ex post* ao passo que a segunda simboliza a utilidade esperada *ex ante*, ou seja, diante da incerteza sobre o resultado futuro.

Conforme a afirmação do início deste capítulo, os agentes econômicos são obrigados a tomar suas decisões em contextos de incerteza, ou seja, eles nunca sabem ao certo qual será o resultado de sua ação. A Função de Utilidade Esperada (FUE), neste sentido, nos fornece um critério de orientação para o comportamento dos indivíduos em situações de risco, na medida em que se supõe que o agente racional procura maximizar a utilidade esperada de sua decisão, isto é, a conduta individual para lidar com o risco terá, como base, a maximização da FUE.

Algumas qualificações devem ser feitas a respeito da estrutura da mencionada função. Em primeiro lugar, partiremos da hipótese de que a FUE seja monotônica positiva, isto é, níveis maiores de riqueza esperada[4]representam níveis maiores de utilidade esperada. Em termos matemáticos, temos que para $W_1 > W_2$, $E[U(W_1)] > E[U(W_2)]$, ou seja, a função é crescente. Em segundo lugar, a função é côncava em relação à origem, isto é, cresce a taxas decrescentes. Matematicamente, temos que $U'(W) > 0$ e $U''(W) < 0$[5]. Tal suposição será de vital importância para a caracterização da aversão ao risco, que será feita posteriormente.

Outra propriedade importante da mencionada função é sua unicidade, isto é, se U(.) é uma FUE, então V(.) = aU(.) + b (a > 0) também será. Suponha que $U(\pi W_1 + (1-\pi)W_2) = \pi v(W_1) + (1-\pi)v(W_2)$ seja uma função de utilidade esperada sujeita a uma transformação linear $V = aU + b$, tal que $a > 0$. Tem-se que:

$$V[\pi W_1 + (1-\pi)W_2] = aU(\pi W_1 + (1-\pi)W_2) + b =$$

$$= a[\pi v(W_1) + (1-\pi)v(W_2)] + b =$$

$$= \pi[av(W_1) + b] + (1-\pi)[av(W_2) + b] =$$

$$= \pi v^*(W_1) + (1-\pi)v^*(W_2)\text{ , onde } v^* = av + b\text{, tal que } a > 0.$$

Um tipo especial de função de utilidade esperada é a *média-variância*, isto é, função de utilidade expressa inteiramente em função dos parâmetros da distribuição. Dado que os estados possíveis com que se encontram os agentes podem ser caracterizados como uma variável aleatória de distribuição normal, a função média-variância constitui um mecanismo útil de análise do comportamento do agente, já que simplifica os estados da natureza. Mas tal hipótese nos remete

[4]Conforme dito anteriormente, os resultados das loterias serão representados por quantias monetárias.
[5]As expressões U'(.) e U''(.) significam, respectivamente, a primeira e segunda derivadas.

à questão de quando é válida tal aproximação, isto é, expressar a utilidade esperada do agente como função apenas da média e da variância.

Partimos da idéia de que os possíveis estados da natureza constituem uma variável aleatória $\tilde{c}$, tal que $E(\tilde{c}) = \mu$. A função de utilidade $U(\tilde{c})$ pode ser expandida em uma série de Taylor em torno de seu valor esperado μ:

$$v(\tilde{c}) = v(\mu) + \frac{v'(\mu)(\tilde{c}-\mu)}{1!} + \frac{v''(\mu)(\tilde{c}-\mu)^2}{2!} + \frac{v'''(\mu)(\tilde{c}-\mu)^3}{3!} + \ldots$$

Como $U = E(v(\tilde{c}))$, $E(\tilde{c}-\mu) = 0$ e $E(\tilde{c}-\mu)^2 = \sigma^2(\tilde{c})$ (variância), temos:

$$U = v(\mu) + v''(\mu)\frac{\sigma^2}{2} + \frac{v'''(\mu)E(\tilde{c}-\mu)^3}{3!} + \ldots$$

A utilidade média-variância baseia-se em algumas hipóteses sobre as propriedades da escala de preferências de v(c) e propriedades sobre a distribuição de c. Se v(c) for quadrática, v'''(c) = 0, o que nos permite omitir os termos a partir da terceira ordem da expansão de Taylor. Isto está associado à hipótese de que $\tilde{c}$ é uma variável aleatória de distribuição normal, com média μ e variância σ^2. Apesar de tais limitações[6], a utilidade média-variância facilita a análise de problemas de portfólio, de modo que voltaremos a ela no próximo capítulo.

Por fim, devemos fazer algumas considerações a respeito da hipótese da independência-estado da FUE. Ao definirmos acima a referida função, partimos do suposto de que as utilidades das conseqüências v(c) são independentes dos estados. Em outras palavras, elas não se alteram conforme os a ocorrência dos estados. Caso isso ocorra, devemos redefinir a Função de Utilidade Esperada da seguinte forma:

---

[6]Se lembrarmos do Teorema do Limite Central, perceberemos que a aproximação média-variância não é tão grosseira quanto alguns poderiam imaginar. Para maiores informações, consultar um livro de estatística.

$$U(X) = \pi_1 v_1(c_{x1}) + \pi_2 v_2(c_{x2}) + \ldots + \pi_S v_S(c_{xS}) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s v_s(c_{xs}) \quad (1.3)$$

A equação (1.3) mostra que as funções de utilidade dos resultados $v(c_{xs})$ tornam-se dependentes do estado da natureza. Se isso ocorrer, a análise se torna complicada, já que deve-se levar em conta que os agentes têm suas preferências alteradas de acordo com a situação. No entanto, as conclusões gerais da análise que iremos desenvolver não ficam comprometidas se supusermos que as funções de utilidade são estado-independentes, de modo que partiremos desta hipótese no decorrer deste trabalho.[7]

Feitas as merecidas qualificações a respeito da função de utilidade esperada, podemos agora estabelecer o conceito de aversão ao risco, diretamente associado à estrutura das preferências do consumidor diante de eventos incertos.

1.3. Aversão ao risco:

O estudo de estratégias de *hedge* tem como fundamento a idéia de que os indivíduos procuram evitar situações que envolvem risco. Em outras palavras, os agentes econômicos de um modo geral são avessos à situações incertas, ou seja, estão dispostos a abrir mão de certa quantia monetária a fim de excluírem a possibilidade de resultados arriscados em suas decisões de investir. Neste sentido, o estudo do conceito de *aversão ao risco* é fundamental para que possamos compreender a natureza teórica do comportamento dos agentes em mercados de eliminação de risco, como futuros e opções.

[7]Para uma discussão mais profunda sobre o tema, ver Hirshleifer & Riley (1992), pp. 60 a 69.

Dizemos que um consumidor é avesso ao risco quando ele não aceita participar de um jogo, ainda que justo, preferindo o resultado certo ao esperado. Na definição de McKenna (1986):

Um indivíduo é avesso ao risco quando a utilidade do resultado esperado de uma loteria é maior que a utilidade esperada da loteria.[8]

O gráfico (1.A) mostra a utilidade de um agente avesso ao risco como função de sua riqueza. Conforme relatado anteriormente, a função de utilidade é convexa na origem, ou seja, cresce a taxas decrescentes(u"(W) < 0). Isso significa que a utilidade da renda certa é sempre maior que a utilidade esperada de uma aposta que possua o mesmo ganho esperado.

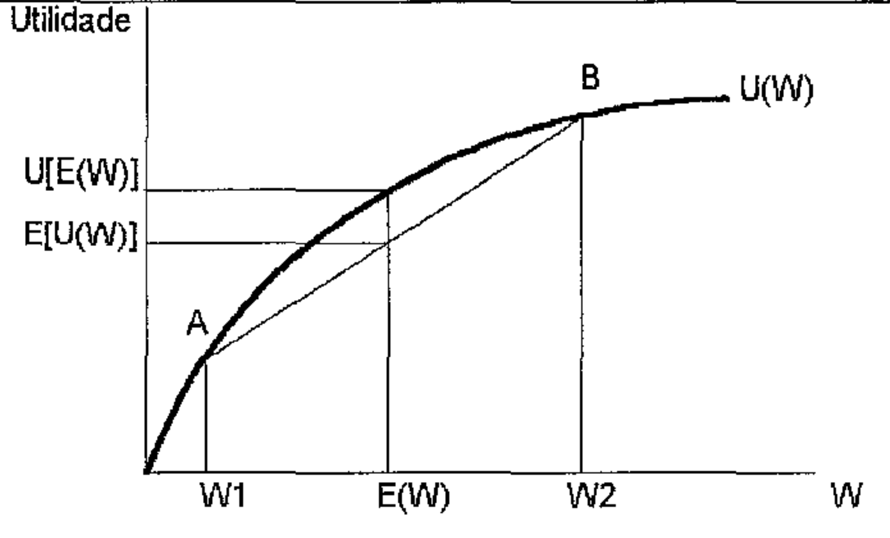


Gráfico (1.A): Utilidade esperada de um agente avesso ao risco, como função de seu nível de riqueza.

Geometricamente, podemos perceber pelo gráfico acima que a utilidade esperada da situação incerta (representada geometricamente pela combinação

[8]McKenna (1986), p. 35, tradução livre.

linear dos pontos A e B) é sempre inferior à utilidade de um equivalente certo. A compreensão da situação gráfica nos possibilita definir matematicamente o conceito de aversão ao risco como:

$$E[U(W)] < U[E(W)] \qquad (1.3)$$

A expressão (1.3) é também chamada de desigualdade de Jensen e descreve matematicamente o comportamento do agente risco-avesso, implicando, necessariamente, na convexidade da curva de utilidade, conforme pode ser vizualizado no gráfico (1.A).

É possivel provar também que curvas de indiferença convexas para funções de Utilidade Esperada implicam na existência de funções de utilidade-riqueza côncavas. Dada uma curva de indiferença da Utilidade Von Neumann-Morgenstern:

$$\pi_1 u(W_1) + \pi_2 u(W_2(W_1)) = U^*$$

diferenciamos com respeito a W_1 e W_2 para obtermos as condições de tangência:

$$\pi_1 u'(W_1)dW_1 + \pi_2 u'(W_2(W_1))\frac{dW_2}{dW_1}dW_1 = 0$$

$$\frac{dW_2}{dW_1} = -\frac{\pi_1 u'(W_1)}{\pi_2 u'(W_2)}$$

Para que as curvas de indiferença sejam convexas, devemos ter que:

$$\frac{d^2W_2}{dW_1^2} = \frac{-\pi_1 u''(W_1)(\pi_2 u'(W_2))^2 + \pi_2 u''(W_2)(\pi_1 u'(W_1))^2}{(\pi_2 u'(W_2))^3} > 0$$

Se $W_1 = W_2 = W$:

$$\frac{d^2W_2}{dW_1^2} = \frac{\pi_1\pi_2(\pi_1+\pi_2)u''(W)u'(W)^2}{(\pi_2 u'(W))^3} = -\frac{\pi_1 u''(W)}{\pi_2^2 u'(W)} > 0$$

O que implica em u"(W)<0. Esta é a condição matemática para a caracterização de um agente como avesso ao risco, ou seja, a utilidade marginal da renda é decrescente; em palavras, os indivíduos avessos ao risco são mais sensíveis à perda de riqueza do que ao ganho, o que pode ser também concluído pela observação do gráfico 1.1.

Analogamente à situação de aversão ao risco, podemos definir duas outras situações (menos comuns): a propensão e a neutralidade ao risco. Um indivíduo é dito propenso ao risco quando sua utilidade marginal da riqueza é crescente, isto é, valoriza mais as unidades adicionais de renda do que sua perda (seria o caso do jogador incorrigível); a neutralidade por sua vez, implica que o agente é indiferente entre participar ou não de situações incertas.

A tabela abaixo resume as condições matemáticas para cada um dos três comportamentos mencionados.

Tabela 1. 1: Desigualdade de Jensen e aversão ao risco

Comportamento	(Des)Igualdade	u"(W)	Utilidade marginal da riqueza
avesso ao risco	E[U(W)] < U[E(W)]	u"(W) < 0	decrescente
neutro ao risco	E[U(W)] = U[E(W)]	u"(W) = 0	constante
propenso ao risco	E[U(W)] > U[E(W)]	u"(W) > 0	crescente

Como o nosso objeto de estudo são os *hedgers*, apenas a situação de aversão nos interessa mais diretamente.

A partir das funções de utilidade esperada do agente, podemos derivar algumas medidas de aversão ao risco. Trata-se de encontrar uma relação que procure comparar o grau de intolerância ao risco entre os indivíduos.

Intuitivamente, quanto mais côncava a função de utilidade esperada, maior a aversão, o que nos permite utilizar a segunda derivada como instrumento de mensuração de tal ojeriza ao risco. Foi o que fizeram Arrow e Pratt ao construírem a *medida de aversão ao risco absoluto*, definida como:

$$r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = -\frac{d\ln u'(W)}{dW} \qquad (1.4)$$

Uma outra análise procura descrever o *conjunto* de aceitação de risco do indivíduo. Representemos um jogo por um par de números (x_1,x_2), tal que o consumidor recebe x_1 se um evento E ocorre e x_2 se ocorrer não-E. Definimos, a partir daí, o *set* de aceitação como o conjunto de todas as loterias aceitáveis com o nível inicial de riqueza W. Os consumidores avessos ao risco possuem *sets* convexos e o lugar geométrico de tais *sets* (o conjunto de loterias indiferentes) pode ser dado por uma função $x_2(x_1)$, como no gráfico (1.B).

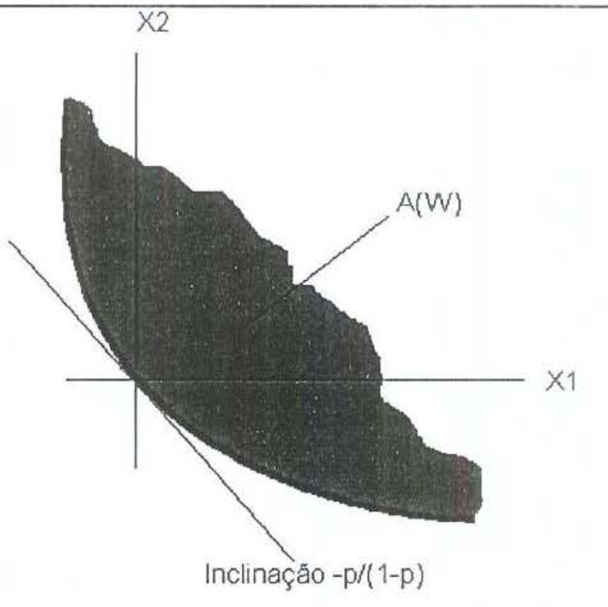


Gráfico (1.B): Este *set* descreve todas as apostas que seriam aceitas pelo consumidor, ao seu nível inicial de riqueza. Se o agente possui aversão ao risco, o *set* de aceitação será convexo.

Suponha que o comportamento do consumidor possa ser descrito pela maximização da utilidade esperada. Então, $x_2(x_1)$ deve satisfazer a identidade:

$$pu(W+x_1) + (1-p)u(W+x_2(x_1)) \equiv U(W).$$

A inclinação da curva do *set* de aceitação no ponto (0,0) pode ser encontrado diferenciando a identidade com respeito a x_1, para $x_1 = 0$:

$$pu'(W) + (1-p)u'(W)x'_2(0) = 0 \quad (1.5)$$

Portanto:

$$x_2' = -\frac{p}{1-p}$$

A análise acima nos permite comparar o grau de aversão ao risco de dois agentes: quanto mais risco-avesso um agente, menor o seu conjunto de loterias aceitáveis e, conseqüentemente, maior a "curvatura" da curva que representa seu set de aceitação. Tal "curvatura" pode ser checada pela segunda derivada da função $x_2(x_1)$. Diferenciando a expressão (1.5) com respeito a x_1, tal que $x_1 = 0$:

$$pu''(W) + (1-p)u''(W)x'_2(0)\, x'_2(0) + (1-p)u'(W)x_2''(0) = 0.$$

Dado que $x'_2(0) = -p/(1-p)$, temos:

$$x_2''(0) = \frac{p}{(1-p)^2}\left[-\frac{u''(W)}{u'(W)}\right]$$

Esta expressão é proporcional à medida de Arrow-Pratt de aversão ao risco absoluto. Assim, podemos concluir que quanto mais avesso ao risco um indivíduo (maior Arrow-Pratt em módulo), mais fechado é seu set de aceitação.

Até agora, analisamos a idéia de aversão ao risco *local*, isto é, caracterizamos o set de aceitação do indivíduo a partir de um determinado nível de riqueza. No entanto, muitas vezes, estamos interessados em comparar dois agentes no tocante às suas preferências por risco para qualquer nível de riqueza, o que nos remete ao conceito de aversão ao risco *global*. Tal condição pode ser expressa através de três maneiras.

A primeira delas constitui uma aplicação da medida de Arrow-Pratt. Em termos formais, dizemos que um agente com função de utilidade A(W) é mais avesso ao risco que um outro agente de utilidade B(W) se:

$$-\frac{A''(W)}{A'(W)} > -\frac{B''(W)}{B'(W)}$$

para qualquer nível de riqueza W. Tal condição nos diz simplesmente que o indivíduo A possui mais ojeriza ao risco que o agente B.

Uma outra maneira de caracterizar a aversão ao risco global é fazer referência à concavidade da função de utilidade esperada do agente: dizemos que um agente A é mais avesso ao risco que um agente B se sua função de utilidade for mais côncava que a de B. Em termos matemáticos, dizemos que a função de utilidade de A é uma transformação côncava da do agente B, ou seja, existe uma função G(.) crescente e estritamente côncava, tal que:

$$A(W) = G(B(W)).$$

Uma terceira maneira de se apreender a idéia de que o agente A é mais risco avesso que o agente B é afirmando que A está disposto a pagar uma quantia maior que B para evitar o risco. Em outras palavras, o *prêmio de risco* é o montante que um agente está disposto a abrir mão de modo a manter sua renda constante em qualquer estado e, desta maneira, evitar a incerteza quanto a sua riqueza (seguros, por exemplo). Para formalizarmos esta idéia, seja $\tilde{\varepsilon}$ uma variável aleatória, tal que $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$. Então definimos $\pi_a(\tilde{\varepsilon})$ como sendo o máximo montante de riqueza de que o agente está disposto a abrir mão para evitar se deparar com a variável aleatória $\tilde{\varepsilon}$. Assim, seu prêmio de risco será π_a que satisfaz a relação:

$$A(W - \pi_a(\tilde{\varepsilon})) = E[A(W + \tilde{\varepsilon})] \qquad (1.6)$$

O lado esquerdo desta equação representa a utilidade de se ter a riqueza reduzida pelo montante igual ao prêmio de risco e o lado direito, por sua vez, representa a utilidade esperada de se aceitar a loteria $\tilde{\varepsilon}$. Disso decorre que se A é mais avesso ao risco que B, então $\pi_a(\tilde{\varepsilon}) > \pi_b(\tilde{\varepsilon})$, para todo W.

Podemos demonstrar também que quanto maior a medida de aversão de Arrow-Pratt, maior o prêmio de risco. Aplicando a aproximação de Taylor de 2ª ordem do lado direito e 1ª ordem do lado esquerdo de (1.6), temos:

$$A(W) - \pi_a(W)A'(W) \approx E[A(W) + \tilde{\varepsilon}A'(W) + \tfrac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}^2A''(W)]$$

$$\approx A(W) + \tfrac{1}{2}\,\sigma_\varepsilon^2\,A''(W)^9$$

onde σ_ε^2 representa a variância de $\tilde{\varepsilon}$. Então:

$$\pi_a(W) \approx \tfrac{1}{2}\,\sigma_\varepsilon^2\left[-\frac{u''(W)}{u'(W)}\right]$$

As três medidas de aversão ao risco global acima descritas são equivalentes do ponto de vista analítico. É o que afirma o Teorema de Pratt, que pode ser assim enunciado: *Sejam A(W) e B(W) duas funções de utilidade esperada da riqueza diferenciáveis, crescentes e côncavas. Então, as três propriedades seguintes são equivalentes:*

a) $-\dfrac{A''(W)}{A'(W)} > -\dfrac{B''(W)}{B'(W)}$ *para todo W.*

b) A(W) = G(B(W)) para uma função G crescente e estritamente côncava.

[9] Já que $E(\varepsilon) = 0$.

c) $\pi_a(\tilde{\varepsilon}) > \pi_b(\tilde{\varepsilon})$ *para qualquer valor da variável aleatória* $\tilde{\varepsilon}$ *com* $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$.

A prova do teorema é demasiadamente longa e não será aqui reproduzida[10]. O que devemos salientar é que as três formas de avaliar a aversão ao risco global são equivalentes e nos permitem comparar comportamentos dos agentes diante de situações de incerteza.

O conceito de prêmio de risco é de grande importância para o estudo de algumas situações que envolvem demanda de seguros. Suponha, por exemplo, que um indivíduo com riqueza inicial W se depara com uma situação em que pode perder L com probabilidade p. Como tal agente é avesso ao risco, ele está disposto a comprar certa quantidade θ de seguro ao preço π, de modo que seu prêmio de risco total é $\pi\theta$. Qual será a cobertura de seguro adquirida pelo agente? O seu problema de maximização é:

$$\text{máx } pu(W\text{-}L\text{-}\pi\theta + \theta) + (1\text{-}p)u(W\text{-}\pi\theta)$$

Derivando com respeito a θ e igualando o resultado a zero, temos:

$$pu'(W\text{-}L\text{+}\theta^*(1\text{-}\pi))(1\text{-}\pi) - (1\text{-}p)u'(W\text{-}\ \pi\theta^*)\pi = 0$$

$$\frac{u'(W - L + (1-\pi)\theta^*)}{u'(W - \pi\theta^*)} = \frac{(1-p)}{p}\frac{\pi}{(1-\pi)}$$

Se o evento ocorrer, a companhia de seguros recebe $\pi\theta - \theta$ em dinheiro; caso contrário, recebe $\pi\theta$. Assim, o lucro esperado da companhia será:

$$(1\text{-}p)\ \pi\theta + p(\pi\theta - \theta) =$$

$$= (1\text{-}p)\ \pi\theta - p(1-\pi)\theta.$$

[10]Para isso, ver Varian (1992), pp. 182 a 184.

Supondo que a competição no mercado de seguros force o lucro das seguradoras a tender a zero, temos:

$$(1\text{-}p)\ \pi\theta - p(1-\pi)\theta = 0,$$

o que implica em $\pi = p$.

Portanto, sob hipótese de mercado concorrencial, a seguradora irá cobrar o *prêmio justo*, ou seja, o custo do seu serviço é precisamente iqual ao seu lucro esperado, de modo que o preço da apólice será igual à probabilidade de ocorrência do evento (π = p). Substituindo esta relação nas condições de 1ª ordem para maximização da utilidade, temos:

$$u'(W - L + (1-\pi)\theta^*) = u'(W - \pi\theta^*)$$

Se o consumidor é estritamente avesso ao risco, u"(W) < 0, o que implica em:

$$W - L + (1 - \pi)\theta^* = W - \pi\theta^*,$$

de onde segue que L = θ*. Assim, o consumidor avesso ao risco irá fazer o seguro total, ou seja, que cobre toda a perda possível L[11].

Uma variação da medida de Arrow-Pratt para aversão ao risco absoluto é aquela que procura expressar ganhos e perdas através de porcentagens da riqueza do individuo. Trata-se do conceito de *aversão ao risco relativo*, isto é, que procura captar a aversão do agente por situações que comprometem proporções de sua renda (e não perdas monetárias em termos absolutos). A medida de Arrow-Pratt para tal conceito torna-se:

$$\rho = -\frac{u''(W)W}{u'(W)}.$$

[11]Este resultado depende crucialmente da hipótese de que o consumidor não influi na probabilidade de perda. Caso contrário, a seguradora prefere oferecer o seguro parcial.

Uma questão razoavelmente importante é saber como se comportam as medidas de aversão ao risco com relação à riqueza do indivíduo: se a aversão tende a aumentar com o nível de riqueza, dizemos que o agente é risco-avesso crescente; se seu nível de aversão cai conforme aumenta sua riqueza, o agente é risco-avesso decrescente. Se o indivíduo possui o mesmo grau de aversão ao risco para qualquer montante de riqueza, o agente é risco-avesso neutro. O sinal da primeira derivada da função que caracteriza a medida de Arrow-Pratt define o comportamento da aversão ao risco de acordo com o nível de riqueza. A tabela abaixo resume as conclusões:

Tabela 1. 2: : Aversão ao risco e medida de Arrow-Pratt.

Sinal da 1ª derivada	Aversão ao risco
$r'(W) > 0$	crescente
$r'(W) = 0$	neutra
$r'(W) < 0$	decrescente

Considere o grupo de funções de utilidade que exibem aversão constante ao risco, tal que r(W) = c (constante). Assim:

$$\frac{d\ln u'(W)}{dW} = -c$$

Integrando ambos os lados com respeito a W:

$$\int \frac{d\ln u'(W)}{dW} dW = -\int c dW$$

$$\ln u'(W) = -cW + k_1$$

$$u'(W) = e^{k_1} e^{-cW}$$

Integrando novamente:

$$\int u'(W)dW = e^{k_1}\int e^{-cW}dW = -\frac{e^{k_1}}{c}e^{-cW} + k_2$$

Se $-e^{k1}/c = a$ e $k_2 = b$:

$$u(W) = ae^{-cW} + b,$$

que é a função de utilidade geral para aversão ao risco constante.

Por fim, devemos considerar que, assim como o tipo de aversão ao risco pode variar de acordo com o nível de riqueza, o comportamento do indivíduo também pode apresentar alterações quando se analisa diferentes patamares de seu estoque de ativos. Neste sentido, portanto, comportamentos como o ilustrado pelo gráfico (1.C) podem se verificar, ou seja, a partir de níveis elevados de riqueza, o agente perde seu medo de arriscar e torna-se propenso a participar de loterias.

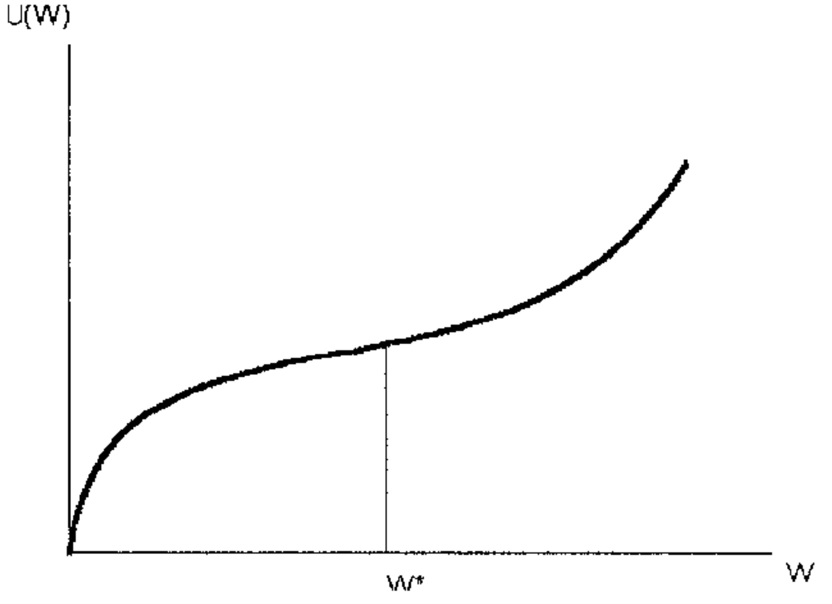


Gráfico (1.C): O comportamento do agente pode variar de acordo com o nível de riqueza. Para níveis maiores que W*, o agente torna-se propenso ao risco.

Concluídas as considerações sobre a incerteza, podemos partir para análises de otimização do nível de risco.

1.4. Otimização do nível de risco:

O comportamento maximizador dos agentes econômicos nos permite derivar relações que procurem explicar a distribuição dos investimentos de modo a permitir um gerenciamento ótimo do nível de risco do portfólio. Partindo da hipótese de que os indivíduos têm como base de tomada de decisão a maximização de sua função de utilidade esperada, podemos derivar o *Teorema Fundamental da Tolerância de Risco (Fundamental Theorem of Risk-Bearing)*. Suponha um indivíduo que se depara com dois possíveis estados da natureza e que maximiza sua função de utilidade esperada $U(x) = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$, onde c_1 e c_2 representam, respectivamente, o consumo do agente se o estado 1 ou 2 ocorrer[12]; π_i representa a probabilidade de ocorrência do estado i. Ao mesmo tempo, a sua restrição orçamentária pode ser escrita como $p_1c_1 + p_2c_2 = W$, onde W representa sua dotação inicial e p_1 e p_2 os preços, em cada estado[13], do ativo em que o agente investe seus recursos (o que define seu retorno).

Seu problema é maximizar a utilidade esperada, sujeita à restrição orçamentária. Em termos matemáticos:

$$\text{máx } U(x) \text{ sujeito à } p_1c_1 + p_2c_2 = W$$

No Lagrangeano:

$$L = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2) - \lambda(p_1c_1 + p_2c_2 - W)$$

Condições de 1ª ordem: definem as condições de ótimo da função objetivo acima indicada, isto é, da utilidade do agente sujeita à restrição orçamentária.

[12] O consumo do agente, neste caso será a conseqüência, conforme a expressão que define a função de utilidade.
[13] Trata-se do preço estado-dependente, que será melhor abordado no capítulo seguinte.

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial c_1} = \pi_1 v'(c_1) - \lambda p_1 = 0$$

$$L_2 = \frac{\partial L}{\partial c_2} = \pi_2 v'(c_2) - \lambda p_2 = 0$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = W - p_1 c_1 - p_2 c_2 = 0$$

$$\frac{\pi_1 v'(c_1)}{p_1} = \frac{\pi_2 v'(c_2)}{p_2}$$

Das condições de 1ª ordem, podemos derivar a relação (1.7) que caracteriza o Teorema Fundamental da Tolerância do Risco. Ela estabelece que, ao nível ótimo de risco suportável, o indivíduo irá igualar a utilidade marginal por unidade de renda em cada um dos estados, ponderados pela probabilidade e pelo preço. Generalizando:

$$\frac{\pi_1 v'(c_1)}{p_1} = \frac{\pi_2 v'(c_2)}{p_2} = \ldots = \frac{\pi_n v'(c_n)}{p_n} \qquad (1.7)$$

Condições de 2ª ordem: definem as condições de máximo para a função objetivo. O Hessiano orlado, ou seja, o determinante da matriz das derivadas parciais das condições de 1ª ordem com respeito às variáveis endógenas deve ter sinal positivo para máximo.

$$\begin{vmatrix} \pi_1 v''(c_1) & 0 & -p_1 \\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{para máximo}$$

A análise que faremos agora constitui um exercício de estática comparativa, isto é, analisaremos matematicamente o efeito de mudanças nos retornos do ativo em cada estado da natureza sobre o nível de consumo do agente em cada situação. Faremos a suposição de que a mudança nos retornos dos ativos se reflita integralmente nos preços, isto é, fixaremos o retorno e analisaremos o efeito da variação de preços.

Diferenciando totalmente as condições de 1ª ordem:

$$
\begin{aligned}
&\pi_1 v''(c_1)dc_1 - \lambda dp_1 - p_1 d\lambda = 0\\
&\pi_2 v''(c_2)dc_2 - \lambda dp_2 - p_2 d\lambda = 0\\
&dW - p_1 dc_1 - c_1 dp_1 - p_2 dc_2 - c_2 dp_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \pi_1 v''(c_1) & 0 & -p_1 \\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} dp_1 +
\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ c_2 \end{bmatrix} dp_2 -
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dW
$$

Sinal do Jacobiano:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \pi_1 v''(c_1) & 0 & -p_1 \\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \text{ das cond. 2ª ordem}
$$

Os sinais das derivadas parciais podem ser concluídos a partir do pressuposto de que os agentes são avessos ao risco, ou seja, a utilidade marginal de seu consumo é decrescente. Assim:

$$v''(c_1)<0$$

$$v''(c_2)<0$$

$$\frac{dc_1}{dW}=\frac{\Delta_W^{c1}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & -p_1\\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -p_2\\ -1 & -p_2 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(-1).[p_1\pi_2 v''(c_2)]}{\Delta}>0$$

$$\frac{dc_2}{dW}=\frac{\Delta_W^{c2}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\pi_1 v''(c_1) & 0 & -p_1\\ 0 & 0 & -p_2\\ -p_1 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(-1).[p_2\pi_1 v''(c_1)]}{\Delta}>0$$

$$\frac{dc_1}{dp_1}=\frac{\Delta_{p1}^{c1}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -p_1\\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -p_2\\ c_1 & -p_2 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{p_1c_1\pi_2 v''(c_2)-\lambda p_2^{2}}{\Delta}<0$$

$$\frac{dc_1}{dp_2}=\frac{\Delta_{p2}^{c1}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & -p_1\\ \lambda & \pi_2 v''(c_2) & -p_2\\ c_2 & -p_2 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{p_1p_2\lambda+[p_1\pi_2 v''(c_2)c_2]}{\Delta}\ in\ \det erminado$$

$$\frac{dc_2}{dp_1}=\frac{\Delta_{p1}^{c2}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\pi_1 v''(c_1) & \lambda & -p_1\\ 0 & 0 & -p_2\\ -p_1 & c_1 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{p_2[c_1\pi_1 v''(c_1)+\lambda p_1]}{\Delta}\ in\ \det erminado$$

$$\frac{dc_2}{dp_2}=\frac{\Delta_{p2}^{c2}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\pi_1 v''(c_1) & 0 & -p_1\\ 0 & \lambda & -p_2\\ -p_1 & c_2 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-p_1^{2}\lambda+p_2c_2\pi_1 v''(c_1)}{\Delta}<0$$

A partir dos sinais das derivadas parciais acima obtidos, podemos extrair algumas conclusões a respeito do comportamento do agente avesso ao risco diante de variações no nível de retorno do portfólio:

a) uma elevação na sua dotação inicial de riqueza irá provocar um aumento do seu consumo em ambos os estados, já que $\frac{dc_1}{dW}>0$ e $\frac{dc_2}{dW}>0$;

b) um aumento do retorno do ativo no estado 1 (representado aqui por uma redução de seu preço) irá resultar em um aumento do consumo do indivíduo neste estado; o efeito cruzado, isto é, o efeito do retorno no estado 2 sobre o consumo no estado 1 é indeterminado. Tais afirmações baseiam-se nos sinais das derivadas: $\frac{dc_1}{dp_1} < 0, \frac{dc_2}{dp_2} < 0, \frac{dc_2}{dp_1}$ e $\frac{dc_1}{dp_2}$ indeterminados.

As conclusões acima também podem ser visualizadas através de uma análise gráfica. Os gráficos (1.D) e (1.E) mostram, respectivamente, os efeitos de um aumento na dotação inicial de riqueza W e de uma variação nos retornos dos ativos (representados por alterações em seus preços).

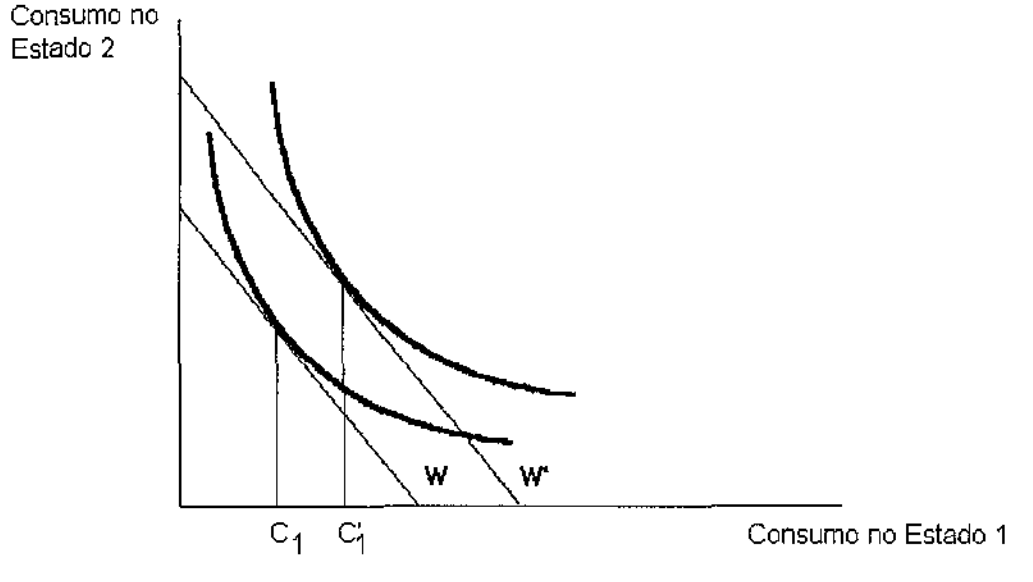


Gráfico (1.D): Um aumento da dotação inicial de riqueza produz um aumento do consumo em qualquer um dos estados.

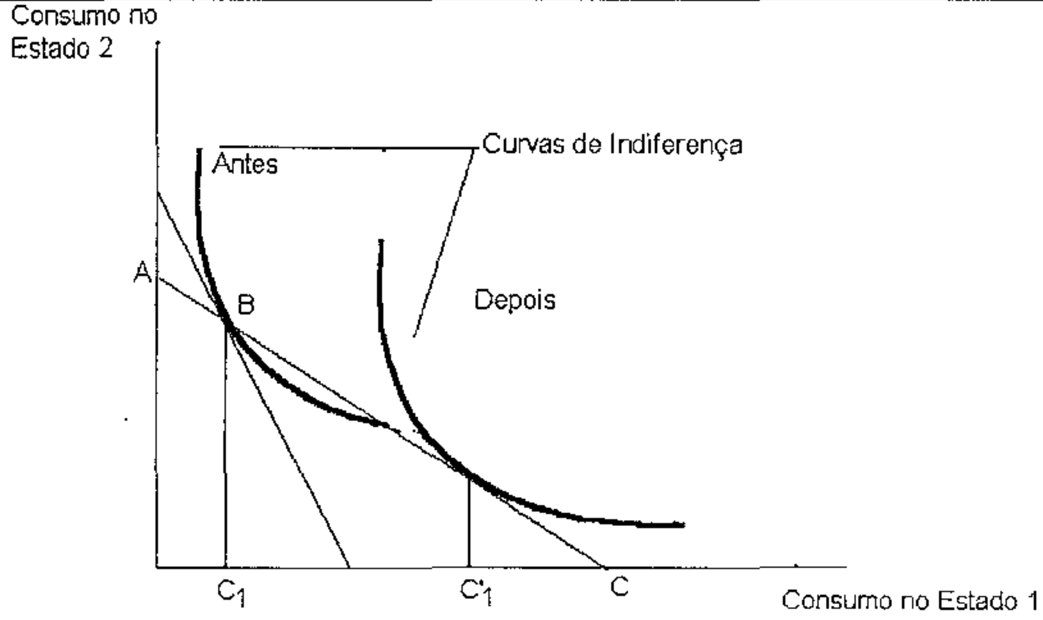


Gráfico (1.E): Um aumento do retorno no Estado 1 (representado aqui por queda de preço) aumenta o consumo do agente neste estado. Podemos utilizar também o argumento da Preferência Revelada para concluir sobre o aumento do consumo.

O fato do indivíduo elevar o seu consumo diante de um aumento do retorno de seu investimento também pode ser argumentado através dos axiomas da preferência revelada. No gráfico 1.E, após a queda do preço do ativo no estado 1, a nova escolha do agente se dará sob o trecho BC da nova reta de restrição orçamentária, na medida em que AB já estava disponível (factível de ser consumido) na situação inicial quando foi preterido, de modo que o agente revela preferir níveis de consumo situados em BC do que em AB.[14]

Portanto, o princípio maximizador constitui a matriz para o estudo do comportamento individual em mercados de ativos de risco. A suposição de que os agentes econômicos tomam decisões baseando-se na maximização de sua função de utilidade esperada para resultados monetários incertos nos permite extrair conclusões sobre as conseqüências das decisões de investir e sobre os mecanismos de gerenciamento do nível de risco dos portfólios. No próximo

[14] Para maiores informações sobre a teoria da preferência revelada, ver Varian (1994), cap.7.

capítulo, abordaremos uma aplicação da teoria da escolha sob risco, isto é, o estudo de mercados de ativos com retornos incertos.

Capítulo II

Mercados de risco e problemas de portfólio

A teoria da escolha sob incerteza, abordada no capítulo anterior, procura descrever a ação dos agentes na escolha de prospectos $x \equiv (c, \pi) \equiv (c_1,\ldots,c_s; \pi_1,\ldots,\pi_s)$ que envolvem determinadas conseqüências, às quais associamos probabilidades. Neste sentido, podemos generalizar o comportamento individual sob incerteza para estudar mecanismos de minimização de riscos em mercados de ativos, isto é, estamos interessados em analisar como o agente distribui seus investimentos em ativos arriscados, tendo em vista o princípio da maximização da utilidade esperada.

No item 2.1, estabeleceremos o conceito de mercados completos, que irá nortear a análise teórica dos ativos de risco; no item 2.2, analisaremos o problema da decisão de investir dos agentes, de modo a derivarmos o teorema de tolerância de risco para mercado de ativos; no item 2.3, será discutida a importância da diversificação dos componentes do portfólio. Por fim nos itens 2.4 e 2.5, e 2.6 serão desenvolvidos dois modelos clássicos de retorno ajustado ao risco, o CAPM e o APT, assim como sua relação com o princípio da utilidade esperada.

2.1. Mercados completos:

Em suas decisões de investir de modo a otimizar o nível de risco de seus portfólios, os indivíduos não se deparam com situações puras de renda monetária em estados da natureza, como guerra x paz, prosperidade x depressão, etc. Ao contrário, cada agente é portador de uma certa posição patrimonial, de modo que seu portfólio inclui ações, títulos, *commodities,* imóveis dentre outros. Assim, a nossa preocupação está voltada para a proteção do valor da riqueza e não propriamente com a maximização da renda monetária do indivíduo.

A hipótese dos mercados completos está diretamente relacionada com o fato do agente se defrontar com diferentes estados e, a partir da possibilidade de ocorrência dos mesmos, tomar decisões de modo a otimizar seu nível tolerado de risco. Dizemos que existe um sistema de mercados completos quando todos os ativos comercializáveis estão disponíveis em qualquer estado possível. Em termos matemáticos, se existem A ativos distintos e S estados possíveis, tal que A seja maior ou igual que S, então existem AS mercados possíveis no sistema considerado.

Isso significa que não se pode expressar qualquer um dos S vetores de rendimentos possíveis para o investidor como uma combinação linear dos S - 1 restantes, ou seja, um regime de mercados completos implica que, em um mundo de S estados, entre os A ativos existentes, há S que possuem independência linear quanto aos seus vetores de rendimento.

Em termos gerais, dado um vetor de preços-estado[1](P_1, P_2,...,P_S), o preço de mercado do ativo a pode ser expresso como:

$$P_a^A = \sum_{s=1}^{S} z_{as} P_s \qquad (2.1)$$

onde z_{as} representa o retorno monetário do ativo a no estado s. Podemos representar a equação 2.1 na forma matricial: para todo o conjunto de ativos existentes:

[1]A partir de agora, vamos estabelecer a distinção de notação entre preço estado e preço do ativo. Este último será indicado por P_S^A, ao passo que o preço-estado dependente será P_S. O preço estado-dependente é o preço do ativo tratado como uma função do estado da Natureza.

$$P^A = P[z_{as}] = PZ$$

A equação acima nos permite sempre obter os preços dos ativos a partir do conhecimento do vetor de preços-estado. Em outras palavras, se possuirmos as informações a respeito de como os preços dos ativos são afetados de acordo com o estado, podemos encontrar, através de uma operação matricial, o preço do ativo no estado em questão. A recíproca, entretanto, só é verdadeira sob hipótese dos mercados completos, na medida em que a matriz inversa de Z só existe se houver independência linear de seus elementos[2], a fim de que se possa realizar a operação:

$$P = P^A Z^{-1} \qquad (2.2)$$

Portanto, se a hipótese dos mercados completos for admitida, para quaisquer preços $P_1^A,\ldots,P_A^A$, haverá um único vetor de preços estado dependente $(P_1,\ldots,P_S)$ correspondente. Assim, assumiremos tal pressuposto no decorrer deste capítulo. A análise de mercados incompletos, isto é, quando um ou mais ativos não estão disponíveis em todos os estados, torna-se mais complexa, de modo que não será aqui considerada.[3]

Feitas as considerações relevantes sobre a questão do regime de mercado, passemos para a análise do problema de investimento do agente.

2.1. O problema da decisão de investir:

De um modo geral, os agentes, ao tomarem sua decisão de em quais ativos investir e quanto aplicar, se deparam com um *trade off* entre risco e rentabilidade; em outras palavras, os ativos que possuem retornos esperados mais elevados são também os mais arriscados, de modo que o agente procura

---

[2]De modo que $\det Z \neq 0$. Caso contrário, o cálculo da inversa é inviável. Trata-se, pois, de um problema matemático.
[3]Para maiores informações sobre a questão, ver Hirsleifer & Riley (1992), pp. 53 a 55.

determinar uma quantidade ótima do ativo para manter em seu portfólio a fim de minimizar o risco de sua carteira de investimentos.

Posteriormente, iremos explorar melhor o *trade off* acima mencionado. Por ora, partiremos de uma situação em que o indivíduo deve escolher que proporção de sua riqueza irá investir em dois ativos. Como ambos são arriscados, seus retornos não são conhecidos previamente, isto é, irão depender do estado da natureza que ocorrer, o que nos permite lançar mão da teoria da escolha sob incerteza para a análise da situação.

Suponha uma pessoa que investe sua riqueza em dois ativos 1 e 2, adquirindo-os nos montantes q_1 e q_2, respectivamente. Suponha, ainda, que existem dois estados possíveis esperados. As equações que representam os retornos dos ativos em cada situação possível são:

$$c_1 = q_1 z_{11} + q_2 z_{21}$$
$$c_2 = q_1 z_{12} + q_2 z_{22}$$

onde z_{as} representa o retorno do ativo a no estado s. O sistema acima também pode ser representado em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = q_1 \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix}$$

Dado que o agente investe a fração k_1 de sua riqueza no ativo 1, sua restrição orçamentária pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_1^A q_1 &= k_1 \overline{W} \\ p_2^A q_2 &= k_2 \overline{W} \end{aligned} \quad \text{onde } k_2 = 1 - k_1$$

Assim, o retorno de seu portfólio pode ser reescrito como:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{k_1 \overline{W}}{p_1^A} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} + \frac{k_2 \overline{W}}{p_2^A} \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

Vale ressaltar que o investimento em dois ativos ao invés de em um único tem por objetivo principal reduzir os riscos do portfólio através da diversificação, cuja importância será abordada no item seguinte. O nosso problema agora é escolher as proporções k_1 e k_2 que maximizam a função de utilidade esperada do agente, que se depara com o seguinte problema para otimizar o nível de risco de seu portfólio:

Máx $U(k_1,k_2) = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$ sujeito à $k_1 + k_2 = 1$

A função objetivo-lagrangeana é:

$L = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2) - \lambda(k_1 + k_2 - 1)$

As condições de primeira ordem podem ser assim escritas:

$$\frac{\partial L}{\partial k_1} = \pi_1 v'(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial k_1} + \pi_2 v'(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial k_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_2} = \pi_1 v'(c_1)\frac{\partial c_1}{\partial k_2} + \pi_2 v'(c_2)\frac{\partial c_2}{\partial k_2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - k_1 - k_2 = 0$$

Dado, de (2.3), que $\frac{\partial c_s}{\partial k_1} = \frac{\overline{W}}{p_1^A} z_{1s}$ e $\frac{\partial c_s}{\partial k_2} = \frac{\overline{W}}{p_2^A} z_{2s}$, s = 1,2, tem-se o seguinte sistema:

$$\pi_1 v'(c_1)\left(\frac{\overline{W}}{p_1^A}\right) z_{11} + \pi_2 v'(c_2)\left(\frac{\overline{W}}{p_1^A}\right) z_{12} = \lambda$$

$$\pi_1 v'(c_1)\left(\frac{\overline{W}}{p_2^A}\right) z_{21} + \pi_2 v'(c_2)\left(\frac{\overline{W}}{p_2^A}\right) z_{22} = \lambda$$

Igualando as equações acima:

$$\pi_1 v'(c_1)\left(\frac{\overline{W}}{p_1^A}\right)z_{11} + \pi_2 v'(c_2)\left(\frac{\overline{W}}{p_1^A}\right)z_{12} = \pi_1 v'(c_1)\left(\frac{\overline{W}}{p_2^A}\right)z_{21} + \pi_2 v'(c_2)\left(\frac{\overline{W}}{p_2^A}\right)z_{22}$$

Eliminando-se o termo comum a ambos os membros, resulta-se na seguinte expressão:

$$\frac{\sum_{s=1}^{2} \pi_s v'(c_s) z_{1s}}{p_1^A} = \frac{\sum_{s=1}^{2} \pi_s v'(c_s) z_{2s}}{p_2^A}$$

Esta condição constitui uma variação do Teorema Fundamental da Tolerância de Risco abordado no capítulo anterior. O Teorema da Tolerância de Risco para Mercados de Ativos (*Risk-Bearing Theorem for Asset Markets*) estabelece que um indivíduo irá ajustar seus investimentos em dois ativos até que seus preços sejam proporcionais à utilidade marginal esperada derivada do consumo que ele obterá dependendo do estado que ocorrer. Em outras palavras, no ponto ótimo, o agente possuirá a mesma utilidade marginal esperada por unidade de renda mantida em cada ativo.

Generalizando a equação que define o teorema:

$$\frac{\sum_{s=1}^{S} \pi_s v'(c_s) z_{1s}}{p_1^A} = \frac{\sum_{s=1}^{S} \pi_s v'(c_s) z_{2s}}{p_2^A} = \ldots = \frac{\sum_{s=1}^{S} \pi_s v'(c_s) z_{As}}{p_A^A} \qquad (2.4)$$

Embora este teorema, na prática, seja uma aplicação do teorema abordado no capítulo anterior, precisamos estabelecer algumas qualificações a respeito de sua validade: pelo fato do mesmo ser definido em função dos preços dos ativos, ao contrário do primeiro, que era definido pelos preços estado-dependentes, este segundo teorema é válido sob quaisquer hipóteses a respeito do comportamento dos mercados, ao passo que o Teorema Fundamental só é válido quando se admite a hipótese de mercados completos, na medida em que os preços estado-dependentes só podem ser conhecidos a partir dos preços dos ativos quando a matriz dos retornos tiver posto igual a zero, o que possibilita a existência da matriz inversa, conforme se pode observar pela equação (2.2). Assim, o *Risk-Bearing Theorem for Asset Markets* se mantém mesmo quando os mercados são incompletos; o mesmo não acontece com o *Fundamental Theorem of Risk-Bearing*, que perde validade neste caso.

2.3. A importância da diversificação:

Quando derivamos o Teorema de Risco para Mercado de Ativos no item anterior, supusemos que o investidor aplica sua riqueza em dois ativos, o que nos permite indagar a razão pela qual o agente prefere compor seu portfólio com vários ativos ao invés de apenas um. Pretendemos, neste item, elaborar uma resposta a esta questão, com vistas a compreender o papel da diversificação na minimização dos riscos dos investimentos.

O ditado de que *nunca se deve colocar todos os ovos em uma única cesta* é amplamente difundido entre os participantes do mercado financeiro e procura chamar atenção para os riscos de determinados ativos, desencorajando a aplicação total da riqueza nos mesmos. Em outras palavras, os ativos em geral possuem uma característica denominada **volatilidade de preço**, ou seja, a possibilidade de sofrerem intensas variações de preço (e, conseqüentemente, de taxas de retorno) ao longo do tempo. A medida mais conhecida para a volatilidade é o desvio-padrão, isto é, a quantificação estatística da dispersão dos valores.

Neste sentido, a importância da diversificação reside na possibilidade de reduzir riscos de portfólio. Quando um agente divide sua riqueza para investir em duas ou mais ações, por exemplo, seu principal objetivo é evitar que uma possível queda de retorno de uma delas o leve a bancarrota. No limite, podemos inferir um exemplo estilizado de diversificação: um indivíduo que investe 50% de sua riqueza em ações de uma fábrica de óculos de sol e 50% em ações de uma fábrica de guarda-chuvas, parte da idéia de que a valorização da primeira é a contrapartida da desvalorização da segunda caso fizer tempo bom; se fizer mau tempo, por outro lado, as ações da fábrica de guarda-chuva se valorizam em detrimento das ações do óculos de sol, de modo que o agente garante um retorno independentemente da situação do tempo.

É claro que este é um exemplo bastante caricatural, mas, a partir dele, podemos intuir a noção de que a diversificação é mais eficiente no sentido de reduzir riscos quanto mais negativamente correlacionados forem os ativos em questão. Para esclarecer a idéia, partiremos de um conjunto de quatro ações hipotéticas, cujos retornos ao longo do tempo, em %, encontram-se na tabela abaixo[4]:

Tabela 2. 1: Exemplo de retorno de ações

Ano	Ação A	Ação B	Ação C	Ação D
1985	7,30	9,07	-6,58	9,51
1986	30,24	-38,17	16,57	-13,40
1987	47,25	28,25	-22,83	25,60
1988	6,37	-10,38	37,71	-34,33
1989	10,58	31,61	3,86	-0,82
1990	-5,19	4,80	12,31	-9,19
1991	36,98	35,09	1,24	1,77
1992	21,13	30,99	-12,04	14,92
1993	17,28	17,38	1,82	1,20
1994	-32,44	8,37	14,75	-11,60
1995	-25,74	-11,85	16,07	-12,91
1996	-16,58	24,30	17,07	-13,90
Média	8,10	10,79	6,66	-3,60
Desvio padrão	24,67	22,09	15,99	15,83
Correlações:				
A e B	0,22			
A e C	-0,56			
A e D	0,56			
B e C	-0,61			
B e D	0,61			
C e D	-1,00			

[4]A tabela em questão é fictícia, e foi obtida através de um procedimento estatístico conhecido como "gerar números aleatórios", em que, a partir da média, da variância e da distribuição solicitadas, obtém-se números aleatórios. Utilizamos, para este exemplo, o *software EXCEL 5.0,* e os números obtidos têm distribuição normal.

Além dos retornos, a tabela nos fornece também os coeficientes de correlação entre as ações. O investidor tem como opção escolher duas das mencionadas ações para compor seu portfólio, de modo a reduzir a volatilidade total de seu investimento. A tabela de retornos conjuntos, ou seja, quando o portfólio é composto pelas ações indicadas (média dos retornos individuais) encontra-se a seguir:

Tabela 2. 2: Retornos conjuntos

	Portfólio AB	Portfólio AC	Portfólio AD	Portfólio BC	Portfólio BD	Portfólio CD
	8,19	0,36	8,41	1,25	9,29	1,47
	-3,97	23,41	8,42	-10,80	-25,79	1,58
	37,75	12,21	36,43	2,71	26,93	1,39
	-2,01	22,04	-13,98	13,67	-22,36	1,69
	21,10	7,22	4,88	17,74	15,39	1,52
	-0,20	3,56	-7,19	8,56	-2,19	1,56
	36,04	19,11	19,38	18,17	18,43	1,51
	26,06	4,55	18,02	9,48	22,95	1,44
	17,33	9,55	9,24	9,60	9,29	1,51
	-12,04	-8,85	-22,02	11,56	-1,62	1,57
	-18,80	-4,84	-19,32	2,11	-12,38	1,58
	3,86	0,25	-15,24	20,69	5,20	1,59
Média	9,44	7,38	2,25	8,73	3,60	1,53
D. Padrão	18,28	10,32	17,98	8,86	17,05	0,08

A análise das tabelas nos revela que, para qualquer tipo de diversificação considerada, não importando o coeficiente de correlação entre as ações que compõem o portfólio, o desvio padrão da taxa de retorno se reduz, isto é, torna-se menos volátil.

Suponhamos três situações possíveis para a composição do portfólio do agente: investir nas ações A e C, cujo coeficiente de correlação entre seus retornos, baseado na série histórica, é de -0,56; investir nas ações B e D, com coeficiente de correlação de +0,61; e aplicar em C e D, correlacionadas negativamente de modo perfeito (-1,00). A análise das situações propostas nos revela que os melhores resultados em termos de reduzir a volatilidade conjunta foram obtidos com as ações C e D, cuja correlação negativa é perfeita:

percebemos que o desvio padrão cai para 0,08% neste caso, ao passo que as combinações AC e BD também apresentam redução no desvio padrão, mas não de modo tão intenso. A conclusão a que podemos chegar com base nas tabelas apresentadas é de que a estratégia de redução de risco através da diversificação é mais eficiente quanto mais negativamente correlacionados forem os ativos que compõem a carteira de investimentos.

Os gráficos a seguir ilustram o argumento. Percebemos que a trajetória da curva que representa o retorno conjunto é suavizada nos três casos, de modo mais forte no gráfico 2.C, em que as ações possuem coeficiente de correlação igual a -1. É intuitivo, pelo que foi descrito acima, que as estratégias de diversificação baseadas em ações com correlação positiva perfeita são completamente ineficientes.

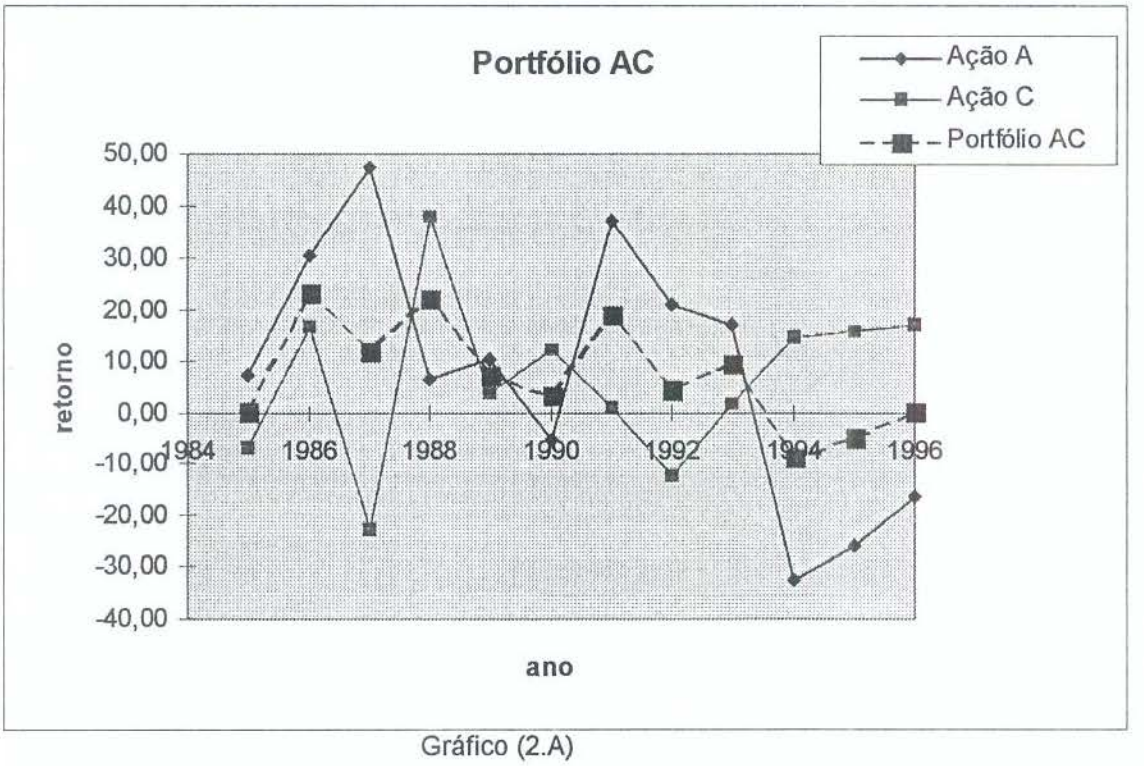


Gráfico (2.A)

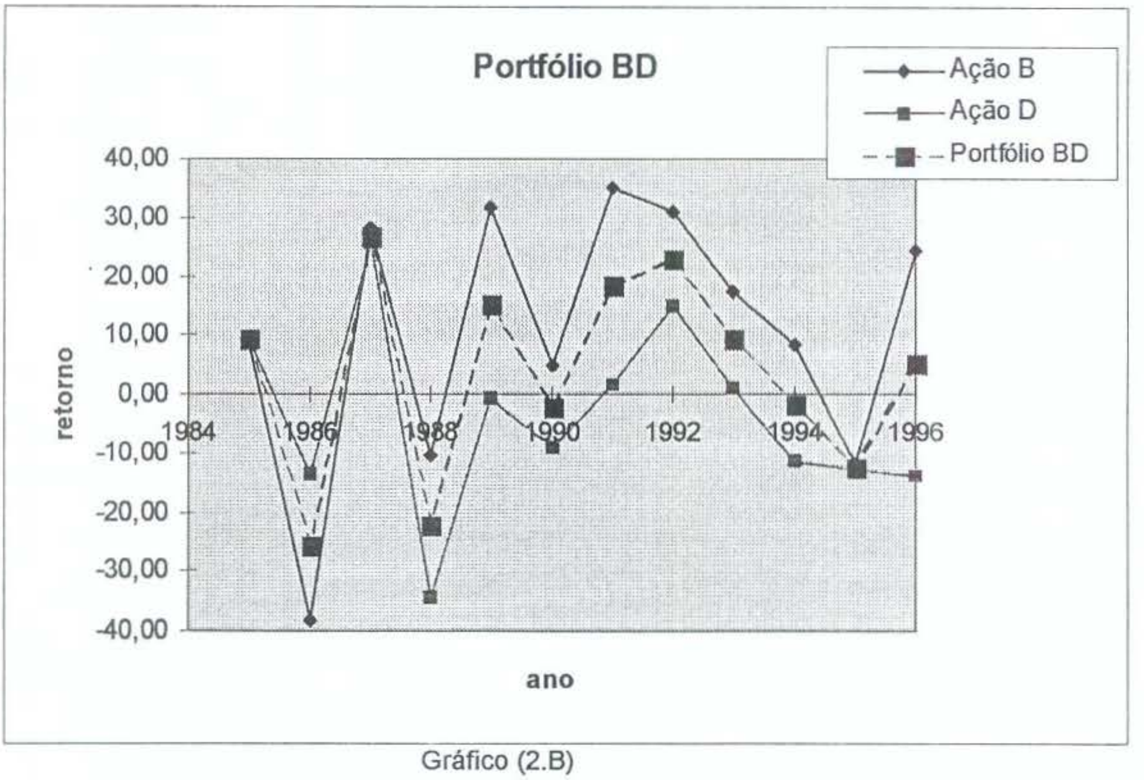


Gráfico (2.B)

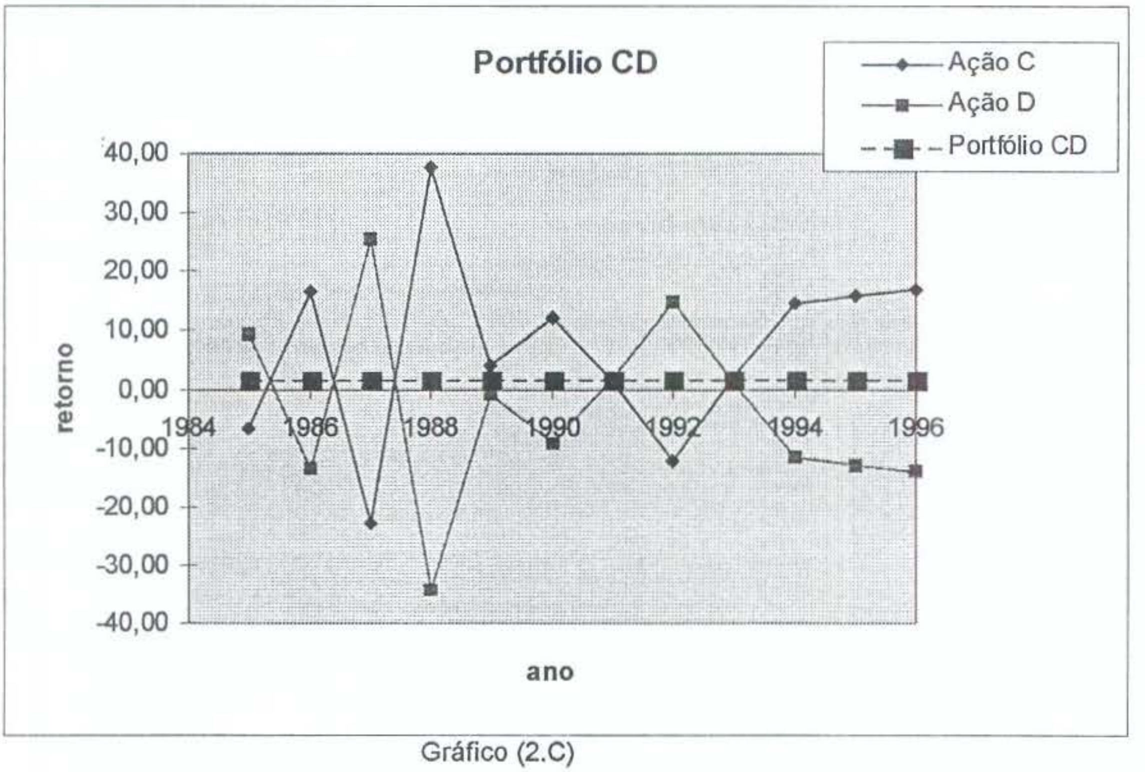


Gráfico (2.C)

Portanto, podemos concluir pela análise acima que a diversificação é mais eficiente no sentido de reduzir os riscos decorrentes da volatilidade quando os preços dos ativos envolvidos forem negativamente correlacionados; no limite, se o coeficiente de correlação for -1, o desvio padrão cai para um valor próximo de zero. Por outro lado, se os ativos forem positivamente correlacionados, a diversificação permite a redução da volatilidade e, conseqüentemente, dos riscos do portfólio, mas estes não são eliminados. Se levarmos em conta que, na prática do mercado acionário, as ações são predominantemente correlacionadas positivamente entre si, as estratégias de diversificação permitem apenas a redução do risco das operações, e não a sua neutralização. As razões para isso decorrem do fato de que, em geral, o preço das ações é uma função do nível de atividades da economia que, por sua vez, é determinada por vários fatores, dentre os quais a taxa de juros, de modo que os retornos possuem um movimento relativamente sincrônico.

Após a análise do exemplo acima, passemos a um modelo teórico de retorno ajustado ao risco.

2.4. *O Capital Asset Princing Model (CAPM)*:

Diante da constatação de que risco e retorno são características presentes na maior parte dos ativos, foram desenvolvidos modelos que procuram estudar uma situação de equilíbrio entre os dois atributos de modo a otimizar o risco dos investimentos. O *Capital Asset Princing Model (CAPM)* foi o pioneiro de tais modelos e até os dias de hoje constitui uma importante ferramenta para análises de equilíbrio no mercado financeiro.

A teoria básica financeira por trás das análises modernas de portfólio se deve em grande medida aos trabalhos pioneiros de Harry M. Markowitz, bacharéu, mestre e doutor pela Universidade de Chicago. Em sua tese de PhD, Markowitz desenvolveu o modelo básico de portfólio aqui abordado e seu artigo seminal foi publicado em 1952 no *Journal of Finance*.

O CAPM parte de uma especificação particular de função de utilidade, vista no capítulo anterior, segundo a qual uma distribuição aleatória da riqueza futura depende apenas da média e da variância. Tal função de utilidade é compatível com os parâmetros mencionados quando parte-se da hipótese da distribuição normal dos retornos esperados ou quando a função de utilidade esperada é quadrática. Sob a hipótese de aversão ao risco, o aumento do consumo esperado para o futuro é um bem, ao passo que um aumento da variância correspondente é um mal, dado que eleva a volatilidade. Em outras palavras, o agente procura maximizar o retorno médio e minimizar o desvio padrão de sua função de utilidade, de modo a reduzir a volatilidade de seu portfólio.

Antes de passarmos ao CAPM propriamente dito, devemos apresentar alguns conceitos básicos de finanças que servirão de base para o modelo. Partiremos da hipótese de que o agente está preocupado apenas com o retorno de seu próprio portfólio, isto é, não existem externalidades de consumo. Além disso, definimos taxa de retorno de um investimento como:

$$r = \frac{p_1 + d - p_0}{p_0}$$

onde $p_1 \equiv$ preço do ativo no final do período de tempo;

$p_0 \equiv$ preço do ativo no início do período de tempo;

$d \equiv$ dividendos pagos durante o período (se existirem).

Vale ressaltar que r será interpretado com retorno esperado (*ex ante*), já que o retorno efetivo só pode ser conhecido ao final do período (*ex post*). Conforme afirmamos anteriormente, o indivíduo está preocupado não apenas com o retorno esperado, mas também com a distribuição de tais retornos, de modo que os mesmos serão analisados como se fossem uma variável aleatória de distribuição normal, com média e variância conhecidas. O risco, na literatura financeira[5], é medido pelo desvio padrão da distribuição (raiz quadrada da variância). Disso decorre que um agente só irá aceitar um investimento de alto risco se o seu retorno esperado for elevado o suficiente de modo a compensar a incerteza sofrida pelo investidor.

Por fim, assumiremos que o mercado apresenta um ativo de risco nulo, ou seja, cujo retorno é conhecido de antemão[6]. Se o retorno de tal ativo for R_0, definimos o prêmio de risco como sendo a diferença entre o retorno do ativo arriscado (a) e o retorno livre de risco:

Prêmio de risco = R_a - R_0, onde R_a representa o retorno do ativo de risco a.

O retorno do investimento do agente, por ser uma variável aleatória, torna o consumo no segundo período também uma variável aleatória $\tilde{c}$[7].Assim:

$$\tilde{c} = (W - c)\sum_{a=0}^{A} w_a \tilde{R}_a = (W - c)\left[w_0 R_0 + \sum_{a=1}^{A} w_a \tilde{R}_a \right] \quad (2.5)$$

onde W é a riqueza do investidor, c é o consumo no período inicial, $W - c$ o montante investido no período inicial, w_a fração do investimento total destinada ao ativo a, tal que w_0 é a fração destinada ao ativo livre de risco; $\tilde{R}_a$ é o retorno do ativo a tratado como uma variável aleatória.

Como $w_0 + \sum_{a=1}^{A} w_a = 1$, então $w_0 = 1 - \sum_{a=1}^{A} w_a$. Substituindo em (2.5), tem-se:

$$\tilde{c} = (W - c)\left[R_0 + \sum_{a=1}^{A} w_a (\tilde{R}_a - R_0) \right]$$

onde o termo entre colchetes representa o retorno do portfólio.

[5]Uma outra medida muito utilizada é o coeficiente de variação, definido como a razão entre o desvio padrão e a média.
[6]Na prática, geralmente os títulos do Tesouro de curto prazo nos EUA apresentam tais características. No Brasil, considerando que a TR pode ser estimada com antecedência, a Caderneta de Poupança pode assumir as características mencionadas.
[7]Já que a combinação linear de variáveis aleatórias resulta em uma variável aleatória.

Se a função de utilidade esperada do agente for do tipo média-variância, para qualquer nível de investimento, o investidor desejará minimizar a variância dos retornos possíveis de seu portfólio. O retorno pode ser escrito matematicamente como:

$$r = \sum_{a=0}^{A} w_a \tilde{R}_a$$

A equação que representa a variância dos retornos pode ser derivada diretamente da equação acima:

$$Var(r) = Var(\sum_{a=0}^{A} w_a \tilde{R}_a) = \sum_{a=0}^{A} Var(w_a \tilde{R}_a) + 2\sum_{a=0}^{A}\sum_{b=0}^{A} Cov(w_a \tilde{R}_a, w_b \tilde{R}_b)$$

De modo que os termos de variância podem ser incluídos dentro da covariância, para fins de notação:

$$\text{Var(r)} = \sum_{a=0}^{A}\sum_{b=0}^{A} w_a w_b \sigma_{ab}$$

É importante observar que a variância total do portfólio possui A termos de variâncias e A(A-1) covariâncias, com A(A-1)/2 termos diferentes. *Ceteris paribus*, quanto maior o número de ativos envolvidos, maior a importância da covariância. A tabela abaixo fornece alguns valores para A de modo a ilustrar o argumento:

A	nº de termos de variâncias	nº de termos de covariâncias
A=5	5	20
A=10	10	90
A=20	20	380

Para tornar o nível de risco de seu portfólio aceitável, o problema do agente é:

$$\min(w_0,\ldots,w_A) \sum_{a=0}^{A}\sum_{b=0}^{A} w_a w_b \sigma_{ab} \quad \text{sujeito a:} \quad \sum_{a=0}^{A} w_a \overline{R}_a = \overline{R} \quad \text{e} \quad \sum_{a=0}^{A} w_a = 1$$

Na função Lagrangeana:

$$L = \sum_{a=0}^{A}\sum_{b=0}^{A} w_a w_b \sigma_{ab} - \lambda(\sum_{a=0}^{A} w_a \overline{R}_a - \overline{R}) - \mu(\sum_{a=0}^{A} w_a - 1)$$

A a-ésima condição de primeira ordem pode ser assim escrita:

$$\frac{\partial L}{\partial w_a} = 2\sum_{b=0}^{A} w_b \sigma_{ab} - \lambda \overline{R}_a - \mu = 0 \qquad a = 0,1,\ldots,A.$$

Como a função objetivo é convexa e as restrições são lineares, as condições de segunda ordem são automaticamente satisfeitas.

Suponha que $(w_1^e, w_2^e, \ldots, w_A^e)$ seja um portfólio representativo média-variância eficiente, constituído apenas por ativos de risco, de modo que satisfaz a condição de primeira ordem. Assim, para quaisquer $w_b = 0$ tal que $b \neq e$, a a-ésima condição de primeira ordem se torna:

$$2\sigma_{ae} - \lambda \overline{R}_a - \mu = 0$$

Para dois casos especiais em que a = 0 e a = e:

$$\begin{aligned} -\lambda R_0 - \mu &= 0 \\ 2\sigma_{ee} - \lambda \overline{R}_e - \mu &= 0 \end{aligned} \qquad (\sigma_{0e} = 0, \text{ pois 0 é o ativo livre de risco})$$

Resolvendo o sistema acima para μ e para λ:

$$\lambda = \frac{2\sigma_{ee}}{\overline{R}_e - R_0} \quad \text{e} \quad \mu = -\lambda R_0$$

$$\mu = \frac{-2\sigma_{ee} R_0}{\overline{R}_e - R_0}$$

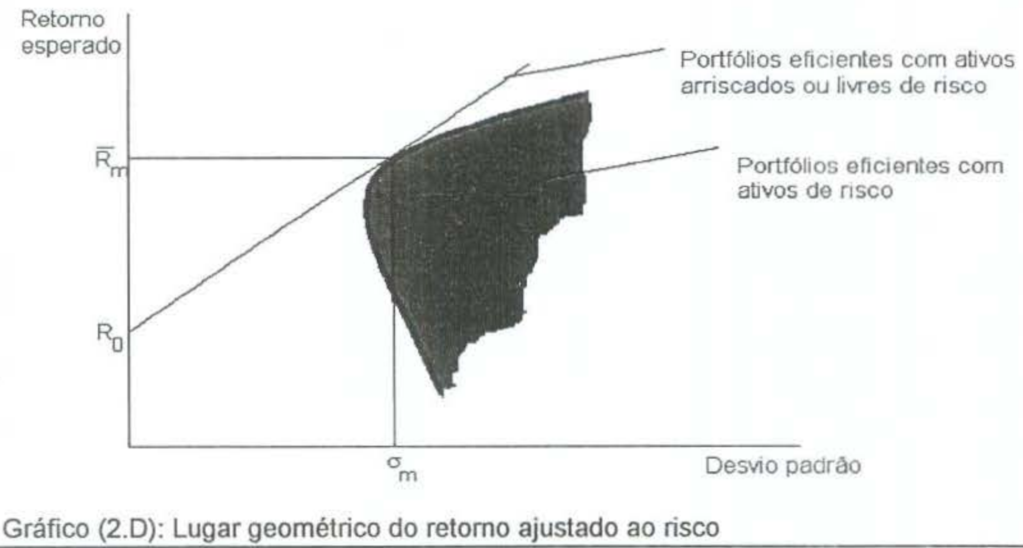
Substituindo tais valores na a-ésima condição de primeira ordem:

$$2\sigma_{ae} - \frac{2\sigma_{ee}}{\overline{R}_e - R_0}\overline{R}_a + \frac{2\sigma_{ee}}{\overline{R}_e - R_0} R_0 = 0$$

$$\overline{R}_a = R_0 + \frac{\sigma_{ae}}{\sigma_{ee}}(\overline{R}_e - R_0) \qquad (2.6)$$

Esta equação estabelece que o retorno esperado de qualquer ativo é igual ao retorno do ativo seguro mais um **prêmio de risco**, ponderado pela razão entre a covariância ae, e a variância do portfólio representativo.

Podemos também examinar a estrutura dos portfólios eficientes através de uma análise gráfica. No gráfico (2.D), plotamos os retornos esperados e os desvios padrões. O *set* para um portfólio eficiente formado apenas por ativos de risco é dado pela hipérbole sombreada (resultado pouco importante para nosso argumento). Quando o portfólio é composto por ativos arriscados e pelo ativo livre de risco, por outro lado, o lugar geométrico dos portfólios eficientes pode ser representado pela reta que contém os pontos (σ_m, R_m) e $(0, R_0)$.



. Gráfico (2.D): Lugar geométrico do retorno ajustado ao risco

Cabe-nos agora descobrir qual é este portfólio representativo. É possível demonstrar[8] que o portfólio de mercado de ativos de risco (ou o conjunto de todos eles) é um caso particular do portfólio média-variância eficiente representativo. Assim podemos reescrever a equação (2.6) da seguinte forma:

[8] Ver Varian(1992), p. 375.

$$\overline{R}_a = R_0 + \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}(\overline{R}_m - R_0) \qquad (2.7)$$

Esta é a forma final da equação representativa do CAPM e estabelece que o prêmio de risco deve ser ponderado pela razão entre a covariância ativo-portfólio de mercado e a variância do portfólio de mercado. Tal razão é conhecida como β do ativo e pode ser obtido através de uma regressão entre R_a e R_m:

$$\beta_a = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{mm}}$$

De modo que a forma final do CAPM é:

$$\overline{R}_a = R_0 + \beta_a(\overline{R}_m - R_0) \qquad (2.8)$$

O coeficiente β mede a volatilidade do ativo em relação à volatilidade do mercado como um todo. O beta do portfólio (β_p) como um todo é a soma dos betas de cada componente, ponderada pelas respectivas proporções:

$$\beta_p = \sum_{a=1}^{A} w_a \beta_a$$

O portfólio de mercado acima mencionado constitui, na prática, uma média dos ativos negociados no mercado como um todo, de modo que o coeficiente β representa uma medida do risco do ativo particular em relação aos demais. Assim, se o mencionado coeficiente for maior que a unidade, indicando que a covariância do ativo com o mercado é maior que a variância do mercado, há uma indicação de que tal ativo possui um nível de risco acima da média. Em outras palavras, a volatilidade do ativo em questão tende a ser maior que a volatilidade do mercado como um todo.

A tabela abaixo resume os possíveis sinais para β e seu significado:

Tabela 2. 3: Significado do beta

Sinal de beta	*Significado*
$\beta > 1$	Alto risco do investimento no ativo em questão, devido a elevada volatilidade.
$\beta = 1$	Volatilidade do ativo igual à média; investimento de risco médio
$\beta < 1$	Volatilidade menor que a média do mercado; risco baixo.

A tabela seguinte[9] ilustra alguns betas calculados no mercado de ações nos EUA:

Tabela 2. 4: Exemplos de betas para ações nos EUA

Ação	*Beta (β)*	*Ação*	*Beta (β)*
Apple Computer	1,35	Anheuser Busch	0,95
Georgia-Pacific	1,25	General Motors	0,95
General Eletric	1,10	IBM	0,95
Gerber Products	1,10	Proctor & Gamble	0,90
Johnson & Johnson	1,05	Pacific Gas & Electric	0,75
Heinz	1,00	Boston Edison	0,70
Honda	1,00	Energen Corp.	0,60

Em síntese, o CAPM constitui um modelo de equilíbrio para o mercado de ativos de risco, na medida em que procura encontrar uma compensação, denominada prêmio de risco, para o investidor que deve tolerar uma certa incerteza quanto ao valor futuro de seu portfólio. Vale ressaltar, ainda, que o mencionado prêmio é o diferencial entre a rentabilidade do ativo livre de risco e a

[9] Fonte: Value Line, 28/04/89. In Weston & Brigham (1990).

rentabilidade do ativo em questão: o CAPM introduz um ponderador para este prêmio, proporcional ao risco que o agente é obrigado a suportar.

O CAPM, para finalizar, constitui o modelo clássico de retorno ajustado ao risco e, até os dias de hoje, representa um importante parâmetro para as decisões de investir em ativos cujos retornos são incertos.

2.5. A *Arbitrage Pricing Theory (APT)*:

Enquanto o CAPM refere-se à distribuição de riscos e retornos quanto às preferências do consumidor, a *Arbitrage Pricing Theory* (APT) procura descrever o processo que gera retornos para os ativos. Em outras palavras, o CAPM está voltado para o lado da demanda, ao passo que o APT é um modelo que aborda o lado da oferta.

A APT parte da constatação de que os preços dos ativos se movem conjuntamente, de modo que existe uma grande covariância entre eles. Podemos escrever o retorno aleatório de um ativo a ($\tilde{R}_a$) como função de alguns poucos fatores (f_i's). Para dois fatores:

$$\tilde{R}_a = \beta_{0a} + \beta_{1a}\tilde{f}_1 + \beta_{2a}\tilde{f}_2 + \tilde{\varepsilon}_a$$

onde ($\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$) representam os fatores macroeconômicos que que influenciam os retornos do ativo a e β_{ia} são os coeficientes que medem a sensibilidade do ativo a em relação ao fator i (trata-se de um coeficiente de regressão). O termo $\tilde{\varepsilon}_a$ é o fator estocástico e pode ser interpretado como o risco específico do ativo resultante de fatores microeconômicos. Temos, ainda, como suposição:

$E(\tilde{f}_i) = 0$, $\quad E(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = 0 \quad$ e $\quad E(\tilde{\varepsilon}_a) = 0$.

A segunda hipótese estabelece que os fatores são independentes. Suponhamos que um investidor decida investir em dois ativos a e b, cada um dos quais dependente apenas de um fator e que o risco específico não existe (de modo que $\tilde{R}_a = \beta_{0a} + \beta_{1a}\tilde{f}_1$). As proporções da riqueza investida em cada ativo são, respectivamente, w e 1-w. O retorno de seu portfólio, assim, será:

$$r = w\tilde{R}_a + (1-w)\tilde{R}_b = w(\beta_{0a} + \beta_{1a}\tilde{f}_1) + (1-w)(\beta_{0b} + \beta_{1b}\tilde{f}_1)$$

$$r = \left[w\beta_{0a} + (1-w)\beta_{0b}\right] + \left[w\beta_{1a} + (1-w)\beta_{1b}\right]\tilde{f}_1$$

De modo a neutralizar o risco de seu portfólio, o agente deve torná-lo independente do fator 1. Assim, deve escolher w* tal que:

$$w^*\beta_{1a} + (1-w^*)\beta_{1b} = 0.$$

Então: $w^* = \dfrac{\beta_{1b}}{\beta_{1b} - \beta_{1a}}$ tal que $\beta_{1b} \neq \beta_{1a}$.

Por construção, o portfólio resultante é livre de riscos. Portanto, para que não exista **arbitragem**[10] no mercado, seu retorno deve ser igual ao do ativo livre de riscos:

$$w^*\beta_{0a} + (1-w^*)\beta_{0b} = R_0$$

$$\text{ou } w^*(\beta_{0a} - \beta_{0b}) = R_0 - \beta_{0b}.$$

Como $w^* = \dfrac{\beta_{1b}}{\beta_{1b} - \beta_{1a}}$, rearranjando, temos:

$$\frac{\beta_{0b} - R_0}{\beta_{1b}} = \frac{\beta_{0b} - \beta_{0a}}{\beta_{1b} - \beta_{1a}}.$$

[10]Arbitragem é a oportunidade de auferir lucros no mercado devido ao diferencial de rentabilidade entre os ativos. A condição de não-arbitragem é o ponto de partida para vários modelos de equilíbrio no mercado financeiro.

Se substituirmos o índice *b* pelo índice *a* e vice-versa, temos:

$$\frac{\beta_{0a}-R_0}{\beta_{1a}}=\frac{\beta_{0a}-\beta_{0b}}{\beta_{1a}-\beta_{1b}}$$

de modo que podemos igualar as duas expressões, dado que são iguais:

$$\frac{\beta_{0a}-R_0}{\beta_{1a}}=\frac{\beta_{0b}-R_0}{\beta_{1b}}=\delta_1 \text{ constante para todos os ativos a's .}$$

Como $\overline{R}_i=\beta_{0i}$ e rearranjando, temos a forma final da APT para um fator:

$$\overline{R}_a=R_0+\beta_{1a}\delta_1 \qquad (2.9)$$

Esta equação estabelece que o prêmio de risco é dado pela sensibilidade do ativo a em relação ao fator de risco vezes a constante, que pode ser interpretada como prêmio de risco pago a um portfólio que tem sensibilidade unitária ao risco do fator 1.

Suponhamos, agora, que o retorno do ativo seja dependente de dois fatores $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$, tal qual o modelo $\tilde{R}_a=\beta_{0a}+\beta_{1a}\tilde{f}_1+\beta_{2a}\tilde{f}_2$. O agente divide sua riqueza em três ativos a, b e c, nas proporções w_a, w_b e w_c. O retorno de seu portfólio pode, então, ser escrito como:

$$r=w_a\tilde{R}_a+w_b\tilde{R}_b+w_c\tilde{R}_c=$$

$$=w_a(\beta_{0a}+\beta_{1a}\tilde{f}_1+\beta_{2a}\tilde{f}_2)+w_b(\beta_{0b}+\beta_{1b}\tilde{f}_1+\beta_{2b}\tilde{f}_2)+w_c(\beta_{0c}+\beta_{1c}\tilde{f}_1+\beta_{2c}\tilde{f}_2)=$$

$$=w_a\beta_{0a}+w_b\beta_{0b}+w_c\beta_{0c}+\left[w_a\beta_{1a}+w_b\beta_{1b}+w_c\beta_{1c}\right]\tilde{f}_1+\left[w_a\beta_{2a}+w_b\beta_{2b}+w_c\beta_{2c}\right]\tilde{f}_2$$

O objetivo do investidor é o mesmo do caso anterior. Só que, agora, seu portfólio deve ser isolado de dois fatores, de modo a satisfazer o sistema abaixo:

$$w_a\beta_{1a} + w_b\beta_{1b} + w_c\beta_{1c} = 0$$
$$w_a\beta_{2a} + w_b\beta_{2b} + w_c\beta_{2c} = 0$$
$$w_a + w_b + w_c = 1$$

A última equação representa a restrição de riqueza investida. Como o portfólio tem risco nulo por construção, seu retorno, pela condição de não-arbitagem, deve ser igual ao do ativo livre de risco, de modo que:

$$w_a\beta_{0a} + w_b\beta_{0b} + w_c\beta_{0c} = R_0(w_a + w_b + w_c) = R_0$$

Em termos matriciais:

$$\begin{bmatrix} \beta_{0a} - R_0 & \beta_{0b} - R_0 & \beta_{0c} - R_0 \\ \beta_{1a} & \beta_{1b} & \beta_{1c} \\ \beta_{2a} & \beta_{2b} & \beta_{2c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $w_a + w_b + w_c \neq 0$, pelo menos uma das três variáveis deve ser diferente de zero. Assim, para que o sistema admita soluções diferentes da trivial (0,0,0), o determinante da matriz de coeficientes deve ser nulo. Ou seja:

$$\begin{vmatrix} \beta_{0a} - R_0 & \beta_{0b} - R_0 & \beta_{0c} - R_0 \\ \beta_{1a} & \beta_{1b} & \beta_{1c} \\ \beta_{2a} & \beta_{2b} & \beta_{2c} \end{vmatrix} = 0$$

Para que isso se verifique, uma das linhas deve ser combinação linear das demais. É isso o que suporemos, de modo que:

$$\overline{R}_a - R_0 = \beta_{1a}\delta_1 + \beta_{2a}\delta_2 \qquad (2.10)$$

o que constitui uma ampliação do APT para dois fatores.

A derivação do modelo APT nos leva à conclusão de que, sempre que não há risco específico, isto é, decorrente de fatores microeconômicos (como, por exemplo, os lucros de uma firma influenciando a cotação de suas ações), é possível construir portfólios livres de risco a partir da combinação de ativos arriscados. A presença de fatores microeconômicos, por sua vez, não inviabiliza a neutralização do risco, na medida em que pode-se lançar mão da diversificação como forma de proteger o valor total do portfólio. Vale ressaltar que, embora a diversificação constitua uma forma primitiva de *hedge*, ela pode ser muito útil para eliminar o risco específico, também chamado risco diversificável.

Portanto, pelo fato da diversificação produzir o efeito acima mencionado, podemos ignorar a presença de fatores microeconômicos de risco no portfólio dos agentes.

2.6. Mercados de risco e utilidade esperada:

No capítulo anterior, desenvolvemos o conceito de utilidade esperada como parâmetro para a tomada de decisão do agente diante de situações de incerteza. Podemos empregar também a noção de utilidade esperada para derivar uma versão simplificada do CAPM, ou seja, estamos agora interessados em estabelecer uma relação entre mercados de ativos de risco e a teoria da escolha sob incerteza.

A idéia do modelo de preços de ativo baseado na utilidade esperada está associada ao comportamento maximizador do agente, de modo que seu problema é:

$$\text{máx}(c,w_a)\ u(c) + \phi E[u(\tilde{c})]$$

$$\text{onde } \tilde{c} = (W - c)\left[R_0 + \sum_{a=1}^{A} w_a(\tilde{R}_a - R_0)\right]$$

Chamaremos o retorno, escrito entre colchetes, de $\tilde{R}$. O nosso objetivo é determinar a poupança do investidor no primeiro período, $W - c$, e as proporções de riqueza investida em cada ativo ($w_1,...,w_A$). As condições de primeira ordem podem ser escritas como:

$$u'(c) + \phi E\left[u'(\tilde{c})(-\tilde{R})\right] = 0$$

$$0 + \phi E\left[u'(\tilde{c})(W - c)(\tilde{R}_a - R_0)\right] = 0$$

Rearranjando os termos:

$$u'(c) = \phi E\left[u'(\tilde{c})\tilde{R}\right]$$

$$E[u'(\tilde{c})(\tilde{R}_a - R_0)] = 0$$

A primeira condição estabelece que a utilidade marginal no primeiro período deve ser igual à utilidade marginal esperada no período futuro, descontada a valor presente pelo fator ϕ. A segunda condição, por outro lado, diz que, no ponto de equilíbrio, a utilidade marginal esperada de converter o portfólio em ativo livre de risco deve ser igual a zero para todos os ativos a = 1,...,A.

A partir *da* segunda condição e da fórmula da covariância[11]:

$$E[u'(\tilde{c})(\tilde{R}_a - R_0)] = Cov(u'(\tilde{c}), \tilde{R}_a) + E[u'(\tilde{c})](\bar{\tilde{R}}_a - R_0)$$

Rearranjando, temos:

$$\bar{R}_a = R_0 - \frac{1}{E[u'(\tilde{c})]} Cov(\tilde{R}_a, u'(\tilde{c})) \tag{2.11}$$

Tal equação representa uma reminiscência do CAPM, com a diferença de que o prêmio de risco depende da covariância da utilidade marginal esperada e do retorno do ativo arriscado, ao invés do portfólio de mercado como no modelo

[11]Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).

completo. Como u" < 0, devido à hipótese de aversão ao risco, então Cov($\tilde{R}_a$,u'($\tilde{c}$)) < 0, de modo que o prêmio de risco é positivo.

Podemos aplicar também o resultado para a APT. Considere o modelo para dois fatores: $\tilde{R}_a = \beta_{0a} + \beta_{1a}\tilde{f}_1 + \beta_{2a}\tilde{f}_2$. Substituindo em (2.11):

$$\overline{R}_a = R_0 - \frac{1}{E[u'(\tilde{c})]}\left[\beta_{1a}Cov(u'(\tilde{c}),\tilde{f}_1) + \beta_{2a}Cov(u'(\tilde{c}),\tilde{f}_2)\right] \quad (2.12)$$

Deste modo, as constantes δ_1 e δ_2 derivadas no item anterior tornam-se proporcionais à covariância entre a utilidade marginal esperada do consumo e o fator de risco apropriado.

Portanto, a teoria da utilidade esperada nos permite derivar algumas interpretações diferentes para os parâmetros do CAPM e da APT. Vale lembrar que ambos os modelos teóricos são a fonte para as modernas teorias de equilíbrio no mercado financeiro e, foi por esta razão que decidimos abordá-las. Nos próximos capítulos, iremos analisar estratégias de *hedge* mais avançadas, realizadas em mercados de derivativos.

Capítulo III

Mercados Futuros e redução de risco

No capítulo anterior, abordamos alguns modelos teóricos que procuram ajustar duas propriedades importantes dos investimentos, isto é, retorno e risco, de modo a permitir aos agentes uma compensação pelo fato de enfrentarem situações incertas na composição de seu portfólio.

A partir dos anos 70, com a adoção de taxas de câmbio e de juros flutuantes no contexto do desmoronamento do sistema de Bretton Woods, os contratos financeiros passaram a embutir um volume maior de risco, decorrente das oscilações das variáveis macroeconômicas acima citadas. Observou-se, no período citado, um crescimento da volatilidade dos ativos, o que estimulou o desenvolvimento de contratos destinados a minimizar os riscos de determinadas operações e, conseqüentemente, proteger o valor de portfólio dos indivíduos diante da instabilidade do cenário internacional.

É neste contexto que ganham força os chamados contratos **derivativos**, ou seja, produtos cujos valores dependem de variáveis mais básicas, tais quais o preço de um ativo propriamente dito. Uma das funções primordiais dos derivativos é possibilitar aos investidores realizarem o *hedge*, isto é, tentar eliminar os riscos financeiros de seu portfólio. Vale ressaltar que tais contratos destinam-se, basicamente, ao contorno dos riscos não-diversificáveis, isto é, aqueles decorrentes do cenário macroeconômico como um todo. Conforme analisamos no capítulo anterior, os riscos específicos dos ativos podem ser reduzidos através da diversificação.

Estamos interessados, mais especificamente, em dois tipos de derivativos: os mercados futuros e os mercados de opções. O item 3.1 irá abordar os conceitos básicos de uma negociação a futuro, bem como alguns elementos operacionais de tais mercados e, no item 3.2, analisaremos como os contratos futuros podem ser usados para fins de redução de risco (*hedge*). Os mercados de opções serão objeto de estudo do capítulo seguinte.

3.1. Conceitos de mercados futuros e detalhes operacionais:

Os mercados futuros não são novidade na história econômica. Os primeiros registros de negociações desta natureza remontam à Idade Média, quando produtores rurais e mercadores procuravam contratar, antecipadamente, um preço para a colheita que seria comercializada posteriormente: o agricultor, ao estabelecer o contrato, procurava se proteger de uma súbita baixa no preço de seu produto, decorrente de uma possível abundância de oferta; o mercador, por outro lado desejava se precaver contra uma alta quando fosse adquirir o bem, em virtude de uma indesejável quebra de safra. É interessante observar como cada uma das partes contratantes neste exemplo apostava em movimentos opostos de preços.

No decorrer dos tempos, os mercados futuros foram ganhando graus de sofisticação no sentido de evoluir para negociações em locais apropriados. Em 1848, foi fundada a *Chicago Board of Trade (CBOT)*, com vistas a padronizar a qualidade e a quantidade dos grãos negociados pelos produtores e comerciantes regionais. Cabe registrar, também, que tais mercados sempre foram incompreendidos (o governo alemão chegou a proibir negociações a futuro em 1896, voltando atrás quatro anos depois) e confundidos com especulações, de modo que uma análise mais cuidadosa pode revelar sua real importância.

O exemplo do mercador e do comerciante medievais nos permite intuir a concepção básica de tais negociações; trata-se de estabelecer previamente um preço para uma *commodity*, que será negociada em uma data futura. Em outras palavras, o preço é estabelecido em data anterior à negociação propriamente dita, com vistas a estabelecer uma garantia contra perdas futuras. Ao estabelecer um contrato de compra (venda) futuro de determinado ativo, o agente adquire a obrigação de comprar (vender) o bem ao preço estabelecido previamente, denominado preço futuro.

Atualmente, os contratos futuros são negociados em Bolsas especializadas, as quais estabelecem a padronização dos contratos, tais quais características detalhadas do ativo correspondente, o tamanho do contrato, os procedimentos de entrega (local, data e hora) e os meses de vencimento. Além disso, as bolsas são responsáveis pela divulgação das cotações, pelo estabelecimento de limites diários para as suas cotações e pelo limite de posições, ou seja, o número máximo de contratos que um agente pode deter. A regulamentação das Bolsas varia de país para país.

A título de exemplificação[1], a BM&F (Bolsa de Mercadorias e de Futuros) de São Paulo regulamenta seu contrato futuro de boi gordo da seguinte forma:

Tamanho do contrato	330 arrobas líquidas
Vencimento	fev, abr, jun, ago, set, out, nov e dez de 96
Último dia de negociação	último dia útil do mês de vencimento
Oscilação máxima diária	1 ponto/@ para todos os vencimentos
Variação mínima	0,01 ponto/@ líquida

[1]Dados extraídos da Síntese de Dados/BM&F- abril de 1996. A especificação, na realidade, é mais detalhada e envolve alguns dados que serão abordados posteriormente.

Uma observação interessante quanto à negociação dos modernos contratos futuros é que em apenas 2% deles a entrega efetiva da mercadoria se realiza; nas Bolsas contemporâneas, a esmagadora maioria dos contratos é liquidada financeiramente, ou seja, o agente portador de um certo número de contratos de compra, por exemplo, encerra posição na data de vencimento através da aquisição de um número correspondente de contratos de venda, e os ganhos e perdas são apurados diariamente pela Câmara de Compensação (cuja função será descrita logo mais). A liquidação financeira possui grandes vantagens em relação à liquidação física, na medida em que confere liquidez e flexibilidade às operações.

A literatura relativa ao assunto agrupa os participantes dos mercados futuros em três categorias básicas:

a) os *hedgers*: são os agentes que estabelecem contratos futuros com vistas a proteger operações financeiras dos efeitos da volatilidade. São agentes "avessos ao risco", tal qual conceituamos no capítulo 1, e sua atuação será analisada com detalhes no próximo item;

b) os especuladores: são agentes que abrem posições, apostando na alta ou na queda de preços, isto é, procuram ganhar com base na intuição quanto ao preço futuro na data de vencimento do contrato; os indivíduos que apostam na alta procuram adquirir contratos de compra, ao passo que os que apostam na baixa adquirem contratos de venda, a fim de lucrarem com a diferença entre o preço a vista e o preço futuro no vencimento. Apesar da carga de preconceito que o termo "especulação" reúne contra si, tais agentes têm importante função nos mercados futuros, na medida em que garantem liquidez necessária para que o *hedger* realize suas operações. É intuitivo concluir que *hedger* e especulador constituem as duas partes do contrato futuro e ambos têm concepções opostas quanto ao comportamento das variáveis macroeconômicas relevantes para a negociação entre ambos.

c) <u>os arbitradores</u>: agentes que, com minuciosa observação dos movimentos de preço, detectam oportunidades de auferirem lucros sem risco através da operação simultânea em dois ou mais mercados, devido à diferenças de cotação nos mesmos. À medida que os agentes detectam tais ensejos, as cotações, pela lei da oferta e procura, tendem a se igualar, de modo que podemos partir da hipótese de que as oportunidades de arbitragem não existem. Apesar disso, os arbitradores são essenciais, na medida em que garantem que o preço a vista do objeto de negociação e o preço futuro do respectivo contrato convirjam, conforme se aproxima a data de vencimento.

A aproximação do preço à vista e do preço futuro na data de vencimento do contrato é um resultado da ação dos arbitradores e é fundamental para que sejam apurados os ganhos e as perdas dos investidores ao fim de cada período. Suponhamos duas situações possíveis:

a) Preço futuro maior que o preço à vista ($P_F > P_V$): neste caso, as oportunidades de arbitragem estimulam os operadores a venderem contratos futuros, comprarem o ativo e fazerem a entrega, apurando o lucro com a diferença entre P_F e P_V; o preço futuro, assim, tende a cair com o excessivo número de contratos de venda, levando ao nivelamento com o preço à vista.

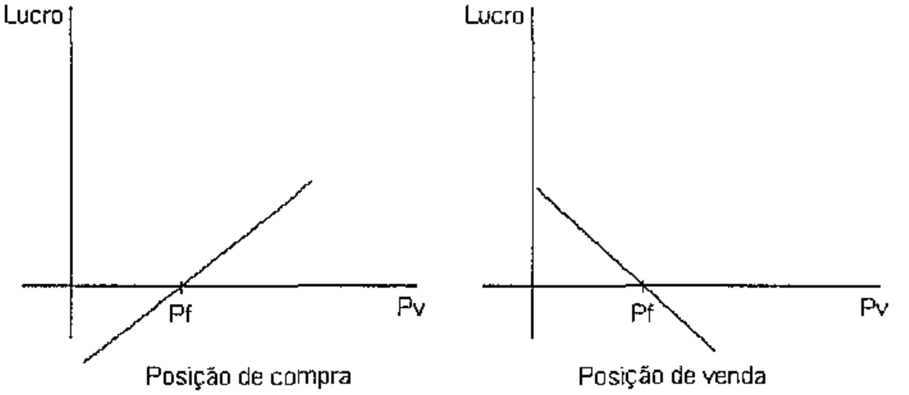
b) Preço futuro menor que o preço à vista ($P_F < P_V$): os agentes procuram abrir posições de compra e esperar a entrega para posterior comercialização no mercado à vista (*spot*), o que tende a produzir uma elevação do preço futuro.

Para ilustrarmos uma operação de investimento em mercados futuros, suponhamos um agente que adquire, no mês de setembro/96, um contrato de venda de café contendo 100 sacas de 60 kg, com vencimento em dezembro de 1996. No dia 6/09/96, a saca de café estava cotada, na BM&F, a aproximadamente R$ 125,70[2] para vencimento em dezembro. O investidor, portanto, passa a ter a obrigação de vender 100 sacas de soja no prazo

[2]Folha de São Paulo, 7/09/1996, p. 2-10.

estabelecido. Os ganhos e as perdas do agente são apurados em função do preço à vista do produto na época de vencimento, de modo que ele só obterá um ganho se a saca de café valer menos que R$ 125,70 em dezembro. Digamos que tal preço seja R$ 124,00: o investidor terá obtido um ganho de 100 x (125,70 - 124,00) = 170, já que tem a oportunidade de vender o bem por um preço maior que o de mercado[3]. Por outro lado, se a saca de café estiver valendo mais que o preço futuro contratado, digamos R$ 127,00, o investidor terá incorrido em perda de 100 x (125,70 - 127,00) = -130[4]. Vale ressaltar que o investidor pode encerrar posição antes do término do contrato, se julgar conveniente.

Os ganhos e as perdas com as negociações a futuro podem ser ilustrados nos gráficos (3.A) e (3.B). O eixo vertical representa o lucro da operação e o eixo horizontal, o preço na data de vencimento.



Gráficos (3.A) e (3.B): Se o contrato for de compra, o investidor só lucrará na operação a futuro se o preço a vista na data do vencimento for maior que o preço futuro. Em caso de posição de venda, dá-se o contrário.

Uma operação a futuros típica embute alguns riscos. O maior deles é a possibilidade de desistência ou falta de recursos de uma das partes. Para tentar amenizar a possibilidade de inadimplência, o corretor exige, por ocasião do estabelecimento do contrato, que o investidor deposite recursos em uma conta de margem: a margem inicial é um montante de recursos que o investidor deve

[3]No limite, podemos imaginar que o agente compra no mercado à vista por R$ 124,00 e vende, cumprindo a obrigação a futuro, por R$ 125,70. Na prática, no entanto, ele encerra sua posição abrindo um contrato de compra com preço futuro de R$ 124,00.
[4]O sinal negativo indicará, sempre, dispêndio de dinheiro.

adiantar no momento da abertura de posições; ao final de cada dia de negociação, durante o período de vigência do contrato, a margem é ajustada, refletindo ganhos e perdas dos agentes. Por exemplo, na nossa ilustração de futuro café, se no segundo dia o preço futuro do produto for R$ 125,50, o investidor recebe 100 x (125,70 - 125,50) = 20; por outro lado, se o mesmo for R$ 125,90, o agente deve depositar 100 x (125,70 - 125,90) = -20. Vale ressaltar que a margem inicial pode ser feita em títulos ou em moeda, e seus valores são determinados pela bolsa, dependendo da volatilidade do preço do objeto de negociação.

As operações de débito e crédito das contas de margem, bem como a apuração de ganhos e perdas, são agilizadas por uma Câmara de Compensação, que pode ser um departamento da Bolsa ou uma empresa contratada. Sua função é manter o registro de todos os negócios realizados durante o dia, de modo a calcular a posição líquida de cada um dos seus membros. O membro da compensação é o responsável pela liquidação das operações e deve manter junto à Câmara um depósito de garantia para compor um fundo destinado a conferir liquidez às operações em caso de necessidade. Cada investidor deve possuir um representante-membro da compensação.

Até agora, focalizamos apenas os contratos futuros negociados em bolsas. No entanto, devemos mencionar a existência de uma variação de tais contratos, isto é, o mercado a termo. Tais contratos, em essência, possuem a mesma concepção dos mercados futuros descritos até agora, com a diferença de que não são necessariamente negociados em bolsa. Tais contratos pertencem à categoria dos chamados *mercados de balcão,* e não são padronizados, ou seja, seus termos são livremente estabelecidos entre as partes. Além disso, os contratos a termo não são intercambiáveis como os contratos futuros (em que a recompra/revenda é possível) e não possuem margem de garantia.

Os operadores das bolsas de futuros podem ser agrupados em dois tipos: os comissionados, que trabalham para terceiros cobrando corretagem em troca, e os especiais, que agem por conta própria. As corretoras atuam nas bolsas através de operadores devidamente credenciados, os quais negociam seguindo instruções, denominadas **ordens**, que podemos classificar em três tipos principais:

1. Ordem a mercado: determina que o negócio deve ser executado pelo melhor preço possível;

2. Ordem limitada: especifica o preço máximo ou mínimo (dependendo da posição) sob o qual deve-se negociar determinado contrato de compra ou venda, respectivamente.

3. Ordem de *stop*: ordem com preço determinado, que passa a ser considerada "a mercado"quando o preço fixado for alcançado.

Por fim, cabe ressaltar que as cotações são diariamente publicadas em jornais. Estes trazem o preço de abertura, o máximo e o mínimo das cotações ao longo do dia, além do preço de ajuste (*settle*), ou seja, a média dos preços pelos quais o contrato foi negociado imediatamente antes do término do pregão do dia. O *settle* é importante para a apuração de ganhos e perdas diários, além das margens. Costuma-se também publicar a variação do preço de ajuste em relação ao pregão anterior.

3.2. Estratégias de *hedge* em mercados futuros:

Conforme explicado anteriormente, o *hedge* constitui um tipo de comportamento voltado para a tentativa de eliminação de riscos decorrentes de variáveis macroeconômicas, tais quais taxa de câmbio e taxa de juros, ou de variáveis mais básicas, como preço de *commodities*. Neste sentido, os mercados futuros possibilitam aos agentes desenvolverem formas avançadas de gerenciamento de risco, de modo a reduzirem as incertezas quanto ao valor futuro de seu portfólio ou de determinadas operações.

Para ilustrarmos uma situação contemporânea de negociação a futuro com vistas a eliminação de riscos, consideremos uma empresa que deve pagar, em novembro de 1996, a quantia de 1 milhão de dólares a uma firma estrangeira, a título de remuneração de serviços prestados, e está preocupada com a possibilidade de desvalorização da moeda nacional até a data em que efetuará a aquisição das divisas. Para se proteger do risco, ela pode contratar uma corretora que invista nos mercados futuros. No dia 5/09/96, o dólar comercial estava sendo negociado a R$ 1,0175 e, no mesmo dia, o preço futuro do dólar na BM&F, para vencimento em novembro, era de R$ 1,037[5]. Cada contrato futuro compreende US$ 50000[6].

A estratégia da empresa é adquirir 20 contratos de compra de dólares para vencimento em novembro. Dois cenários podem ocorrer:

a) o preço do dólar em novembro ser superior a R$ 1,037 (digamos R$ 1,04); neste caso, a empresa incorrerá em perdas no mercado à vista, mas ganhará nos mercados futuros. O resultado da operação é:

Mercado futuro: 20 x 50000 x (1,04 - 1,037) = 3000[7]

Mercado à vista: 1000000 x (-1,04) = -1040000[8]

Total dispendido: 3000 - 1040000 = -1037000.

b) o preço do dólar em novembro ser inferior a R$1,037 (digamos R$ 1,035); ao contrário da possibilidade anterior, a empresa irá perder nos mercados

[5]Dados extraídos da Folha de São Paulo, 6/09/96, p. 2-10.
[6]Síntese de Dados, BM&F, abril/1996. Segundo este suplemento, os contratos futuros cujos vencimentos são posteriores a nov/96 passam a ter este tamanho, que anteriormente, era de US$ 20000.
[7]Lembrando que o preço futuro dos novos contratos e o preço a vista se igualam na data de vencimento, de modo que a firma encerra posição adquirindo 20 contratos de venda, os quais valem R$ 1,04.
[8]O sinal negativo indica dispêndio de dinheiro.

futuros, mas ganhará ao comprar no mercado à vista, já que o preço é menor que o desejado:

Mercado futuro: 20 x 50000 x (1,035 - 1,037) = -2000

Mercado à vista: 1000000 x (-1,035) = -1035000

Dispêndio total: -(2000 + 1035000) = -1037000

O exemplo deixa claro que, qualquer que seja o cenário futuro, o operador garante um dispêndio de R$ 1037000 quando efetuar, em novembro, a compra da moeda estrangeira. Este é um contrato de *hedge de compra*, já que garante-se, na prática, um preço de R$1,037 para o dólar, independentemente de quaisquer flutuações de preços.

Observando o exemplo acima, conclui-se que o *hedger* deve assumir, nos mercados futuros, uma posição que lhe permita neutralizar os riscos de sua operação no mercado à vista. Em outras palavras, se o agente está em uma situação em que deve comprar ativos em data posterior ou deve dispender recursos, deve assumir posição comprada, ao passo que se deseja vender ativos em data futura ou tem recursos a receber, deve assumir posição vendida.

O *hedge de venda* é análogo ao de compra, e deve ser usado quando o investidor tem recursos a receber no mercado à vista. Suponhamos, por exemplo, que um pecuarista esteja preocupado com a possibilidade de queda do preço do boi quando for vender 990 arrobas em dezembro. Ele pode, representado por uma corretora, abrir posições de venda, adquirindo 3 contratos (já que, na BM&F, cada contrato de futuro de boi gordo possui 330 arrobas líquidas), garantindo um preço de venda para seu produto: no dia 6/09/96, a cotação da arroba do boi gordo na BM&F era de, aproximadamente, R$ 23,51 para vencimento em dezembro. Independentemente da oscilação do preço do mencionado bem, o produtor garante um preço de R$ 23,51 para a arroba no mês de vencimento, já que:

a) se em dezembro o preço for de R$ 23,00, o pecuarista terá incorrido em perdas no mercado à vista, mas ganhará nos futuros, de modo que o resultado final da operação será:

Mercado futuro: 3 x 330 x (23,51 - 23,00) = 504,90

Mercado à vista: 990 x 23,00 = 22770,00

Total recebido: 504,90 + 22770 = 23274,90;

b) por outro lado, se a arroba do boi estiver valendo mais que o preço futuro na data de vencimento, digamos R$ 23,70, o *hedger* incorrerá em perdas no mercado futuro, mas sairá lucrando no mercado à vista:

Mercado futuro: 3 x 330 x (23,51 - 23,70) = -188,10

Mercado à vista: 990 x 23,70 = 23463,00

Total da operação: 23463 - 188,10 = 23274,90.

Mais uma vez, observamos que o investidor pôde garantir uma receita para a comercialização de seu bem, independentemente do comportamento do preço. Quando isso acontece, dizemos que o ***hedge* é perfeito**, ou seja, é possível eliminar totalmente o risco e garantir um preço para o bem. Na realidade, o *hedge* perfeito é raro, e depende de três condições básicas: que o bem a ser *hedgeado* seja o mesmo do contrato, que o prazo do contrato coincida com o prazo da operação que se deseja proteger e, fundamentalmente, que o número de contratos adquiridos cubra perfeitamente o volume do ativo. Podemos mostrar matematicamente e sob a hipótese de custos de corretagem nulos, que se as três condições acima forem respeitadas, o *hedge* pode ser executado com perfeição.

Sejam X a quantidade do ativo a ser *hedgeado*, q o tamanho do contrato e n o número de contratos adquiridos, tal que $X/q = n$, tal que $n \in \mathbb{N}$ (conjunto dos naturais). Suponhamos que o contrato para daqui a s meses seja negociado a um preço futuro F. O preço à vista no mês de abertura de posição é P_t e, no período de vencimento, P_{t+s}. Consideremos duas situações:

1. Em caso de *hedge de compra*, o agente adquire n contratos de compra, já que irá comprar o ativo no montante X no mês t+m. O resultado total da operação é:

Mercados futuros: $nq(P_{t+m} - F) = Xp_{t+m} - XF$
Mercado à vista: $-Xp_{t+m}$
Resultado de ambos: $Xp_{t+m} - XF - Xp_{t+m} = - XF$

Independentemente de se p_{t+m} maior ou menor que p_t, garante-se um dispêndio -XF.

2. Em caso de *hedge de venda*, o agente abre posição de venda com n contratos, já que irá vender X quantidades do ativo no mês t+m. O resultado é:

Mercados futuros: $nq(F - P_{t+m}) = XF - Xp_{t+m}$
Mercado à vista: Xp_{t+m}
Resultado de ambos: $XF - Xp_{t+m} + Xp_{t+m} = XF$

Do mesmo modo, garante-se o recebimento de XF. Devemos recordar que, embora estejamos comparando os resultados em ambos os mercados, o agente encerra posição nos mercados futuros, abrindo posição contrária em um número equivalente de contratos. Vale lembrar também que, na data de vencimento, por razões já mencionadas, o preço futuro dos novos contratos é igual ao preço à vista.

A realização do *hedge* perfeito, no entanto, esbarra em dificuldades derivadas das próprias hipóteses que assumimos, isto é, a observação das mesmas é muito rara na prática: muitas vezes, não existe um contrato futuro específico para um determinado bem, de modo que é necessário encontrar um produto que seja o mais perfeitamente possível correlacionado com o ativo a ser *hedgeado*; as Bolsas especificam datas de vencimento, de modo que estas podem não coincidir com os prazos da operação no mercado à vista; por fim, o número de contratos necessários nem sempre (ou quase nunca) coincide com o exato volume do ativo que se deseja proteger. Estas constatações, portanto, dificultam a perfeita neutralização dos riscos, de modo que devem haver mecanismos de otimização das estratégias de *hedge*.

Antes de passarmos à análise dos métodos que procuram maximizar a eficiência do *hedge*, devemos fazer algumas considerações a respeito de seus prós e contras. Os argumentos a seu favor residem na possibilidade de reduzir riscos de vários tipos de operações comerciais ou financeiras, com vistas a evitar surpresas desagradáveis; por outro lado, entretanto, o investidor poderia se arrepender de ter estabelecido o contrato futuro destinado a neutralizar riscos, já que a situação no mercado à vista poderia ter sido favorável, permitindo lucros maiores (é o caso b do exemplo do boi gordo). Mas devemos nos lembrar de que, por hipótese, o *hedger* é um indivíduo avesso ao risco, e seu objetivo é superar as incertezas quanto ao sucesso de suas operações.

O maior argumento contra o *hedge* é a impossibilidade de eliminar alguns riscos, já que o ativo a ser *hedgeado* nem sempre é o mesmo que o especificado no contrato e o *hedger* poderá não saber com certeza a data em que o ativo será comprado ou vendido. Além disso, a estratégia adotada pode exigir que o contrato futuro seja encerrado bem antes de sua data de vencimento, o que nos remete ao chamado risco da **base**. A base, em um contrato de *hedge*, é definida como a diferença entre o preço à vista do ativo e o preço futuro do contrato. Em termos matemáticos:

Base = preço à vista do ativo a ser *hedgeado* - preço futuro do contrato utilizado

$$B = p_V - p_F$$

Em outras palavras, o risco da base é a incerteza quando à diferença entre ambos os preços. Se o ativo *hedgeado* e e o objeto contratual forem os mesmos, a base será zero no vencimento do contrato, já que o preço futuro converge para o preço à vista. Antes do vencimento, por outro lado, a base pode ser positiva ou negativa e seu risco torna-se relevante quando ativo e objeto contratado não são os mesmos e quando é preciso encerrar posição antecipadamente.

Se o preço à vista é maior que o preço futuro, a base é positiva, o que indica seu fortalecimento; caso contrário, dizemos que a base está enfraquecendo. Sejam Pv_t e Pf_t os preços à vista e futuro no instante t e seja B_t a base, com t = 1,2. Consideremos um contrato de *hedge* iniciado em t = 1 e encerrado em t = 2:

$$B_1 = Pv_1 - Pf_1 \quad \text{e} \quad B_2 = Pv_2 - Pf_2$$

Em se tratando de *hedge de venda*, o agente venderá o ativo no instante 2 e abre posição vendida no instante 1, de modo que o resultado de sua estratégia é:

Preço recebido: Pv_2
Lucro na posicão futura: $Pf_1 - Pf_2$
Preço efetivo obtido com a realização do *hedge*: $Pv_2 + Pf_1 - Pf_2 = Pf_1 + B_2$

Para o caso de *hedge de compra*, o indivíduo deverá comprar o ativo no instante 2, abrindo uma posição comprada no instante 1. Analogamente:

Preço pago: Pv_2
Prejuízo da posição futura: $Pf_1 - Pf_2$
Preço efetivo pago com a realização do *hedge*: $Pv_2 + Pf_1 - Pf_2 = Pf_1 + B_2$

É intuitivo que, em ambos os casos, se o agente conhecesse previamente a base no instante 2, o *hedge* seria perfeito. A mesma dificuldade existe quando o fator de risco para o ativo *hedgeado* é diferente do fator de risco para o ativo contratado no mercado futuro. Neste caso, seja Pv_2^* o preço à vista do produto especificado no contrato. O preço garantido com o *hedge* é:

$$Pv_2 + Pf_1 - Pf_2$$

Se somarmos e subtrairmos Pv_2^* na relação acima, temos:

$$Pf_1 + (Pv_2^* - Pf_2) + (Pv_2 - Pv_2^*)$$

onde os termos entre parênteses representam os dois componentes da base, isto é, a diferença entre o preço do ativo e o preço futuro do contrato (referente a outro ativo) e a diferença entre os preços dos bens no instante 2. Se o ativo do contrato for o mesmo que se deseja *hedgear*, $Pv_2 = Pv_2^*$.

A variação da base ao longo da vigência do contrato futuro pode melhorar ou piorar a situação do investidor, dependendo de sua posição. Designando por ΔB a a mudança da base, a tabela abaixo resume os resultados para cada tipo de contrato:

Tabela 3. 1: Variação da base e posições

Variação da base	Hedge de compra	Hedge de venda
$\Delta B > 0$	piora	melhora
$\Delta B < 0$	melhora	piora

Anteriormente, fizemos referência ao fato de que nem sempre é possível cobrir perfeitamente a operação, ou seja, compor em futuros uma relação de um para um com o montante do ativo que será *hedgeado*. Com vistas a maximizar a eficiência da estratégia de minimização de riscos, devemos encontrar o número ótimo de contratos.

Se esperamos vender n_A unidades de um ativo no instante t = 2 e desejamos montar a estratégia no instante t = 1, vendendo contratos futuros de n_F unidades de um ativo semelhante, definimos **h** a relação entre ambos os montantes, isto é:

$$h = \frac{n_F}{n_A} \qquad (3.1)$$

O resultado total da operação, quando a estratégia de *hedge* é levada em consideração, é γ, tal que:

$$\gamma = Pv_2 n_A - (Pf_2 - Pf_1)n_F$$

ou, se somarmos e subtraírmos o termo $Pv_1 n_A$, temos:

$$\gamma = Pv_1 n_A + (Pv_2 - Pv_1)n_A - (Pf_2 - Pf_1)n_F \qquad (3.2)$$

Substituíndo (3.1) em (3.2) e reescrevendo:

$$\gamma = Pv_1 n_A + n_A(\Delta Pv - h\Delta Pf)$$

onde $\Delta Pv = Pv_2 - Pv_1$ e $\Delta Pf = Pf_2 - Pf_1$.

A quantidade ótima de contratos pode ser encontrada através da minimização da variância do resultado total da estratégia, sob o argumento de que o agente é avesso ao risco. Como Pv_1 e n_A são conhecidos no instante t = 1, estas variáveis podem ser ignoradas para o cálculo da variância de γ, de modo que:

$$Var(\gamma) = Var(\Delta Pv - h\Delta Pf)$$

Aplicando a fórmula da variância de uma soma na expressão acima:

$$Var(\Delta Pv - h\Delta Pf) = Var(\Delta Pv) + h^2 Var(\Delta Pf) - 2hCov(\Delta Pv, \Delta pf) =$$

$$= \sigma_V^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_V\sigma_F$$ [9]

Para encontrarmos h* que minimiza a variância do resultado, a primeira derivada deve ser nula:

$\frac{\partial Var(\Delta Pv - h\Delta Pf)}{\partial h} = 0$, isto é, $2h\,\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_V\sigma_F = 0$, de modo que:

$$h^* = \frac{\rho\sigma_V\sigma_F}{\sigma_F^2} = \frac{\rho\sigma_V}{\sigma_F}$$

O h* é denominado **razão de *hedge* de variância mínima** e define a proporção do tamanho da posição em contratos futuros com relação à extensão do risco com que o *hedger* se depara, de modo a otimizá-lo. Tal relação pode ser representada graficamente:

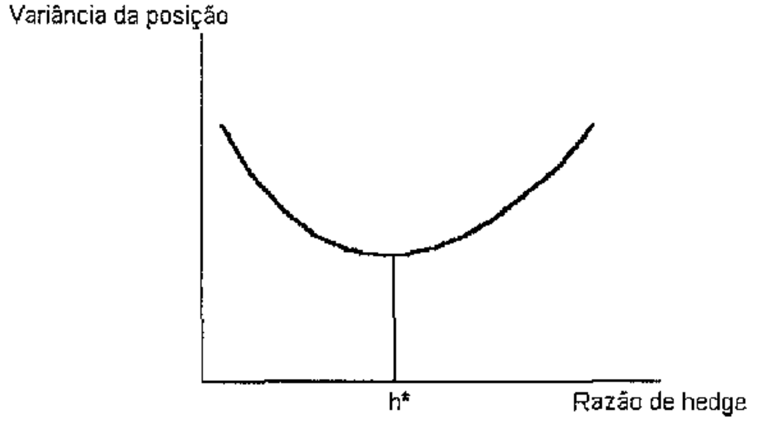


Gráfico (3.C): Razão de *hedge* de variância mínima.

Se $\rho = 1$ e $\sigma_F = \sigma_V$, então $h^* = 1$, isto é, o preço futuro reflete com perfeição o preço à vista. Por outro lado, se $\rho = 1$ e $\sigma_F = 2\sigma_V$, $h^* = 0,5$, indicando que o preço futuro é sempre o dobro do preço à vista.

[9]Dado que $Cov(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$.

Vale ressaltar que σ_F, σ_V e ρ são calculados com base em dados históricos a respeito das variações dos preços à vista e futuro. A razão h* nos permite definir o conceito de efetividade do *hedge*, que é a proporção da variância (e, conseqüentemente, do risco) que pode ser eliminada pela realização da estratégia. Em termos matemáticos, a efetividade do *hedge* é o quadrado do coeficiente de correlação, ρ^2:

$$\rho^2 = h^{*2}\sigma^2_F/\sigma^2_V$$

Alguns tipos de contrato nos permitem especificar com maior precisão o conceito de efetividade do *hedge*. Os futuros de índices de ações, por exemplo, são utilizados para *hedgear* carteiras de ações e o coeficiente de correlação pode ser substituído, como uma boa aproximação, pelo β, tal qual conceituado no capítulo anterior. As razões para proteger as carteiras de ações residem na necessidade, muitas vezes, de se manter o portfólio por longos períodos de tempo, evitando-se os efeitos da volatilidade dos preços das ações no curto prazo. O *hedge*, neste caso, é menos perfeito ainda, pois ele só oferece proteção contra o risco das oscilações de mercado, o que constitui apenas um dos fatores causadores da volatilidade de preço das ações.

Em algumas situações, o vencimento da operação cujo ativo deseja-se *hedgear* no mercado à vista é posterior ao vencimento do contrato futuro. Neste caso, o investidor deve **rolar o *hedge***, isto é, encerrar posição em futuros e assumir a mesma posição em outro contrato com mesma data de entrega posterior. A rolagem do *hedge* constitui uma forma de se lidar com o problema da incompatibilidade de prazos entre mercados à vista e futuro, e pode ser realizada diversas vezes.

Para concluir, a realização do *hedge perfeito,* na prática, é uma tarefa muito complicada, mas existem mecanismos para tornar eficiente a estratégia de redução de riscos: quando o ativo *hedgeado* não é o mesmo do contrato futuro, a observância do comportamento da base constitui um instrumento útil para controle de risco; o número ótimo de contratos, quando não é possível cobrir perfeitamente a operação à vista, é obtido pelo *hedge* de variância mínima; por fim, a rolagem do *hedge* tem como objetivo básico o casamento de prazos.

Em síntese, a tabela abaixo nos fornece o *hedge* apropriado para cada tipo de incerteza envolvida. Devemos salientar que, embora o risco não possa ser neutralizado de modo perfeito em decorrência das dificuldades acima apontadas, uma estratégia de *hedge* é fundamental para estimular operações de investimento em um contexto de incertezas quanto ao comportamento das principais variáveis macroeconômicas.

Tabela 3. 2: Hedge apropriado

Risco	*Hedge apropriado*
Lucro quando o preço do ativo subir e prejuízo quando o mesmo cair	Venda
Lucro quando o preço do ativo cair e prejuízo quando o mesmo subir	Compra

No capítulo seguinte, abordamos os contratos de opções e sua utilidade para a realização de estratégias de redução de riscos.

Capítulo IV

Mercado de opções e o *hedge*

Diferentemente dos contratos futuros analisados no capítulo anterior, os contratos de opções garantem ao seu titular o direito, e não a obrigação, de comprar ou vender um bem em uma data futura, a um preço pré-estabelecido. A obtenção de tal direito, todavia, requer um pagamento antecipado. As opções são extremamente úteis para os agentes avessos ao risco, na medida em que as estratégias de *hedge* postas em prática com tais modalidades permitem ajustes ao longo do tempo de vigência do contrato.

No item 4.1, descreveremos a mecânica operacional deste mercado; no item 4.2, faremos um estudo das possibilidades de combinar posições com opções; por fim, no item 4.3, estudaremos a possibilidade de ajustes nas estratégias com tais contratos, no intuito de eliminar riscos.

4.1. O funcionamento do mercado de opções:

Quanto ao tipo de transação embutida, as opções são classificadas em dois grupos:

• opção de compra (*call)*: proporciona a seu titular o direito de comprar um ativo em determinada data futura, a um preço pré-determinado, denominado *preço de exercício*;

• opção de venda (*put*): garante o direito de vender o bem em data posterior (denominada data de exercício). Vale ressaltar que o estabelecimento de um contrato de opção exige o desembolso de uma quantia, denominada *preço da opção (ou prêmio).*

Quanto ao prazo de vigência do contrato, denominado *tempo de vida,* as opções são classificadas em **opções americanas**, que podem ser exercidas a qualquer hora até a data de vencimento, e as **opções européias**, cujo exercício só é permitido na data de vencimento do contrato. Embora as opções americanas sejam mais comuns nas bolsas, as opções européias são mais fáceis de serem analisadas e modeladas e a maioria das propriedades daquelas derivam destas. A menos que seja feita menção, trataremos das opções de estilo europeu.

A título de ilustração, com vistas a esclarecer a modalidade, consideremos um exemplo de operação na bolsa de valores: no dia 23/10/96, as opções de compra de dólar comercial na Bolsa de Mercadorias & Futuros[1] estavam cotadas a R$ 2,00 (preço da opção), com preço de exercício 1028 (R$/1000US$) e vencimento em novembro. Cada contrato especifica a quantidade de US$ 10.000,00; um agente que adquire a opção de compra só irá exercê-la ao término do período se o preço do dólar no mercado à vista for superior a R$ 1,028, de modo a obter um ganho com a diferença de cotação; por outro lado, se o dólar estiver abaixo de R$ 1,028 o agente prefere não exercer a opção (diz-se, neste caso, que a opção vira pó). É intuitivo que, em se tratando de opção de venda, ocorre o inverso, ou seja, o indivíduo só irá exercê-la se o preço à vista for menor que o preço de exercício.

Antes de generalizarmos a operação, precisamos esclarecer que existem quatro posições possíveis em um mercado de opções:

1. *Posição comprada em uma opção de compra*: é o agente descrito no exemplo acima que, mediante um custo (prêmio), adquire o direito de comprar um determinado ativo em uma data futura.

[1] Fonte: Home Page BM&F. http://www.bmf.com.br

2. *Posição comprada em uma opção de venda*: análoga à posição anterior, só que, neste caso, adquire-se o direito de vender o bem ao preço pré-estabelecido.

3. *Posição vendida em uma opção de compra*: é o agente que lança no mercado uma opção de compra. Isso significa que ele fica obrigado a vender o ativo na quantidade e ao preço estabelecidos se o comprador da opção quiser exercê-la.

4. *Posição vendida em uma opção de venda*: análoga à anterior, só que agora o lançador fica obrigado a comprar o bem em caso de exercício por parte do detentor da opção.

Podemos expressar os retornos das posições em termos gerais. Seja P_X o preço de exercício de uma opção[2] e P_V o preço à vista do ativo especificado no contrato na ocasião do vencimento. Temos os seguintes retornos possíveis para cada posição assumida no mercado:

• Posição comprada em uma *call:* se $P_X > P_V$, a opção não será exercida e o investidor não obtém ganho; por outro lado, se $P_X < P_V$, a opção será exercida e o investidor obtém um retorno de $P_V - P_X$. Deste modo, podemos expressar o ganho, excluindo-se o custo da opção, através da seguinte equação:

$$\text{máx}(P_V - P_X, 0);$$

• Posição comprada em uma *put*: neste caso, a opção só será exercida se $P_X > P_V$ de modo que o ganho do agente pode ser expresso como:

$$\text{máx}(P_X - P_V, 0);$$

• Posição vendida em uma *call*: o retorno do lançador da opção depende do seu exercício ou não por parte do agente que a adquire. Se o agente não

[2] Devemos recordar que estamos tratando de opções européias, mas as conclusões para opções americanas são as mesmas.

exerce a opção, o lançador obtém um ganho igual ao custo (c) do contrato; se a opção é exercida, o lançador terá uma perda igual a P_V - P_X (pois nestas condições o preço à vista estará maior que o preço de exercício). Assim, seu ganho (ou perda) pode ser expresso por:

$$máx(P_V - P_X, 0) = mín(P_X - P_V, 0)$$

- Posição vendida em uma *put*: análogo ao caso anterior:

$$máx(P_X - P_V, 0) = mín(P_V - P_X, 0)$$

O valor do prêmio é determinado segundo o modelo de Black & Scholes[3], que procura definir o valor justo para o preço da opção. Baseado na condição de não-arbitragem, o prêmio pode ser calculado como:

$$c = P_V N(d_1) - P_X e^{-rT} N(d_2)$$
$$p = P_X e^{-rT} N(-d_2) - P_V N(-d_1)$$

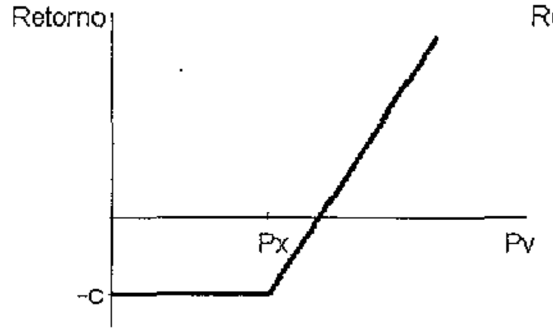
onde *c* e *p* são, respectivamente, os prêmios das opções de compra e venda, r a taxa de juros capitalizada em tempo contínuo e T o prazo a decorrer até o vencimento. $N(d_1)$ e $N(d_2)$, por sua vez, representam valores obtidos na tabela de probabilidade acumulada na distribuição normal-padrão, tal que d_1 e d_2 são estat;isticas obtidas após o cálculo da volatilidade σ do ativo-objeto, segundo a fórmula:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P_V}{P_X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{P_V}{P_X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

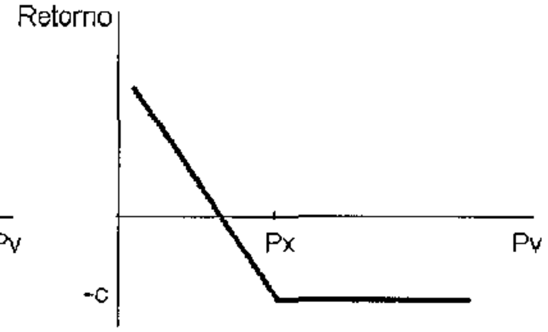
[3] Ver Hull (1994), caps. 10 e 12.

A explicitação da fórmula tem apenas o objetivo de mencionar a questão, mas, para nossos propósitos, os prêmios serão considerados dados.

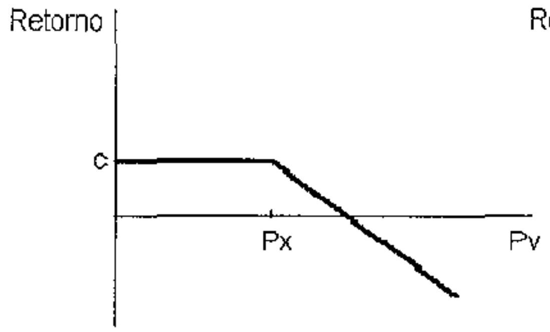
Podemos expressar tais ganhos e perdas em termos gráficos. Os gráficos (4.A) a (4.D) representam os resultados das operações em opções conforme a posição assumida pelo agente, considerando-se, agora, o custo da opção (c):



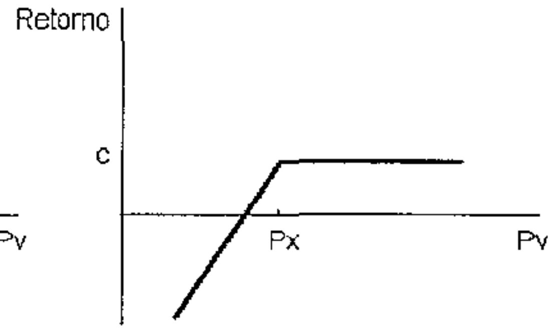
(4.A) Compra de call



(4.B) Compra de put



(4.C) Venda de call



(4.D) Venda de put

Com relação ao encerramento de posição, a regra é semelhante à dos mercados futuros: um comprador de uma opção liquida sua posição financeiramente através do lançamento de um contrato correspondente; por outro lado, um lançador zera posição através da aquisição de opções de mesma característica da posição vendida.

Os objetos de negociação envolvendo opções são os mais variados e envolvem ações, índices de ações, moedas, títulos e notas do Tesouro e até mesmo contratos futuros. Na BM&F, a maioria dos contratos de opções referem-se a futuros. No último capítulo, entraremos em maiores detalhes sobre o assunto.

Ao longo de seu tempo de vida, as opções podem possuir três perfis, segundo sua capacidade de gerar recursos a seu titular:

- Opções *in the money:* São aquelas que possibilitam um fluxo de caixa positivo, caso sejam exercidas no instante em questão. Em termos matemáticos, isso significa que o preço de exercício é maior que o preço à vista para opções de vendas e menor em caso de opções de compras;

- Opções *at the money:* conferem um fluxo de caixa nulo em caso de exercício imediato, ou seja, os preços à vista e de exercício são iguais;

- Opções *out of the money:* resultam em um fluxo de caixa negativo para seu detentor, em caso de exercício no momento em questão. Em outras palavras, o preço à vista é maior que o preço de exercício para opções de vendas e menor no caso de opções de compras.

A identificação do perfil da opção segundo a classificação acima é importante no sentido de servir como critério de tomada de decisão de exercício antecipado, quando se trata do estilo americano, já que uma opção só é exercida antecipadamente se for *in the money*. O *valor intrínseco* da opção é um conceito que pode ser extraído desta terminologia e é definido como o máximo entre zero e o ganho que proporcionaria se exercida imediatamente.

A tabela abaixo resume as características:

Tabela 4. 1: Tipos de opções quanto ao fluxo proporcionado

Tipo de opção	*Opção de compra*	*Opção de venda*
In the money	$P_V > P_X$	$P_V < P_X$
At the money	$P_V = P_X$	$P_V = P_X$
Out of the money	$P_V < P_X$	$P_V > P_X$
Valor intrínseco	$\text{máx}(0, P_V - P_X)$	$\text{máx}(0, P_X - P_V)$

Por outro lado, a opção possui um valor decorrente da vantagem de se esperar para exercê-la. É o chamado *valor tempo.* O valor total da opção é a soma dos dois valores definidos.

A padronização dos contratos de opções também é feita pela bolsa de valores, à semelhança dos mercados futuros analisados no capítulo anterior. As cotações, o preço de exercício, a data de vencimento, as oscilações diárias da cotação, o número de posições em aberto e o preço de fechamento são divulgados nos jornais diariamente. Além disso, as ordens de operação, as contas de margem e a Câmara de Compensação são semelhantes aos mercados futuros, mas devemos salientar que a margem só serve para evitar a inadimplência caso a opção seja exercida, na medida em que, em geral, não se pode financiar a compra de opções com o dito mecanismo, pois isso eleva substancialmente a alavancagem.

As Bolsas de Valores também definem os limites máximos de posição dos agentes, o preço de exercício (próximo ao preço à vista) e as datas de vencimento. Alguns detalhes operacionais quanto ao dia de vencimento e o último dia de negociação são interessantes, mas não serão aqui abordados porque não fazem parte do nosso objetivo[4].

Agora que temos em mente os aspectos relevantes do funcionamento dos mercados de opções, passemos ao estudo de estratégias de *hedge* em tais mercados.

4.2. Estratégias com opções:

Os mercados de opções possibilitam aos agentes avessos ao risco executarem algumas estratégias com vistas a reduzir a volatilidade dos retornos possíveis. Uma estratégia bastante comum neste sentido são os *spreads*, que envolvem a tomada de posição em duas ou mais opções do mesmo tipo (compra ou venda). As formas mais comuns de *spreads* são as seguintes:

[4]Para maiores informações, ver Hull(1994) e/ou Home Page BM&F.

a) *Spread* de alta: é aquele em que o investidor espera que o preço à vista do objeto (em geral, uma ação) suba ao longo do período de vida da estratégia. Pode ser montada através da aquisição de uma opção de compra com determinado preço de exercício e do lançamento de uma opção de compra do mesmo objeto, com preço de exercício superior, mas com data de vencimento equivalente. O gráfico (4.E) mostra o retorno com o *spread* de alta: as linhas mais claras representam os retornos de cada posição individualmente, e a linha cheia mostra o resultado conjunto.

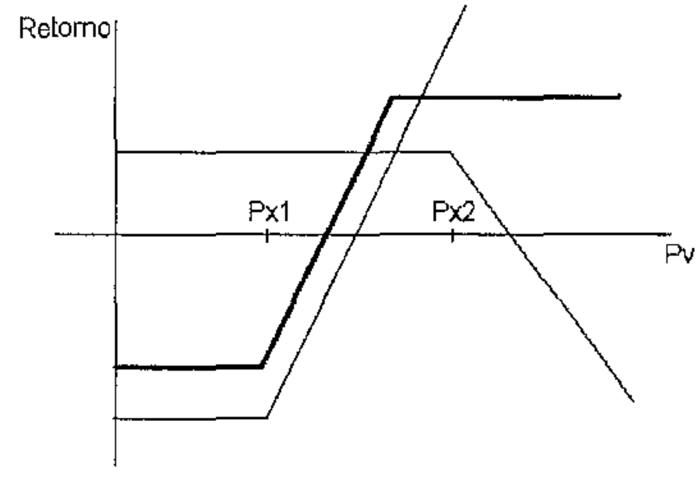


Gráfico (4.E): Retorno de um *spread* de alta com opções de compra.

Nota-se que tal estratégia, apesar de limitar o potencial de lucro do investidor, estabelece um piso para sua perda, que é a diferença entre os preços das opções em caso de não haver exercício de ambas; este piso é menor do que a perda que haveria em caso de estratégia individual com a aquisição da opção de compra. Assim, o *spread* de alta é útil para *hedgers* que desejam estabelecer um limite inferior para um possível prejuízo. A tabela abaixo resume os retornos possíveis de um *spread* de alta:

Tabela 4.2:Retorno de um *spread* de alta

Escala de preço da	Retorno de uma	Retorno de uma	Retorno total

ação	posição comprada em uma *call*	posição vendida em uma *call*	
$P_V \geq P_{X2}$	$P_V - P_{X1}$	$P_{X2} - P_V$	$P_{X2} - P_{X1}$
$P_{X1} < P_V < P_{X2}$	$P_V - P_{X1}$	0	$P_V - P_{X1}$
$P_V \leq P_{X1}$	0	0	0

Os *spreads* de alta também podem ser montados com opções de venda, mediante a compra de um contrato com baixo preço de exercício e o lançamento de uma opção com preço de exercício superior. Neste caso, o grafico dos retornos teria o seguinte aspecto:

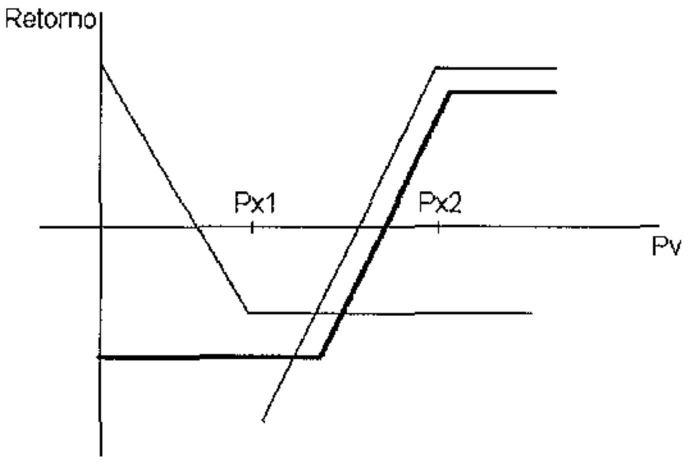


Gráfico (4.F): Retorno de um *spread* de alta com opções de venda.

b) *Spread* de baixa: é útil para os investidores que esperam que o preço à vista do objeto contratual (ações, em geral) caia durante o tempo de vida da opção. Consiste em abrir uma posição comprada em uma opção de compra e uma posição vendida em uma outra opção de compra com preço de exercício inferior. Percebe-se, assim como no caso anterior, que estabelecem-se limites superior e inferior para os retornos, permitindo ao agente avesso ao risco uma precaução contra perdas.

A tabela e o gráfico dos retornos encontram-se a seguir:

Tabela 4.3:Retorno de um *spread* de baixa

Escala de preço	Retorno de uma posição comprada em uma *call*	Retorno de uma posição vendida em uma *call*	Retorno total
$P_V \geq P_{X2}$	$P_V - P_{X2}$	$P_{X1} - P_V$	$-(P_{X2} - P_{X1})$
$P_{X1} < P_V < P_{X2}$	0	$P_{X1} - P_V$	$-(P_V - P_{X1})$
$P_V \leq P_{X1}$	0	0	0

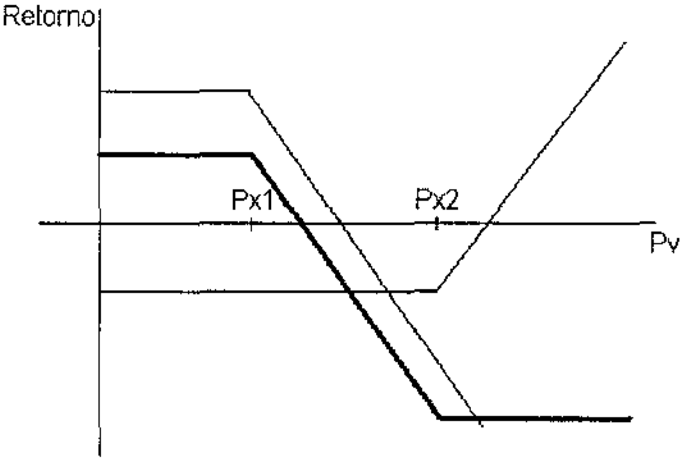


Gráfico (4.G): Retorno de um *spread* de baixa com opções de compra.

Deve-se salintar que os *spreads* de baixa também podem ser construídos com opções de venda, através da aquisição de um contrato com preço de exercício superior ao da opção lançada. A estrutura do retorno conjunto é idêntica ao *spread* com opções de compras.

c) *Spread* borboleta: trata-se de uma estratégia que envolve posições em opções com três preços de exercícios diferentes. Um exemplo é a compra de duas opções de compra com preços de exercício P_{X1} e P_{X3}, respectivamente, e lançamento de duas opções de compra com preço de exercício P_{X2}, tal que $P_{X1} < P_{X2} < P_{X3}$. Conforme se pode observar no gráfico (4.H), tal estratégia também permite a obtenção de um piso para uma possível perda e o lucro existe quando o preço à vista se situa próximo de P_{X2}, ou seja, trata-se de uma tática útil quando o investidor não tem clareza quanto ao movimento futuro possível do preço à vista, de modo o agente prefere apostar em um preço intermediário entre dois extremos possíveis.

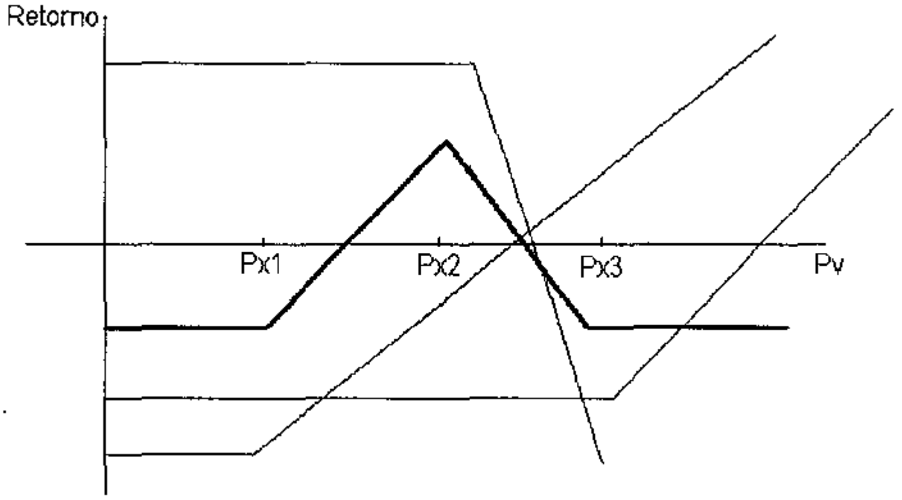


Gráfico (4.H): Retorno de um *spread* borboleta.

Tabela 4.4: Retorno de um *spread* borboleta

Escala de preço	Retorno da posição comprada da 1ª *call*	Retorno da posição comprada da 2ª *call*	Retorno das posições vendidas nas *calls*	Total[5]
$P_V < P_{X1}$	0	0	0	0
$P_{X1} < P_V < P_{X2}$	$P_V - P_{X1}$	0	0	$P_V - P_{X1}$
$P_{X2} < P_V < P_{X3}$	$P_V - P_{X1}$	0	$-2(P_V - P_{X2})$	$P_{X3} - P_V$
$P_V > P_{X3}$	$P_V - P_{X1}$	$P_V - P_{X3}$	$-2(P_V - P_{X2})$	0

O *spread* borboleta também pode ser criado com opções de venda, através da compra de dois contratos com preços distintos e o lançamento de duas opções com preço intermediário.

d) *Spread* calendário: este tipo de estratégia envolve opções com mesmo preço de exercício, mas com datas de vencimento distintas. Por exemplo, pode-se lançar uma opção de compra e adquirir outra opção de compra com mesmo preço de exercício, mas com data de vencimento posterior. O objetivo desta tática é o mesmo das anteriores, ou seja, estabelecer um piso para as perdas. Também pode ser realizado com opções de venda.

[5] Considerando que $P_{X2} = 0,5(P_{X1} + P_{X3})$.

Os quatro tipos de *spreads* acima descritos constituem estratégias puras de posições com opções, ou seja, uma das duas variáveis (preço de exercício ou data de vencimento) coincidem. Uma outra categoria de *spreads* trabalha com preços de exercício e datas de vencimento diferentes: são os *spreads* diagonais. Pela dificuldade de análise dos mesmos, eles não serão aqui abordados.

O mercado de opções também possibilita a prática de estratégias com opções de compra e de venda simultaneamente. As mais famosas são o *straddle* e o *strangle*.

O *straddle* consiste na aquisição de uma opção de compra e de uma opção de venda com preços de exercício e datas de vencimento equivalentes. O objetivo desta estratégia é tirar proveito das oscilações bruscas de preço, estabelecendo um piso para a perda. A tabela abaixo e o gráfico (4.I) descrevem os retornos possíveis de um *straddle*.

Tabela 4.5: Retornos de um *straddle*

Escala do preço	Retorno da *call*	Retorno da *put*	Retorno total
$P_V \leq P_X$	0	$P_X - P_V$	$P_X - P_V$
$P_V > P_X$	$P_V - P_X$	0	$P_V - P_X$

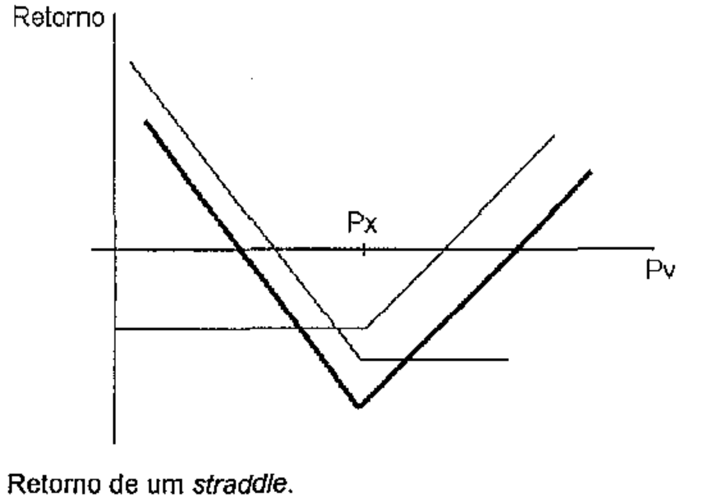


Gráfico (4.I): Retorno de um *straddle*.

O *strangle*, por sua vez, é similar a um *straddle,* mas a diferença é que, embora as datas de vencimento dos dois tipos de opções coincidam, os preços de exercício são diferentes. No nosso exemplo abaixo, o preço da call (P_{X2}) é superior ao preço da put (P_{X1}). Trata-se de uma estratégia ideal para investidores que prevéem fortes oscilações de preços. A tabela a seguir e o gráfico (4.J) indicam os retornos possíveis de um *strangle*:

Tabela 4.6: Retornos de um *strangle*

Escala do preço	Retorno da *call*	Retorno da *put*	Retorno total
$P_V \leq P_{X1}$	0	$P_{X1} - P_V$	$P_{X1} - P_V$
$P_{X1} < P_V < P_{X2}$	0	0	0
$P_V \geq P_{X2}$	$P_V - P_{X2}$	0	$P_V - P_{X2}$

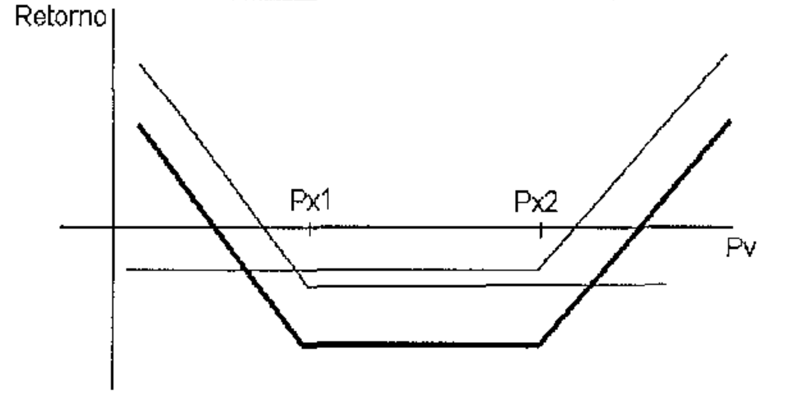


Gráfico (4.J): Retorno de um *strangle*.

Os *straddles* e os *strangles* também podem ser executados com posições lançadas, mas este tipo de estratégia é mais adequada para investidores que não acreditam em fortes oscilações de preços. Além disso, esta tática não é muito aconselhável para *hedgers*, na medida em que envolve um risco decorrente da inexistência de um limite para as perdas.

Em síntese, os *spreads,* os *straddles* e os *strangles* são instrumentos que permitem criar, se não um limite mínimo para as perdas, pelo menos um intervalo de retornos possíveis. Mas tais estratégias são um pouco rígidas no que se refere a ajustes necessários ao longo do tempo de vida das opções envolvidas. No item seguinte, analisaremos alguns mecanismos que permitem alterações nas posições ao longo do tempo com vistas a reduzir riscos.

4.3. Estratégias dinâmicas de *hedge*:

Uma das principais dificuldades de se levar avante estratégias de *hedge* com opções deriva da sensibilidade de seu valor em relação ao preço do ativo-objeto, o qual oscila com as condições do mercado à vista. Isso resulta na necessidade de revisões periódicas nas estratégias dos agentes, já que a posição apropriada também se altera com o preço do bem. Por outro lado, o mercado de opções fornece aos investidores a possibilidade de ajustar periodicamente o portfólio, no intuito de se manter o nível de risco desejado.

As instituições financeiras oferecem vários tipos de opções. As mais importantes são as opções de moedas, opções de taxa de juros e opções de ações.

No que se refere às moedas, os contratos de opções são úteis para *hedgear* o risco de oscilações na taxa de câmbio, ou seja, assegura que o preço da moeda estrangeira não será menos favorável que o nível do preço de exercício. As opções de taxa de juros, por sua vez, são úteis para algumas situações típicas: a) garantia de um certo patamar desejado de juros ao longo do tempo; b) teto para os juros por ocasião de contratos a taxas flutuantes; c) concessão de privilégios de pagamento antecipado sobre um empréstimo de taxa fixa; d) concessão de privilégios de resgate antecipado sobre um depósito de taxa fixa.

O *hedge* em opções de ações, por sua vez,é uma estratégia difundida e bastante útil. Em um contrato de subscrição, por exemplo, a instituição financeira lançadora garante o preço pelo qual uma nova emissão de ações será vendida em alguma época do futuro. Tal mecanismo oferece aos clientes garantias contra perdas no principal e assegura um retorno proporcional ao existente no mercado.

Uma estratégia interessante envolvendo monitoramento de posições é o ***stop-loss***. Suponhamos, por exemplo, um lançador de uma opção de compra com preço de exercício P_X. Para fazer frente ao possível exercício pela contraparte, deseja-se manter uma posição coberta[6] sempre que o preço à vista for superior ao preço de exercício, e uma posição descoberta quando ocorrer o inverso, no intuito de garantir ao possuidor da *call* o direito de exercê-la. Em outras palavras, a instituição lançadora adquire o bem especificado no contrato sempre que a opção estiver *in the money* para o seu detentor. O gráfico (4.L) ilustra a tática:

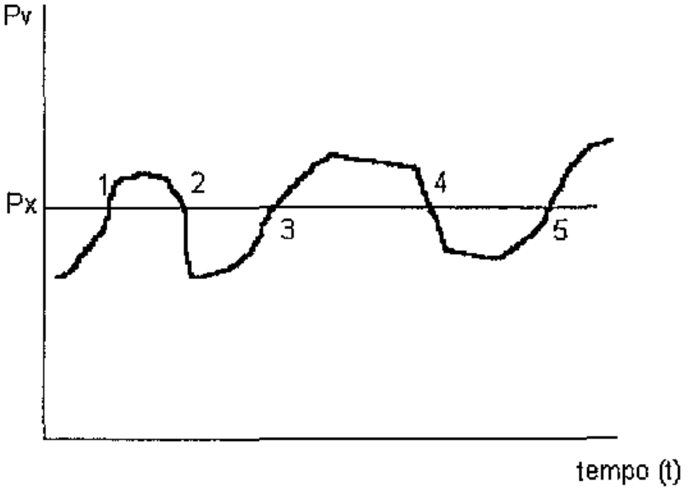


Gráfico (4.L): *Stop-loss*: a instituição lançadora adquire o ativo-objeto nos instantes 1, 3 e 5.

A desvantagem da estratégia reside no seu custo, que é o preço do ativo-objeto por ocasião da posição coberta. Além disso, a trajetória do preço à vista pode não ser a indicada no gráfico, ou seja, é possível que este esteja permanentemente acima do preço de exercício.

[6] Entende-se por posição coberta a posse do ativo-objeto da opção.

As estratégias analisadas nos itens anteriores são conhecidas como *hedge and forget*, ou seja, uma vez definida a tática, ela não será alterada durante todo o período em questão. Alguns programas de *hedge* mais sofisticados envolvem o monitoramento permanente das posições com vistas a imunizar o valor das carteiras diante de pequenas alterações nos preços dos ativos-objeto. Para analisarmos tais mecanismos, precisamos definir alguns parâmetros de acompanhamento das opções.

O parâmetro que constitui a base para a tomada de decisão pelos agentes é o **delta (Δ)**, definido como a taxa de variação do preço da opção com relação ao preço do ativo-objeto. Podemos representar o Δ em termos matemáticos com o uso da derivada:

$$\Delta = \frac{dc}{dP_V}$$

onde c representa o preço da opção. O delta é importante pois diz quanto o preço de uma opção irá variar diante de uma variação do preço à vista.

O objetivo do *hedger* é zerar o delta total de sua posição, definido como o delta da opção mais o delta da ação[7]. Tomemos um exemplo numérico[8] para esclarecer a questão: considere uma instituição financeira que lance 20 opções de compra de um total de 2000 ações e que deseja *hedgear* sua posição com a aquisição das ações correspondentes no mercado à vista. O preço da ação é R$ 100,00 , o preço da opção é R$ 10,00 e o Δ = 0,6. A fim de manter constante o valor de seu portfólio, o agente deve adquirir 0,6 x R$ 2000 = R$ 1200 em ações, pois o resultado no mercado à vista tende a ser compensado pelo resultado em opções: se o preço da ação subir dP_V, haverá um lucro de $1200dP_V$ no mercado à vista; por outro lado, o preço da opção tenderá a aumentar $0,6dP_V$, produzindo

[7] Igual a 1, por definição.
[8] Extraído de Hull(1994), cap.12.

uma perda de $0{,}6(-2000)dP_V = -1200\ dP_V$ em opções[9]. O delta total é neutro (ou nulo), já que o resultado total é sempre nulo: $1200dP_V - 1200dP_V = 0$.

O delta de uma carteira é definido como a soma dos deltas de cada opção que a compõe, ponderada pela sua quantidade w. Ou seja:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$$

A zeragem do delta possibilita o *hedge* da posição por um período de tempo relativamente curto, já que este parâmetro pode variar ao longo do tempo. A alteração do delta implica em uma revisão das posições de modo a manter o resultado final assegurado. No exemplo acima, se o Δ sofrer um aumento de 0,05 (o novo delta torna-se 0,65), o agente deve adquirir 0,05 x 2000 = R$ 100 em ações para eliminar o risco de sua carteira (dizemos, neste caso, que o *hedge* foi rebalanceado). Para superar esta dificuldade, deve-se levar em conta um outro parâmetro, o **gama (γ)**, que mede a taxa de variação do delta com relação ao preço do ativo-objeto. Em termos matemáticos:

$$\gamma = \frac{d\Delta}{dP_V} = \frac{d}{dP_V}\left[\frac{dc}{dP_V}\right]$$

Valores elevados de γ implicam em alta sensibilidade do delta em relação ao preço do ativo. Deste modo, é arriscado deixar uma carteira com delta nulo por um período de tempo grande. Para eliminar o risco da carteira, é necessário zerar o gama. Assim, partindo de uma carteira com delta nulo e gama γ, a única maneira deste último ser alterado é através de posições em opções, já que posições em ativos e contratos futuros têm gama igual a zero. Se o agente

[9] O retorno do lançador é o preço da opção em caso de não haver exercício; se o preço da opção subir, ele terá prejuízo ao encerrar posição, já que, para tal, deve adquirir o número correspondente de contratos de opções do mesmo tipo.

encontra-se numa posição w_t em opções com gama igual a γ_t, o gama de seu portfólio se torna $\gamma + w_t \gamma_t$ o que, igualado a zero, resulta em:

$$w_t = -\frac{\gamma}{\gamma_t}$$

Deste modo, a zeragem do gama total implica na aquisição de um número de opções igual à razão entre os gamas da carteira e da opção. Tal condição proporciona proteção contra grandes oscilações no preço do ativo no intervalo de tempo entre os rebalanceamentos de *hedge*, ou seja, assegura o valor da carteira contra mudanças no delta. Com o passar do tempo, a neutralidade do gama só é mantida se os rebalanceamentos respeitarem a relação acima.

Antes de prosseguirmos na definição de outros parâmetros, devemos ressaltar que o cálculo do delta e do gama baseia-se em fórmulas de precificação de opções, segundo o modelo de Black e Scholes. Entendemos que tal assunto possui um grau de dificuldade acima dos propósitos deste trabalho, de modo que preferimos não abordá-lo[10]. Assim, não faremos menção aos processos de formação dos preços de exercício, que serão considerados dados.

Além do delta e do gama, existem outros parâmetros úteis para o monitoramento de posições nas estratégias de *hedge*. São eles:

- **theta (θ):** este parâmetro procura captar a taxa de variação do valor de uma carteira de opções ao longo do tempo (isto é, conforme T decresce), considerando os demais parâmetros constantes. Assim como os parâmetros anteriores, o teta pode ser estudado com base no modelo de Black e Scholes, mas nos limitaremos à menção do fato de que este parâmetro, em geral, é negativo, na medida em que, quanto menor o tempo de vencimento, menos a opção tende a se valorizar.

---

[10] Para um aprofundamento no assunto, ver Hull(1994), caps.10 e 12.

Suponha que dP_V seja uma mudança no preço do ativo-objeto em um pequeno intervalo de tempo dt. Pode-se demonstrar que, para um portfólio com delta neutro, a variação no valor da carteira, $\Delta\Pi$, é equivalente a:

$$\Delta\Pi = \theta dt + \frac{\gamma (dP_V)^2}{2}$$

A relação acima nos permite concluir que, se não houver variação no valor do preço do ativo-objeto ($dP_V = 0$), o portfólio tende a perder valor com o tempo, já que o theta, em geral, é negativo. Por outro lado, qualquer variação no preço do ativo tende a elevar o valor do portfólio se o gama for positivo e reduzi-lo se o este parâmetro for negativo.

• **vega** (Λ): é a taxa de variação do valor de uma carteira em função da volatilidade do preço do ativo-objeto. Quanto maior o vega, maior a sensibilidade da carteira em relação à volatilidade. Este parâmetro pode se alterar diante da inclusão de uma posição em uma opção. Se Λ for o vega da carteira e Λ_t o vega da opção, analogamente ao gama, a neutralização do valor do portfólio em relação à volatilidade implica em:

$$w_t = -\frac{\Lambda}{\Lambda_t}$$

Vale ressaltar que a neutralidade do gama não significa que o vega seja nulo e vice-versa. Em síntese, a zeragem do gama corrige a distorção provocada pelo intervalo de tempo entre os rebalanceamentos de *hedge*; a nulidade do vega, por sua vez, procura eliminar os efeitos de uma volatilidade variável.

Em suma, a vantagem das estratégias dinâmicas de *hedge* em relação às do tipo *hedge and forget* reside na possibilidade de assumir uma posição mais vantajosa diante de uma alteração da variável macroeconômica relevante. No entanto, determinados custos operacionais, como a corretagem, tornam o rebalanceamento contínuo muito caro. Assim, em vez de tentar eliminar totalmente os riscos, os agentes procuram avaliá-los e torná-los aceitáveis durante a execução da tática.

Devemos ressaltar, também, que a apresentação realizada aqui tem o objetivo maior de mencionar a existência de tais mecanismos, e não estudá-los detalhadamente, já que isso poderia acarretar dificuldades que vão além do escopo deste trabalho. Mas vale concluir que as estratégias em questão estão longe de ser uma camisa de força à qual o investidor deve se submeter. A flexibilidade do *hedge*, embora tenha seu custo, é um fator útil para agentes avessos ao risco que desejam reavaliar suas posições.

Capítulo V

Mercados Futuros e de Opções no Brasil

Uma vez entendido o funcionamento dos mercados futuros e de opções, bem como as principais estratégias de minimização de riscos que podem ser construídas a partir de tais contratos, o nosso objetivo agora é fazer uma avaliação destes mercados no Brasil, tendo em vista os conceitos abordados nos dois capítulos anteriores. Tomaremos como base a Bolsa de Mercadorias & Futuros.

A Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F), localizada em São Paulo, constitui a mais importante bolsa de futuros do país e uma das maiores do mundo. Em 1995, ela negociou um volume aproximado de US$ 3 trilhões, superando o ano anterior em 90% (US$ 1,58 trilhões). Suas origens remontam ao ano de 1917, quando empresários paulistas ligados à agricultura e ao comércio exterior criaram a Bolsa de Mercadorias de São Paulo (BMSP), a primeira do país a introduzir contratos a termo, como café, boi gordo e algodão; em 1985, foi fundada a Bolsa Mercantil & de Futuros (BM&F), que logo alcança projeção internacional na negociação de *commodities*, índices de ações, ouro, taxas de juros e de câmbio. Em 9/05/91, a BM&F e a BMSP são fundidas, nascendo a Bolsa de Mercadorias & Futuros, sob a mesma sigla BM&F.

Seu objetivo é "*organizar, operacionalizar e desenvolver um mercado de futuros livre e transparente. Um mercado que proporcione aos agentes econômicos oportunidades para a realização de* hedge *contra as flutuações de preço das mais variadas* commodities *- produtos agropecuários, taxas de juros, taxas de câmbio, metais, índices de ações e de conjuntura e todo e qualquer* *produto ou variável macroeconômica cuja incerteza quanto ao seu preço futuro possa influenciar negativamente a atividade econômica".*[1]

Fica claro pelo que foi exposto acima que a meta principal da BM&F é fornecer aos agentes econômicos um mecanismo de neutralização de riscos contra oscilações de variáveis macroeconômicas e preços de *commodities*, com vistas a evitar a retração do nível de atividades resultante de incertezas. Neste sentido, a operação a futuro é um instrumento útil para agentes avessos ao risco, já que possibilita a redução do grau de incerteza quanto aos resultados monetários das operações comerciais e financeiras, bem como quanto ao valor do portfólio. Devemos salientar que, embora a BM&F vise sobretudo ao *hedger,* na prática é muito difícil distinguir as três modalidades de operação (*hedge,* especulação e arbitragem). O importante a reter, no entanto, é o fato de que a presença dos três tipos de agente é fundamental para que as operações tenham liquidez, permitindo aos *hedgers* levarem avante estratégias de eliminação de riscos.

A tabela[2] a seguir resume os produtos oferecidos pela BM&F. A coluna da esquerda indica o ativo e a coluna da direita os contratos correspondentes:

Tabela 5. 1: Ativos e seus contratos na BM&F

Ouro	Futuro, futuro cambial, opções s/ disponível, disponível padrão, disponível fracionado, Termo
C-Bond	Futuro
Ibovespa	Futuro e opções s/ futuro
DI de um dia	Futuro e opções s/ futuro
DI de 30 dias	Futuro
Dólar comercial	Futuro, opções, opções flexíveis e futuro de cupom cambial
Dólar flutuante	Futuro, opções e opções flexíveis.
Boi Gordo	Futuro cambial e opções s/ futuro
Bezerro	Futuro cambial
Algodão	Futuro cambial
Soja	Futuro cambial

[1]Suplemento da Bolsa de Mercadorias & Futuros.
[2]Fonte: Síntese de Dados, BM&F, Abril de 1996; Home Page, BM&F: http://www.bmf.com.br.

Café arábica	Futuro cambial e opções s/ futuro
Café robusta	Futuro cambial
Açúcar cristal	Futuro cambial
Floating Rate Notes	Futuro

Percebe-se que a grande maioria dos contratos oferecidos são de futuros; os contratos de opções, por sua vez, referem-se, na maior parte das vezes, a opções sobre contratos futuros, uma modalidade interessante, já que o exercício só é realizado quando os parâmetros do futuro são vantajosos em relação ao mercado à vista. Este tipo de produto permite alguma flexibilização das negociações a futuro, já que estas envolvem a obrigação de determinada transação (ou liquidação) em uma data futura, ao contrário das opções.

Cada contrato possui especificações quanto aos limites máximo e mínimo de oscilações diárias, meses de vencimento, datas de liquidação, tamanho, etc[3]. O nosso objetivo é analisar indícios de estratégias de *hedge* nos mercados futuros e de opções, tendo como base a BM&F. A tabela abaixo[4] indica os principais *hedgers* em relação aos ativos especificados nos contratos.

Tabela 5. 2: *Hedgers* na BM&F

Produto da BM&F	*Hedgers*
Café	Cafeicultores, cooperativas de café, torrefadores, maquinistas, exportadores, comerciantes e processadores de café.
Soja	Produtores, cooperativas, cerealistas, indústrias de farelo e de óleo de soja, importadores e exportadores de soja, bem como fornecedores de insumos e equipamentos agrícolas ligados à soja.
Boi Gordo	Pecuaristas, frigoríficos, indústrias processadoras de carne, comerciantes e fundos de investimento de commodities.
Bezerro	Pecuaristas e frigoríficos.
Algodão	Produtores, cooperativas, beneficiadores, exportadores, processadores e comerciantes do produto.

[3] As especificações detalhadas podem ser encontradas na Home Page da BM&F, no item contratos.
[4] Fonte: Home Page da BM&F, item contratos.

Açúcar	Usinas de açúcar, refinarias, comerciantes, consumidores industriais, cooperativas, associações de produtores e importadores estrangeiros.
Dólar comercial	Instituições autorizadas pelo Bacen e outras pessoas jurídicas, cuja atividade básica esteja relacionada com transações, regulamentadas pelo Bacen, neste mercado.
Dólar flutuante	Instituições autorizadas pelo Bacen e outras pessoas jurídicas, cuja atividade básica esteja relacionada com transações, regulamentadas pelo Bacen, neste mercado.
C-Bond, Floating Rates Notes e taxas de juros	Instituições financeiras e investidores institucionais.
Ibovespa	Fundações de seguridade, seguradoras, fundos mútuos de ações, clubes de investimento em ações, fundos de investimento e demais investidores institucionais.
Ouro	Fundidores e fornecedores de ouro, joalherias, mineradoras e empresas assemelhadas, a critério da Bolsa.

O objetivo do agente *hedger*, conforme se afirmou anteriormente, é reduzir ao máximo as incertezas quanto a suas operações. Para isso, utilizam a Bolsa de Futuros para assumir posições que "travem" os resultados de seus investimentos. Portanto, é natural, por exemplo, que as firmas de comércio exterior busquem proteção contra desvalorizações (importadores) ou valorizações (exportadores) do real, com vistas a garantir um resultado adequado. No capítulo 3, p.66, através do exemplo do *hedge* de câmbio, podemos concluir intuitivamente que, quando um agente possui valores a pagar (divisas, *commodities*, ativos, etc.), a estratégia ideal é assumir posições compradas em futuros ou em opções, já que o resultado final é a fixação de um preço para o bem a ser comercializado em data futura. Analogamente, quando o agente é credor de valores, o ideal é que assuma posição vendida, com vistas a se proteger de uma queda no preço à vista. Deste modo, os importadores, temendo desvalorizações cambiais, assumem posições compradas, ao passo que os exportadores assumem posições vendidas para evitar os efeitos de um atraso cambial.

É claro que os nossos exemplos constituem estratégias muito simples de *hedge*, já que os investidores também se deparam com a possibilidade de executar estratégias com opções. Neste sentido, os agentes podem monitorar suas posições de modo contínuo, observando a evolução dos parâmetros definidos no capítulo 4 (delta, gama, theta e vega), o que amplia significativamente a possibilidade de executar táticas de minimização de riscos.

Com relação aos contratos de câmbio e ao Índice Bovespa, a BM&F possui uma modalidade interessante de negociação: as opções flexíveis, isto é, contratos que admitem certa liberdade na fixação da maioria de seus parâmetros. As únicas exigências da bolsa são que o prazo de vencimento seja de no mínimo dois dias e no máximo 2 anos para contratos sem garantia ou um ano para contratos com garantia; além disso, a liquidação deve ser feita no dia útil seguinte ao exercício e a taxa da bolsa é diferenciada para contratos com e sem garantia. As opções flexíveis, assim, representam uma possibilidade de flexibilização de alguns parâmetros contratuais definidos pela Bolsa, já que, conforme assinalamos no capítulo 3, pp.68 e 69, o *hedge* perfeito só é possível quando algumas condições são respeitadas, de modo que tais contratos são importantes para fornecer aos *hedgers* a eliminação total dos riscos de suas operações.

O gráfico abaixo (5.A) mostra a participação dos produtos no mercado:

Gráfico (5.A): Participação dos ativos no volume total. Fonte: Síntese de Dados-BM&F, Abril de 1996.

A observação do gráfico acima nos permite concluir que mais de 76% dos contratos na BM&F em 1995 referiam-se a variáveis macroeconômicas fundamentais, ou seja, taxas de câmbio e taxas de juros. Os dados de 1996 ainda não foram sistematizados, mas até abril, como se pode observar na tabela abaixo, a tendência persistiu:

Tabela 5. 3: Contratos em aberto no primeiro quadrimestre de 1996.[5]

Contrato	*Janeiro*	*Fevereiro*	*Março*	*Abril*
Ouro	103.064	111.781	105.993	110.202
Índice de ações	50.990	40.713	46.166	44.645
Taxas de juro	651.155	708.959	742.212	986.389
Taxas de câmbio	1.304.833	1.078.702	874.920	822.160
Agropecuários	57.486	11.267	11.972	10.361
Títulos da dívida externa	-	-	475	1.312

As razões para o grande volume de contratos referentes a taxas de juros e de câmbio estão relacionadas a preocupação dos agentes quanto a possíveis períodos de instabilidade macroeconômica, decorrente dos crescentes déficits comerciais desde o segundo semestre de 1994: os anúncios mensais da deterioração do saldo comercial nos últimos dois anos intensificaram os debates sobre a defasagem cambial e sobre o preço de equilíbrio do dólar, criando expectativas quanto a possíveis desvalorizações do real. Por outro lado, a âncora cambial, base da estabilização dos preços, induziu os agentes a se protegerem de uma possível valorização real da taxa de câmbio, já que esta, em alguns períodos, foi corrigida abaixo da taxa de inflação. Neste contexto e conforme a lógica que apresentamos nos capítulos anteriores, os exportadores estariam apreensivos com a possibilidade de atraso cambial, ao passo que os importadores temeriam maxidesvalorizações, o que justifica a grande concentração de contratos associados a variáveis macroeconômicas.[6]

[5] Fonte: Síntese de dados, BM&F, abril de 1996.
[6] É lógico que boa parte do movimento é fruto da ação de arbitradores e especuladores, mas conforme já dissemos, eles garantem liquidez ao mercado.

O nosso objetivo agora é fazer uma avaliação conjuntural dos contratos cambiais na BM&F, já que se trata de um tema relevante neste contexto de incertezas quanto ao futuro da taxa de câmbio no Brasil. Os jornais relatam diariamente, a despeito das declarações do Banco Central sobre a manutenção da âncora cambial, a aflição dos mercados diante dos déficits em conta corrente. Além disso, percebe-se aos poucos que a prometida política de redução gradual dos juros é inconsistente com as necessidades de financiamento dos Balanço de Pagamentos, induzindo os investidores a *hedgear* suas operações contra alterações nas condução da política monetária. Ou seja, embora nossa atenção esteja concentrada basicamente nos contratos de dólar, estaremos nos referindo, também, implicitamente, aos contratos de taxas de juros, já que a observação das necessidades de financiamento do Balanço de Pagamentos é um importante indicador para o futuro desta variável macroeconômica.

Os tipos de contrato que nos interessam mais especificamente são futuros de dólar comercial, futuros de cupom cambial e opção cambial.

a) **Futuros de dólar comercial**: a observação das cotações do futuro de dólar comercial é importante para saber o que os agentes esperam do preço da moeda americana em datas futuras. A tabela abaixo mostra o vencimento para 1997, o número de contratos em aberto para o mês em questão no dia 5/12/96 e a sua cotação média[7]:

Tabela 5. 4: Preços futuros de dólar comercial na BM&F

Vencimento	Nº de neg. em 5/12.	Contratos em aberto	Preço médio, em R$/US$ 1.000.
Jan7	200	215.285	1.040,25
Fev7	50	19.598	1.047,37
Mar7	2	6.199	1.054,70
Abr7	702	147.970	1.061,80
Mai7	1	3.550	1.069,90

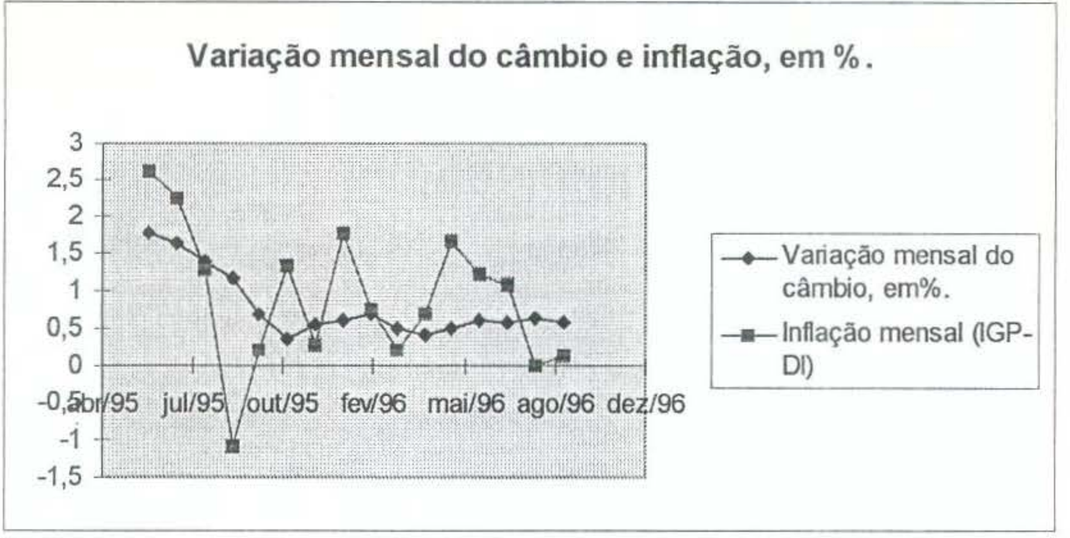
[7] Fonte: Resumo das operações, BM&F, Home Page.

Jun7	1	260	1.077,50
Jul7	2	3.340	1.085,00
Set7	1	50	1.097,50

Duas observações importantes devem ser feitas. Em primeiro lugar, o preço futuro está crescendo conforme se distancia o tempo de vencimento em direção ao final de 1997, um indício de que se espera que o saldo comercial deve permanecer negativo, exigindo certas correções no preço do dólar. Em segundo lugar, observa-se uma grande negociação de contratos para o mês de abril, já que o mês de março é tradicional em correções no câmbio, e os agentes procuram se prevenir contra elas. Em março de 1995, por exemplo, o anúncio mal-sucedido do regime de bandas cambiais levou a forte especulação nos mercados e a significativa perda de reservas. O mesmo aconteceu em janeiro de 1996, quando o anúncio do deslocamento da faixa de flutuação do preço do dólar foi confundido com desvalorização, levando os agentes a temerem o primeiro mês do ano e, consequentemente, procurarem *hedgear* suas posições.

Nos dias atuais, contudo, é possível identificar certo acomodamento do mercado, cujo exemplo principal foi a relativa tranquilidade com que os agentes receberam a notícia da elevação do déficit comercial no mês de outubro. Esta calma deriva do sucesso do Banco Central "esfriar" o mercado, através da convergência da correção do câmbio com as taxas de inflação, conforme se pode observar no gráfico abaixo[8]:

[8] Fonte dos dados: *Conjuntura Econômica*, Novembro de 1996.



A análise do gráfico acima nos revela que, a despeito dos déficits comerciais, a correção cambial mensal obedeceu a certa sistemática, situando-se nos limites da banda de 0,5%, o que contribuiu para a estabilização de expectativas nos dias de hoje. Os efeitos da notícia da deterioração do saldo, divulgada em 18/11/96, não causaram fortes impactos nos mercados futuros de dólar comercial, conforme se pode avaliar pelos dados abaixo[9]:

		Preço futuro médio (R$/U$1000)	
Data	Preço à vista (R$/U$1000)	Dez/96	Jan/97
14/11/96	1.030,90	1.034,37	1.041,58
19/11/96	1.030,90	1.033,68	1.040,56

Em suma, as alterações nos preços futuros foram pouco significativas após o anúncio do aumento do déficit, havendo até mesmo uma pequena retração.

Devemos fazer uma ressalva: embora tenhamos interpretado o movimento do mês de abril como um sinal de precaução por parte dos agentes econômicos, a ação de especuladores também contribui para o fenômeno. No entanto, conforme abordamos anteriormente, este tipo de agente não é nocivo ao mercado. Muito pelo contrário, garantem a liquidez necessária para que os *hedgers* construam estratégias bem sucedidas. O nível de detalhes dos nossos dados não nos permite extrair conclusões mais fortes sobre o caráter da concentração do

[9] Fonte: *Gazeta Mercantil*, 15/11 e 20/11/96, Finanças & Mercados.

movimento em abril, mas indica que os agentes estão sempre atentos à condução da política econômica.

b) **Futuros de cupom cambial:** trata-se de uma nova modalidade contratual, lançada em 1/11/96, cujo produto reflete a diferença entre a variação cambial e as taxas de juros internas, ou seja, a remuneração em dólar das aplicações no Brasil. Trata-se, pois, da combinação dos mercados de Depósitos Interfinanceiro (DI) e futuro de dólar.

Antes do lançamento deste tipo de futuro, os *hedgers* utilizavam *swaps* de DI e dólar como contrato de cupom cambial, ou combinavam operações com contratos de dólar e juros. A vantagem do novo contrato reside, basicamente, na redução de custos, já que o agente não precisa mais se preocupar em fechar contratos simultaneamente em dois mercados, para evitar distorções de preços. Além disso, o investidor no futuro de cupom cambial apura seu lucro ou prejuízo diariamente, conforme as regras dos mercados futuros descritas no capítulo 3, e não apenas na liquidação, como acontecia com os *swaps*.

Os contratos têm valor de face de R$ 100 mil e vencimentos mensais. Até o momento, o contrato mais longo permitido pela BM&F é de dois anos, mas, conforme a demanda, a Bolsa autorizará o estabelecimento de contratos maiores. O primeiro dia de negociação dos futuros de cupom cambial foi considerado um sucesso pelos analistas financeiros: foram negociados 6.650 contratos, dentre os quais 6.630 para vencimento em abril de 1997, o que representa cerca de 10% do valor financeiro de contratos com dólar e 5% do valor dos contratos futuros de DI negociados na BM&F em 1º/11. Os principais demandantes de tais contratos, de acordo com suas propriedades, são agentes que possuem receitas em dólares e aplicações internas em renda fixa.

Ainda é cedo para extrair conclusões sobre o sucesso deste tipo de contrato, pois trata-se de um produto novo. O que devemos ressaltar, no entanto, é que os futuros de cupom cambial foram lançados em um momento em que a demanda por *hedge* de câmbio é elevada por conta das expectativas quanto ao comportamento do saldo comercial em 1997 e a reação das autoridades monetárias no gerenciamento da política cambial.

A tabela a seguir[10] fornece os dados relativos a esta modalidade contratual:

Tabela 5. 5: Futuros de cupom cambial na BM&F

Vencimento	Contratos em aberto	Ajuste anterior, em R$.
Jan7	0	99.116,97
Fev7	0	98.018,71
Mar7	0	97.051,85
Abr7	15.723	96.054,63
Mai7	120	95.064,81
Jun7	100	94.022,33
Nov7	300	89.318,58
Dez7	1600	88.733,51

Percebe-se o mesmo fenômeno dos futuros de dólar, ou seja, a grande concentração de contratos no mês de abril, por conta das expectativas de ajuste no câmbio no mês de março.

Em síntese, os contratos de futuro de cupom cambial são muito úteis para *hedge*, na medida em que permitem aos investidores, utilizando as estratégias vistas no capítulo 3, afastar o risco de perda de rentabilidade de aplicações financeiras domésticas, além de possuirem grandes vantagens sobre os tradicionais *swaps*.

c) **Opções cambiais:** este conjunto de contratos também faz parte do elenco de produtos utilizados por *hedgers* para eliminar riscos cambiais. Este mercado explodiu na BM&F com o advento do Plano Real, em 1994: naquele ano, segundo dados da bolsa[11], foram negociados 587 mil contratos de opção de dólar no sistema pregão; em 1995, este número saltou para 3,25 milhões, em um crescimento de 453%. Em 1996, até o mês de agosto, foram negociados 3,95 milhões de contratos, 21,5% a mais que em todo o ano anterior.

---

[10] Fonte: Resumo das operações, BM&F, Home Page, 5/12/96.
[11] Gazeta Mercantil, 13/09/96, p. B-3.

A tabela a seguir mostra os preços de exercício e o número de contratos em aberto para alguns tipos de opções de compra de dólar comercial. O código na primeira coluna indica a série do contrato, sendo as duas primeiras letras o indicador do mês de vencimento.

Tabela 5. 6: Preços de exercício de opções de compra de dólar comercial[12]

Série	Preço de exercício, em R$/US$1000)	Contratos em aberto
JA16	1.040,00	10.150
JA14	1.045,00	2.900
JA07	1.050,00	2.220
JA15	1.065,00	39.340
JA03	1.070,00	3.100
JA08	1.080,00	5.210
JA09	1.100,00	45.890
JA10	1.200,00	500
FE04	1.045,00	300
FE05	1.050,00	1.020
FE07	1.055,00	200
FE08	1.060,00	1.340
FE06	1.065,00	1.200
FE09	1.070,00	800
FE10	1.075,00	600
MR09	1.040,00	240
MR03	1.050,00	1.500
MR11	1.055,00	500
MR04	1.060,00	1.100
MR05	1.080,00	2.000
AB07	1.050,00	100
AB03	1.055,00	4.000
AB18	1.060,00	2.000
AB19	1.070,00	1.200
AB08	1.080,00	13.510
AB09	1.100,00	7.150
AB02	1.150,00	200
MA05	1.060,00	300
MA07	1.070,00	100
MA04	1.080,00	1.300
MA01	1.100,00	4.200
AG01	1.110,00	60
ST10	1.100,00	300
DZ21	1.100,00	5.500

[12] Fonte: Home Page BM&F.

A percepção geral é de que o dólar irá se valorizar ao longo de 1997. No entanto, dentro do mesmo mês, observam-se expectativas diferentes quanto ao preço do dólar, sendo que a maioria prevê valores elevados para a moeda americana.

É razoavelmente comum que os bancos lancem opções de balcão para as empresas e, para *hedgear* a operação, comprem opções na BM&F. A tabela abaixo[13] mostra o giro de opções cambiais de alguns bancos.

Tabela 5. 7: Giro de opções cambiais de alguns bancos

Banco	*Giro de opções cambiais*
Banco de Boston	R$ 20/30 milhões/dia
CCF	R$ 50 milhões/dia
Citibank	R$ 1 bilhão/mês

Portanto, as opções possuem grande atratividade para os demandantes de *hedge* cambial, na medida em que seu detentor não possui a obrigação de exercê-la, embora incorra em prejuízo equivalente ao seu preço se a opção vira pó. Além disso, os *hedgers* podem observar a evolução dos parâmetros indicados no capítulo 4 e, desse modo, rebalancear o *hedge* conforme as alterações nas variáveis macroeconômicas.

A análise dos três tipos de contratos de moeda americana acima foi realizada a título de ilustração, porque acreditamos que se trata de um tema bastante atual, no contexto da expectativa dos mercados quanto a manutenção da âncora cambial. No entanto, a BM&F possui também outras modalidades de produtos que podem ser utilizados com fins de proteção.

[13] Fonte: Gazeta Mercantil, 13/9/96, p. B-3.

Um segmento interessante são os contratos agropecuários, que estão quebrando recordes no segundo semestre de 1996: o número de contratos agrícolas deste ano será o dobro do ano passado, pulando de 120 mil para 240 mil e o movimento passará de US$ 1,623 bilhões em 1995 para US$ 2,484 bilhões previstos em 1996. Segundo o presidente da BM&F, Manoel Pires da Costa[14], a alta volatilidade do mercado tem atraído os investidores diante da estabilidade econômica, e a retração do financiamento agrícola pelo Governo Federal tem estimulado os agricultores a *hedgear* seus produtos através da aquisição de contratos futuros.

Os produtos que registraram maior crescimento de negócios foram café, boi gordo e soja. Segundo o gerente de mercados agrícolas da BM&F, Félix Schouchana, as operações com futuros de café equivalem à metade da safra brasileira e, os de boi gordo, 15% do rebanho nacional[15]. Além disso, com o fim da obrigatoriedade de entrega física na liquidação dos contratos, o número diário de contratos de boi aumentou de 50 para 700. Com relação à soja, o número de contratos diários saltou da média de 25 para 120, por conta da percepção dos produtores, segundo Schouchana, de que é melhor fazer *hedge* com preços brasileiros, já que os preços em Chicago, muitas vezes, acarretam perdas.

As perspectivas quanto ao futuro da BM&F são bastante otimistas, por conta do crescimento das operações com contratos derivativos no Brasil. Nos dias atuais, esta bolsa investe na sua internacionalização, mas este sonhado processo encontra resistências no Banco Central, pois o ajuste diário dos ganhos e perdas dos investidores internacionais acarretaria fluxos frequentes de divisas com o resto do mundo sem a controle das autoridades monetárias. Ou seja, a abertura do mercado de futuros exigiria alterações na legislação referente ao intercâmbio de moeda estrangeira, o que o Banco Central vem se recusando a fazer.

---

[14] Gazeta Mercantil,22/10/96, p.B-16.
[15] Idem nota anterior.

As restrições do Banco Central também vêm impedindo o crescimento da liquidez no mercado de C-Bond, os títulos da dívida externa brasileira: de um lado, os bancos de investimentos estrangeiros não podem operar no mercado de derivativos brasileiro; de outro, a filial brasileira do mesmo banco não pode operar com C-Bonds, pois a legislação proíbe que nacionais detenham a dívida externa.

Não temos aqui a pretensão de defender a abertura dos mercados futuros no Brasil. O que queremos enfatizar é que a legislação contemporânea não é adequada para a internacionalização dos derivativos brasileiros. Mesmo com estes entraves, a BM&F tem obtido êxito em seus mercados, sendo atualmente a quarta maior bolsa de futuros do mundo, em volume negociado.

Conclusão

A instabilidade macroeconômica dos anos 80 e 90 contribuiu para o desenvolvimento de produtos financeiros destinados a reduzir as incertezas de determinadas decisões de investir. Neste contexto, os mercados futuros e de opções, parte de um conjunto mais amplo de contratos denominados derivativos, possibilitam a redução de riscos de operações comerciais e financeiras importantes

Procuramos demonstrar ao longo deste trabalho que os investimentos em mercados futuros e opções estão longe de constituir um "cassino" no qual os agentes procuram maximizar seus retornos; não se pode englobar os investidores que operam com esta modalidade em uma única categoria, vaga e imprecisa, dos especuladores. Os *hedgers* são participantes ativos dos mercados futuros e de opções, e sua atuação tem por objetivo principal a neutralização dos riscos, com vistas a assegurar um resultado adequado e garantir a continuidade das decisões de investir. Além disso, apesar da carga de preconceito que o termo carrega, a presença de especuladores não é nociva para o mercado: ao contrário, eles garantem a liquidez necessária para que os *hedgers* executem suas operações e alcancem seus objetivos.

Procuramos, também, estabelecer a relação entre as modernas estratégias de minimização de riscos no mercado financeiro e a teoria da escolha sob incerteza, segundo a qual um agente racional avesso ao risco procura evitar situações cujo resultado futuro é incerto. Neste sentido, os *hedgers* modernos representam os agentes avessos ao risco definidos pela teoria microeconômica , e os mercados futuros e de opções constituem exemplos das possíveis modalidades contratuais destinadas a eliminar os fatores de incerteza do horizonte temporal do investidor.

A Bolsa de Mercadoria e Futuros de São Paulo (BM&F) é uma das mais importantes instituições de negociação a futuros do mundo: em 1995, o volume total de contratos negociados chegou a casa dos US$ 3 trilhões, superando em mais de 90% o ano anterior. Em 1996, a tendência é de manutenção dos grandes volumes, sobretudo após a inclusão de contratos de futuros de cupom cambial, os quais permitem ao *hedger* se proteger em caso de posse de ativos ou passivos em dólares. Além disso, os contratos agropecuários vêm batendo recordes de negociações; por conta da restrição ao financiamento agrícola pelo Governo Federal, o que leva os produtores a buscarem o *hedge* em futuros.

Em síntese, a referência aos mercados financeiros como meras "bolsas de apostas" ou fonte de processos especulativos representa uma visão distorcida e reducionista da realidade de tais sistemas, na medida em que sua utilidade reside no auxílio à administração de riscos por parte de investidores que desejam afastar fatores de incerteza de seu horizonte de decisão.

Bibliografia

BERNDT, E.R.(1991), The Practice of Econometrics: Classic and Contemporary, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts e outras, 1ª edição, cap. 2.

FERREIRA, C.K.L. & M.C.P. Freitas (1989) O mercado internacional de crédito e as inovações financeiras dos anos 70 e 80, IESP/FUNDAP, São Paulo, Cap.2.

FORTUNA, E. (1996), Mercado Financeiro, Produtos e Serviços, Qualitymark Editora, Rio de Janeiro, 8ª ed.

GUTTMANN, R. (1989), *Financial Restructuring and Innovation.* In Guttman, R.(org.) Reforming Money and Finance, M.E. Sharpe, Inc., Nova York e Londres, pgs. 134-138.

HENDERSON, J.M. & R.E. Quandt (1980) Microeconomic Theory, A Mathematical Approach, 3ª edição, McGraw-Hill, Cap.6.

HIRSHLEIFER, J. & J.G. Riley (1992), The analytics of uncertainty and information, Cambridge University Press, 1ª edição, caps. 1, 2 e 3.

HULL, J.(1994), Introdução aos mercados futuros e de opções, São Paulo, Cultura Editores Associados e BM&F, 1ª edição.

HULL, J.(1996), Princing and Hedging Derivatives, São Paulo, Maio de 1996. Apostila de curso.

KREPS, D.M. (1990), A course in microeconomic theory, Princeton University Press, Cap. 3.

McKENNA, C.J. (1986), The Economics of Uncertainty, 1ª edição, Harvester Wheatsheaf, Nova York e outras, cap.3.

PÁDUA LIMA, M.L.L.M. (1995), Instabilidade e Criatividade nos Mercados Financeiros Internacionais: Condições de Inserção dos países do Grupo da América Latina. Tese de Doutorado, Instituto de Economia, Universidade Estadual de Campinas.

PINDYCK, R.S. & D.L. RUBINFELD (1994), Microeconomia, tradução da 2ª ed. americana (1991), Makron Books, São Paulo, cap. 5.

SILBERBERG, E.(1990), The Structure of Economics: A Mathematical Analysis, 2ª edição, McGraw-Hill International Editions, Nova York e outras, cap.13.

SUGDEN, R.(1987), *New Developments in the Theory of Choice Under Uncertainty*. In Hey, J.D.& P.J.Lambert (org.), Surveys in the Economics of Uncertainty, 1ª ed., Basil Blackwell, Oxford, cap.1.

WESTON, J.F. & E.F. BRIGHAM (1990), Essentials of Managerial Finance, 9ª ed., The Dryden Press International, Chicago e outras, caps. 1 a 6.

VARIAN, H.R. (1994), Microeconomia, princípios básicos, trad. da 2ª edição americana (1991), Ed. Campus, Rio de Janeiro, caps. 11, 12 e 13.

VARIAN, H.R. (1992), Microeconomic Analysis, 3ª ed., W.W. Norton & Company, Nova York e Londres, 1992, Caps. 11 e 20.

****

Artigos da Gazeta Mercantil

A BM&F vai lançar em novembro cupom cambial, por Tatiana Bautzer. *Gazeta Mercantil,* São Paulo, 21 out.1996, Finanças & Mercados, p.B-3.

BM&F lança futuro de cupom cambial, por Tatiana Bautzer. *Gazeta Mercantil,* São Paulo, 30 out.1996, Finanças & Mercados, p. B-2.

BM&F lança novo tipo de "swap", por Tatiana Bautzer. *Gazeta Mercantil,* São Paulo, 5 nov.1996, Finanças & Mercados, p. B-6.

BOLSA insiste na internacionalização, por Fernando Dantas. *Gazeta Mercantil,* São Paulo, 31 out.1996, Finanças & Mercados, p. B-1.

CONTRATOS Agrícolas quebram recorde, por Alex Branco. *Gazeta Mercantil*, São Paulo, 22 out.1996, Finanças & Mercados, p. B-16.

CRESCE mercado de opção cambial, por Fernando Dantas. *Gazeta Mercantil,* São Paulo, 13 set.1996, Finanças & Mercados, p. B-3.

CUPOM cambial estréia na BM&F com 6,6 mil contratos, por Tatiana Bautzer. *Gazeta Mercantil,* São Paulo, 4 nov.1996, Finanças & Mercados, p. B-4.

FORTE especulação no dólar futuro, por William Salasar. *Gazeta Mercantil,* São Paulo, 11 nov.96, Finanças & Mercados, p. B-2.

****

Suplementos da BM&F

FORBES, L.F (1994), Mercados Futuros: Uma introdução, 1ª edição, BM&F, São Paulo.

Regulamento de Operações da Bolsa de Mercadorias & Futuros.

Síntese de Dados - Bolsa de Mercadorias & de Futuros (BM&F), abril de 1996.

TEIXEIRA, M.A., Formação de Profissionais em Mercados Derivativos, Características Operacionais dos Mercados Futuros. Suplemento da Bolsa de Mercadorias & de Futuros (BM&F-SP).