Teoria econômica
Teoria dos jogos

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE ECONOMIA

PEDRO HENRIQUE THIBES FORQUESATO

O RISCO NA TEORIA DOS JOGOS

CAMPINAS

2010

PEDRO HENRIQUE THIBES FORQUESATO

O RISCO NA TEORIA DOS JOGOS

Monografia apresentada ao Instituto de Economia da Universidade Estadual de Campinas como pré-requisito parcial para a obtenção do bacharelado em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Juan Bacic

Bacic, Miguel Juan

CAMPINAS

2010

Dedico este trabalho à minha família e amigos, por seu apoio e críticas (em maioria) construtivas.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Miguel Juan Bacic pela sua ajuda e compreensão com minhas idéias e projetos inconstantes, e por sua coragem em me apoiar mesmo quando o tema fugiu a sua área de conforto.

Agradeço também ao Instituto de Economia da UNICAMP, que me proveu as capacitações para empreender este projeto e a vontade de pesquisar e entender a economia, e por me prover a visão crítica para não aceitar nenhuma teoria como incontestável, por mais ampla que seja sua aceitação; além de me incentivar sempre a buscar a pluralidade, investigando pontos de vista distintos.

Agradeço finalmente a Technische Universität Darmstadt, que não apenas me deu a oportunidade de estudar novos pontos de vista e conhecer novas culturas, como me introduziu este rico e interessante tema que é a Teoria dos Jogos, me provendo também a capacidade teórica de empreender uma pesquisa deste tipo sobre esse tema.

"On ne découvre pas de terre nouvelle

sans consentir à perdre de vue,

d'abord et longtemps, tout rivage."

André Gide.

Resumo

O risco na teoria dos jogos é multifacetado. Existe naturalmente o risco relacionado à incerteza (ou "jogadas da Natureza"), mas há risco até em jogos de certeza e informação perfeita (e completa): o risco em relação às ações dos outros jogadores, ou "risco estratégico", para Alvin Roth. Este presente trabalho apresenta uma introdução à teoria da incerteza e à teoria dos jogos e em seguida aborda criticamente o papel do risco em temas como equilíbrio trembling-hands, estratégias minimax, aversão ao risco em jogos de barganha, em leilões e em jogos de informação imperfeita.

Palavras-chave: Teoria Econômica, Teoria dos Jogos, Aversão ao Risco.

Abstract

Risk in game theory is multifaceted. There is naturally the risk related to uncertainty (or "moves by Nature), but there is risk even in games of certainty and perfect (and complete) information: risk related to the other player's actions, or "strategic risk" as defined by Alvin Roth. This work presents an introduction to the theory of uncertainty and to game theory; followed by a critical discussion of the role of risk in topics like trembling-hands perfect equilibrium, minimax strategies, risk aversion in bargaining games, in auctions and in games of imperfect information.

Keywords: Economic Theory, Game Theory, Risk Aversion.

Sumário

Introdução

A teoria dos jogos se tornou, na segunda metade do século XX, um dos campos mais estudados e promissores da teoria microeconômica do mainstream, por poder introduzir – ainda que se mantendo o característico rigor matemático – a possibilidade dos agentes definirem diferentes estratégias e interagirem entre si, escapando da falta de competição característica dos modelos de concorrência perfeita e imperfeita, em que os agentes escolhiam sua ação independentemente da estratégia dos outros agentes.

De fato, hoje em dia são poucas as áreas da microeconomia que não dependem em grande medida da teoria dos jogos para o estabelecimento de seus resultados principais. Assim, é inegável a relevância do estudo deste tema e suas aplicações em uma ampla gama de situações, como organização industrial, relações internacionais, jogos de barganhas, leilões, desenho de mecanismos e mercados, entre outros.

Embora não seja de modo algum perfeita, e careça em alguns momentos de aplicabilidade no mundo real, acreditamos na importância do estudo desta disciplina, que tem tido grandes aperfeiçoamentos com a introdução de pressupostos mais realistas da forma de se comportar dos agentes. O futuro aparente também promissor: conceitos de racionalidade limitada e provindos da economia comportamental, como a taxa de desconto intertemporal hiperbólica encontram cada vez mais espaço dentro da teoria econômica do mainstream.

Neste contexto, é importante investigar até que ponto a teoria dos jogos consegue absorver o fato de que os agentes podem possuir diferentes níveis de aversão ao risco, e isto pode afetar de maneira fundamental suas estratégias. Por outro lado, modelos de teoria dos jogos com aversão ao risco podem prover *insights* sobre o efeito de aversões ao risco assimétricas nas estratégias e payoffs dos agentes.

Assim, neste trabalho pretendemos realizar uma análise ampla do papel do risco na teoria dos jogos, tanto seu efeito sobre diferentes conceitos teóricos, como selecionar alguns modelos especiais em que a aversão ao risco desempenha papel importante. Antes disso, entretanto, julgamos importante realizar uma revisão bibliográfica – introdutória e superficial – sobre aspectos gerais da teoria dos jogos e da teoria da incerteza, para garantir o entendimento dos leitores (e dos autores) dos aspectos essenciais desta teoria, e de pontos que serão usados nos modelos centrais ao tema deste trabalho.

Este trabalho será dividido em dois capítulos. No primeiro, faremos uma introdução teórica à teoria do jogo, apresentando tópicos como o equilíbrio de Nash e seus refinamentos, estratégias puras e mistas, jogos estáticos e dinâmicos e o papel da informação nos jogos. Também introduziremos a teoria da incerteza, em especial a função de utilidade de Von Neumann-Morgenstern, a propriedade da utilidade esperada, funções de utilidade côncavas e a aversão ao risco.

No segundo capítulo abordaremos o papel do risco na teoria econômica, estudando a relação entre o risco e a informação, o papel do risco em conceitos como equilíbrio de trembling-hands e estratégias minimax, veremos modelos de jogos de barganha e de leilão em que uma parte dos jogadores é avessa ao risco (e como isto afeta seu payoff) e outros modelos em que o risco produz efeitos interessantes.

Esperamos com este trabalho avançar na discussão de como a teoria dos jogos pode ajudar-nos a compreender as ações estratégicas de agentes em situações de decisão multipessoais; e em particular a resposta dos agentes a situações de incerteza, que é parte importante da natureza humana.

Capítulo 1: Princípios básicos da teoria dos jogos não-cooperativos e da teoria da incerteza

1.1. Introdução

Neste primeiro capítulo o objetivo é revisar os princípios básicos da teoria dos jogos e da teoria da decisão com incerteza, estabelecendo as bases que nos permitirão apresentar os modelos que serão estudados no segundo e terceiro capítulo. Como o título deste capítulo antecipa, está fora do escopo deste capítulo uma análise de jogos cooperativos, ainda que seja outro rico tema na teoria dos jogos e também passível de aplicações da teoria da incerteza. A natureza desse trabalho e suas limitações, entretanto, impedem uma exposição detalhada que faça justiça a este instrumental.

Nas próximas duas seções desse capítulo trataremos de forma resumida uma revisão dos conceitos de incerteza e aversão ao risco, estudando especialmente a hipótese da utilidade esperada e o teorema de Von Neumann, que serão amplamente utilizados no restante deste trabalho.

Faremos então uma exposição (que reafirmamos não pretender ser abrangente nem didática) dos preceitos da teoria dos jogos, discorrendo depois de uma breve introdução sobre o conceito central da disciplina – o equilíbrio de Nash –, na terceira seção sobre as possíveis estratégias que os agentes podem assumir (puras ou mistas), na quarta seção, sobre duas importantes formas de jogos não-cooperativos, jogos repetidos e seqüenciais, e na quinta seção sobre o papel da informação (ou falta dela) nos jogos.

1.2. A incerteza e a aversão ao risco

Uma parte importante da análise econômica trata das decisões dos agentes diante da incerteza[1]. Com incerteza, os agentes escolhem não entre diferentes utilidades advindas do consumo de diferentes cestas de bens, mas entre diferentes distribuições de probabilidade, isto é,

[1] Alguns trabalhos fazem uma diferenciação qualitativa entre incerteza e risco (a incerteza, nesse contexto, acarretaria probabilidades dos eventos serem não-estimáveis). Como usual em trabalhos de microeconomia – e pelo fato de nossa análise depender do pressuposto de que as probabilidades *são* estimáveis, assumiremos ambos como sinônimos.

entre conjuntos de possíveis resultados, cada um com uma probabilidade associada (VARIAN, Microeconomic Analysis, 1992, pp. 215-216).

Assim, se faz naturalmente necessária a aplicação de conceitos advindos da teoria da probabilidade, como a esperança e variância de uma distribuição, que serão largamente utilizados na discussão a seguir.

Confrontados com a incerteza em relação aos resultados, cada agente formula *planos de contingência* e compara a utilidade que esses planos lhe geram para escolher sua ação (ou estratégia). Veremos na próxima seção como deve ser alterado o conceito de utilidade para incluir o fato de que os agentes neste paradigma levam em conta a probabilidade dos diferentes resultados.

Antes de prosseguir, entretanto, devemos definir um *estado de natureza* como um possível resultado de um evento aleatório, que é assim chamado por estar (por suposição) fora do controle dos agentes envolvidos a definição desse resultado.

1.2.1. **Propriedade da utilidade esperada**

Faz-se claro que para escolher entre diferentes distribuições de probabilidade, o agente deverá dar grande importância ao valor esperado dessas distribuições. Segue-se então como fundamental a propriedade da utilidade esperada, que discutiremos a seguir.

Tendo o agente uma ordenação de preferências completa, reflexiva, transitiva e contínua, é possível definir a função de utilidade desse agente como $u(x) > u(y) \Leftrightarrow x \succ y$. É demonstrável (embora não o tentaremos aqui) que a função de utilidade como definida acima será contínua, e que (o que nos interessa aqui):

$$p \circ x \oplus (1-p) \circ y \succ q \circ x \oplus (1-q) \circ y \Leftrightarrow u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y) > u(q \circ x \oplus (1-q) \circ y)$$

Em que $p \circ x \oplus (1-p) \circ y$ é uma *loteria,* e representa que o agente receberá x com probabilidade p e y com probabilidade $(1-p)$. Assim, a equação acima afirma que um agente A preferirá a loteria $L_p = p \circ x \oplus (1-p) \circ y$ sobre a loteria $L_q = q \circ x \oplus (1-q) \circ y$ se, e somente se, a utilidade provida por L_p for maior que a utilidade provida por L_q.

Podemos ainda (sob algumas hipóteses auxiliares), escrever essa função de utilidade como $u(p \circ x \oplus (1-p) \circ y) = p \times u(x) + (1-p) \times u(y)$. Esta propriedade estabelece que a utilidade de uma dada variável aleatória (uma loteria) é a utilidade esperada de seus possíveis valores (prêmios). Esse resultado é chamado de *teorema da utilidade esperada*.

A demonstração desse teorema foge aos objetivos dessa monografia, mas pode ser facilmente achada em (VARIAN, Microeconomic Analysis, 1992, pp. 174-175). A expansão desse resultado para um caso com n variáveis e/ou variáveis contínuas é imediato.

Funções de utilidade na forma exposta acima são chamadas de *funções de Von Neumann-Morgenstern* ou *funções de utilidade esperada*, e serão usadas na maior parte desta monografia. Vale notar que ao se submeter uma função de utilidade esperada a uma transformação afim (do tipo $v(x) = au(x) + b$), tem-se sempre uma função de utilidade que não apenas representa a mesma ordenação de preferências, como mantém a propriedade do valor esperado.

Existe uma assunção por trás dessa propriedade: os diferentes resultados possíveis devem ser mutuamente excludentes, isto é, apenas um dos diferentes resultados possíveis irá se concretizar (naturalmente $P(X \cup Y) = p + (1-p) = 1$ só é possível se $X \cap Y = \emptyset$). Este pressuposto, às vezes chamado de *pressuposto da independência*, pois define que as decisões (por exemplo, de consumo) de um agente dado um estado de natureza são independentes das suas decisões em outros estados de natureza, e determina que a função de utilidade esperada seja aditiva.

Outra maneira de entender esse conceito é pela relação entre ações e conseqüências (RUBINSTEIN, Lecture Notes in Microeconomic Theory: the economic agent, 2006, pp. 101-103). Nos modelos sem incerteza, esta é uma relação determinística e, portanto, direta. Uma particular ação de um agente (seja em um contexto de teoria dos jogos ou de modelos de mercado) resultará sempre em um determinado resultado, e portando a diferenciação entre ambos não é essencial. Nos modelos que estudaremos aqui, por outro lado, os agentes tomam decisões em um ambiente em que a relação entre ações e resultados não é determinística, mas sim estocástica, e, portanto o agente escolherá não entre possíveis resultados, mas entre possíveis loterias (como definidas anteriormente).

Rubinfeld coloca uma suposição adicional do modelo, de que o agente apenas se importe com a distribuição de conseqüências, e não com os estados de natureza. Assim, num caso que envolva probabilidade $p = 0{,}5$ de chuva e $z_1 =$ possuir guarda-chuva, e $z_2 =$ não possuir guarda-chuva, naturalmente não é o mesmo a loteria $p \circ z_1 \oplus (1-p) \circ z_2$ e seu inverso $(1-p) \circ z_1 \oplus$

$p \circ z_2$. Como o agente efetivamente se importa com o estado de natureza (nesse caso ele prefere possuir o guarda-chuva quando chova e vice-versa), a primeira loteria possui uma utilidade claramente superior à segunda, ainda que matematicamente sejam similares, e portanto neste caso o teorema da utilidade esperada não é aplicável.

1.2.2. **Aversão ao risco**

Para a discussão da aversão ao risco, é de praxe a suposição simplificadora de que os resultados possíveis são prêmios monetários. No resto dessa seção adotaremos tal suposição.

Dada a propriedade da utilidade esperada, para podermos qualificar o comportamento de um agente em relação ao risco, nos falta especificar a sua função de utilidade (que como explicado na seção anterior é contínua e única até uma transformação afim) em relação ao dinheiro.

Especificada uma função de utilidade esperada $u(x)$ para o agente, sendo x a sua riqueza monetária, podemos definir como *avesso ao risco* o agente que prefira uma riqueza intermediária x_1 a uma combinação linear (estocástica) entre duas riquezas (x_0 e x_2) extremas; isto é, $u(x_1 = t \times x_0 + (1-t) \times x_2) > p \times u(x_0) + (1-p) \times u(x_2)$, para $t = [0,1]$. Naturalmente, é o mesmo definirmos que o agente será avesso ao risco se sua função de utilidade esperada for (estritamente) côncava.

De modo análogo, definimos um agente como *propenso ao risco* se ele possui uma função de utilidade esperada (estritamente) convexa, ou (o que é o mesmo), $u(x_1 = t \times x_0 + (1-t) \times x_2) < p \times u(x_0) + (1-p) \times u(x_2)$, para x_0, x_1 e x_2 definidos como anteriormente. Finalmente, um agente é *indiferente ao risco* se sua função de utilidade esperada é convexa e côncava (mas não estritamente convexa nem estritamente côncava), ou seja, é linear[2].

Embora a definição de aversão ao risco seja imediata, uma dificuldade se impõe na sua medição. Naturalmente, espera-se que uma maior concavidade da função de utilidade esperada se relacione com uma maior aversão ao risco, mas a mensuração de tal fato apenas pelo valor da segunda derivada da função vai de encontro à definição da própria como única até uma transformação afim (o grau de aversão ao risco medido pelo valor da segunda derivada, assim, seria diferente para funções de utilidade que representam as mesmas preferências).

---

[2] Naturalmente, é possível que uma função possua intervalos em que seja côncava ou convexa. Por simplificação, trataremos apenas de funções que apresentem tal característica por todo seu domínio.

Keneth Arrow e John Pratt, como resposta a este problema, propuseram uma medida de aversão ao risco (absoluta) que normaliza a segunda derivada ao dividir pela primeira:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

A *medida de aversão ao risco absoluta de Arrow-Pratt* (ARA) se torna mais clara ao definirmos um *conjunto de aceitação*. Seja (x_1, x_2) o par de números que denota que o agente terá prêmio x_1 se E ocorrer e x_2 se E não ocorrer. Partindo de uma riqueza originária w, podemos definir o conjunto de aceitação como o conjunto de loterias que o agente iria aceitar participar (isto é, tem utilidade esperada maior ou igual à utilidade inicial).

Embora não iremos demonstrar os cálculos envolvidos (que podem facilmente ser checados nos livros de referência, como (VARIAN, Microeconomic Analysis, 1992, pp. 178-179)), vale notar duas características importantes desse conjunto: se o agente for avesso ao risco, o conjunto aceitação será um conjunto convexo (isto é, se A é um conjunto convexo, então $x \in A \Longrightarrow [tx + (1-t)x] \in A$, para $t = [0,1]$); e a inclinação da fronteira do conjunto no ponto (0,0) é a chance de ocorrência do evento (em inglês, *odds*).

Com esses resultados, define-se que um agente i é *localmente mais avesso ao risco* que um agente j se nas proximidades de (0,0) o conjunto de aceitação de j incluir o de i, ou, o que pode se demonstrar que é o mesmo, se $r_i(x) > r_j(x)$.

Se quisermos uma definição mais forte de que i é *globalmente mais avesso ao risco* que j, isto é, que i é mais avesso ao risco para qualquer riqueza inicial w, então existem três formas de se caracterizar isso. Podemos afirmar que $r_i(x) > r_j(x)$ para todo x; podemos afirmar que $u_i(x) = G(u_j(x))$, onde G representa uma função crescente e estritamente côncava (isto representa afirmar que u_j é "mais côncava" que u_i); ou podemos afirmar que o *prêmio de risco* que o agente i está disposto a pagar para se ver livre da incerteza é menor que o de j. De fato, pode-se mostrar (para a demonstração recomendamos as obras de referência) que as três definições são equivalentes.

Antes de terminarmos essa breve exposição de alguns dos princípios básicos da teoria microeconômica da incerteza, devemos analisar uma outra medida de aversão ao risco, a *medida de aversão ao risco relativa de Arrow-Pratt* (ARR):

$$\rho = -\frac{u''(x) \times x}{u'(x)}$$

Esta medida determina a aversão ao risco de uma aposta (loteria) relativa ao seu nível de renda, e possui uma utilidade esperada da forma $p \times u(xw) + (1-p) \times u(yw)$.

Também é importante introduzir uma forma especial de funções de utilidade esperada: a *função de aversão ao risco absoluta constante*, que possui ARA neutra a mudanças na riqueza (e que possuem a forma $u(x) = -e^{-\alpha x}$, ou uma transformação afim[3]).

Alguns comentários finais devem ser feitos. Naturalmente, pelo escopo desse trabalho, não se pretendeu aqui uma exposição completa sobre esse tema importante e complexo, mas apenas a exposição de alguns conceitos básicos essenciais para ser possível examinar posteriormente os modelos de teoria dos jogos com incerteza, e, especialmente, o papel da aversão ao risco na determinação dos resultados desses jogos, o que é o objetivo último dessa monografia. Assim, muitos assuntos relevantes não puderam ser abordados, como utilidades dependentes do estado de natureza (como o exemplo do guarda-chuva supracitado) e o papel da teoria da probabilidade subjetiva. Para visão mais detalhada desses temas, novamente recomenda-se as obras de referência (ver, por exemplo, (MAS-COLELL, 1995, pp. 199-207)).

1.3. Teoria dos jogos

A teoria dos jogos, embora tendo sido objeto de elevado interesse apenas recentemente, tem origens que datam do início da economia como ciência analítica. Os primeiros estudos sobre jogos na literatura econômica foram feitos por Cournot (1838)[4] e Bertrand (1883)[5], em seus famosos modelos de oligopólio, que em forma pouco alterada, ainda fazem parte da maioria dos cursos intermediários de economia. Estes modelos, entretanto, foram vistos como casos especiais, e não mudaram a forma de pensar problemas econômicos (FUNDERBERG, 1991, p. xviii).

A mudança de paradigma ocorreu apenas em 1944 com a publicação do livro *Theory of Games and Economic Behaviour*, dos saudosos economistas John Von Neumann e Oskar Morgernstern. Eles definiram um jogo como uma interação entre agentes que é governada por determinadas regras que estipulam as ações possíveis e um conjunto de resultados para cada combinação de ações (HEAP, 2004, p. 3). Proposta deste modo, é simples notar a razão da

[3] Para a demonstração, ver (RUBINSTEIN, Lecture Notes in Microeconomic Theory: the economic agent, 2006, pp. 124-125).
[4] Cournot, A. 1838. Recherches sur les Principes Mathérmatiques de la Théorie des Richesses. English edition: Reserches into the Mathematical Principles of the Theory oh Wealth. New York: Macmillan, 1897.
[5] Bertrand, J. 1883. Théorie Mathematique de la Richesse Sociale. *Journal des Savants*.

crescente popularidade da teoria dos jogos no final do século XX: é complicado achar qualquer fenômeno social que não caiba nessa definição. A teoria dos jogos, nesse contexto, prometia ser um modo de análise que poderia unificar todas as diferentes áreas da ciência econômica e se estender a outras ciências sociais; e de fato, em seu livro, Von Neumann propõe que a maioria das questões econômicas poderia (e deveriam) ser analisada como jogos (FUNDERBERG, 1991, p. xviii).

O livro de Von Neumann também introduz os conceitos de representação de um jogo em forma extensiva e normal, definiu uma solução mini-max e mostrou que essa solução existe em todos os jogos de soma zero. Mas o conceito talvez mais importante da teoria dos jogos só foi especificado cinco anos depois, quando Nash propôs o que viria a ser conhecido como *equilíbrio de Nash*.

Com o avanço da teoria dos jogos para problemas cada vez mais complexos (com jogos seqüenciais e de informação imperfeita), o equilíbrio de Nash para jogos estratégicos foi aperfeiçoado nos conceitos de *equilíbrio perfeito em subjogos, equilíbrio de Nash bayesiano* e *equilíbrio trembling-hand perfect,* dos quais apenas o primeiro e último serão abordados neste trabalho.

Achamos pertinente a esta seção introdutória abordar tangencialmente a crítica feita em (HEAP, 2004) sobre os pressupostos da teoria dos jogos. Sem querer desviar do tema desta tese, vale mencionar que um pressuposto essencial (e altamente passível de críticas) da teoria é a racionalidade dos agentes, e mais especificamente, o conhecimento comum da racionalidade. De fato, para se ter uma solução definida em um jogo cada agente deve supor que os outros agentes agem com racionalidade (e agir também). Outra crítica relevante é que a teoria dos jogos levaria ao limite o individualismo metodológico, embora a teoria dos jogos cooperativos inclua a possibilidade de agentes assinarem contratos e formarem coalizões.

Não se pretende aqui aprofundarmos na discussão dessa crítica ou questionar a já estabelecida importância da disciplina, mas sim lembrar que a teoria dos jogos – assim como qualquer corpo teórico – deve ser estudada sem se ignorar seus pressupostos e especificidades metodológicas.

Antes de adentrarmos no tópico especifico dessa seção, se faz necessária uma caracterização mais detalhada de um jogo. Em (OSBORNE, 1994, p. 2), é definido um *jogo* como uma interação estratégica entre agentes que inclui restrições (regras, na definição de (HEAP, 2004)) sobre os interesses e ações possíveis dos agentes, mas que não especifica as ações que esses agentes realmente irão tomar. Neste contexto, uma *solução* de um jogo é uma descrição sistemática das ações dos agentes e os resultados que eles obtêm neste jogo.

A entidade básica de qualquer jogo é o *agente*[6]. Um agente pode ser um indivíduo ou um grupo de indivíduos tomando uma decisão. Uma vez definidos os agentes, podemos dividir os jogos em *jogos não-cooperativos*, onde estudamos as estratégias individuais dos agentes e suas inter-relações (vale ressaltar que os jogos não-cooperativos, apesar do nome, não excluem a cooperação entre diferentes agentes), e *jogos cooperativos*, onde os primitivos são grupos e subgrupos de agentes, também freqüentemente chamado de jogos de coalizão. Como já adiantado na seção acima, neste capítulo trataremos apenas de jogos não-cooperativos.

Devemos também diferenciar *jogos estratégicos*, nos quais os agentes decidem sua estratégia uma única vez e simultaneamente, e *jogos seqüenciais*, nos quais os agentes agem em posições definidas e possivelmente múltiplas vezes. Veremos com mais detalhe as características de cada família de jogos nos itens 1.3.3 e 1.3.4, respectivamente.

Finalmente, podemos segregar os jogos em jogos com base em seu nível informacional. Naturalmente, como o objetivo desse trabalho é o estudo da incerteza, jogos com informação incompleta, imperfeita ou incerteza serão particularmente importantes, embora demonstraremos no capítulo seguinte que existe também risco em jogos com informação perfeita (e completa).

1.3.1. Jogos estratégicos e equilíbrio de Nash

Começaremos nosso estudo sobre a teoria dos jogos com os jogos estratégicos, já definidos de forma menos formal no item anterior. De forma rigorosa, podemos definir um jogo na forma estratégica como sendo composto de três elementos: um conjunto (finito) de *agentes* $i \in \wp, i = (1,2,\dots,N)$; um espaço de estratégia pura S_i para cada agente i; e uma *função recompensa* $u_i(s)$, que recompensa o agente i com utilidade de Von Neumann-Morgenstern para uma dada escolha estratégica dos agentes $s = (s_1,\dots,s_N)$. Para simplificar a notação, denotaremos os outros agentes no jogo além de i como $-i$.

A forma mais simples de jogo é um jogo de dois jogadores de soma-zero ($\sum_{i=1}^{2} u_i(s) = a$, por convenção normalmente com $a = 0$). Embora normalmente – e na maior parte desse trabalho – será convencionado o *conhecimento público*, isto é, que todos os agentes conhecem a estrutura

[6] Em inglês é convencional chamar os agentes de *players*, ou jogadores. Utilizaremos preferencialmente agentes, por acharmos mais apropriado, mas em alguns momentos a palavra "jogador" pode ser utilizada de forma intercambiável.

do jogo estratégico, e sabem que os outros agentes também o sabem (ad infinitum); (FUNDERBERG, 1991, pp. 4-5) defende que essa suposição não é necessária nem suficiente para a definição do equilíbrio de Nash. De fato, em muitas situações, apenas é necessário que os agentes saibam as suas próprias funções de recompensa[7].

Como oposto do jogo de soma-zero, um *jogo de soma variável* representa um jogo em que os pagamentos provêm de uma entidade externa, e portanto o ganho de um jogador não necessariamente implica em perda de outro agente.

Em muitos jogos, existem estratégias que nenhum agente racional irá escolher, pois fornecem um retorno estritamente inferior às outras estratégias disponíveis, independentemente da estratégia do outro jogador. Chamamos esse tipo de estratégias de *estritamente dominadas*. Pode-se então utilizar o processo de *iteração (estritamente) dominada* para eliminar as estratégias estritamente dominadas e assim obter um jogo mais simples, e através da iteração dessa estratégia, achar um equilíbrio (pela supracitada suposição de conhecimento público, um agente saberá que estratégia s_i de outro agente é estritamente dominada, e portanto – supondo a racionalidade desse agente – assumirá que ela nunca será jogada, podendo assim removê-la de suas considerações).

Rigorosamente, uma estratégia s_i é estritamente dominada se existe $s_i' \in S_i$ tal que $u_i(s_1', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. De forma mais ou menos análoga, podemos definir uma estratégia s_i como *fracamente dominada* se existe $u_i(s_1', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ e $u_i(s_1', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ para *pelo menos um* $s_{-i} \in S_{-i}$. Vale notar antes de prosseguir que uma estratégia pura pode ser (estritamente dominada) por uma estratégia mista (definiremos estratégia mista na próxima seção). A extensão dessa definição para um espaço de estratégias mistas é imediata, e não será feita aqui.

Como será amplamente utilizado na exposição posterior, vale expor mais cuidadosamente o jogo *Dilema dos Prisioneiros*. Neste jogo, dois prisioneiros são oferecidos as seguintes opções: cooperar ou confessar. Se ambos os prisioneiros confessarem, ambos serão presos; se apenas um confessar, ele ficará livre e apenas o outro prisioneiro será preso (servindo o dobro da pena), e finalmente se ambos cooperarem, os dois prisioneiros sofrerão uma leve multa. Neste tipo de jogo a iteração dominada irá eliminar a possibilidade de cooperação. Ainda que este seja a solução

[7] Uma discussão mais detalhada desse problema pode ser vista em (FUNDERBERG, 1991, pp. 541-570). Esta discussão, entretanto, naturalmente foge ao escopo e objetivo deste trabalho.

ótima de Pareto, a cooperação não ocorrerá: de fato, ela é uma estratégia estritamente dominada. Este resultado controverso está na raiz da enorme popularidade deste simples modelo.

Figura 1.1: Dilema dos prisioneiros

	Cooperar	Confessar
Cooperar	-2, -2	-10, 0
Confessar	0, -10	-5, -5

A iteração (estritamente ou fracamente) dominada é uma das principais técnicas de solução de um jogo estratégico. Muitos jogos, como o famoso dilema dos prisioneiros, permitem uma solução dessa forma. Sem embargo, a maioria dos jogos mais interessantes teórica e praticamente não podem ser resolvidos dessa forma; e nesses casos devemos utilizar o conceito de *equilíbrio de Nash*, que existe em uma classe muito maior de jogos.

Informalmente, definimos o equilíbrio de Nash como a combinação de estratégias em que para cada agente a estratégia adotada é ótima, ou, em outras palavras, é a combinação de estratégias que, depois de alcançada, nenhum jogador possui incentivos para sair dela.

De forma um pouco mais rigorosa, temos que uma combinação de estratégias s^* é um equilíbrio de Nash em estratégias puras se, para todos os jogadores i,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \text{ para todo } s_i \in S_i.^{8}$$

Como anteriormente, a extensão dessa definição para estratégias mistas é imediata, e será tratada no próximo item. Uma definição levemente mais forte é o *equilíbrio de Nash estrito*. A definição rigorosa é a mesma que acima, mas com sinal de desigualdade estrita. O equilíbrio de Nash estrito é uma condição mais desejável, pois não é preciso se preocupar se os jogadores não fugirão do equilíbrio para outro estado com retorno igual. Além disso, nesse equilíbrio, pequenas mudanças na natureza do jogo não alterarão a posição de equilíbrio. Sem embargo, vale notar entretanto que o equilíbrio de Nash estrito é por definição um equilíbrio de estratégias puras, e não pode ser expandido para uma condição de estratégias mistas.[9]

[8] Na verdade, a definição como dada não está completa, já que mesmo um equilíbrio de Nash em estratégias puras deve ser melhor que as alternativas mesmo em estratégias mistas. No próximo item daremos a definição formal de equilíbrio de Nash que abrange ambas as formas de estratégia; por hora, pensamos essa definição ser suficiente.

[9] Existe ainda o equilíbrio de Nash *quase-estrito*, mas que não será tratado aqui. Interessados são direcionados para (FUNDERBERG, 1991, p. 12) , nota de rodapé cinco.

Os supracitados modelos de oligopólio de Cournot e Bertrand (mais especificamente suas soluções) podem ser explicados por meio do conceito de equilíbrios de Nash. No modelo de Cournot, as firmas decidem simultaneamente as quantidades produzidas, de forma a maximizar seu lucro; já no modelo de Bertrand, as firmas também decidem simultaneamente, mas neste caso decidem os preços que serão cobrados. Em ambos os casos, o equilíbrio é determinado no ponto em que todas as firmas maximizam seu lucro dada a escolha da(s) outra(s) firma(s)[10]. Embora estas situações sejam comumente denominadas de "equilíbrio de Cournot" e "equilíbrio de Bertrand", a nossa discussão anterior mostra que também podem ser definidas como equilíbrios de Nash.

É relevante notar que nem todos os jogos possuem equilíbrio em estratégias puras. Um exemplo de jogo que apenas comporta estratégias mistas (não-degeneradas) é o "Matching Pennies", em que existem dois jogadores e cada um pode escolher entre "cara" e "coroa". Se ambos escolherem "cara" ou ambos escolherem "coroa", o Jogador 1 ganhará um *util* (isto é, terá um payoff de um), e o Jogador 2 perderá um. Se os jogadores não escolherem a mesma face, o oposto ocorre (Figura 1.2, em que exemplificamos a exposição matricial de um jogo em forma estratégica; as linhas representando sempre o Jogador 1 e as colunas o Jogador 2).

Figura 1.2: Matching Pennies

	Cara	Coroa
Cara	1,-1	-1,1
Coroa	-1,1	1,-1

Existem também casos em que o jogo possui mais de um equilíbrio de Nash. Quando isto ocorre, a suposição de que um equilíbrio ocorre depende de algum mecanismo ou processo que leve os jogadores a esperar esse equilíbrio. Um exemplo comum de jogo com equilíbrios múltiplos é a "Batalha dos Sexos". Dois jogadores decidem entre ir ao cinema ou ao teatro, cada jogador entretanto possuindo seu destino favorito; e os jogadores recebem dois utils se ambos concordarem com seu destino favorito, um se concordarem com o destino não favorito do jogador e zero se escolherem destinos diferentes.

Esse jogo (assim como outros jogos similares e também amplamente conhecidos como o "Chicken" e "Hawk-dove") possui dois equilíbrios em estratégia pura e um equilíbrio em

[10] Os modelos de Cournot e Bertrand, como comumente estudados, são modelos de duopólio. A extensão para situações com n firmas é, entretanto, imediata e usual.

estratégias mistas.[11] Nestes jogos, sem informação adicional, não é trivial se determinar qual será o resultado final. Uma possível sugestão para um resultado seria os "pontos focais" introduzidos por Schelling[12], que seriam ações com maior probabilidade de serem assumidas pelos agentes. No exemplo acima, um ponto focal poderia ser o cinema, se os agentes pensarem que este é o ponto de encontro mais comum. Outra possível solução para um jogo com múltiplas soluções é a *risco-dominante*, especialmente útil em jogos com mais de dois jogadores. Embora uma descrição detalhada fuja dos objetivos dessa monografia, apontamos para as obras de referência – especialmente (FUNDERBERG, 1991, pp. 20-23).

Abordaremos nas próximas seções outros temas referentes à teoria do jogos. Naturalmente o tamanho deste trabalho impede uma descrição detalhada dos temas, assim nas seções subsequentes seremos (ainda) menos profundos na descrição dos conceitos relevantes.

1.3.2. Estratégias puras e mistas

Na seção anterior foram explicitados os conceitos de jogos de estratégia pura e equilíbrio de Nash. Nesta seção, iremos avançar nesse paradigma definindo jogos e equilíbrios em estratégias mistas. Embora já tenhamos abordado informalmente este tópico, nesta seção daremos um tratamento mais formal e atento ao tema.

Uma *estratégia mista* σ_i é uma distribuição de probabilidade sobre estratégias puras, e o espaço de estratégias-mistas de i por $\sum_i$, definidos por $\sigma_i(s_i)$, que é a probabilidade em estratégia mista de s_i. Embora muitas das particularidades das estratégias mistas fujam às necessidades deste trabalho, vale notar que podemos definir estratégias puras como estratégias mistas com funções de probabilidade degeneradas, i.e. com probabilidade igual a zero ou um.

Um *equilíbrio de Nash em estratégias mistas*, como já adiantado na seção anterior, é um conjunto de estratégias mistas (novamente lembramos que uma estratégia pura pode ser definida como uma estratégia mista de probabilidade degenerada, isto é, se temos $A_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ como o conjunto de ações possíveis do agente i, jogar a_{1i} com probabilidade $p = 1$ e todas as outras ações com $p = 0$ é uma estratégia pura e uma estratégia mista com probabilidade degenerada) que são ótimas para todos os jogadores, dadas as estratégias dos outros jogadores.

---

[11] No jogo como descrito acima o equilíbrio em estratégias mistas se dá com cada jogador escolhendo seu destino favorito com probabilidade $^2/_3$.

[1212] SCHELLING, T. 1960. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press.

Assim, qualquer equilíbrio de Nash é um equilíbrio em estratégias mistas (embora normalmente se utilize este termo apenas para equilíbrios que não são também em estratégias puras).

Se definirmos novamente de forma rigorosa, uma combinação de estratégias mistas é um equilíbrio de Nash se, para todos os jogadores i,

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^*), \text{ para todo } s_i \in S_i.$$

Esta é a definição completa de equilíbrio de Nash, e no resto do trabalho suplantará a definição dada na seção anterior. Basicamente ela define que dada uma combinação de estratégias dos outros agentes, a estratégia de equilíbrio de Nash para este agente fornece utilidade máxima. Estendendo isto para todos os jogadores, temos que nenhum jogador terá incentivos para mudar sua estratégia após atingida esta situação. Configura-se portanto um verdadeiro equilíbrio.

Para se achar um equilíbrio em estratégias mistas, é importante notar que um jogador apenas designará probabilidades positivas para estratégias puras com o mesmo retorno esperado.

O conceito de estratégias-mistas, enquanto matematicamente essencial para a teoria dos jogos, apresenta algumas dificuldades de aplicação ao mundo real. Voltemos ao jogo "Matching pennies", exposto na seção anterior. Neste jogo, como já mencionado, não existe equilíbrio de estratégias puras: se houver uma posição em que ambos escolhem a "cara" ou "coroa", o Jogador 2 terá incentivo para mudar de ação, e vice-versa. Existe, entretanto, um equilíbrio em estratégias mistas, em que cada jogador escolhe sua ação com 50% de probabilidade (vale aqui diferenciar ação de estratégia, a ação é escolher "cara" ou escolher "coroa", enquanto a estratégia é escolher entre as ações disponíveis aleatoriamente).

A interpretação deste equilíbrio, entretanto, não se dá sem certas dificuldades. O equilíbrio ocorre pois se o Jogador 1 escolher a estratégia de jogar "cara" e "coroa" cada um com probabilidade 0.5, o payoff do Jogador 2 será 0 independentemente do que jogue: assim ele seria indiferente entre as possíveis estratégias e disposto a jogar uma estratégia mista também.

Mas como (FUNDERBERG, 1991, pp. 16-17) defende, isto levanta o problema do por quê do Jogador 2 se dar ao trabalho de escolher uma estratégia mista se terá um payoff igual independente da estratégia que escolher. Ou na explicação de (KREPS, 1990, pp. 408-409), não há incentivo positivo para o segundo jogador agir aleatoriamente: enquanto o primeiro jogador escolher uma ação que possibilite o equilíbrio em estratégias mistas, o outro jogador possui muitas melhores opções de resposta.

Assim, continua Kreps, muitas pessoas consideram a idéia de equilíbrio em estratégias mistas não-crível. Mesmo que se acredite que agentes quando confrontados com decisões reais ajam aleatoriamente, deve-se acreditar também que eles vão agir com a aleatoriedade certa mesmo que não tenham nenhuma vantagem em agir dessa maneira?

Os dois autores respondem diferentemente a esta questão. Kreps salienta que o conceito de equilíbrio de Nash é relevante como solução na medida em que represente "uma maneira óbvia de se jogar o jogo", e é decisão dos jogadores e do analista se as estratégias mistas se caracterizam como uma maneira óbvia de se jogar o jogo.

Já Funderberg apresenta duas possíveis defesas para o conceito de estratégias mistas: o jogo pode representar uma grande população de jogadores, cada um escolhendo "cara" ou "coroa", mas que no conjunto cada ação seja escolhida em 50% dos jogos[13]. Naturalmente se assumirmos que há apenas um "Jogador 1", esta defesa não se coloca. Outra explicação é que jogar aleatoriamente pode ser interpretado como resultado de pequenas e não-observáveis mudanças nos payoffs dos jogadores. Finalmente, (VARIAN, Microeconomic Analysis, 1992, p. 269) cita a possibilidade de a escolha ser determinada por fatores indetermináveis pelos oponentes. Assim, um dia um jogador pode estar "com vontade de jogar caras", e outro dia o oposto, e para o oponente tal estratégia parecerá como uma ação aleatória, ainda que não seja.

Este problema é intimamente ligado à questão de até que ponto se pode considerar equilíbrios de Nash como "maneiras óbvias de se jogar o jogo"; isto é, qual é a aplicabilidade da teoria[14]. Embora extremamente relevante e interessante tal discussão não é central a esta monografia, e no restante do trabalho assumiremos que equilíbrios em estratégia mista tenham sentido não apenas formal quanto prático.

1.3.3. Jogos dinâmicos

Nos itens anteriores foi suposto que os jogos são simultâneos e únicos, isto é, o jogo é jogado uma única vez (ou se mais de uma, cada jogo não influi o próximo) e os jogadores agem simultaneamente. Muitas aplicações interessantes da teoria dos jogos, entretanto, supõem que um jogador age após o outro ou que ambos interagem repetidamente, isto é, que os jogos são dinâmicos. Abordaremos superficialmente estes tipos de modelos nesse item.

---

[13] Esta idéia é relacionada com a teoria dos jogos evolucionária.

[14] Para essa discussão, ver (KREPS, 1990, pp. 410-417) e (HEAP, 2004, pp. 61-68 e 118-125).

Jogos repetidos ocorrem quando agentes jogam o mesmo jogo simultâneo em diversos períodos, e o payoff geral de cada jogador é a média (ponderada pela taxa de desconto intertemporal) dos payoffs em cada período. Observando as ações dos oponentes nos períodos anteriores, agentes podem condicionar suas estratégias de acordo, expandindo o espaço estratégico para incluir possíveis estratégias como, por exemplo, "cooperar até o oponente desertar", que naturalmente não existem no jogo simples.

Os jogadores podem então utilizar *indução reversa* para determinar sua estratégia ótima, levando em conta as possíveis estratégias dos outros jogadores. Aplicando esta metodologia (que é também comum nos jogos em forma extensiva e implica calcular o resultado da última repetição, em seguida da penúltima e assim adiante até a primeira) pode-se facilmente demonstrar[15] por exemplo, que um jogo do tipo dilema dos prisioneiros com número finito e conhecido de repetições gerará um equilíbrio de Nash em que os jogadores sempre desertarão. No caso em que a repetição é infinita, entretanto, desde que a taxa de desconto intertemporal não seja extremamente alta, normalmente ocorre a cooperação.

Mais especificamente, sempre que $u_{cooperação} + {u_{cooperação}}/{1+\delta} \geq u_{apenas\ ele\ desertar} + {u_{ambos\ desertarem}}/{1+\delta}$. A título de exemplo, no jogo de colusão entre duas empresas duopólicas exposto na figura 1.3, a taxa de desconto intertemporal mínima que preveniria a cooperação seria de 300%. Naturalmente, a escolha desses números foi completamente arbitrária e escolhas diferentes gerarão resultados diferentes.

Figura 1.3: Jogo infinito de colusão

	Cooperar	Desertar
Cooperar	4, 4	- 2, 5
Desertar	5, - 2	0, 0

Ainda que ocorra múltiplas vezes, o jogo repetido ainda supõe que os agentes ajam simultaneamente. Outro tipo de jogo, entretanto, supõe uma explícita ordem de ação dos jogadores. Estes jogos são chamados de *jogos seqüenciais*, e são apresentados na *forma extensiva.*

[15] Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em quase qualquer manual de teoria dos jogos. Para uma demonstração superficial e intuitiva ver (VARIAN, Microeconomic Analysis, 1992, p. 270).

O interesse econômico desses jogos é claro: duopolistas podem observar as decisões de produção e preço do concorrente antes de tomar sua própria decisão, como no modelo de Stackelberg, ou uma grande empresa pode responder a uma decisão de entrada de um possível concorrente; em ambos os casos, os modelos simultâneos descritos até aqui são insuficientes.

Em um modelo de Stackelberg (isto é, um duopólio em que um jogador deve escolher seus níveis de produção anteriormente ao segundo jogador), é natural que o espaço estratégico do Jogador 2 possa ser mapeado pela função $s_2: Q_1 \rightarrow Q_2$, isto é o espaço das possíveis decisões de produção do Jogador 2 (Q_2) é determinado como resposta possíveis escolhas de produção do Jogador 1 (contidas no espaço Q_1). De outra forma, podemos dizer que o vetor de produção do duopólio será $(q_1, s_2(q_1))$.

Este modelo possui um claro equilíbrio no ponto em que o Jogador 1 maximiza seu payoff dada a curva de reação do Jogador 2. Mas também há outros equilíbrios de Nash, sendo um deles em quantidades similares ao do modelo de Cournot para as mesmas funções de produção (ver (FUNDERBERG, 1991, p. 68) para uma exposição mais cuidadosa desse fato). Este equilíbrio se dá se o segundo jogador fizer uma ameaça de escolher aquele nível de produção independentemente da escolha do Jogador 1. Dada essa ameaça, a melhor escolha do primeiro jogador é escolher a quantidade de produção que maximize seu lucro em função da quantidade ameaçada. De fato, neste sentido, o segundo jogador pode escolher qualquer quantidade desejada de produção.

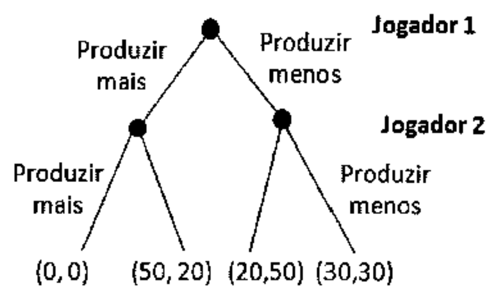
Este segundo equilíbrio, entretanto, *não é crível.* Isto é, se o Jogador 1 ignorar a ameaça do Jogador 2 e ainda produzir na quantidade que maximize seu lucro em função da curva de reação do segundo jogador, este não terá incentivo algum para levar a cabo sua ameaça: não estaria assim maximizando seu payoff.

Na Figura 1.4 abaixo exemplificamos a forma extensiva de jogos dinâmicos. O Jogador 1 é o *líder de quantidade*, isto é, ele define a quantidade produzida anteriormente, e pode escolher produzir uma quantidade maior (no equilíbrio de Stackelberg) ou menor (equilíbrio de Cournot). Qualquer que seja sua escolha, o segundo jogador (já possuindo a informação de qual foi a quantidade escolhida) terá escolha semelhante, poderá produzir mais (desta vez este seria o equilíbrio de Cournot) ou menos (obedecendo o equilíbrio de Stackelberg).

É passível de observação (utilizando a já abordada indução reversa) que o resultado ótimo para o Jogador 1 é o equilíbrio de Stackelberg (equilíbrio {produz mais; produz menos}). O Jogador 2, como apontado acima, pode ameaçar jogar "produzir mais", mas esta é uma ameaça não-crível, pois caso o Jogador 1 jogue "produzir mais" o Jogador 2 apenas receberá utilidade menor se efetivar sua ameaça.

Se o Jogador 1 acreditar na ameaça do Jogador 2, entretanto, ele deverá produzir menos, pois sua utilidade resultante de 20 é maior que a utilidade 0 se ambos produzirem mais.

Figura 1.4: Duopólio de Stackelberg



É possível ainda reafirmar este ponto de duas outras maneiras (ambas relevantes): podemos dizer que apenas o primeiro equilíbrio é consistente com a indução reversa, como definida acima; e que apenas o primeiro equilíbrio é *perfeito em subjogos*. No jogo acima, o único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é {J1 produzir mais; J2 produzir menos se J1 produzir mais e J2 produzir mais de J1 produzir menos}.

Um equilíbrio perfeito em subjogos é um equilíbrio de Nash que também é equilíbrio em todos os subjogos, sendo um subjogo formado pelo estágio k de um jogo e seus estágios subseqüentes, dado qualquer história h_k até aquele ponto. De forma mais clara, e utilizando o conceito de forma extensiva, definimos um subjogo como um nódulo do jogo e todos os seus sucessores.

Também relevante (e que será abordado também no próximo item) é a condição de informação dos jogadores. Consideramos que um jogo possui *informação perfeita* se a cada estágio do jogo apenas um jogador toma decisões (não triviais), e cada jogador conhece as escolhas passadas de todos os jogadores (este será o tema do próximo item).

Terminamos este item com uma precaução exposta por (FUNDERBERG, 1991, pp. 96-100). Embora os conceitos descritos acima sejam convincentes em modelos simples com poucos estágios e jogadores, eles se tornam mais discutíveis à medida que se adiciona vários jogadores, cada um agindo várias vezes. Como abordaremos apenas modelos (relativamente) simples neste trabalho, iremos em sua maior parte ignorar este problema e deixar seu estudo para as obras de referência.

1.3.4. Informação e jogos

Finalmente, devemos abordar neste capítulo o papel da informação na teoria dos jogos. Naturalmente (e como em todos os demais itens) poder-se-ia escrever livros sobre o assunto. Não obstante, tentaremos abordar apenas o principal, e de forma superficial; esperamos que tal abordagem seja suficiente para assegurar o entendimento completo dos modelos e problemas apresentados no segundo capítulo.

Se em um jogo simultâneo o problema da informação não se coloca (a não ser que seja repetido, é claro), em jogos dinâmicos ela se torna muito importante. De fato, o que diferencia um jogo seqüencial de um jogo simultâneo é exatamente que o segundo jogador possui conhecimento do histórico do jogo; igualmente, o que separa um jogo repetido de um jogo simples é que os jogadores possuem conhecimento do que ocorreu nas repetições anteriores: um jogo repetido em que os jogadores não possuem conhecimento do que ocorreu anteriormente é, na essência, um jogo sem repetições.

Como já adiantado, informação na teoria dos jogos é um conceito relacionado centralmente com jogos dinâmicos. Assim, no resto deste item assumiremos que os jogos são seqüenciais e apresentados na forma extensiva.

Conceito fundamental ao se estudar a informação na teoria dos jogos é o *conjunto de informação*[16] de um jogador i, w_i, que representa um conjunto de diferentes nódulos (*nodes*, no inglês) em um jogo na forma extensiva, nódulos que o jogador sabe que foram escolhidos (isto é, um deles), mas entre os quais o jogador não pode discernir por observação direta qual foi escolhido.

Segundo (RASMUSEN, 2007, p. 46), um método útil de se pensar o conjunto de informação é como uma nuvem: enquanto o jogador pode observar que o jogo atingiu esta nuvem, não pode

[16] Esta denominação pode não ser a mais adequada. Ocorre de uma tradução literal do termo em inglês *information set*.

observar dentro da nuvem para discernir exatamente que nódulo foi escolhido. Pela própria natureza do conjunto de informações, um nódulo não pode pertencer a dois conjuntos de informação (seria então um único conjunto).

Vale notar que melhor informação dos agentes pode gerar menor utilidade para todos os jogadores. Por exemplo, como definido na obra supracitada, havendo dois agentes, ambos avessos ao risco, que sabem que um deles será escolhido aleatoriamente para ser promovido (ficando com riqueza 100) e o outro será demitido (riqueza zero), ambos poderão concordar que o promovido entregue metade de sua renda para o demitido, e então (por serem avessos ao risco) terão utilidade maior. Se alguém oferecesse informá-los quem será demitido, recusarão – a informação nesse caso gerará menor utilidade para ambos (antes da informação), pois inviabilizará o acordo (que como notado acima, traz utilidade maior para ambos).

Neste contexto podemos definir jogos da seguinte forma: jogo de informação perfeita (como adiantado no item anterior) é o jogo em que todos os conjuntos de informação são unitários, caso contrário é um jogo com *informação imperfeita*; um jogo com *certeza* é um jogo em que não há ações pela *Natureza*[17] (a Natureza na teoria dos jogos é utilizada para representar acontecimentos aleatórios e fora da responsabilidade e poder de interferência dos agentes), sendo o caso oposto um jogo com *incerteza*.

O requerimento de informação mais forte é a informação perfeita. Neste tipo de jogo, cada jogador sabe exatamente onde na árvore do jogo (forma extensa) ele está. Jogos de incerteza são importantes para nosso propósito, pois são os jogos onde mais claramente existe o elemento do risco. Neste tipo de jogo normalmente se utiliza utilidades de Von Neumann-Morgenstern, como definidas no começo deste capítulo, e por simplificação normalmente se define os payoffs por utilidade, para se escapar do problema de definir se os jogadores são avessos, neutros ou propensos ao risco.

Também podemos qualificar um jogo como com *informação simétrica* se, para cada jogador, seu conjunto de informação em um nódulo final ou em qualquer nódulo em que ele tome uma ação é igual aos conjuntos de informação de todos os outros jogadores; e um jogo com

---

[17] A definição de (RASMUSEN, 2007, p. 50) inclui a qualificação de não haver ações da Natureza *após ações de algum dos agentes*, como forma de excluir os casos em que a Natureza age primeiramente para definir o perfil de algum jogador em um jogo de informação incompleta. Como não é consenso entre os teóricos, nem central ao tema desta monografia, omitimos este ponto do texto principal.

informação incompleta como um jogo em que a Natureza age primeiramente e não é observada por pelo menos um dos jogadores.

Podemos definir mais claramente estes conceitos notando que a existência de informação assimétrica é equivalente à existência de informação privada, isto é, um ou alguns dos jogadores possui uma vantagem de informação em relação aos outros (i.e. um conjunto de informações melhor que o do oponente[18]). Note que a definição abre espaço para existência de diferenças de informação quando o jogador não está agindo, já que tais não geram efeitos sobre o jogo.

A informação incompleta, por sua parte, é relacionada com o conhecimento dos jogadores sobre as regras do jogo, isto é, sobre os payoffs, a estrutura da árvore do jogo e o "tipo" dos outros jogadores[19]. É possível imaginar esta definição como a Natureza agindo primeiramente e escolhendo entre dois (ou mais) possíveis árvores de jogo cada uma com suas características peculiares, e que alguns dos (ou todos) jogadores não podem observar qual das árvores de jogo é a que realmente está sendo jogada. Assim, ambas as definições citadas são, de fato, equivalentes.

Até 1967, pensava-se que jogos com informação incompleta não seriam analisáveis. Então John Harsanyi[20] demonstrou que um jogo de informação incompleta pode ser descrito (sem perda de suas propriedades essenciais) como um jogo de informação completa, mas imperfeita, em que a Natureza age primeiramente escolhendo um particular *estado do mundo* (como na definição acima).

Podemos supor que todos os jogadores possuem as mesmas crenças sobre as probabilidades das ações na Natureza (chamamos esta suposição de *Doutrina de Harsanyi*). Com esta informação, mudanças nas crenças sobre as probabilidades são causadas por diferentes informações sobre o estado do jogo.

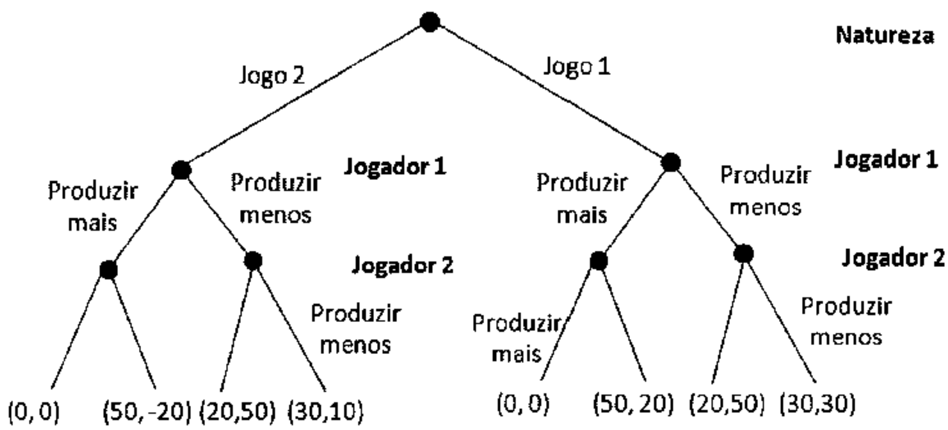
---

[18] Uma definição melhor é possuir uma partição de informação melhor (ou contendo mais elementos), mas por problemas de espaço e objetivos omitimos esta definição.

[19] Rasmusen (RASMUSEN, 2007, p. 53) cita como antiga definição de jogo com informação completa o jogo em que todos os jogadores conhecem as regras do jogo. O autor critica esta definição por não ser clara no significado de "jogo" e não definir os conjuntos de informação. Além disso, a definição aqui empregada já adianta as contribuições feitas por Harsanyi na resolução deste tipo de jogos.

[20] Os artigos referidos são: Harsanyi, John (1967) "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, I: The Basic Model". Management Science, 14:159-182(November 1967); Harsanyi, John (1968a) "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, II: Bayesian Equilibrium Points," Management Science, 14:320-334 (January 1968) e Harsanyi, John (1968b)"Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, III: The Basic Probability Distribution of the Game," Management Science, 14:486-502 (March 1968),

Figura 1.5: Jogo de Stackelberg com informação incompleta



Suponhamos, por exemplo, a mesma situação que na figura 1.4, com o Jogador 2 realizando uma ameaça de jogar "produzir mais", mas agora com um diferencial: o Jogador 1 não sabe o *tipo* do Jogador 2. Para o Jogador 1, talvez o Jogador 2 possua os payoffs do Jogo 1, acima, e então estaria realizando uma ameaça não-crível; mas talvez ele deseje criar uma reputação, e portanto descumprir a ameaça previamente feita lhe causaria grande perda de utilidade.

Neste caso (de informação incompleta), a resposta ótima do Jogador 1 depende de suas crenças sobre as probabilidades dos diversos tipos do Jogador 2. Se ele acreditar que o Jogador 2 dá mais valor aos ganhos monetários, e portanto possui apenas 10% de probabilidade do jogo ser do tipo 2, ele deverá produzir mais ($10\% \times 0 + 90\% \times 50 = 45 > 20$); mas se o segundo jogador for conhecido por sempre honrar suas ameaças e der muito valor a esta reputação (o que aliás neste caso específico lhe é bastante útil), então – supondo a probabilidade do jogo ser do tipo 2 de 90% - ele deverá jogar "produzir menos", já que $90\% \times 0 + 10\% \times 50 = 5 < 20$.

Esperamos neste capítulo ter fornecido uma visão básica e superficial sobre os principais temas da teoria da incerteza e especialmente da teoria dos jogos. Servirá assim este capítulo como introdução para o segundo capítulo, que demonstra nossos estudos na conexão entre a teoria dos jogos com o risco, além de revisão de termos e conceitos que serão utilizados no restante desta monografia.

Capítulo 2: O risco na teoria dos jogos

2.1. **Introdução**

Neste capítulo tentaremos fazer uma análise de algumas aplicações do risco na teoria dos jogos. Buscaremos modelos em que são analisados os efeitos de diferentes propensões ao risco no payoff dos agentes e outros temas da teoria que incluem o problem da incerteza, para definirmos de que modo o problema do risco se coloca no estudo da teoria dos jogos.

Cabe-nos anteriormente, entretanto, fazer uma qualificação. A questão do risco pode ser abstraída da maior parte dos problemas de teoria dos jogos se os payoffs forem apresentados em utilidade, e não em unidades monetárias. Assim, podem ser feitas qualificações sobre o comportamento dos jogadores sem informações precisas sobre seu nível de aversão ao risco.

Ainda assim, em alguns momentos pode ser importante para o modelo a adoção de payoffs em unidades reais (ou monetárias), ou podemos querer analisar a influência da aversão ao risco no resultado dos jogadores e, em alguns casos a incerteza coloca um problema teórico para o estudo da teoria dos jogos. Portanto certamente mantêm-se a relevância do estudo a que nos propomos aqui.

Dois tipos de risco ocorrem na teoria dos jogos – risco em relação às ações do oponente e risco em relação a ações da Natureza (jogo com incerteza). Ambos serão vistos aqui: estratégias minimax e trembling-hands perfect são instrumentais teóricos criados para lidar com o risco em relação a ações dos outros jogadores, risco também presente nos modelos que estudam a aversão ao risco em modelos de barganha. Outros modelos, em particular os modelos de leilões e Poker que serão estudados neste capítulo, envolvem informações imperfeitas ou incompletas (ou ambas).

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: além desta breve introdução, faremos no próximo item uma discussão sobre a relação entre a informação dos agentes e o risco nos jogos; no terceiro item analisaremos a estratégia maximin e o equilíbrio trembling-hands perfect, dois instrumentais teóricos que são relacionados com a problemática da incerteza; no quarto item analisaremos o modelo de barganha de Rubinstein e o que ocorre com o modelo após se assumir a aversão ao risco; e no quinto item estudaremos leilões com compradores avessos ao risco.

2.2. O risco e a informação

A existência de aversão ao risco na teoria dos jogos é claramente relacionada com a questão da informação dos agentes. Já vimos um exemplo em que a existência de aversão ao risco em pelo menos um dos agentes afeta suas decisões com relação à informação.

Como expomos no capítulo anterior, suponha que dois funcionários de uma empresa sejam avisados que um deles será demitido e o outro promovido, e que esta escolha será feita ou de maneira aleatória ou de maneira desconhecida aos agentes, de forma que os leve a crer que a possibilidade de manter-se no emprego (e contiguamente ser promovido) seja de 50%.

Assumindo ademais que a riqueza no período seguinte será de zero para quem seja demitido e 100 para quem seja promovido (e é 50 no momento presente), já foi afirmado que se ambos forem avessos ao risco, terão utilidade de fato menor caso algum estrangeiro bem-intencionado os informe qual será demitido, pois isto impedirá que façam um acordo mutuamente benéfico de dividir a riqueza daquele que seja promovido.

Naturalmente, neste exemplo acima – e ao contrário dos exemplos das seções posteriores – é a informação incompleta que gera o risco para os agentes: por não terem condições de suporem com exatidão quem será demitido (ou seja, qual é o tipo do jogo), os agentes estão à mercê das ações da natureza e, caso sejam avessos ao risco, dispostos a tecer contratos que minimizem esta incerteza.

Ocorre aqui, entretanto, um paradoxo: depois de formulado o problema, a inserção da informação que eliminaria o risco na verdade diminuirá a utilidade dos agentes (avessos ao risco), pois inviabilizará o acordo.

Sem embargo, comparamos a utilidade dos agentes individualmente (de forma que a $u_i(50) > 0{,}5 \times u_i(100) + 0 \times u_i(0)$ para qualquer função de utilidade côncava) após a formulação do problema, mas não podemos afirmar que a situação anteriormente a definição do mesmo (ou após a sua resolução) seja similar, isto é, que os agentes possuíam maior utilidade na situação em que ambos estavam empregados do que na situação conseguinte, já que tal consideração envolveria questões de agregação de utilidades e de bem-estar social (colocando de forma alternativa, não podemos afirmar que os agentes estariam em pior situação se este problema fosse formulado com informação completa – i.e. se o chefe tivesse avisado quem seria demitido ou promovido).

Imaginemos, de forma diferente, que apenas um dos empregados seja avesso ao risco. Neste caso, o agente avesso ao risco estaria disposto a oferecer um prêmio de risco para que seja aceito o acordo, e neste caso – assim como na maior parte dos modelos em que existe este tipo de assimetria, como veremos nos próximos itens – o payoff do agente sem aversão ao risco em geral será maior.

A título de exemplo, estabeleçamos a função de utilidade CARA[21] $u_1 = -e^{-0,01x}$ para o Agente 1 avesso ao risco, então é facilmente demonstrável que o agente possuirá com a loteria $0{,}5 \circ 100 \oplus 0{,}5 \circ 0$ a utilidade igual a utilidade provinda de uma riqueza de 38, aceitando portanto qualquer valor igual ou maior a este para evitar o risco. Naturalmente, a partir deste ponto o jogo se torna um problema de barganha, mas até um resultado em que o agente avesso ao risco aceite pagar 60% de sua renda caso seja promovido e o outro agente concordar em pagar 40 se for ele o promovido é possível e racional.

Desta forma, paradoxalmente, o agente não avesso ao risco estará melhor na situação em que um dos dois empregados esteja ameaçado de demissão que na situação anterior, pois o outro agente concordará em negociar um valor inferior ao seu salário inicial de forma a se proteger contra o risco, e portanto cederá àquele um valor maior que sua riqueza inicial (mesmo se o agente não-avesso ao risco for demitido).

Analisemos agora um jogo de informação incompleta com assimetria informacional. A Figura 2.1 abaixo demonstra um jogo de Poker simplificado entre dois jogadores, em que ambos jogam simultaneamente e cada jogador possui o espaço estratégico $S_i = (Apostar(A), Desistir(D))$. A figura exibe os quatro componentes em formas estratégicas que formam o jogo.

Este jogo é um jogo de informação incompleta. Existem dois cenários (representados em (1) e (2)), sendo o primeiro o cenário em que o primeiro jogador possui cartas superiores (e portanto ganhará a não ser que desista de sua mão), e o segundo cenário o primeiro jogador possui cartas inferiores em qualidade. Estes cenários são escolhidos pela Natureza, e os jogadores supõem

[21] *Constant Absolute Risk Aversion*, em inglês; ou aversão ao risco absoluta constante, como definida no Capítulo 1.

existir 50% de probabilidade de cada cenário se concretizar. A tabela (3) expõe os rendimentos esperados de cada jogador.

Figura 2.1: Modelo de jogo de Poker simplificado

	A	D	A	D	A	D	A	D
A	200, -200	50, -50	-200, 200	50, -50	0, 0	50, -50	-60, -60	50, -50
D	-50, 50	0, 0	-50, 50	0, 0	-50, 50	0, 0	-50, 50	0, 0
	(1)		(2)		(3)		(4)	

Podemos definir de (3) que $\{Apostar, Apostar\}$ é a estratégia dominante, isto é, os jogadores possuirão melhor rendimento jogando agressivamente (o retorno aqui é expresso em unidades monetárias, para melhor se adequar ao jogo de Poker; discutiremos novamente esta questão na próxima seção). Este resultado, entretanto, implica uma neutralidade ao risco, o quadro (4) demonstra como seria a mesma tabela ao considerarmos a utilidade dos agentes, e em uma condição que ambos os jogadores são avessos ao risco. Nesta situação $\{A, A\}$ é a estratégia mais arriscada, e portanto oferece utilidade menor, de modo em que não é mais a escolha ótima.

Este modelo é simples, mas gera duas conclusões interessantes: primeiro, neste jogo é claramente favorável a um agente ser propenso ao risco (mesmo considerando o risco, já que o resultado esperado nesta situação é $\{A, D\}$, se o Jogador 2 for avesso). De fato, se um agente for avesso ao risco irá consistentemente perder, e sua solução ótima seria alterar sua função de utilidade de forma a se tornar mais propenso (ou pelo menos neutro) ao risco. Naturalmente que está fora do controle de um agente alterar sua função de utilidade, mas supondo que o objetivo do jogo for o retorno financeiro, o jogador deveria agir de forma a não maximizar sua utilidade no jogo.

Segundo, neste modelo, suponhamos agora a existência de assimetria informacional, com o Jogador 1 tendo acesso ao tipo do jogo (talvez ele receba cartas extremamente fortes ou extremamente fracas). É passível de observação que o Jogador 1 jogará sempre "Apostar" se o jogo for do tipo (1), e sempre "Desistir" se o jogo for do tipo (2), assumindo que o jogo esperado é do tipo (3) – ou, o que é o mesmo, assumindo que para o Jogador 2 "Apostar" é uma estratégia dominante. Agora, se o jogo esperado for do tipo (4) – isto é, o segundo jogador for avesso ao risco – sua estratégia ótima será sempre jogar "Desistir", mesmo que esteja (embora ele não tenha informação disto) na situação (2). Assim, podemos derivar que em muitos casos mesmo com a assimetria informacional o jogador com vantagem não pode definir uma estratégia estritamente favorável sem conhecer a propensão (ou aversão) do outro jogador ao risco.

Naturalmente não se propôs aqui a se fazer avanço teórico qualquer, mas sim apresentar o instrumental teórico que a teoria dos jogos – e em especial os conceitos de informação imperfeita e incompleta – pode oferecer para o estudo de casos de existência e assimetria de aversão ao risco, e acentuar sua importância. Nas próximas seções iremos demonstrar outros modelos e aplicações deste conceitual.

2.3. O risco e estratégias maximin e trembling-hands perfect

Dois conceitos importantes na teoria dos jogos têm, em nossa visão, relação com a incerteza ou risco. Estes são as estratégias maximin e o equilíbrio trembling-hands perfect. Nesta seção examinaremos estes dois instrumentais buscando melhor entender o papel do risco na teoria.

O que um jogador fará quando acreditar que os outros agentes estão jogando para puni-lo? Pode tentar minimizar suas perdas (ou maximizar seus ganhos mínimos), como forma de resposta. Esta questão não se coloca, naturalmente, se o agente acreditar que a estratégia dos outros jogadores é puramente a busca do maior payoff; mas em alguns momentos os jogadores – por punição ou falta de racionalidade maximizadora – buscarão gerar o menor payoff possível para os outros agentes: chamamos esta estratégia de *estratégia minimax.*

A resposta natural a uma estratégia minimax é a *estratégia maximin,* descrita acima (i.e. maximizar seus ganhos mínimos). Pode se pensar nesta estratégia como modo de se assegurar contra risco do oponente jogar de forma maliciosamente.

Segundo a definição de (OSBORNE, 1994, p. 21), podemos definir de forma rigorosa a ação maximin de um jogador i como sendo uma ação x_i^* tal que $\min_i u(x^*, y) \geq \min_i u(x, y)$ para qualquer outro $x \in A_i$(espaço estratégico de i).

Rasmusen critica o uso das estratégias maximin como forma de obter um equilíbrio maximin em que os agentes se protegem das maiores perdas possíveis. Para ele, como a aversão ao risco já é contada nos payoffs em utilidade dos agentes, este tipo de estratégia teria pouca justificativa para um jogador racional. Para Rasmusen, "[em jogos de soma variável] minimax é para sadistas e maximin para paranóicos" (RASMUSEN, 2007, p. 115).

Cabe aqui, entretanto, fazermos uma crítica a esta visão. Primeiramente, em muitos jogos se faz necessária a utilização de payoffs em valores monetários (e.g. no Poker as apostas são feitas invariavelmente em dinheiro e em um jogo deste tipo a utilização de payoffs em utilidade certamente causaria complicações[22]). Igualmente, em muitas aplicações práticas os níveis de utilidade são não-observáveis, e a utilização de payoffs em valores monetários é inevitável.

Além disso, cabe observar que – embora de fato não seja estritamente racional – a estratégia de minimização de perdas como forma de proteção ao risco é amplamente observada nas interações reais entre indivíduos, e, portanto, na nossa visão merecedora de estudo. Abre-se assim espaço para um estudo das estratégias maximin como produto da aversão ao risco, e, se o tamanho desta monografia impede um tratamento mais prolongado deste assunto, a defesa deste ponto de vista não poderia escapar deste trabalho.

Agora apresentaremos outro instrumental teórico ligado ao risco nas escolhas dos outros jogadores. Na teoria dos jogos assume-se na maior parte a racionalidade dos agentes. Acima defendemos que instrumentais que implicam falhas na perfeita racionalidade são comumente observados na prática econômica. Outra dessas falhas seria cometer erros.

Na maior parte os equilíbrios de Nash estudados assumem que os agentes são completamente racionais e perfeitos em suas ações. Em jogos de informação completa, o jogador pode então assumir que todos os outros jogadores (assim como ele próprio) possuem

---

[22] Poderia, por exemplo, facilmente se chegar a situações em que o ganhador receberia uma quantidade maior (ou menor) do que a entregue pelo perdedor – o que em um jogo de natureza soma-zero (omitindo a banca) claramente tem pouco sentido.

conhecimento de quais são as jogadas racionais de todos os agentes (conhecimento comum) e agirão de acordo.

Na realidade, é claro, esta suposição é pouco confiável. Pessoas cometem erros, e poucas pessoas confiariam completamente nas decisões de outros agentes (e ainda por mais muitas vezes com interesses contrários). Assim, por omitir este risco de que outros agentes cometam erros, o equilíbrio de Nash pode chegar a resultados pouco verossímeis na realidade. Vemos um desses exemplos na figura 2.2.

Figura 2.2: Equilíbrio Trembling-hands Perfect

	S_{21}	S_{22}
S_{11}	100, 100	0, 100
S_{12}	100, 0	80, 80

Aqui os equilíbrios de Nash são claramente (S_{11}, S_{21}) e (S_{12}, S_{22}). À primeira vista, (S_{11}, S_{21}) aparenta ser um equilíbrio "superior", mas é difícil supor que os agentes correrão o risco de receber zero utils caso o outro jogador não aja como esperado: suponhamos que o Jogador 1 não tenha certeza de que o Jogador 2 é completamente racional, ou ele acredita que exista um pequeno risco dele cometer um erro e jogar S_{22}. Neste caso, é de se esperar que o Jogador 1 escolha a alternativa mais segura, e jogue ele mesmo S_{12}. De fato, não importando quão pequeno seja o risco (presumido) deste erro acontecer, é mais proveitoso para o Jogador 1 escolher a ação S_{12}.

Assumamos que o Jogador 1 acredite que o Jogador 2 jogará S_{21}, mas que existe uma probabilidade ε (arbitrariamente pequena, mas que $\varepsilon > 0$) dele cometer um erro e jogar S_{22}. A utilidade esperada do Jogador 1 de agir S_{11} é então $u_1^e(S_{11}, S_{2x}) = (1 - \varepsilon) \times 100 + \varepsilon \times 0 = 100 - 100 \times \varepsilon$ que sempre será menor que a utilidade esperada de S_{12} que é $u_1^e(S_{12}, S_{2x}) = (1 - \varepsilon) \times 100 + \varepsilon \times 80 = 100 - 20 \times \varepsilon$. Assim, embora (S_{11}, S_{21}) também seja um equilíbrio de Nash, de fato é mais razoável supor que será obtido o (único) *equilíbrio perfeito em Trembling-hands*, (S_{12}, S_{22}).

Até aqui definimos apenas intuitivamente o conceito de Equilíbrio de Trembling-hands, e para os propósitos deste trabalho, acredita-se ser suficiente[23]. Vale notar, entretanto, que este aperfeiçoamento do Equilíbrio de Nash introduz a incerteza em relação ao conhecimento comum e à racionalidade dos outros agentes, e a possibilidade de que estes cometam erros. Isto de fato gera equilíbrios mais prováveis de ocorrer na realidade, como exemplificado acima.

2.4. O risco em barganhas

O caso mais estudado de risco na teoria dos jogos é o caso do *jogo de barganha*. Gibbons (GIBBONS, 1992) provê uma ótima introdução ao tema jogos de barganha. Este tipo de jogo normalmente é formulado como um jogo em que dois jogadores barganham por um dólar (aqui usaremos real). Assim, o Jogador 1 faz uma oferta, que o segundo jogador pode aceitar ou recusar; a seguir (e caso a proposta tenha sido recusada), o Jogador 2 faz uma proposta que o primeiro jogador pode aceitar ou recusar, e assim adiante por um número dado (ou infinito) de etapas.

É do mesmo modo usual a suposição de que cada oferta cobre um período, e os jogadores são impacientes, descontando assim ofertas em períodos posteriores por um *fator de desconto* δ, em que $0 < \delta < 1$. Exemplificamos um jogo de barganha de três etapas na figura 2.3 abaixo.

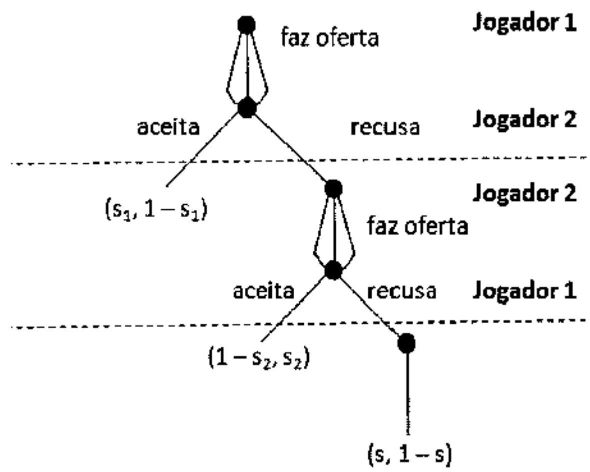
Neste jogo simples, o primeiro jogador fará uma oferta s_1 pelo real, que poderá ser aceita ou recusada pelo segundo jogador. Caso seja rejeitada, este segundo jogador então fará uma oferta pelo real, que novamente pode ser aceita ou recusada. Caso a segunda oferta seja recusada, o jogo acaba e o Jogador 1 recebe uma quantia pré-definida s (e naturalmente o Jogador 2 recebe $1 - s$).

Embora não seja o objetivo desta exposição, notaremos que a resolução deste problema envolve indução reversa, sempre lembrando que para cada período que se passa os jogadores descontam sua utilidade em δ. Neste tipo de jogo (independentemente do número de etapas) o

[23] Para uma definição formal ver (FUNDERBERG, 1991, pp. 350-356) e (MAS-COLELL, 1995, pp. 258-260).

jogo sempre acabará na primeira etapa, com o Jogador 1 oferecendo $1 - \delta + \delta^2 s = s_1^*$, e com payoff final $(s_1^*, 1 - s_1^*)$[24].

Figura 2.3: Jogo de barganha com três etapas



Uma variante ainda mais interessante deste jogo foi proposta por Ariel Rubinstein (RUBINSTEIN, Perfect Equilibrium in a Bargaining Model, 1982) e é geralmente conhecida como *Jogo de barganha de Rubinstein*. Rubinstein (na obra supracitada) chega a afirmar que o saudoso economista Edgeworth considerava este o problema fundamental da economia.

Em seu famoso artigo, Rubinstein investiga o equilíbrio perfeito em subjogos (como já definido) para jogos de barganha com taxa intertemporal de desconto ou custo de negociação fixo por período (no primeiro caso a função retorno seria $y - \delta_i^t$, e no segundo $y - c_i \times t$). Com estes pressupostos, ele demonstra que o equilíbrio é de fato único.

Para o caso da existência de custos de negociação, Rubinstein demonstrou que o Jogador 1 receberá todo o prêmio (i.e. o real alvo de barganha) se seu custo de negociação for menor $(c_1 < c_2)$, receberá apenas c_2 se seu custo for maior $(c_1 > c_2)$ e no caso de ambos ser iguais $(c_1 = c_2)$, qualquer partição em que o Jogador 1 receba pelo menos c_1 é um equilíbrio (perfeito em subjogos).

[24] Novamente, para uma exposição mais detalhada apontamos as obras de referência, em especial (GIBBONS, 1992, pp. 69-70)

Rubinstein também prova que no caso de taxas de desconto intertemporais fixas, o equilíbrio perfeito em subjogos é único, e apresenta o Jogador 1 recebendo $\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}$ [25]. Assim, a existência de custos de negociação implica que o jogador com maiores custos receberá "quase nada" (no máximo o custo do oponente de jogar uma próxima etapa, caso for o primeiro jogador), e no caso de existência de taxas de desconto intertemporais possuímos uma solução contínua e monotônica nos fatores de desconto, dando maior vantagem para o primeiro jogador. Neste tipo de barganha, embora seja por períodos potencialmente infinitos, a barganha normalmente se encerrará no primeiro período[26].

Com base neste modelo, Alvin Roth (ROTH, A note on risk aversion in a perfect equilibrium model of bargaining, 1985) considerou o caso em que pelo menos um dos agentes possui aversão ao risco. Note que – como na seção anterior – este risco é um risco relativo às ações dos outros jogadores – na nomenclatura de Roth "risco estratégico" –, e não proveniente da existência de incerteza no jogo (o jogo de barganha como aqui analisado é, de fato, um jogo de informação perfeita e completa).

Neste cenário, Roth cria um modelo igual ao de Rubinstein, mas substituindo um jogador i por um jogador i^* avesso ao risco. Assim, sua utilidade $u_i(s) = k_i(u_i(s))$ para uma função côncava k qualquer. Roth então demonstra que em um jogo de barganha contra um dado oponente, i irá ter resultado melhor que i^*.

Assim, dada uma função k estritamente côncava, temos que $x(1^*,2) > x(1,2) > x(1,2^*)$, onde x representa a partição resultante do equilíbrio do jogo. Isto é, jogadores com aversão ao risco recebem uma menor parte do prêmio. Este resultado é uma extensão de resultados anteriores, baseados em modelos axiomáticos de barganha de um período, e é um resultado extremamente relevante para nosso propósito.

Não é um resultado indisputado, entretanto. Professores da Universidade de Warwick (KOHLSCHEEN, 2008) afirmam que para certas funções de utilidade da classe HARA (aversão ao risco absoluta hiperbólica[27]), a aversão ao risco pode até aumentar o payoff dos agentes. O resultado de Roth, no entanto, parece ser robusto, e em (ROTH, 1989) ele tece uma conexão entre

---

[25] Isto ocorrerá caso pelo menos uma das taxas seja maior que zero e pelo menos uma das taxas seja menor que um.
[26] Para a demonstração ver o artigo original.
[27] *Hyperbolic Absolute Risk Aversion*, no original.

os dois principais resultados da teoria econômica sobre aversão ao risco em barganhas: quando o custo de esperar outro período tende a zero, a solução do jogo seqüencial (discutida acima) tende à solução do jogo estático proposto por Nash[28]; e ambas demonstram que maior aversão ao risco tende a resultados menos favoráveis no jogo.

2.5. O Risco em Leilões

Outra aplicação importante da incerteza na teoria dos jogos é na teoria de leilões. A teoria de leilões, pelo *teorema da equivalência de retorno*, dita que dadas algumas pré-condições o modelo de leilão adotado pelo vendedor não afetará o seu retorno. Em especial, os seguintes modelos de leilões são ótimos e provêm ao vendedor retorno esperado igual (RASMUSEN, 2007, pp. 400-403):

1. Leilão ascendente, em que todos os entrantes pagam uma taxa de entrada, menos o ganhador (com oferta maior), que não paga a taxa mas paga a segunda maior oferta;
2. Leilão fechado de segundo-preço, em que os compradores fazem ofertas fechadas (isto é, desconhecidas pelos outros compradores – ou, o que é o mesmo, simultâneas) e o comprador que oferecer a maior oferta ganha o leilão, mas paga apenas a segunda maior oferta;
3. Leilão fechado de primeiro-preço, que é similar ao supracitado, mas o vencedor paga o preço ofertado;
4. Leilão descendente (ou holandês), em que o vendedor oferece um preço alto, e vai diminuindo até um comprador fazer a oferta (do ponto de vista teórico é similar ao leilão fechado de primeiro-preço).

Note que afirmamos aqui que todos estes leilões têm valor *esperado* similar, entretanto naturalmente o valor efetivo não será (necessariamente) igual, já que – por exemplo – o leilão de segundo-preço depende da segunda maior oferta, enquanto o de primeiro-preço depende apenas

[28] O jogo de barganha proposto por Nash (NASH, 1950) é um jogo simples entre dois agentes, que devem acordar em uma divisão de um prêmio dado; e se tal acordo não for atingido será decidida uma divisão pré-estabelecida (e dada). Para uma visão mais detalhada deste e outros modelos de barganha, recomendamos (além do artigo original): Roth, A. (1979) *Axiomatic Models of Bargaining*, In: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems #170, Springer Verlag, 1979.

da maior oferta (que naturalmente raramente serão iguais). Ainda assim, é um resultado relevante e contra-intuitivo que, ainda que os valores efetivos não sejam necessariamente os mesmos, os valores esperados destes leilões são iguais[29].

Então um vendedor deveria ser indiferente entre estes modelos de leilões expostos acima? Sem embargo, a resposta é não, e novamente aqui a incerteza e aversão ao risco são conceitos que se tornam teoricamente importantes.

De fato, em um leilão (seja de valor privado, isto é, em que os agentes possuem preços de reserva diferentes por adquirirem diferentes utilidades pelo bem; seja de valor público, em que os agentes possuem preços de reserva diferentes por fazerem estimativas diferentes do valor – público – do bem), o vendedor deverá sempre agir de forma a diminuir o risco dos compradores, e naturalmente possui incentivos para fazê-lo.

Podemos empregar um simples modelo (RASMUSEN, 2007, p. 405) para demonstrar que a aversão ao risco tornar racional para os compradores oferecer preço menor que seu valor de reserva. Suponhamos que haja N compradores, cada um com seu preço de reserva, em um leilão de ofertas (abertas) crescentes. Cada um valora o bem com um valor privado de v, que possui um erro independente ϵ, que pode ser (com probabilidades iguais) $x, -x$ ou 0.

Sendo $\hat{v} = v + \epsilon$ uma estimativa não-viesada de v, e deverá ter payoff 0, como demonstrado abaixo para função de utilidade $U = x$ condizente com neutralidade ao risco.

$$\pi(neutro\ ao\ risco, p = \hat{v}) = \frac{x}{3} + \frac{0}{3} + \frac{-x}{3} = 0$$

Sem embargo, se o comprador vencer com preço p, mostraremos a seguir que sua utilidade será, para qualquer função de utilidade côncava, apenas positiva se $\hat{v} - p > 0$, isto é, se o comprador ganhar com um preço p menor que a sua estimativa não-viesada para seu valor individual.

$$\pi(avesso\ ao\ risco, p) = \frac{U([\hat{v} - x] - p)}{3} + \frac{U(\hat{v} - p)}{3} + \frac{U([\hat{v} + x] - p)}{3} = U(0)$$

[29]A demonstração deste resultado seria longa e fugiria aos objetivos deste trabalho, então (como freqüentemente feito ao longo desta monografia) recomendamos aqui o estudo das obras de referência. Podemos, entretanto, antecipar a intuição por trás deste resultado: em um leilão de segundo-preço, a primeira oferta será seu preço de reserva real, enquanto no de primeiro-preço, o comprador com maior preço de reserva tentará antecipar o preço de reserva dos outros compradores para pagar um excedente mínimo sobre o segundo valor mais alto.

$$\frac{U([\hat{v}-x]-p)}{3}+\frac{U([\hat{v}+x]-p)}{3}<\frac{2U(\hat{v}-p)}{3}$$

A segunda equação se segue da definição de equação côncava (e é intuitiva no sentido em que a utilidade de um valor esperado sem risco sempre será maior do que o mesmo valor esperado com risco – o que naturalmente é o mesmo que dizer que o agente é avesso ao risco). Estas equações implicam, como já adiantado, que $U(\hat{v}-p) > U(0)$, e assumindo funções monotônicas de utilidade $\hat{v}-p > 0$.

A análise do risco em outros leilões é mais complicada, embora também mais interessante, pois existe incerteza não apenas em relação ao valor do objeto ofertado (como no modelo acima), mas também em relação às ofertas dos outros compradores. Um resultado conhecido, entretanto, é que na existência de aversão ao risco o retorno do comprador em um leilão de valor privado é maior no modelo de primeiro-preço que em um modelo de segundo-preço.

Isto ocorre pois ao elevar sua oferta acima do valor ótimo para o comprador neutro ao risco, o agente avesso perde excedente pelo maior preço, mas diminui o risco de não conseguir a compra e obter excedente zero. Desta forma, como na maioria dos modelos explorados anteriormente, nos leilões a aversão ao risco do comprador tende a favorecer o vendedor.

Finalmente, a incerteza nos leilões é essencial para entender o conceito de *maldição do vencedor*. Esta maldição prevê que – em modelos de leilão de valor comum com informação incompleta – os vencedores tenderão a pagar valor alto demais pelo bem comprado, já que se os compradores estiverem oferecendo suas estimativas do valor público do bem leiloado, será o comprador que sobre-valorar mais o bem que será o "ganhador" (que ironicamente receberá retorno menor que os "perdedores"), e portanto seu payoff será, em geral, negativo.

Esta aplicação particular do risco na teoria dos jogos tem grande aplicabilidade. Explica, por exemplo, o porquê de ser do interesse do regulador prover condições de rentabilidade mínima e proteção aos riscos ao concessionário: ao fazer isto estará eliminando (ou diminuindo) a maldição do vencedor, e deste modo assegurando que os concorrentes da concessão irão ofertar um valor igual ao seu valor privado, ou pelo menos mais próximo a ele.

Vale notar entretanto que o conceito de maldição do vencedor não é exatamente igual ao efeito da aversão ao risco no modelo apresentado acima. Naquele modelo, é a aversão ao risco que causa os compradores a deverem pagar menos que o seu valor privado do bem (e se aplica igualmente a leilões de valor privado), e se eles forem neutros ao risco pagarão o seu preço de reserva; enquanto se houver a maldição do vencedor, mesmo agentes neutros ao risco deverão oferecer preço menor que seu valor privado.

Conclusão

Podemos concluir deste trabalho a grande importância do tema da aversão ao risco nos modelos de relações estratégicas entre agentes. Este é um tema que foi abundantemente estudado por autores como Alvin Roth e outros teoristas de jogos, e aborda uma faceta importante do comportamento humano e das suas relações.

Estudamos dois tipos de risco neste trabalho, os riscos relacionados a escolha dos outros jogadores (chamado de risco estratégico por Roth) e o risco relacionado a falhas na informação (isto é, informação imperfeita ou incompleta) e à existência de incerteza.

No primeiro grupo, pudemos definir que o risco possui papel ativo na definição de alguns conceitos teóricos, como o equilíbrio de trembling-hands, em que os agentes atribuem um risco (ainda que muito pequeno) dos oponentes agirem não racionalmente e cometerem erros, e esta percepção pode gerar mudanças relevantes nos equilíbrios encontrados.

De igual modo, a estratégia minimax é um conceito teórico que envolve a percepção do risco de que os oponentes não ajam de modo a maximizar seu retorno, mas sim de forma a causar o maior dano possível a este agente (maximin). Caso o agente acredite que esta estratégia é possível, poderá escolher a estratégia que minimize suas perdas possíveis. Além disso, embora seja questão controversa, acreditamos que em certos casos e em modelos específicos a estratégia minimax pode ser utilizada como forma de se controlar o risco advindo de payoffs com grande variância.

O exame dos efeitos da aversão ao risco no jogo de barganha de Rubinstein demonstra também que o risco estratégico ocorre não apenas em definições teóricas mas também em modelos concretos, em que mesmo com informação perfeita e completa e sem nenhum efeito aleatório jogadores avessos ao risco podem alterar sua estratégia, e como demonstrado por Roth, o fazem geralmente em detrimento de seu retorno. Com estes modelos, pudemos demonstrar que jogadores propensos ao risco possuem vantagem em situações de negociação e barganha, uma aplicabilidade interessante das teorias discutidas neste trabalho.

Algumas das aplicações analisadas são resultados conhecidos e importantes da teoria dos jogos, como os resultados de Roth para o modelo de Rubinstein e as questões de aversão ao risco para leilões. Outros modelos foram tentativas – simples, mas esperamos válidas – de aplicação própria dos conceitos estudados, com objetivo de demonstrar o potencial dos conceituais expostos aqui e atingir resultados interessantes que demonstrem como a teoria dos jogos (se não livre de crítica) pode ajudar a compreender melhor a natureza das inter-relações humanas.

Não temos a pretensão de termos esgotado todas as possibilidades de aplicação da incerteza na teoria dos jogos, e certamente existem outras teorias muito interessantes que caberiam neste tema, como a aplicação da incerteza no desenho de mecanismos e os novos insights sobre a incerteza da economia comportamental e como eles se inserem no instrumental da teoria dos jogos. O estudo destes tópicos, entretanto, envolveria um conhecimento técnico e econômico que vai além do disponível para um aluno de graduação, ainda que certamente forneçam um interesse tema para estudos posteriores.

Mesmo os assuntos tratados nesta monografia o foram feitos de modo superficial. Espera-se, entretanto, que os principais resultados e a intuição por trás deles tenham sido bem explicados, de forma em que, se não um conhecimento aprofundado sobre o tema, esta monografia proveja uma introdução compreensível do assunto e um relance sobre a amplitude e utilidade de suas aplicações. É esta, fundamentalmente, a contribuição que se espera ter sido feita por esta monografia.

Referências bibliográficas

FUNDERBERG, D. (1991). *Game Theory.* Cambridge: MIT Press.

GIBBONS, R. (1992). *A Primer in Game Theory.* Prentice Hall.

HEAP, S. H. (2004). *Game Theory: a critical text.* Nova York: Routledge.

KOHLSCHEEN, E. &. (2008). On Risk Aversion in the Rubinstein Bargaining Game. *Warwick Economic Research Papers* .

KREPS, D. M. (1990). *A Course in Microeconomic Theory.* Princeton: Princeton University Press.

MAS-COLELL, A. &. (1995). *Microeconomic Theory.* Nova York: Oxford University Press.

NASH, J. (1950). The Bargaining Problem. *Econometrica, Vol.28* , pp. 129-140.

OSBORNE, M. (1994). *A course in Game Theory.* Cambridge: MIT Press.

RASMUSEN, E. (2007). *Games and Information: an introduction to game theory.* Blackwell Publishing.

ROTH, A. B. (1985). A note on risk aversion in a perfect equilibrium model of bargaining. *Econometrica; Vol. 53, No. 1* , pp. 207-211.

ROTH, A. B. (1989). Risk Aversion and the Relationship Between Nash's Solution and Subgame Perfect Equilibrium of Sequential Bargaining. *Journal of Risk and Uncertainty, 2* , pp. 353-365.

RUBINSTEIN, A. (2006). *Lecture Notes in Microeconomic Theory: the economic agent.* Princeton: Princeton University Press.

RUBINSTEIN, A. (1982). Perfect Equilibrium in a Bargaining Model. *Econometrica; Vol. 50, No. 1* , pp. 97-109.

VARIAN, H. R. (1999). *Intermediate Microeconomics: A modern aproach.* W. W. Norton & Company.

VARIAN, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis.* Nova York: Norton & Company.