



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE ECONOMIA**

**PEDRO BRUNO LENZ CESAR
RA 063630**

**O MISTERIOSO SORRISO DA VOLATILIDADE:
ALÉM DE BLACK & SCHOLES**

ULTRAPASSANDO O MODELO DE BLACK & SCHOLES PARA EXPLICAR O SORRISO
DA VOLATILIDADE

CAMPINAS
2012



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE ECONOMIA**

**PEDRO BRUNO LENZ CESAR
RA 063630**

**O MISTERIOSO SORRISO DA VOLATILIDADE:
ALÉM DE BLACK & SCHOLES**

*Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Graduação do Instituto de
Economia da Universidade Estadual de
Campinas para obtenção do título de
Bacharel em Ciências Econômicas, sob
orientação do Prof. Dr. Carlos Lenz Cesar.*

CAMPINAS
2012

CAMPINAS

2012

CESAR, Pedro Bruno. **O misterioso sorriso da volatilidade: além de Black & Scholes.** Ultrapassando o modelo de Black & Scholes para explicar o sorriso da volatilidade. 2012. 145 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto de Economia. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a demonstração de métodos generalizados para precificação de opções com melhor aderência à realidade. A falha do modelo de Black & Scholes é constatada pelo sorriso da volatilidade implícita. A hipótese assumida na monografia é a de que o erro em B&S está no axioma de que os preços seguem um Movimento Browniano Geométrico (MBG). O relaxamento desse axioma, supondo distribuições de probabilidades diferentes da log-normal para os preços, exigiu o desenvolvimento de conceitos matemáticos e da teoria da probabilidade, tais como o cálculo de variáveis complexas e de resíduos e as Transformadas de Fourier, cujo poder na área da economia fica demonstrado com resultados finais. A monografia fornece uma introdução razoavelmente completa do ponto de vista da operacionalização dos conceitos.

A etapa seguinte destrinchou o modelo de B&S, através de quatro demonstrações diferentes e de testes empíricos e operacionalização do mesmo utilizando opções da Petrobrás, gerando o sorriso da volatilidade. Em seguida foram demonstrados e testados três métodos generalizados de precificação de opções, iniciando pela Expansão de Edgeworth, demonstrada por Jarrow & Rudd (1982), que consiste em utilizar o MBG como aproximação de ordem zero e expandi-lo para incorporar cumulantes de ordem superior, a skewness e a curtose. O método se mostrou capaz de gerar um sorriso da volatilidade, mas muito limitado devido à falta de liberdade na escolha dos parâmetros desses cumulantes, levando à conclusão de que deve-se usar uma distribuição mais fortemente divergente em relação à Normal. A utilização de uma distribuição de Student generalizada foi capaz de gerar curvas do sorriso da volatilidade bem próximas das observadas. Essa monografia demonstrou dois métodos para precificação com essa distribuição, através da integração direta do payoff com a fdp da distribuição risco-neutra e outro em que o cálculo do prêmio é totalmente realizado no espaço de Fourier. O segundo método se mostrou mais robusto, rápido e flexível, permitindo a utilização de qualquer outra distribuição risco-neutra.

CAMPINAS

2012

CESAR, Pedro Bruno. **The mysterious volatility smile: beyond Black & Scholes**. Going further the Black & Scholes model to explain the volatility smile. 2012. 145 pages. Course Final Paper (Undergraduate Degree) – Economics Institute. State University of Campinas, Campinas, 2012.

ABSTRACT

The purpose of the present work is to demonstrate generalized option pricing model that has better adherence to reality. Black & Scholes model failure can be confirmed by the existence of the implicit volatility smile. The main hypothesis in this monograph is that the error is due to the axiom that prices follow a Geometric Brownian Motion (GBM). To relax that axiom and assume that prices follow different probability distributions, an introduction to mathematics and probability theory concepts became necessary, such as Fourier Transforms and Complex and Residual Calculus. The final results show the power of such tools, largely used by physicists and engineers, in the field of economics.

This paper analysed the B&S model through four different demonstrations, followed by a demonstration of its operationalization with empirical test using Petrobrás options, extracting the volatility smile at the end of the section. Three methods of generalized option pricing using different probability distributions were then demonstrated and tested, starting with Edgeworth Expansion introduced by Jarrow & Rudd (1982). This first method consists in using the GBM as a zero order approximation and expand it to incorporate higher order cumulants, the skewness and kurtosis. The method was successful in generating a volatility smile, but the results were poor compared to reality due to limitations in the values those cumulants can assume, leading to the conclusion that a probability distribution more distinct from the Normal should be used. A generalized Student distribution was then tested, with consistent results. This paper demonstrated two methods using Excel to calculate the option price using this last distribution, through the integral of the payoff function with the risk-neutral probability density function, and another in which the price is completely calculated within the Fourier space. This last method showed up to be stronger, faster and more flexible, allowing for any risk-neutral distribution to be tested.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Organograma do Mercado Financeiro.....	3
Figura 2. Organograma do Mercado de Derivativos.....	5
Figura 3. Lucros do titular e do lançador de uma CALL européia em função do preço à vista na maturidade.....	9
Figura 4. Lucros do lançador coberto ao vender uma CALL européia ou no mercado spot em função do strike price.....	9
Figura 5. Lucros do titular e do lançador de uma PUT européia em função do preço à vista na maturidade.....	10
Figura 6. Esquerda: Prêmio da Call em função do Strike Price. Direita: Preços reais de mercado [ask] da CALL. Note que é decrescente e convexa embora quase uma reta para valores baixos de X.	13
Figura 7. Prêmio da PUT em função do Strike Price	15
Figura 8. FDA ou CDF da Distribuição de Bernoulli para uma moeda viciada.....	19
Figura 9. Descontinuidade na Função Distribuição de Probabilidade fornece $P(\{x_v = x\})$...	19
Figura 10. As CDF podem ser contínuas (a), discretas (b) ou mistas (c).....	19
Figura 11. Função retângulo para $x_0 = 0$, $\Delta = 1$ e $n = 1, 3, 7$ e 15	23
Figura 12. Esquerda: função delta de Dirac construída através da distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 0,8; 0,4; 0,2$ e $0,1$. Direita: as áreas das duas normais com $\sigma = 0,8$ e $0,1$ são idênticas e iguais a 1. Note como a altura da curva vermelha subiu para compensar a falta de largura e manter a área constante.	23
Figura 13. Função Logística H_n e sua derivada $\frac{dH_n}{dx}$ para $n = 1, 2, 4, 10$ e 20	24
Figura 14. FDA e FDP da Distribuição de Bernoulli.....	26
Figura 15. $F(x)$ de uma Normal (a), a CDF da função $sign(x)$ (b) e a CDF da $F(y)$ (c)	27
Figura 16. Gráficos da $g(x)$ e da $F(y)$. Note que a $F(y)$ é nula para $y < -1$, salta para $F_x(-1)$ em $x = -1$, acompanha a curva $F_x(x)$ no intervalo entre -1 e +1 e salta para o valor de 1 a seguir.....	27
Figura 17. $g(x)$ e $F(y)$	28
Figura 18. Três regiões em que $y < g(x) \leq y + \delta y$, definindo x_1 , x_2 e x_3 . Nas regiões 1 e 3 $g'(x)$ é positiva, logo dx_1 e dx_3 também são positivos. Já na região 2 $g'(x)$ é negativa então dx_2 é negativo.....	28
Figura 19. Distribuição com cauda para a direita (a) e distribuição com cauda para a esquerda (b)	38

Figura 20. Uma distribuição leptocúrtica, com $k < 0$ (a) e a outra platicúrtica, com $k > 0$ (b)	38
Figura 21. Normal com $x_o = y_o = 100$. (a) $\sigma_N = 10$ e $\sigma_{\log N} = 0,1$; (b) $\sigma_N = 20$ e $\sigma_{\log N} = 0,2$; (c) $\sigma_N = 40$ e $\sigma_{\log N} = 0,4$	45
Figura 22. Distribuições de Lévy com diferentes parâmetros para α , comparadas à Normal Padrão, em escala logarítmica	49
Figura 23. Conjuntos das distribuições	53
Figura 24. Preço da CALL em função do “moneyness” para ações da Petrobrás PETRL. O índice L se refere à Maturidade T dessa opção e os números que se seguem indicam os diferentes strike prices ofertado pelo mercado	81
Figura 25. Preço da CALL em função do “moneyness” para ações da Petrobrás PETRA	82
Figura 26. Sorriso da volatilidade para PETRL	88
Figura 27. Sorriso da volatilidade para PETRA	88
Figura 28. Da esquerda para a direita, gráficos do prêmio calculado com o método generalizado de precificações com $\gamma = 0,2$ e $\kappa = 0,25$, $\gamma = 0,2$ e $\kappa = 0,9$ e $\gamma = 1$ e $\kappa = 0,1$, respectivamente.	107
Figura 29. Sorriso da volatilidade gerado com os seguintes parâmetros: (a) $\gamma = 0,01$ e $\kappa = 0,1$, (b) $\gamma = -0,1$ e $\kappa = 0,7$, (c) $\gamma = -0,15$ e $\kappa = 0,7$, (d) $\gamma = 0,05$ e $\kappa = 0,1$, (e) $\gamma = 0$ e $\kappa = 0,2577$ e (f) $\gamma = 0$ e $\kappa = 0$, que é o caso da Normal.	108
Figura 30. Função normalizada do tipo $f(x) = \frac{a^4}{(a^2 + x^2)^2}$ para $a = 1$ e $a = 3$. Note que o parâmetro a define a largura da função em torno de $x = 0$	110
Figura 31. Valores dos prêmios para opção PETRA calculados com a distribuição de Student generalizada [linha vermelha] e os valores dos prêmios praticados no mercado (círculos pretos)	112
Figura 32. Sorriso da volatilidade obtido através da utilização da distribuição de Student generalizada com apenas um parâmetro de ajuste livre	113
Figura 33. Curva do prêmio vs strike price gerada inteiramente através de uma transformada inversa de Fourier	116
Figura 34. Sorriso da volatilidade obtida para os dados da curva da Figura 33	116
Figura 35. Série de Taylor	120
Figura 36. Gráfico da função $\delta_n(x - x_o) = \frac{\sin[n(x - x_o)]}{\pi(x - x_o)}$ para $x_o = 0$ e $n = 1, 4$ e 10 . Note que a altura sobe com n e a largura diminui. A distância entre as duas primeiras raízes vale $\frac{2\pi}{n}$	124
Figura 37. Matriz $w_{jk} = \frac{1}{N}(-1)^{j+k} e^{i\frac{2\pi}{N}kj}$	132

Figura 38. Construção da Normal	133
Figura 39. Fórmulas do Excel para construção de uma distribuição Normal	133
Figura 40. Da esquerda para a direita, $f(x)$ de uma normal com $\mu=1$ e $\sigma=0,5$, e sua $\varphi(t)$..	135
Figura 41. Construção de distribuições de Lévy no Excel	136
Figura 42. Distribuição de Lévy com $a=0$, $q=1$, $\alpha=1,2$ e $\beta=0,9$ e suas representações gráficas da $f(x)$ (a), $F(x)$ (b) e $\varphi(t)$ (c).....	137
Figura 43. Distribuição de Lévy com $a=0$, $q=1$, $\alpha=1,2$ e $\beta=-0,9$ e suas representações gráficas da $f(x)$ (a), $F(x)$ (b) e $\varphi(t)$ (c).....	137
Figura 44. Circuito infinitesimal para cálculo de $\oint f(z) dz = 0$	141
Figura 45. Note que no interior da região as integrais de caminho se anulam porque enquanto o percurso de uma célula está em uma direção o da vizinha está na direção oposta. Esse cancelamento, entretanto, não ocorre na fronteira, pois não existe a célula vizinha	142
Figura 46. Isolando uma singularidade do caminho de integração	142

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Balaço da empresa A com relação ao banco e à empresa B.....	6
Tabela 2. Limites inferiores para o prêmio da call.....	11
Tabela 3. Limites inferiores da call	13
Tabela 4. Limites inferiores da put.....	14
Tabela 5. Limites inferiores da put.....	15
Tabela 6. Regra de multiplicação dos diferenciais estocásticos até primeira ordem	68
Tabela 7. Série de CALLs PETRL - Fonte: BMF&Bovespa – Boletim Diário	80
Tabela 8. Série de CALLs PETRA – Fonte: BMF&Bovespa – Boletim Diário.....	81
Tabela 9. Construção do EWMA no Excel.....	82
Tabela 10. Cálculo do EWMA no Excel	83
Tabela 11. DI Futuro.....	83
Tabela 12. Construção do B&S no Excel para PETRL	84
Tabela 13. Cálculo do prêmio no Excel para PETRL	85
Tabela 14. PETRA	85
Tabela 15. Cálculo do prêmio no Excel para PETRA.....	85
Tabela 16. Cálculo da volatilidade implícita no Excel para PETRL	86
Tabela 17. Cálculo da volatilidade implícita no Excel para PETRA.....	87
Tabela 18. Propriedades dos polinômios de Hermite.....	92

SUMÁRIO

Introdução.....	1
1. Capítulo 1.....	3
1.1. Mercado Financeiro	3
1.2. Mercado de Derivativos.....	4
1.3. Mercado a Termo.....	5
1.4. Mercado de Futuros	5
1.5. Mercado de Swaps	6
1.6. Mercado de Opções.....	6
1.7. Lucros e prejuízos com opções.....	8
1.7.1. CALL.....	8
1.7.2. PUT.....	10
1.8. Limites nos prêmios	10
1.8.1. Limites inferiores para os prêmios:.....	11
1.9. Paridade entre opções de venda e de compra	16
2. Capítulo 2: Probabilidade	17
2.1. Introdução	17
2.2. Conceitos básicos de probabilidade	17
2.2.1. Variável aleatória (v.a.)	17
2.2.2. Função Distribuição de Probabilidade	18
2.2.3. Função Densidade de Probabilidade (FDP)	20
2.3. Função Delta de Dirac ou Função Impulso.....	21
2.3.1. Construindo a função Delta de Dirac.....	22
2.3.2. Delta de Dirac como a derivada da função Degrau.	24
2.3.3. Derivando funções descontínuas	25
2.4. Função Densidade Probabilidade de funções descontínuas	25
2.5. Função de uma Variável Aleatória	26
2.6. Operação ESPERANÇA de uma v.a.:.....	29

2.7.	Regra de simetrias do integrando	30
2.8.	Momentos	31
2.8.1.	Momentos de ordem n	31
2.8.2.	Relação entre os Momentos Centrados e não centrados	31
2.9.	Série de Taylor.....	32
2.9.1.	O Truque do Logaritmo	32
2.10.	Função Geradora de Momentos (FGM)	33
2.11.	Função Característica	33
2.12.	Transformada de Fourier:.....	35
2.13.	Cumulantes.....	37
2.13.1.	Assimetria e Curtose	37
2.13.2.	Momentos Centrados de ordem n	39
2.14.	Cumulantes, o truque do logaritmo e o Teorema Central do Limite:	39
2.15.	Distribuições	40
2.15.1.	Distribuição de Bernoulli.....	40
2.15.2.	Distribuição Binomial.....	41
2.15.3.	Distribuição de Poisson:.....	41
2.15.4.	Distribuição Normal:	42
2.15.5.	Distribuição Log-Normal.....	44
2.15.6.	Distribuição Gama:.....	46
2.15.7.	Distribuições que não obedecem ao Teorema Central do Limite.....	47
3.	Capítulo 3: Precificação de Opções Europeias	55
3.1.	Modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein [CRR].	55
3.1.1.	Portfólio replicante e hedge perfeito	55
3.1.2.	Probabilidades Risco-Neutra.....	55
3.1.3.	Opções em apenas um período:	56
3.1.4.	Probabilidades Risco-Neutra independentes da trajetória:	57
3.1.5.	Opções europeias em n períodos:	57
3.1.6.	Fórmula de Black&Scholes obtida através do limite para $n \rightarrow \infty$	59

3.2.	Dedução da fórmula de Black & Scholes pelo prêmio justo	63
3.3.	Modelo de Black & Scholes.....	66
3.3.1.	Processos Estocásticos	66
3.3.2.	Equação da Difusão.....	70
3.3.3.	O Modelo Black & Scholes.....	72
3.3.4.	Conversão da Equação de B&S na equação de Difusão.....	75
3.4.	Testes empíricos da fórmula de Black&Scholes para CALL.....	80
3.5.	Cálculo da Volatilidade pelo Método de Estimador de Média Móvel com Amortecimento Exponencial (EWMA)	82
3.6.	Cálculo da Taxa de Juros através do DI Futuro	83
3.7.	Prêmio Justo	84
3.8.	Volatilidade Implícita	86
3.9.	Conclusão	88
4.	Generalização do modelo de Black & Scholes	91
4.1.	Polinômios de Hermite	91
4.1.1.	Polinômios	94
4.2.	Expansão de Edgeworth	95
4.3.	Equação generalizada para o prêmio de opções.....	96
4.4.	Teorema de Parseval.....	97
4.5.	Função característica de fdp risco-neutra, ou Martingale	98
4.6.	Precificação de Opções Europeias no espaço de Fourier	99
4.6.1.	Transformadas de Fourier de derivadas.....	101
4.6.2.	Transformada da função de Heaviside: Problemas com a regra $FT\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] = -it FT[g(x)]$	101
4.7.	Precificação através da expansão nos cumulantes [expansão de Edgeworth]:	104
4.7.1.	Resultados com Expansão de Edgeworth.....	107
4.8.	Precificação com Distribuição de Student Generalizada	109
4.8.1.	Distribuição de Student generalizada.	109

4.8.2.	Função característica da distribuição de student generalizada.....	110
4.8.3.	Precificação da CALL com distribuição de Student generalizada	111
4.9.	Gerando a curva c vs X diretamente com transformada de Fourier.....	113
4.9.1.	Aplicação para a distribuição de Student generalizada:	115
4.9.2.	Resultado com o método da transformada:.....	115
5.	Conclusão	118
6.	Apêndices	120
6.1.	Apêndice 1: Série de Taylor	120
6.2.	Apêndice 2: Prova de que a função característica é absolutamente contínua	123
6.3.	Apêndice 3: Associação entre a FDP e a função característica.....	124
6.4.	Apêndice 4: Relação entre os cumulantes e os momentos	126
6.5.	Apêndice 5: Demonstração de que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$	127
6.6.	Apêndice 6: Momentos da Log-Normal	128
6.7.	Apêndice 7: Macro com função loop	130
6.8.	Apêndice 8: DFT	131
6.9.	Apêndice 9: Distribuição de Lévy	136
6.10.	Apêndice 10: Expansão de Edgeworth.....	138
6.10.1.	Relações de recorrência	138
6.10.2.	Transformada de Fourier.....	138
6.11.	Apêndice 11: Cálculo de variáveis complexas.....	140
7.	Referências Bibliográficas	145

Introdução

O sorriso da volatilidade representa o grande teste empírico sobre o modelo de Black & Scholes para a precificação de opções europeias. O fato de que o modelo B&S é incapaz de explicar o sorriso significa que esse modelo não passou no critério de falsificação de Popper. Consequentemente, algum, ou mais de um, dos axiomas do modelo de B&S está errado. Entre esses axiomas o de que o preço das ações segue um Movimento Browniano Geométrico tem sido o axioma mais apontado como provavelmente falso. Entretanto, os resultados de B&S são uma boa aproximação dos preços realmente praticados e, na falta de modelos analíticos melhores, é o modelo mais utilizado até hoje para iniciar a precificação das opções. Os agentes envolvidos no mercado de opções passaram a usar o modelo B&S como aproximação de ordem zero e ajustam a volatilidade, criando a volatilidade implícita, para realizar o ajuste fino do modelo aos preços praticados. Infelizmente essa volatilidade implícita mostrou uma dependência sobre o preço da ação subtraído do preço de exercício da opção, criando o sorriso da volatilidade que não é explicado por B&S.

A base tanto do modelo de B&S quanto no modelo binomial de Cox, Ross & Rubinstein (CRR), seria a de que é possível replicar a opção, criando um hedge perfeito, que o vendedor da opção usaria para garantir sua cobertura em qualquer situação. Esse hedge perfeito eliminaria qualquer risco para o vendedor permitindo uma forte diminuição do prêmio cobrado pelas opções. Por isso as probabilidades risco-neutras dos modelos B&S e CRR não são as probabilidades reais da evolução dos preços. O vendedor da opção é neutro ao risco porque o eliminou.

Apesar dos custos de transação serem apontados como uma das razões para a falha no B&S, se os mesmos não dependem da trajetória, mas apenas do ponto final, podem ser incorporados facilmente ao modelo, corrigindo os prêmios. Isso tem sido feito, mas sem explicar o sorriso da volatilidade. A explicação para o mesmo deve ser buscada, portanto, em outros aspectos mais profundos dos axiomas de B&S.

Na metade da década de 1990, parte dos físicos começou a se dedicar ao estudo de problemas no mercado financeiro, criando uma área de pesquisa chamada Econofísica. Um dos objetivos dessa área é ir além do modelo de B&S, apontar seus erros, e procurar modelos quantitativos e qualitativos com melhor aderência aos fatos empíricos. Entre esses trabalhos, Bouchaud (2009) demonstra um modelo de precificação de opções generalizado desenvolvido por Jarrow & Rudd (1982), acompanhando a trajetória do vendedor da opção, e mostra que é impossível eliminar o risco residual com hedge perfeito a não ser no caso miraculoso do Movimento Browniano Geométrico utilizado por B&S. Nesse aspecto o modelo de Jarrow & Rudd (1982) incorpora B&S como um caso particular.

O objetivo dessa monografia é desenvolver modelos generalizados de precificação de opções, não só do modelo de Jarrow & Rudd, como também através de métodos utilizando transformadas de Fourier para supor diferentes distribuições e explicar o sorriso da volatilidade. O resultado geral pode ser usado com qualquer distribuição de probabilidades risco-neutras.

1. Capítulo 1

1.1. Mercado Financeiro

Um agente econômico em busca recursos para a realização de investimentos recorre ao mercado financeiro. Pode obter um financiamento em um banco, o qual serve de intermediário entre os agentes poupadores à busca de alguma rentabilidade e o agente demandante de recursos. Os bancos cobram um spread – diferença entre a taxa de juros oferecida aos poupadores e a taxa de juros cobrada dos tomadores – por este serviço.

O financiamento pode ser obtido sem essa intermediação, por meio do mercado de capitais. Nesse mercado, as empresas e governos se financiam diretamente com o público, através de *bonds* (títulos de dívidas) ou de *equities* (participações). A diferença entre as duas modalidades consiste no fato do detentor da *bond* tornar-se credor da empresa, com o direito ao recebimento de juros e do principal nas condições estabelecidas em contrato, enquanto o detentor de *equities* torna-se sócio da empresa, possuindo participação nos lucros. Os compradores de *stocks* (ações) – uma equity – são remunerados através de distribuição de dividendos ou juros sobre capital próprio (JSCP). A diferença entre os dois, do ponto de vista do acionista, está no fato do dividendo ser isento de Imposto de Renda (IR), enquanto incide a alíquota de 15% de IR sobre os JSCP. Do ponto de vista da empresa, a distribuição de JSCP apresenta benefício pelo fato de ser contabilizada como despesa, antes do lucro.

As *bonds* são associadas ao mercado de renda fixa, uma vez que os termos de sua rentabilidade são predeterminados em contrato. O retorno de uma ação dependerá de fatores como o lucro líquido da empresa distribuído aos acionistas, sob a forma de dividendos, ou da diferença entre o preço de compra e o de venda. Ambas as modalidades possuem alta liquidez, com a existência de mercados secundários desenvolvidos.

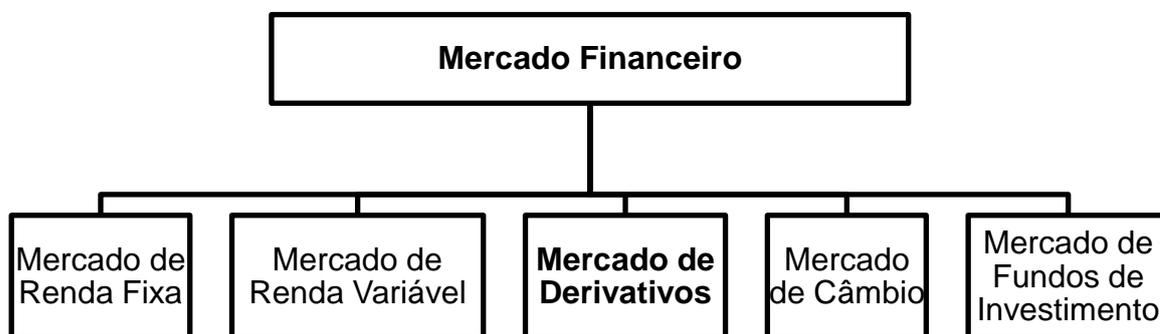


Figura 1. Organograma do Mercado Financeiro

No Brasil, as ações são negociadas na BMFBovespa. Os títulos públicos são negociados na SELIC – Sistema Especial de Liquidação e Custódia –, e os títulos privados

na CETIP – Central de Custódia e de Liquidação de Títulos Privados. Existe também um desenvolvido mercado secundário na bolsa em que estes papéis podem ser negociados.

O organograma da Figura 1 mostra os diversos mercados englobados pelo mercado de financeiro. O foco deste trabalho será no Mercado de Derivativos.

1.2. Mercado de Derivativos

Os contratos de derivativos assim são chamados por dependerem de outro ativo, chamado de ativo objeto. Podem ser ativos financeiros tais como as taxas de juros, moedas, ações e índices, ou ativos não financeiros, constituídos por commodities.

Os agentes entram nesse mercado por razões diferentes. O *hedger* busca uma proteção contra uma variação indesejada no preço à vista numa data futura. Pode ser, de um lado, uma empresa que utiliza insumos agrícolas e possui contrato de fornecimento a preço fixo se protegendo de uma possível alta nos preços, e do outro lado o próprio agricultor, que deseja eliminar o risco de uma acentuada queda nos preços. Ou um exportador que quer garantir uma taxa de câmbio previsível e rentável, de um lado, e do outro um produtor nacional que utiliza insumos importados, imunizando-se contra elevações nos custos devido a uma desvalorização cambial. Em suma, esse agente aceita ter um ganho menor em troca da redução no risco.

Bessada define operações de hedging como “estratégias de administração de riscos de ativos possuídos no presente ou que venham a ser possuídos no futuro, factíveis de serem executadas nos mercados futuros” (Bessada, 2009)

O *especulador* é o outro lado do *hedger*. O agente aceita o risco de variações indesejáveis na expectativa de ganhos financeiros. O lucro da operação dependerá da capacidade de predição dos preços pelos agentes, servindo de estímulo para levantar informações acerca da oferta e demanda no decorrer do tempo. Essa categoria é essencial para o funcionamento do mercado de derivativos, pois é ela que forma as projeções dos preços, assume o risco indesejado pelos *hedgers* e dá liquidez aos mercados.

O *arbitrador* é outra figura importante. Sempre que um bem for negociado com preços discrepantes em diferentes mercados, o *arbitrador* atuará para obter ganhos sem risco, e com isso trará novamente os preços ao equilíbrio. São eles os responsáveis pelo equilíbrio nos preços em diferentes mercados à vista, e pela manutenção de certa relação entre os preços à vista e futuros (Assaf, 2006).

O organograma da Figura 2 mostra os diferentes mercados englobados pelo mercado de derivativos. O objeto de análise desta monografia é o Mercado de Opções, mas antes será feita uma breve descrição dos demais mercados.

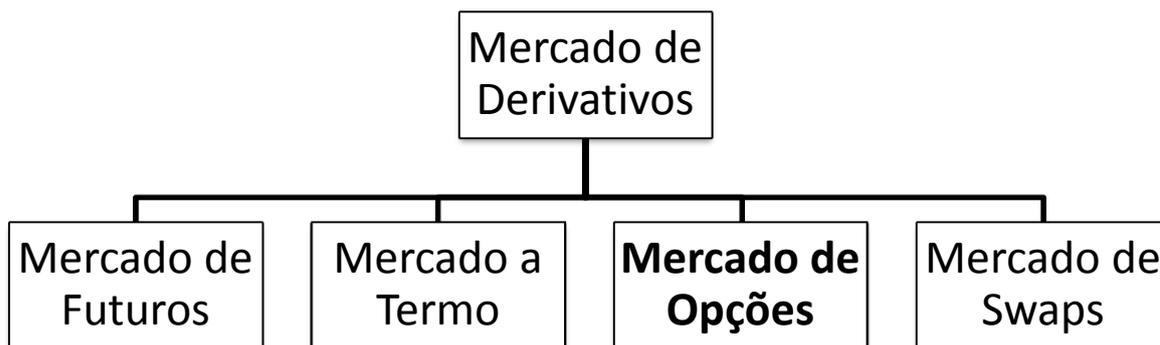


Figura 2. Organograma do Mercado de Derivativos

1.3. Mercado a Termo

Neste mercado são negociados contratos entre duas partes, comprometendo-se a vender ou comprar um ativo com preço, quantidade e prazo pré-determinados. Na data de vencimento do contrato é feita a liquidação do mesmo e as partes realizam as trocas físicas e financeiras prometidas. O sucesso da operação vai depender do cruzamento de dois agentes com necessidades identicamente opostas. Devido à particularidade de cada contrato, não existe um mercado secundário para os mesmos, tornando difícil liquidar a posição antes da data de vencimento. Há ainda o risco de uma das partes não honrar o acordo.

1.4. Mercado de Futuros

O mercado de futuros funciona de maneira semelhante ao mercado a termo, mas segue uma padronização e possui salvaguardas. Esta padronização tem a função de facilitar sua negociação em mercados secundários, dando-lhe maior liquidez. Por outro lado torna-se necessária a adaptação do problema do agente às características do contrato, o que não ocorre no mercado a termo. A operação é intermediada por uma bolsa, a qual faz um ajuste diário de cada parte por meio da câmara de compensação. O ajuste é feito depositando ou creditando a conta das partes através da diferença entre o preço da compra estabelecido em contrato e um preço de ajuste diário, geralmente calculado como o preço médio dos contratos negociados no período da tarde. É exigida ainda uma margem de garantia, calculada por teste de stress, em que são projetados dez cenários prováveis, sendo cinco de alta e cinco de baixa. Em geral, a margem deve cobrir de um a dois dias de ajuste diário. Essas medidas visam reduzir o risco de inadimplência nos contratos, mas impõem um custo operacional mais elevado do que nos contratos a termo.

Um contrato futuro possui a vantagem de poder ser liquidado a qualquer momento, através da reversão da posição assumida comprando um contrato oposto para a mesma

maturidade. As liquidações geralmente são feitas em dinheiro, menos de 2% dos contratos são finalizados com a entrega física do ativo objeto. Por este motivo pode-se considerar que neste mercado é negociado o risco de preço (Bessada, 2009, p. 36), e não produtos ou ativos.

1.5. Mercado de Swaps

Assaf Neto define os swaps como “acordos estabelecidos entre duas partes visando a uma troca de fluxos de caixa futuros por um certo período de tempo, obedecendo uma metodologia de cálculo previamente definida” (Assaf, 2006). Em outras palavras, trata-se de um mecanismo que permite a troca de índices, taxas de câmbio, taxas de juros, etc.

Os agentes atuam nesse mercado em busca de *hedge*, de custos financeiros menores, ou para especulação. Uma empresa A que possui dívida com o banco a uma taxa de juros pré-fixada e acredita que a mesma cairá, pode realizar uma operação de swap com uma empresa B na condição contrária, ou seja, com dívida de igual valor, corrigida por uma taxa de juros pós-fixada, e que possui expectativas opostas. Desta forma a empresa A fará um swap em que ficará passiva em taxa de juros pós-fixada e ativa em pré-fixada com a empresa B. A situação final da empresa A será:

	Ativo	Passivo
Banco		$\$_0 r_{\text{pré-fixada}}$
Empresa B	$\$_0 r_{\text{pré-fixada}}$	$\$_0 r_{\text{pós-fixada}}$

Tabela 1. Balaço da empresa A com relação ao banco e à empresa B.

No Brasil, estes contratos são registrados na CETIP ou na BM&FBovespa, mas não existe garantia contra a inadimplência. Swaps internacionais devem ser registrados no Banco Central. O acerto da diferença entre os fluxos trocados geralmente é feito na data de vencimento.

1.6. Mercado de Opções

É necessário fazer uma introdução às notações utilizadas ao longo do trabalho. Chamaremos o ativo objeto de A-O. Para a variável tempo será utilizada a letra t , em que a maturidade (data de vencimento) da opção será designada por $t = T$. As operações de opções serão analisadas pela óptica do investidor, o qual tem um custo inicial para obter lucro no final do período. Os fluxos de capital terão sinais opostos de acordo com o tempo em que aparecem. Será adotada a convenção de que, no momento em que o agente compra a opção, em $t = 0$, o dinheiro gasto terá sinal positivo e o dinheiro recebido terá sinal

negativo. Na data de vencimento da opção, em $t = T$, a lógica é invertida, as saídas terão sinal negativo e as entradas sinal positivo.

O preço à vista, ou *spot price*, do A-O em $t = 0$ será denominado por S . Em $t = T$ será chamado de S_T . No intervalo entre o momento inicial e a maturidade a notação utilizada será S_t . O preço de exercício (*strike price*) é o valor estipulado pelo contrato para o A-O em $t = T$, e será denominado por X . O prêmio de uma opção depende do *strike price* X para uma mesma maturidade T . Na realidade, no mercado apenas alguns X são ofertados e o volume de negócios se concentra em torno de alguns valores de X . No capítulo 2 mostraremos uma curva do prêmio de uma opção de compra em função da grandeza chamada “*moneyness*”, dada por $X - S$.

Lançador é o agente vendedor da opção, e o titular é o comprador. A peculiaridade deste tipo de contrato consiste no fato do titular possuir o direito, mas não a obrigação, de exercê-lo nas condições acertadas, com a troca do A-O por dinheiro. Existem dois tipos de opções envolvendo as duas partes. A opção que dá direito ao titular de comprar o A-O pelo *strike price* na data acertada é chamada de CALL. O lançador da CALL ficará obrigado a vender o A-O caso o titular decida exercê-la. A outra opção é conhecida como PUT, e dá direito ao seu titular de vender o A-O pelo *strike price* na data acertada. Logo, o lançador de uma PUT terá a obrigação de comprar o A-O nas condições acordadas caso a mesma seja exercida.

Um lançador é tido como descoberto quando o mesmo lança uma CALL sem de fato possuir o A-O. Na maturidade, caso o titular exerça a opção, o agente terá que comprá-lo no mercado à vista. Um lançador coberto já tem a posse do A-O do contrato. Note que no caso da PUT não haverá essa categorização, pois a promessa do lançador é a de comprar, e não vender.

Como a parte compradora somente possui direitos e nenhuma obrigação no futuro, o vendedor da opção deve cobrar um prêmio cujo preço reflita o risco assumido. Antes de informar a notação a ser utilizada para o prêmio, é necessário fazer uma distinção entre os dois tipos de opções negociadas no mercado com diferentes condições de exercício no tempo. A opção do tipo européia pode ser exercida somente na sua maturidade, em $t = T$. A opção do tipo americana pode ser exercida a qualquer momento dentro do seu prazo de vigência. As notações utilizadas para o prêmio serão c para a opção européia e C para a americana, no caso de uma CALL, e p e P , respectivamente, no caso da PUT.

Vejamos agora as condições em que o titular da opção decidirá exercê-la ou não, lembrando que S_T é o preço à vista (*spot*) do A-O na maturidade (em $t = T$) e X é o preço de exercício (*strike price*). Para uma CALL, se em $t = T$ o preço S_T do A-O estiver abaixo de

X ele não exerce o seu direito e compra no mercado *spot* por $S_T < X$. Por outro lado se em $t=T$ o preço S_T do A-O estiver acima de X ele exerce o seu direito e compra por $X < S_T$. Já para uma PUT se em $t=T$ o preço S_T estiver abaixo de X ele exerce o seu direito e vende seu A-O por $X > S_T$. Se em $t=T$ o preço S_T estiver acima de X ele não exerce o seu direito e vende o A-O por $S_T > X$.

Isto posto, cabe explicar melhor o conceito de *moneyness* da opção. Trata-se de uma relação entre o *strike price* e o preço *spot*. Quando a opção estiver em condições de ser exercida pelo seu titular, conforme descrito no parágrafo anterior, diz-se que a mesma está dentro-do-dinheiro (*in-the-money*). Quando os preços configurarem uma situação em que a opção não será exercida, a opção estará fora-do-dinheiro (*out-of-the-money*). Se os dois preços coincidirem, a opção estará ao-dinheiro (*at-the-money*), e o titular será indiferente entre exercer ou não a mesma.

1.7. Lucros e prejuízos com opções

1.7.1. CALL

No caso da CALL o titular sai ganhando quando o preço do produto que pretende comprar fica acima do *strike price*, e seu lucro será $L_{call} = \text{Max}[S_T - X, 0] - c$. Como se trata de um jogo de soma zero, o lucro do titular representa prejuízo para o lançador e vice versa. Note que:

$$L_{call} = \begin{cases} S_T - X - c & \text{se } S_T > X \\ -c & \text{se } S_T < X \end{cases}$$

A Figura 3 mostra os lucros do titular e lançador de uma CALL em função do preço à vista em T, S_T .

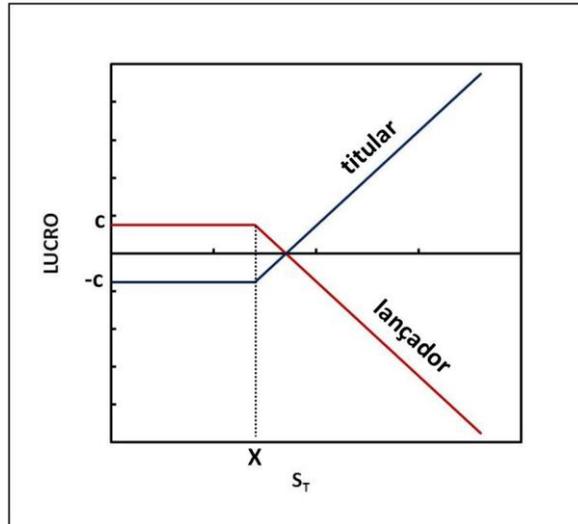


Figura 3. Lucros do titular e do lançador de uma CALL europeia em função do preço à vista na maturidade

O prejuízo do lançador poderia, teoricamente, ser infinito. Mas aqui é preciso distinguir prejuízos reais de prejuízos do tipo “deixou de ganhar”, associados ao custo de oportunidade. Um lançador coberto só terá prejuízos do tipo “deixou de ganhar”. Suponha que o lançador possui o ativo-objeto, ele tem duas opções: deixar para vender no mercado à vista em T ou vender a opção de compra por X , pela qual recebe c . Se deixar para vender à vista recebe S_T pelo seu A-O. Em T , enquanto o preço do A-O estiver abaixo do *strike price*, o titular não exerce a opção e o lançador vende seu A-O por S_T , ganhando $S_T + c$. Se o preço ultrapassar o *strike price* então ele é obrigado a vender seu A-O por X . A Figura 4 mostra os lucros do lançador nos dois casos, vendendo a opção ou no mercado à vista. O lançador descoberto pode ter prejuízos reais porque deve comprar o A-O no mercado spot por S_T e vendê-lo por X para honrar seu compromisso.

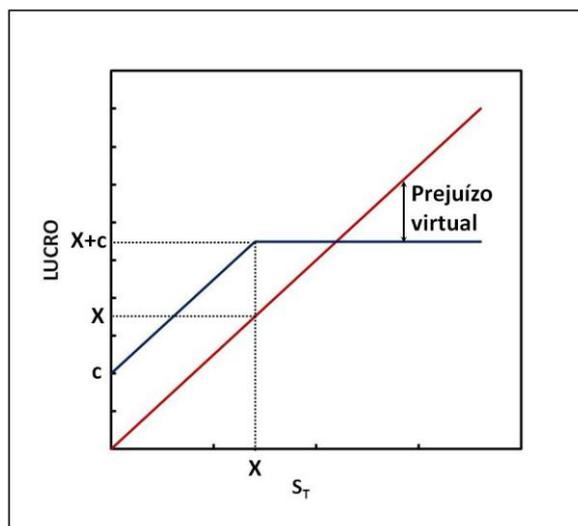


Figura 4. Lucros do lançador coberto ao vender uma CALL europeia ou no mercado spot em função do strike price

1.7.2. PUT

No caso da PUT o titular sai ganhando quando o preço do produto que pretende vender fica abaixo do *strike price*, comprando o A-O no mercado à vista e exercendo a opção. Nesse caso o seu lucro será $L_{put} = \text{Max}[X - S_T, 0] - p$. Como se trata de um jogo de soma zero, o lucro do titular representa prejuízo para o lançador e vice versa. Note que:

$$L_{put} = \begin{cases} X - S_T - p & \text{se } X > S_T \\ -p & \text{se } X < S_T \end{cases}$$

A Figura 5 mostra os lucros do titular e lançador de uma PUT em função do preço à vista em T, S_T . Aqui vale a pena notar que o prejuízo do lançador da PUT é limitado. No máximo, se o preço à vista do A-O chegar a ZERO, perderia $X - p$.

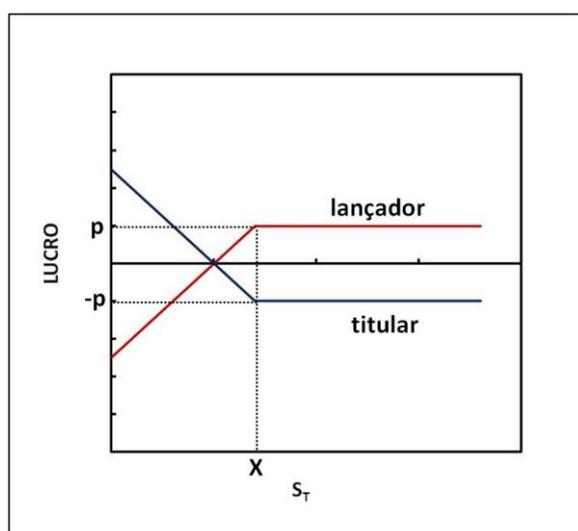


Figura 5. Lucros do titular e do lançador de uma PUT europeia em função do preço à vista na maturidade

1.8. Limites nos prêmios

Pode-se mostrar¹ que o preço da CALL está limitado entre

$\text{Max}\left[S - \frac{X}{(1+R)^T}, 0\right] \leq c \leq S$ e o preço da PUT está limitado entre

$\text{Max}\left[\frac{X}{(1+R)^T} - S, 0\right] \leq p \leq \frac{X}{(1+R)^T}$ e que os preços das opções americanas são sempre superiores ao das europeias, ou seja, $c \leq C \leq S$ e $p \leq P \leq X$.

¹ Ver Marins (2004) e Benninga (2008)

Se $c > S$ ou $C > S$ o lançador cobra c ou C hoje, do qual tira uma parte S para comprar o A-O, ficando com o lucro $L = \begin{bmatrix} c \\ C \end{bmatrix} - S$. Na maturidade, caso a opção seja exercida, ele entrega A-O. Se não for ele vende o A-O.

Se $p > X$ ou $P > X$ o lançador cobra p ou P hoje, e guarda X para a maturidade caso tenha que pagar a opção. Se $p > \frac{X}{(1+R)^T}$ o lançador cobra p , do qual extrai $\frac{X}{(1+R)^T}$ para uma aplicação na taxa de juros R . Na maturidade terá $\frac{(1+R)^T X}{(1+R)^T} = X$ para pagar o titular e ficou com o lucro $L = p - \frac{X}{(1+R)^T}$. Não podemos afirmar o mesmo para a PUT americana porque não se sabe em que momento será necessário cobrir a opção.

1.8.1. Limites inferiores para os prêmios:

Vamos analisar inicialmente o caso das CALLs, em que $C \geq c \geq \text{Max} \left[S - \frac{X}{(1+R)^T}, 0 \right]$. Suponha que $S - \frac{X}{(1+R)^T} > 0$, caso contrário, a desigualdade diz apenas que $c \geq 0$. Vamos analisar a seguinte operação: em $t=0$ vende o A-O por S , compra uma CALL por c e aplica $\frac{X}{(1+R)^T}$ na taxa R .

	$t=0$	$t=0$	$t=T$	$t=T$
Operação		\$	$S_T < X$	$X \leq S_T$
Vende x A-Os		$-Sx$		
Comprar x A-Os			$-S_T x$	$-S_T x$
Comprar x CALLs X		cx	0	$[X - S_T]x$
Aplica $\frac{xX}{(1+R)^T}$		$\frac{xX}{(1+R)^T}$	xX	xX
Total		$\left[-S + c + \frac{X}{(1+R)^T} \right]x$	$[X - S_T]x > 0$	0

Tabela 2. Limites inferiores para o prêmio da call

Note que na maturidade ele recompõe seus ativos e só existem ganhos positivos ou nulos. Nesse caso deve ter gasto dinheiro em $t=0$ ou teria uma oportunidade de operação

de arbitragem de segunda espécie. Assim $\left[-S + c + \frac{X}{(1+R)^T}\right] > 0$ ou $c > S - \frac{X}{(1+R)^T}$. Daí vale

$$\text{a desigualdade } c \geq \text{Max}\left[S - \frac{X}{(1+R)^T}, 0\right].$$

Se o A-O não paga dividendos então nunca é vantajoso exercer a opção americana antecipadamente, logo $C = c$. Para $t < T$ só vale a pena exercer a CALL americana se $S_t - X > 0$. O prêmio de uma CALL para T em t será maior do que $c_t \geq S_t - \frac{X}{(1+R)^{(T-t)}}$, mas

$$\frac{X}{(1+R)^{(T-t)} < X \text{ logo } c_t \geq S_t - \frac{X}{(1+R)^{(T-t)} \geq S_t - X \text{ e é preferível manter a opção.}$$

A curva do prêmio da CALL em função do strike price X é decrescente e convexa. A primeira parte é demonstrada por absurdo supondo que $X_2 > X_1$, mas $c_2 > c_1$. A operação é vender a call de X_2 por c_2 e comprar a call de X_1 por c_1 . Ficar com o lucro $L = c_2 - c_1$. Na maturidade temos as seguintes possibilidades: $S_T < X_1$ e nada há para pagar nem para receber, ganho nulo; $X_1 \leq S_T < X_2$ e o arbitrador recebe o valor $S_T - X_1$ da call comprada e, finalmente, no caso $X_2 \leq S_T$ o arbitrador recebe $S_T - X_1$ da call comprada e paga $S_T - X_2$ da call vendida, com um lucro de $X_2 - X_1$. Para não permitir essa operação de arbitragem é necessário que $c(X_2) < c(X_1) \quad \forall X_2 > X_1$. Logo, a curva c vs X é decrescente.

A segunda parte é demonstrada da seguinte forma: Sejam X_1 , X_2 e $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ três preços de exercício de opções de compra sobre o mesmo ativo. Os prêmios serão diferentes para cada uma delas, valendo $c(X_1)$, $c(X_2)$ e $c(\bar{X})$. Podemos mostrar que

$$c(\bar{X}) < \frac{c(X_1) + c(X_2)}{2}.$$

Para provar por arbitragem de segunda espécie, vamos montar a seguinte operação: comprar x CALLs com strike price de X_1 por $xc(X_1)$, mais outras x CALLs com strike price de X_2 por $xc(X_2)$ e vender $2x$ CALLs com strike price de \bar{X} por $2xc(\bar{X})$. Fazendo $X_1 < X_2$ temos que $X_1 < \bar{X} < X_2$.

$t=0$	$t=0$	$t=T$	$t=T$	$t=T$	$t=T$
Operação	\$	$S_T < X_1$	$X_1 \leq S_T < \bar{X}$	$\bar{X} \leq S_T < X_2$	$X_2 \leq S_T$
Comprar x CALLs de X_1	$c(X_1)$	0	$S_T - X_1$	$S_T - X_1$	$S_T - X_1$
Comprar x CALLs de X_2	$c(X_2)$	0	0	0	$S_T - X_2$
Vender 2x CALLs de \bar{X}	$-2c(\bar{X})$	0	0	$-2(S_T - \bar{X})$	$-2(S_T - \bar{X})$
Total	$c(X_1) + c(X_2) - 2c(\bar{X})$	0	$S_T - X_1 > 0$	$2\bar{X} - X_1 - S_T =$ $= X_2 - S_T > 0$	$2\bar{X} - X_1 - X_2 = 0$

Tabela 3. Limites inferiores da call

Em $t=T$ as operações ou são nulas ou positivas, logo a esperança de lucro é sempre positiva. Então o portfólio tem que custar algo em $t=0$, ou seja, $c(X_1) + c(X_2) - 2c(\bar{X}) > 0$, que leva a $c(\bar{X}) < \frac{c(X_1) + c(X_2)}{2}$.

Então a curva do prêmio da CALL em função do strike price tem que ser da forma mostrada pela Figura 6:

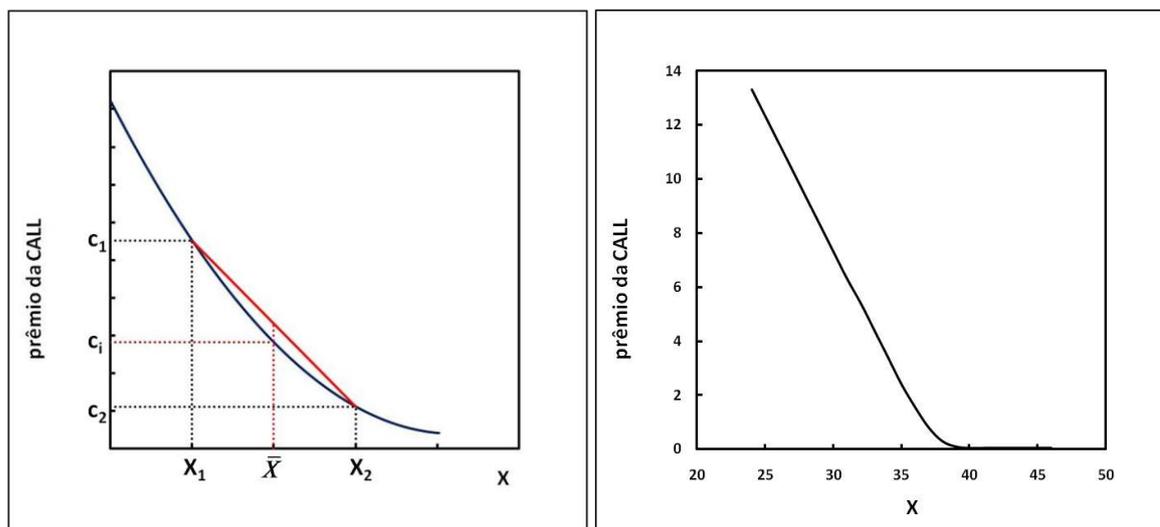


Figura 6. Esquerda: Prêmio da Call em função do Strike Price. Direita: Preços reais de mercado [ask] da CALL. Note que é decrescente e convexa embora quase uma reta para valores baixos de X.

Agora vamos analisar os limites da PUT, em que $p \geq \text{Max} \left[\frac{X}{(1+R)^T} - S, 0 \right]$. Suponha

o caso em que $\frac{X}{(1+R)^T} - S > 0$. Vamos analisar a seguinte operação: Em $t=0$ compra o A-

O por S , compra uma PUT por p e toma $\frac{X}{(1+R)^T}$ emprestado na taxa R.

	$t=0$	$t=0$	$t=T$	$t=T$
Operação		\$	$S_T < X$	$X \leq S_T$
Compra x A-Os		Sx		
Vende x A-Os		-	$S_T x$	$S_T x$
Comprar x PUTs X		px	$[X - S_T]x$	0
Toma empréstimo de $\frac{xX}{(1+R)^T}$		$-\frac{xX}{(1+R)^T}$	$-Xx$	$-Xx$
Total		$\left[S + p - \frac{X}{(1+R)^T} \right]x$	0	$[S_T - X]x > 0$

Tabela 4. Limites inferiores da put

Novamente só existem ganhos positivos ou nulos na maturidade, logo

$$\left[S + p - \frac{X}{(1+R)^T} \right] > 0, \text{ ou } p > \frac{X}{(1+R)^T} - S. \text{ Daí vale a desigualdade } p \geq \text{Max} \left[\frac{X}{(1+R)^T} - S, 0 \right].$$

A curva do prêmio da PUT em função do strike price X é crescente e convexa. A primeira parte é demonstrada por absurdo supondo que $X_2 > X_1$ mas $p_2 < p_1$. A operação é: vender a call de X_1 por p_1 e comprar a put de X_2 por p_2 . Ficar com o lucro $L = p_1 - p_2$. Na maturidade temos as seguintes possibilidades: $S_T > X_2$ nada temos a pagar nem a receber, nenhuma opção será exercida, ganho nulo; $X_1 \leq S_T < X_2$ e recebemos o valor $X_2 - S_T$ da put comprada; e, finalmente, no caso $X_1 \leq S_T$ recebemos $X_2 - S_T$ da put comprada e pagamos $X_1 - S_T$ da put vendida, com lucro de $X_2 - X_1$. Para não permitir essa operação de arbitragem é necessário que $p(X_2) > p(X_1) \quad \forall X_2 > X_1$. A curva p vs X é crescente.

A segunda parte é demonstrada da seguinte forma: Sejam X_1 , X_2 e $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ três preços de exercício [strike] prices de opções de compra sobre o mesmo ativo. Os prêmios serão diferentes para cada uma delas, valendo $p(X_1)$, $p(X_2)$ e $p(\bar{X})$. Podemos mostrar que $p(\bar{X}) < \frac{p(X_1) + p(X_2)}{2}$.

Para provar por arbitragem de segunda espécie, vamos montar a seguinte operação: comprar x PUTs com strike price de X_1 por $p(X_1)x$, mais outras x PUTs com strike price de X_2 por $p(X_2)x$ e vender 2x PUTs com strike price de \bar{X} por $2p(\bar{X})x$. Fazendo $X_1 < X_2$ temos que $X_1 < \bar{X} < X_2$.

$t=0$	$t=0$	$t=T$	$t=T$	$t=T$	$t=T$
Operação	\$	$S_T > X_2$	$\bar{X} \leq S_T < X_2$	$X_1 \leq S_T < \bar{X}$	$S_T \leq X_1$
Comprar x PUTs de X_2	$p(X_1)x$	0	$(X_2 - S_T)x$	$(X_2 - S_T)x$	$(X_2 - S_T)x$
Comprar x PUTs de X_1	$p(X_2)x$	0	0	0	$(X_1 - S_T)x$
Vender 2x PUTs de \bar{X}	$-2p(\bar{X})x$	0	0	$-2(\bar{X} - S_T)x$	$-2(\bar{X} - S_T)x$
Total	$[p(X_1) + p(X_2) - 2p(\bar{X})]x$	0	$(X_2 - S_T)x > 0$	$(X_2 - S_T - 2\bar{X} + 2S_T)x = (S_T - X_1)x > 0$	$(X_1 + X_2 - 2\bar{X})x = 0$

Tabela 5. Limites inferiores da put

Em $t=T$ as operações ou são nulas ou positivas, logo a esperança de lucro é sempre positiva. Então o portfólio tem que custar algo em $t=0$, ou seja, $p(X_1) + p(X_2) - 2p(\bar{X}) > 0$, que leva a $p(\bar{X}) < \frac{p(X_1) + p(X_2)}{2}$.

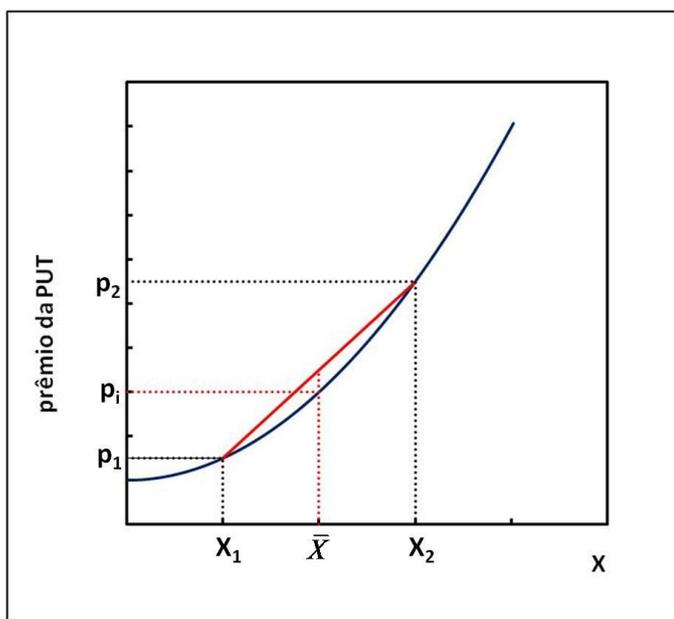


Figura 7. Prêmio da PUT em função do Strike Price

Esses limites nos permitem afirmar que, para o caso das CALLs sobre A-O sem dividendos, nunca é vantajoso exercer a opção americana antecipadamente. Para $t < T$ só vale a pena exercer a CALL americana se $S_t - X > 0$. Vamos comparar duas CALLs, uma em que o contrato foi fechado em $t=0$ para a maturidade T e outra em que o contrato é fechado em t para a mesma maturidade. Por outro lado sabemos que $c_t \geq S_t - \frac{X}{(1+R)^{(T-t)}} \geq S_t - X$, pois $\frac{X}{(1+R)^{(T-t)}} < X$. Isso significa que seria vantajoso para o titular manter sua CALL, vender uma CALL para a mesma maturidade pelo mesmo strike price, pela qual receberia mais do que exercendo a opção, pois $c_t \geq S_t - X$. Se a opção for

exercida na maturidade, ele receberia X do contrato em $t=0$ e pagaria o mesmo X pelo contrato em t .

Isso significa que o preço das CALLS européias e americanas são idênticos. Entretanto, o mesmo não é verdade para as PUTs, sendo comumente vantajoso exercê-las antecipadamente. A igualdade $c = C$, entretanto, deixa de ser verdadeira no caso em que dividendos sejam distribuídos no período de vigência da opção.

Esse fato tem uma consequência importante. Só opções americanas são realmente negociadas no mercado, de modo que modelos de opções européias, muito mais simples do que modelos para opções americanas, só podem ser comparados para o caso das CALLs, nunca das PUTs. O modelo de Black&Scholes foi desenvolvido para opções européias. Por isso, todos os testes empíricos do mesmo são realizados com CALLs, e não com PUTs.

1.9. Paridade entre opções de venda e de compra

Considere duas carteiras A e B. Na carteira A o investidor compra uma CALL por c e aplica $\frac{X}{(1+R)^T}$ na taxa R . Na carteira B o investidor compra uma PUT por p e guarda o ativo-objeto. Em $t=T$ as duas carteiras valem a mesma coisa pois: se $S_T < X$ a CALL não será exercida e o investidor A terá $\frac{(1+R)^T X}{(1+R)^T} = X$. A PUT será exercida e o investidor B entrega o A-O pelo qual recebe X ; já, se $S_T > X$ a CALL será exercida e o investidor A paga X e recebe o A-O que pode vender por S_T . O investidor B não exerce a opção e fica com o A-O que pode vender por S_T . Se as duas carteiras valem o mesmo em qualquer situação na maturidade então devem custar o mesmo em $t=0$. A carteira A custou $c + \frac{X}{(1+R)^T}$ e a B custou $S + p$, logo $c + \frac{X}{(1+R)^T} = p + S$. Esta paridade só é válida para a opção européia.

Nesse capítulo, portanto, apresentamos o mercado de opções dentro do quadro geral do mercado de derivativos e como esse mercado se insere no mercado de capitais como um todo. Definimos os conceitos do mercado de opções junto com a notação matemática que será utilizada no restante dessa monografia. Finalmente, estabelecemos resultados para os limites inferiores e superiores dos prêmios, a relação de paridade PUT-CALL e que apenas no caso das CALLs o prêmio das opções européias e americanas são idênticos. Por isso as comparações empíricas dos modelos de precificação de opções européias só podem ser feitas com CALLs.

2. Capítulo 2: Probabilidade

2.1. Introdução

Neste capítulo faremos uma revisão dos conceitos estatísticos e matemáticos que formam a base deste trabalho, e que, geralmente, não estão incluídas nos cursos de graduação de Economia.

Iniciaremos pelos conceitos básicos de probabilidade, definindo o que é a variável aleatória, a Função Distribuição de Probabilidade (CDF) e a Função Densidade de Probabilidade (FDP), definida como a derivada da CDF. Introduziremos o conceito da delta de Dirac, a qual possibilita lidar com as derivadas das funções descontínuas. Essa é uma ferramenta de extrema importância por permitir tratar as distribuições discretas e contínuas de uma forma generalizada, evitando a complexidade do tratamento diferenciado para as distribuições descontínuas. Passaremos pela função de uma v.a. e pela formalização da operação esperança da variável aleatória.

Posteriormente serão definidos os momentos centrados e não centrados e suas relações. O truque do logaritmo e as séries de Taylor são apresentados neste momento, ferramentas necessárias para as demonstrações seguintes, da Transformada de Fourier, seguindo pelo Teorema da Convolução e chegando, finalmente, nos cumulantes. Com tudo definido, seguimos para a formalização do Teorema Central do Limite (TCL). As transformadas de Fourier serão intensamente utilizadas ao longo da monografia.

2.2. Conceitos básicos de probabilidade

Probabilidade é uma função de conjunto, $P(A) = f : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$, que deve associar um número real $0 \leq P(A) \leq 1$ a todo evento A do espaço amostral, denotado por Ω , satisfazendo aos seguintes três axiomas:

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Omega;$$

$$P(\Omega) = 1;$$

Se $A \cap B = \emptyset$ então, $P(A + B) = P(A) + P(B)$ ².

2.2.1. Variável aleatória (v.a.)

A complexidade exigida para trabalhar com funções de conjuntos é muito maior do que para trabalhar com funções numéricas. Criaremos uma nova função de conjuntos

² Será usada a notação $A \cup B \equiv A + B$ e $A \cap B \equiv AB$.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que permite associar um número a cada evento do espaço amostral A . Essa transformação nos possibilita trocar $P(A)$ por $P(x)$, sendo x uma variável aleatória definida pela função conjunto $x(A) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com imagem R_x . Trata-se, portanto, não de uma variável, mas de uma função. A distinção entre a função e seu valor será feita denominando a primeira por x_v e a segunda por x . As condições necessárias para a função de conjunto ser uma variável aleatória são:

1. O conjunto $\{x_v \leq x\}$ é um evento para $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$P(\{x_v = \infty\}) = P(\{x_v = -\infty\}) = 0.$$

2.2.2. Função Distribuição de Probabilidade

Também chamada Função Distribuição Acumulada, em inglês *Cumulative Density Function* (CDF). Para evitar confusão com a Função Densidade de Probabilidade denotaremos a Função Distribuição de Probabilidade por CDF. Sabendo que o conjunto $A = \{x_v \leq x\}$ é um evento, podemos calcular $P(A)$ para qualquer valor de x . Assim a CDF é definida por:

$$F(x) = P(\{x_v \leq x\}) \quad x \in \mathbb{R}$$

Para ilustração veremos o exemplo do jogo de moeda, cara (H) ou coroa (T). Ao jogar a moeda, teremos a probabilidade p de ocorrer o evento H e q de ocorrência do evento T . Somadas as duas probabilidades representam o universo do conjunto, ou seja, $p + q = 1$. Vamos transformar essa função de conjunto em uma v.a. em que cada evento deve assumir os valores 0 ou 1. Designaremos $x_v(H) = 1$ e $x_v(T) = 0$. Essa distribuição é conhecida como distribuição de Bernoulli. Faremos um exame mais detalhado dela mais adiante. Nesse caso, temos o seguinte:

$$x_v^{-1}[(-\infty, x)] = \begin{cases} \phi & \text{se } x < 0 \\ \{T\} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \Omega = \{\{T\}, \{H\}\} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Como $P(\phi) = 0$, $P(\{T\}) = q$ e $P(\Omega) = 1$, então:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ q & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

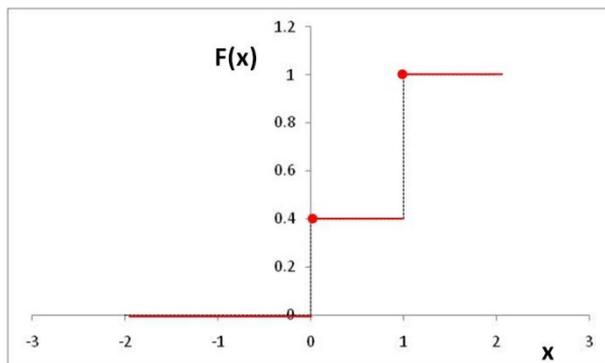


Figura 8. FDA ou CDF da Distribuição de Bernoulli para uma moeda viciada

2.2.2.1. Propriedades da CDF

As propriedades da CDF são:

1. $F(+\infty) = 1$ e $F(-\infty) = 0$.

$F(x)$ é sempre crescente, ou seja, se $x_2 > x_1$, então $P(\{x_v > x\}) = 1 - F(x)$.

$F(x)$ é contínua pela direita, ou seja, $F(x^+) = F(x)$.

$$P(\{x_1 < x_v \leq x_2\}) = F(x_2) - F(x_1).$$

$P(\{x_v = x\}) = F(x) - F(x^-)$. Se F é contínua, então $P(\{x_v = x\}) = 0$. Mas, se F for descontínua, então $P(\{x_v = x\}) = \Delta F$ será a descontinuidade no ponto x .

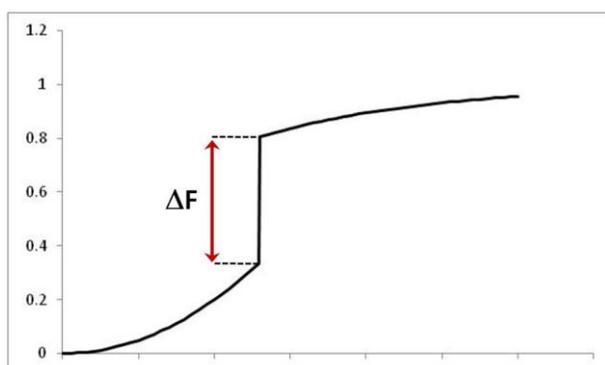
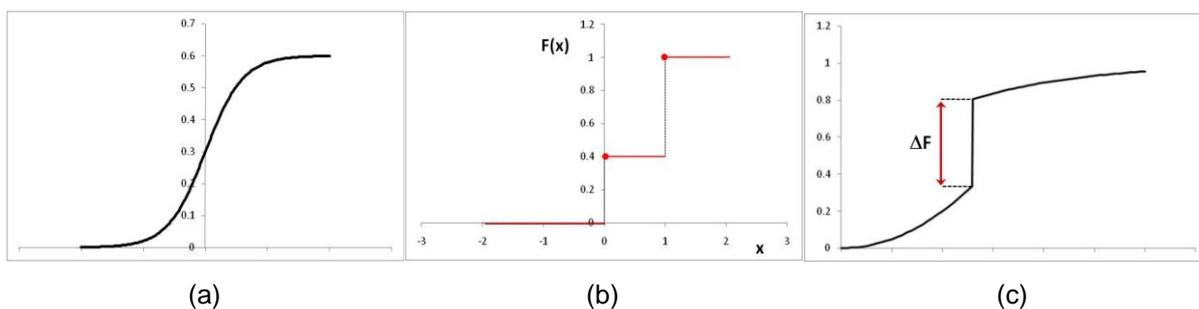


Figura 9. Descontinuidade na Função Distribuição de Probabilidade fornece $P(\{x_v = x\})$



(a) (b) (c)
Figura 10. As CDF podem ser contínuas (a), discretas (b) ou mistas (c)

2.2.3. Função Densidade de Probabilidade (FDP)

Essa função é definida como a derivada da função distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Note que a dimensão da FDP é de probabilidade por unidade de x , e não probabilidade. Podemos definir a CDF em termos da FDP como:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

2.2.3.1. Propriedades da Função Densidade Probabilidade

As propriedades da FDP, supondo que $F(x)$ é diferenciável³, são:

1. $f(x) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(\infty) = 1$$

$$P(\{x_1 < x_v \leq x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$P(\{x < x_v \leq x + dx\}) = f(x) dx$, ou seja, $f(x) dx$ é a probabilidade de encontrar a v.a. x_v entre x e $x + dx$.

A forma usual de lidar com distribuições discretas e mistas, utilizada na imensa maioria dos livros de teoria da probabilidade, estatística e econometria, é separar as distribuições contínuas das discretas através de tratamentos matemáticos diferentes. Entretanto, existe uma forma geral de lidar com as distribuições contínuas e descontínuas através das funções delta de Dirac, conhecidas pelos engenheiros como função impulso. Trata-se de uma forma não apenas muito mais elegante, generalizando o tratamento matemático para qualquer distribuição, mas, principalmente, muito mais poderosa. Essa será a forma utilizada nessa monografia para trabalhar com as distribuições e por isso será necessário desenvolver até certo grau o formalismo da função delta de Dirac.

³ A $F(x)$ pode conter pontos de descontinuidade nos quais a função não é diferenciável.

2.3. Função Delta de Dirac ou Função Impulso

As funções Delta de Dirac foram criadas exatamente para lidar com as derivadas das descontinuidades. A idéia é construir uma função que opere da seguinte forma para integrais com $b > a$:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_o)dx = f(x_o)\mathbf{1}_{[a,b]}(x_o) = f(x_o) \begin{cases} 1 & \text{se } x_o \in [a,b] \\ 0 & \text{se } x_o \notin [a,b] \end{cases}$$

Onde $\mathbf{1}_A(x)$ é a função indicador de um conjunto definida por:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Note que a integração com a função delta de Dirac simplesmente substitui a variável x por x_o , desde que x_o esteja no intervalo entre a e b . Nesse caso, impõe-se que $\delta(x-x_o) = 0$ se $x \neq x_o$, entretanto a área sobre a delta tem que ser 1, pois:

$$\int_{x_o-\varepsilon}^{x_o+\varepsilon} f(x)\delta(x-x_o)dx = f(x_o) \int_{x_o-\varepsilon}^{x_o+\varepsilon} \delta(x-x_o)dx = f(x_o)$$

Em outras palavras, estamos em busca de uma função que seja nula para todo $x \neq x_o$, mas que tenha área unitária, ou seja, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_o)dx = 1$. Note que a exigência de que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_o)dx = 1$ implica em que a dimensão da delta é de $1/x$. Se a largura da função delta de Dirac vai a zero então a altura deve ir para o infinito para garantir a área sobre a curva. Trata-se, portanto, de uma função muito estranha, nula em todo ponto exceto no ponto escolhido x_o , mas com área unitária.

Paul Dirac apresentou essa função em 1930 no seu livro "Principles of Quantum Mechanics". Ele a chamou de uma função imprópria, pois não é uma função na realidade, utilizou a notação delta $\delta(x-x_o)$ e apresentou suas propriedades extremamente úteis no cálculo de muitas integrais, equações diferenciais e muitas outras aplicações. Visualizava essa função como o equivalente da densidade de uma distribuição de massas pontuais. Por isso a função se chama hoje função DELTA de DIRAC.

Do ponto de vista histórico, entretanto, o formalismo da função delta moderna se inicia com os trabalhos de Fourier iniciados em 1807, mas só publicado no "Théorie analytique de la chaleur" em 1822. Suas idéias eram bem conhecidas em Paris antes da publicação, especialmente por Poisson e Cauchy. Utilizava-se a idéia da função delta de forma implícita, dentro do sinal de integral. Poisson [1815] e Cauchy [1816, 1823 e 1827] publicaram demonstrações do teorema integral de Fourier utilizando um formalismo que hoje

seria reconhecido como uma aplicação da função delta de Dirac moderna. Oliver Heaviside desenvolveu entre os anos de 1888 e 1894 o que é hoje denominado Cálculo Operacional, muito criticado pela falta de rigor e definições exatas, mas extremamente útil na solução de equações diferenciais. Mostrou que a derivada da sua função degrau era a própria função delta. Kirchhoff em 1893 apresentou uma definição matemática da função delta, ainda não rigorosa pelos padrões modernos.

O trabalho de Dirac representou um redescobrimto da função delta, com o surgimento de muitas aplicações da mesma na física e engenharia, e incentivou esforços de formalização rigorosa da matemática que permitisse definir uma função tão estranha. A primeira teoria rigorosa da função delta foi apresentada por Bochner em 1932, seguida pela definição rigorosa das distribuições como funcionais de Sobolev em 1935. Schwartz trabalhou na idéia de 1945 a 1950 publicando o trabalho seminal "Theorie des Distributions" em 1950. A função delta faz parte das funções generalizadas e é aceita como um funcional no sentido da operação que causa sobre outras funções quando integrada com as mesmas e sua formalização rigorosa está dentro da teoria das distribuições. Apesar dessa imensa dificuldade de rigor matemático, que manteve esse campo do conhecimento adormecido por mais de cem anos, a operacionalidade das funções delta de Dirac é simples, intuitiva e exata, como a formalização rigorosa demonstrou posteriormente.

2.3.1. Construindo a função Delta de Dirac

Partindo de uma função $\delta_n(x-x_o)$ de largura limitada, ou seja, $\delta_n(x-x_o) \rightarrow 0$ quando $|x-x_o| > m$, mas cuja área seja 1 e independente de n . Além disso, é preciso que $n \rightarrow \infty$, então $m \rightarrow 0$, ou seja, a largura da delta vai a zero. Fazendo o n tender a infinito resultará na função Delta de Dirac como $\delta(x-x_o) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x-x_o)$. Qualquer função $\delta_n(x-x_o)$ com as propriedades acima pode ser usada para construir a função Delta de Dirac.

Um exemplo é a função retângulo, $\delta_n(x-x_o) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x-x_o| > \frac{\Delta}{2n} \\ \frac{n}{\Delta} & \text{se } |x-x_o| \leq \frac{\Delta}{2n} \end{cases}$, cujo gráfico

encontra-se na Figura 11.

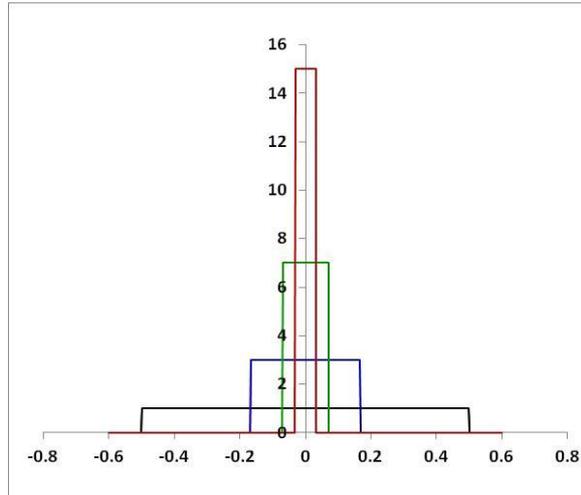


Figura 11. Função retângulo para $x_o = 0$, $\Delta = 1$ e $n = 1, 3, 7$ e 15

A área sobre a curva vale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x - x_o) dx = \int_{x_o - \frac{\Delta}{2n}}^{x_o + \frac{\Delta}{2n}} \frac{n}{\Delta} dx = \frac{n}{\Delta} \frac{\Delta}{n} = 1$. Se n vai a infinito, a

largura vai a zero e a altura a infinito, mantendo a área constante. Vale notar que as funções densidade de probabilidade são excelentes candidatas à função Delta de Dirac, pela propriedade $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Assim, poderíamos usar distribuições Normais, como na Figura

12, ou qualquer outra distribuição que possua a propriedade da largura diminuir e tender a zero quando determinado parâmetro vai a infinito ou zero.

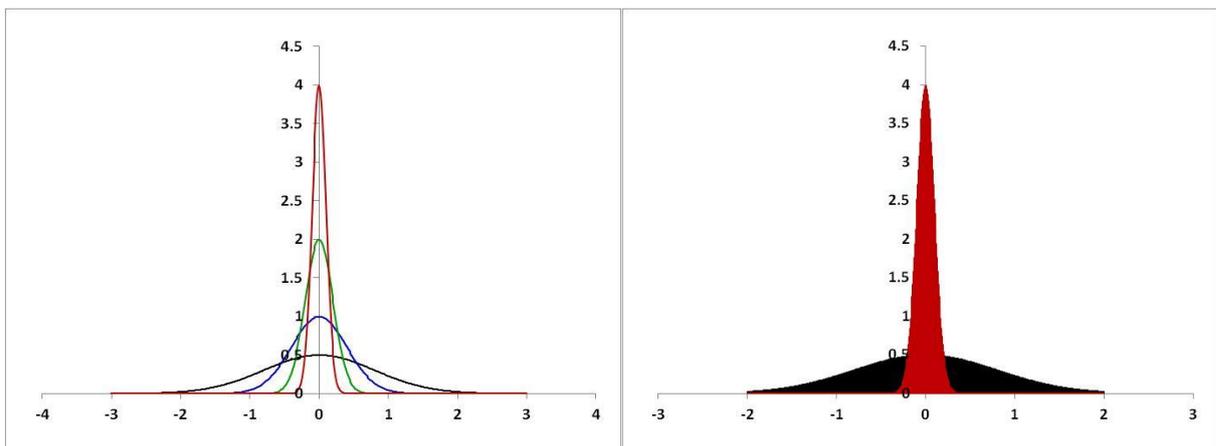


Figura 12. Esquerda: função delta de Dirac construída através da distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 0,8; 0,4; 0,2$ e $0,1$. Direita: as áreas das duas normais com $\sigma = 0,8$ e $0,1$ são idênticas e iguais a 1. Note como a altura da curva vermelha subiu para compensar a falta de largura e manter a área constante.

2.3.2. Delta de Dirac como a derivada da função Degrau.

Pode-se usar a função delta de Dirac para obter a derivada de funções descontínuas. Vamos considerar a função de Heaviside, ou função degrau, definida como:

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq x_0 \\ 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

Essa função é descontínua em $x = x_0$ e, portanto, não diferenciável. Agora considere a função logística dada por $H_n(x-x_0) = \frac{1}{1+e^{-n(x-x_0)}}$. Note que se $x < x_0$, então

$x-x_0 < 0$ e $-n(x-x_0) > 0$, logo, para $x \rightarrow -\infty$ $H_n(x-x_0) \sim \frac{1}{e^{-n(x-x_0)}} \rightarrow 0$. Já para $x \rightarrow \infty$,

então $e^{-n(x-x_0)} \rightarrow 0$ e $H_n(x-x_0) \rightarrow 1$. Assim temos que $H_n(-\infty) = 0$ e $H_n(+\infty) = 1$. Para

$x = x_0$ $H_n(0) = \frac{1}{2}$. A função H_n é diferenciável, $\frac{dH_n}{dx} = \frac{ne^{-n(x-x_0)}}{[1+e^{-n(x-x_0)}]^2}$, e essa derivada tem

uma área sobre a curva igual a 1, pois $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dH_n}{dx} dx = H_n(+\infty) - H_n(-\infty) = 1 - 0 = 1$. Aumentando

o n se percebe que a função logística se parece cada vez mais com a função degrau e que a largura de sua derivada vai diminuindo. A Figura 13 mostra H_n e $\frac{dH_n}{dx}$ para $n = 1, 2, 4, 10$ e 20 .

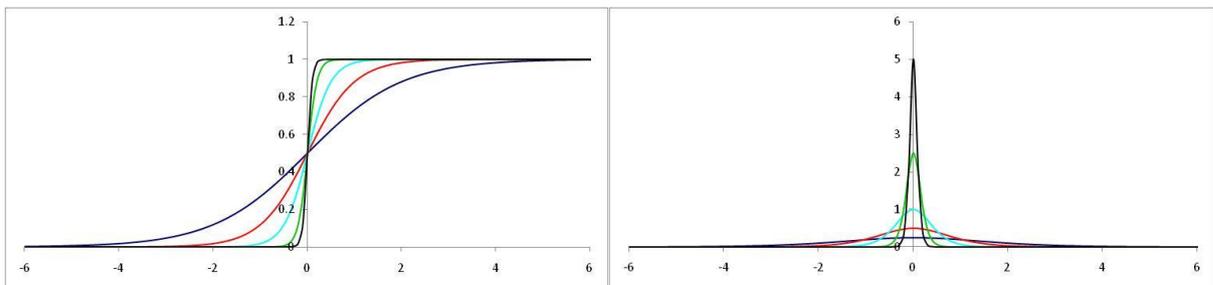


Figura 13. Função Logística H_n e sua derivada $\frac{dH_n}{dx}$ para $n = 1, 2, 4, 10$ e 20 .

Daí se percebe, então, que para $n \rightarrow \infty$, teremos: $\frac{d}{dx} H(x-x_0) = \delta(x-x_0)$. Esse foi um dos resultados obtidos por Heaviside na década de 1890.

2.3.3. Derivando funções descontínuas⁴

Uma função descontínua da forma $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$ pode ser escrita

como $f(x) = f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)]H(x - x_0)$. Agora podemos derivar essa função pela regra do produto como:

$$f'(x) = f_1'(x) + [f_2'(x) - f_1'(x)]H(x - x_0) + [f_2(x_0) - f_1(x_0)]\delta(x - x_0)$$

Ou seja, $f'(x) = f_1'(x) + [f_2'(x) - f_1'(x)]H(x - x_0) + \Delta f \delta(x - x_0)$, onde Δf é a descontinuidade em x_0 .

As duas propriedades da função Delta de Dirac que mais utilizaremos são:

1.
$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)\mathbf{1}_{[a,b]}(x_0)$$

$$\frac{d}{dx}H(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

2.4. Função Densidade Probabilidade de funções descontínuas

Agora a função Delta de Dirac dá conta de todas as descontinuidades da distribuição de probabilidade e não é mais necessário distinguir os casos discretos, mistos e contínuos, e as definições $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ e $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ são válidas em geral. Um bom

exemplo é o caso da distribuição de Bernoulli onde $F(x) = qH(x) + pH(x-1)$ e

$f(x) = q\delta(x) + p\delta(x-1)$. Vale a pena notar que a FDP ficou com a dimensão correta de probabilidade por unidade de x , pois q e p possuem dimensão de probabilidade, mas

foram multiplicadas pelos deltas com dimensão de $\frac{1}{x}$. Uma boa representação gráfica para

a função $q\delta(x - x_0)$ é a de uma seta vertical com altura igual a q na posição x_0 , como mostrado na Figura 14 para o exemplo da distribuição de Bernoulli.

⁴ A função delta de Dirac só deve ser usada para descontinuidades finitas, ou seja, para funções com variações finitas. No caso das distribuições as descontinuidades são todas finitas e a representação da derivada da descontinuidade como a função delta é sempre válida.

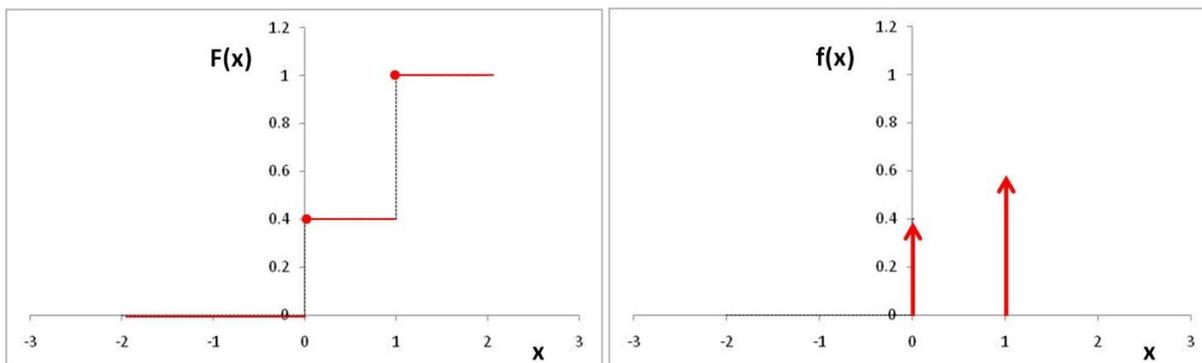


Figura 14. FDA e FDP da Distribuição de Bernoulli

2.5. Função de uma Variável Aleatória

Uma nova v.a. $y = g(x)$ pode ser criada a partir de uma v.a. x desde que satisfaça os seguintes requisitos:

1. O conjunto $\{g(x) \leq y\}$ é um evento.

Os eventos $\{g(x) = \pm\infty\}$ devem ter probabilidade nula, ou seja, $\{g(x) = \pm\infty\} = \phi$.

Imagem de x está contida no domínio de g .

Note a necessidade desses requisitos. Se $\{g(x) \leq y\}$ não é um evento não existe probabilidade associada ao mesmo. O segundo requisito garante que $f_y(\pm\infty) = 0$, exigido para uma FDP. O terceiro é um pouco mais sutil. Precisamos ter certeza de que ao varrer y todos os valores possíveis de x - a imagem da função de conjuntos $x = x_v(A)$ - estarão incluídos. Não podem faltar valores de x nem pode haver superposição de intervalos de x . A ausência de superposição é garantida pelo fato de que $g(x)$ é uma função, ou seja, o mesmo valor de x só pode ser associado a apenas um valor de $y = g(x)$. Podemos calcular $F_y(y)$ da seguinte forma:

1. Encontrar todos os intervalos de x para os quais $g(x) \leq y$
2. Calcular a probabilidade de cada um dos intervalos e somá-los

Note que $g(x)$ pode ser inclusive descontínua, constante, divergir, que mesmo assim poderemos encontrar a nova distribuição de probabilidade. Vejamos alguns exemplos dos casos mais patológicos. Para simplificar, considere que x segue uma distribuição contínua bem comportada, como a normal da Figura 15(a), por exemplo. Agora vamos fazer $y = \text{sign}(x)$, mostrada na Figura 15(b). Note que, nesse caso, o conjunto $g(x) \leq y < -1$ é vazio, logo, tem probabilidade nula; o conjunto $g(x) \leq y$, para qualquer $0 \leq y < 1$,

corresponde ao conjunto $x \leq 0$, ou seja, com probabilidade $p = 0,4$ pelo gráfico da $F(x)$. Note que, por outro lado, $g(x) \leq y$ para qualquer $1 \leq y$ representa todo o espaço amostral, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo é associado à probabilidade 1. A função distribuição de probabilidade de y nesse caso é dada pelo gráfico da Figura 15(c).

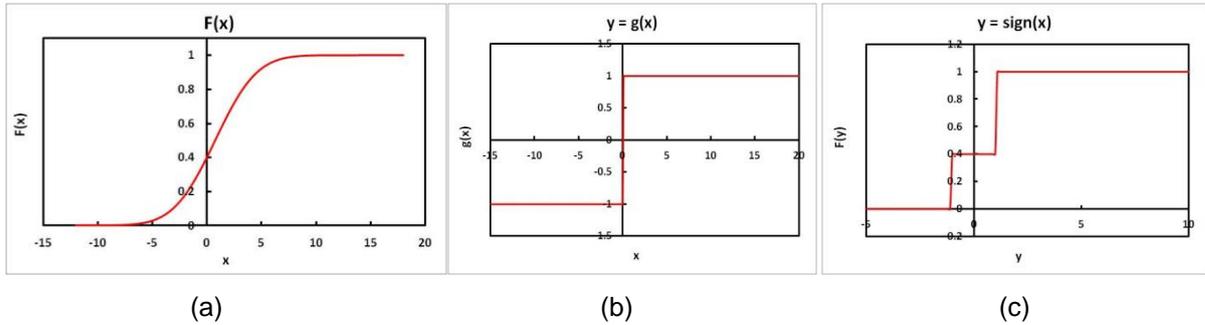


Figura 15. $F(x)$ de uma Normal (a), a CDF da função $sign(x)$ (b) e a CDF da $F(y)$ (c)

Suponha agora o caso em que $y(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ x & \text{se } -1 < x \leq +1 \\ +1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ mostrada na Figura 16. O

conjunto $g(x) \leq y$ para $y < -1$ é vazio, logo tem probabilidade nula. O conjunto $g(x) \leq y$ para $-1 \leq y < +1$ é $x \leq y$ e com probabilidade $F_x(y)$ e o conjunto $g(x) \leq y$ para $+1 \leq y$ corresponde a todo o espaço amostral $x \in \mathbb{R}$ com probabilidade 1.

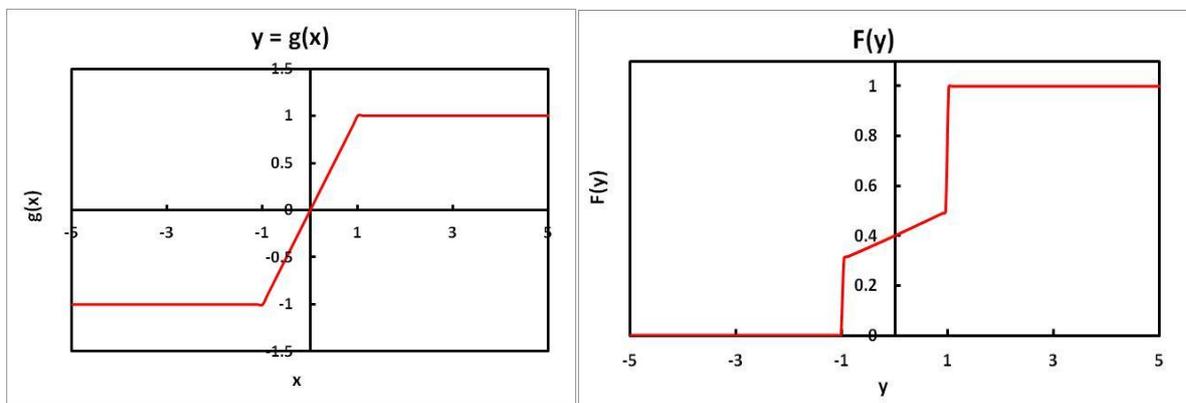


Figura 16. Gráficos da $g(x)$ e da $F(y)$. Note que a $F(y)$ é nula para $y < -1$, salta para $F_x(-1)$ em $x = -1$, acompanha a curva $F_x(x)$ no intervalo entre -1 e $+1$ e salta para o valor de 1 a seguir

Vamos tomar o caso em que y é descontínua, por exemplo, $y(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$, como mostra a Figura 17. Nesse caso o conjunto $g(x) \leq y$ para $y \leq 0$ será $x \leq y$ e $F_y(y) = F_x(x)$. Já o conjunto $g(x) \leq y$ para $0 < y \leq 1$ será $x \leq 0$ e $F_y(y) = F_x(0)$. Isso significa que na descontinuidade de y sua FDA permanece constante,

como se percebe no gráfico da $F(y)$ da Figura 17. Finalmente o conjunto $g(x) \leq y$ para $y > 1$ será $x \leq y-1$ e $F_y(y) = F_x(y-1)$, que é a própria $F(x)$ transladada de 1 para a direita.

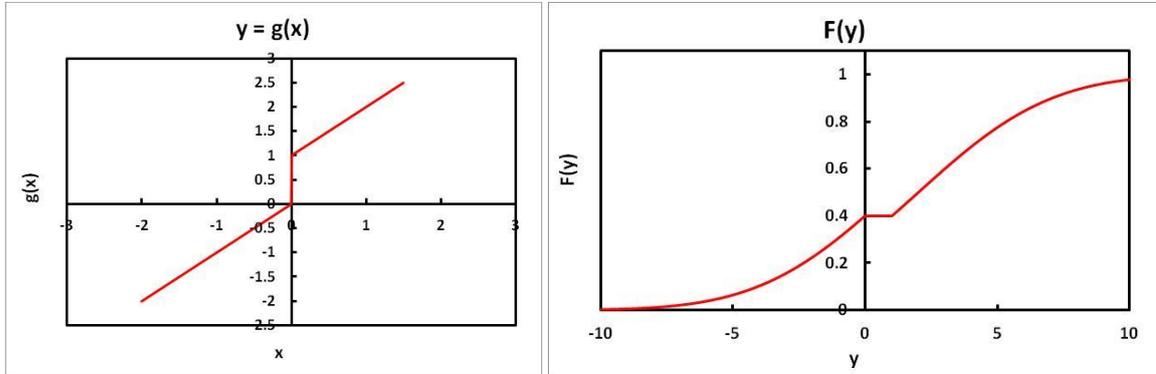


Figura 17. $g(x)$ e $F(y)$

No caso especial em que $g(x)$ é diferenciável a função densidade de probabilidade

da nova variável é dada por $f_{dp}(y) = \sum_k \frac{f_{dp}[g^{-1}(y)]}{|g'[g^{-1}(y)]|}$ onde $g(x_i) = y$.

Prova: $f_{dp}(y) = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{CDF(y + \delta y) - CDF(y)}{\delta y} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < y_v \leq y + \delta y)}{\delta y}$, ou seja,

$P(y < y_v \leq y + \delta y) = f_{dp}(y) dy$. A pergunta é, então, qual o conjunto de pontos de x que leva ao conjunto para $y < y_v \leq y + \delta y$? É aquele em que $y < g(x) \leq y + \delta y$, como mostra a Figura 18 onde existem 3 raízes $g(x) = y$. Note que o dx_2 da figura é negativo por que $\frac{dg}{dx}$ é negativa nessa região, enquanto dx_1 e dx_3 são positivos.

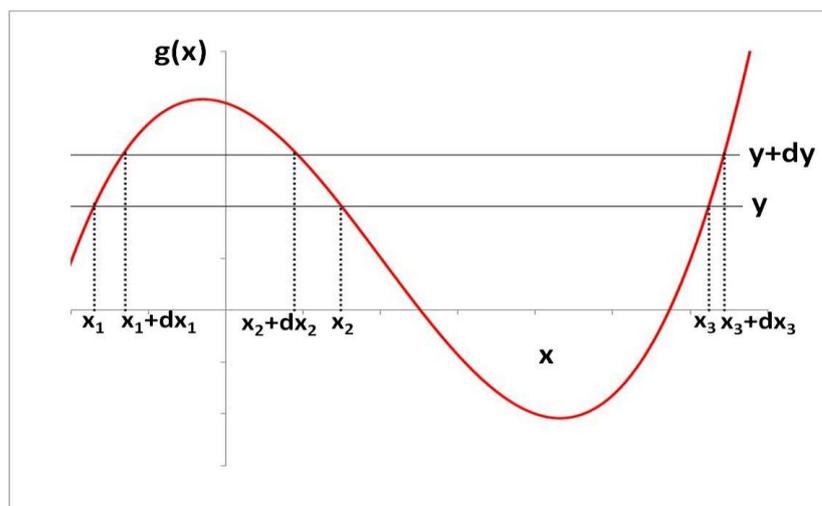


Figura 18. Três regiões em que $y < g(x) \leq y + \delta y$, definindo x_1 , x_2 e x_3 . Nas regiões 1 e 3 $g'(x)$ é positiva, logo dx_1 e dx_3 também são positivos. Já na região 2 $g'(x)$ é negativa então dx_2 é negativo

Note que $dy = g'(x)dx$, então $dx = \frac{1}{g'(x)}dy$ será negativo onde $g'(x) < 0$. Vamos separar as raízes com $g'(x) > 0$ e denotá-las pelo índice i , das raízes com $g'(x) < 0$ denotadas pelo índice j . Nesse caso

$$P(y < y_v \leq y + \delta y) = \sum_i P(x_i < x_v \leq x_i + dx_i) + \sum_j P(x_j + dx_j < x_v \leq x_j)$$

com $dx_i > 0$ e $dx_j < 0$. Usando as propriedades da fdp temos que:

$$P(y < y_v \leq y + \delta y) = \sum_i fdp(x_i)dx_i - \sum_j fdp(x_j)dx_j = \sum_i fdp(x_i)\frac{dy}{g'(x_i)} - \sum_j fdp(x_j)\frac{dy}{g'(x_j)}$$

$$P(y < y_v \leq y + \delta y) = \sum_i fdp(x_i)\frac{dy}{g'(x_i)} + \sum_j fdp(x_j)\frac{dy}{[-g'(x_j)]} = \sum_k fdp(x_k)\frac{dy}{|g'(x_k)|}$$

Onde a somatória é feita em k tal que $g(x_k) = y$, independente do sinal de $g'(x)$. O módulo dá conta dos casos em que $g'(x)$ é positiva ou negativa.

Com isso temos, no final:

$$fdp(y) = \sum_k \frac{fdp[g^{-1}(y)]}{|g'[g^{-1}(y)]|}$$

2.6. Operação ESPERANÇA de uma v.a.:

A operação esperança de uma v.a. é definida pela integral:

$$E[x_v] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Note que o caso discreto sai automaticamente da utilização das funções delta de Dirac, pois:

$$E[x_v] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_i p_i \delta(x - x_i) dx = \sum_i p_i \int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x - x_i) dx = \sum_i p_i x_i$$

Já a esperança de uma $g(x)$, onde x é uma v.a., é dada por:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$$

2.7. Regra de simetrias do integrando

Uma função simétrica, ou função par, possui a propriedade: $f_+(-x) = f_+(x)$. Exemplo são as funções de potências pares $f_+(x) = x^{2n}$ e função coseno $f_+(x) = \cos x$. Já uma função anti-simétrica, ou função ímpar, troca essa propriedade para $f_-(-x) = -f_-(x)$. Exemplo são as funções de potências ímpares $f_-(x) = x^{2n+1}$ e função seno $f_-(x) = \sin x$. A regra de paridade da multiplicação de funções é a mesma regra de multiplicação dos sinais, $++=+$, $+--=-$, $-+=-$ e $---=+$, ou seja par com par e ímpar com ímpar são pares e par com ímpar ou ímpar com par são ímpares. Existem funções que não são nem pares nem ímpares, como, por exemplo, $f(x) = x + x^2$, mas toda função pode ser decomposta em uma função simétrica e outra anti-simétrica:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$
 com $[f(x) + f(-x)]$ sendo uma função par e $[f(x) - f(-x)]$ uma função ímpar.

A grande vantagem de analisar a simetria das funções é que elas nos permitem perceber rapidamente integrais nulas quando integradas em um intervalo simétrico $\int_{-a}^{+a} f(x) dx$. Se f é ímpar então $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$ e se f é par então $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^{+a} f(x) dx$. Essas propriedades serão extensivamente utilizadas nesse trabalho.

A prova é simples. Quebrar o intervalo de integração entre os números negativos e positivos $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^{+a} f(x) dx$. Na primeira integral mudar a variável para $u = -x$, $dx = -du$, quando $x = -a$, $u = a$ e na segunda para $u = x$ deixando tudo igual. Nesse caso:

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = -\int_a^0 f(-u) du + \int_0^{+a} f(u) du$$

Trocar os limites de integração da primeira integral utilizando o sinal negativo para obter o resultado:

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = \int_0^{+a} [f(u) + f(-u)] du$$

Agora se f é ímpar então $f(u) + f(-u) = 0$ e $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$. Por outro lado se f é par então $f(u) + f(-u) = 2f(u)$ e $\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^{+a} f(x) dx$.

2.8. Momentos

2.8.1. Momentos de ordem n

O momento de ordem n, se existir, é definido por:

$$M_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$$

A condição para a existência do momento é que a integral acima exista. Se, para valores muito grandes de $|x|$ - o comportamento assintótico de $f(x)$ para $x \rightarrow \pm\infty$ - $f(x)$ cai com uma lei de potência do tipo $f(x) \propto \frac{1}{x^m}$, então só existirão momentos até a ordem

$n = m - 2$. Quando $n = m - 1$, $M_n \propto \int_{x_0}^{+\infty} \frac{x^n}{x^m} dx = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x} dx \propto \ln(x)$, que diverge. Algumas

propriedades dos momentos são:

1. $M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

2. $M_1 = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

2.8.2. Relação entre os Momentos Centrados e não centrados

Podemos usar binômio de Newton $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$ para encontrar a

relação entre os momentos centrados e não centrados.

$$m_n = E[(x - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n f(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^{n-k} \mu^{n-k} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \text{ logo}$$

$$m_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mu^{n-k} M_k$$

Aplicando essa regra podemos mostrar que:

1. $m_2 = M_2 - \mu^2$

2. $m_3 = M_3 - 3\mu M_2 + 2\mu^3$

3. $m_4 = M_4 - 4\mu M_3 + 6\mu^2 M_2 - 3\mu^4$

O caminho inverso de obtenção dos momentos não centrados em termos dos centrados pode ser feito da seguinte forma:

$$M_n = E[x^n] = E[(x - \mu + \mu)^n] = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \mu^{n-k} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \text{ logo:}$$

$$M_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{n-k} m_k$$

Aplicando essa regra podemos mostrar que:

1. $M_2 = \mu^2 + \sigma^2$
2. $M_3 = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 + m_3$
3. $M_4 = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 4\mu m_3 + m_4$

2.9. Série de Taylor

A série de Taylor de uma função infinitamente diferenciável é dada por⁵:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Um caso particular da série de Taylor é a série de Taylor-Maclaurin, para a qual $x_0 = 0$ e que pode ser escrita na forma condensada como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Podemos aplicar essa expansão para o caso particular da função exponencial

$f(x) = e^x$, que é obtida facilmente notando que $\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x$ e que, portanto, $f^{(k)}(0) = 1$.

Nesse caso:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

2.9.1. O Truque do Logaritmo

O truque do logaritmo é muito útil em casos em que a convergência da série de Taylor é problemática. Suponha o caso da função $f(y) = (1+y)^{-n}$, com $y \ll 1$ e $n \gg 1$. Melhor dizendo, com y tendendo a 0 e n tendendo a infinito. Se fizermos a expansão de Taylor-McLaurin para esta função, obteremos:

$$f(y) = 1 - ny + \frac{n(n+1)y^2}{2} - \frac{n(n+1)(n+2)y^3}{6} + \dots$$

⁵ Ver Apêndice 1

Cuja convergência depende se o produto ny é maior ou menor do que 1. Em lugar de fazer a expansão direta da função vamos expandir seu logaritmo na forma:

$$\text{Ln}(1+y)^{-n} = -n \text{Ln}(1+y) = -n\left\{y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\right\}$$

Agora a função não apresenta problemas de convergência para $|y| < 1$. A função $f(y) = (1+y)^{-n}$ pode então ser reescrita como $f(y) = e^{-n(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots)}$. O truque do logaritmo significa, portanto, expandir em série de Taylor não a função $f(x)$ diretamente, mas o

$$\ln f(x) = \sum_k c_k x^k \text{ e escrever a função como } f(x) = e^{\sum_k c_k x^k}.$$

2.10. Função Geradora de Momentos (FGM)

Considere a seguinte função da variável:

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Podemos usar a expansão em série de Taylor: $e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$, para obter:

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!} t^n. \text{ Se compararmos com a série de Taylor da própria } M(t),$$

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^{(n)}(0)}{n!} t^n, \text{ vemos que } M_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} [M(t)] \right|_{t=0}. \text{ Por isso a função é chamada de}$$

geradora dos momentos. Para gerar os momentos centrados devemos multiplicar a função

geradora dos momentos por $e^{-\mu t}$, uma vez que $e^{-\mu t} M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x-\mu)} f(x) dx$, logo

$$e^{-\mu t} M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} t^n. \text{ Daí se percebe que } m_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} [e^{-\mu t} M(t)] \right|_{t=0}.$$

2.11. Função Característica

A grande dificuldade da função geradora dos momentos é a convergência da

integral $M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$ por conta do e^{tx} . Se usarmos e^{itx} , entretanto, não teremos

mais tantos problemas de convergência uma vez que $|e^{itx}| = \sqrt{e^{itx} e^{-itx}} = 1$ para qualquer x e t .

Assim a função característica é definida por:

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Se a função geradora dos momentos existe então $\varphi(t) = M(it)$. Note que $\varphi(0) = 1$.

Além disso, podemos mostrar que $|\varphi(t)| \leq 1$, pois

$$|\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

A relação com os momentos só precisa ser ligeiramente modificada, uma vez que $e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n x^n}{n!}$, levando a:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n M_n}{n!} t^n.$$

Se compararmos com a série de Taylor $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n$ veremos que $M_n = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n} [\varphi(t)] \Big|_{t=0}$. Novamente, os momentos centrados

podem ser obtidos multiplicando a função característica por $e^{-i\mu t}$, obtendo

$$m_n = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n} [e^{-i\mu t} \varphi(t)] \Big|_{t=0}.$$

2.11.1.1. Propriedades das funções características:

1. $\varphi(0) = 1$, já demonstrada.

2. $|\varphi(t)| \leq 1$, pois $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 1$.

3. $\varphi(-t) = \varphi^*(t)$ onde $\varphi^*(t)$ é o complexo conjugado da $\varphi(t)$. Prova:

$$\varphi(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x) dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \right]^* = \varphi^*(t), \text{ pois } f(x) \text{ é real.}$$

4. Sejam $a_1 > 0$ e $a_2 > 0$ tais que $a_1 + a_2 = 1$, e sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$ duas FDP's, então

$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ também é uma FDP, e, conseqüentemente

$\varphi(t) = a_1 \varphi_1(t) + a_2 \varphi_2(t)$ também é uma função característica. Basta provar que

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ para provar que $f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ é uma FDP. Mas isso é

imediato, uma vez que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = a_1 + a_2 = 1$. Essa

propriedade pode ser estendida para a combinação linear de um número n de

funções características afirmando-se que $\varphi(t) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t)$ com $\sum_{j=1}^n a_j = 1$ e $a_j \geq 0 \quad \forall j$ é também uma função característica.

5. O produto de duas funções características também é uma função característica. Sai diretamente do teorema da convolução.
6. $\text{Re}[\varphi(t)]$ e $|\varphi(t)|^2 = \varphi^*(t)\varphi(t)$ são também funções características. Se $\varphi(t)$ é uma função característica então $\varphi^*(t) = \varphi(-t)$ também é função característica, logo, $\text{Re}[\varphi(t)] = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\varphi^*(t)$ e $|\varphi(t)|^2 = \varphi^*(t)\varphi(t)$ também são funções características.
7. $\varphi(t)$ é absolutamente contínua, ou seja, $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| = 0$. A prova dessa propriedade é um pouco mais elaborada e será apresentada no apêndice 2.

2.12. Transformada de Fourier:

A função característica, além de ser mais poderosa do que a função geradora dos momentos, é obtida através de uma operação desenvolvida por Fourier entre 1807 e 1822, hoje chamada de Transformada de Fourier. Como a transformada de Fourier é utilizada na matemática, física, engenharias e no processamento de sinais e imagens, existe uma vasta literatura sobre a mesma, com todas as suas propriedades catalogadas e tabelas de pares de funções relacionadas por essa transformação. O trabalho de Fourier estimulou o desenvolvimento nessa área criando um campo da matemática dedicado às transformadas em geral. Além da transformada de Fourier existem transformadas de Laplace, de Hankel, de Cauchy, de Hadamard (utilizada na obtenção de imagens por tomografia), etc. Transformadas integrais são relações entre duas funções através de uma equação integral

do tipo $\varphi(t) = \int_{x_1}^{x_2} K(x,t) f(x) dx$, onde $K(x,t)$ é chamado de Kernel da transformada. Note que

após a integração em x a função resultante só depende de t . A transformada de Fourier é definida por:

$$\varphi(t) = FT[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x) dx, \text{ em que o Kernel é dado por } K(x,t) = e^{ixt}.$$

Uma transformada bem semelhante é a transformada de Laplace, $\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(x) dx$, em que o Kernel é dado por $K(x,t) = e^{-xt}$. Vale notar que as funções geradoras dos momentos são transformadas de Laplace de dois lados. A associação entre $\varphi(t)$ e $f(x)$ é biunívoca de modo que ela admite transformada inversa dada por:

$$f(x) = FT^{-1}[\varphi(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt$$

O teorema integral de Fourier, apresentado em 1822, afirmava que:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix't} f(x') dx' dt$$

Que pode ser demonstrado utilizando uma função delta de Dirac especial dada por:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x_0)t} dt$$

Essas propriedades estão demonstradas no apêndice 3 utilizando cálculo de resíduos. O fator de $1/2\pi$ é necessário para retornar à função original, mas ele pode ser incorporado de formas diferentes. Alguns autores preferem uma definição mais simétrica da transformada de Fourier e utilizam:

$$FT[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x) dx \quad \text{e} \quad FT^{-1}[\varphi(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt$$

O fator $1/\sqrt{2\pi}$ aparece ao multiplicar a transformada direta pela inversa. Não se usa essa definição na teoria da probabilidade porque ela destruiria a propriedade $\varphi(0) = 1$, substituindo-a por $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$. Essa é uma propriedade muito importante porque $\varphi^n(0) = 1$ por maior que seja o valor de n . Se $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ teríamos que $\varphi^n(0) \rightarrow 0$, pois $1/\sqrt{2\pi} < 1$.

Uma propriedade muito importante das funções características na teoria da probabilidade vem do fato de que a função característica da adição de duas v.a.s independentes é dada pela multiplicação das funções características individuais. Quando duas variáveis são independentes então $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$ e a esperança do produto de qualquer função $g(x)h(y)$, dada por:

$$E[g(x)h(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) g(x) h(y) dx dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) g(x) dx \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y) h(y) dy \right] \text{ vale}$$

$E[g(x)h(y)] = E[g(x)]E[h(y)]$. Isso significa que:

$$E[e^{i(x+y)t}] = E[e^{ixt}] E[e^{iyt}] = \varphi_x(t) \varphi_y(t)$$

Ou seja, a função característica da adição de variáveis aleatórias independentes é o produto das funções características. Esse resultado pode ser generalizado, para: se $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, onde x_i são v.a.s independentes, então $\varphi_z(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)\dots\varphi_n(t)$.

2.13. Cumulantes

Os cumulantes terão uma grande importância no desenvolvimento desse trabalho e na expansão de Edgeworth. Seguindo a estratégia do truque do logaritmo, a idéia é encontrar a expansão em série do logaritmo de $E(e^{ixt})$. Assim a função geradora dos cumulantes é dada por:

$$\ln[E(e^{ixt})] = \ln\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x) dx\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k c_k}{k!}.$$

Comparando com a série de Taylor vemos que $c_k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} \ln[\varphi(t)] \Big|_{t=0}$. É diferente

do $M_k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} [\varphi(t)] \Big|_{t=0} = (-i)^k \varphi^{(k)}(0)$ por causa do logaritmo. Podemos extrair a relação entre os cumulantes e os momentos derivando o logaritmo pela regra da cadeia e lembrando que $\varphi(0) = 1$. As relações obtidas, demonstradas no apêndice 4, são:

1. $c_0 = 0$
2. $c_1 = \mu$
3. $c_2 = \sigma^2$
4. $c_3 = m_3$
5. $c_4 = m_4 - 3\sigma^4$

2.13.1. Assimetria e Curtose

A divisão $\frac{c_k}{\sigma^k}$ gera uma grandeza adimensional. Até $k = 2$ já caracterizamos uma distribuição pela esperança e a variância. Para $k = 3$ definimos a assimetria ou obliquidade, que mede o grau de assimetria da distribuição, através de $\alpha_3 = \frac{m_3}{\sigma^3}$, dada pelo cumulante normalizado de ordem 3. Se a distribuição é simétrica, $\alpha_3 = 0$. Se $\alpha_3 > 0$ dizemos que a distribuição possui uma cauda para a direita, e se $\alpha_3 < 0$ tem uma cauda para a esquerda.

Note que $m_3 = \int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu)^3 f(x) dx + \int_{\mu}^{+\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx$ e que a integral da esquerda é sempre

negativa enquanto a da direita é sempre positiva. O lado que possui cauda mais longa (em uma distribuição unimodal) define o sinal da skewness. A Figura 19 mostra exemplo dos dois casos.

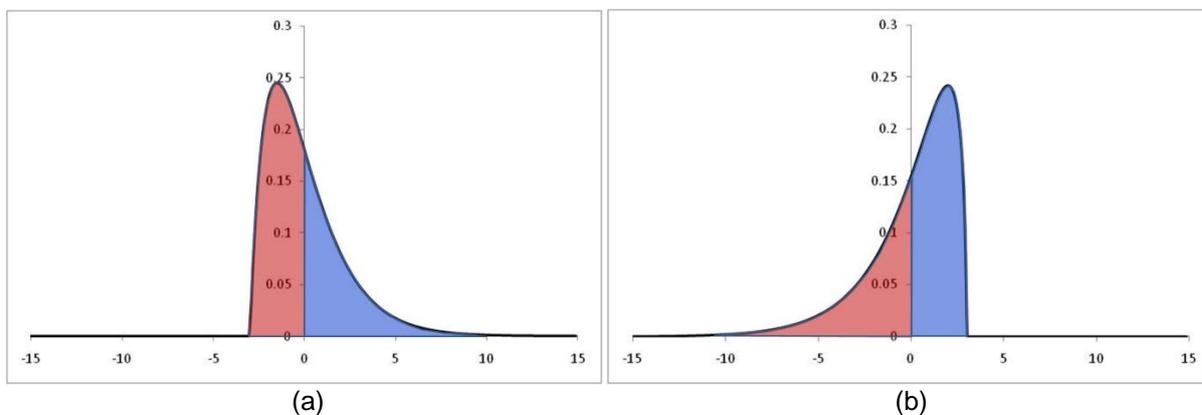


Figura 19. Distribuição com cauda para a direita (a) e distribuição com cauda para a esquerda (b)

Outra grandeza que caracteriza a distribuição é a CURTOSE (*kurtosis*), dada pelo quarto cumulante normalizado, $k = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$. Para comparar duas distribuições é preciso que elas tenham o mesmo σ e m_4 diferentes. Vamos examinar duas distribuições simétricas com curtoses diferentes. A área sobre a curva tem que ser 1, logo iguais. Além disso, queremos o mesmo σ e que f_1 esteja mais concentrada em μ do que f_2 . Para manter a área e σ iguais é preciso, então, que f_1 se espalhe mais do que f_2 para x longe de μ . Com isso ela ganha mais m_4 , pois $(x - \mu)^4 f(x)$ é maior para x mais longe de μ , e a curtose de f_1 será maior do que a curtose de f_2 . Se $k > 0$ a distribuição é chamada de LEPTOCÚRTICA, se $k = 0$ de MESOCÚRTICA e se $k < 0$ de PLATICÚRTICA. Lepto, do grego, significa fino, delgado, plati significa achatado e meso significa médio, no meio.

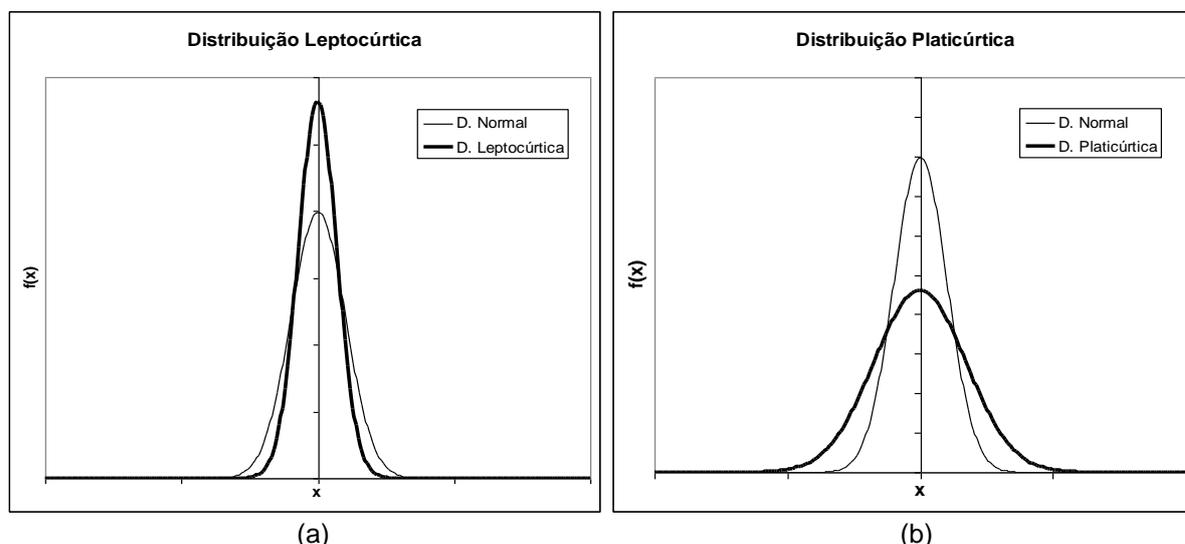


Figura 20. Uma distribuição leptocúrtica, com $k < 0$ (a) e a outra platicúrtica, com $k > 0$ (b)

2.13.2. Momentos Centrados de ordem n

O momento centrado de ordem n é definido por:

$$m_n = E[(x - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

Os momentos centrados possuem as propriedades:

1. $m_0 = 1$, pois $m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
2. $m_1 = 0$, pois $m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$
3. $m_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$, é chamada de variância.
4. Se $f(x)$ é simétrica em relação à sua esperança, ou seja, $f(\mu + x) = f(\mu - x)$, então todos os momentos centrados ímpares serão nulos por simetria.

2.14. Cumulantes, o truque do logaritmo e o Teorema Central do Limite:

Vamos tomar uma variável aleatória $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ dada pela adição de n v.a. independentes no limite $n \rightarrow \infty$. Sabemos que $\varphi_z(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_n(t)$. Note que se as v.a.s fossem, além de independentes, idênticas [iid], teríamos $\varphi_z(t) = [\varphi_1(t)]^n$, um caso semelhante ao utilizado no truque do logaritmo. Também sabemos que $\varphi_i(0) = 1$ e que $|\varphi_i(t)| \leq 1$. Um número menor do que 1 elevado à uma potência muito alta tende a zero. Mas não em $t=0$ porque $1^n = 1 \quad \forall n$, o que significa que a função $\varphi_z(t) = [\varphi_1(t)]^n$ se torna concentrada em torno de $t=0$, caindo à zero para fora desse intervalo. Com isso podemos fazer uma expansão em série de Taylor-McLaurin da função característica, mas usando o truque do logaritmo, $\ln[\varphi_z(t)] = n \ln[\varphi_1(t)]$. Mas essa é exatamente a expansão dos

cumulantes $\ln \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k c_k}{k!} t^k$. Retornando então obtemos $\varphi_z(t) = e^{n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k c_k}{k!}}$. A palavra

cumulante vem do fato de que se $\varphi_z(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_n(t)$ então $\ln \varphi_z(t) = \ln \varphi_1(t) + \ln \varphi_2(t) + \dots + \ln \varphi_n(t)$, logo, $c_{k,z} = c_{k,1} + c_{k,2} + \dots + c_{k,n}$, ou seja, os cumulantes de v.a.s independentes se somam, se acumulam. Se as v.a.s não são idênticas a expansão

em Taylor agora será dada por $\varphi_z(t) = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{j=0}^n c_{k,j}}$.

Guardando termos até segunda ordem nessa expansão temos:

$\varphi_z(t) \cong e^{it \sum_{j=0}^n c_{1,j} - \frac{t^2}{2} \sum_{j=0}^n c_{2,j}}$. Mas $c_{1j} = \mu_j$ e $c_{2j} = \sigma_j^2$, logo $\varphi_z(t) = e^{it \sum_{j=0}^n \mu_j - \frac{t^2}{2} \sum_{j=0}^n \sigma_j^2}$ que é a função característica de uma normal com $\mu = \sum_j \mu_j$ e $\sigma^2 = \sum_j \sigma_j^2$. No caso de variáveis

independentes e idênticas [i.i.d.] então $\mu = n\mu_1$ e $\sigma^2 = n\sigma_1^2$, e a distribuição tende para uma normal com $\mu = n\mu_1$ e $\sigma^2 = n\sigma_1^2$. Esse é o Teorema Central do Limite, o qual afirma que uma v.a. dada pela adição de muitas v.a.s independentes com esperança e variância finitas tende à distribuição NORMAL.

2.15. Distribuições

No capítulo 3 precisaremos de alguns resultados com relação às distribuições binomial, normal e log-normal, utilizadas para demonstrar o modelo de B&S. Após a introdução dos conceitos de estatística faremos um exame mais detalhado das propriedades de cada distribuição.

2.15.1. Distribuição de Bernoulli

Ao jogar uma moeda, só temos dois eventos possíveis, cara ou coroa. A v.a. será definida como cara = 1 e coroa = 0. Qualquer jogo com apenas duas respostas, sim = 1 e não = 0, segue uma distribuição de Bernoulli. Se a probabilidade de SIM é p , a de Não será $q = 1 - p$. A CDF vale $F(x) = qH(x) + pH(x-1)$ e a FDP é dada por $f(x) = q\delta(x) + p\delta(x-1)$.

2.15.1.1. Momentos da Distribuição de Bernoulli

A função geradora dos momentos e a função característica são dadas por:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [q\delta(x) + p\delta(x-1)] e^{xt} dx = q + pe^t \text{ e } \varphi(t) = q + pe^{it}$$

Para os momentos, temos que $M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [q\delta(x) + p\delta(x-1)] x^k dx = q0^k + p1^k$, logo,

$$M_k = p \quad \forall k, \text{ e } \mu = p.$$

Os momentos centrados serão dados por $e^{-\mu t} M(t) = qe^{-pt} + pe^{qt}$.

Agora $m_k = \frac{d^k}{dt^k} [qe^{-pt} + pe^{qt}] = q(-p)^k e^{-pt} + pq^k e^{qt} \Big|_{t=0}$. Resolvendo a integral temos

que $m_k = pq^k + (-1)^k qp^k$, ou escrito de outra forma, $m_k = pq[(1-p)^{k-1} - (-p)^{k-1}]$. Dessa forma

obtemos: $m_2 = \sigma^2 = pq$, $m_3 = pq[q-p]$ e $m_4 = pq(1-3pq) = \sigma^2(1-3\sigma^2)$. Usando as relações entre os cumulantes e os momentos centrados temos: $c_1 = p$; $c_2 = pq$; $c_3 = pq(q-p)$ e $c_4 = pq[1-6pq]$.

2.15.2. Distribuição Binomial

Vamos jogar a moeda n vezes de forma independente e criar a v.a. $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ onde as v.a. x_k são iid. Nesse caso usamos o teorema da convolução para obter a função característica: $\varphi_{Bin}(t) = \varphi_{Bern}^n(t) = [q + pe^{it}]^n$. Sabendo a φ queremos a $f(z)$ dada por $f(z) = FT^{-1}[\varphi(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [q + pe^{it}]^n e^{-itz} dt$. Expandindo em binômio de Newton temos:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-z)t} dt \right] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \delta(z-k)$$

Aqui vale a acumulação dos cumulantes $c_{k Bin} = n c_{k Bern}$, então:

1. $c_1 = \mu = np$
2. $c_2 = \sigma^2 = npq$
3. $c_3 = npq(q-p)$
4. $c_4 = npq[1-6pq]$

2.15.3. Distribuição de Poisson:

Essa distribuição é um caso limite da binomial quando $n \rightarrow \infty$, mas $p \rightarrow 0$ de tal forma que o produto $np = \lambda$ é constante. Agora $\varphi_{Bin}(t) = [1 - p + pe^{it}]^n = \left[1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n} \right]^n$.

Nesse ponto usamos o fato de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x}{n} \right]^n = e^x$ para encontrar a função característica da distribuição de Poisson imediatamente:

$$\varphi_{Poisson}(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

Para obter a fdp usamos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(e^{it}-1)} e^{-itz} dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} e^{-itz} dt \right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta(z-k)$$

$$f_{Poisson}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \delta(z-k).$$

2.15.3.1. Cumulantes e momentos centrados

$$\ln \varphi_{Poisson}(t) = \ln \left[e^{\lambda(e^{it}-1)} \right] = \lambda(e^{it}-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k \lambda t^k}{k!}, \text{ portanto todos os cumulantes valem } \lambda$$

. Agora usamos as relações entre os cumulantes e os momentos centrados para obter os momentos:

1. $\mu = \lambda$
2. $\sigma^2 = \lambda$
3. $m_3 = \lambda$
4. $m_4 = \lambda + 3\lambda^2$

A skewness será sempre maior que zero, $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0$, skewed to the right, e a

curtose $k = \frac{1}{\lambda}$, sempre leptocúrtica. Se $\lambda \rightarrow \infty$ então a skewness e curtose tendem a zero.

2.15.4. Distribuição Normal:

Vamos fazer o limite de n tendendo a infinito na distribuição binomial e usar o truque do logaritmo. Nesse caso:

$$\ln \varphi_{Bin}(t) = \varphi_{Bern}^n(t) = n \ln \left[q + p + ipt - p \frac{t^2}{2} + \dots \right] = n \ln \left[1 + ipt - p \frac{t^2}{2} + \dots \right]$$

Mas já sabemos que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, portanto fazendo

$x = ipt - p \frac{t^2}{2}$ e truncando a série na ordem 2 temos:

$$\ln \varphi_{Bin}(t) = n \left[ipt - p \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \left(ipt - p \frac{t^2}{2} \right)^2 \right] = n \left[ipt - p \frac{t^2}{2} + p^2 \frac{t^2}{2} + \dots \right] = n \left[ipt - p(1-p) \frac{t^2}{2} + \dots \right]$$

Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln \varphi_{Bin}(t)] = inpt - \frac{npqt^2}{2} + \dots$ e essa é a distribuição normal, cuja função

característica vale:

$$\varphi_{Normal}(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Note que, nesse caso, só existem dois cumulantes, pois $\ln[\varphi_{Normal}(t)] = i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$,

$c_1 = \mu$ e $c_2 = \sigma^2$, todos os outros são nulos. Os momentos centrados são dados pela função geradora:

$$e^{-i\mu t} e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sigma^{2k} (2k)!}{2^k k!} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

Percebe-se que não existem momentos ímpares e que os pares valem

$$\sum_{k=0}^{\infty} (i)^{2k} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!}. \text{ Comparando extraímos } m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}. \text{ Podemos}$$

reescrever esse resultado em termos dos fatoriais duplos $z!! = z(z-2)(z-4)\dots$. O termo $2^k k!$ pode ser reescrito como $(2k)!!^6$ e $(2k)! = (2k)!!(2k-1)!!^7$. Assim obtemos a expressão mais simples para os momentos centrados:

$$m_{2k} = (2k-1)!! \sigma^{2k}$$

Então vemos que:

1. $m_2 = \sigma^2$
2. $m_4 = (3)!! \sigma^4 = 3\sigma^4$
3. $m_6 = (5)!! \sigma^6 = 15\sigma^6$, e assim por diante.

Falta a função densidade de probabilidade dada por: $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-itz} dt$. O

truque aqui é completar quadrado no expoente⁸ para obter:

⁶ $(2k)!! = (2k)(2k-2)(2k-4)\dots 2 = 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times k(k-1)(k-2)\dots 1 = 2^k k!$

⁷ $(2k)! = (2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)\dots 2 \times 1 = [(2k)(2k-2)\dots 2][(2k-1)(2k-3)\dots 1] = (2k)!!(2k-1)!!$

⁸ $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + i\mu t - itz} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} - it(z-\mu)} = e^{-\frac{\sigma^2}{2} \left[t^2 + 2i \frac{(z-\mu)}{\sigma^2} t - \frac{(z-\mu)^2}{\sigma^4} + \frac{(z-\mu)^2}{\sigma^4} \right]} = e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2}{2} \left(t + i \frac{z-\mu}{\sigma^2} \right)^2}$

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2} \left(t + i \frac{z-\mu}{\sigma^2}\right)^2} d\left(\frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

Agora usamos o resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ demonstrado no apêndice 5 para obter a

função densidade de probabilidade da distribuição Normal:

$$N(x; \mu, \sigma) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

A Normal Padrão tem esperança nula e variância unitária dada por $NP(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

A Normal Padrão cumulativa é definida como $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Note que é sempre

possível escrever o resultado de uma normal cumulativa em termos da $\Phi(x)$ por uma mudança de variável. Se queremos a função distribuição de probabilidade cumulativa de

uma normal com μ e σ , ou seja: $F_{Normal}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x}{\sigma}\right)$; a

mudança de variável $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ nos leva a $F_{Normal}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Por isso

as tabelas da normal são sempre feitas para a normal padrão usando como argumento o

desvio da esperança medido em desvios padrão $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

2.15.5. Distribuição Log-Normal.

A distribuição Log-Normal é obtida da Normal através da mudança de variável

$y = e^x$. Usando a regra para mudança de variável é dada por $f(y) = \sum \frac{f[g^{-1}(y)]}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$, com a

somatória sobre todos os x 's possíveis para as raízes da equação $g(x) = y$, ou, $x = g^{-1}(y)$.

Neste caso a função é biunívoca e só existe uma raiz dada por $x = \ln y$, $y \in [0, +\infty)$. Vamos

precisar da derivada $\frac{dy}{dx} = e^x = y$. Logo:

$$LogN[y; \mu, \sigma^2] = \frac{e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma y}$$

A log-Normal como uma aproximação da normal:

$$\text{Vamos reescrever a log-normal como } \text{Log}N = \frac{e^{-\frac{(\ln y - \ln y_o)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma y} = \frac{e^{-\frac{[\ln(\frac{y}{y_o})]^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma y}, \quad y_o > 0, \text{ e}$$

ver o que acontece para $y = y_o + \delta y$ com $|\delta y| \ll y_o$.

$$\text{Neste caso } \ln y = \ln(y_o + \delta y) = \ln\left[y_o \left(1 + \frac{\delta y}{y_o}\right)\right] = \ln y_o + \ln\left(1 + \frac{\delta y}{y_o}\right) \text{ e o termo no}$$

expoente é aproximado por $(\ln y - \ln y_o) = \ln\left(1 + \frac{\delta y}{y_o}\right) \cong \frac{\delta y}{y_o}$. No denominador simplesmente

$$\text{fazemos } y = y_o \text{ e vemos que } \text{Log}N = \frac{e^{-\frac{\delta y^2}{2\sigma^2 y_o^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma y_o} \text{ é uma normal da variável } \frac{\delta y}{y_o}. \text{ Se fizermos}$$

$\sigma_{\log N} = \frac{\sigma_N}{y_o}$ teremos duas curvas muito semelhantes no caso em que $\sigma_N \ll \mu$. Note que se

$y \rightarrow 0$ o $\ln y \rightarrow -\infty$ anulando a função. Grandes diferenças, portanto, entre a normal e a log-normal ocorrerão quando a probabilidade de valores de x negativos na normal for grande. A

Figura 21 mostra esse comportamento:

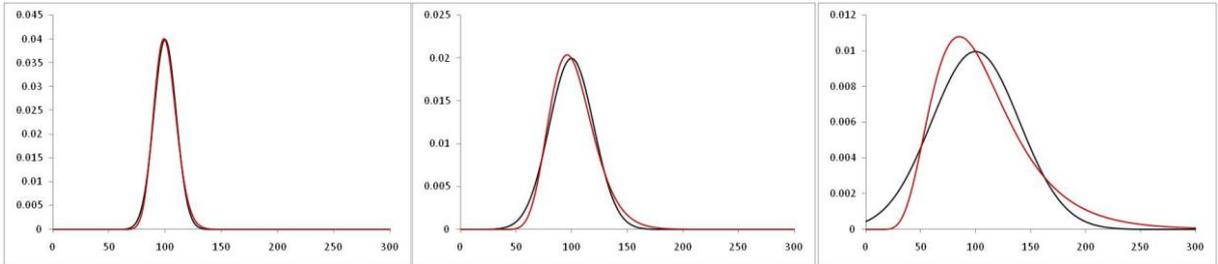


Figura 21. Normal com $x_o = y_o = 100$. (a) $\sigma_N = 10$ e $\sigma_{\log N} = 0,1$; (b) $\sigma_N = 20$ e $\sigma_{\log N} = 0,2$; (c) $\sigma_N = 40$ e $\sigma_{\log N} = 0,4$.

Tanto a função geradora dos momentos quanto a função característica apresentam problemas de convergência, mas podemos calcular os momentos da Log-Normal na forma

apresentada no Apêndice 6. O resultado final é $M_n = e^{\frac{\mu+n^2\sigma^2}{2}}$. Em particular temos $M_0 = 1$;

$$M_1 = e^{\frac{\mu+\sigma^2}{2}}; \quad M_2 = e^{2\mu+2\sigma^2}; \quad M_3 = e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} \text{ e } M_4 = e^{4\mu+8\sigma^2}.$$

Usando as relações entre momentos centrados e não centrados obtemos: a variância é dada por $m_2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ e o desvio

padrão por $\delta = e^{\frac{\mu+\sigma^2}{2}} \sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)}$. O momento centrado de ordem 3 vale

$$m_3 = e^{\frac{3\mu+\frac{3}{2}\sigma^2}{2}} [e^{\sigma^2} - 1]^2 [e^{\sigma^2} + 2] \text{ e a assimetria será dada por } \alpha_3 = \sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)} [e^{\sigma^2} + 2].$$

momento de ordem 4 é dado por $m_4 = e^{4\mu+2\sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]^2 [e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 3]$ e a curtose por $k = [e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 6]$. Como $1+2+3=6$ percebe-se que $k \geq 0$ sempre, com a igualdade valendo apenas se $\sigma^2 = 0$.

2.15.6. Distribuição Gama:

Função gama: Vamos calcular a seguinte integral: $I(z) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$. Fazendo por partes $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ com $u = t^z$; $du = z t^{z-1} dt$, $dv = e^{-t} dt$ e $v = -e^{-t}$, temos que:

$$I(z) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Mas $-t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0$, pelo t^z em $t=0$ e pelo e^{-t} em $t=\infty$, então $I(z) = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, o que nos leva à relação de recorrência $I(z) = z I(z-1)$. Aplicando essa relação várias vezes temos que:

$$I(z) = z I(z-1) = z(z-1) I(z-2) = \dots = z(z-1)(z-2) \dots 1 \times I(0) \quad z \in \mathbb{N}.$$

Pela definição de $I(z)$ temos que $I(0) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$, portanto, $I(z) = z!$.

A identidade acima foi mostrada apenas para z inteiro positivo, mas, dado que a integral existe, ela pode ser utilizada para generalizar a função fatorial para números reais e até mesmo complexos, com a única condição de que a integral convirja. Assim, $z! = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$.

Essa integral não apresenta problemas para $t \rightarrow \infty$ por conta do e^{-t} , mas pode apresentar problemas para $t \rightarrow 0$ se $z < 0$. A integral converge se $\int_0^x t^z dt$ existe. Para $z \neq -1$ a integral

$$\int_0^x t^z dt = \frac{t^{z+1}}{z+1} \Big|_{t=0}^x \quad \text{existe se } z+1 > 0, \text{ ou seja, } z > -1.$$

A função gama é definida por: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, com $\text{Re } z > 0$. A relação com a função fatorial é dada por $\Gamma(z) = (z-1)!$ e $z! = \Gamma(z+1)$. Formas equivalentes: vamos mudar

a variável para $t = x^2$ e $dt = 2x dx$ então $\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} (x^2)^{z-1} e^{-x^2} x dx$, finalmente

$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} x^{2z-1} e^{-x^2} dx$ e $z! = 2 \int_0^{\infty} x^{2z+1} e^{-x^2} dx$. Fazendo $z = \frac{1}{2}$ vemos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \text{ de onde extraímos que } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ e que } \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}.$$

A distribuição gama, cuja área sobre a curva vale 1⁹, é dada por:

$$f_{\text{gama}}(x - x_0; \alpha, \beta) = \frac{(x - x_0)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-x_0}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} H(x - x_0)$$

2.15.7. Distribuições que não obedecem ao Teorema Central do Limite.

Começaremos essa seção com a pergunta: será que existem distribuições que não obedecem ao Teorema Central do Limite e jamais convergem para a distribuição normal?

Vamos começar analisando um caso simples, a distribuição de Cauchy dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{q}{q^2 + x^2} \quad q > 0.$$

Note que $f(x) \geq 0$ e que para ser um fdp é preciso que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{q^2 + x^2} dx = 1. \text{ Fazendo a mudança de variável } x = q \tan \theta, \text{ temos que}$$

$$q^2 + x^2 = q^2 [1 + \tan^2 \theta] = q^2 \sec^2 \theta \quad \text{e} \quad dx = q \sec^2 \theta d\theta. \text{ Os limites são dados por}$$

$$\tan \theta = \pm \infty \rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ e a integral se transforma em } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{\pi} \pi = 1. \text{ Logo, trata-}$$

se de uma distribuição de probabilidades legítima. Note que a esperança de x é nula por

$$\text{paridade, pois } E[x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{q^2 + x^2} x dx = 0 \text{ pois } x \text{ é uma função ímpar e } \frac{1}{q^2 + x^2} \text{ é par. Nesse}$$

$$\text{caso a variância é o próprio momento de ordem 2 dada por: } V[x] = \frac{q}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{q^2 + x^2} dx. \text{ Mas essa}$$

integral não converge, pois $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{q^2 + x^2} = 1$ e a variância será infinita. Trata-se, portanto, de

uma distribuição com momento de ordem 2 infinito e o teorema central do limite fica sob suspeita, uma vez que foi demonstrado com a suposição de que a variância era finita. Para examinar esse aspecto precisamos da função característica dessa distribuição.

⁹ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{gama}}(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{+\infty} \left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x-x_0}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$

O cálculo de $\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{ixt}}{q^2 + x^2} dx = e^{-q|t|}$ pode ser feito por resíduos¹⁰, com cuidados

para fechar o circuito por cima e por baixo nos casos em que $t > 0$ e $t < 0$, que gera o módulo de t . Embora a operação direta seja complexa, envolvendo cálculo de resíduos, a volta é muito mais simples. Vamos analisar o problema inverso, que *fdp* corresponde à função característica $\varphi(t) = e^{-q|t|}$.

Aplicando a transformada de Fourier inversa temos que:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q|t|} e^{-ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(q-ix)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(q+ix)t} dt \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(q-ix)t}}{q-ix} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(q+ix)t}}{q+ix} \Big|_0^{+\infty} \right]$$

As exponenciais se anulam em $t = \pm\infty$ e ficamos com

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{q-ix} + \frac{1}{q+ix} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{q}{q^2 + x^2}. \text{ Então mostramos que } \varphi(t) = e^{-q|t|} \text{ é a função}$$

característica da distribuição de Cauchy, $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{q}{q^2 + x^2}$. Não podemos extrair os

momentos dessa função característica porque não podemos expandi-la em série de Taylor, uma vez que a função $|t|$ não é diferenciável em $t = 0$. Logo não há contradição com o fato de que a variância é infinita e a função característica existe. Agora suponha o caso de n variáveis i.i.d. que seguem a distribuição de Cauchy. A soma dessas v.a.s terá a função característica $\varphi(t) = [e^{-q|t|}]^n = e^{-nq|t|}$, que continua sendo a função característica de uma distribuição de Cauchy com o parâmetro nq em lugar de q , ou seja, a *fdp* dessa distribuição

será $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{nq}{n^2 q^2 + x^2}$. Então, por maior que seja o n , essa distribuição jamais convergirá

para uma distribuição normal. As Figura 22 (a) e (b) mostram as curvas das distribuições de Lévy simétricas para $q = 1/2$, $\alpha = 1,2$ e $\alpha = 0,8$ em comparação com distribuição normal padrão. Podemos notar que as caudas da distribuição são muito mais “pesadas” do que as caudas da normal.

¹⁰ Ver Apêndice 11

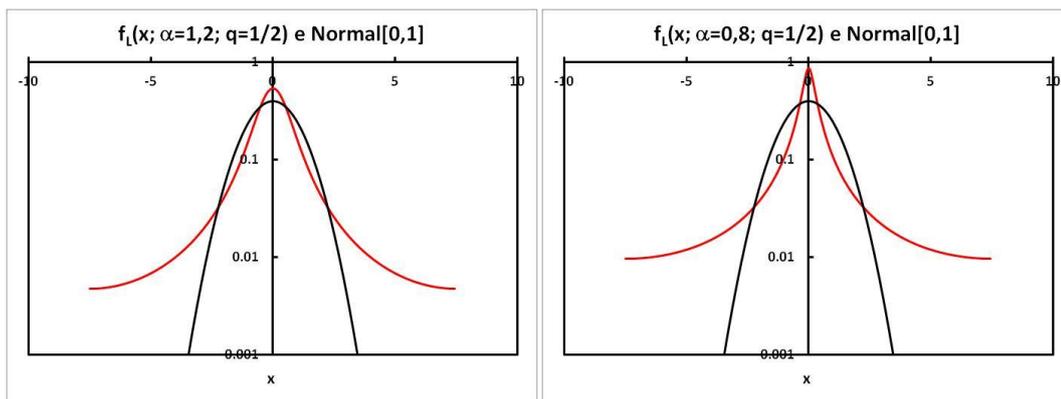


Figura 22. Distribuições de Lévy com diferentes parâmetros para α , comparadas à Normal Padrão, em escala logarítmica

Com isso respondemos com um sonoro SIM, existem distribuições que não obedecem ao teorema central do limite. A próxima questão é: qual a classe geral das distribuições que não obedecem ao teorema central do limite?

Note que nesse caso a convolução de uma distribuição de Cauchy gerou outra distribuição de Cauchy. Nos casos em que a convolução de uma distribuição com ela mesma gera uma distribuição da mesma classe que não converge para uma Normal, por mais que se adicionem v.a. i.i.d.s a distribuição jamais convergirá para a normal.

2.15.7.1. Distribuições Estáveis.

Tome a distribuição $F(x)$. A $F(x-a)$ é uma distribuição da mesma classe apenas transladada por a . Da mesma forma $F\left(\frac{x}{b}\right)$ também é da mesma classe com uma ampliação horizontal de b . O parâmetro b deve ser positivo para evitar uma reflexão que destruiria as propriedades $F(-\infty)=0$ e $F(+\infty)=1$. Nesse caso $F\left(\frac{x-a}{b}\right)$ também é uma distribuição da mesma classe, apenas transladada por a e ampliada por b . Se $F\left(\frac{x-a}{b}\right)$ é a nova distribuição, a nova *fdp* será dada por $f(x) = \frac{d}{dx} F\left(\frac{x-a}{b}\right) = \frac{1}{b} f\left(\frac{x-a}{b}\right)$, e a nova função característica será:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f\left(\frac{x-a}{b}\right) \frac{1}{b} dx$$

Fazendo $u = \frac{x-a}{b}$, $x = bu + a$ e $du = \frac{1}{b} dx$, dessa forma obtemos:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(bu+a)t} f(u) du = e^{iat} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iubt} f(u) du = e^{iat} \varphi(bt).$$

Então, se $f(x) \leftrightarrow \varphi(t)$, temos que $\frac{1}{b} f\left(\frac{x-a}{b}\right) \leftrightarrow e^{iat} \varphi(bt)$.

Quando chamamos uma distribuição de estável? Se x e y são independentes e seguem uma distribuição da mesma classe, e a v.a. $z = x + y$ também segue uma distribuição de mesma classe, afirmamos que essa é uma distribuição estável. Em termos da convolução isso significa que $F\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right) * F\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right) = F\left(\frac{x-a}{b}\right)$, ou, em termos das funções características, que $e^{ia_1 t} \varphi(b_1 t) e^{ia_2 t} \varphi(b_2 t) = e^{iat} \varphi(bt)$. Ou seja, sempre que $\varphi(b_1 t) \varphi(b_2 t) = e^{iat} \varphi(bt)$ temos uma distribuição estável.

Generalizando para mais de uma distribuição temos que as distribuições estáveis satisfazem a:

$$\varphi(b_1 t) \varphi(b_2 t) \cdots \varphi(b_n t) = e^{iat} \varphi(bt)$$

Por exemplo, vamos tomar a classe das distribuições com a função característica da forma $\varphi(t) = e^{-q|t|^\alpha}$, que pode ser expresso como $\ln \varphi(t) = -q|t|^\alpha$. Uma translação na distribuição aparece na função característica como $\varphi(t) = e^{iat - q|t|^\alpha}$, ou $\ln \varphi(t) = iat - q|t|^\alpha$. A soma de n v.a. i.i.d. dessa distribuição gera a função característica $\varphi_n(t) = e^{inat - nq|t|^\alpha}$, da mesma classe, logo se tratam de distribuições estáveis. Note que se $\alpha = 2$ caímos no caso da distribuição normal, que faz parte do conjunto das distribuições estáveis. No caso da normal, a função $|t|^2 = t^2$ é diferenciável em $t = 0$ e podemos sim extrair os momentos da função característica. No entanto, para $0 \leq \alpha < 2$, teremos as distribuições de Lévy simétricas, com os momentos de ordem 2 infinitos.

Para mostrar se os momentos divergem ou convergem precisamos analisar o comportamento assintótico da *fdp*, ou seja, $f(x \rightarrow \infty)$. Se caírem com uma lei de potência do tipo $\frac{1}{x^\beta}$ então os momentos para $k > \beta - 1$ divergem.

O comportamento assintótico dessas distribuições segue uma lei de potência do tipo¹¹ $f(x) \propto \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$. Note que $\alpha > 0$ é necessário para que a integral $\int f(x) dx$ exista. Os momentos de ordem serão finitos apenas se $\alpha > 2$. Se $\alpha > 2$ a variância é finita e a

¹¹ Ver (Marins, 2004).

distribuição segue o teorema central do limite, convergindo para a normal. Se $\alpha = 2$ caímos na normal diretamente. Se $0 < \alpha < 2$ a variância será infinita e a distribuição jamais converge para a distribuição normal. A distribuição será estável se $0 < \alpha \leq 2$ com a normal incluída no caso $\alpha = 2$. Pareto já havia percebido no final do século XIX que a distribuição de renda não segue uma normal, mas uma lei de potência com $\frac{1}{x^\alpha}$ e $0 < \alpha < 2$.

Existe uma forma geral para distribuições de Lévy não simétricas dada por:

$$\ln \varphi(t) = iat - q|t|^\alpha \left[1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(|t|, \alpha) \right]$$

$$\text{Com } 0 < \alpha \leq 2 \text{ e } \omega(|t|, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln|t| & \alpha = 1 \end{cases}$$

O parâmetro β define a assimetria da distribuição. Se for nulo a distribuição será simétrica com a função característica dada através da relação $\ln \varphi(t) = iat - q|t|^\alpha$. O parâmetro α define a curtose da distribuição. Se $\alpha = 2$, $\tan \pi = 0$ e $\ln \varphi(t) = iat - qt^2$, recuperamos a distribuição normal independente de β . O comportamento assintótico dessas distribuições é dado por:

$$F[x] \sim \begin{cases} C_- |x|^{-(1+\alpha)} & x \rightarrow -\infty \\ C_+ |x|^{-(1+\alpha)} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \text{ com } \beta = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}.$$

As distribuições estáveis fazem parte do conjunto das distribuições infinitamente divisíveis, e uma análise das distribuições atratoras requer conhecimento dessas distribuições.

2.15.7.2. Distribuições divisíveis e distribuições infinitamente divisíveis:

Vejamos o significado de uma distribuição divisível, ou fatorável. Do teorema da convolução sabemos que o produto de duas funções características também é uma função característica. Uma distribuição é divisível se: $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$ em que $\varphi_1(t) \neq e^{iat}$ e $\varphi_2(t) \neq e^{ibt}$. Se permitíssemos que $\varphi_1(t) = e^{iat}$ a fatoraçoão se tornaria trivial, pois

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x-x')dx'$ é a convolução da distribuição degenerada $f_1(x) = \delta(x-a)$ com ela mesma, e $\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\delta(x-a)dx = e^{iat}$. Existem distribuições não fatoráveis, ou

indecomponíveis, que funcionam de forma similar à dos números primos para as distribuições.

Uma distribuição será infinitamente divisível se existir uma $\varphi_n(t)$ de modo que $\varphi(t) = [\varphi_n(t)]^n$ para qualquer n , incluindo $n \rightarrow \infty$. Exemplos de distribuições infinitamente divisíveis são:

1. Distribuição degenerada: $\varphi(t) = e^{i\xi t}$ e $\varphi_n(t) = e^{\frac{i\xi t}{n}}$
2. Distribuição de Poisson: $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ e $\varphi_n(t) = e^{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)}$
3. Distribuição normal: $\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ e $\varphi_n(t) = e^{\frac{i\mu t}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$
4. Distribuição Gama: $\varphi(t) = e^{ix_0 t} (1 - i\beta t)^{-\alpha}$ e $\varphi_n(t) = e^{\frac{ix_0 t}{n}} (1 - i\beta t)^{-\frac{\alpha}{n}}$
5. Distribuição de Cauchy: $\varphi(t) = e^{ix_0 t - q|t|}$ e $\varphi_n(t) = e^{\frac{ix_0 t}{n} - \frac{q|t|}{n}}$

As propriedades de distribuições infinitamente divisíveis são as seguintes:

1. O produto de duas funções características infinitamente divisíveis também é uma função característica infinitamente divisível, pois se $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ são ∞ -divisíveis, então $\varphi(t) = [\varphi_n(t)]^n$ e $\psi(t) = [\psi_n(t)]^n$, logo, $\varphi(t)\psi(t) = [\varphi_n(t)\psi_n(t)]^n$ também é ∞ -divisível.

2. Se $\varphi(t)$ é ∞ -divisível, então $\varphi(t)$ não tem zero reais. Seja $\varphi(t)$ infinitamente divisível, então $\varphi_n(t)$ e $|\varphi_n(t)|^2$ também são funções características, portanto,

$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(t)|^{\frac{2}{n}}$ também é uma função característica. Mas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ e

qualquer número, exceto zero, elevado à zero vale um, então:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi(t) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \varphi(t) = 0 \end{cases}. \text{ Mas, como } g(t) \text{ é uma função característica, ela precisa}$$

ser absolutamente contínua. Entretanto, se $\varphi(t)$ admite uma raiz real a $g(t)$ será descontínua exatamente nessa raiz, logo não pode ser uma função característica.

2.15.7.3. Toda distribuição estável é infinitamente divisível:

Fazendo $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ em $\varphi(b_1 t) \varphi(b_2 t) \dots \varphi(b_n t) = e^{i \gamma_n t}$ temos que $[\varphi(t)]^n = e^{i \gamma_n t} \varphi(b_n t)$, logo, $\varphi(b_n t) = \left[e^{-i \frac{\gamma_n t}{n}} \varphi(t) \right]^n$. Então para $t' = b_n t$ temos que $\varphi(t') = \left[e^{-i \frac{\gamma_n t'}{n b_n}} \varphi\left(\frac{t'}{b_n}\right) \right]^n$, significando que $\varphi(t) = [\varphi_n(t)]^n$.

2.15.7.4. Atratores das distribuições.

A Figura 23 mostra os conjuntos das distribuições separadas através dos seguintes critérios: (1) momentos de ordem 2 finitos ou infinitos; (2) infinitamente divisíveis ou não e (3) estáveis ou não.

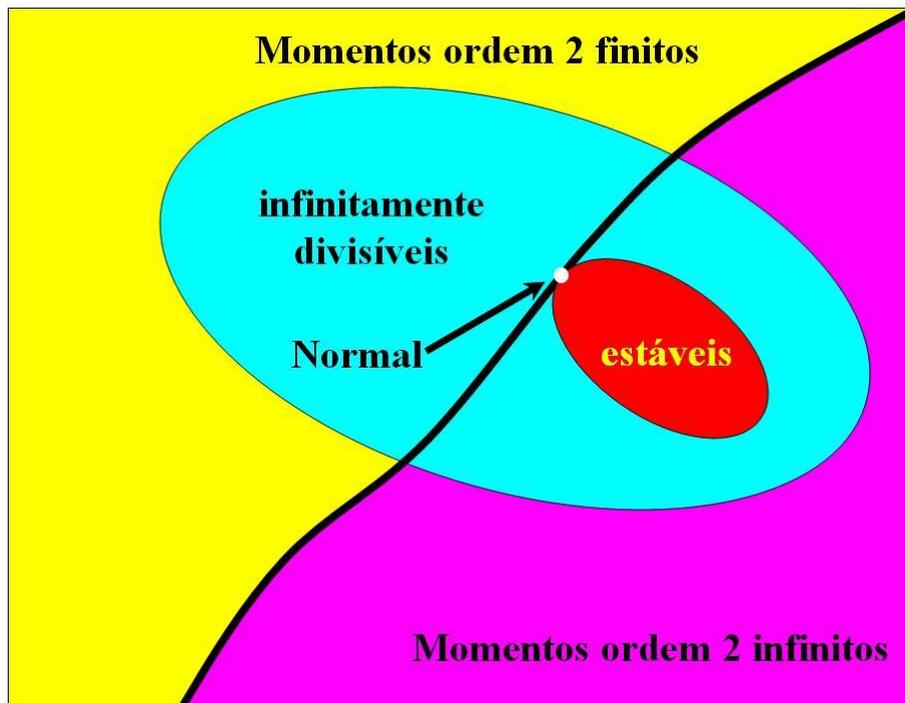


Figura 23. Conjuntos das distribuições

Se os momentos de ordem 2 são finitos vale o teorema central do limite e a distribuição da soma de n v.a. i.i.d. converge [é atraída] para a normal, a única distribuição estável com variância finita. Dizemos então que a normal é um atrator para essas distribuições. Se as variâncias são infinitas elas convergirão para uma das distribuições estáveis. Para descobrir a distribuição atratora examina-se o comportamento assintótico nas caudas $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$. Se o comportamento for $f(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \frac{C_{\pm}}{|x|^{\alpha}}$ a distribuição

atratora será uma distribuição de Lévy com parâmetro α , e parâmetro β dado pela razão

$$\beta = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}.$$

O Teorema Central do Limite Generalizado afirma exatamente isso.

1. Se uma distribuição tem variância finita então a soma de n cópias dessa v.a. tende a distribuição normal.
2. Se a variância é infinita essa soma tende a uma distribuição de Lévy com parâmetros α e β .

3. Capítulo 3: Precificação de Opções Europeias

3.1. Modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein [CRR].

3.1.1. Portfólio replicante e hedge perfeito

Suponha que o stock que custa S pode mudar para os preços S_U no estado Up, ou S_D no estado Down, $S_U > S_D$ no momento seguinte. Suponha que exista um derivativo qualquer, uma opção, por exemplo, com as duas possibilidades de lucro L_U ou L_D . Será possível replicar o derivativo? Vamos comprar q stocks, aplicar B em bonds com rendimento R , e exigir que o portfólio (q, B) seja equivalente ao derivativo no período seguinte, ou seja:

$$qS_U + (1+R)B = L_U$$

$$qS_D + (1+R)B = L_D$$

O sistema de duas equações com duas incógnitas é resolvido facilmente subtraindo uma equação da outra e obtendo $q = \frac{L_U - L_D}{S_U - S_D} = \frac{\Delta L}{\Delta S}$. Substituindo q em uma das duas

equações obtém-se $B = \frac{L_D S_U - L_U S_D}{(S_U - S_D)(1+R)}$. Os preços de dois portfólios replicantes devem ser

idênticos ou haverá oportunidade de arbitragem de segunda espécie. Para tanto bastaria vender o portfólio mais caro e comprar o mais barato, auferindo o lucro no presente, sabendo que no período seguinte se troca um portfólio pelo outro. Nesse caso o preço do derivativo deve ser o preço do portfólio replicante. Em $t=0$ esse portfólio custou $p_{rep} = qS + B$. Substituindo os valores obtidos para o portfólio replicante temos:

$$p_{rep} = \frac{S - \frac{S_D}{(1+R)}}{(S_U - S_D)} L_U + \frac{\frac{S_U}{(1+R)} - S}{(S_U - S_D)} L_D$$

3.1.2. Probabilidades Risco-Neutra.

Outra forma de analisar a questão é através do conceito de jogo justo (fair game, fair price), no qual a esperança de lucro para qualquer um dos jogadores em um jogo de soma nula é ZERO. Suponha que existem as probabilidades π_U de ocorrer U e π_D de ocorrer D, tal que $\pi_U + \pi_D = 1$. A esperança de lucro L do derivativo seria $E[L] = \pi_U L_U + \pi_D L_D$. O lançador cobrou o prêmio p_r pelo derivativo em $t=0$, e o aplicou na

taxa R , logo no período seguinte terá $(1+R)p_r$. Para ser justo, portanto, esse valor deve ser a esperança de lucro do derivativo, ou seja:

$$p_{rep} = \frac{\pi_U}{(1+R)}L_U + \frac{\pi_D}{(1+R)}L_D$$

Igualando o prêmio justo ao preço do portfólio replicante percebe-se que:

$$\pi_U = \frac{(1+R)}{(S_U - S_D)} \left[S - \frac{S_D}{(1+R)} \right] \quad \text{e} \quad \pi_D = \frac{(1+R)}{(S_U - S_D)} \left[\frac{S_U}{(1+R)} - S \right]$$

Pode-se verificar que $\pi_U + \pi_D = 1$. As condições para que as probabilidades sejam positivas, $S_D < (1+R)S < S_U$, são as mesmas que garantem a existência de um mercado de ações em equilíbrio. Se $(1+R)S > S_U$ ninguém compraria ações, preferindo aplicar apenas em bonds. Por outro lado se $S_D > (1+R)S$ o mercado de bonds desapareceria, uma vez que mesmo o menor retorno nas ações seria superior ao retorno das bonds. Dessa forma, π_U e π_D representam as probabilidades risco-neutra, pois o hedging perfeito eliminou o risco. Sem risco o lançador aceita cobrar exatamente a esperança de ganho, sem qualquer prêmio de risco.

Note que obtivemos as probabilidades π_U e π_D através de um processo de hedge e que elas não são as probabilidades reais p e q dos casos Up e Down, exceto por alguma coincidência. Por isso chamamos as probabilidades π de risco-neutra, uma vez que o hedge perfeito eliminou o risco.

3.1.3. Opções em apenas um período:

Só existirão contratos de opções em um período apenas para strike prices no intervalo $S_D \leq X \leq S_U$. No caso da CALL os lucros do titular no período seguinte serão dados por $L_U = S_U - X$ e $L_D = 0$, enquanto no caso da PUT por $L_U = 0$ e $L_D = X - S_D$. Substituindo L_U e L_D na equação dos prêmios obtemos:

$$c = \frac{1}{(S_U - S_D)} \left[S - \frac{S_D}{(1+R)} \right] (S_U - X) \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{(S_U - S_D)} \left[\frac{S_U}{(1+R)} - S \right] (X - S_D).$$

Pode-se verificar com álgebra simples que esses prêmios satisfazem a condição de paridade CALL-PUT:

$$c + \frac{X}{(1+R)} = p + S = \frac{1}{(1+R)(S_U - S_D)} \left\{ [(1+R)S - S_D]S_U + [S_U - (1+R)S]X \right\}.$$

3.1.4. Probabilidades Risco-Neutra independentes da trajetória:

A dificuldade com essas expressões para as probabilidades risco-neutra, é que, para mais de um período, elas dependerão do preço do stock S_t e, portanto, da trajetória do mesmo. Existe um caso, entretanto, em que as probabilidades risco-neutra independem da trajetória: o caso em que $S_U = US$ e $S_D = DS$, ou seja, em um processo estocástico multiplicativo em que S pode ser multiplicado pelo fator U ou D tais que $U > D > 0$. Nesse caso o S colocado em evidência no numerador e denominador se cancela, levando às probabilidades risco-neutra independentes da trajetória:

$$\pi_U = \frac{(1+R)}{(U-D)} \left[1 - \frac{D}{(1+R)} \right] \quad \text{e} \quad \pi_D = \frac{(1+R)}{(U-D)} \left[\frac{U}{(1+R)} - 1 \right]$$

3.1.5. Opções européias em n períodos:

Agora pode-se usar as probabilidades risco-neutra, que serão sempre as mesmas, independentemente da trajetória seguida pelo preço do stock, para calcular a esperança de ganho (valor intrínseco) do titular e usar o conceito de prêmio justo para calcular os prêmios da CALL e da PUT. No caso de n períodos a restrição sobre o *strike price* é $D^n S \leq X \leq U^n S$. Vale lembrar que os prêmios são pagos em $t=0$ e aplicados na taxa R , portanto em $t=n$

valerão $(1+R)^n \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} = E \begin{bmatrix} L_{call} \\ L_{put} \end{bmatrix}$. Se os agentes são neutros ao risco, pois ele foi eliminado

pelo hedge perfeito, e sabemos π_U e π_D , a probabilidade de terem aparecido k Ups e $n-k$ Downs em n períodos será dada pela distribuição binomial¹²

$$P(n,k) = \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \pi_D^{n-k} \pi_U^k. \text{ Nesse caso o preço do stock foi para } S_{n,k} = D^{n-k} U^k S.$$

Dessa forma podemos calcular os prêmios da CALL e da PUT européias:

$$c = \frac{1}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \pi_D^{n-k} \pi_U^k \text{Max}[D^{n-k} U^k S - X, 0]$$

$$p = \frac{1}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \pi_D^{n-k} \pi_U^k \text{Max}[X - D^{n-k} U^k S, 0]$$

¹² Ver capítulo 2.

Vamos nos livrar da função Max procurando o k_{cut} de corte onde vale a igualdade

$$D^{n-k_{cut}} U^{k_{cut}} S = X, \text{ ou seja, para } \left(\frac{U}{D}\right)^{k_{cut}} = \frac{X}{S} D^{-n}, \text{ ou ainda, } k_{cut} = \text{int} \left[\frac{\ln\left(\frac{X}{S}\right) - n \ln(D)}{\ln\left(\frac{U}{D}\right)} \right], \text{ com}$$

$\text{int}(x) = \text{inteiro de } x$. Note que $U > D$ significa que $\ln\left(\frac{U}{D}\right) > 0$ e que a restrição

$D^n S \leq X \leq U^n S$, ou seja, $n \ln(D) \leq \ln\left(\frac{X}{S}\right) \leq n \ln(U)$, garante que $k_{cut} > 0$. Se $D < 1$ então

$-n \ln(D) > 0$ e, com mais razão ainda $\ln\left(\frac{X}{S}\right) - n \ln(D) > 0$. Por outro lado, $D > 1$ significa

que $-n \ln(D) < 0$ e, também, que $\ln\left(\frac{X}{S}\right) > n \ln(D) > 0$, mantendo $\ln\left(\frac{X}{S}\right) - n \ln(D) > 0$.

Separando os termos com S e X podemos re-escrever os prêmios como:

$$c = \frac{S}{(1+R)^n} \sum_{k=k_{cut}+1}^n \binom{n}{k} (\pi_D D)^{n-k} (\pi_U U)^k - \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=k_{cut}+1}^n \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k$$

$$p = \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{k_{cut}} \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k - \frac{S}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{k_{cut}} \binom{n}{k} (\pi_D D)^{n-k} (\pi_U U)^k$$

Agora notamos que $\pi_U^* = \frac{\pi_U U}{(1+R)}$ e $\pi_D^* = \frac{\pi_D D}{(1+R)}$ também são números positivos que

satisfazem as condições de probabilidade, pois $\frac{\pi_U U}{(1+R)} + \frac{\pi_D D}{(1+R)} = 1$. O fator

$\frac{1}{(1+R)^n} = \frac{1}{(1+R)^{n-k}} \frac{1}{(1+R)^k}$ pode ser, então, incorporado nas somatórias que envolvem U e

D , da seguinte forma:

$$c = S \sum_{k=k_{cut}+1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\pi_D D}{1+R}\right)^{n-k} \left(\frac{\pi_U U}{1+R}\right)^k - \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=k_{cut}+1}^n \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k$$

$$p = \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{k_{cut}} \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k - S \sum_{k=0}^{k_{cut}} \binom{n}{k} \left(\frac{\pi_D D}{1+R}\right)^{n-k} \left(\frac{\pi_U U}{1+R}\right)^k$$

Que podem ser reescritas como:

$$c = S \sum_{k=k_{cut}+1}^n \binom{n}{k} \pi_D^{*n-k} \pi_U^{*k} - \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=k_{cut}+1}^n \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k$$

$$p = \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^{k_{cut}} \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k - S \sum_{k=0}^{k_{cut}} \binom{n}{k} \pi_D^{*n-k} \pi_U^{*k}$$

Agora podemos checar a paridade PUT-CALL novamente:

$$c - p = S \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_D^{*n-k} \pi_U^{*k} - \frac{X}{(1+R)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k$$

Entretanto sabemos do binômio de Newton que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ e se

$(a+b)=1$ então $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = 1$. Examinando a fórmula acima percebemos que tanto

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_D^{*n-k} \pi_U^{*k} = 1 \text{ quanto } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k = 1, \text{ logo } c - p = S - \frac{X}{(1+R)^n} \text{ ou } c + \frac{X}{(1+R)^n} = p + S,$$

que é a relação de paridade PUT-CALL.

3.1.6. Fórmula de Black&Scholes obtida através do limite para $n \rightarrow \infty$.

3.1.6.1. Processos estocásticos aditivos

Sabemos que para $n \rightarrow \infty$ a binomial converge para a normal¹³:

$$\binom{n}{k} q^{n-k} p^k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}. \text{ Como } n \text{ representa o número de períodos vamos expressá-lo}$$

simplesmente como o tempo t . Suponha a situação aditiva em que $S_{t+1} = S_t + \delta_U$ com probabilidade p , ou $S_{t+1} = S_t + \delta_D$ com probabilidade q , sendo $\delta_U > \delta_D$. Seja k o número de passos Up e $t-k$ o número de passos Down. Depois de t períodos o preço será

$$S_{t,k} = S + t\delta_D + k(\delta_U - \delta_D). \text{ Mudando a variável para } k = \frac{S_t - S - t\delta_D}{(\delta_U - \delta_D)} \text{ temos que}$$

$$k - tp = \frac{S_t - S - t\bar{\delta}}{(\delta_U - \delta_D)}, \text{ onde } \bar{\delta} = E[\delta] = p\delta_U + q\delta_D. \text{ Além disso, } \frac{dS_t}{dk} = (\delta_U - \delta_D), \text{ logo, o preço da}$$

ação após t períodos segue o Movimento Browniano, ou processo estocástico de Wiener,

$$\text{dado pela normal } MB(S_t) = \frac{e^{-\frac{[S_t - S - t\bar{\delta}]^2}{2t pq(\delta_U - \delta_D)^2}}}{\sqrt{2\pi t pq}(\delta_U - \delta_D)}. \text{ Esse processo é conhecido como Movimento}$$

Browniano ou processo estocástico de Wiener.

¹³ Ver capítulo 2.

3.1.6.2. Processos estocásticos multiplicativos

Suponha agora o processo multiplicativo $S_{t+1} = US_t$ com probabilidade p ou $S_{t+1} = DS_t$ com probabilidade q . Depois de t passos o preço será $S_{t,k} = D^{t-k}U^k S = \left(\frac{U}{D}\right)^k D^t S$.

Tirando o logaritmo de ambos os lados $k = \frac{\ln S_t - \ln S - t \ln D}{\ln\left(\frac{U}{D}\right)}$ e $\frac{dS_t}{dk} = S_t \ln\left(\frac{U}{D}\right)$. Nesse caso

$k - tp = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{S}\right) - t(p \ln U + q \ln D)}{\ln\left(\frac{U}{D}\right)}$ e o preço da ação segue um movimento Browniano

$$\text{Geométrico dado pela log-normal: } MBG(S_t) = \frac{e^{-\frac{[\ln(S_t/S) - t(p \ln U + q \ln D)]^2}{2tpq \ln^2\left(\frac{U}{D}\right)}}}{\sqrt{2\pi tpq} \ln\left(\frac{U}{D}\right) S_t}.$$

Note as diferenças entre os dois processos, o Browniano e o Browniano Geométrico:

$$MB(S_t) = \frac{e^{-\frac{[S_t - S - \mu t]^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \text{ e } MBG(S_t) = \frac{e^{-\frac{[\ln(S_t/S) - \mu t]^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi\sigma t} S_t}$$

O capítulo 2 apresentou as propriedades das distribuições Normal e log-Normal. No primeiro caso $E[S_t - S] = \mu t$ e $V[S_t - S] = \sigma^2 t$. No segundo caso $E\left[\frac{S_t}{S}\right] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}t}$ para a qual vale a regra $\ln\left(E\left[\frac{S_t}{S}\right]\right) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t = \left(E\left[\ln\frac{S_t}{S}\right] + \frac{1}{2}V\left[\ln\frac{S_t}{S}\right]\right)t$.

3.1.6.3. Convergência do modelo CRR para o modelo de Black&Scholes¹⁴:

Convergência da Binomial para a Normal pode ser estabelecida como:

$$\sum_{k_0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \left[\int_{k_0}^{\infty} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} dk \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\frac{k_0-np}{\sqrt{npq}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

¹⁴ A convergência do modelo de CRR para Black&Scholes na forma a seguir pode ser encontrada nas notas de aula do Prof. Don M. Chance, *Teaching Note 00-08: Convergence of the Binomial to the Black-Scholes Model (July 8, 2008)*, disponibilizadas em pdf no site <http://www.bus.lsu.edu/academics/finance/faculty/dchance/Instructional/Instr.htm>

Seja $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ a função distribuição de probabilidade cumulativa da

Normal padrão $N(0,1)$. Podemos usar a simetria da Normal,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \Phi(-x), \quad \text{para expressar a somatória como}$$

$$\sum_{k_o}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \rightarrow \Phi\left(-\frac{k_o - np}{\sqrt{pq}\sqrt{n}}\right). \quad \text{Já a somatória complementar será dada diretamente por}$$

$$\sum_0^{k_o} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \rightarrow \Phi\left(\frac{k_o - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Trocando o retorno pelo log-Retorno $r = \ln(1+R)$, ou $(1+R) = e^r$, no modelo CRR chegamos a:

$$c = S \sum_{k=k^*}^n \binom{n}{k} \pi_D^{*n-k} \pi_U^{*k} - X e^{-rT} \sum_{k=k^*}^n \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k$$

$$p = X e^{-rT} \sum_{k=0}^{k^*} \binom{n}{k} \pi_D^{n-k} \pi_U^k - S \sum_{k=0}^{k^*} \binom{n}{k} \pi_D^{*n-k} \pi_U^{*k}$$

No limite de $T = n \rightarrow \infty$ nos leva a:

$$c = S \Phi\left(-\frac{k_{cut} - \pi_U^* T}{\sqrt{\pi_U^* \pi_D^*} \sqrt{T}}\right) - X e^{-rT} \Phi\left(-\frac{k_{cut} - \pi_U T}{\sqrt{\pi_U \pi_D} \sqrt{T}}\right), \quad \text{ou } c = S \Phi(d_1) - X e^{-rT} \Phi(d_2).$$

Essa é quase a fórmula de Black & Scholes desde que possamos expressar tudo em termos do log-retorno r e sua volatilidade σ , em lugar das probabilidades π . Note que o preço da ação não segue as probabilidades risco-neutras do modelo binomial, mas um conjunto (p, q) qualquer. A idéia, portanto, é escrever tudo em termos da esperança e variância dos preços das ações evitando utilizar o conjunto de probabilidade (p, q) específico. Se o preço só pode subir ou descer pelos fatores U e D ao fim de n períodos teremos que $S_T = D^{n-k} U^k S$ e $\frac{S_T}{S} = D^n \left(\frac{U}{D}\right)^k$, portanto, $\ln \frac{S_T}{S} = k \ln \left(\frac{U}{D}\right) + n \ln D$. Nesse caso

$$E\left[\ln \frac{S_T}{S}\right] = E[k] \ln \left(\frac{U}{D}\right) + n \ln D \quad \text{de onde tiramos que } \bar{k} = \frac{E\left[\ln \frac{S_T}{S}\right] - n \ln D}{\ln \left(\frac{U}{D}\right)}. \quad \text{Nada aqui}$$

depende das probabilidades.

Por outro lado $E\left[\left(\ln\frac{S_T}{S} - E\left[\ln\frac{S_T}{S}\right]\right)^2\right] = \left[\ln\left(\frac{U}{D}\right)\right]^2 E\left[(k - \bar{k})^2\right]$ ou seja,

$\sigma_{\ln(S_T/S)} = \ln\left(\frac{U}{D}\right)\sigma_k$. Dessa forma obtemos $\sigma_k = \frac{\sigma_{\ln(S_T/S)}}{\ln\left(\frac{U}{D}\right)}$, e podemos escrever

$$-\frac{k_{cut} - \bar{k}}{\sigma_k} = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + E\left[\ln\frac{S_T}{S}\right]}{\sigma_{\ln(S_T/S)}}.$$

Para o segundo termo da CALL temos que $e^r = (U - D)\pi_U + D = \pi_U U + \pi_D D$. Isso significa que $E\left[\frac{S_T}{S}\right] = [\pi_U U + \pi_D D]^n = e^{rT}$, e que $\ln E\left[\frac{S_T}{S}\right] = rT$. Se x segue uma log-normal¹⁵

então $E[x] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$, de onde tiramos que $\ln E[x] = \mu + \frac{\sigma^2}{2} = E[\ln x] + \frac{1}{2}V[\ln x]$. Daqui vemos

que $E[\ln x] = \ln E[x] - \frac{1}{2}V[\ln x] = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$. Usando esse resultado obtemos:

$$E\left[\ln\frac{S_T}{S}\right] = \ln E\left[\frac{S_T}{S}\right] - \frac{\sigma^2 T}{2} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$$

O qual nos permite expressar d_2 como:

$$d_2 = -\frac{k^* - \bar{k}}{\sigma_k} = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Para o primeiro termo as probabilidades agora são $\pi_U^* = e^{-r}\pi_U U$ e $\pi_D^* = e^{-r}\pi_D D$.

Nesse caso $\pi_U^* = e^{-r}U\pi_U = \frac{U}{(U-D)}[1 - e^{-r}D]$. Isolando para e^{-r} temos que,

$e^{-r}D = 1 - \frac{(U-D)\pi_U^*}{U}$, que pode ser transformado em $e^{-r} = \frac{U\pi_D^* + D\pi_U^*}{UD}$. Desse resultado

extraímos que:

$$e^{-r} = \frac{U\pi_D^* + D\pi_U^*}{UD} = \pi_U^*\left(\frac{1}{U}\right) + \pi_D^*\left(\frac{1}{D}\right)$$

Mas $E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t}\right] = \pi_U^*\left(\frac{1}{U}\right) + \pi_D^*\left(\frac{1}{D}\right)$ logo $e^{-r} = E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t}\right]$ e $-r = \ln E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t}\right]$. Entretanto

$\frac{S}{S_T} = \frac{S_0}{S_1} \frac{S_1}{S_2} \dots \frac{S_{T-1}}{S_T} = \prod_t \frac{S_{t-1}}{S_t}$ e $E\left[\frac{S}{S_T}\right] = E\left[\prod_t \frac{S_{t-1}}{S_t}\right] = \prod_t E\left[\frac{S_{t-1}}{S_t}\right]$, porque se x e y são

¹⁵ Ver Capítulo 2.

independentes, então $E[xy] = E[x]E[y]$ e os passos são independentes entre si. Agora

$$E\left[\frac{S_{t-1}}{S_t}\right] = \left[\pi_U^*\left(\frac{1}{U}\right) + \pi_D^*\left(\frac{1}{D}\right)\right] \text{ e } E\left[\frac{S}{S_T}\right] = \left[\pi_U^*\left(\frac{1}{U}\right) + \pi_D^*\left(\frac{1}{D}\right)\right]^n = e^{-rT}. \text{ De onde tiramos que}$$

$$-rT = \ln E\left[\frac{S}{S_T}\right].$$

Agora se S segue uma log-normal, então $E\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\right] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$. Todavia, $E\left[\frac{S_{t-1}}{S_t}\right] = e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

porque a esperança troca de sinal, mas a variância não, ou seja: $E\left[\ln\frac{S_t}{S_{t-1}}\right] = -E\left[\ln\frac{S_{t-1}}{S_t}\right]$,

mas $V\left[\ln\frac{S_t}{S_{t-1}}\right] = V\left[\ln\frac{S_{t-1}}{S_t}\right]$. Dessa forma $E\left[\frac{S}{S_T}\right] = e^{-\mu T + \frac{\sigma^2}{2}T}$ e $r = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$. Daqui, portanto,

extraímos que $E\left[\ln\frac{S_T}{S}\right] = rT + \frac{\sigma^2}{2}T$. Assim obtemos $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Dessa forma chegamos aos resultados de Black & Scholes:

$$c = S\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2) \text{ e } p = Xe^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1), \text{ com:}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ e } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

3.2. Dedução da fórmula de Black & Scholes pelo prêmio justo¹⁶.

A idéia para a dedução da fórmula de Black & Scholes através do conceito de prêmio justo vem dos seguintes postulados:

1. O preço das ações segue uma distribuição log-normal com parâmetros μ e σ , na

$$\text{forma } \text{LogN}\left(\frac{S_t}{S}; \mu, \sigma\right) = \frac{e^{-\frac{[\ln(S_t) - \ln(S) - \mu]^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi\sigma t} S_t}, \text{ para a qual } E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S}\right)\right] = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t.$$

¹⁶ Essa é a forma utilizada para o cálculo dos prêmios das opções no capítulo 22 de André Marins, "Mercado de Derivativos e Análise de Risco", AMS Editora 2004.

2. A esperança do log-retorno tem que ser igual à renda fixa r , ou seja, $\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t = rt$

para evitar a possibilidade de arbitragem. Nesse caso $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$.

3. O prêmio deve ser igual à esperança de lucro intrínseco do titular usando a log-normal $LogN\left(\frac{S_t}{S}; r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$.

Comentários: o postulado número 2 ficou vago e não foi necessário na primeira forma de deduzir B&S. Na forma mais rigorosa, utilizando equação diferencial estocástica, tanto o processo de hedging, via delta-hedge, quanto a operação de arbitragem que se deseja evitar, são mostrados explicitamente. Felizmente existe um teorema relativo à arbitragem que garante que a condição 2 se verifica. O resultado final, portanto, é correto.

Dadas as suposições acima, podemos escrever:

$$c = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{[\ln(S_T) - \ln(S) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T} S_T} \text{Max}[S_T - X, 0] dS_T$$

Que pode ser re-escrita como:

$$c = e^{-rT} \int_X^{\infty} \frac{e^{-\frac{[\ln(S_T) - \ln(S) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T}} dS_T - X e^{-rT} \int_X^{\infty} \frac{e^{-\frac{[\ln(S_T) - \ln(S) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T} S_T} dS_T$$

Vamos fazer a mudança de variável $w = \ln S_T$ $dw = \frac{dS_T}{S_T}$ $dS_T = S_T dw = e^w dw$ para re-

escrever a integral como:

$$c = e^{-rT} \int_{\ln X}^{\infty} \frac{e^{-\frac{[w - \ln(S) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T}} e^w dw - X e^{-rT} \int_{\ln X}^{\infty} \frac{e^{-\frac{[w - \ln(S) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T}} dw$$

Vamos começar com a segunda integral $I_2 = \int_{\ln X}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\left[w - \ln(S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T}} dw$. Mudando a

variável para $z = \frac{\left[w - \ln(S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]}{\sigma\sqrt{T}}$ chegamos a $I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(-z_0)$, onde

$$z_0 = -\frac{\left[\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]}{\sigma\sqrt{T}} = -d_2, \text{ logo } I_2 = \Phi(d_2).$$

Nesse ponto já temos o resultado: $c = e^{-rT} \int_{\ln X}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\left[w - \ln(S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T}} dw - Xe^{-rT} \Phi(d_2)$,

faltando apenas resolver a primeira integral $I_1 = \int_{\ln X}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\left[w - \ln(S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi\sigma T}} dw$. A idéia é completar quadrado no expoente chegando, após álgebra direta, ao resultado:

$$-\frac{\left[w - \ln(S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T} + w = -\frac{\left[w - \ln(S) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]^2}{2\sigma^2 T} + \ln(S) + rT$$

Nesse ponto troca-se a variável para $z = \frac{\left[w - \ln(S) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]}{\sigma\sqrt{T}}$, a qual nos leva

ao limite inferior $z_0 = -\frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_1$, e ao resultado intermediário:

Cancelando rT , finalmente, recuperamos Black & Scholes:

$c = S\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2)$ e $p = Xe^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$, com:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ e } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Essas são as fórmulas de Black & Scholes que levaram ao prêmio Nobel de Merton e Scholes¹⁷ em 1997. A demonstração desses resultados é usualmente apresentada como a solução de uma equação diferencial estocástica relacionada aos processos de difusão que será discutida no próximo item.

3.3. Modelo de Black & Scholes

3.3.1. Processos Estocásticos

3.3.1.1. Movimento Browniano Padrão

Movimento Browniano Padrão é um processo estocástico que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $x(0) = 0$
2. $x(t_2) - x(t_1)$ é uma distribuição normal com esperança nula e variância $|t_2 - t_1|$
3. $\text{cov}[(x(t_i) - x(t_{i-1})); (x(t_{i-1}) - x(t_{i-2}))]$, ou seja, os incrementos são independentes entre si

Nesse caso a distribuição é dada por: $W(\Delta x, \Delta t) = \frac{e^{-\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}}}{\sqrt{2\pi\Delta t}}$.

3.3.1.2. Movimento Browniano com Drift

O movimento Browniano com drift tem as propriedades 1 e 3 idênticas ao Movimento Browniano Padrão, mudando apenas a 2:

2. $x(t_2) - x(t_1)$ é uma distribuição normal com esperança $\mu(t_2 - t_1)$ e variância $|t_2 - t_1|$

Nesse caso, se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ retornamos ao Movimento Browniano Padrão

3.3.1.3. Martingale

A palavra vem do francês e era usada para a estratégia de dobrar a aposta até que conseguisse vencer. O significado usual é da correia que vai do bocal ao encontro das patas dianteiras para evitar que o cavalo levante demasiadamente a cabeça. Em probabilidade o Martingale é um processo estocástico em que a sequência x_1, x_2, \dots, x_n tem a seguinte propriedade:

$$E[x_n] < \infty$$

¹⁷ Black não ganhou o prêmio em conjunto porque faleceu antes.

$$E[x_{n+1} | x_1, x_2, \dots, x_n] = x_n$$

Ou seja, os valores x_1, x_2, \dots, x_{n-1} não interessam, pois não há memória.

Note que $x(t) = \mu t + \sigma W(t)$ satisfaz as condições do Movimento Browniano com Drift.

$$E[x(t)] = E[\mu t + \sigma W(t)] = \mu t + \sigma E[W(t)] = \mu t$$

$$V[x(t)] = V[\mu t + \sigma W(t)] = \sigma^2 V[W(t)] = \sigma^2 t$$

3.3.1.4. Composição de Movimentos Brownianos

Se em t_0 o sistema estava em x_0 , a probabilidade de encontrar x entre x_1 e $x_1 + dx_1$ no tempo $t_1 > t_0$ será dada por:

$$dW[x_1 | x_0] = \frac{e^{-\frac{[x_1 - x_0 - \mu(t_1 - t_0)]^2}{2\sigma^2(t_1 - t_0)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} dx_1.$$

Agora, sabendo que em t_1 ele estava em x_1 , a probabilidade de encontrar x entre x_2 e $x_2 + dx_2$ no tempo $t_2 > t_1$ será dada por:

$$dW[x_2 | x_1] dx_2 = \frac{e^{-\frac{[x_2 - x_1 - \mu(t_2 - t_1)]^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} dx_2.$$

Analisemos agora a probabilidade composta de chegar a x_2 no momento t_2 sabendo somente que o sistema estava em x_0 no momento t_0 . Nesse caso, temos que:

$$W[x_2 | x_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} W[x_2 | x_1] W[x_1 | x_0] dx_1$$

$$W[x_2 | x_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{[x_2 - x_1 - \mu(t_2 - t_1)]^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \otimes \frac{e^{-\frac{[x_1 - x_0 - \mu(t_1 - t_0)]^2}{2\sigma^2(t_1 - t_0)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} dx_1$$

$$W[x_2 | x_0] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_2 - x_1) f_2(x_1) dx_1 \text{ é a convolução entre } f_1 \text{ e } f_2. \text{ Logo,}$$

$$f_1(x) = \frac{e^{-\frac{[x - \mu(t_2 - t_1)]^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}}, \quad f_2(x) = \frac{e^{-\frac{[x - x_0 - \mu(t_1 - t_0)]^2}{2\sigma^2(t_1 - t_0)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}}, \text{ e suas respectivas funções}$$

características serão:

$$\varphi_1(t) = e^{i\mu(t_2 - t_1) - \frac{\sigma^2(t_2 - t_1)}{2} t^2} \text{ e } \varphi_2(t) = e^{ix_0 t} e^{i\mu(t_1 - t_0) - \frac{\sigma^2(t_1 - t_0)}{2} t^2}.$$

A função característica de $W[x_2 | x_0]$ será dada agora por $\varphi_{x_2}(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$:

$$\varphi_{x_2}(t) = e^{ix_0 t} e^{i\mu(t_2-t_1+t_1-t_0)^2} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}(t_2-t_1+t_1-t_0)} = e^{ix_0 t} e^{i\mu(t_2-t_0)^2} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}(t_2-t_0)}$$

Agora podemos encontrar a função $W[x_2|x_0]$, que será dada por:

$$W[x_2|x_0] = \frac{e^{-\frac{[x_2-x_0-\mu(t_2-t_0)]^2}{2\sigma^2(t_2-t_0)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(t_2-t_0)}}$$

Isso significa que a distribuição de dois movimentos Brownianos subtraídos é um Movimento Browniano com o Δt entre os dois momentos:

$$W(t+h) - W(t) = W(h)$$

Vamos chamar o diferencial estocástico $dW = \lim_{h \rightarrow dt} W(t+h) - W(t)$. Note que a função não é diferenciável pois:

$$V\left[\frac{W(t+h) - W(t)}{h}\right] = \frac{1}{h^2} V[W(t+h) - W(t)] = \frac{1}{h^2} V[W(h)] = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}, \quad \text{e} \quad \frac{1}{h} \rightarrow \infty \quad \text{se}$$

$h \rightarrow 0$. Portanto, o diferencial existe mas a derivada não. Isso vem do fato de que $dW \sim \sqrt{dt}$, $\frac{dW}{dt} \sim \frac{\sqrt{dt}}{dt} \rightarrow \infty$

Agora:

$$E[dW] = \lim_{h \rightarrow dt} E[W(t+h) - W(t)] = \lim_{h \rightarrow dt} E[W(h)] = 0$$

$$V[dW] = \lim_{h \rightarrow dt} V[W(t+h) - W(t)] = \lim_{h \rightarrow dt} V[W(h)] = \lim_{h \rightarrow dt} h = dt$$

$$E[dWdW] = E[dW^2] = V[dW] = dt$$

$$E[dWdt] = dtE[dW] = 0, \quad \text{pois} \quad E[dW] = 0$$

$$V[dWdt] = dt^2 V[dW] = dt^2 dt = 0, \quad \text{pois é de ordem 3.}$$

Assim, percebemos que dW segue uma distribuição normal, com esperança nula mas não pode ser desprezado frente ao drift porque μdt é da mesma ordem que $V[dw] = dt$. A regra de multiplicação dos diferenciais estocásticos até primeira ordem é:

	dW	dt
dW	dt	0
dt	0	0

Tabela 6. Regra de multiplicação dos diferenciais estocásticos até primeira ordem

Com a Tabela 6 podemos expandir qualquer função de uma variável x que segue um Movimento Browniano: $dx = \mu dt + \sigma dW$

3.3.1.5. Lema de Itô

Usar a tabela de multiplicação para fazer a expansão em série de Taylor de qualquer função de x .

Entretanto, sabendo que:

$$dx^2 = (\mu dt + \sigma dW)^2 = \mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma dt dW + \sigma^2 dW^2$$

Note que, conforme demonstrado na Tabela 6, $dt^2 = 0$, $dt dW = 0$ e $dW^2 = dt$, logo $dx^2 = \sigma^2 dt$.

$$dx = \mu dt + \sigma dW$$

Então, para $f(x, t)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} (\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 dt$$

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW$$

Assim, temos um termo determinístico, dado por $\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dt$, e um termo estocástico, $\frac{\partial f}{\partial x} dW$.

3.3.1.6. Movimento Browniano Geométrico

No caso da Log-normal, $P(t) = \ln P(t)$ e o $P(t)$ satisfaz as condições de um Movimento Browniano Geométrico.

$$P(t) = e^{p(t)}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial p} dp + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial p^2} dp^2 = e^p dp + \frac{1}{2} e^p (dp)^2$$

$$dP = e^p \left[dp + \frac{1}{2} dp^2 \right] = P \left[\mu dt + \sigma dW + \frac{\sigma^2}{2} dt \right]$$

$$dP = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) P dt + \sigma P dW$$

Fazendo $u' = u + \frac{\sigma^2}{2}$ o Movimento Browniano Geométrico segue:

$$dP = u' P dt + \sigma P dW$$

Enquanto o Movimento Browniano segue

$$dP = u dt + \sigma dW$$

Desde Bachelier que se encontra que o preço das ações segue um Movimento Browniano Geométrico em lugar do Browniano Simples. Ou seja, é o log-retorno quem segue o movimento Browniano, $\ln \frac{S_{t+1}}{S_t}$, e não o S . Então podemos supor que:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

3.3.2. Equação da Difusão

Fluxo, em física, significa quantidade de algo, vamos chamar de M , por unidade de área por unidade de tempo: $J = \frac{\Delta M}{\Delta A \Delta t}$. Com essa definição vamos fazer o balanço de M em um volume:

$$\Delta M_{entra} = J(x) A \Delta t$$

$$\Delta M_{sai} = J(x + \Delta x) A \Delta t$$

$$\Delta M_{liq} = J(x) A \Delta t - J(x + \Delta x) A \Delta t$$

$$\Delta M_{liq} = \frac{-J(x + \Delta x) - J(x) A \Delta t}{\Delta X} A \Delta x \Delta t = -\frac{\partial J}{\partial x} \Delta V \Delta t$$

$$-\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\Delta M}{\Delta V \Delta t} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Onde a concentração de M é dada por $C = \frac{\Delta M}{\Delta V}$. Dessa forma chegamos na

Equação da Continuidade, dada por $\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$.

3.3.2.1. Lei de Fourier

$J = -D \frac{\partial C}{\partial x}$, ou seja, o fluxo de M vai da região de maior concentração para a de

menor concentração, por isso chama-se de difusão. D é chamado de coeficiente de difusão.

A dimensão de D é $\frac{\Delta M}{\Delta A \Delta t} = [D] \frac{\Delta M}{\Delta V \Delta x}$, ou seja, $[D] = \frac{\Delta V \Delta X}{\Delta A \Delta t} = \frac{\Delta x^2}{t} = \frac{L^2}{T}$.

Tipicamente, D é dado em cm^2/s . Usando a Lei de Fourier na equação da continuidade,

$-D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0$, chegamos na equação da Difusão:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

3.3.2.2. Solução da equação da Difusão sem condição inicial

Sem condição inicial vamos verificar que $C(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}}$ é solução da equação

da difusão. Para tanto notamos que $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \left[-\frac{1}{2t} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}} + \frac{x^2}{4Dt^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}} \right]$ e

$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right] C$. Por outro lado, $\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{2x}{4Dt} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} = -\frac{x}{2Dt} C$ e a derivada

segunda é dada por:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{x}{2Dt} C \right] = -\frac{1}{2Dt} C - \frac{x}{2Dt} \frac{\partial C}{\partial x} = \left[-\frac{1}{2Dt} + \frac{x^2}{4D^2 t^2} \right] C$$

Então, $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t}$, logo, $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = 0$. Comparando com o movimento

Browniano, $\frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}$, vemos que $2D = \sigma^2$, ou $D = \frac{1}{2} \sigma^2$. O movimento Browniano

é solução da equação de difusão. No caso do bêbado, $\sigma^2 = 4p^2 v^2 \tau$, logo $D = 2p^2 v^2 \tau$, com

$p = \frac{1}{2}$ e $D = \frac{1}{2} v^2 \tau$. Também se escreve $D = \frac{1}{2} \frac{(v\tau)^2}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\tau}$, com $l = v\tau$. No caso da

difusão l é o livre caminho médio das moléculas antes de um choque com outras moléculas.

Agora, a solução que encontramos $C(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}}$ é uma Normal, logo

$\int_{-\infty}^{+\infty} C(x,t) dx = 1 \quad \forall t$. No limite $t \rightarrow 0$ a largura da normal vai a zero, mantendo a área

unitária. Logo, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} = \delta(x)$. Então essa solução só vale se, inicialmente, todo M estava concentrado em um ponto, ou seja, $C(x,0) = \delta(x)$.

3.3.2.3. Solução da Equação de Difusão com condição inicial.

Suponha agora que queremos a solução da equação de difusão que inicialmente, em $t=0$, valia $c(x,0)$ qualquer. Note que $C(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \frac{e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} dz$ satisfaz a equação de difusão.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \right] C(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(z) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} \right] = 0, \text{ pois } u = x - z,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \text{ e } \frac{\partial}{\partial t} \text{ não muda. } \frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{e^{-\frac{u^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Só que agora podemos tomar o $\lim_{t \rightarrow 0}$ de ambos os lados:

$$\lim_{t \rightarrow 0} C(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \delta(z-x) dz$$

$$C(x,0) = f(x)$$

Então:

$$C(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(z,0) \frac{e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} dz$$

É a solução da equação de difusão com a condição inicial dada.

3.3.3. O Modelo Black & Scholes

Vamos usar a seguinte notação nas grandezas que aparecem no modelo de Black&Scholes: D é dinheiro, S o preço da ação e c o prêmio da opção de compra. Nossa convenção de sinais é a do investidor que entra com dinheiro positivo em $t=0$ para receber dinheiro no momento seguinte. Assim quantidades positivas em $t=0$ significa que o investidor pagou e negativas que ele recebeu. A análise é feita sobre o ponto de vista do lançador da opção. As hipóteses do modelo de Black & Scholes são as seguintes:

1. Mercado perfeito.
2. A taxa de renda fixa vale $r = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$ e não há limite nem racionamento de crédito portanto, $dD = rDdt$.
3. O preço das ações segue uma Distribuição Browniana Geométrica: $dS = \mu S dt + \sigma S dW$, onde μ é o drift, ou o rendimento determinístico, σ a volatilidade e W um processo de Wiener, ou movimento Browniano padrão.
4. O retorno de portfólios de arbitragem sem riscos é nulo.

3.3.3.1. Desenvolvimento da equação diferencial estocástica de Black & Scholes:

Se $c(S,t)$ é o prêmio da opção então a expansão em série de Taylor com o Lema de Itô é dada por:

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial c}{\partial S} dW$$

Agora, vamos criar um portfólio de arbitragem com um investimento I aplicando D em renda fixa, comprando q ações por qS e vendendo uma opção por c , ou seja, $I = D + qS - c$. O retorno desse portfólio é dado pela soma dos retornos: $dI = dD + qdS - dc$. Substituindo as expressões acima temos que:

$$dI = rDdt + q[\mu Sdt + \sigma SdW] - \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial c}{\partial S} dW \right]$$

Que pode ser escrito como:

$$dI = \left[rD + \mu S \left(q - \frac{\partial c}{\partial S} \right) - \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \left[q - \frac{\partial c}{\partial S} \right] dW$$

3.3.3.2. Eliminação do risco

Observando a expressão acima percebemos que o retorno contém um termo determinístico e um termo estocástico. Para eliminar o risco precisamos anular o termo estocástico, o que é feito obrigando: $q - \frac{\partial c}{\partial S} = 0$ ou seja $q = \frac{\partial c}{\partial S}$. Voltando ao modelo binomial

percebemos que a replicação do portfólio foi feita comprando $q = \frac{c_U - c_D}{S_U - S_D} = \frac{\delta c}{\delta S}$ que é

versão discreta do hedge $q = \frac{\partial c}{\partial S}$ que acabamos de obter. Esse é o chamado delta-hedging.

Note que se trata de um hedge dinâmico pois a quantidade de ações vai mudando ao longo do tempo de acordo com a mudança dos pagamentos possíveis para a opção. No modelo de Black&Scholes o delta hedging elimina completamente o risco.

3.3.3.3. Desaparecimento do DRIFT

Note entretanto que ao escolher $q = \frac{\partial c}{\partial S}$ o termo contendo o drift desaparece e

ficamos com:

$$dI = \left[rD - \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right] dt$$

Vale a pena perceber aqui que a eliminação do risco eliminou o retorno determinístico e tudo vai depender apenas do retorno de renda fixa do mercado. É análogo ao fato de que usamos as probabilidades de risco neutra no modelo binomial e não as probabilidades verdadeiras. Na probabilidade de risco neutra o preço da ação se torna um Martingale e o retorno esperado com essa probabilidade é o retorno de mercado da renda fixa. Isso justifica o segundo procedimento que utilizamos para calcular a fórmula de Black & Scholes obrigando a ação a apresentar um $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ para a esperança de retorno ser igual a da renda fixa. Note, entretanto, que a ação poderia apresentar qualquer retorno determinístico $\mu \neq r - \frac{\sigma^2}{2}$ por que ele desapareceu na eliminação do risco.

Só falta agora impor a condição de que portfólios de arbitragem apresentem retornos nulos, ou haveria oportunidade de arbitragem. Para ser um portfólio de arbitragem é necessário que $I = D + qS - c = 0$, ou $D = c - S \frac{\partial c}{\partial S}$, logo:

$$dI = \left[rc - \frac{\partial c}{\partial t} - rS \frac{\partial c}{\partial S} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \right] dt = 0 \text{ e chegamos na equação diferencial}$$

estocástica de Black & Scholes:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} - rc = 0$$

3.3.3.4. Condições iniciais

Para a call as soluções iniciais são as seguintes:

Se o valor da ação é nulo então uma opção sobre ela nada custa pois nada se deve pagar no final. Matematicamente isso é escrito como $c(0, t) = 0$. Se a opção é instântanea,

i.e., $t = T$, só existem duas alternativas: $S_T > X$ e o lançador exigiria $c = S_T - X$ para cobrir seu prejuízo ou $S_T < X$ e a opção nada custa. Matematicamente isso é escrito como $c(S_T, T) = \text{Max}[S_T - X, 0]$. As duas condições iniciais portanto são: $c(0, t) = 0$ e $c(S_T, T) = \text{Max}[S_T - X, 0]$.

3.3.3.5. Solução da equação diferencial de Black & Scholes.

Existem duas formas de chegar à solução de Black&Scholes. Uma é usar a fórmula já conhecida e verificar que ela satisfaz a equação diferencial e às condições iniciais. Outra, a utilizada originalmente no trabalho de 1973 é usar mudanças de variáveis para converter a equação diferencial de B&S na equação de difusão. Vamos usar o método original nesse trabalho.

3.3.4. Conversão da Equação de B&S na equação de Difusão

A equação de B&S $\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$ envolve derivada segunda em relação à S e primeira em relação à t mas não é a equação de difusão porque envolve primeira derivada em relação à S , o sinal da derivada em t está trocado, está multiplicada por S e S^2 e tem um termo rc a mais. Vamos aplicar um conjunto de transformações até levar essa equação para a equação de difusão, explicando o papel de cada uma dessas transformações.

Transformação 1: Para se livrar de S e S^2 : fazer $u = \ln \frac{S}{X}$, mantendo o X para que $\frac{S}{X}$

seja adimensional, $\frac{\partial C}{\partial t}$ não muda mas $\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial u}$ e

$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial u} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial C}{\partial u} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 C}{\partial u^2}$. Dessa forma a equação se transforma em

$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{1}{S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{1}{S^2} \left[-\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} \right] = rC$ que resulta em:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = rC$$

Transformação 2: Para se livrar do rC . Se $C(u, t)$ não dependesse de u teríamos

$$\frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial C}{\partial t} = rC. \text{ Logo, } C = e^{rt} \text{ ou } C = e^{-r(T-t)}. \text{ Fazendo } C(u, t) = e^{-r(T-t)}y(u, t)$$

então

$$\frac{\partial C}{\partial t} = re^{-r(T-t)}y + e^{-r(T-t)}\frac{\partial y}{\partial t} = rC + e^{-r(T-t)}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$rC + e^{-r(T-t)}\frac{\partial y}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-r(T-t)}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2}e^{-r(T-t)}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = rC$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0$$

Transformação 3: Para se livrar de constantes e trocar o sinal de $\frac{\partial y}{\partial t}$

$$t' = \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}}(T - t) \text{ e } u' = \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}}u$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{\partial y}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial u} = -\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{\partial y}{\partial u'}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial y}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial u} = -\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{\partial^2 y}{\partial u'^2}$$

Substituindo:

$$-\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{\partial y}{\partial u'} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial u'^2} = 0$$

$$-\frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial y}{\partial u'} + \frac{\partial^2 y}{\partial u'^2} = 0$$

Transformação 4: Para se livrar de $\frac{\partial y}{\partial u'}$

$$y(z, t') = y(u' + t', t'), \quad z = u' + t'$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial u'}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u'^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} y(z, t') = \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t'} + \frac{\partial y}{\partial t'} = \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial t'}$$

$$-\frac{\partial y}{\partial t'} - \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0$$

$$-\frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0$$

Ou seja, $y = \frac{e^{-\frac{(u'+z)^2}{4t'}}}{\sqrt{4\pi t'}}$ é solução de $-\frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial y}{\partial u'} + \frac{\partial^2 y}{\partial u'^2} = 0$

$$\text{Agora: } y(z, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dz' y(z', 0) \frac{e^{-\frac{(z-z')^2}{4t'}}}{\sqrt{4\pi t'}}$$

$t \rightarrow 0, t \rightarrow T. t' = \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} (T - t).$ Para $t' = 0, z = u'.$ O termo $e^{-r(T-t)} \rightarrow 1.$ A condição

inicial é que: $t = T, C = \max[S - X, 0],$ como $u = \ln \frac{S}{X} \rightarrow S = xe^u$

$$\max[S - X, 0] = H[xe^u - x] = H[x(e^u - 1)] = \begin{cases} x(e^u - 1) & \text{se } e^u - 1 > 0 \\ 0 & \text{se } e^u - 1 < 0 \end{cases}$$

Em termos da variável z temos que:

$$y(z, 0) = \begin{cases} x(e^u - 1) & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$$

Mas $u = \frac{\frac{\sigma^2}{2}}{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} z$ para $t' = 0,$ então:

$$y(z,0) = \begin{cases} x \left[e^{\frac{\sigma^2/2}{(r-\sigma^2/2)} - 1} \right] & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

$$y(z,t') = \int_0^{+\infty} x \left[e^{\frac{\sigma^2/2}{(r-\sigma^2/2)} z'} - 1 \right] \frac{e^{-\frac{(z-z')^2}{4t'}}}{\sqrt{4\pi t'}} dz'$$

Vamos mudar a varia para $q = \frac{z' - z}{\sqrt{2t'}}$, $z' = z + \sqrt{2t'}q$

$$dq = \sqrt{2t'} dq. \text{ Se } z' = 0, q_0 = -\frac{z}{\sqrt{2t'}}$$

$$q_0 = \frac{u'+t'}{\sqrt{2t'}} = \frac{\frac{(r-\sigma^2/2)}{\sigma^2/2} u + \frac{(r-\sigma^2/2)^2}{\sigma^2/2} (T-t)}{\sqrt{2 \frac{(r-\sigma^2/2)^2}{\sigma^2/2} (T-t)}} = \frac{u + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

$$q_0 = -\frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = -d_2$$

$$y = \int_{-d_2}^{\infty} x \left[e^{\frac{\sigma^2/2}{(r-\sigma^2/2)} (\sqrt{2t'}q+z)} - 1 \right] \frac{e^{-\frac{q^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dq$$

$$y = x e^{\frac{\sigma^2/2}{(r-\sigma^2/2)} z} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\frac{\sigma^2/2}{(r-\sigma^2/2)} \sqrt{2t'}q - \frac{q^2}{2}} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} - x \int_{-d_2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{q^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dq$$

$$\frac{\frac{\sigma^2}{2}}{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} z = \frac{\frac{\sigma^2}{2}}{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} (u'+t') = \frac{\frac{\sigma^2}{2}}{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \left[\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\frac{\sigma^2}{2}} u + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{2}} (T-t) \right]$$

$$\frac{\frac{\sigma^2}{2}}{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} z = u + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$y = xe^u e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{\frac{\sigma^2/2}{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)} \sqrt{2\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\sigma^2/2} (T-t) q - \frac{q^2}{2}} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} - xN(d_2)$$

$$e^u = e^{\frac{\ln \frac{S}{X}}{X}} = \frac{S}{X}, \text{ então:}$$

$$y = Se^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}q - \frac{q^2}{2}} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} - xN[d_2]$$

$$-\frac{q^2}{2} + \sigma\sqrt{T-t}q = -\frac{1}{2} \left[q^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}q + \sigma^2(T-t) - \sigma^2(T-t) \right]$$

$$-\frac{q^2}{2} + \sigma\sqrt{T-t}q = -\frac{1}{2} \left[q - \sigma\sqrt{T-t} \right]^2 + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$y = Se^{r(T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[q - \sigma\sqrt{T-t} \right]^2} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} - xN[d_2]$$

$$q' = q - \sigma\sqrt{T-t}, q'_0 = -d_2 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1, d_1 = d_2 = \sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{x} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln \frac{S}{x} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{x} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$y = Se^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{q'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dq' - xN[d_2]$$

$$C(s, t) = SN[d_1] - e^{-r(T-t)} xN[d_2]$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{x} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad e \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S}{x} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

3.4. Testes empíricos da fórmula de Black&Scholes para CALL.

Para a realização dos testes empíricos foi selecionada como ativo-objeto a ação da Petrobrás (PETR4), que possui liquidez elevada, cotada a 25,85. Foram analisadas duas séries de CALLS para essas ações com $t=0$ em 12 de novembro de 2010: as PETRL (Tabela 7) com vencimento (T) em 20 de dezembro de 2010, e as PETRA (Tabela 8), $t=T$ em 17 de janeiro de 2011. A seguir apresentamos passo a passo as etapas para o cálculo do prêmio justo. A volatilidade foi calculada utilizando o *Método de Estimador de Média Móvel com Amortecimento Exponencial (EWMA)*. A taxa de juros utilizada foi calculada com base no DI futuro. Em seguida utilizamos a fórmula de Black & Scholes para o cálculo do prêmio e obtenção da volatilidade implícita.

Código	Preço de						Ofertas		Negócios Realizados	
	Exercício	Abertura	Mínima	Máxima	Média	Fechamento	Compra	Venda	Número	Quantidade
PETRL18	17,88	8,71	8,31	8,71	8,47	8,31	8,15	9,39	7	800
PETRL20	19,88	6,63	6,30	6,63	6,48	6,31	6,21	6,99	66	18.300
PETRL22	21,71	4,85	4,45	4,95	4,76	4,45	4,45	4,55	189	161.700
PETRL24	23,71	3,05	2,56	3,05	2,85	2,66	2,66	2,7	1.930	5.541.900
PETRL25	24,88	2,11	1,81	2,11	1,97	1,81	1,71	1,99	7	1.100
PETRL26	25,88	1,34	1,10	1,43	1,25	1,14	1,13	1,14	6.428	10.840.100
PETRL28	27,71	0,55	0,39	0,56	0,47	0,42	0,42	0,43	5.284	18.757.600
PETRL29	28,88	0,29	0,23	0,31	0,26	0,23	0,21	0,28	6	1.600
PETRL30	29,31	0,19	0,13	0,20	0,16	0,13	0,13	0,14	2.511	11.620.100
PETRL31	30,71	0,15	0,09	0,15	0,12	0,09	0,07	0,12	4	2.000
PETRL32	31,71	0,07	0,04	0,07	0,06	0,05	0,05	0,06	381	3.414.100
PETRL34	33,31	0,03	0,02	0,03	0,03	0,03	0,02	0,03	39	463.600
PETRL36	35,31	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	13	70.500
PETRL38	37,31	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	2	4.100
PETRL40	39,31	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	-	0,01	9	255.000

Tabela 7. Série de CALLs PETRL - **Fonte:** BMF&Bovespa – Boletim Diário

Nota-se da tabela que o maior volume de negócios se concentra nas proximidades do valor atual da ação, de 25,84, caindo para valores fora-do-dinheiro. O pico de liquidez, para $X = 27,71$ indica que o mercado espera subida na cotação dessa ação, embora próxima do valor atual de 25,84. A Figura 24 mostra o gráfico do prêmio da opção em função do “moneyness”, $(X - S)$ para esse A-O.

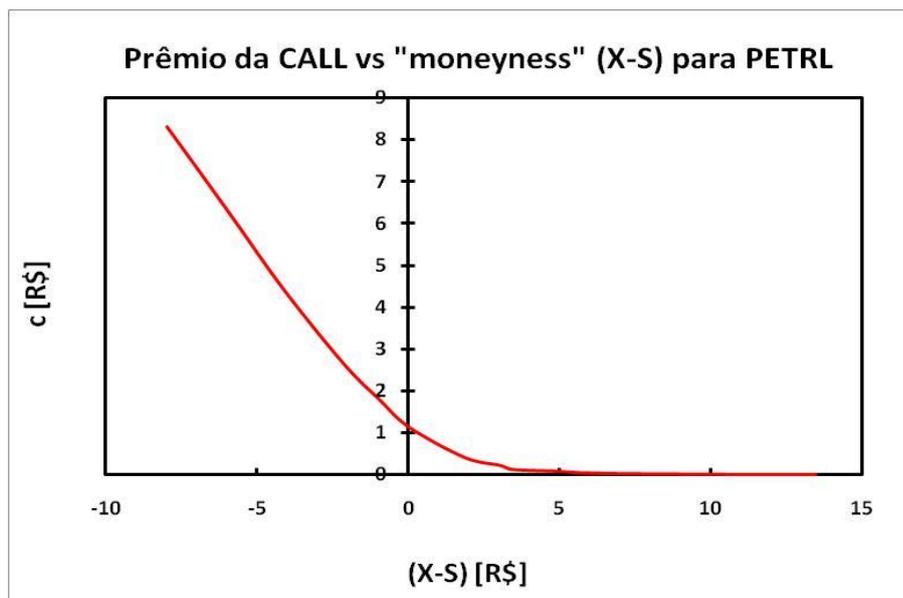


Figura 24. Preço da CALL em função do "moneyness" para ações da Petrobrás PETRL. O índice L se refere à Maturidade T dessa opção e os números que se seguem indicam os diferentes strike prices ofertado pelo mercado

Código	Preço de Exercício	Preço de					Ofertas		Negócios Realizados	
		Abertura	Mínima	Máxima	Média	Fechamento	Compra	Venda	Número	Quantidade
PETRA18	17,88	8,81	8,41	8,81	8,51	8,41	8,31	9,49	6	900
PETRA20	19,88	7,01	6,51	7,01	6,63	6,55	6,35	7,39	6	1.100
PETRA22	21,88	5,01	4,65	5,15	4,78	4,65	4,55	5	12	3.100
PETRA24	23,88	3,33	2,90	3,47	3,07	2,90	2,9	3,03	107	91.200
PETRA26	25,88	2,00	1,54	2,00	1,74	1,55	1,55	1,77	230	250.900
PETRA27	27,00	1,21	1,05	1,21	1,13	1,05	1,01	1,19	4	400
PETRA28	27,88	0,92	0,71	0,93	0,81	0,74	0,74	0,82	570	826.700
PETRA29	28,88	0,51	0,47	0,51	0,5	0,51	0,45	0,55	3	1.400
PETRA30	29,71	0,41	0,30	0,41	0,35	0,31	0,31	0,33	364	560.500
PETRA32	31,88	0,18	0,14	0,20	0,17	0,15	0,15	0,16	182	226.800
PETRA34	33,88	0,08	0,08	0,09	0,08	0,08	0,07	0,08	28	154.700
PETRA36	35,88	0,03	0,03	0,04	0,03	0,04	0,03	0,05	10	30.100
PETRA38	37,88	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	3	8.100

Tabela 8. Série de CALLs PETRA – Fonte: BMF&Bovespa – Boletim Diário

A Figura 25 mostra o mesmo tipo de gráfico para a opção PETRA, com diferente maturidade.

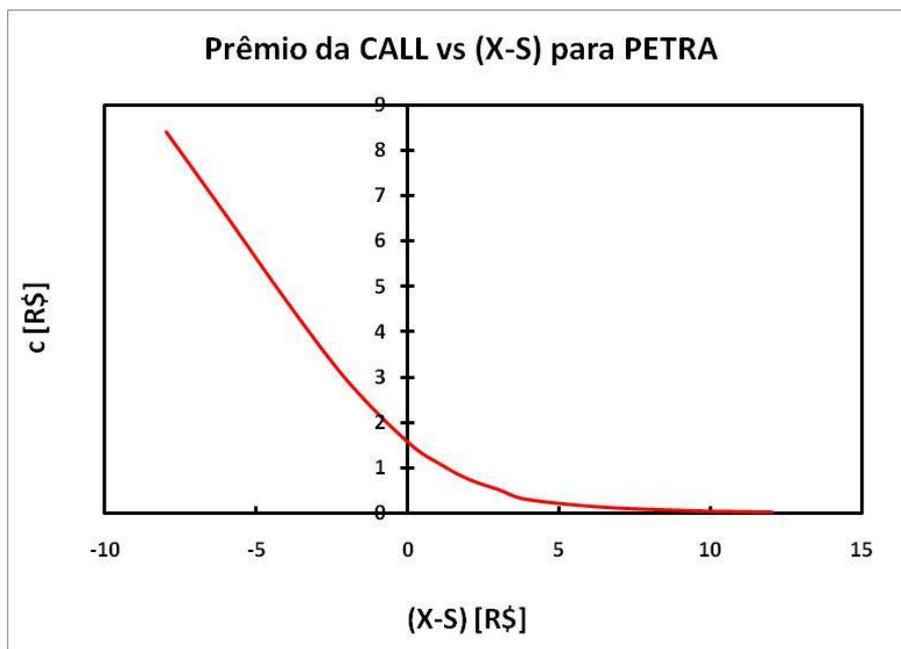


Figura 25. Preço da CALL em função do “moneyness” para ações da Petrobrás PETRA

3.5. Cálculo da Volatilidade pelo Método de Estimador de Média Móvel com Amortecimento Exponencial (EWMA)

O EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) é um modelo de média móvel com um fator de decaimento exponencial. Sua fórmula pode ser expressa por

$$EWMA = \sqrt{\sum_{t=1}^n \gamma_n (r_t - E[r])^2}, \text{ em que } \gamma_n = \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda)^n} \lambda^n \text{ é o Peso Ajustado, cuja somatória}$$

deve ser igual a um. Para um λ de 0,94, e uma série de dados de 125 dias, atingiu-se o resultado de 33,38% ao ano, volatilidade bem próxima à informada pela BMF&Bovespa, que foi de 31,36% ao ano. O passo a passo do cálculo foi feito utilizando o Excel de acordo com

a Tabela 10. A coluna r computa o log-retorno, cuja fórmula é $\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$. Ao final da tabela é

calculada a média dos valores, resultando na $E[r]$. A fórmula da última coluna é

$\gamma_n (r_t - E[r])^2$. A raiz quadrada da somatória dará o valor da volatilidade diária pelo EWMA,

sendo necessário multiplicar este valor por 252 para chegar ao valor anual.

$\lambda =$	0,94
$(1 - \lambda) =$	0,06
$(1 - \lambda)^n =$	0,999562496
$\frac{(1 - \lambda)}{(1 - \lambda)^n} =$	0,060026262

Tabela 9. Construção do EWMA no Excel

Data	n	Preço	Peso Ajustado (γ)	r	EWMA
16/11/2010	0	25,40	0,060026262	-0,017561427	1,58896E-05
11/12/2010	1	25,85	0,056424686	-0,033101748	5,70957E-05
11/11/2010	2	26,72	0,053039205	-0,015227778	1,03013E-05
11/10/2010	3	27,13	0,049856853	0,000368664	1,3741E-07
11/09/2010	4	27,12	0,046865441	-0,015004856	8,81335E-06
11/08/2010	5	27,53	0,044053515	0,010222798	5,84056E-06
11/05/2010	6	27,25	0,041410304	-0,009132484	2,54596E-06
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20/05/2010	122	27,43	3,16184E-05	-0,040019631	4,74234E-08
19/05/2010	123	28,55	2,97213E-05	-0,02319647	1,42611E-08
18/05/2010	124	29,22	2,7938E-05	-0,021331434	1,12199E-08
17/05/2010	125	29,85			

$$\sum \gamma_n = 1 \quad E[r] = -0,001291485 \sum_{t=1}^n \gamma_n (r_n - E[r])^2 = 0,000442111$$

Tabela 10. Cálculo do EWMA no Excel

3.6. Cálculo da Taxa de Juros através do DI Futuro

As opções escolhidas têm vencimento em 20 de dezembro de 2010 e em 17 de janeiro de 2011, distantes 26 e 46 dias úteis da data de análise, respectivamente. A taxa de juros a ser utilizada no modelo de Black & Scholes será calculada a partir dos contratos de DI futuro. A partir dos valores de ajuste diário, foi calculada a taxa implícita para os papéis de DI futuro com vencimento em novembro e dezembro de 2010.

Vencimento	AJUSTE	DU	Taxa Implícita Anual (r_n)
Z10	99.519,89	12	10,63%
F11	98.603,51	35	10,66%
G11	97.770,28	56	10,68%

Tabela 11. DI Futuro

A partir destes dados, foi utilizado o método de interpolação simples para obter a taxa de juros relativa ao prazo de 26 dias úteis (du), de acordo com a fórmula:

$$r_{26du} = \left(\frac{r_{F11} + 1}{r_{Z10} + 1} \right)^{\left(\frac{26-12}{35-12} \right)} (r_{Z10} + 1) - 1$$

O resultado obtido foi uma taxa de juros de 1,0498% para o período de 26 dias. Em termos anuais a taxa é de 10,652%. Para utilização no modelo de Black & Scholes, deve ser uma série contínua, obtida a partir de $r = \ln(1 + R)$. O resultado é uma taxa de 10,1222% [1/ano].

O mesmo procedimento foi aplicado para calcular a taxa de juros da série de CALLS com vencimento em 17 de janeiro de 2011. O resultado foi uma taxa anual de 10,671%, ou 10,1394% depois de aplicado o logaritmo.

3.7. Prêmio Justo

Aqui, aplicaremos a fórmula de Black&Scholes, demonstrada ao longo deste capítulo, para a precificação de uma CALL:

$$c = S\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2), \text{ com } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ e } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

No Excel, os dados foram organizados conforme a Tabela 12, expressos em termos anuais. Os dados utilizados no cálculo do prêmio justo das CALLS PETRL estão contidos nas Tabela 12 e Tabela 13, e os das PETRA estão nas Tabela 14 e Tabela 15.

PETRL	
$S =$	25,85
$\sigma_{EWMA} =$	33,38%
$r =$	0,10122163
$T =$	0,10317460
$\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T =$	0,01619095
$\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T =$	0,00469605
$\sigma\sqrt{T} =$	0,10721425
$e^{-rT} =$	0,98961084

Tabela 12. Construção do B&S no Excel para PETRL

A fórmula de cálculo da c no Excel foi feita da seguinte forma: o valor das expressões $\Phi(d_1)$ e $\Phi(d_2)$ na fórmula de c foram obtidas a partir da fórmula no Excel “=DIST.NORMP(z)”, ou “=NORMSDIST(z)”, dependendo da versão do Excel utilizada [português ou inglês], em que z será o valor de d_1 e d_2 , calculadas através das fórmulas já demonstradas.

$$\Phi(d_1) = \text{DIST.NORMP}(d_1)$$

$$\Phi(d_2) = \text{DIST.NORMP}(d_2)$$

A fórmula no Excel será “=DIST.NORMP(d_1)* $S - X * e^{-rT} *$ DIST.NORMP(d_2)”. Note que, na Tabela 12, criamos células para as variáveis S e e^{-rT} , de onde puxaremos os valores, sendo necessário travar a fórmula nessas células usando \$ para que seja aplicada corretamente ao copiá-la nas linhas seguintes. Os valores de X estão na Tabela 7.

CALL	X	d_1	d_2	c
PETRL18	17,88	3,5893	3,4820	8,1559
PETRL20	19,88	2,6003	2,4931	6,1807
PETRL22	21,71	1,7789	1,6717	4,4089
PETRL24	23,71	0,9570	0,8498	2,6496
PETRL25	24,88	0,5077	0,4005	1,8024
PETRL26	25,88	0,1402	0,0330	1,2236
PETRL28	27,71	-0,4971	-0,6043	0,5209
PETRL29	28,88	-0,8828	-0,9900	0,2734
PETRL30	29,31	-1,0206	-1,1279	0,2117
PETRL31	30,71	-1,4558	-1,5631	0,0861
PETRL32	31,71	-1,7547	-1,8619	0,0426
PETRL34	33,31	-2,2138	-2,3211	0,0126
PETRL36	35,31	-2,7577	-2,8649	0,0024
PETRL38	37,31	-3,2716	-3,3788	0,0004
PETRL40	39,31	-3,7586	-3,8658	0,0001

Tabela 13. Cálculo do prêmio no Excel para PETRL

PETRA	
$S =$	25,85
$\sigma_{EWMA} =$	33,38%
$r =$	0,1014
$T =$	0,1825
$\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T =$	0,0287
$\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T =$	0,0083
$\sigma\sqrt{T} =$	0,1426
$e^{-rT} =$	0,9817

Tabela 14. PETRA

CALL	X	d_1	d_2	c
PETRA18	17,88	2,785987	2,643379	8,30
PETRA20	19,88	2,042472	1,899864	6,36
PETRA22	21,88	1,37029	1,227681	4,52
PETRA24	23,88	0,756943	0,614335	2,92
PETRA26	25,88	0,192956	0,050348	1,69
PETRA27	27,00	-0,10413	-0,24673	1,18
PETRA28	27,88	-0,32903	-0,47164	0,87
PETRA29	28,88	-0,57614	-0,71874	0,60
PETRA30	29,71	-0,77482	-0,91743	0,43
PETRA32	31,88	-1,26915	-1,41176	0,17
PETRA34	33,88	-1,69581	-1,83842	0,06
PETRA36	35,88	-2,098	-2,24061	0,02
PETRA38	37,88	-2,47837	-2,62097	0,01

Tabela 15. Cálculo do prêmio no Excel para PETRA

3.8. Volatilidade Implícita

Para calcular a volatilidade implícita foi construída a Tabela 16. A coluna X contém os *strike prices*, e a $c_{mercado}$ mostra os prêmios efetivamente negociados no mercado. As colunas d_1 , d_2 e $c_{simplicio}$ utilizam como volatilidade os dados da coluna do $\sigma_{implícito}$. Criou-se outra coluna chamada erro, com a seguinte fórmula¹⁸:

$$erro = (c_{mercado} - c_{simplicio})^2 \times 1000$$

A partir destes dados foi utilizada a ferramenta Solver do Excel, com os seguintes parâmetros: $erro = 0$, fazendo variar os valores de $\sigma_{implícito}$. Os resultados estão expostos nas tabelas abaixo.

CALL	X	$c_{mercado}$	$\sigma_{implícito}$	d_1	d_2	$c_{simplicio}$	$erro$
PETRL18	17,88	8,31	78,31%	1,633	1,381311	8,31	8,6E-11
PETRL20	19,88	6,31	58,08%	1,557	1,370291	6,31	5,5E-07
PETRL22	21,71	4,45	38,33%	1,564	1,440862	4,45	1,1E-09
PETRL24	23,71	2,66	33,87%	0,945	0,835848	2,66	6,6E-07
PETRL25	24,88	1,81	33,64%	0,505	0,396581	1,81	4,3E-07
PETRL26	25,88	1,14	30,83%	0,143	0,044234	1,14	7,1E-11
PETRL28	27,71	0,42	29,87%	-0,567	-0,66329	0,42	3,4E-11
PETRL29	28,88	0,23	31,39%	-0,945	-1,04615	0,23	7,1E-10
PETRL30	29,31	0,13	28,84%	-1,197	-1,2897	0,13	1,9E-09
PETRL31	30,71	0,09	33,71%	-1,44	-1,54856	0,09	2,7E-12
PETRL32	31,71	0,05	34,37%	-1,701	-1,81153	0,05	4,5E-11
PETRL34	33,31	0,03	37,83%	-1,94	-2,06133	0,03	7,9E-07
PETRL36	35,31	0,02	42,62%	-2,133	-2,27014	0,02	7E-07
PETRL38	37,31	0,01	45,05%	-2,392	-2,53631	0,01	1,1E-07
PETRL40	39,31	0,01	50,68%	-2,429	-2,59208	0,01	3,5E-07

Tabela 16. Cálculo da volatilidade implícita no Excel para PETRL

O mesmo procedimento foi utilizado para calcular as CALLs com vencimento em 17 de janeiro de 2011.

¹⁸ O erro poderia ser escrito simplesmente como $erro = (c_{mercado} - c_{simplicio})$ mas preferimos amplificá-lo, elevando-o ao quadrado e multiplicando por 1000 para aumentar a sensibilidade do SOLVER na procura da solução que anula esse erro.

Código	K	$C_{mercado}$	$\sigma_{implícito}$	d_1	d_2	c	Erro
PETRA18	17,88	8,41	55,92%	1,740	1,501	8,41	1,5E-09
PETRA20	19,88	6,55	50,32%	1,415	1,200	6,55	1,3E-07
PETRA22	21,88	4,65	39,74%	1,176	1,006	4,65	7,7E-12
PETRA24	23,88	2,90	32,74%	0,769	0,629	2,90	2,2E-07
PETRA26	25,88	1,55	30,14%	0,199	0,070	1,55	2,8E-18
PETRA27	27,00	1,05	30,33%	-0,128	-0,258	1,05	4,2E-07
PETRA28	27,88	0,74	30,17%	-0,378	-0,507	0,74	1,8E-07
PETRA29	28,88	0,51	30,88%	-0,634	-0,766	0,51	3,6E-07
PETRA30	29,71	0,31	29,43%	-0,897	-1,023	0,31	1,8E-12
PETRA32	31,88	0,15	32,38%	-1,312	-1,451	0,15	3,5E-10
PETRA34	33,88	0,08	34,75%	-1,623	-1,772	0,08	5,7E-07
PETRA36	35,88	0,04	36,27%	-1,919	-2,074	0,04	4,5E-08
PETRA38	37,88	0,02	37,54%	-2,187	-2,347	0,019999	5,8E-10

Tabela 17. Cálculo da volatilidade implícita no Excel para PETRA

Pode ser muito trabalhoso obter todos os pontos necessários para fazer a curva da volatilidade implícita, repetindo os procedimentos para o cálculo através do Solver para cada linha da tabela. No Apêndice 7 é demonstrado como construir uma macro com função loop para obter facilmente a curva da volatilidade implícita.

As Figuras Figura 26 e Figura 27 apresentam o fenômeno conhecido como sorriso da volatilidade. Comparando os valores de prêmios justos calculados pelo modelo de Black&Scholes com os prêmios praticados no mercado, percebemos que há uma distorção conforme as opções se movem para fora-do-dinheiro. O mercado exige prêmios maiores para opções nessas condições. Podemos observar no gráfico que conforme o preço de exercício se aproxima do preço *spot* a diferença entre a volatilidade implícita e a calculada pelo método do Alisamento Exponencial é reduzida.

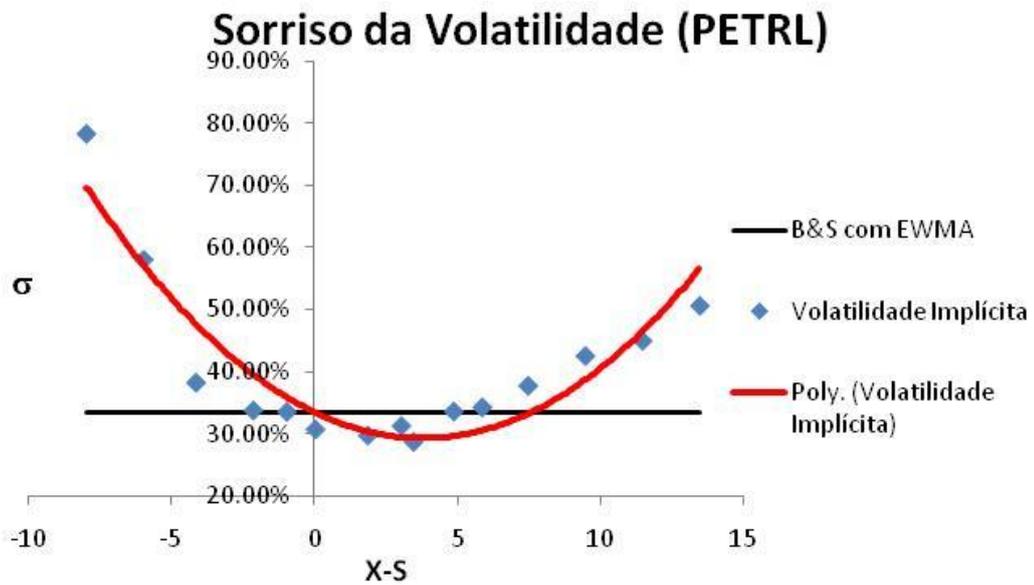


Figura 26. Sorriso da volatilidade para PETRL

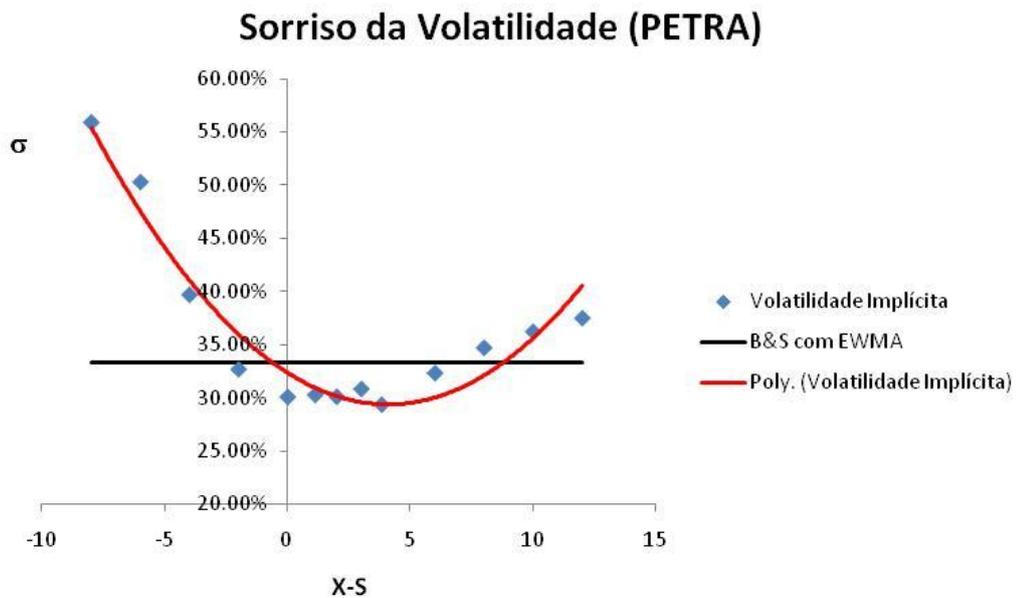


Figura 27. Sorriso da volatilidade para PETRA

3.9. Conclusão

Nesse capítulo mostramos como a ideia de um hedge dinâmico capaz de eliminar completamente o risco pode ser usado nos modelos de precificação das opções, começando pelo modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein [CRR]. Trata-se de um modelo em que os preços dos ativos objetos seguem um processo multiplicativo que converge, no limite de n muito grande para uma distribuição log-Normal, em outras palavras, para o Movimento Browniano Geométrico. A seguir mostramos que nesse limite de n muito grande

os resultados obtidos pelo modelo binomial convergem para os resultados obtidos por Black & Scholes. Também mostramos que as suposições de que os agentes são neutros ao risco, que o preço do A-O segue o processo estocástico de um Movimento Browniano Geométrico, ou uma distribuição log-Normal, e que a esperança do log-retorno deve ser a mesma da taxa de juros sistêmica, são suficientes para obter o resultado de Black & Scholes. Embora o SORRISO DA VOLATILIDADE seja um fenômeno universal, observado em todas as comparações empíricas com todos os mercados de opções no mundo, preferimos ilustrá-lo com dados reais brasileiros obtidos na BMFBovespa. Esse procedimento auxilia a entender toda a mecânica utilizada no cálculo das opções, incluindo as formas de extrair o log-retorno e as volatilidades históricas dos dados do mercado. Finalmente chegamos às figuras do SORRISO DA VOLATILIDADE mostradas nos gráficos das Figuras Figura 26 e Figura 27.

O sorriso da volatilidade representa a maior dificuldade empírica do modelo de Black & Scholes. Analisando a expressão de sua fórmula percebe-se que o prêmio depende de variáveis definidas em contrato, portanto perfeitamente conhecidas, como S , X e T , em conjunto com a taxa de log-retorno r e a volatilidade σ . Como mostrou o procedimento acima, a taxa de log-retorno pode ser obtida com razoável precisão do mercado a termo. Trata-se de uma variável aplicada a toda a economia e não depende em nada do ativo-objeto utilizado na opção. A única variável específica do ativo-objeto cujo valor não está definido no contrato é a volatilidade.

Pode-se argumentar que a volatilidade que se aplicaria ao modelo de Black & Scholes seria a volatilidade durante o período de validade da opção, desconhecida, e não a volatilidade histórica, do passado, utilizada apenas como inferência do que seria a volatilidade futura. Nesse aspecto seria perfeitamente aceitável que os prêmios realmente praticados pelo mercado fossem diferentes dos prêmios obtidos com a fórmula de Black & Scholes. Entretanto, qualquer que seja a volatilidade real de um A-O ela não deve depender do strike price de um contrato de opção, logo a curva da volatilidade implícita deveria ser uma reta horizontal.

O SORRISO DA VOLATILIDADE indica, portanto, que existe alguma dificuldade mais séria nas hipóteses do modelo de Black & Scholes. Apesar disso, Black & Scholes representa, com justiça, um dos modelos de maior sucesso na economia sendo utilizado rotineiramente pelo mercado, que corrige seus resultados com a curva do sorriso da volatilidade. Os erros observados entre os prêmios calculados com a fórmula de Black & Scholes mesmo utilizando a volatilidade histórica e os prêmios praticados pelo mercado não são grandes, embora erros relativos possam ser grandes para prêmios de opções quase nulos fora-do-dinheiro. Dada a importância do mercado de derivativos na distribuição de riscos do mercado financeiro o prêmio Nobel desse assunto foi mais do que merecido. Dois

aspectos do modelo de Black & Scholes mereceram atenção especial: o fato de que uma probabilidade risco-neutra, ou martingale, pode ser utilizada através do processo de hedge perfeito e de que essa utilização cancelou a dependência do drift do preço das ações no modelo. Profissionais do mercado sabem o quanto é difícil estimar o drift do preço das ações e qualquer modelo dependente do mesmo estaria sobre suspeita.

Entretanto, quase os mesmos motivos servem de incentivo na busca intensa de uma generalização do modelo Black & Scholes com maior aderência aos preços de mercado. A importância do mercado de derivativos e o impacto causado pelos resultados de Black & Scholes significam uma alta recompensa para quem desenvolver modelos mais realistas. Além disso, o fato de que os resultados de Black & Scholes se encontram razoavelmente próximos dos valores reais, indica que trata-se de um campo em que modelagem matemática é possível e que comparação com a realidade pode ser feita sem dificuldades.

Tipicamente, observações empíricas de teorias e modelos nas ciências humanas são frequentemente impossíveis ou extremamente custosas. Os agentes econômicos em um jogo competitivo usualmente não gostam de fornecer informações, muitas vezes consideradas estratégicas. Mercados financeiros desenvolvidos são uma exceção com as informações disponíveis em tempo real para todos. Trata-se da área da economia, portanto, em que modelos teóricos podem ser mais facilmente testados contra a realidade.

O restante dessa monografia será dedicada ao estudo de modelos de precificação de opções capazes de generalizar o modelo de Black & Scholes, relaxando seus axiomas, principalmente o axioma de que o preço das ações segue um Movimento Browniano Geométrico. O grande teste empírico da qualidade dos modelos será sua capacidade de explicar o SORRISO DA VOLATILIDADE.

4. Generalização do modelo de Black & Scholes

4.1. Polinômios de Hermite

Para a expansão de Edgeworth necessitaremos das definições e propriedades dos polinômios de Hermite, por isso, iniciamos essa seção com o estudo desses polinômios. Existem dois tipos de polinômios de Hermite, os da física e os da probabilidade. Na física, por exemplo, a solução do oscilador harmônico quântico é dada pelos polinômios de Hermite. Não são completamente equivalentes por conta de um fator de escala na variável x e de diferentes constantes multiplicativas. A notação internacional para os dois é a seguinte: $H_n(x)$ são os polinômios da física e $He_n(x)$ os polinômios da probabilidade. As propriedades dos dois estão listadas na Tabela 18. Note que a fórmula de Rodriguez para os polinômios da teoria da probabilidade traz o fator multiplicativo $e^{-\frac{x^2}{2}}$, muito conveniente por se tratar, a menos de uma constante multiplicativa, da fdp da distribuição normal padrão

$\phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, enquanto o da física traz o fator e^{-x^2} , que não é normal padrão.

Propriedade	Probabilidade	Física
Função Geratriz	$e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^n}{n!}$	$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$
1ª Relação de recorrência	$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x)$	$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$
2ª Relação de recorrência	$He'_n(x) = nHe_{n-1}(x)$	$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$
Fórmula de Rodriguez	$e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$
	$\frac{d}{dx} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) \right] = -e^{-\frac{x^2}{2}} He_{n+1}(x)$	$\frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} H_{n-1}(x) \right] = -e^{-x^2} H_n(x)$
	$\int_{-\infty}^x e^{-\frac{x'^2}{2}} He_n(x') dx' = -e^{-\frac{x^2}{2}} He_{n-1}(x)$	$\int_{-\infty}^x e^{-x'^2} H_n(x') dx' = -e^{-x^2} H_{n-1}(x)$
Relação entre as duas formas	$He_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$	$H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} He_n(\sqrt{2}x)$
Polinômio	$He_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m n!}{2^m m! (n-2m)!} x^{n-2m}$	$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m n!}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}$
Primeiro termo	x^n	$2^n x^n$
	$He_0(x) = 1$	$H_0(x) = 1$
	$He_1(x) = x$	$H_1(x) = 2x$
	$He_2(x) = x^2 - 1$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
	$He_3(x) = x^3 - 3x$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
	$He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
	$He_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$	$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
	$He_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$	$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

Tabela 18. Propriedades dos polinômios de Hermite

Para as necessidades da expansão de Edgeworth precisaremos apenas das seguintes propriedades:

- $$e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
- $$\frac{d}{dx} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) \right] = -e^{-\frac{x^2}{2}} He_{n+1}(x)$$
- $$\int_{-\infty}^x e^{-\frac{x'^2}{2}} He_n(x') dx' = -e^{-\frac{x^2}{2}} He_{n-1}(x)$$
- $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (it)^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \phi(x) He_k(x)$$

$$5. \quad He_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m n!}{2^m m!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

Vamos, portanto, usar a função geratriz para mostrar essas propriedades e deixar para o apêndice as outras propriedades dos polinômios de Hermite. Trabalharemos apenas com os polinômios He_n da teoria da probabilidade, mas os passos para demonstrar as propriedades dos polinômios da Física são idênticos.

Começamos com a função geratriz:

$$G(x,t) = e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Completando quadrado no expoente obtemos: $e^{-\left(\frac{t^2}{2} - tx\right)} = e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2}$.

Derivando $e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^n}{n!}$ k vezes em relação à t de ambos os lados:

$$e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{1}{n!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} t^n = \sum_{n=k}^{\infty} He_n(x) \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}$$

Fazendo $t=0$, apenas o termo $n=k$ da somatória sobrevive, logo

$He_k(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2} \Big|_{t=0}$. Derivando diretamente, entretanto, percebe-se que

$\frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2} = -\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2}$, logo $He_k(x) = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{-\frac{1}{2}(t-x)^2} \Big|_{t=0} = (-1)^k e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Dessa forma

obtemos a fórmula de Rodriguez:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Chamando a fdp da distribuição Normal padronizada $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ vemos então

que:

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) = \phi(x) He_n(x)$$

Derivando uma vez de ambos os lados obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) \right] = (-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}} He_{n+1}(x), \text{ ou seja:}$$

$$\frac{d}{dx} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) \right] = -e^{-\frac{x^2}{2}} He_{n+1}(x)$$

Em termos da distribuição normal padronizada obtemos:

$$\frac{d}{dx}[\phi(x)He_n(x)] = -\phi(x)He_{n+1}(x)$$

Integrando $\int_{-\infty}^x e^{-\frac{x'^2}{2}} He_n(x') dx' = -\int_{-\infty}^x \frac{d}{dx'} \left[e^{-\frac{x'^2}{2}} He_{n-1}(x') \right] dx'$ chegamos a:

$$\int_{-\infty}^x e^{-\frac{x'^2}{2}} He_n(x') dx' = -e^{-\frac{x^2}{2}} He_{n-1}(x)$$

Novamente, em termos da normal:

$$\int_{-\infty}^x \phi(x) He_n(x') dx' = -\phi(x) He_{n-1}(x)$$

Finalmente a última propriedade pode ser demonstrada através de:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (it)^k e^{\frac{t^2}{2}} dt = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{\frac{t^2}{2}} dt = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \phi(x)$$

Agora usamos a propriedade $(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \phi(x) = \phi(x) He_n(x)$ para obter:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (it)^k e^{\frac{t^2}{2}} dt = \phi(x) He_k(x)$$

4.1.1. Polinômios

Para obter a expressão do polinômio precisaremos da série de Taylor de $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

e do Binômio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$. Partindo da função geratriz,

$$e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(xt - \frac{t^2}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-1)^k \left(\frac{t}{2} - x \right)^k, \text{ e usando binômio de Newton, chegamos a}$$

$$e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{2^m m! (k-m)!} x^{k-m} t^{k+m}. \text{ Agora fazemos } k+m=n, \text{ ou seja } k=n-m, \text{ notando que se}$$

$k=0$ então $m=0$ e n também começa de zero e que quando $m=k$ então $2m=n$, logo m

varia de zero até $m = \text{int}\left(\frac{n}{2}\right) = \left[\frac{n}{2}\right]$. Substituindo temos, $e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m n!}{2^m m! (n-2m)!} x^{n-2m} \right] \frac{t^n}{n!}$

comparando com $e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^n}{n!}$ extraímos os polinômios:

$$He_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m n!}{2^m m! (n-2m)!} x^{n-2m}$$

O primeiro termo, de mais alta potência, será dado por x^n . Dessa expressão obtemos:

$$He_0(x) = 1$$

$$He_1(x) = x$$

$$He_2(x) = x^2 - 1$$

$$He_3(x) = x^3 - 3x$$

$$He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

$$He_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

Agora estamos prontos para proceder com a expansão de Edgeworth.

4.2. Expansão de Edgeworth

Vamos partir da expansão dos cumulantes e reescrevê-la como

$$\ln \varphi(t) = c_0 + ic_1 t - \frac{c_2}{2} t^2 + i \frac{c_3}{6} t^3 + \frac{c_4}{24} t^4 + o(t^5) \text{ mas sabemos que:}$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \mu, \quad c_2 = \sigma^2, \quad c_3 = m_3 \text{ e } c_4 = m_4 - 3\sigma^4.$$

O skewness é definido por $\gamma = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{c_3}{\sigma^3}$ e a Kurtose por $k = \frac{c_4}{\sigma^4}$. Em termos desses parâmetros temos:

$$\ln \varphi(t) = i\mu t - \frac{1}{2}(\sigma t)^2 - i \frac{\gamma}{6}(\sigma t)^3 + \frac{K}{24}(\sigma t)^4 + o(t^5)$$

Se estamos trabalhando com uma variável de esperança nula e variância unitária, tipo $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, então:

$$\ln \varphi(t) = -\frac{1}{2}t^2 - i \frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{K}{24}t^4 + o(t^5)$$

$$\text{A função característica será dada por } \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} - i \frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{K}{24}t^4 + o(t^5)} = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i \frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{K}{24}t^4 + o(t^5)}$$

Expandindo $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ com $x = -i \frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{K}{24}t^4 + o(t^5)$ só precisamos ir até primeira ordem para coletar termos até ordem 4, pois o termo de x^2 será de ordem 6 em t .

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left[1 + \left(-i \frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{K}{24}t^4 + o(t^5) \right) + \frac{1}{2} \left(-i \frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{K}{24}t^4 + o(t^5) \right)^2 + \dots \right]$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left[1 - i\frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{\kappa}{24}t^4 + o(t^5) \right]$$

Agora vamos retornar à fdp através da transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[1 - i\frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{\kappa}{24}t^4 + o(t^5) \right] dt = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] + \frac{\gamma}{6} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (it)^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] + \frac{\kappa}{24} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (it)^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] \end{aligned}$$

Usando a identidade: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} (it)^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \phi(x) He_k(x)$ chegamos a:

$$f(x) = \phi(x) \left[1 + \frac{\gamma}{6} He_3(x) + \frac{\kappa}{24} He_4(x) \right]$$

Além de obter a expansão de Edworth para a fdp podemos também obter a expansão para a função distribuição de probabilidade:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' = \int_{-\infty}^x \phi(x') dx' + \frac{\gamma}{6} \int_{-\infty}^x \phi(x') He_3(x') dx' + \frac{\kappa}{24} \int_{-\infty}^x \phi(x') He_4(x') dx'$$

Usando a identidade: $\int_{-\infty}^x \phi(x') He_n(x') dx' = -\phi(x) He_{n-1}(x)$, temos que

$$F(x) = \Phi(x) - \frac{\gamma}{6} \phi(x) He_2(x) - \frac{\kappa}{24} \phi(x) He_3(x)$$

Também podemos expressar esse resultado como:

$$F(x) - \Phi(x) = -\frac{\gamma}{6} \phi(x) He_2(x) - \frac{\kappa}{24} \phi(x) He_3(x)$$

Substituindo os polinômios específicos obtemos:

$$f(x) = \phi(x) \left[1 + \frac{\gamma}{6} (x^3 - 3x) + \frac{\kappa}{24} (x^4 - 6x^2 + 3) \right]$$

$$F(x) - \Phi(x) = -\frac{\gamma}{6} \phi(x) (x^2 - 1) - \frac{\kappa}{24} \phi(x) (x^3 - 3x)$$

4.3. Equação generalizada para o prêmio de opções

A forma geral, para qualquer distribuição de probabilidade, de cálculo do prêmio da opção no contexto generalizado de Black & Scholes é dada pela equação

$$c = e^{-rT} \int_X^{\infty} f_{\mathbb{Q}}(S_T | S) (S_T - X) dS_T \quad \text{onde } f_{\mathbb{Q}}(S_T | S) \text{ é uma densidade de probabilidade risco-}$$

neutra. A condição para ser probabilidade de risco neutra é que se trate de um Martingale,

com $E_{\mathbb{Q}}[S_T] = \int_{-\infty}^{\infty} S_T f_{\mathbb{Q}}(S_T | S) dS_T = e^{rT} S$. Dessa forma, o prêmio é dado por

$$c = e^{-rT} \int_X^{\infty} S_T f(S_T | S) dS_T - e^{-rT} X \int_X^{\infty} f(S_T | S) dS_T.$$

Entretanto, sabemos os comportamentos dos log-retornos dos preços e não dos preços em si. Por isso a primeira modificação é mudar a

variável para log-retorno, chamando $w = \ln\left(\frac{S_T}{S}\right)$ e $w_0 = \ln\left(\frac{X}{S}\right)$. Note que a variável w é

adimensional e logo todos os parâmetros subsequentes serão adimensionais. Daí tiramos

$$S_T = Se^w, \quad X = Se^{w_0}, \quad dS_T = Se^w dw = S_T dw \quad \text{quando } S_T = X \quad \text{então } w = \ln\left(\frac{X}{S}\right) = w_0.$$

Vamos mudar a fdp para a nova variável. Se $w = \ln\left(\frac{S_T}{S}\right)$ então $\frac{dw}{dS_T} = \frac{1}{S_T}$, $S_T = Se^w$ e

$$S_T f(S_T) dS_T = f(w) dw.$$

$$c = Se^{-rT} \int_{w_0}^{\infty} e^w f_T(w) dw - e^{-rT} X \int_{w_0}^{\infty} f_T(w) dw$$

$$\text{A condição de Martingale se torna } e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} Se^w f(w) dw = S, \text{ ou seja } \int_{-\infty}^{\infty} e^w f_T(w) dw = e^{rT}.$$

4.4. Teorema de Parseval

Nesse ponto precisamos do teorema de Parseval para trocar a integração do espaço direto para uma integração no espaço de Fourier. O teorema afirma que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_f(z) \varphi_g^*(z) dz$$

Onde $g^*(x)$ é o complexo conjugado da função g , uma operação que troca os

sinos de todos os i s. A demonstração é imediata. Basta substituir $\varphi_f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x) dt$ e

$$\varphi_g^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix't} g^*(x') dx'$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_f(z) \varphi_g^*(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x') dx dx' \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x')t} dt \right]$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_f(z) \varphi_g^*(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x') \delta(x-x') dx dx'$$

Integrando em x' usando a delta de Dirac e demonstramos o teorema:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_f(z) \varphi_g^*(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x) dx$$

4.5. Função característica de fdp risco-neutra, ou Martingale

A condição de risco-neutra no espaço direto é dada por $e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} e^w f_T(w) dw = 1$.

Fazendo $g(w) = e^w$ podemos usar o teorema de Parseval para levar essa condição para o espaço de Fourier. A transformada de $g(w)$ é dada por

$$\varphi_g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i w z} e^w dw = 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i w(z-i)} dw \right] = 2\pi \delta(z-i) \quad \text{logo} \quad \varphi_g^*(z) = 2\pi \delta(z+i).$$

Como $g(w)$ é real e, portanto, $g^*(w) = g(w) = e^w$ a condição de neutralidade ao risco se torna:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^w f_T(w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_f(z) \varphi_g^*(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_f(z) 2\pi \delta(z+i) dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^w f_T(w) dw = \varphi_f(-i)$$

Então a condição Martingale no espaço de Fourier pode ser escrita na forma muito conveniente como:

$$\varphi_f(-i) = e^{rT} \quad \text{ou} \quad \ln \varphi_f(-i) = rT$$

Podemos conferir esse fato rapidamente usando a distribuição Browniana do log-retorno já utilizada na demonstração de Black&Scholes do capítulo 3. Nesse caso

$$\ln \varphi(t) = i\mu T - \frac{\sigma^2 T}{2} t^2 \quad \text{logo} \quad \ln \varphi(-i) = i\mu T(-i) - \frac{\sigma^2 T}{2} (-i)^2 = \mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}$$

$$\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2} = rT \quad \text{ou} \quad \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \text{que foi exatamente a condição utilizada.}$$

Esse resultado permite o cálculo do prêmio das opções de forma bem mais simples utilizando diferentes suposições para a distribuição dos preços das ações. Um porque é sempre possível realizar uma translação sobre qualquer distribuição na forma $f(x) \rightarrow f(x-a)$ que leva sua esperança para qualquer valor esperado. Essa translação corresponde à multiplicação da função característica por um termo de drift $\varphi(t) \rightarrow e^{iat} \varphi(t)$ que pode ser ajustado para a distribuição neutra ao risco. Assim, o drift utilizado no modelo não é o drift real dos preços das ações, mas o drift risco-neutro dado pela condição acima.

Agora a receita para utilização de outras distribuições de probabilidades diferentes da MBG se torna simples. Tome uma distribuição que se suspeita representem melhor a

situação do que a MBG, encontre sua função característica, imponha a condição de neutralidade ao risco, $\ln \varphi_T(-i) = rT$, ajustando o μ e resolva as integrais:

$$c = Se^{-rT} \int_{w_o}^{\infty} e^w f_T(w) dw - e^{-rT} X \int_{w_o}^{\infty} f_T(w) dw$$

Com esse resultado e o drift do risco neutro podemos utilizar qualquer distribuição para calcular o prêmio da opção e verificar o desempenho da mesma em relação ao sorriso da volatilidade. Entretanto, resolver a integral no espaço direto pode ser mais trabalhoso do que no espaço de Fourier. Primeiro porque a seqüência do processo estocástico nos leva diretamente ao espaço de Fourier através de $\varphi_T(t) = \varphi^T(t)$, que deve então ser transformado para o espaço direto através da transformada inversa, ou seja, após uma integração, para então proceder a segunda integração da esperança do payoff da opção.

4.6. Precificação de Opções Europeias no espaço de Fourier

Vamos escrever o prêmio da call da seguinte forma:

$$c = Se^{-rT} \int_{w_o}^{\infty} e^w f_T(w) dw - e^{-rT} X \int_{w_o}^{\infty} f_T(w) dw = Se^{-rT} I_1 - e^{-rT} X I_2$$

onde $I_1 = \int_{w_o}^{\infty} e^w f_T(w) dw$ e $I_2 = \int_{w_o}^{\infty} f_T(w) dw$ e usar o teorema de Parseval para integrar

no espaço de Fourier em lugar do espaço direto. Vamos começar com a primeira integral:

$I_1 = \int_{w_o}^{\infty} e^w f_T(w) dw$. Para evitar divergência no infinito vamos incluir um amortecimento,

damping, e reescrever a integral da seguinte forma:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-(1+\alpha)w} e^w H(w - w_o) \right] \left[e^{(1+\alpha)w} f_T(w) \right] dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{d_1}^*(t) \varphi_{T_{d_1}}(t) dt$$

Onde $H(w - w_o) = \begin{cases} 0 & w < w_o \\ 1 & w > w_o \end{cases}$ é a função degrau de Heaviside e o subscrito d se

refere à função característica *damped*. Usar a função de Heaviside nos permite estender a integração de $(-\infty, +\infty)$ necessária no teorema de Parseval. Note também que foi necessário usar o damping com $e^{-(1+\alpha)w}$ para que o produto $e^{-(1+\alpha)w} e^w = e^{-\alpha w}$ com $\alpha > 0$ tenda a zero no infinito. Nesse caso:

$$\varphi_{d_1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt} e^{-(1+\alpha)w} e^w H(w - w_o) dw = \int_{w_o}^{+\infty} e^{(it-\alpha)w} dw = \frac{e^{(it-\alpha)w}}{(it-\alpha)} \Big|_{w_o}^{+\infty}$$

$$\varphi_{d_1}(t) = -\frac{e^{(i-\alpha)w_0}}{(it-\alpha)} \text{ e } \varphi_{d_1}^*(t) = \frac{e^{-i(t-i\alpha)w_0}}{i(t-i\alpha)}$$

A função característica *damped* é dada por:

$$\varphi_{Td_1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt} e^{(1+\alpha)w} f_T(w) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[t-i(1+\alpha)]w} f_T(w) dw = \varphi_T[t-i(1+\alpha)]$$

Então $I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(t-i\alpha)w_0}}{i(t-i\alpha)} \varphi_T[t-i(1+\alpha)] dt$. Mudando a variável para $t' = t - i\alpha$ e

depois chamando $t' = t$ novamente, obtemos: $I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt$.

Podemos passar essa integral para o eixo real através do cálculo de resíduos¹⁹.

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt + \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt - \pi i \operatorname{res}(0) = 0$$

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt + \pi i \operatorname{res}(0)$$

$$\operatorname{res}(0) = t \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) \Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \varphi_T(-i)$$

Logo:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt + \frac{1}{2} \varphi_T(-i)$$

Na segunda integral $I_2 = \int_{w_0}^{\infty} f_T(w) dw$ podemos usar o damping $e^{-\alpha w}$ por que o termo

e^w não existe e temos que: $I_2 = \int_{w_0}^{\infty} [e^{-\alpha w} H(w-w_0)] [e^{\alpha w} f_T(w)] dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{d_2}^*(t) \varphi_{Td_2}(t) dt$.

Repetindo os passos anteriores obtemos $\varphi_{d_2}^*(t) = \frac{e^{-i(t-i\alpha)w_0}}{i(t-i\alpha)}$ e $\varphi_{Td_2}(t) = \varphi_T[t-i\alpha]$ que nos leva

a $I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(t-i\alpha)w_0}}{i(t-i\alpha)} \varphi_T[t-i\alpha] dt$. Agora a mudança de variável $t' = t - i\alpha$ resulta em:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-itw_0} \frac{\varphi_T(t)}{it} dt$$

Novamente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t) dt + \frac{1}{2} \varphi_T(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t) dt + \frac{1}{2}$$

¹⁹ Ver apêndice 11

Juntando as duas obtemos:

$$c = e^{-rT} S \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itw_0}}{it} \varphi_T(t-i) dt + \frac{1}{2} \varphi_T(-i) \right] - e^{-rT} X \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw_0} \frac{\varphi_T(t)}{it} dt + \frac{1}{2} \right]$$

Usando o fato de que $\varphi_T(-i) = e^{rT}$ re-escrevemos o resultado como:

$$c = S \left[FT^{-1} \left[\frac{e^{-rT} \varphi_T(t-i)}{it} \right]_{w_0} + \frac{1}{2} \right] - e^{-rT} X \left[FT^{-1} \left[\frac{\varphi_T(t)}{it} \right]_{w_0} + \frac{1}{2} \right]$$

Para retornar da transformada de Fourier à situação inicial precisamos das propriedades das transformadas de Fourier de derivadas e de integrais.

4.6.1. Transformadas de Fourier de derivadas

Para a transformada das derivadas usamos uma integral por partes:

$$FT \left[\frac{d}{dx} g(x) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{dg(x)}{dx} dx = e^{ixt} g(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - it \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g(x) dx$$

Se $g(\pm\infty) = 0$, sempre válido se $g(x)$ é um densidade de probabilidade, então o termo uv é nulo e temos que:

$$FT \left[\frac{d}{dx} g(x) \right] = -it FT [g(x)]$$

4.6.2. Transformada da função de Heaviside: Problemas com a regra

$$FT \left[\frac{d}{dx} g(x) \right] = -it FT [g(x)]$$

Uma forma elegante de achar $FT [H(x)]$ seria usar o fato de que $\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x)$,

logo $FT \left[\frac{d}{dx} H(x) \right] = FT [\delta(x)] = 1$. Usando a regra acima obtemos $-it FT [H(x)] = 1$ logo:

$$FT [H(x)] = -\frac{1}{it}$$

No entanto existe algo errado nesse resultado porque apenas transformadas de funções reais ímpares, anti-simétricas, são imaginária puras. Mas a função de Heaviside não é nem par nem ímpar. No entanto a função $h(x) = H(x) - \frac{1}{2}$ é ímpar, vale $-\frac{1}{2}$ para $x < 0$ e $+\frac{1}{2}$ para $x > 0$. Com ela, portanto, não haveria esse problema. Mas

$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}H(x) = \delta(x)$ então poderíamos afirmar que $FT[h(x)] = -\frac{1}{it}$ sem qualquer problema com paridade da função. Entretanto:

$$FT[h(x)] = FT[H(x)] - \frac{1}{2}FT[1] \quad \text{e} \quad FT[1] = 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dt \right] = 2\pi\delta(t), \quad \text{então}$$

$$FT[h(x)] = FT[H(x)] - \pi\delta(t) \quad \text{e:}$$

$$FT[H(x)] = \pi\delta(t) - \frac{1}{it}$$

Note que esse resultado é consistente também com o fato de que $H(x) + H(-x) = 1$ então $FT[H(x)] + FT[H(-x)] = FT[1] = 2\pi\delta(t)$. Por outro lado $FT[f(-x)] = \varphi(-t)$, logo:

$$FT[H(x)] + FT[H(-x)] = \pi\delta(t) - \frac{1}{it} + \pi\delta(-t) + \frac{1}{it} = \pi\delta(t) + \pi\delta(t) = 2\pi\delta(t)$$

O problema com a regra da derivada aparece quando $g(\pm\infty) \neq 0$ e não podemos anular o termo uv. Foi o caso da função de Heaviside em que $H(+\infty) = 1$ e $H(-\infty) = 0$. Para lidar com casos mais gerais suponha uma função com assíntotas horizontais em que $g(-\infty) = g^-$ e $g(+\infty) = g^+$. Vamos construir uma função auxiliar $G(x)$ com a propriedade $G(\pm\infty) = 0$ dada por:

$$G(x) = g(x) - g^- - (g^+ - g^-)H(x)$$

Note que $G(-\infty) = g^- - g^- = 0$ e que $G(+\infty) = g^+ - g^- - (g^+ - g^-) = 0$. Então, nesse caso vale a regra:

$$FT\left[\frac{d}{dx}G(x)\right] = -it FT[G(x)]$$

$$\text{Por outro lado: } \frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}g(x) - (g^+ - g^-)\frac{d}{dx}H(x) = \frac{d}{dx}g(x) - (g^+ - g^-)\delta(x) \quad \text{logo:}$$

$$FT\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] = FT\left[\frac{d}{dx}G(x)\right] + (g^+ - g^-)$$

$$FT\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] = (g^+ - g^-) - it FT[G(x)]$$

Agora vamos extrair a transformada da função auxiliar $G(x)$.

$$FT[G(x)] = FT[g(x)] - g^- FT[1] - (g^+ - g^-) FT[H(x)]$$

$$FT[G(x)] = FT[g(x)] - g^- 2\pi\delta(t) - (g^+ - g^-) \left(\pi\delta(t) - \frac{1}{it} \right)$$

$$FT[G(x)] = FT[g(x)] - (g^+ + g^-)\pi\delta(t) + \frac{(g^+ - g^-)}{it}$$

Assim a regra geral para a transformada da derivada é:

$$\frac{FT\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{-it} = FT[g(x)] - (g^+ + g^-)\pi\delta(t)$$

Note que agora ela faz sentido com a função de Heaviside: $g(x) = H(x)$,

$(g^+ + g^-) = 1$ então $FT[\delta(x)] = -itFT[H(x)] + it\pi\delta(t)$ e $FT[H(x)] = \frac{1}{-it} + \pi\delta(t)$. Para

qualquer função ímpar, como a $h(x)$, entretanto, $(g^+ + g^-) = 0$ e vale a regra

$\frac{FT\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{-it} = FT[g(x)]$. Agora vamos aplicar essa regra usando $g(x) = \int_x^\infty f(x)dx$ com

$g^- = 1$ e $g^+ = 0$ e $\frac{d}{dx}g(x) = -f(x)$. Nesse caso temos que:

$$\frac{FT[f(x)]}{it} = \frac{\varphi(t)}{it} = FT\left[\int_x^\infty f(x)dx\right] - \pi\delta(t)$$

Aplicando a transformada inversa de ambos os lados temos:

$$FT^{-1}\left[\frac{\varphi(t)}{it}\right] = FT^{-1}\left[FT\left[\int_x^\infty f(x)dx\right]\right] - \pi FT^{-1}[\delta(t)]$$

$$\int_x^\infty f(x)dx = FT^{-1}\left[\frac{\varphi(t)}{it}\right] + \frac{1}{2}$$

Com esse resultado então temos que:

$$c = S\left[FT^{-1}\left[\frac{e^{-rT}\varphi_T(t-i)}{it}\right] + \frac{1}{2}\right] - e^{-rT}X\left[FT^{-1}\left[\frac{\varphi_T(t)}{it}\right] + \frac{1}{2}\right]$$

$$c = S\int_{w_0}^\infty f_1(x)dx - e^{-rT}X\int_{w_0}^\infty f_2(x)dx$$

Onde $f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-ixt}e^{-rT}\varphi_T(t-i)dt$ e $f_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-ixt}\varphi_T(t)dt$. No fundo fizemos o

caminho de volta, fechando um círculo matemático, com a única modificação que a primeira integral agora não está mais multiplicada pelo termo e^{-w} . Esse movimento circular, entretanto, é importante para garantir a consistência dos resultados.

Vamos aplicar os resultados acima para proceder a precificação proposta por Jarrow e Rudd incorporando cumulantes até ordem 4, ou seja, a skewness e a curtose.

4.7. Precificação através da expansão nos cumulantes [expansão de Edgeworth]:

Uma das primeiras opções de distribuição de probabilidade é manter Black&Scholes como aproximação de ordem zero e incluir termos devido aos cumulantes de ordem 3 e 4 no teorema central do limite. Um teste imediato da correção de nosso procedimento é fazer os cumulantes de ordem 3 e 4 nulos e observar se recuperamos o resultado de Black&Scholes.

A expansão dos cumulantes até ordem 4 é dada por:

$$\ln \varphi(t) = i\mu t + \frac{i^2}{2}(\sigma t)^2 + \frac{i^3}{3!}\gamma(\sigma t)^3 + \frac{i^4}{4!}\kappa(\sigma t)^4, \quad \text{onde } \gamma = \frac{c_3}{\sigma^3} \text{ é a skewness e}$$

$\kappa = \frac{c_4}{\sigma^4} = k - 3$ é o excesso de curtose. Para a condição de neutralidade ao risco precisamos de:

$$T \ln \varphi(-i) = \left[i\mu(-i) + \frac{i^2}{2}(-i\sigma)^2 + \frac{i^3}{3!}\gamma(-i\sigma)^3 + \frac{i^4}{4!}\kappa(-i\sigma)^4 \right] T, \text{ de onde extraímos que}$$

$$\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma\sigma^3}{3!} + \frac{\kappa\sigma^4}{4!} \right] T = rT, \text{ ou seja } \mu = r - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma\sigma^3}{3!} - \frac{\kappa\sigma^4}{4!}. \text{ A função característica risco-}$$

neutra é dada então por:

$$T \ln \varphi(t) = i \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma\sigma^3}{3!} - \frac{\kappa\sigma^4}{4!} \right) Tt - \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T}t)^2 - i \frac{1}{3!} \frac{\gamma}{\sqrt{T}} (\sigma\sqrt{T}t)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\kappa}{T} (\sigma\sqrt{T}t)^4$$

$$\text{Vamos redefinir os parâmetros para } \mu_2 = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma\sigma^3}{3!} - \frac{\kappa\sigma^4}{4!} \right) T, \quad \sigma_2 = \sigma\sqrt{T},$$

$\gamma_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{T}}$ e $\kappa_2 = \frac{\kappa}{T}$, esse resultado pode ser re-escrito como:

$$T \ln \varphi(t) = i\mu_2 t - \frac{1}{2}(\sigma_2 t)^2 - i \frac{1}{3!} \gamma_2 (\sigma_2 t)^3 + \frac{1}{4!} \kappa_2 (\sigma_2 t)^4$$

Que sera diretamente utilizado na integral I_2 . Para calcular a integral I_1 precisamos de $\varphi_T(t-i)$ que queremos escrever de forma análoga como:

$$T \ln \varphi(t) = i\mu_1 t - \frac{1}{2}(\sigma_1 t)^2 - i \frac{1}{3!} \gamma_1 (\sigma_1 t)^3 + \frac{1}{4!} \kappa_1 (\sigma_1 t)^4$$

Substituindo e usando os binômios de Newton:

$$(t-i)^2 = t^2 - i2t - 1,$$

$$(t-i)^3 = t^3 + 3t^2(-i) + 3t(-i)^2 + (-i)^3 = t^3 - i3t^2 - 3t + i$$

$$(t-i)^4 = t^4 + 4t^3(-i) + 6t^2(-i)^2 + 4t(-i)^3 + (-i)^4 = t^4 - i4t^3 - 6t^2 + i4t + 1$$

Recoletando os termos nas diversas ordens de t obtemos:

$$T \ln \varphi(t-i) = i\mu_2(t-i) - \frac{1}{2}\sigma_2^2(t-i)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_2\sigma_2^3(t-i)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2\sigma_2^4(t-i)^4$$

Então :

$$T \ln \varphi(t-i) = \left[\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{1}{3!}\gamma_2\sigma_2^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2\sigma_2^4 \right] + i \left[\mu_2 + \sigma_2^2 + \frac{3}{3!}\gamma_2\sigma_2^3 + \frac{4}{4!}\kappa_2\sigma_2^4 \right] t + n \\ - \frac{1}{2} \left[\sigma_2^2 + \gamma_2\sigma_2^3 + \frac{1}{2}\kappa_2\sigma_2^4 \right] t^2 - i \frac{1}{3!} \left[\gamma_2\sigma_2^3 + \kappa_2\sigma_2^4 \right] t^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2\sigma_2^4 t^4$$

Em termos dos parâmetros originais:

$$\left[\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + \frac{1}{3!}\gamma_2\sigma_2^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2\sigma_2^4 \right] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma\sigma^3}{3!} - \frac{\kappa\sigma^4}{4!} + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma\sigma^3}{3!} + \frac{\kappa\sigma^4}{4!} \right) T = rT$$

$$\mu_2 + \sigma_2^2 + \frac{3}{3!}\gamma_2\sigma_2^3 + \frac{4}{4!}\kappa_2\sigma_2^4 = \left(r + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma\sigma^3}{3} + \frac{\kappa\sigma^4}{8} \right) T$$

$$\sigma_2^2 + \gamma_2\sigma_2^3 + \frac{1}{2}\kappa_2\sigma_2^4 = \left(\sigma^2 + \gamma\sigma^3 + \frac{1}{2}\kappa\sigma^4 \right) T$$

$$\left[\gamma_2\sigma_2^3 + \kappa_2\sigma_2^4 \right] = (\gamma\sigma^3 + \kappa\sigma^4) T \text{ e } \kappa_2\sigma_2^4 = \kappa\sigma^4 T$$

Portanto,

$$T \ln \varphi(t-i) = rT + i \left(r + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma\sigma^3}{3} + \frac{\kappa\sigma^4}{8} \right) Tt - \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \gamma\sigma^3 + \frac{1}{2}\kappa\sigma^4 \right) Tt^2 - i \frac{1}{3!} (\gamma\sigma^3 + \kappa\sigma^4) Tt^3 + \frac{1}{4!}\kappa\sigma^4 Tt^4$$

Redefinindo $\mu_1 = \left(r + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma\sigma^3}{3} + \frac{\kappa\sigma^4}{8} \right) T$, $\sigma_1 = \sqrt{\left(\sigma^2 + \gamma\sigma^3 + \frac{1}{2}\kappa\sigma^4 \right) T}$,

$$\gamma_1 = \frac{(\gamma\sigma^3 + \kappa\sigma^4)}{\left(\sigma^2 + \gamma\sigma^3 + \frac{1}{2}\kappa\sigma^4 \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{T}} \text{ e } \kappa_1 = \frac{\kappa\sigma^4}{\left(\sigma^2 + \gamma\sigma^3 + \frac{1}{2}\kappa\sigma^4 \right)^2 T}, \text{ obtemos a forma semelhante:}$$

$$T \ln \varphi(t-i) = rT + i\mu_1 t - \frac{1}{2}(\sigma_1 t)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_1 T (\sigma_1 t)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_1 (\sigma_1 t)^4$$

Com isso obtivemos os dois resultados:

$$-rT + T \ln \varphi(t-i) = i\mu_1 t - \frac{1}{2}(\sigma_1 t)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_1 T (\sigma_1 t)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_1 (\sigma_1 t)^4$$

$$T \ln \varphi(t) = i\mu_2 t - \frac{1}{2}(\sigma_2 t)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_2 (\sigma_2 t)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2 (\sigma_2 t)^4$$

Agora podemos substituir na expressão para o prêmio justo:

$$c = S \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0} e^{+i\mu_1 t} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1 t)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_1 T (\sigma_1 t)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_1 (\sigma_1 t)^4}}{it} dt + \frac{1}{2} \right] - e^{-rT} X \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0} e^{i\mu_2 t} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\sigma_2 t)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_2 (\sigma_2 t)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2 (\sigma_2 t)^4}}{it} dt + \frac{1}{2} \right]$$

$$c = S \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{w_0 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\sigma_1 t} e^{\frac{-\frac{1}{2}(\sigma_1 t)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_1(\sigma_1 t)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_1(\sigma_1 t)^4}{i\sigma_1 t}} d(\sigma_1 t) + \frac{1}{2} \right] - e^{-rT} X \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{w_0 - \mu_2}{\sigma_2}\right)\sigma_2 t} e^{\frac{-\frac{1}{2}(\sigma_2 t)^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_2(\sigma_2 t)^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2(\sigma_2 t)^4}{i\sigma_2 t}} d(\sigma_2 t) + \frac{1}{2} \right]$$

$$c = S \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-d_1)u} e^{\frac{-\frac{1}{2}u^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_1 u^3 + \frac{1}{4!}\kappa_1 u^4}{iu}} du + \frac{1}{2} \right] - e^{-rT} X \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-d_2)u} e^{\frac{-\frac{1}{2}u^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_2 u^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2 u^4}{iu}} du + \frac{1}{2} \right]$$

com $d_1 = \frac{-w_0 + \mu_1}{\sigma_1} = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \mu_1}{\sigma_1}$ e $d_2 = \frac{-w_0 + \mu_2}{\sigma_2} = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \mu_2}{\sigma_2}$.

Notando que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \phi(u) du = FT^{-1}[\phi(u)]_x$ escrevemos:

$$c = S \left[FT^{-1}[\phi_1(u)]_{x=-d_1} + \frac{1}{2} \right] - e^{-rT} X \left[FT^{-1}[\phi_2(u)]_{x=-d_2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$c = S \int_{-d_1}^{\infty} f_1(x) dx - e^{-rT} X \int_{-d_2}^{\infty} f_2(x) dx$$

$$c = S [1 - F_1(-d_1)] - e^{-rT} X [1 - F_2(-d_2)]$$

Onde as densidades de probabilidade são dadas por:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{\frac{-\frac{1}{2}t^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_1 t^3 + \frac{1}{4!}\kappa_1 t^4}{it}} dt \quad \text{e} \quad f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{\frac{-\frac{1}{2}t^2 - i\frac{1}{3!}\gamma_2 t^3 + \frac{1}{4!}\kappa_2 t^4}{it}} dt$$

Aqui usamos o resultado da expansão de Edgeworth na qual se $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2} - i\frac{\gamma}{6}t^3 + \frac{\kappa}{24}t^4}$

então a função distribuição de probabilidade é dada por

$$F(x) = \Phi(x) - \frac{\gamma}{6} \phi(x) He_2(x) - \frac{\kappa}{24} \phi(x) He_3(x). \text{ Dessa forma obtivemos a expressão analítica}$$

[aproximada pela validade da aproximação da expansão de Edgeworth] para o prêmio de uma CALL européia:

$$c = S \left[1 - \Phi(-d_1) + \frac{\gamma_1}{6} \phi(-d_1) He_2(-d_1) + \frac{\kappa_1}{24} \phi(-d_1) He_3(-d_1) \right] +$$

$$- e^{-rT} X \left[1 - \Phi(-d_2) + \frac{\gamma_2}{6} \phi(-d_2) He_2(-d_2) + \frac{\kappa_2}{24} \phi(-d_2) He_3(-d_2) \right]$$

Sabendo que ϕ e He_2 são funções pares, He_3 é ímpar e que $1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$ re-escrevemos o resultado como:

$$c = S \left[\Phi(d_1) + \frac{\gamma_1}{6} \phi(d_1) He_2(d_1) - \frac{\kappa_1}{24} \phi(d_1) He_3(d_1) \right] +$$

$$- e^{-rT} X \left[\Phi(d_2) + \frac{\gamma_2}{6} \phi(d_2) He_2(d_2) - \frac{\kappa_2}{24} \phi(d_2) He_3(d_2) \right]$$

Onde as variáveis d_1 e d_2 são dadas por:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma\sigma^3}{3} + \frac{\kappa\sigma^4}{8}\right)T}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{1 + \gamma\sigma + \frac{1}{2}\kappa\sigma^2}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma\sigma^3}{3!} - \frac{\kappa\sigma^4}{4!}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

E as funções são dadas por $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $He_2(x) = x^2 - 1$

e $He_3(x) = x^3 - 3x$. Substituindo os polinômios de Hermite temos:

$$c = S\Phi(d_1) - e^{-rT}X[\Phi(d_2)] + S\phi(d_1)\left[\left(\frac{\gamma_1}{6} - \frac{\kappa_1 d_1}{24}\right)(d_1^2 - 1) + \frac{\kappa_1 d_1}{12}\right] - e^{-rT}X\phi(d_2)\left[\left(\frac{\gamma_2}{6} - \frac{\kappa_2 d_2}{24}\right)(d_2^2 - 1) + \frac{\kappa_2 d_2}{12}\right]$$

Para recuperar o caso Black&Scholes fazemos $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 0$ que nos

leva de volta a $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ e $c = S\Phi(d_1) - e^{-rT}X\Phi(d_2)$.

4.7.1. Resultados com Expansão de Edgeworth

Utilizamos essa generalização do modelo de Black&Scholes para mostrar que a incorporação de cumulantes de ordem mais alta é capaz de gerar um SORRISO DA VOLATILIDADE. O procedimento utilizado foi o seguinte.

1. Usar a expressão geral incluindo os cumulantes até a curtose para calcular o prêmio de uma opção de Call européia. Mudando os parâmetros da skewness e curtose observamos o gráfico do prêmio em função do strike price, como mostra a Figura 28. Percebemos que nem todos os valores desses cumulantes são possíveis porque podem gerar prêmios que não obedecem aos requisitos apresentados na seção 1.8.

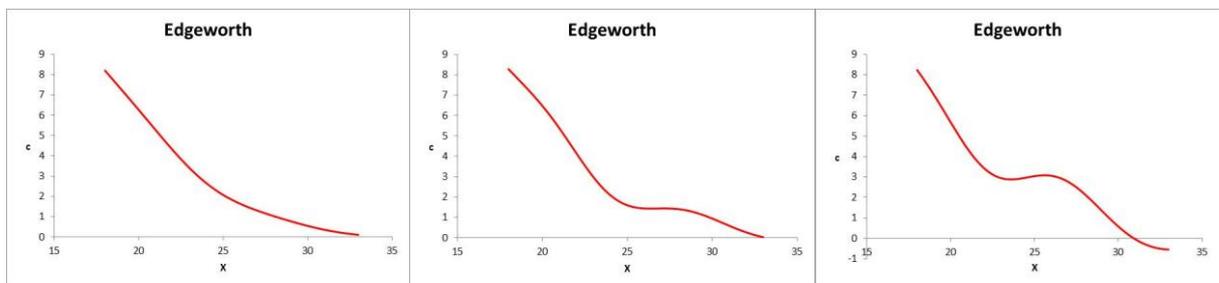


Figura 28. Da esquerda para a direita, gráficos do prêmio calculado com o método generalizado de precificações com $\gamma = 0,2$ e $\kappa = 0,25$, $\gamma = 0,2$ e $\kappa = 0,9$ e $\gamma = 1$ e $\kappa = 0,1$, respectivamente.

2. Para valores dos cumulantes que geraram prêmios consistentes usamos os valores calculados como se fossem os prêmios praticados pelo mercado e repetimos o procedimento numérico utilizado para calcular a volatilidade implícita da seção 3.8. Os gráficos da Figura 29 mostram que a introdução dos cumulantes de ordem superiores é capaz de gerar um sorriso da volatilidade.

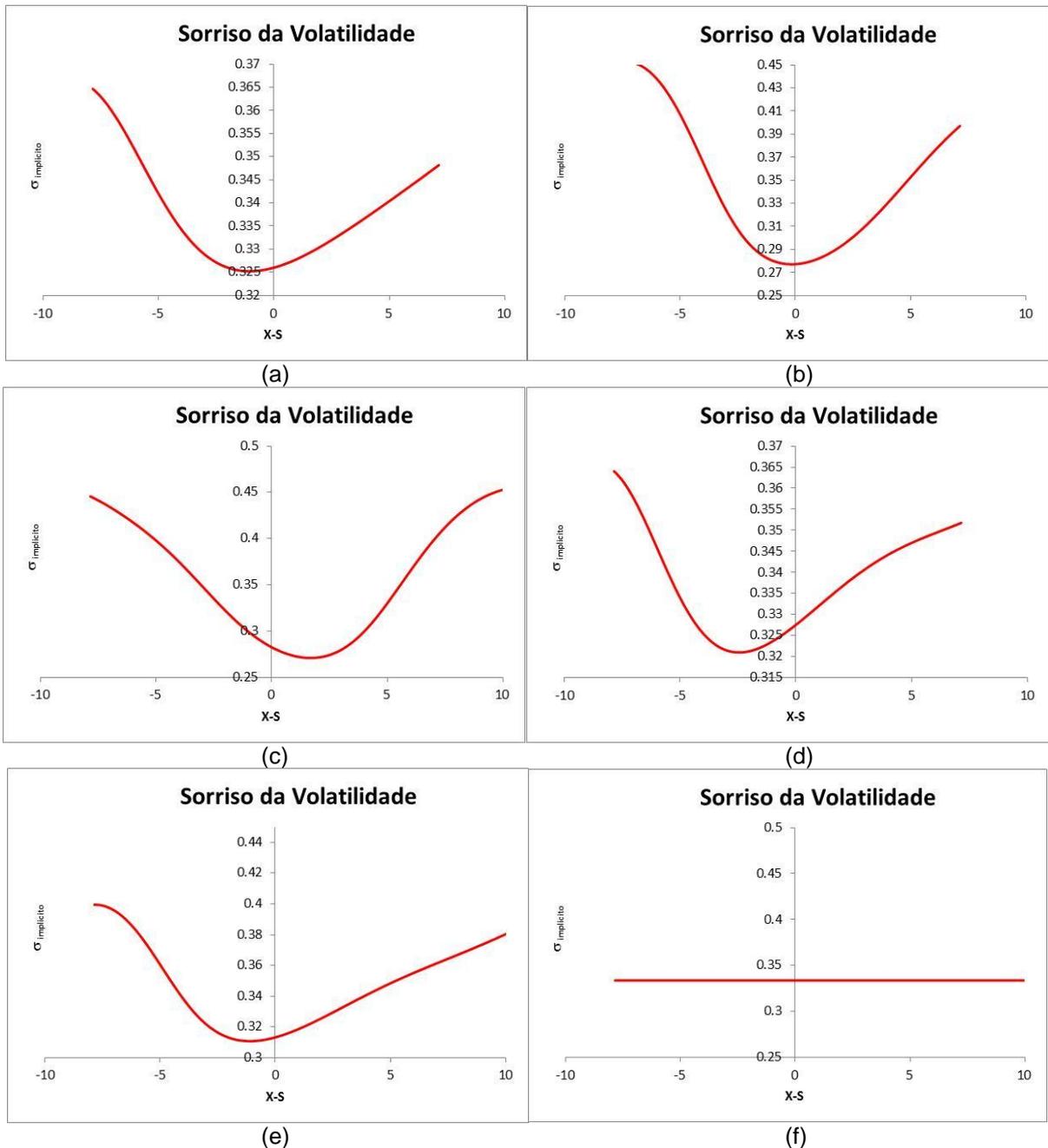


Figura 29. Sorriso da volatilidade gerado com os seguintes parâmetros: (a) $\gamma = 0,01$ e $\kappa = 0,1$, (b) $\gamma = -0,1$ e $\kappa = 0,7$, (c) $\gamma = -0,15$ e $\kappa = 0,7$, (d) $\gamma = 0,05$ e $\kappa = 0,1$, (e) $\gamma = 0$ e $\kappa = 0,2577$ e (f) $\gamma = 0$ e $\kappa = 0$, que é o caso da Normal.

4.8. Precificação com Distribuição de Student Generalizada

Como se percebe da seção anterior a grande dificuldade do método baseado na expansão de Edgeworth é que existem valores da skewness e curtose incapazes de gerar uma função densidade de probabilidade legítima, com $f(x) \geq 0$, e unimodal, com apenas um pico. Distribuições não unimodais geram prêmios com comportamentos estranhos que abririam margem para operações de arbitragem. Foi possível gerar sorriso com a expansão de Edgeworth mas nada comparado com o sorriso observado através dos dados empíricos. Outra dificuldade com a expansão de Edgeworth é que ela claramente deixa de ser válida no caso em que a curtose se torna infinita. Por essa razão é necessário procurar outras distribuições com maior capacidade de gerar os dados observados empiricamente.

4.8.1. Distribuição de Student generalizada.

Uma distribuição constantemente observada empiricamente para o preço das ações é a distribuição de student com $\nu = 3$, que apresenta curtose infinita. Nesse trabalho nós gostaríamos de generalizar a distribuição de student para permitir maior flexibilidade da distribuição. Queremos uma distribuição com uma cauda que segue uma lei de potência do tipo $f(x) \propto x^{-4}$ mas que seja bem comportada na origem para garantir a área unitária,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Nesse caso vamos tomar uma distribuição do tipo: $f(x) = \frac{A}{(a^2 + x^2)^2}$ como

mostra a Figura 30. A liberdade na escolha do parâmetro a nos permite alargar ou afinar mais a distribuição em torno de $x = 0$. Note que se $x \ll a$ então $f(x) = \frac{A}{a^4}$ é uma constante

e se $x \gg a$ então $f(x) = \frac{A}{x^4}$ cai com uma lei de potência. O momento de ordem 4 é infinito pois $x^4 f(x) = A$ é uma constante. Note também que se trata de uma distribuição simétrica com esperança nula cuja função característica também será simétrica, ou seja, uma função par em t .

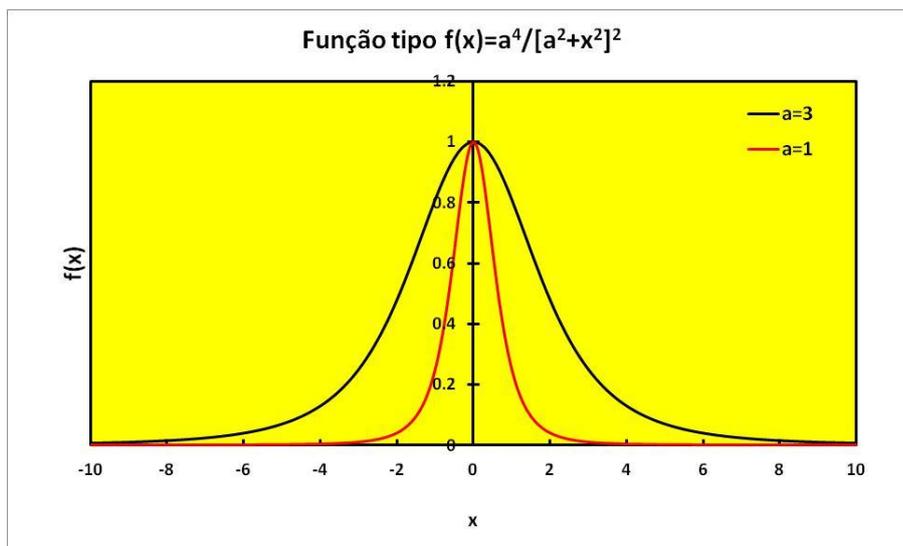


Figura 30. Função normalizada do tipo $f(x) = \frac{a^4}{(a^2 + x^2)^2}$ para $a=1$ e $a=3$. Note que o parâmetro a define a largura da função em torno de $x=0$

A constante A pode ser determinada exigindo que $A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} = 1$, ou pela

forma equivalente, que $\varphi(0) = 1$.

4.8.2. Função característica da distribuição de student generalizada

Nesse caso a função característica é dada por:

$$\varphi(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt} dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{A}{a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \frac{x}{a} at} d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^2} = \frac{A}{a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i u at} du}{(1 + u^2)^2}$$

Que pode ser escrita na forma própria para o cálculo de resíduos com dois polos de ordem 2 no eixo imaginário em $u = \pm i$:

$$\varphi(t) = \frac{A}{a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i u at} du}{(u - i)^2 (u + i)^2}$$

Para $t > 0$ fechamos a integral por cima, englobando apenas o polo em $u = i$. Para $t < 0$ fechamos a integral por baixo englobando o polo em $u = -i$. Entretanto, como sabemos que se trata de uma função par em t basta calcular para valores de t positivos. Nesse caso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i u at} du}{(u - i)^2 (u + i)^2} = 2\pi i \operatorname{res}(i)$$

O polo é de ordem 2 logo o cálculo do resíduo envolve uma derivada:

$$\text{res}(i) = \left[\frac{d}{du} \frac{e^{iua}}{(u+i)^2} \right]_{u=i} = \left[\frac{iat e^{iua}}{(u+i)^2} - 2 \frac{e^{iua}}{(u+i)^3} \right]_{u=i} = \frac{e^{-at}}{4i} (1+at)$$

Logo $\varphi(t) = A \frac{\pi}{2a^3} (1+at) e^{-at}$. Sabendo que $\varphi(t)$ é par podemos já escrever que

$\varphi(t) = A \frac{\pi}{2a^3} (1+a|t|) e^{-a|t|}$, onde $|t| = \sqrt{tt^*}$ é o módulo de t , válido mesmo para valores

complexos, pois $zz^* \in \mathbb{R}$ e $zz^* \geq 0$. Note que para t real então $|t| = \sqrt{t^2}$ usual. A constante A

agora pode ser calculada através da restrição $\varphi(0) = 1$ que implica em $A = \frac{2a^3}{\pi}$. Nesse caso

obtemos o par de transformadas:

$$f(x) = \frac{2a^3}{\pi(a^2 + x^2)^2} \leftrightarrow \varphi(t) = (1+a|t|) e^{-a|t|}$$

Nesse ponto vale a pena discutir dois aspectos importantes. A densidade de probabilidade obtida é quase a densidade da distribuição t de Student com apenas uma modificação. No caso da distribuição de Student o parâmetro a não é livre e é dado por $a^2 = \nu$ onde ν é o número de graus de liberdade que também entra no expoente da distribuição. No caso da Student generalizada ganhamos liberdade de mudar o parâmetro a sem mudar a lei de potência das caudas da distribuição. O segundo ponto é que podemos calcular facilmente a variância dessa distribuição através da expansão da função característica em série de Taylor usando $e^{-a|t|} = 1 - a|t| + \dots$, logo

$\varphi(t) \cong (1+a|t|)(1-a|t|) + \dots = 1 - 2a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$. Isso significa que $\sigma^2 = 2a^2$ ou $a = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, que

mostra a forma como o parâmetro a está associado à variância.

4.8.3. Precificação da CALL com distribuição de Student generalizada

Com os resultados acima temos tudo o que precisamos para o cálculo do prêmio da opção. Primeiro deslocamos a distribuição no eixo horizontal para centrá-la em torno de um ponto $x = \mu$ cuja nova função característica é dada por $\varphi^T(t) = e^{i\mu T} [1+a|t|]^T e^{-aT|t|}$. Agora impomos a condição de neutralidade ao risco:

$$\ln \varphi^T(-i) = \mu T + T \ln[1+a] - aT = rT$$

Que nos leva a $\mu = r + a - \ln(1+a)$. Vale a pena notar que para valores pequenos de a obtemos um resultado muito semelhante ao do drift do Movimento Browniano

Geométrico, pois $\ln(1+a) \cong a - \frac{a^2}{2}$ e $\mu \cong r + \frac{a^2}{2}$. Usando esse resultado obtemos:

$$\varphi^T(t) = e^{i\mu T} [1 + a|t|]^{-T} e^{-aT|t|}$$

Note que após a imposição da condição de neutralidade ao risco restou apenas um único parâmetro livre, o a . Esse é um grau de liberdade valioso que seria perdido se usássemos a distribuição de student em lugar da distribuição generalizada que estamos utilizando aqui.

O procedimento para o cálculo do prêmio da CALL agora é feito da seguinte forma:

(1) calcula-se a função complexa $\varphi^T(t) = e^{i\mu T} [1 + a|t|]^{-T} e^{-aT|t|}$, e suas partes real e imaginária. Daí uma simples multiplicação matricial com as matrizes 512x512 da transformada discreta de Fourier [DFT] calculamos a função densidade de probabilidade $f_T(x)$. A seguir

calculamos numericamente, para diferentes valores do strike price X , a integral

$$c = e^{-rT} S \int_{w_0}^{\infty} \text{Max}(e^w - e^{w_0}, 0) f_T(w) dw.$$

Calculando o preço da CALL com essa técnica para os strikes prices das opções da ação da Petrobrás PETRA foi possível usar o SOLVER para encontrar o valor do parâmetro a que melhor ajustou os valores dos prêmios, como mostra a Figura 31. Com o valor do parâmetro a calculamos toda uma curva com 50 pontos do prêmio em função do strike Price X .

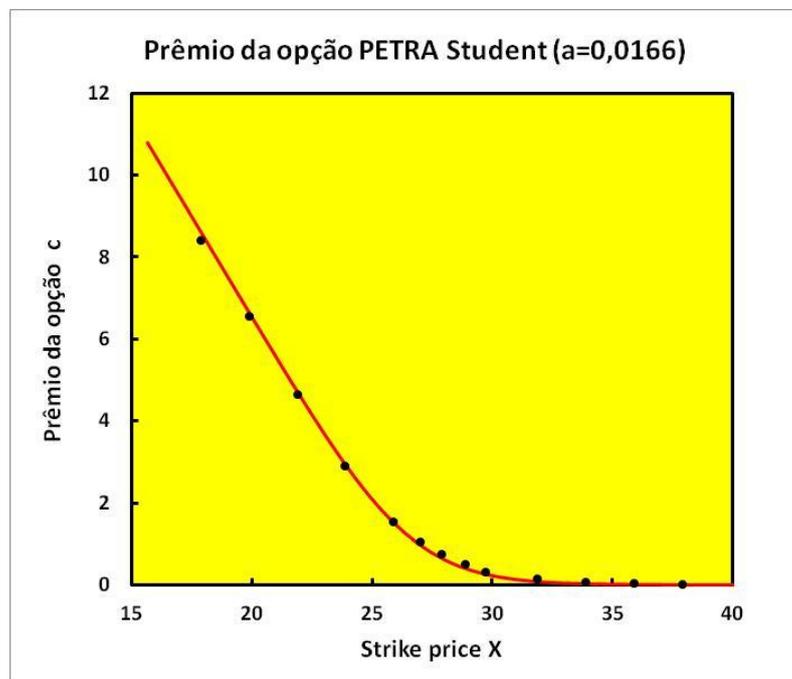


Figura 31. Valores dos prêmios para opção PETRA calculados com a distribuição de Student generalizada [linha vermelha] e os valores dos prêmios praticados no mercado (círculos pretos)

A seguir, utilizamos a macro desenvolvida para o cálculo da volatilidade implícita para cada um dos 50 valores dos prêmios calculados com a distribuição de Student generalizada e geramos a curva do SORRISO da VOLATILIDADE mostrada na Figura 32

junto com os valores da volatilidade implícita extraída diretamente dos prêmios de mercado. Agora fomos capazes de obter um sorriso que ajusta bem os dados empíricos.

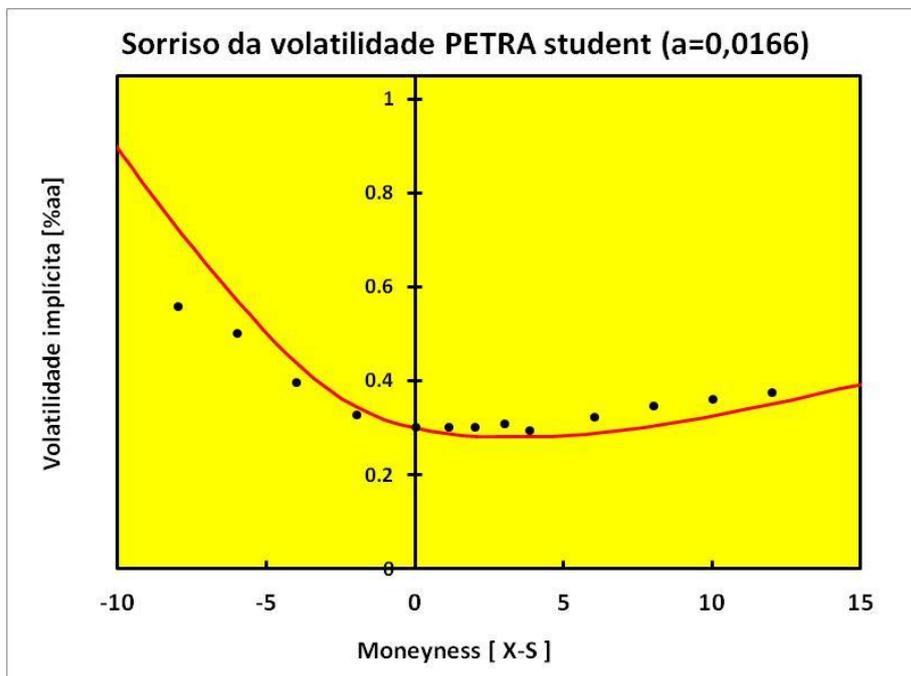


Figura 32. Sorriso da volatilidade obtido através da utilização da distribuição de Student generalizada com apenas um parâmetro de ajuste livre

Esse resultado mostra que a distribuição de Student generalizada para $\nu = 3$ é capaz de explicar qualitativa e quantitativamente os dados empíricos dos prêmios das opções sobre a ação PETRA para uma maturidade de 46 dias úteis. Vale notar que nesse caso só utilizamos um parâmetro livre de ajuste, o a , que fez o papel da volatilidade no modelo de Black&Scholes, ao contrário da expansão de Edgeworth onde existiam dois parâmetros livres, a skewness e a curtose. Com esse parâmetro obtivemos uma curva de SORRISO DA VOLATILIDADE bem semelhante à observada empiricamente.

4.9. Gerando a curva c vs X diretamente com transformada de Fourier.

O procedimento da seção 4.8 foi muito custoso em termos computacionais. Para cada valor do strike price precisamos calcular uma integral. Examinando o procedimento notamos que partimos da função característica, calculamos o drift para tornar a distribuição risco-neutra, elevamos a função característica à T, daí aplicamos uma transformada inversa para recuperar a fdp risco-neutra no espaço direto para só então integrar para encontrar o valor intrínseco esperado para cada strike price.

Nessa seção vamos apresentar um método direto e rápido em que só utilizamos uma transformada inversa de Fourier para gerar toda a curva de c vs X de uma vez só. São as propriedades das transformadas de Fourier que tornam o método possível, com alguns

pequenos cuidados. Vamos mostrar o método utilizando a distribuição de Student generalizada da seção 4.8, mas o método é completamente geral e pode ser utilizado com qualquer distribuição em que se conhece a função característica. Em muitos exemplos, como na distribuição de Lévy, sabe-se à priori a função característica e não a fdp direta. Mesmo no caso em que a expressão analítica da função característica não é conhecida ou de implementação complicada, o método pode ser aplicado após uma transformada numérica. A idéia é realizar todo o cálculo do prêmio da opção no espaço de Fourier.

Para isso vamos modificar a expressão $c = Se^{-rT} \int_{w_0}^{\infty} e^w f_T(w) dw - e^{-rT} X \int_{w_0}^{\infty} f_T(w) dw$ para

a forma: $c = Se^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (e^w - e^{w_0}) H(w - w_0) f_T(w) dw$, onde a função de payoff é dada por:

$payoff = (e^w - e^{w_0}) H(w - w_0)$. Nesse ponto a idéia é usar o teorema de Parseval para fazer a

integral de uma vez no espaço de Fourier. Vamos usar o mesmo truque da seção 4.6 e multiplicar e dividir por $e^{-(1+\alpha)w}$ para garantir a convergência da integral.

$$c = Se^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-(1+\alpha)w} (e^w - e^{w_0}) H(w - w_0) \right] \left[e^{(1+\alpha)w} f_T(w) \right] dw$$

Note que a diferença para o procedimento da seção 4.6 é que agora manteremos as duas integrais juntas. Definindo $payoff(w) = \left[e^{-(1+\alpha)w} (e^w - e^{w_0}) H(w - w_0) \right]$ e

$f_{damp}(w) = \left[e^{(1+\alpha)w} f_T(w) \right]$ podemos usar o teorema de Parseval para re-escrever

$$c = Se^{-rT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{payoff}^*(t) \varphi_{damp}(t) dt$$

Onde $\varphi_{payoff}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} \left[e^{-(1+\alpha)w} (e^w - e^{w_0}) H(w - w_0) \right] dw$ e $\varphi_{damp}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} e^{(1+\alpha)w} f_T(w) dw$.

Notamos que $\varphi_{damp}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} e^{-i(1+\alpha)w} f_T(w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[t-i(1+\alpha)]w} f_T(w) dw = \varphi[t-i(1+\alpha)]$. Já a

transformada do payoff vale:

$$\varphi_{payoff}(t) = \int_{w_0}^{\infty} e^{(it-\alpha)w} dw - e^{w_0} \int_{w_0}^{\infty} e^{[it-(1+\alpha)]w} dw = e^{[it-\alpha]w_0} \left[\frac{1}{[it-(1+\alpha)]} - \frac{1}{(it-\alpha)} \right] \quad \text{ou seja}$$

$\varphi_{payoff}(t) = \frac{e^{(it-\alpha)w_0}}{[it-(1+\alpha)](it-\alpha)}$, portanto $\varphi_{payoff}^*(t) = \frac{e^{-\alpha w_0} e^{-it w_0}}{(1+\alpha+it)(\alpha+it)}$. Juntando os resultados

acima obtemos: $c = Se^{-rT} e^{-\alpha w_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw_0} \frac{\varphi[t - i(1+\alpha)]}{(\alpha^2 + \alpha - t^2 + i(2\alpha+1)t)} dt$. Percebemos então que a

curva $c(w_0)$ é gerada de uma só vez como uma transformada inversa de Fourier:

$$c(w_0) = Se^{-rT} e^{-\alpha w_0} FT^{-1} \left[\frac{\varphi[t - i(1+\alpha)]}{(\alpha^2 + \alpha - t^2 + i(2\alpha+1)t)} \right]$$

Note que não temos problemas de singularidades porque o denominador não vai a zero no eixo real. O fator α não pode ser muito pequeno e, às vezes, não pode também ser muito grande para evitar divergências nas integrais nos limites $x \rightarrow \pm\infty$.

4.9.1. Aplicação para a distribuição de Student generalizada:

A função característica é a mesma da seção 4.8 dada por $\varphi(t) = e^{i\mu T} (1+a|t|)^T e^{-aT|t|}$ e com o drift risco-neutro $\mu = r + a - \ln(1+a)$. Incorporando o drift temos que $\varphi(t) = e^{i(r+a-\ln(1+a))T} (1+a|t|)^T e^{-aT|t|}$ e a função característica deslocada é dada por:

$$\varphi(t - i(1+\alpha)) = e^{\mu(1+\alpha)T} e^{i\mu T} (1+a|t - i(1+\alpha)|)^T e^{-aT|t - i(1+\alpha)|}$$

Dessa forma podemos calcular a curva do prêmio c dada por:

$$c(w_0) = Se^{\mu(1+\alpha)T} e^{-\alpha w_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw_0} \frac{e^{i\mu T} (1+a|t - i(1+\alpha)|)^T e^{-aT|t - i(1+\alpha)|}}{(\alpha^2 + \alpha - t^2 + i(2\alpha+1)t)} dt$$

$$\text{Ou seja: } c(w_0) = Se^{\mu(1+\alpha)T} e^{-\alpha w_0} FT^{-1} \left[\frac{e^{i\mu T} (1+a|t - i(1+\alpha)|)^T e^{-aT|t - i(1+\alpha)|}}{(\alpha^2 + \alpha - t^2 + i(2\alpha+1)t)} \right]$$

4.9.2. Resultado com o método da transformada:

A Figura 33 mostra a curva gerada pela técnica da transformada de Fourier de uma vez só em função dos strike prices junto com os dados empíricos. O erro na integração numérica pelo método da transformada é menor do que a integração direta e o ajuste da curva aos dados empíricos foi melhor do que na seção 4.8.

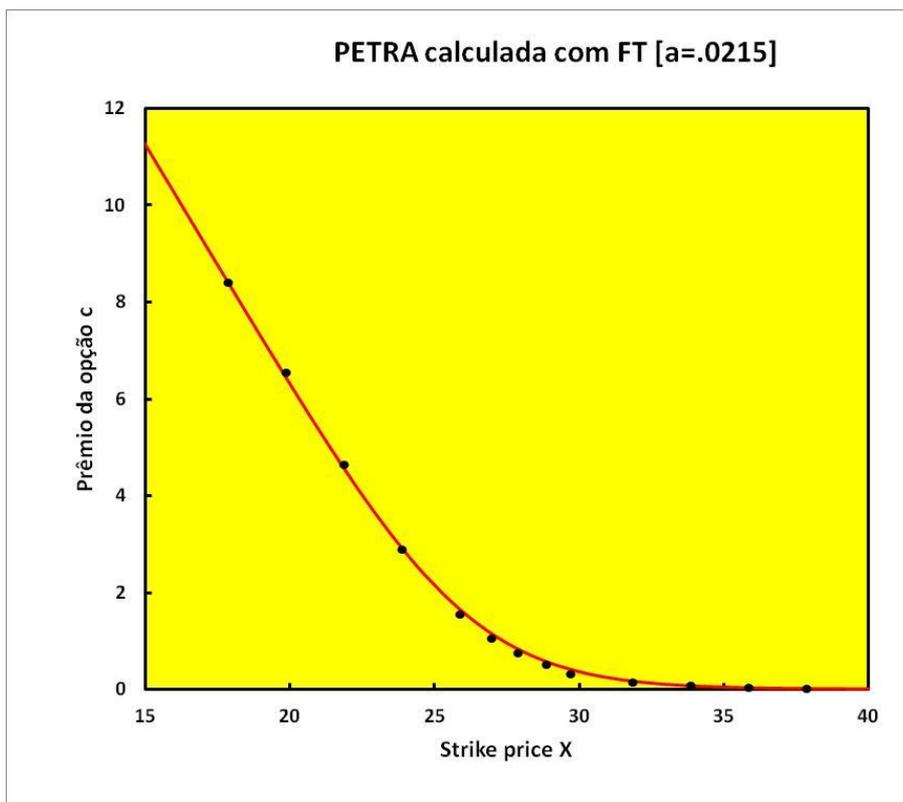


Figura 33. Curva do prêmio vs strike price gerada inteiramente através de uma transformada inversa de Fourier

Já a Figura 34 mostra o sorriso da volatilidade obtido com a curva da Figura 33.

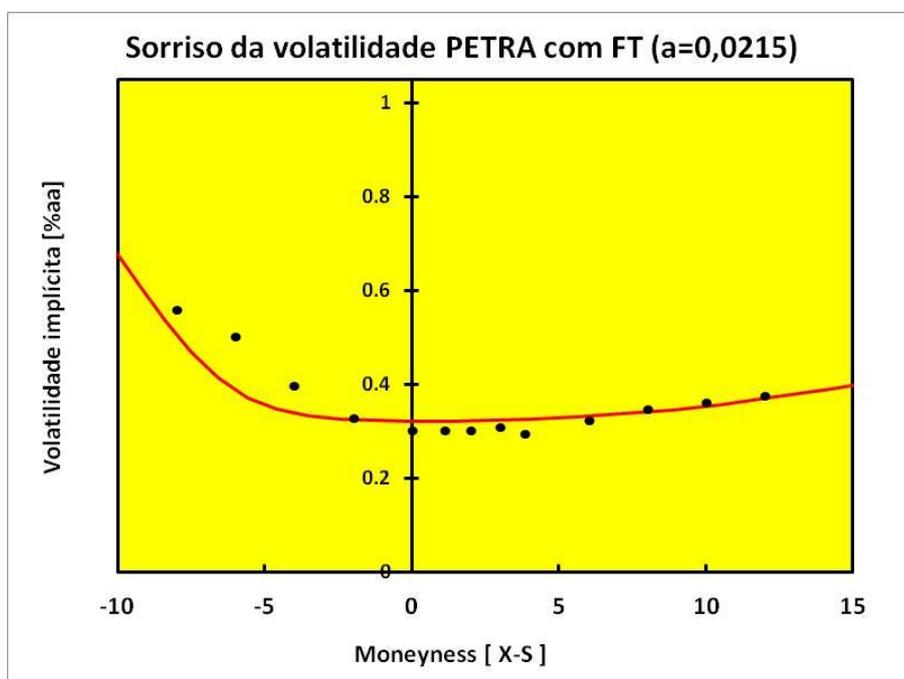


Figura 34. Sorriso da volatilidade obtida para os dados da curva da Figura 33

O método da transformada de Fourier se mostrou bastante robusto sem maiores problemas para $\alpha > 0,2$. Além da velocidade e robustez permite uma imensa flexibilidade na escolha das distribuições risco-neutras.

5. Conclusão

Com esse trabalho de monografia mostramos diversas formas de dedução da precificação de opções com o modelo de Black & Scholes salientando como o processo de hedging para eliminar o risco é fundamental para esse procedimento. Mostramos como esse procedimento leva naturalmente a probabilidades risco-neutras descritas através de martingales que requerem que o drift das ações sejam iguais à taxa de juros de renda fixa do mercado. A fórmula de Black&Scholes foi demonstrada nessa monografia através de 4 formas diferentes: (1) através do limite da precificação do modelo binomial; (2) através do conceito de prêmio justo impondo a condição de neutralidade ao risco e a distribuição log-normal; (3) através da solução da equação diferencial estocástica de Black&Scholes que utilizou o conceito de que o retorno de portfólios de arbitragem, sem risco e sem capital próprio, tem que ser nulo, além do pressuposto de que os preços das ações segue um movimento Browniano geométrico. Mostramos uma aplicação do modelo de Black&Scholes na precificação de opções sobre ações da PETROBRÁS e da sensibilidade do modelo com a volatilidade. Também mostramos como gerar curvas do SORRISO DA VOLATILIDADE através desses dados e discutimos que a presença desse sorriso indica a necessidade de rever os pressupostos do modelo Black&Scholes.

Para o desenvolvimento matemático dessa monografia foi necessário introduzir muitos conceitos de teoria de probabilidade, como as funções características, e de matemática como as transformadas de Fourier e do cálculo de variáveis complexas e de resíduos. Embora se trate de uma matemática usualmente não estudada nos cursos de economia, o desenvolvimento da teoria da precificação demonstra claramente a importância desses tópicos na área econômica. Nesse aspecto essa monografia fornece uma introdução razoavelmente completa do ponto de vista da operacionalização dos conceitos para um leitor não familiar com os temas.

Para evoluir além do modelo Black&Scholes foi necessário abrir mão do pressuposto do movimento Browniano geométrico, mas sem abrir mão do pressuposto de que o prêmio da opção será tal que não permita operações de arbitragem. Isso implica a utilização de martingales que impõe restrição sobre o drift das probabilidades risco-neutra. O cálculo de resíduos permitiu que a imposição da condição de martingale no drift tenha se tornado muito simples, impondo valores complexos da função característica para $t = -i$. Dessa forma tornou-se possível generalizar o modelo de precificação para qualquer distribuição de log-retornos risco-neutra. Finalmente aplicamos esse procedimento para precificar opções ampliando o movimento Browniano geométrico para incorporar cumulantes superiores, até a ordem 4 da curtose, na distribuição normal dos log-retornos. Esse

procedimento foi capaz de gerar curvas de SORRISO DA VOLATILIDADE, indicando a direção correta do mesmo. Infelizmente ainda não é suficiente porque os sorrisos que geramos são menores do que os apresentados pelos preços do mercado. Percebemos que a grande dificuldade dessa metodologia é a falta de liberdade para escolha dos parâmetros de assimetria e curtose. Dependendo dos valores assumidos podem gerar prêmios que não seguem as condições bem gerais sobre a curvatura dos prêmios em função do strike price. Esse resultado indicou, portanto, que seria necessária a utilização de distribuições muito mais fortemente divergentes em relação à distribuição normal do que a simples aproximação da mesma através da incorporação de cumulantes de ordem superiores.

A distribuição de Student generalizada se mostrou capaz de gerar a curva de preços da opção em função do strike price de acordo com os dados empíricos do mercado e gerou uma curva de sorriso da volatilidade bem de acordo com as curvas observadas. O método de integração direta do payoff com a fdp da distribuição risco-neutra se mostrou adequado, mas com alto custo computacional, exigindo uma integração para cada valor de strike price. Finalmente demonstramos um método em que o cálculo do prêmio é totalmente realizado no espaço de Fourier, capaz de gerar a curva inteira do prêmio vs strike price com a aplicação de apenas uma transformada de Fourier inversa quando se conhece a expressão analítica da função característica risco-neutra. Trata-se de um método robusto, rápido e muito flexível que foi totalmente implementado em uma planilha Excel. Com essa técnica podemos testar qualquer outra distribuição risco-neutra proposta.

Esperamos que essa monografia demonstre o imenso potencial de aplicação das transformadas de Fourier na economia, começando pelas funções características e chegando ao nível de calcular completamente a curva inteira dos prêmios das opções. A maior parte dessas possibilidades se devem às propriedades das transformadas de Fourier que a tornam tão poderosas. Trata-se de uma ferramenta intensamente utilizada na física e engenharias por quase 200 anos que só veio encontrar aplicações na economia a partir de 2000.

O objetivo dessa monografia foi procurar métodos para gerar sorrisos de volatilidade através da precificação risco-neutra das opções. Uma continuidade desse trabalho seria de não apenas mostrar que distribuições podem gerar sorrisos, mas também de desenvolver o processo de hedge que eliminaria o risco com essas distribuições. Sabendo, através da literatura, que fora do pressuposto de movimento Browniano geométrico se torna impossível eliminar completamente o risco, outra continuidade seria a incorporação de um prêmio de risco na precificação risco-neutra.

6. Apêndices

6.1. Apêndice 1: Série de Taylor

A Série de Taylor de uma função de classe infinitamente diferenciável pode ser explicada da seguinte forma simples e intuitiva. Desejamos aproximar a função $f(x)$ em torno

de $x = x_0$ por uma série de potências na forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. O índice n define a

ordem da aproximação, com $f(x) = a_0$ para aproximação de ordem zero, ou seja, uma reta

horizontal, $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, uma reta com coeficiente angular a_1 , para aproximação

de ordem 1, $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ para a aproximação de ordem 2, e assim

por diante. É intuitivo que a melhor aproximação seja aquela em que, no ponto $x = x_0$ tanto a função quanto sua aproximação sejam idênticas. Nesse caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \Big|_{x=x_0} = a_0, \text{ logo } a_0 = f(x_0).$$

Para determinar os outros coeficientes a_n também vamos exigir que os valores das derivadas da função e da aproximação sejam idênticos em $x = x_0$, como mostra o gráfico da Figura 35, abaixo, para uma aproximação de ordem 2.

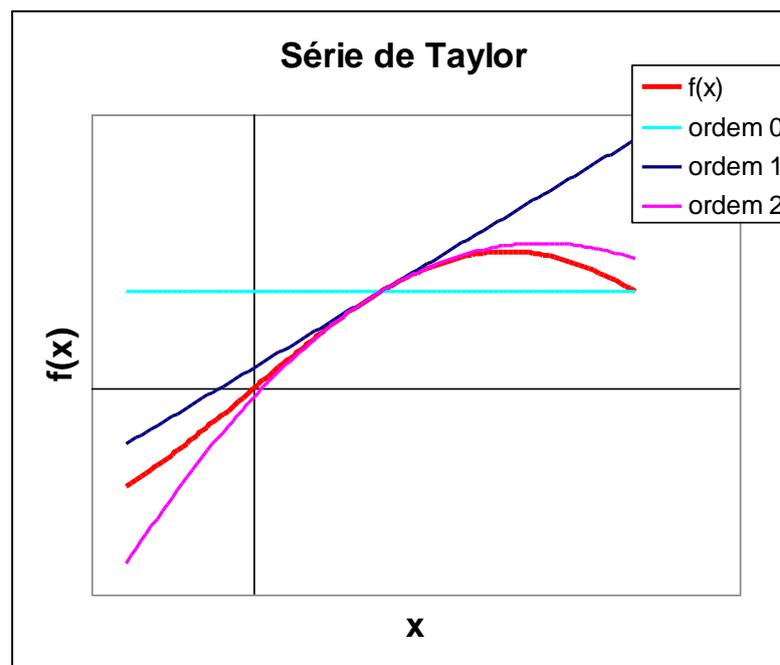


Figura 35. Série de Taylor

Podemos demonstrar que os coeficientes $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, onde $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$,

através dos seguintes passos:

$$1. \quad \frac{d^k}{dx^k} (x-x_0)^n = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (x-x_0)^{n-k} \quad k < n$$

$$2. \quad \frac{d^k}{dx^k} (x-x_0)^n = 0 \quad k > n$$

$$3. \quad \frac{d^n}{dx^n} (x-x_0)^n = n!$$

$$4. \quad \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{n!}{(n-k)!} (x-x_0)^{k-n}$$

$$5. \quad \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \Big|_{x=x_0} = n! a_n$$

Impondo que $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \Big|_{x=x_0}$ chegamos a: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Dessa forma, a Série de Taylor, é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \dots$$

Que pode ser escrita na forma condensada como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

A expansão do caso particular da série de Taylor-Maclaurin, em que $x_0 = 0$, fica:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Que pode ser escrita na forma condensada como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Em princípio essa é uma série infinita. Entretanto, uma série infinita só será útil se for possível mostrar que ela converge, ou seja, que pode ser truncada em determinado número de termos e que o erro cometido com essa truncagem tende a zero à medida que o número de termos incluídos cresce. O erro cometido com essa truncagem chama-se Resto. Uma série de Taylor truncada em n só pode ser utilizada para função diferenciável, pelo

menos, n vezes. Mas isso relaxa a condição de que a função deve ser infinitamente diferenciável.

6.2. Apêndice 2: Prova de que a função característica é absolutamente contínua

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{ixh} f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} (e^{ixh} - 1) f(x) dx$$

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2ie^{ixt} e^{i\frac{xh}{2}} \left(\frac{e^{i\frac{xh}{2}} - e^{-i\frac{xh}{2}}}{2i} \right) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2ie^{ixt} e^{i\frac{xh}{2}} \sin\left(\frac{xh}{2}\right) f(x) dx$$

Assim:

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| ie^{ixt} e^{i\frac{xh}{2}} \right| \left| \sin\left(\frac{xh}{2}\right) \right| |f(x)| dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{xh}{2}\right) \right| |f(x)| dx$$

Portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq 2 \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{xh}{2}\right) \right| |f(x)| dx = 0$, provando o teorema.

6.3. Apêndice 3: Associação entre a FDP e a função característica

Para verificar que a associação entre $\varphi(t)$ e $f(x)$ é biunívoca precisamos de uma

função delta de Dirac especial, obtida da sequência $\delta_n(x-x_0) = A \frac{\sin[n(x-x_0)]}{(x-x_0)}$ cuja curva

é mostrada na Figura 36.

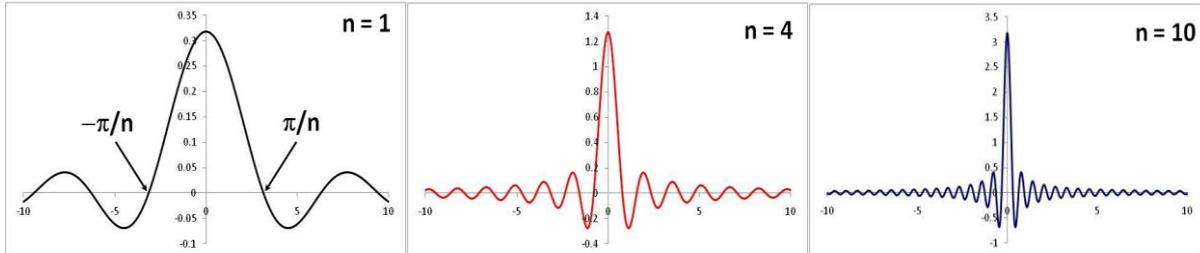


Figura 36. Gráfico da função $\delta_n(x-x_0) = \frac{\sin[n(x-x_0)]}{\pi(x-x_0)}$ para $x_0=0$ e $n=1, 4$ e 10 . Note que a altura sobe com n e a largura diminui. A distância entre as duas primeiras raízes vale $2\pi/n$.

A área sobre essa curva pode ser calculada por resíduos e vale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi$.

Com o cálculo de resíduos²⁰ essa tarefa simplifica. Antes de qualquer coisa

fazemos: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du \right]$. Depois fazemos o cálculo da seguinte integral:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\text{semicirculo inf } R=\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\text{semicirculo sup } R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \text{Res}(z=0)$$

Agora $\int_{\text{semicirculo sup } R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ porque para $z = \text{Re}^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ então

$e^{iz} = e^{iR \cos \theta} e^{-R \sin \theta}$ e o como $\sin \theta > 0$ para $0 < \theta < \pi$ o termo $e^{-R \sin \theta}$ anula tudo no limite $R \rightarrow \infty$

Por outro lado:

$$\oint_{\text{semicirculo inf } R=\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta)}}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta)} d\theta = i \int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \pi i$$

O resíduo do polo simples em $z=0$ vale $\text{Res} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \frac{e^{iz}}{z} \right] = 1$

Juntando tudo temos:

²⁰ Ver apêndice 11

$$\oint \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \pi i + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i, \text{ ou seja: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz \right] = \pi i$$

$$\text{Portanto: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du \right] = \text{Im}[\pi i] = \pi$$

$$\text{Resultado final: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi$$

Assim garante-se que para $A = \frac{1}{\pi}$ a área sobre a curva é unitária precisamos fazer.

Dessa forma, a função $\delta_n(x-x_0) = \frac{\sin[n(x-x_0)]}{\pi(x-x_0)}$ se torna a função delta de Dirac no limite

$n \rightarrow \infty$:

$$\delta(x-x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x-x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin[n(x-x_0)]}{\pi(x-x_0)}$$

Por outro lado podemos usar a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ para calcular

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{i(x-x_0)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(x-x_0)t}}{i(x-x_0)} \Big|_{-n}^{+n} = \frac{1}{\pi(x-x_0)} \frac{e^{in(x-x_0)} - e^{-in(x-x_0)}}{2i} = \frac{\sin[n(x-x_0)]}{\pi(x-x_0)}. \text{ Daqui extraímos a}$$

importante identidade:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x_0)t} dt = \delta(x-x_0)$$

Agora podemos verificar a transformada de Fourier inversa facilmente, substituindo a $\varphi(t)$ abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix't} f(x') dx' dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') dx' \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x'-x)t} dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x'-x) dx' = f(x)$$

Isso nos permite reconhecer a $f(x)$ dada a $\varphi(t)$ e vice-versa.

6.4. Apêndice 4: Relação entre os cumulantes e os momentos

As relações entre os cumulantes e os momentos podem ser obtidas derivando o logaritmo conforme segue:

$$1. \quad \frac{d^0}{dt^0} \ln \varphi = \ln \varphi; \quad c_0 = 0$$

$$2. \quad \ln \varphi = \frac{\varphi'}{\varphi} = \varphi^{-1} \varphi'; \quad c_1 = M_1 = \mu$$

$$3. \quad \frac{d^2}{dt^2} \ln \varphi = \varphi^{-1} \varphi'' - \varphi^{-2} \varphi' \varphi' = \varphi^{-1} \varphi'' - \varphi^{-2} \varphi'^2; \quad c_2 = M_2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$4. \quad \frac{d^3}{dt^3} \ln \varphi = \varphi^{-1} \varphi''' - \varphi^{-2} \varphi' \varphi'' - 2\varphi^{-2} \varphi' \varphi'' - 2\varphi^{-3} \varphi'^3 = \varphi^{-1} \varphi''' - 3\varphi^{-2} \varphi' \varphi'' + 2\varphi^{-3} \varphi'^3, \quad \text{então}$$

$c_3 = M_3 - 3\mu M_2 + 2\mu^3$, que pode ser colocado em termos dos momentos centrados

como $c_3 = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 + m_3 - 3\mu(\mu^2 + \sigma^2) + 2\mu^3 = m_3$. Logo $\frac{c_3}{\sigma^3} = \frac{m_3}{\sigma^3}$.

$$5. \quad \frac{d^4}{dt^4} \ln \varphi = \varphi^{-1} \varphi^{(4)} - 4\varphi^{-2} \varphi' \varphi''' - 3\varphi^{-2} \varphi''^2 + 12\varphi^{-3} \varphi'^2 \varphi'' - 6\varphi^{-4} \varphi'^4, \quad \text{ou} \quad \text{seja:}$$

$c_4 = M_4 - 4M_1 M_3 - 3M_2^2 + 12M_1^2 M_2 - 6M_1^4$. Colocando em termos dos momentos centrados:

$$c_4 = m_4 + 4\mu m_3 - 4\mu m_3 + 6\mu^2 \sigma^2 - 12\mu^2 \sigma^2 - 6\sigma^2 \mu^2 + 12\mu^2 \sigma^2 + \mu^4 - 4\mu^4 - 3\mu^4 + 12\mu^4 - 6\mu^4 - 3\sigma^4.$$

Finalmente temos que $c_4 = m_4 - 3\sigma^4$ e $k = \frac{c_4}{\sigma^4} = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$.

6.5. Apêndice 5: Demonstração de que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Para demonstrar esse resultado definimos $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Mas como a variável de integração é muda, então $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$ logo $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. Agora podemos mudar de sistema de coordenadas cartesianas para polares no qual $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $x^2 + y^2 = r^2$ e o elemento de área vale $dx dy \rightarrow r dr d\theta$. Para fechar todo o plano x - y , r varia de zero a infinito e θ de 0 a 2π . Neste caso $I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta$. A integral em θ é imediata e ficamos com $I^2 = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} 2r dr$. Agora mudamos a variável para $u = r^2$ logo $du = 2r dr$ e ficamos com $I^2 = \pi \int_0^{+\infty} e^{-u} du$. Mas $\int_0^{+\infty} e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^{+\infty} = e^0 = 1$, então $I^2 = \pi$ e $I = \sqrt{\pi}$, ou seja, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. C.Q.D.

6.6. Apêndice 6: Momentos da Log-Normal

Os momentos da log-normal são dados por:

$$M_n = \int_0^{\infty} y^n \frac{e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma y} dy$$

Mudando a variável de integração para $\ln y = x$, $y = e^x$, $\frac{dy}{y} = dx$, quando

$y \rightarrow 0$ $x \rightarrow -\infty$ e quando $y \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$. Nesse caso: $M_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{nx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$. O

truque aqui é completar quadrado no expoente:

$$\begin{aligned} e^{nx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 nx}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 2\sigma^2 nx}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2 - 2(\mu + n\sigma^2)x + (\mu + n\sigma^2)^2 - (\mu + n\sigma^2)^2 + \mu^2}{2\sigma^2}} \\ e^{nx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} &= e^{-\frac{(x - \mu - n\sigma^2)^2 - (\mu^2 + 2\mu n\sigma^2 + n^2\sigma^4) + \mu^2}{2\sigma^2}} = e^{\frac{\mu + n\sigma^2}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \mu - n\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Daí vemos que $M_n = e^{\frac{\mu + n\sigma^2}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - \mu - n\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx \right]$. A integral entre colchetes vale

1 e temos todos os momentos de ordem n dados por $M_n = e^{\frac{\mu + n\sigma^2}{2} \frac{\sigma^2}{\sigma^2}}$. Em particular temos

$M_0 = 1$; $M_1 = e^{\frac{\mu + \sigma^2}{2}}$; $M_2 = e^{2\mu + 2\sigma^2}$; $M_3 = e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2}$ e $M_4 = e^{4\mu + 8\sigma^2}$. Podemos calcular os

momentos centrados usando binômio de Newton $m_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mu^{n-k} M_k$. Já sabemos que

$m_0 = 1$ e $m_1 = 0$. Para a variância m_2 temos: $m_2 = M_2 - M_1^2$ logo

$m_2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$, $V[y] = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ e $\sqrt{V[y]} = e^{\frac{\mu + \sigma^2}{2}} \sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)}$. Para o

momento centrado de ordem 3 temos $m_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$, de onde extraímos que:

$$\begin{aligned} m_3 &= e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} - 3e^{\frac{\mu + \sigma^2}{2}} e^{2\mu + 2\sigma^2} + 2e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} = e^{3\mu + \frac{9}{2}\sigma^2} - 3e^{3\mu + \frac{5}{2}\sigma^2} + 2e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} \\ m_3 &= e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} \left[e^{3\sigma^2} - 3e^{\sigma^2} + 2 \right] = e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} \left[e^{\sigma^2} - 1 \right]^2 \left[e^{\sigma^2} + 2 \right] \end{aligned}$$

A Skewness será dada por:

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{(\sqrt{V(y)})^3} = \frac{e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} \left[e^{\sigma^2} - 1 \right]^2 \left[e^{\sigma^2} + 2 \right]}{e^{3\mu + \frac{3}{2}\sigma^2} \left[e^{\sigma^2} - 1 \right]^3} = \sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)} \left[e^{\sigma^2} + 2 \right].$$

Para o momento de ordem 4, $m_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4$, teremos:

$$m_4 = e^{4\mu+8\sigma^2} - 4e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} e^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2} + 6e^{2\mu+\sigma^2} e^{2\mu+2\sigma^2} - 3e^{4\mu+2\sigma^2}$$

$$m_4 = e^{4\mu+8\sigma^2} - 4e^{4\mu+5\sigma^2} + 6e^{4\mu+3\sigma^2} - 3e^{4\mu+2\sigma^2}$$

Que pode ser simplificado para $m_4 = e^{4\mu+2\sigma^2} [e^{6\sigma^2} - 4e^{3\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} - 3]$ e fatorando o termo:

$$[e^{6\sigma^2} - 4e^{3\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} - 3] = [e^{\sigma^2} - 1][e^{5\sigma^2} + e^{4\sigma^2} + e^{3\sigma^2} - 3e^{2\sigma^2} - 3e^{\sigma^2} + 3]$$

$$[e^{6\sigma^2} - 4e^{3\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} - 3] = [e^{\sigma^2} - 1]^2 [e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 3]$$

Obtemos, finalmente: $m_4 = e^{4\mu+2\sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]^2 [e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 3]$.

Seguindo a operação abaixo, chegamos finalmente à curtose:

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{(\sqrt{V(y)})^4} = \frac{e^{4\mu+2\sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]^2}{e^{4\mu+2\sigma^2} [e^{\sigma^2} - 1]^2} [e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 3]$$

$$\alpha_4 = k = [e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 3]$$

Como $1+2+3=6$ percebe-se que $k \geq 0$ sempre, com a igualdade valendo apenas se $\sigma^2 = 0$.

6.7. Apêndice 7: Macro com função loop

Neste apêndice será demonstrado como construir uma macro com função loop para repetir a operação *solver* do Excel, cuja aplicação se estende a outras áreas da economia, como a construção da fronteira eficiente de Markowitz. As linhas iniciadas com o caractere ‘ são entendidas pelo VBA como comentários, e os conteúdos dessas linhas não serão executados. Observações pertinentes, portanto, serão iniciadas de ‘. O código da macro será:

```
Sub volimplicita()
```

```
For row = 50 To 62
```

```
‘ Este primeiro comando define que a variável row irá variar de 50 a 62, sendo este o  
‘ intervalo em que se encontra a Tabela 16.
```

```
Set target = Worksheets("Sheet1").Cells(row, "P")
```

```
‘ Este comando definirá a variável target, que é a nossa variável alvo, o erro, o qual  
‘ queremos que seja 0. O mesmo encontra-se na coluna “P”. Note que no comando para  
‘ designar a localização da célula desejada, Cells(índice da linha, índice da coluna), o valor  
‘ utilizado para o índice da linha foi a variável criada row, que irá variar de 50 a 62. O  
‘ índice da coluna pode ser escrito tanto como a letra da coluna entre aspas, ou pelo  
‘ número correspondente àquela coluna. No caso, “P” seria igual a 16. A fórmula =col([ref])  
‘ retorna o número da coluna escolhida.
```

```
Set sigmaimplicito = Worksheets("Sheet1").Cells(row, "L")
```

```
‘ Aqui, sigmaimplicito será a coluna do  $\sigma_{\text{implícito}}$ . Será esta variável que faremos variar no  
‘ solver.
```

```
    SolverReset
```

```
    SolverOk SetCell:=target, MaxMinVal:=3, ValueOf:="0", ByChange:=sigmaimplicito
```

```
    SolverFinish keepFinal:=1
```

```
    SolverSolve userFinish:=True
```

```
‘ As quatro linhas acima executarão o solver. SetCell definirá a célula alvo, cujo valor  
‘ queremos que seja 0, definido em ValueOf:="0". ByChange definirá as células que devem  
‘ ser alteradas para atingir o resultado. Ao fazer os valores de SetCell:=target e  
‘ ByChange:=sigmaimplicito, faremos as linhas de referência das células variarem de  
‘ acordo com a variável row.
```

```
Next
```

```
‘ Esta última linha será o final da função loop. Os comandos das linhas serão executados  
‘ primeiramente para row = 50. Quando atingir a linha de comando Next, o VBA retornará ao  
‘ início e executará novamente os comandos para row = 51, e assim por diante até a linha  
‘ 62.
```

```
End Sub
```

6.8. Apêndice 8: DFT

Neste apêndice veremos como realizar a transformada de Fourier e sua inversa no Excel. Vamos criar um intervalo simétrico, fazendo o x variar de $-\frac{X}{2}$ até $+\frac{X}{2}$ com $N = 2^n$ pontos. Com os pontos no formato $N = 2^n$ podemos também extrair a FFT, o que não faremos a priori nesse trabalho, pois sua operação no Excel resultou em maior tempo de processamento do que seguindo o método a seguir.

Nesse caso o $\delta x = \frac{X}{N}$ e $x_j = -\frac{X}{2} + j\frac{X}{N} = \frac{X}{N}\left(j - \frac{N}{2}\right)$. Agora fazemos $T = N\frac{2\pi}{X}$

e $\delta t = \frac{2\pi}{X}$, com t variando de $-\frac{T}{2}$ até $+\frac{T}{2}$. Então temos que

$$t_k = -\frac{\pi N}{X} + k\frac{2\pi}{X} = \frac{2\pi}{X}\left(k - \frac{N}{2}\right).$$

O produto $x_j t_k$ então é dado por:

$$x_j t_k = \frac{2\pi}{X}\left(k - \frac{N}{2}\right)\frac{X}{N}\left(j - \frac{N}{2}\right) = \frac{2\pi}{N}\left(kj - j\frac{N}{2} - k\frac{N}{2} + \frac{N^2}{4}\right)$$

$$x_j t_k = \frac{2\pi}{N}kj - j\pi - k\pi + \frac{N}{2}\pi$$

Nós precisamos de

$$e^{\pm i x_j t_k} = e^{\pm i \frac{2\pi}{N}kj} e^{\mp i j\pi} e^{\mp i k\pi} e^{\pm i \frac{N}{2}\pi} = e^{\pm i \frac{2\pi}{N}kj} (e^{\mp i\pi})^j (e^{\mp i\pi})^k e^{\pm i \frac{N}{2}\pi} = e^{\pm i \frac{2\pi}{N}kj} (e^{\mp i\pi})^j (e^{\mp i\pi})^k (e^{\pm i 2\pi})^{2^{n-2}}$$

Vemos que $e^{\pm i\pi} = \cos(\pm\pi) \pm i \sin(\pm\pi) = -1$ e $e^{\pm i 2\pi} = \cos(\pm 2\pi) \pm i \sin(\pm 2\pi) = +1$,

logo, $e^{\pm i x_j t_k} = (-1)^{j+k} e^{\pm i \frac{2\pi}{N}kj}$.

Agora definimos as matrizes $W_{jk} = \frac{1}{N}(-1)^{j+k} e^{i \frac{2\pi}{N}kj}$ e $W_{jk}^{-1} = (-1)^{j+k} e^{-i \frac{2\pi}{N}kj}$, das

quais obtemos as transformadas direta e inversa facilmente. O fator $\frac{1}{N}$ foi escolhido para que as matrizes W e W^{-1} sejam inversas entre si. Vamos construir as duas matrizes no Excel.

Façamos uma matriz, como na Figura 37, com 256 pontos. As colunas pintadas em preto representam j na vertical e k na horizontal, que vão de 0 a 255. Criamos agora as variáveis n e N . Podemos deixar o termo $\frac{2\pi}{N}$ já calculado, para facilitar. Note que a operação multiplicação de matrizes do Excel só é definida para números reais. A função $f(x)$ é real,

mas a matriz $W = W_{real} + iW_{im}$ é complexa, portanto teremos que quebrar as operações em duas com o produto matricial dado por:

$$\varphi = Wf = (W_{real} + iW_{im})(f_{real} + if_{im}) = W_{real}f + iW_{im}f$$

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
5		n = 8																		
6		N = 2^n = 256																		
7																				
8		2π/N = 0.024544																		
9																				
10																				
11	j/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
12	0	0.003906	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039
13	1	-0.00391	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0039	-0.004	0.0038	-0.004	0.0038	-0.004	0.0038	-0.004	0.0037	-0.004	0.0036	-0.004	0.0036	-0.004
14	2	0.003906	-0.004	0.0039	-0.004	0.0038	-0.004	0.0037	-0.004	0.0036	-0.004	0.0034	-0.003	0.0032	-0.003	0.003	-0.003	0.0028	-0.003	0.0025
15	3	-0.00391	0.0039	-0.004	0.0038	-0.004	0.0036	-0.004	0.0034	-0.003	0.0031	-0.003	0.0027	-0.002	0.0022	-0.002	0.0018	-0.001	0.0012	-9E-04
16	4	0.003906	-0.004	0.0038	-0.004	0.0036	-0.003	0.0032	-0.003	0.0028	-0.002	0.0022	-0.002	0.0015	-0.001	0.0008	-4E-04	-1E-17	0.0004	-8E-04
17	5	-0.00391	0.0039	-0.004	0.0036	-0.003	0.0032	-0.003	0.0026	-0.002	0.0018	-0.001	0.0009	-4E-04	-1E-04	0.0006	-0.001	0.0015	-0.002	0.0023
18	6	0.003906	-0.004	0.0037	-0.004	0.0032	-0.003	0.0025	-0.002	0.0015	-9E-04	0.0004	0.0002	-8E-04	0.0013	-0.002	0.0023	-0.003	0.0031	-0.003
19	7	-0.00391	0.0038	-0.004	0.0034	-0.003	0.0026	-0.002	0.0014	-8E-04	1E-04	0.0006	-0.001	0.0018	-0.002	0.0029	-0.003	0.0036	-0.004	0.0039
20	8	0.003906	-0.004	0.0036	-0.003	0.0028	-0.002	0.0015	-8E-04	-1E-17	0.0008	-0.001	0.0022	-0.003	0.0032	-0.004	0.0038	-0.004	0.0038	-0.004
21	9	-0.00391	0.0038	-0.004	0.0031	-0.002	0.0018	-9E-04	1E-04	0.0008	-0.002	0.0023	-0.003	0.0034	-0.004	0.0039	-0.004	0.0036	-0.003	0.0026
22	10	0.003906	-0.004	0.0034	-0.003	0.0022	-0.001	0.0004	0.0006	-0.001	0.0023	-0.003	0.0035	-0.004	0.0039	-0.004	0.0034	-0.003	0.002	-0.001
23	11	-0.00391	0.0038	-0.003	0.0027	-0.002	0.0009	0.0002	-0.001	0.0022	-0.003	0.0035	-0.004	0.0039	-0.004	0.0031	-0.002	0.0015	-5E-04	-6E-04
24	12	0.003906	-0.004	0.0032	-0.002	0.0015	-4E-04	-8E-04	0.0018	-0.003	0.0034	-0.004	0.0039	-0.004	0.003	-0.002	0.0011	-7E-19	-0.001	0.0022
25	13	-0.00391	0.0037	-0.003	0.0022	-0.001	-1E-04	0.0013	-0.002	0.0032	-0.004	0.0039	-0.004	0.003	-0.002	0.0009	0.0003	-0.001	0.0026	-0.003
26	14	0.003906	-0.004	0.003	-0.002	0.0008	0.0006	-0.002	0.0029	-0.004	0.0039	-0.004	0.0031	-0.002	0.0009	0.0004	-0.002	0.0028	-0.004	0.0039
27	15	-0.00391	0.0036	-0.003	0.0018	-4E-04	-0.001	0.0023	-0.003	0.0038	-0.004	0.0034	-0.002	0.0011	0.0003	-0.002	0.0028	-0.004	0.0039	-0.004
28	16	0.003906	-0.004	0.0028	-0.001	-1E-17	0.0015	-0.003	0.0036	-0.004	0.0036	-0.003	0.0015	-7E-19	-0.001	0.0028	-0.004	0.0039	-0.004	0.0028
29	17	-0.00391	0.0036	-0.003	0.0012	0.0004	-0.002	0.0031	-0.004	0.0038	-0.003	0.002	-5E-04	-0.001	0.0026	-0.004	0.0039	-0.004	0.0027	-0.001

Figura 37. Matriz $W_{jk} = \frac{1}{N}(-1)^{j+k} e^{i\frac{2\pi}{N}kj}$

As matrizes serão construídas no Excel utilizando as fórmulas abaixo:

$$W_{real} = \text{IMREAL}(\text{IMPROD}(\text{IMEXP}(\text{IMPROD}("i", \$E\$8, E\$11, \$D12)), ((-1)^(E\$11+\$D12)/\$E\$6)))$$

$$W_{im} = \text{IMAGINÁRIO}(\text{IMPROD}(\text{IMEXP}(\text{IMPROD}("i", \$E\$8, E\$11, \$D12)), ((-1)^(E\$11+\$D12)/\$E\$6)))$$

Para construir a matriz inversa, W^{-1} , podemos aproveitar as matrizes já construídas, copiando e fazendo pequenas alterações. Para adaptá-la devemos retirar a multiplicação pelo termo $\frac{1}{N}$ e inverter o sinal de $i\frac{2\pi}{N}kj$. Facilita se somente trocarmos o sinal do termo $\frac{2\pi}{N}$ que deixamos já calculado, para $-\frac{2\pi}{N}$. Assim, ficamos com as fórmulas:

$$W_{real}^{-1} = \text{IMREAL}(\text{IMPROD}(\text{IMEXP}(\text{IMPROD}("i", \$E\$8, E\$11, \$D12)), ((-1)^(E\$11+\$D12))))$$

$$W_{im}^{-1} = \text{IMAGINÁRIO}(\text{IMPROD}(\text{IMEXP}(\text{IMPROD}("i", \$E\$8, E\$11, \$D12)), ((-1)^(E\$11+\$D12))))$$

Transformada de Fourier direta:

$$\text{Queremos} \quad \varphi(t_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_j t_k} f(x_j) dx \quad \rightarrow \quad \varphi_k \cong \delta x \sum_{j=0}^{N-1} e^{ix_j t_k} f_j = X \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} e^{ix_j t_k} \right) f_j$$

chamando $\varphi_k = \varphi(t_k)$ e $f_j = f(x_j)$, temos que $\varphi_k = X \sum_{j=0}^{N-1} W_{jk} f_j$.

Para fins de ilustração vamos construir uma distribuição normal. Criamos primeiramente as variáveis N , X , μ e σ . Para facilitar, vamos deixar calculados os termos $N/2$, X/N , $2\pi/X$ e σ^2 , conforme Figura 38. Agora façamos a coluna j , com o mesmo número de termos da matriz W_{jk} , indo de 0 a 255.

	C	D	E	F	G	H	I
8		n = 8					
9		N = 2 ⁿ = 256					
10		N/2 = 128					
11							
12		X = 7					
13		X/N = 0.02734375					
14		2π/X = 0.897597901					
15							
16		μ = 1					
17		σ = 0.5					
18		σ ² = 0.25					
19							
20	j	x	f(x)	t	Re[φ(t)]	Im[φ(t)]	f(x) = FT ⁻¹ [φ(t)]
21	0	-3.5	2.05595E-18	-114.9	-4.61801E-08	0	7.18783E-14
22	1	-3.473	3.35829E-18	-114	4.61809E-08	-4.9004E-10	-1.69306E-13
23	2	-3.445	5.46921E-18	-113.1	-4.61834E-08	9.80221E-10	1.60237E-13
24	3	-3.418	8.88038E-18	-112.2	4.61875E-08	-1.47068E-09	-2.91734E-13
25	4	-3.391	1.43761E-17	-111.3	-4.61933E-08	1.96156E-09	2.90747E-13
26	5	-3.363	2.32033E-17	-110.4	4.62006E-08	-2.45301E-09	-3.25551E-13

Figura 38. Construção da Normal

O x irá variar de $-\frac{X}{2}$ até $+\frac{X}{2}$, com $\delta x = \frac{X}{N}$. Podemos ver a operação no Excel com detalhes na Figura 39 (a). A $f(x)$ pode ser obtida através da fórmula =DISTNORM($x, \mu, \sigma, 0$), conforme a Figura 39 (b). O termo t , vide Figura 39 (c), será

$$t_k = \frac{2\pi}{X} \left(k - \frac{N}{2} \right).$$

	C	D	E		C	D	E		C	D	E	F
8		n = 8		8		n = 8		8		n = 8		
9		N = 2 ⁿ = =2^E8		9		N = 2 ⁿ = =2^E8		9		N = 2 ⁿ = =2^E8		
10		N/2 = =E9/2		10		N/2 = =E9/2		10		N/2 = =E9/2		
11				11				11				
12		X = 7		12		X = 7		12		X = 7		
13		X/N = =E12/E9		13		X/N = =E12/E9		13		X/N = =E12/E9		
14		2π/X = =2*PI()/E12		14		2π/X = =2*PI()/E12		14		2π/X = =2*PI()/E12		
15				15				15				
16		μ = 1		16		μ = 1		16		μ = 1		
17		σ = 0.5		17		σ = 0.5		17		σ = 0.5		
18		σ ² = =E17^2		18		σ ² = =E17^2		18		σ ² = =E17^2		
19				19				19				
20	j	x	f(x)	20	j	x	f(x)	20	j	x	f(x)	
21	0	=-E13*(C21-E10)	=DISTNORM(D21,E16,E17,0)	21	0	=-E13*(C21-E10)	=DISTNORM(D21,E16,E17,0)	21	0	=-E13*(C21-E10)	=DISTNORM(D21,E16,E17,0)	=-E14*(C21-E10)

(a) (b) (c)
Figura 39. Fórmulas do Excel para construção de uma distribuição Normal

Agora podemos partir para o cálculo da função característica, $\varphi_k = X \sum_{j=0}^{N-1} W_{jk} f_j$.

Conforme já explicado anteriormente, quebraremos a operação em duas, uma parte real e a outra imaginária, como pode ser visto nas colunas G e H da Figura 38. A fórmula do Excel fica:

$Re[\varphi(t)]=MATRIZ.MULT(Wreal!\$E\$12:\$I\$267,Normal!\$E\$21:\$E\$276)*Normal!\$E\$12$, em que “ $Wreal!\$E\$12:\$I\267 ” é a matriz W_{real} que construímos anteriormente, “ $Normal!\$E\$21:\$E\276 ” é a $f(x)$ e $Normal!\$E\12 é X . Note que se trata de uma multiplicação de matriz, para tanto deve ser selecionado todo o intervalo totalizando os N pontos, digitar a fórmula e pressionar as teclas “ctrl+shift+enter”. Repetimos o procedimento para a parte imaginária, trocando a matriz W_{real} pela W_{im} . A fórmula será:

$$Im[\varphi(t)]=MATRIZ.MULT(Wimaginaria!\$E\$12:\$I\$267,Normal!\$E\$21:\$E\$276)*Normal!\$E\$12$$

Transformada de Fourier inversa:

Podemos agora fazer a transformada de Fourier inversa para obter novamente

$$nossa f(x). Queremos $f(x_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \varphi(t) dt \rightarrow f_j \cong \frac{\delta t}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ix_j t_k} \varphi_k = \frac{1}{X} \sum_{j=0}^{N-1} W_{jk}^{-1} \varphi_k$.$$

Como a operação de multiplicação de matrizes do EXCEL só é definida para números reais teremos que quebrar as operações em duas: $W^{-1} = W_{real}^{-1} + iW_{im}^{-1}$ e $\varphi = \varphi_{real} + i\varphi_{im}$. O produto matricial será dado por:

$$f = \frac{1}{X} (W_{real}^{-1} + iW_{im}^{-1})(\varphi_{real} + i\varphi_{im}) = \frac{1}{X} (W_{real}^{-1}\varphi_{real} - W_{im}^{-1}\varphi_{im})$$

No Excel, devemos proceder conforme explicado acima para operações com matrizes. A fórmula será:

$$=(MATRIZ.MULT('W-1 real'\$E\$12:\$I\$267,Normal!\$G\$21:\$G\$276)$$

- $MATRIZ.MULT('W-1 imaginario'\$E\$12:\$I\$267,Normal!\$H\$21:\$H\$276))\$E\$12$, em que o termo “ $Normal!\$G\$21:\$G\276 ” é o vetor da parte real da $[\varphi(t)]$ calculado anteriormente, $Re[\varphi(t)]$, e “ $Normal!\$H\$21:\$H\276 ” a parte imaginária, $Im[\varphi(t)]$.

Desta forma criamos no Excel a distribuição Normal, fizemos a transformada de Fourier direta para encontrar a função característica, e depois fizemos a transformada de Fourier inversa para retornar à $f(x)$. A Figura 40 mostra o gráfico da $f(x)$ gerada diretamente pelo Excel, em vermelho, e a $f(x)$ calculada através da transformada inversa, em amarelo. Note que as duas são idênticas. O mesmo vale para a função característica, comparando as curvas obtidas pela transformada (parte real em preto e parte imaginária em vermelho) com

as curvas obtidas diretamente através de $\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, cuja parte real está em azul claro e a imaginária em amarelo.

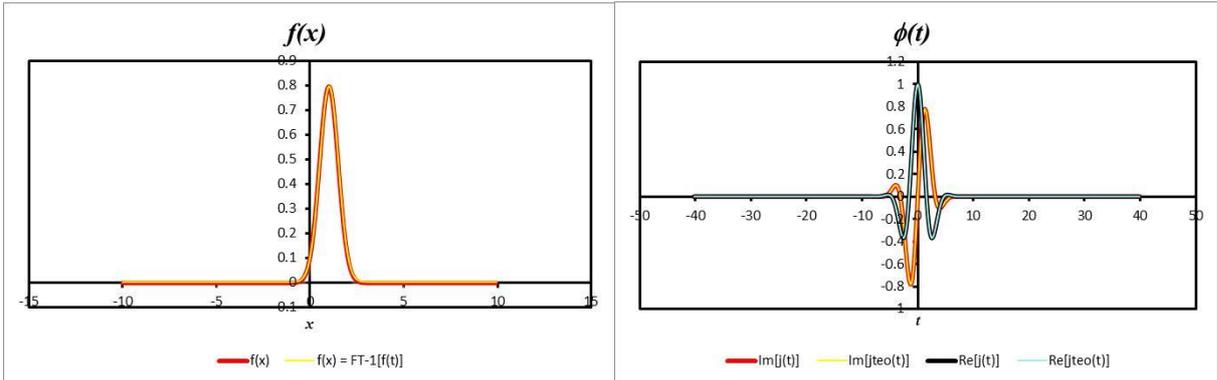


Figura 40. Da esquerda para a direita, $f(x)$ de uma normal com $\mu=1$ e $\sigma=0,5$, e sua $\phi(t)$

Prova de que W^{-1} é a inversa de W :

Para provar que as matrizes W e W^{-1} são inversas entre si usamos as definições das mesmas:

$$\begin{aligned} (WW^{-1})_{jl} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_{jk} W_{kl}^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{j+k} (-1)^{k+l} e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)k} = \\ &= \frac{1}{N} (-1)^{j+l} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{2k} \left[e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)} \right]^k = \frac{1}{N} (-1)^{j+l} \sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)} \right]^k \end{aligned}$$

A somatória é uma PG com razão $q = e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)}$ e $a_0 = 1$. A soma da PG é dada por

$S_{PG} = a_0 \frac{1-q^N}{1-q}$. Isso significa então que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)} \right]^k = \frac{1 - e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)N}}{1 - e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)}} = \frac{1 - e^{i2\pi(j-l)}}{1 - e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)}}$$

Mas $e^{i2\pi(j-l)} = 1$ a PG será sempre nula se $j \neq l$, pois o denominador nunca é nulo.

No caso em que $j = l$ o denominador também vai a zero e o resultado deve ser extraído através de um limite.

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)} \right]^k = \delta_{jl} \lim_{j \rightarrow l} \frac{1 - e^{i2\pi(j-l)}}{1 - e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)}}$$

Note que a delta de Kronecker δ_{jl} já garante o zero se $j \neq l$. Para achar o limite podemos usar L'Hopital para derivar em cima e em baixo e depois fazer $j = l$.

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)} \right]^k = \delta_{jl} \lim_{j \rightarrow l} \frac{1 - e^{i2\pi(j-l)}}{1 - e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)}} = \delta_{jl} \lim_{j \rightarrow l} \frac{-i2\pi e^{i2\pi(j-l)}}{-i \frac{2\pi}{N} e^{\frac{i2\pi}{N}(j-l)}} = N \delta_{jl}$$

Portanto $(WW^{-1})_{jl} = \frac{1}{N} (-1)^{j+l} N \delta_{jl} = \delta_{jl}$, ou seja: $WW^{-1} = I$

6.9. Apêndice 9: Distribuição de Lévy

Para a construção das distribuições de Lévy no Excel vamos calcular primeiro a

função característica da mesma, dada por $\varphi(t) = e^{iat - q|t|^\alpha [1 - i\beta \frac{t}{|t|} \omega(|t|, \alpha)]}$, para depois chegar à $f(x)$.

O termo $\omega(|t|, \alpha)$ pode assumir os valores $\tan \frac{\pi\alpha}{2}$ se $\alpha \neq 1$ ou $\frac{2}{\pi} \text{Ln}|t|$ se $\alpha = 1$. Trabalharemos somente com $\alpha \neq 1$.

	C	D	E	F	G	H	I	J
2		n = 8						
3		N = 2 ⁿ = 256						
4		N/2 = 128						
5								
6		X = 7						
7		X/N = 0.02734375						
8		2π/X = 0.897597901						
9								
10		a = 0						
11		q = 0.5						
12		α = 1.2						
13		β = 0.8						
14								
15		tan[πα/2] = -3.077683537						
21								
22	j	t	Re[φ _{teo} (t)]	Im[φ _{teo} (t)]	x	f(x) = FT ⁻¹ [φ(t)]	F(x)	x
23	0	-114.8925313	2.40448E-65	2.80518E-65	-3.5	0.021005657	0.000574373	-3.5
24	1	-113.9949334	-1.23899E-64	-8.15069E-65	-3.47265625	0.021099774	0.00115132	-3.472656
25	2	-113.0973355	5.66235E-64	1.79488E-64	-3.4453125	0.021210083	0.001731284	-3.445313

Figura 41. Construção de distribuições de Lévy no Excel

Construiremos uma planilha parecida com a criada no Apêndice 8, conforme a Figura 38. As colunas j, t e x serão feitas da mesma maneira. Agora trocaremos os parâmetros μ e σ por a , q , α e β . Para facilitar, deixaremos calculado $\tan \frac{\pi\alpha}{2}$. Pelos motivos já explicados no apêndice anterior, iremos calcular separadamente as partes real e

imaginária da $\varphi(t)$. A fórmula $\varphi(t) = e^{iat - q|t|^\alpha [1 - i\beta \frac{t}{|t|} \omega(|t|, \alpha)]}$ ficará no Excel como:

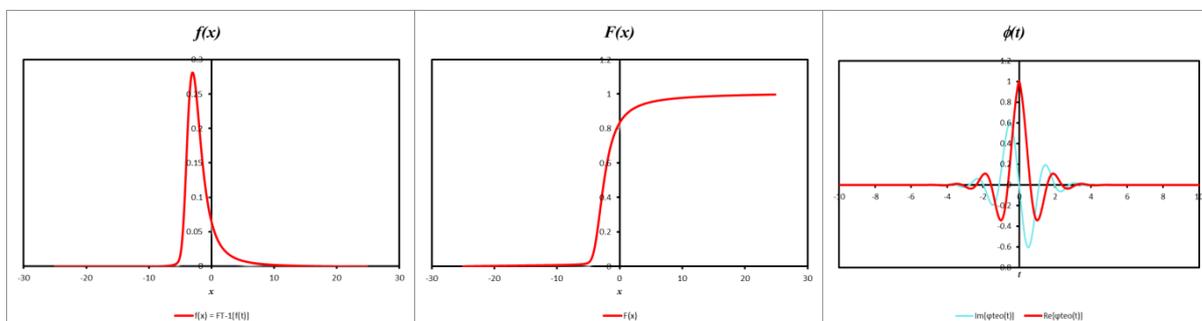
$Re[\varphi(t)] = \text{IMREAL}(\text{IMEXP}(\text{IMSOMA}(\text{IMPROD}(\text{IMSOMA}(1, \text{IMPROD}("i", -1 * \$E\$13 * \$E\$15 * \text{SINAL}(\$D23))), -1 * \$E\$11 * \text{ABS}(\$D23)^\$E\$12), \text{IMPROD}("i", \$E\$10 * \$D23))),$ em que

“ $\text{IMSOMA}(1, \text{IMPROD}("i", -1 * \$E\$13 * \$E\$15 * \text{SINAL}(\$D23))$ ” é $[1 - i\beta \frac{t}{|t|} \omega(|t|, \alpha)]$,

“ $(-1 * \$E\$11 * \text{ABS}(\$D23)^\$E\$12)$ ” é $-q|t|^\alpha$, e “ $\text{IMPROD}("i", \$E\$10 * \$D23)$ ” é iat . A parte imaginária será:

$Im[\varphi(t)] = \text{IMAGINÁRIO}(\text{IMEXP}(\text{IMSOMA}(\text{IMPROD}(\text{IMSOMA}(1, \text{IMPROD}("i", -1 * \$E\$13 * \$E\$15 * \text{SINAL}(\$D23))), -1 * \$E\$11 * \text{ABS}(\$D23)^\$E\$12), \text{IMPROD}("i", \$E\$10 * \$D23))))).$

O passo seguinte é proceder com a transformada de Fourier inversa para chegar a $f(x)$, conforme demonstrado no apêndice 8. A $F(x)$ pode ser obtida multiplicando os valores da $f(x)$ pelo $\delta x = \frac{X}{N}$. Com isso conseguimos construir as Figuras Figura 42 e Figura 43.

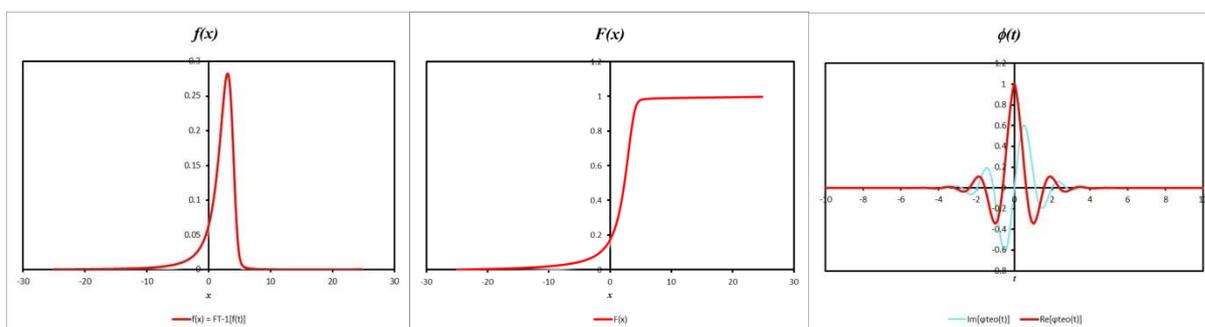


(a)

(b)

(c)

Figura 42. Distribuição de Lévy com $a=0$, $q=1$, $\alpha=1,2$ e $\beta=0,9$ e suas representações gráficas da $f(x)$ (a), $F(x)$ (b) e $\varphi(t)$ (c)



(a)

(b)

(c)

Figura 43. Distribuição de Lévy com $a=0$, $q=1$, $\alpha=1,2$ e $\beta=-0,9$ e suas representações gráficas da $f(x)$ (a), $F(x)$ (b) e $\varphi(t)$ (c)

6.10. Apêndice 10: Expansão de Edgeworth

6.10.1. Relações de recorrência

Deduzimos as relações de recorrência derivando $G_p(x, t) = e^{xt - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^n}{n!}$ em

relação à t e a x .

- Derivando em relação à t : $\frac{\partial}{\partial t} e^{xt - \frac{t^2}{2}} = (x - t) e^{xt - \frac{t^2}{2}}$ e reusando a função geratriz chega-se a $\sum_{n=0}^{\infty} x He_n(x) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n He_n(x) \frac{t^{n-1}}{n!}$. Igualando as mesmas potências em t (pois as funções t^n são linearmente independentes) obtém-se:

$$He_{n+1}(x) = x He_n(x) - n He_{n-1}(x)$$

- Derivando em relação à x : $\frac{\partial}{\partial x} e^{xt - \frac{t^2}{2}} = t e^{xt - \frac{t^2}{2}}$ logo $\sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} He'_n(x) \frac{t^n}{n!}$ portanto:

$$He'_n(x) = n He_{n-1}(x)$$

6.10.2. Transformada de Fourier

Vamos usar a função geratriz para extrair a transformada de Fourier da função

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x)$. Trabalhando primeiro na função geratriz:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + xt - \frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2xt + t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}$$

Tirando a transformada de Fourier dessa função temos

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx = e^{its} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izs} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$. Usando a função característica da normal

padrão obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx = e^{its - \frac{s^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(s) \frac{i^n t^n}{n!}$$

Por outro lado $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} He_n(x) dx \right] \frac{t^n}{n!}$, então

$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} He_n(x) dx \right] \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(s) \frac{i^n t^n}{n!}$, de onde extraímos que

$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} He_n(x) dx \right] = i^n He_n(t)$, ou $FT \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} He_n(x) \right] = i^n He_n(t)$, ou ainda que

$$FT^{-1} [He_n(t)] = (-i)^n \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} He_n(x).$$

Isso pode ser escrito como:

$$FT[\phi(x)He_n(x)] = i^n He_n(t) \text{ e } FT^{-1}[He_n(t)] = (-i)^n \phi(x)He_n(x).$$

$$1. He_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k He_{n-k}(y)$$

$$\begin{aligned} He_n(x+y) &= \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m n!}{2^m m!(n-2m)!} (x+y)^{n-2m} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m n!}{2^m m!(n-2m)!} \sum_{k=0}^{n-2m} \frac{(n-2m)!}{k!(n-2m-k)!} x^{n-2m-k} y^k = \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{n-2m} \frac{(-1)^m (n-k)!}{2^m m!(n-k-2m)!} x^{n-k-2m} \frac{n!}{k!(n-k)!} y^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} y^k \sum_{m=0}^{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} \frac{(-1)^m (n-k)!}{2^m m!(n-k-2m)!} x^{n-k-2m} \end{aligned}$$

$$He_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} y^k He_{n-k}(x)$$

2. Se x é uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal $N(x; \mu, 1)$ então:

$$E[He_n(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} He_n(x) e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} He_n(z+\mu) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$E[He_n(x)] = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \mu^k \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} He_{n-k}(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

$$\text{Agora } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} He_{n-k}(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-\frac{z^2}{2}} He_{n-k-1}(z) = \begin{cases} 0 & n-k \neq 0 \\ 1 & n-k = 0 \end{cases}, \text{ logo,}$$

$$E[He_n(x)] = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \mu^k \delta_{n,k} = \mu^n$$

6.11. Apêndice 11: Cálculo de variáveis complexas

Definimos uma função de variável complexa $f(z) = u(x, y) + iw(x, y)$ em que $z = x + iy$. A função se chama analítica se for diferenciável. Note, entretanto, que estamos agora falando de um limite em duas dimensões. O limite só existe se for o mesmo por qualquer caminho.

Condições Cauchy-Riemann para funções analíticas:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{(dx, dy) \rightarrow (0,0)} \frac{du + idw}{dx + idy}$$

Vamos fazer esse limite por dois caminhos:

1. $dy = 0$, ou seja, $y = cte$, e $dx \rightarrow 0$. Nesse caso $\frac{df}{dz} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{du + idw}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial x}$.
2. $dx = 0$, ou seja, $x = cte$, e $dy \rightarrow 0$. Nesse caso $\frac{df}{dz} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{du + idw}{idy} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}$.

A função será diferenciável se $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}$, ou seja: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$ e

$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, que são as condições de Cauchy-Riemann. Note que aqui só provamos que se

trata de condições necessárias para que o limite exista, mas poderiam não ser suficientes. Afirmamos sem provas que também são condições necessárias e suficientes. Então afirmamos que:

$$f(z) = u(x, y) + iw(x, y) \text{ é analítica se } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Teorema: se $f(z)$ é analítica então $\oint_c f(z) dz = 0$, onde c é qualquer caminho

fechado no plano complexo xy .

Basta fazer a integral no caminho infinitesimal:

$(x_o, y_o) \rightarrow (x_o + dx, y_o) \rightarrow (x_o + dx, y_o + dy) \rightarrow (x_o, y_o + dy) \rightarrow (x_o, y_o)$ mostrado na Figura

44.

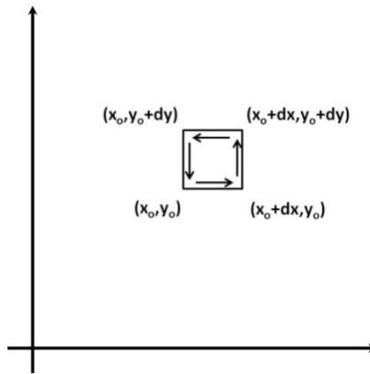


Figura 44. Circuito infinitesimal para cálculo de $\oint f(z) dz = 0$

$(x_0, y_0) \rightarrow (x_0 + dx, y_0)$:

$$\int_{x_0}^{x_0+dx} f(x, y_0) dx = \frac{F(x_0 + dx, y_0) - F(x_0, y_0)}{dx} dx = f(x_0, y_0) dx$$

$(x_0 + dx, y_0) \rightarrow (x_0 + dx, y_0 + dy)$:

$$\int_{y_0}^{y_0+dy} f(x_0 + dx, y) idy = i \frac{F(x_0 + dx, y_0 + dy) - F(x_0 + dx, y_0)}{dy} dy = if(x_0 + dx, y_0) dy$$

$(x_0 + dx, y_0 + dy) \rightarrow (x_0, y_0 + dy)$:

$$\int_{x_0+dx}^{x_0} f(x, y_0 + dy) dx = \frac{F(x_0, y_0 + dy) - F(x_0 + dx, y_0 + dy)}{dx} dx = -f(x_0, y_0 + dy) dx$$

$(x_0, y_0 + dy) \rightarrow (x_0, y_0)$:

$$\int_{y_0+dy}^{y_0} f(x_0, y) idy = i \frac{F(x_0, y_0) - F(x_0, y_0 + dy)}{dy} dy = -if(x_0, y_0) dy$$

Portanto:

$$\oint_c f(z) dz = f(x_0, y_0) dx + if(x_0 + dx, y_0) dy - f(x_0, y_0 + dy) dx - if(x_0, y_0) dy$$

$$\oint_c f(z) dz = i \left[\frac{f(x_0 + dx, y_0) - f(x_0, y_0)}{dx} \right] dx dy - \left[\frac{f(x_0, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)}{dy} \right] dx dy$$

$$\oint_c f(z) dz = i \frac{\partial f}{\partial x} dx dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \left[i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

$$\oint_c f(z) dz = \left[- \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

Agora $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ pelas condições de Cauchy-Riemann. Então:

$$\oint_c f(z) dz = 0$$

Agora esse resultado pode ser estendido para qualquer caminho c porque podemos quebrar o caminho em sub caminhos infinitesimais, cancelando os percursos internos e restando apenas o caminho externo, como mostra a Figura 45.

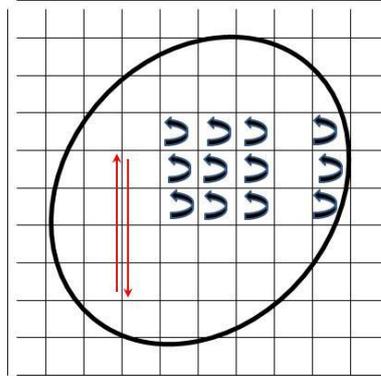


Figura 45. Note que no interior da região as integrais de caminho se anulam porque enquanto o percurso de uma célula está em uma direção o da vizinha está na direção oposta. Esse cancelamento, entretanto, não ocorre na fronteira, pois não existe a célula vizinha

A condição para a validade desse teorema é que a função seja analítica na região envolvida pelo caminho. Entretanto, nos pontos de singularidades a função não é analítica. A Figura 46 mostra como contornar a singularidade escolhendo um caminho apropriado.

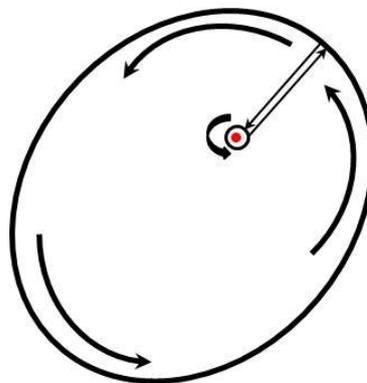


Figura 46. Isolando uma singularidade do caminho de integração

Suponha que podemos expandir uma função de variável complexa da forma:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Não é analítica em $z = z_0$ por conta dos termos com potências negativas de $(z - z_0)$. Nesse caso dizemos que a função tem um polo de ordem n . O coeficiente a_{-1} é chamado de RESÍDUO. Porque ele é tão importante?

Vamos fazer a integral $\oint \frac{1}{(z - z_0)} dz$ em torno de z_0 . A convenção é que giramos

no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mesmo sentido de crescimento do ângulo θ das coordenadas polares. Agora fazemos: $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$, com $\varepsilon = cte$. Logo $z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ e $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$. Nesse caso:

$$\oint \frac{1}{(z - z_0)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Independente do valor de ε , logo o resultado do limite $\varepsilon \rightarrow 0$ será o mesmo.

Entretanto note que $\oint \frac{1}{(z - z_0)^k} dz = 0$ $k \in \mathbb{N}$ e $k > 0$. Aqui nosso receio é o de

que o ε do denominador que não cancela com o ε do dz faria a integral explodir. Entretanto, antes de tomar o limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ vamos fazer a integral. Usamos a mesma mudança de variável $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$, com $\varepsilon = cte$. Logo $z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ e $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$. Dessa forma:

$$\oint \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^n e^{in\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta$$

$$\text{Que nos leva a } \oint \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \left[\int_0^{2\pi} \cos[(n-1)\theta] d\theta - i \int_0^{2\pi} \sin[(n-1)\theta] d\theta \right] = 0,$$

$$\text{pois } \int_0^{2\pi} \cos[(n-1)\theta] d\theta = \int_0^{2\pi} \sin[(n-1)\theta] d\theta = 0 \quad n > 1.$$

Isso então nos leva ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \oint f(z) dz &= a_{-n} \oint \frac{dz}{(z - z_0)^n} + a_{-n+1} \oint \frac{dz}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + a_{-1} \oint \frac{dz}{(z - z_0)} + \\ &+ a_0 \oint dz + a_1 \oint (z - z_0) dz + a_2 \oint (z - z_0)^2 dz + \dots \end{aligned}$$

Para as potências positivas a integral é zero porque a função é analítica. Para as potências negativas só não é nula para o termo com $\frac{1}{(z - z_0)}$ do resíduo. Então chegamos

ao resultado:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}$$

Se existirem mais de um ponto de singularidade dentro do caminho de integração o resultado final é:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}$$

Esse é o resultado que utilizamos para calcular muitas integrais mesmo no eixo real. Sobra a pergunta: como descobrir o resíduo, ou os resíduos? Suponha uma função com polo de ordem n :

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Se multiplicarmos essa função por $(z-z_0)^n$ ela se torna analítica, diferenciável, portanto.

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + a_2(z-z_0)^{n+2} + \dots$$

Agora derivamos essa função $n-1$ vezes. Todos os termos com potência $k < n-1$ serão nulos, e todos os termos com potência $k > n-1$ terão o termo $(z-z_0)^{k-n+1}$ que vai a zero quando $z = z_0$. O único termo que sobra é para $k = n-1$. Então:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0} = (n-1)! a_{-1}$$

$$\text{E o resíduo será: } \text{Res} = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]_{z=z_0}.$$

Se o polo é de ordem 1, também chamado de polo simples, então $n-1 = 0$ e:

$$\text{Res} = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) f(z) \right]$$

7. Referências Bibliográficas

ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J. **Mathematical Methods for Physicists**. 4 Ed. San Diego, Academic Press, 1995.

ASSAF NETO, Alexandre. **Mercado Financeiro**. 7 Ed. São Paulo: Atlas, 2006

BENNINGA, Simon. **Financial Modeling**. 3 Ed. Cambridge: The MIT Press, 2008

BESSADA, Octavio; BARBEDO, Claudio & ARAÚJO, Gustavo. **Mercado de Derivativos no Brasil: Conceitos, Operações e Estratégias**. 3 Ed. Rio de Janeiro: Record, 2009

BOUCHAUD, Jean-Philippe; POTTERS, Marc. **Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management**. 2 Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009

CARR, Peter; MADAN, Dilip B. **Option Valuation Using the Fast Fourier Transform**. *Journal of Computational Finance* 2. 61-73. 1999

JACKSON, Mary; STAUNTON, Mike. **Advanced modelling in finance using Excel and VBA**. Ed. John Wiley & Sons, Ltd. 2001

JARROW, Robert; RUDD, Andrew. **Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes**. *Journal of Financial Economics* 10 (1982) 347-369. North-Holland Publishing Company

LEWIS, A. **A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes**. <http://www.optioncity.net> (2001)

MATSUDA, Kazuhisa. **Introduction to Option Pricing with Fourier Transform: Option Pricing with Exponential Lévy Models**. New York Kazuhisa Matsuda (<http://www.maxmatsuda.com>). 2004

MARINS, André. **Mercados Derivativos e Análise de Risco Volume 1**. 1 Ed. Rio de Janeiro: AMS Editora, 2004

MARINS, André. **Mercados Derivativos e Análise de Risco Volume 2**. 1 Ed. Rio de Janeiro: AMS Editora. 2004

MITTELHAMMER, Ron C. **Mathematical Statistics for Economics and Business**. 3 Ed. New York: Springer Verlag. 1999

STEWART, James. **Cálculo Volume 2**. 4 Ed. Pioneira – Thompson Learning. 2001