1150005596
IMECC
T/UNICAMP R448s

S^3 FIBRADOS E AÇÕES EXÓTICAS

ALCIBIADES RIGAS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito para obtenção do título de Livre Docência.

Maio - 1983 -

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA

§0. INTRODUÇÃO.

O objetivo deste trabalho é construir representantes explícitos para todos os fibrados principais com fibra S^3 e para alguns fibrados principais com fibra $SO(4)$ sobre as esferas S^4 e S^7 (|S| e |J - W|).

Isso nos permite compreender melhor as acões exóticas livres de S^3 sobre $S^7 \times S^3$. I.e., ações livres com quociente uma esfera sete dimensional com estrutura diferenciável não "standard". Pelo trabalho |E - K| de J. Eells e N. Kuiper sabemos que quinze esferas exóticas Σ^7 são espaços totais de fibrados, com fibra S^3 e grupo $SO(4)$, sobre a esfera S^4. Daquelas quinze, sete aparecem como quocientes explícitos do tipo

$$(*) \qquad S^3 \;\ldots\; S^7 \times S^3 \longrightarrow \Sigma^7 .$$

Para cada uma das Σ^7's temos uma infinidade de ações livres do tipo (*).

Ainda como consequência segue também que existem tais ações exóticas livres sobre o $Sp(2)$ e sobre os outros dez S^3-fibrados principais sobre o S^7. Essas ações poderiam ser descritas de uma maneira similar como a do §4, generalizando assim o exemplo de D. Gromoll e W. Meyer |G - M|.

As nossas motivações para buscar descrições explícitas para os S^3-fibrados principais sobre o S^4, e consequentemente o S^7, surgiram das seguintes considerações:

(a) Os S^1-fibrados principais sobre o $S^2 \equiv CP^1$, são muito elegantes e canônicos. A sua existência e elegância são consequência da multiplicação dos números complexos e a sua comutatividade. Os seus espaços totais são os espaços de lente $S^3/\mathbb{Z}_n$, $n = 1,2,\ldots$. A multiplicação quaterniônica resulta na existência dos S^3-fibrados principais sobre o $S^4 \equiv QP^1$. Apesar dessa multiplicação não ser comutativa, espera-se que existe alguma maneira canônica de obter os espaços totais desses fibrados. Ver por exemplo [S].

(b) O trabalho [A - H - S] de M.Atiyah, N. Hitchin e I.M. Singer sugere que fibrados sobre S^4 e conexões "naturais" sobre eles são de algum interesse para a física teórica. Os "tijolos" para construir fibrados com fibra "razoável" sobre S^4 são os S^3-principais. Descrições naturais desses fibrados poderiam facilitar os cálculos.

(c) Um problema de geometria diferencial sugerido pelo trabalho [C - G] de J. Cheeger e D. Gromoll: "Todos os fibrados vetoriais sobre qualquer esfera euclideana admitem métricas riemannianas completas com curvatura seccional não negativa"? Esse problema, no caso não estável, começa a ser não trivial apenas neste ponto: os fibrados S^3-principais sobre o S^4. Veja por exemplo [D - R], $[R_2]$, $[R_1]$ e [We].

O presente trabalho não inclui cálculos de conexões e curvaturas.

Queremos agradecer os amigos D. Derdzinski e F. Mercuri por muitas discussões e sugestões.

§1. PRELIMINARES

Seja $\mathbb{H}$ o corpo dos quartênios. Lembramos que $\mathbb{H}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^4$ como espaço vetorial real. Se $\{1,i,j,k\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^4$, a multiplicação de dois quartênios e feita conforme as seguintes regras:

(a) $\mu : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ é uma aplicação bilinear com respeito à estrutura de espaço vetorial real.

(b) a tabela de multiplicação dos elementos da base e a seguinte:

$$1q = q1 = q \quad \text{para todo} \quad q \quad \text{em} \quad H.$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k \quad , \quad jk = -kj = i \quad \text{e} \quad ki = -ik = j.$$

Algumas consequências imediatas de (a) e (b):

Se $x = x_o + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ com x_3 real definimos como o conjugado de x

$$\bar{x} := x_o - x_1 i - x_2 j - x_3 k$$

e temos que $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ onde $|\ |$ denota a norma euclideana de x como elemento do $\mathbb{R}^4$.

Então, $x^{-1} = \bar{x}|x|^{-2}$ para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{H}$.

Também $|xy| = |x||y|$ para todo x,y em $\mathbb{H}$.

Seja $Sp(n)$ o grupo das matrizes A, $n \times n$, com entradas quaternios que satisfazem.

(c) $$AA^* = A^*A = I$$

onde A^* é a transposta conjugada de A.

Se $A = (a_{ij})$ as relações (c) significam

(c_1) Todas as linhas de A são vetores unitários: $L^i \cdot \bar{L}^i = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$.

(c_2) As linhas são mutualmente ortogonais:

$$L^i \cdot \bar{L}^j = 0 \quad \text{para todo} \quad i \neq j.$$

(c_1') Todas as classes são vetores unitários:

$$\bar{C}_i \cdot C_i = 1 \quad \text{para todo} \quad i = 1,\ldots,n$$

(c_2') Todas as colunas são mutualmente ortogonais:

$$\bar{C}_i \cdot C_j = 0 \quad \text{para todo} \quad i \neq j.$$

Aqui o produto $R^i \cdot \bar{R}^j$ significa $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\bar{a}_{jk}$, etc... . Observamos que o conjunto de condições $\{(c_1), (c_2)\}$ é equivalente ao conjunto $\{(c_1'), (c_2')\}$.

A esfera unitária $S^3 = q$ em $\{\mathbb{H} | \; |q| = 1\}$ é um grupo como segue da propriedade de conservação da norma. Esse grupo é identificado com o $Sp(1)$ de maneira óbvia (e também com o grupo de matrizes complexas SU(2)).

Seja $\Delta : Sp(1) \longrightarrow Sp(n)$ a inclusão diagonal

$$\Delta(q) = \begin{pmatrix} q & & & 0 \\ & q & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q \end{pmatrix}$$

Denotaremos a imagem (Sp(1)) com $Sp^n(1)$, subgrupo de Sp(n), para $n = 1,2,\dots$.

Lembramos [Bott] que o terceiro grupo de homotopia $\pi_3(Sp(n)) = \mathbb{Z}$ e é gerado por qualquer uma das inclusões canônicas de Sp(1) em Sp(n):

$$q \longrightarrow \begin{pmatrix} q & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad q \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & q & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{,etc.}$$

Como Sp(n) é um grupo de Lie, a classe de homotopia do produto de duas aplicações $[f\cdot g]$ é igual ao produto das classes de homotopia $[f]\ [g]$. Então, a inclusão Δ induz a seguinte aplicação em nível de π_3.

$$\Delta_\# : \pi_3\ Sp(1) \longrightarrow \pi_3\ Sp(n)$$

$$1 \longrightarrow n \ .$$

Isto implica que

$$(1) \qquad \pi_3\left(Sp^n(1) \backslash Sp(n) \right) \cong \mathbb{Z}_n$$

Observe aqui que o quociente é induzido pela ação de $Sp^n(1)$ à *esquerda* de $Sp(n)$.

Seja agora $n \geq 2$ e considere o $Sp(n-1)$, atuando pela *direta* no quotiente $Sp^n(1) \backslash Sp(n)$ e deixando livre a primeira coluna. I.e., A em $Sp(n-1)$ atua como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ pela direta por multiplicação de matrizes.

LEMA 1. A ação descrita acima

$$Sp^n(1) \backslash Sp(n) \times Sp(n-1) \longrightarrow Sp^n(1) \backslash Sp(n)$$

é livre com quotiente o espaço projetivo quaterniônico QP^{n-1}.

DEMONSTRAÇÃO. Se B em $Sp(n)$, q em $Sp(1)$ e A em $Sp(n-1)$, então $BA = (q)^n B$ implica que B e $(q)^n B$ tem a mesma primeira coluna, então $q = 1$ e consequentemente $A \equiv I$. Então a ação é livre.

O quotiente $Sp^n(1) \backslash Sp(n) / Sp(n-1)$ pode ser obtido também na seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} Sp(n) \xrightarrow{\text{proj.}} Sp(n)/Sp(n-1) & \cong & S^{4n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \text{ projeção de Hopf} \\ Sp^n(1)\backslash Sp(n)/Sp(n-1) & = & QP^{n-1} \end{array}$$

Diagrama 1.

I.e., um B em $Sp(n)$ projeta na sua primeira coluna

$B \xrightarrow{\text{proj.}} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$ e q atua pela esquerda nesta primeira coluna

como $\begin{pmatrix} qb_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ qb_n \end{pmatrix}$ com quotiente QP^{n-1}.

Q.E.D.

OBSERVAÇÃO. Em [G - M], o $QP^1 \cong S^4$ é escrito como $Sp^2(1)\backslash Sp(2)/Sp(1)$.

Agora nós temos os seguintes $Sp(n-1)$-fibrados principais para $n \geq 2$:

$$Sp(n-1) \ \ldots \ \underset{Sp^n(1)}{\setminus}\, Sp(n) \xrightarrow{p_n} QP^{n-1} \ .$$

Denotaremos os elementos de QP^{n-1} por

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, i.é., a classe de equivalência do elemento de S^{4n-1} sob a ação de $Sp(1)$, ou a linha quaterniônica definida por $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Identificando o S^4 com o QP^1 e lembrando que a inclusão natural de QP^1 em QP^{n-1}

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

gera o $\pi_4\left(QP^{n-1}\right) = \mathbb{Z}$, para todo $n \geq 2$, temos

LEMA 2. Seja $X_n := p_n^{-1}(QP^1)$ onde QP^1 é incluido em QP^{n-1} como acima. Então X é o espaço total de um fibrado $Sp(n-1)$- principal sobre S^4 com $\pi_3(X_n) = \mathbb{Z}_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Pela definição de X_n nós temos o diagrama tipo "pull-back"

$$\begin{tikzcd}
Sp(n-1) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, dotted] & Sp(n-1) \arrow[d, dotted] \\
X_n \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & Sp^n(1)\backslash Sp(n) \arrow[d] \\
S^4 \arrow[r, "i"'] & QP^{n-1}
\end{tikzcd}$$

então só precisa calcular o $\pi_3(X_n)$. Mas a sequência exata de homotopia do diagrama junto com (1) implica

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_3(X_n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"'] & \mathbb{Z}_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Então $\pi_3(X_n) \cong \mathbb{Z}_n$. QED.

LEMA 3. O fibrado $Sp(n-1) \ldots X_n \longrightarrow S^4$ se reduz em um fibrado principal

$$Sp(1) \ldots P_n \longrightarrow S^4$$

com $\pi_3(P_n) = \mathbb{Z}_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Uma tal redução existe se e so se existe uma secção σ_n do fibrado associado

$$(2) \qquad \mathrm{Sp}(n-1)\big/\mathrm{Sp}(1) \cdots X_n\big/\mathrm{Sp}(1) \longrightarrow S^4.$$

Neste caso $P_n = \mu^{-1}(\sigma_n(S^4))$, onde

$$\mu : X_n \longrightarrow X_n\big/\mathrm{Sp}(1)$$

é a óbvia projeção. (veja [K - N]).

No nosso caso, a fibra $\mathrm{Sp}(n-1)\big/\mathrm{Sp}(1)$ é uma variedade de Stiefell que é pelo menos 6-conexa. Então uma tal secção sempre existe ([H]) pois a base S^4 tem dimensão só 4. Para calcular $\pi_3(P_n)$ consideremos o comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sp}(1) \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, dash] & \mathrm{Sp}(n-1) \arrow[d, dotted, dash] \\
P_n \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_n \arrow[d] \\
S^4 \arrow[r, phantom, "="] & S^4
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2

Lembrando que a inclusão, Sp(1) em Sp(n-1) gera um isomorfismo entre π_3 temos que $\pi_3 P_n = \pi_3 X_n$.
QED.

COROLÁRIO 4. Os fibrados P_n acima são todos os fibrados principais sobre S^4 com fibra S^3.

DEMONSTRAÇÃO |S|. Uma classificação completa dos S^3-fibrados principais sobre S^4 é dada pelo π_3 do espaço total que é $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n = 1,2,\ldots$.
QED.

Para representar cada P_n como uma subvariedade espacífica de $Sp^n(1)\backslash Sp(n)$ um método seria a exibição das secções σ_n do lema 3. Porém, nós preferimos analisar um pouco mais a nossa informação que até agora é a seguinte:

(I) Todo P_n é subvariedade de $Sp^n(1)\backslash Sp(n)$, a primeira coluna de todo elemento de P_n é da forma $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ e a ação livre do Sp(1) em P_n é pela *direta* na *última coluna* por multiplicação quaterniônica. (A última coluna foi escolhida arbitrariamente. Qualquer uma, exceto a primeira, serve).

Agora fazemos o "pull-back" dos P_n's pela fibração de Hopf

$$S^3 \ldots S^7 \xrightarrow{h} S^4$$

na seguinte maneira

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Sp(1) & & Sp(1) \\
 & & \vdots & & \vdots \\
Sp^n(1) & \dots & \tilde{P}_n & \xrightarrow{H} & P_n \\
 & & {\scriptstyle \tilde{p}_n}\downarrow & & \downarrow \\
S^3 & \dots & S^7 & \xrightarrow[h]{} & S^4
\end{array}$$

Diagrama 3

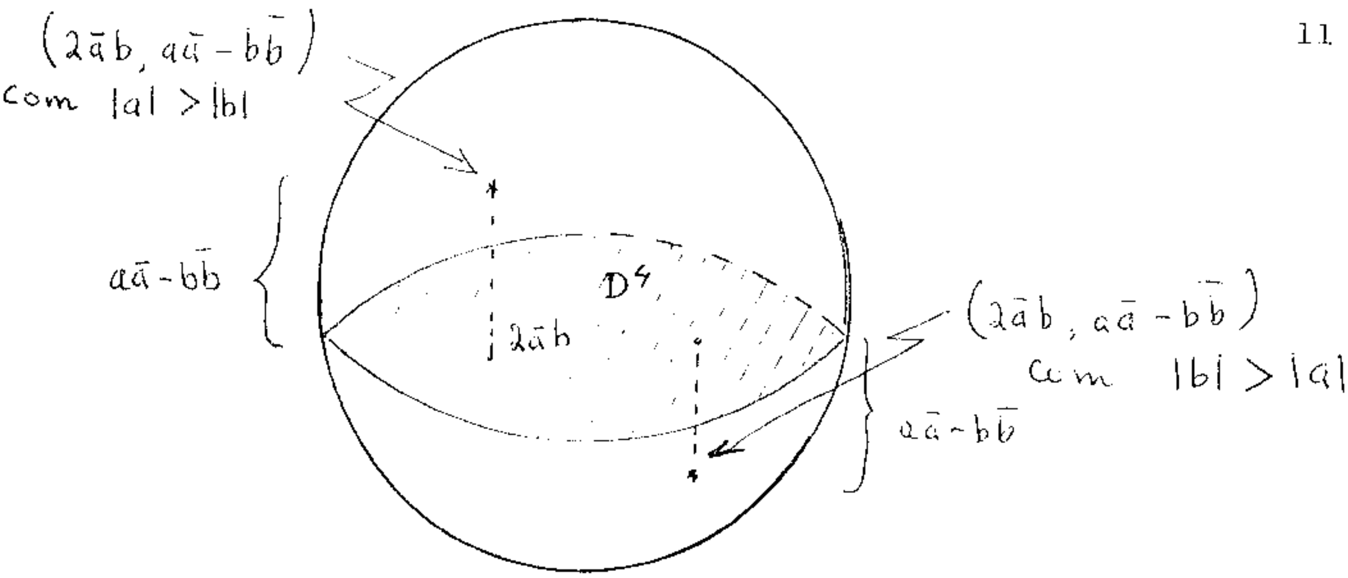
Primeiro lembramos a aplicação h ([G - M]):

Se $S^7 = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ em $\mathbb{H}^2 \mid a\bar{a} + b\bar{b} = 1\}$

então temos

$$h \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := (2\bar{a}b \ , \ a\bar{a} - b\bar{b}) \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \ ,$$

onde o primeiro elemento $2\bar{a}b$ fica no disco unitário fechado D^4 é o segundo elemento $a\bar{a} - b\bar{b}$ é a altura necessária para que o vetor $h\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ do $\mathbb{R}^5$ esteja em S^4 :



A esfera S^4 como imagem da aplicação de Hopf.

Considere agora a esfera S^7 escrita com n coordenadas quaterniônicas: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da informação (I) acima e do Diagrama 3 temos que $\tilde{P}_n$ é uma subvariedade 10-dimensional de $Sp(n)$ cujos elementos tem primeira coluna da forma $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e que o $Sp(1)$ atua pela *direta* na última coluna por multiplicação quaterniônica, produzindo S^7 como quociente, e o $Sp^n(1)$ atua livremente pela *esquerda* produzindo P_n no quociente.

COROLÁRIO 5. Os fibrados $\tilde{P}_n$ podem ser obtidos por diagramas tipo "pull-back" como

I. M. E. C. C.
BIBLIOTECA

$$\begin{tikzcd}
Sp(1) \arrow[d, dotted] & & Sp(1) \arrow[d, dotted] \\
\tilde{P}_n \arrow[rr, hook, "\tilde{i}_n"] \arrow[d] & & Sp(n) \arrow[d] \\
S^7 \arrow[rr, hook, "i_n"'] & & Sp(n)/Sp(1)
\end{tikzcd}$$

Diagrama 4

onde os i_n e $\hat{i}_n$ são inclusões a serem determinadas.

DEMONSTRAÇÃO. Óbvia pela discussão acima. QED.

Agora nós observamos que podemos obter os fibrados P_n sobre S^4 como quocientes dos fibrados $\tilde{P}_n$ sobre S^7:

COROLÁRIO 6. Se $\tilde{P}_n$ é determinado por intermédio da Diagrama 4 e é também invariante com respeito a $Sp^n(1)$ - ação pela esquerda, então o seu quociente $Sp^n(1) \backslash \tilde{P}_n \equiv P_n$ é o espaço total de um fibrado $Sp(1)$-principal sobre o S^4 com $\pi_3(P_n) = \mathbb{Z}_n$, $n=2,3,\ldots$

DEMONSTRAÇÃO. Pela sequência exata de homotopia do Diagrama 4 segue que

$$\pi_3(\tilde{P}_n) = \mathbb{Z}$$

e que a aplicação induzida

$$\tilde{i}_{n\,\#} : \pi_3(\tilde{P}_n) \longrightarrow \pi_3\, Sp(n)$$

é um isomorfismo. Consequentemente, a inclusão de qualquer órbita de $Sp^n(1)$ em $\tilde{P}_n$ induz a seguinte aplicação

$$\pi_3(Sp^n(1)) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \pi_3(P_n)$$

$$1 \longmapsto n\ .$$

Segue que o quociente P_n tem $\pi_3(P_n) \cong \mathbb{Z}_n$ e que o fibrado $Sp(1) \ldots P_n \longrightarrow S^4$ será classificado então pelo tamanho das matrizes-elementos do P_n .

QED.

Na seguinte secção nós construiremos uma sequência infinita de $\tilde{P}_n$'s e classificamo-los com S^3 fibrados sobre S^7 .

§2. S^3-FIBRADOS SOBRE S^7 .

Os fibrados S^3 - principais sobre S^7 são classificados pelas classes de homotopia de aplicações: $S^7 \longrightarrow BS^3 \cong QP^\infty$, que podem ser identificadas com $\pi_6(S)^3 \cong \mathbf{Z}_{12}$.

Um gerador natural deste grupo é o fibrado

$$Sp(1) \ldots Sp(2) \longrightarrow S^7$$

Veja [Hu].

Denotaremos os espaços totais destes fibrados por E_i , com $E_1 \equiv Sp(2)$, E_2 = (duas vezes Sp(2)),..., $E_{12} \equiv E_o$ = (doze vezes Sp(2)). Aqui, (duas vezes Sp(2)), etc., significa o fibrado obtido como "pull-back" do fibrado

$$Sp(1) \ldots Sp(2) \longrightarrow S^7$$

sobre S^7, através de uma aplicação f_2 de grau 2, etc., com $f_2 : S^7 \longrightarrow S^7$.

Observe que $E_{12} \equiv E_o$ é um fibrado trivial com espaço total difeomorfo a $S^7 \times S^3$.

Para classificarmos os $\tilde{P}_n$ como fibrados S^3-principais sobre o S^7, aumentamos o Diagrama 3 como segue:

$$
\begin{tikzcd}
 & & S^3 \arrow[d, dash, dotted] & S^3 \arrow[d, dash, dotted] & S^3 \arrow[d, dash, dotted] & \\
Sp^n(1) & \cdots & \tilde{P}_n \arrow[r] \arrow[d] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & S^7 \arrow[d, "h"] & \\
S^3 & \cdots & S^7 \arrow[r, "h"'] & S^4 \arrow[r, "f_n"'] & S^4 \arrow[r, "j"'] & BS^3 \equiv QP^\infty
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 5

onde f_n é uma aplicação de grau n e j é a inclusão natural de S^4 QP^1 em $\varinjlim_n QP^n \equiv BS^3$.

A aplicação classificante do fibrado $\tilde{P}_n$ sobre S^7 é $j \circ f_n \circ h$, com h a aplicação de Hopf descrita em detalhe no §1. Nós confundiremos a notação de aplicações e suas classes de homotopia quanto a confusão que resulta é pequena.

Primeiro nos lembramos um Teorema de P. Hilton que utilizaremos em seguida.

TEOREMA 7. Se g é um elemento de $\pi_m(S^n)$, $m \leq 3n-3$ e f_1, f_2 são elementos de $\pi_n(X)$, então,

$$(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g + [f_1, f_2]\, H(g)$$

onde $[f_1, f_2]$ é o produto de Whitehead de f_1 e f_2 e $H(g)$ é a invariante de Hopf de g.

DEMONSTRAÇÃO. Veja [H]. QED.

No nosso caso $g \equiv h$ em $\pi_7 S^4$ com $H(g) = 1$.

TEOREMA 8. O fibrado $\tilde{P}_n$ sobre S^7 é isomorfo ao $E_{(n-1) \bmod 12}$ para todo $n \geq 3$.

DEMONSTRAÇÃO. Calculamos primeiro a f_n o f em $\pi_7\ S^4 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ utilizando o Teorema 7, e a seguinte fórmula ([Hu], p. 330).

$$[\iota,\iota] = 2h - \varepsilon\Sigma(\xi)$$

onde ι é o elemento identidade de $\pi_4\ S^4 = \mathbb{Z}$, ε é $+1$ ou -1 dependendo das convenções de orientações e $\Sigma(\xi)$ é a suspensão de

$$\xi : S^6 \longrightarrow S^3$$

que gera $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$.

Como segue de [Hu], p. 330 $\Sigma(\xi)$ gera a parte de torção do $\pi_7(S^4)$ e h gera a parte livre. Simplificamos essas notações como

$$h \equiv (1,0) \quad \text{e} \quad \Sigma(\xi) \equiv (0,1) \quad \text{em} \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}.$$

Observando que o produto de Whitehead é bilinear quando X é uma esfera temos de toda discussão acima:

$$f_2 \circ h = (\iota+\iota) \circ h = 2\iota h + [\iota,\iota] = (2,0) + \{(2,0) \pm (0,1)\} = (0,\pm 1)$$

$f_3 \circ h = (\iota + 2\iota) \circ h = \iota h + 2\iota h + [\iota, 2\iota] = (3,0) + 2(2,\pm 1) = (7, \pm 2)$

e similariamente

$$f_n \circ h = (3n-2, \pm(n-1)) \text{ em } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \text{ para todo } n.$$

Observamos agora que a aplicação j é essencialmente a aplicação-bordo ∂ da fibração de Hopf $S^3 \ldots S^7 \longrightarrow S^4$ e que

$$\partial : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \text{ é apenas}$$

$\partial(a,b) = b$. I.é., j é a projeção de $\pi_7(S^4)$ em sua componente de torção.

Agora podemos determinar o valor de ε testando no fibrado $S^3 \ldots Sp(2) \longrightarrow S^7$:

De acordo com a nossa notação $Sp(2) \cong E_1$, e queremos então que $j \circ f_2 \circ h$, seja o gerador 1 de $\mathbb{Z}_{12}$. Segue então que $\varepsilon=1$, e que $j \circ f_n \circ h = (n-1) \bmod 12$. QED.

Em particular, $\tilde{P}_{13}$, $\tilde{P}_{25}$, $\tilde{P}_{12k+1}$ para todo k são fibrados isomorfos ao fibrado trivial $S^7 \times S^3$ quando $\tilde{P}_2$, $\tilde{P}_{14}$, $\tilde{P}_{12k+2}$ são isomorfos ao $Sp(2)$.

Agora nós podemos dar uma descrição concreta para todo $\tilde{P}_n$ e consequentemente todo P_n , $n = 3,4,\ldots$.

ASSERÇÃO 9. A seguinte subvariedade 10-dimensional do $Sp(3)$ é o S^3-fibrado $\tilde{P}_3$ sobre o S^7 :

$$\tilde{P}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & x \\ b & b\bar{a}b & y \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & z \end{pmatrix} \quad \text{em} \quad Sp(3) \right\}$$

DEMONSTRAÇÃO. O conjunto é subvariedade 10-dimensional pois temos sete dimensões reais da primeira coluna (elemento de S^7) e três dimensões da terceira coluna (: A 3ª coluna tem 12 dimensões reais e satisfaz as seguintes relações:

$\overline{Col_3} \cdot Col_2 = 0$:quatro equações reais

$\overline{Col_3} \cdot Col_1 = 0$:quatro equações reais

$\overline{Col_3} \cdot Col_3 = 1$:Uma equação real.)

A invariância com respeito a ação de $Sp^3(1)$ pela esquerda segue do fato que os elementos da 2ª coluna são produtos da forma $b\bar{a}b$ ou a ou b multiplicados por um número real, sempre começando com a ou b (nunca com $\bar{a}$ ou $\bar{b}$) e tendo um número *ímpar* de a's, b's, $\bar{a}$'s ou $\bar{b}$'s . A ação pela esquerda do $Sp^3(1)$ é livre pois é livre na 1ª coluna. A ação de $Sp(1)$ pela *direita* é na 3ª coluna e isto torna $\tilde{P}_3$ um fibrado principal sobre S^7 onde a projeção é a sua primeira coluna.

Segue agora do Corolário 5 é do Teorema 8 que o $\tilde{P}_3$ descrito acima isomorfo ao fibrado E_2. Q.E.D.

ASSERÇÃO 10. O fibrado $\tilde{P}_4$ tem como seu espaço total a seguinte subvariedade 10-dimensional de $Sp(4)$:

$$\tilde{P}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 L^{-1} & 0 & x_1 \\ b & b\bar{a}b\, L^{-1} & 0 & x_2 \\ 0 & a|a|^2 L^{-1} & -b & x_3 \\ 0 & a\bar{b}a\, L^{-1} & a & x_4 \end{pmatrix} \text{ em } Sp(4) \right\}.$$

onde $L = \sqrt{|a|^4 + |b|^2}$.

DEMONSTRAÇÃO. Exatamente a mesma com a demonstração de Asserção 9 acima. É fácil verificar que as três primeiras colunas são mutualmente perpendiculares e que todas as coordenadas são C^∞ em a e b. O fator L é apenas o comprimento do vetor

$$(-b|b|^2,\ b\bar{a}b\ ,\ a|a|^2\ ,\ a\bar{b}a). \qquad \text{Q.E.D.}$$

O processo indutivo para a construção de $\tilde{P}_{n+1}$, dado o $\tilde{P}_n$, é dado em seguida e é ilustrado pela construção gradual do $\tilde{P}_5$ através do $\tilde{P}_4$.

CONSTRUÇÃO INDUTIVA DE $\tilde{P}_n$.

ETAPA 1. Esquecer todas as divisões por comprimentos de colunas. Esquecer a última coluna composta pelos x_i's.

$$\begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & 0 \\ b & b\bar{a}b & 0 \\ 0 & a|a|^2 & -b \\ 0 & a\bar{b}a & a \end{pmatrix}$$

ETAPA 2. Remover (e guardar) as primeiras duas linhas e a primeira coluna:

$$\begin{pmatrix} a|a|^2 & -b \\ a\bar{b}a & a \end{pmatrix}$$

ETAPA 3. Multiplicar todo elemento da primeira coluna por $a\bar{b}$ pela esquerda e colocar o resultado como a nova primeira coluna:

$$\begin{pmatrix} a\bar{b}a|a|^2 & a|a|^2 & -b \\ (a\bar{b})^2a & a\bar{b}a & a \end{pmatrix}$$

ETAPA 4. Colocar $-b$ na primeira posição acima da $2^{\underline{a}}$ coluna e

af_k na primeira posição acima da 1ª coluna. O f_k é a função de $|a|^2$ e $|b|^2$ que faz o produto dessas duas colunas igual a zero. I.é.,

$$\overline{(\text{Col})}_1 \cdot (\text{Col})_2 = 0 \ .$$

Completar a primeira linha com zeros:

$$\begin{pmatrix} af_k & -b & 0 \\ a\bar{b}a|a|^2 & a|a|^2 & -b \\ (a\bar{b})^2 a & a\bar{b}a & a \end{pmatrix}$$

Observe que aqui o $f_k \equiv f_o = |a|^4$.

ETAPA 5. Colocar de volta o pedaço que foi removido na ETAPA 2 completando com zeros a (nova) primeira coluna e as duas (novas) primeiras linhas. Colocar de volta a última coluna dos x_i's:

$$\begin{pmatrix} a & -b|b|^2 & 0 & 0 & x_1 \\ b & b\bar{a}b & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & a|a|^4 & -b & 0 & x_3 \\ 0 & a\bar{b}a|a|^2 & a|a|^2 & -b & x_4 \\ 0 & (a\bar{b})^2 a & a\bar{b}a & a & x_5 \end{pmatrix}$$

ETAPA 6. Dividir cada coluna pelo seu comprimento para ficar unitária.

OBSERVAÇÃO 11. É fácil ver que as condições da demonstração das Asserções 9 e 10 são preservadas por essa construção e consequentemente cada um desses $\tilde{P}_n$ é um modelo para os correspondentes Diagramas 3, 4 e 5.

Denotamos por L_1 o comprimento da terceira coluna pela direta de $\tilde{P}_n$, por L_2 o comprimento da quarta coluna pela direta, etc., e por L_{n-4} o comprimento da (n-2) coluna pela direta que é também a terceira coluna pela esquerda de $\tilde{P}_n$. Seja L o comprimento da segunda coluna pela esquerda de $\tilde{P}_n$. Observando que a construção de $\tilde{P}_{n+1}$ deixa as últimas colunas praticamente inalteradas, então com comprimento constante para todo n, nós temos:

PROPOSIÇÃO 12. Os componentes das colunas e as funções f_k satisfazem as seguintes relações:

$$L_1^2 = |a|^4 + |b|^2 = f_o + |b|^2$$

$$L_2^2 = |a|^{10} + |a|^6 |b|^2 + |b|^2 = f_1 + |b|^2$$

$$L_3^2 = f_2 + |b|^2$$

$$\vdots$$

$$L_{n-4}^2 = f_{n-5} + |b|^2$$

$$L^2 = f_{n-4} + |b|^4$$

onde

$$f_1 = |a|^6(|a|^4 + |b|^2) = |a|^6 L_1^2$$

$$f_2 = |a|^8 L_1^2 L_2^2$$

$$f_3 = |a|^{10} L_1^2 L_2^2 L_3^2$$

$$\vdots$$

$$f_{n-4} = |a|^{2n-4} L_1^2 \dots L_n^2$$

Para todo $n \geq 2$ a função f_{n+1} é construida pelas f_i, $i \leq n$, através da fórmula

$$f_{n+1} = |a|^2 f_n^2 + |a|^4|b|^2 f_{n-1}^2 + |a|^6|b|^4 f_{n-2}^2 + \dots +$$

$$+ |a|^{2n}|b|^{2n-2} f_1^2 + |a|^{2n+10}|b|^{2n} + |a|^{2n+6}|b|^{2n+2} .$$

DEMONSTRAÇÃO. Por contas elementares, porém tediosas, aplicadas nas várias etapas da construção dos $\tilde{P}_n$. Q.E.D.

OBSERVAÇÃO 13. Os L_i's e f_i's são funções C^∞ de a e b com $f_i\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $f_i\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = 0$ para todo i, L_i^2 sempre estritamente positivo e consequentemente inferiormente limitado por um número positivo, e também $L_i^2\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = 1$.

§3. SO(4)-FIBRADOS E AÇÕES EXÓTICAS.

Os fibrados SO(4)-principais sobre S^4 são classificados pelas classes de homotopia das aplicações $f : S^4 \longrightarrow BSO(4)$, i.e., por $\pi_3 SO(4)$. O grupo $SO(4)$ é difeomorfo a $S^3 \times SO(3)$ mas não é o produto livre destes dois grupos. Antes de analisar o isomorfismo entre $SO(4)$ e $S^3 \times SO(3)$ nós observamos que o recobrimento universal (recobrimento duplo) de $SO(4)$, i.é., o Spin(4) é isomorfo ao produto livre $S^3 \times S^3$ ([We]). Seria então talvez mais natural de trabalhar com os Spin (4)-fibrados principais sobre S^4, e seus associados. Porém nos preferimos tratar o assunto do ponto de vista de $SO(4)$ cuja ação linear em $\mathbb{R}^4$ e S^3 é mais familiar em geral.

Seja A uma matriz de $SO(4)$. Consideramos a sua primeira coluna $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$ como um quartênio unitário $q = a_{11} + a_{21}i + a_{31}j + a_{41}k$, e a matriz B de $SO(4)$ definida por

$$q \longrightarrow B \text{ , tal que, para todo } \xi \text{ em } \mathbb{R}^4 \text{ , } B(\xi) = q\xi \text{ .}$$

As colunas de B são q, q_i, q_j e q_k. Observamos que esta aplicação $S^3 \longrightarrow SO(4)$, $(q \longrightarrow B)$ é a secção usual do fibrado dos referenciais ortonormais de S^3 que demonstra a paralelizabilidade de S^3. É óbvio agora que $B^t = B^{-1}$ e que B^tA é um elemento de SO(4) da forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ I.ē., $C = B^tA$ está em SO(3).

A projeção $S^3 \longrightarrow SO(3)$ é realizada por $\eta \longrightarrow C$ tal que $C(\xi) = \eta\,\xi\,\bar{\eta}$. Observe que esta conjugação deixa a parte real do quartênio ξ, i.ē, a sua primeira coordenada, invariante.

Temos, em fim, a seguinte correspondência

$$A \longrightarrow (q,\eta)$$

onde η ē *a classe* $\{\eta, -\eta\}$ em SO(3). A ação linear de A sobre ξ em $\mathbb{R}^4$ ē

$$A(\xi) = q\,\eta\,\xi\,\bar{\eta}$$

onde na direta todos os produtos são multiplicações de quartênios.

O produto de duas matrizes D e A do SO(4) com $D \longleftrightarrow (p,\theta)$ e $A \longleftrightarrow (q,\eta)$ corresponde ao seguinte produto em $S^3 \times SO(3)$

$$DA \longleftrightarrow (p\theta q\bar{\theta}, \theta\eta) \ .$$

(Veja por exemplo $[R_2]$). I.ē., a primeira matriz atua linearmente na 1ª coluna da segunda matriz e o subgrupo SO(3) ē normal.

Segue da construção de $\tilde{P}_n$ que existe uma ação livre de SO(4) sobre o $\tilde{P}_{n/\mathbb{Z}_2}$ com quociente S^4, para todo $n \geq 2$ (veja também $[R_2]$).

Primeiro nós analisamos o caso de $\tilde{P}_3$.

Consideremos o $\mathbb{Z}_2 = \{-1,1\}$ atuando na última coluna de $\hat{P}_3$ e seja P_3' o quociente. Definimos uma ação de SO(4) pela direta sobre o P_3' pela fórmula

$$\begin{bmatrix} a & -b|b|^2 & x_1 \\ b & b\bar{a}b & x_2 \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & x_3 \end{bmatrix} * (p,\theta) := \begin{bmatrix} \bar{\theta}ap\theta & \bar{\theta}(-b|b|^2)p\theta & \bar{\theta}x_1 \\ \bar{\theta}bp\theta & \bar{\theta}(b\bar{a}b)p\theta & \bar{\theta}x_2 \\ 0 & \bar{\theta}(a\sqrt{1+|b|^2})p\theta & \bar{\theta}x_3 \end{bmatrix}$$

Os colchetes indicam que a última coluna é um elemento de $\mathbb{R}P^2$. Em outras palavras, nós multiplicamos cada elemento das duas primeiras colunas pela matriz real 4×4 (p,θ), à *direta*, e todo elemento da última coluna por $\bar{\theta}$, à *esquerda*. O θ não é bem definido mas sim a classe $\{-\theta,\theta\}$. Porém, não existe ambiguidade pois a última coluna é também um quociente de $\mathbb{Z}_2$.

PROPOSIÇÃO 14. Essa é uma ação *livre* de SO(4) em P_3' com quociente S^4.

DEMONSTRAÇÃO. Primeiro provamos que é ação $(p,\theta)(q,\eta) = (p\theta q\bar{\theta},\theta\eta)$ e para um elemento ξ da primeira ou segunda coluna temos:

$$(\bar{\theta}\xi p\theta) * (q,\eta) = \bar{\eta}\,\bar{\theta}\,\xi p\theta q\eta \qquad \text{e também}$$

$$\xi * (p\theta q\bar{\theta}, \theta\eta) = \bar{\eta}\,\bar{\theta}\,\xi p\theta q\bar{\theta}\theta\eta = \bar{\eta}\,\bar{\theta}\,\xi p\theta q\eta \ .$$

Em seguida observamos que é livre:

Se o elemento (p,θ) fixa a matriz

$$\begin{bmatrix} a & -b|b|^2 & x_1 \\ b & b\bar{a}b & x_2 \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & x_3 \end{bmatrix}$$

, segue primeiro que θ é 1

(ou -1) pois pelo menos um dos x_1, x_2, x_3 é diferente de zero. Põe $\theta = 1$ ou -1 na primeira coluna agora e como a ou b é $\neq 0$ temos que $p = 1$. I.é., $(p,\theta) = (1,1)$ em $S^3 \times SO(3)$.

Antes de provar que o quociente $M^4 = P'_{3/SO(4)}$ é difeomorfo com o S^4 observamos que é imediato da sequência exata da fibração

$$SO(4) \ldots P'_3 \longrightarrow M^4$$

que o quociente M^4 tem a mesma homologia com o S^4.

Considere a seguinte aplicação $f : M^4 \longrightarrow S^4$

$$\text{Órbita de } \begin{bmatrix} a & -b|b|^2 & x_1 \\ b & b\bar{a}b & x_2 \\ 0 & a\sqrt{1+|b|^2} & x_3 \end{bmatrix} \longmapsto$$

$$(6^3\ 5^{-5/2}\bar{x}_3 abx_3,\ \pm(1 - 6^6\ 5^{-5}|a|^2\ |b|^{10})^{1/2})$$

com sinal "+" quando $|a| \leq 1/\sqrt{6}$ e o sinal "-" quando $|a| \geq 1/\sqrt{6}$.

A aplicação f é bem definida pois o $\bar{x}_3 a\bar{b}x_3$ é invariante e tem imagem o S^4 como segue de uma discussão similar a análise da aplicação de Hopf no §1:

A variedade M^4 é a união de dois conjuntos $U \cup V$ com $\bar{U} := \{|a| \leq 1/\sqrt{6}\}$ e $\bar{V} = \{|a| \geq 1/\sqrt{6}\}$. O comprimento de x_3 é $|x_3| = |b|^2$ como consequência da unicidade da $3^{\underline{a}}$ linha da matriz e

$$|\bar{x}_3 a\bar{b}x_3| \leq 5^5\, 6^{-6} \quad \text{para} \quad |a| \leq 1/\sqrt{6}$$

$$|\bar{x}_3 a\bar{b}x_3| \geq 5^5\, 6^{-6} \quad \text{para} \quad |a| \geq 1/\sqrt{6}$$

com igualdade, em ambos os casos, quando $|a| = 1/\sqrt{6}$.

Portanto M^4 é a união de dois 4-discos fechados, colados pela identidade ao longo do seu bordo, e consequentemente M^4 é difeomorfo a S^4. Q.E.D.

Observe agora que a mesma construção pode ser aplicada aos espaços $\tilde{P}_n$ (i.e., primeiro a ação de $\mathbb{Z}_2$ na última coluna e depois $SO(4)$-multiplicação em cada elemento das primeiras $n-1$ colunas e S^3-multiplicação em cada elemento da última coluna) para obter $SO(4)$-fibrados principais sobre S^4.

Proposições análogas com a Proposição 14 garantem que o quociente é de fato difeomorfo com o S^4.

PROPOSIÇÃO 15. O fibrado

$$SO(4) \ldots P'_n \longrightarrow S^4$$

com ação definida por

$$\xi * (p,\theta) := \bar{\theta}\xi p \theta$$

para todas as entradas das n-1 primeiras colunas e

$$(\pm x)(p,\theta) := \pm \bar{\theta}\, x$$

para todas as entradas da última coluna, é o fibrado SO(4)-principal

$$SO(4) \ldots P_{1,n-1} \longrightarrow S^4 .$$

DEMONSTRAÇÃO. (Notações e convenções são as mesmas com $[R_2]$). Segue do Diagrama 4 que $\tilde{i}_{\#} : \pi_3(\tilde{P}_n) \longrightarrow \pi_3 Sp(n) = \mathbb{Z}$ é um isomorfismo e que a inclusão de S^3 em $\tilde{P}_n$ como qualquer um dos elementos da diagonal principal induz um isomorfismo em nível de π_3. Da identificação

$$SO(4) \cong S^3 \times SO(3)$$

acima, temos que $\pi_3 SO(4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ gerado por (1,0) e (0,1), onde (1,0) corresponde ao fator S^3, i.é., a p-componente, e (0,1) corresponde ao fator SO(3), i.é., a θ-componente.

Consequentemente, a inclusão de uma SO(4)-órbita em P'_n induz a seguinte aplicação entre π_3:

$$(1,0) \longrightarrow n-1$$

$$(0,1) \longrightarrow -1$$

i.e., $(a,b) \longrightarrow 2a - b$ em $\mathbb{Z}$.

Por exemplo, no caso de $n = 3$ a inclusão da SO(4)-órbita que passa pelo elemento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} \bar{\theta}p\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\bar{\theta} \\ 0 & \bar{\theta}p\theta & 0 \end{bmatrix} .$$

Essa última aplicação é homotópica à

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}p\theta & 0 & 0 \\ 0 & \pm\bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\theta}p\theta \end{bmatrix} \quad \text{com } [p] \longrightarrow 2 \quad \text{e} \quad [\theta] \longrightarrow -1 \;,$$

pois $\bar{\theta}$ é a inversa de θ .

A parte relevante da sequência de homotopia de SO(4) ... $\tilde{P}_n \longrightarrow S^4$ é

$$\pi_4 S^4 \xrightarrow{\partial} \pi_3 SO(4) \xrightarrow{i_\#} \pi_3 P'_n \longrightarrow 0 = \pi_3 S^4$$

e $\operatorname{im} \partial = \ker i_\#$. Segue então que $\ker i_\#$ é gerado por $(1, n-1)$ ou $(-1, -(n-1))$, com $\partial(1) = (1,n-1)$ ou $(-1, -n+1)$. Mas é essencialmente a aplicação classificante, em nível de homotopia, para os fibrados

$$SO(4) \ . \ . \ P_{m,n} \longrightarrow S^4 \quad \text{e consequentemente}$$

$$P'_3 \cong P_{1,2} \quad \text{e} \quad P'_n \cong P_{1,n-1} \, . \qquad \text{Q.E.D.}$$

O seguinte teorema de Eells e Kuiper (veja [E - K] onde as convenções e notações usadas são um pouco diferentes) estuda a estrutura diferencial de alguns fibrados associados aos $P_{m,n}$.

TEOREMA E - K. O fibrado S^3-associado ao $P_{m,n}$ tem o seu espaço total

$$P_{m,n} \underset{SO(4)}{\times} S^3$$

homeomorfo a esfera S^7, se e só se $m = 1$.

A sua estrutura diferencial é exótica se e só se $n(n+1)$ não é múltiplo de 56. O número $n(n+1)$ mod 56 fornece uma classificação completa das estruturas diferenciáveis da 7-esfera que aparecem como espaços totais de S^3-fibrados sobre S^4 com grupo estrutural $SO(4)$. Elas são apenas 16 das possíveis 28 tais estruturas diferenciáveis.

D. Gromoll e W. Meyer no seu trabalho [G - M] construiram uma esfera exótica Σ^7 como o quociente livre de $Sp(2)$ por $SP(1)$. Em $\left[R_2\right]$ essa ação livre foi examinada do ponto de vista de $SO(4)$-fibrados principais sobre S^4. Agora nos generalizamos este resultado para incluir todas as 16 extruturas diferenciáveis em S^7, descritas pelo Teorema de Eells e Kuiper acima.

LEMA 16. Se S^3 atua em $\tilde{P}_{k+1}$ por

$$q * \xi := \bar{q}\xi q$$

para todo elemento das primeiras k colunas e por

$$q * x := \bar{q}x$$

para todo elemento da última coluna, então, o quociente $\tilde{P}_{k+1}/_{S^3}$ é difeomorfo ao $P'_{k+1} \underset{SO(4)}{\times} S^3$, onde o $SO(4)$ atua em S^3 por

$$(p,\theta) * q := \bar{\theta}\,\bar{p}q\theta \ .$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja (A,X) um elemento de $\tilde{P}_{k+1}$ onde A é qualquer coluna exceto a última, e X é a última coluna. Se q é um elemento de S^3, denotamos por Aq a coluna com entradas qa_i, onde a_i são as entradas de A. Similariamente com $\bar{q}Aq$, $\bar{q}x$, etc..

As seguintes aplicações são diferenciáveis e inversas entre si:

$$\Phi : P'_{k+1} \underset{SO(4)}{\times} S^3 \longrightarrow \tilde{P}_{k+1}/_{S^3}$$

com $\Phi\{(A,X),q\} := [(Aq,X)]$ e

$$\Psi : \tilde{P}_{k+1}/_{S^3} \longrightarrow P'_{k+1} \underset{SO(4)}{\times} S^3$$

com $\Psi[(A,X)] := \{(A,X),1\}$

onde $[\ \ ]$ resp. $\{\ \ \}$ denotem as classes em $\tilde{P}_{k+1}/_{S^3}$ resp. em $P'_{k+1} \underset{SO(4)}{\times} S^3$.

Observe que a aplicação Φ é bem definida pois $\{(A,X),q\} = \{(\bar{\theta}Ap\theta,\bar{\theta}X), \bar{\theta}\bar{p}q\theta\}$ que vai através de Φ ao elemento

$$[(\bar{\theta}Aq\bar{\theta}\ ,\ \bar{\theta}X)] = [(Aq,X)] \equiv \Phi\{(A,X),q\}\ .$$

Similariamente, $[A,X] = [\bar{\theta}A\theta\ ,\ \bar{\theta}X]$ que vai através de Ψ ao elemento

$$\{(\bar{\theta}A\theta,\ \bar{\theta}X),1\} = \{(A,X),1\} \equiv \Psi[(A,X)]\ .$$

Finalmente, $\Psi \circ \Phi\{(A,X)q\} = \Psi[(Aq,X)] = \{(Aq,X),1\} = \{(A,X),q\}$ e $\Phi \circ \Psi[(A,X)] = \Phi\{(A,X),1\} = [(A,X)]$. Q.E.D.

Observamos que esse lema é essencialmente a correspondência entre SO(4)-fibrados principais e Spin(4) - fibrados principais sobre o S^4. Veja por exemplo [D - R].

O Teorema E - K junto com o Lema 16 e o Teorema 8 (classificação dos P_n), implicam que alguns S^3-fibrados sobre cada uma das esferas Σ^7 de Eells e Kuiper tem a estrutura diferenciável usual. I.e., o seu espaço total é difeomorfo ao espaço total do correspondente S^3-fibrado principal sobre S^7. Em outras palavras, existem ações exóticas livres, de S^3 em $E_0 = S^7 \times S^3$, $E_1 \approx Sp(2), \ldots$ e em E_{11} com quociente esferas Σ^7 com estrutura diferenciável diferente da usual. Antes de esclarecer a contabilidade nós comentamos que essa observação não é consequência só do nosso tipo de argumento: O anulamento, por exemplo, do grupo $L_{11}(0) = L_3(0)$ (veja [W]) implica que para *todas* as estruturas diferenciáveis Σ^7 nos tempos $\Sigma^7 \times S^3$ é difeomorfo a $S^7 \times S^3$ que implica a existência de ações livres $S^3 \ldots S^7 \times S^3 \longrightarrow \Sigma^7$ para todo Σ^7. Nós devemos essa observação à R. Schultz. Porém, no nosso caso, as ações de S^3 são explicitamente dadas e os difeomorfismos entre alguns $\Sigma^7 \times S^3$ e $S^7 \times S^3$ não são muito complicados. Consequentemente, algumas destas ações exóticas do S^3 podem ser escritas de maneira explícita. Veja §4.

Pelo Teorema E - K nós temos que as estruturas diferenciáveis $\Sigma^7_{[i]}$ que aparecem como espaços totais de S^3-fibrados sobre S^4 com grupo $SO(4)$ são aqueles com

$i = 0,2,6,12,14,16,20,26,28,30,34,40,42,44,48,54.$

COROLÁRIO 17. Existem ações livres de S^3 em $S^7 \times S^3$ com quociente cada uma das seguintes $\Sigma^7_{[i]}$: $i = 0,12,16,20,28,40,44,48.$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 8 a variedade $E_o \cong S^7 \times S^3$ é difeomorfa a $\tilde{P}_{12k+1}$ para todo k e pelo Lema 16 temos que $\tilde{P}_{12k+1}/S^3$ é difeomorfo à $\Sigma^7_{|12k(12k+1)|}$. O número $12k(12k+1)$ é divisível por 4 e o seu resíduo mod 56 é também divisível por 4. Então, os possíveis candidatos são as esferas com os índices 0,12,16,20,28,40,44,48. Realmente, todas as possibilidades ocorrem, cada uma por um número infinito de valores de k. Por exemplo:

Valor de k		Índice da esfera obtida
1	$\longrightarrow$	44
2	$\longrightarrow$	40
4	$\longrightarrow$	0
5	$\longrightarrow$	20
7	$\longrightarrow$	28
8	$\longrightarrow$	16
9	$\longrightarrow$	12
20	$\longrightarrow$	48

Q.E.D.

COROLÁRIO 18. Existem ações livres de S^3 em $Sp(2)$ com quociente cada uma das estruturas diferenciáveis $\Sigma^7_{|j|}$ com $j = 0,2,6,14,26,30,34,42,54$.

DEMONSTRAÇÃO. A variedade $E_1 \cong Sp(2)$ é difeomorfa a $\tilde{P}_{12k+2}$ pelo Teorema 8, para todo k. Pelo mesmo argumento da demonstração do Corolário 17 temos a existência de ações livres de S^3 em

Sp(2) com quociente $\Sigma^7_{|(12k+1)(12k+2)|}$. O produto $1\cdot 2 = 2$ é divisível por 2, mas não por 4, e então os únicos possíveis índices são 0,2,6,14,26,30,34, 42,54. Uma rápida verificação implica de novo que todas as possibilidades ocorrem, cada uma por um número infinito de valores de k. Por exemplo:

Valor de k		Índice da esfera obtida
0	$\longrightarrow$	2
1	$\longrightarrow$	14
2	$\longrightarrow$	34
3	$\longrightarrow$	6
4	$\longrightarrow$	42
5	$\longrightarrow$	30
6	$\longrightarrow$	26
13	$\longrightarrow$	54

como $\tilde{P}_{12k+2}$ é difeomorfo a Sp(2), a ação livre com resultado S^7 (índice zero) existe. Porém, o número k que resulta a essa ação é bastante grande.

Q.E.D.

Para cada um dos restantes E_i's o raciocínio é o mesmo. O E_i é difeomorfo ao $P_{12k+i-1}$, $k = 1,2,\ldots$, e os quocientes das S^3 ações sobre E_i são um dos dois conjuntos de estruturas diferenciáveis em S^7. Aquele um com índices $\{0,12,16,20,40,44\}$ no caso que $i(i+1)$ é divisível por 4 ou o conjunto com índices $\{0,2,6,14,26,30,34,42,54\}$ se $i(i+1)$ não é divisível por 4. I.e., COROLÁRIO 19. Existem ações livres de S^3 em cada um dos E_2, E_5, E_6, E_9 e E_{10} com quociente cada uma das $\Sigma^7_{[i]}$, i = 0,2,6,14, 26, 30,34,42 e 54. Analogamente, existem ações livres de S^3 em cada um dos E_3, E_4, E_7, E_8, E_{11} com quociente cada uma das $\Sigma^7_{[j]}$; j = 0,12,16,20,40,44 e 48.

DEMONSTRAÇÃO. Foi feita acima. Q.E.D.

Observamos que para as esferas do primeiro grupo, $i(i+1)$ não divisível por 4, o valor de k que resulta na estrutura comum $\Sigma^7_{[0]} = S^7$, deve ser bastante alto como as nossas contas elementares indicam.

Para completar essa secção, descrevemos explicitamente mais alguns fibrados SO(4)-principais sobre S^4 usando os $\tilde{P}_i$'s . O problema de descrever todos eles continua pelo que sabemos em aberto. (Ver também [S], §26.6), [J - W] e [T]).

Com as notações do Lema 16, a ação de SO(4) em $\tilde{P}_{n+1}/\mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{Z}_2$ atua na parte A do $\tilde{P}_{n+1}$, definida por

$$(p,\theta) \times (A,X) := (\theta A, \theta X \bar{\theta} \bar{p})$$

é livre, e tem quociente S^4 com projeção: $(2\bar{a}b, a\bar{a} - b\bar{b})$.

Para classificar esse fibrado, observe que a inclusão i de uma SO(4)-órbita induz a seguinte aplicação em nível de π_3:

$$i_{\#} : \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$i_{\#}(1,0) = -1 \quad \text{e}$$

$$i_{\#}(0,1) = n-1.$$

Portanto, a imagem da aplicação classificante

$$\partial : \pi_4 S^4 \longrightarrow \pi_3 SO(4)$$

é gerada por $(n-1,1)$. Então, temos o

COROLÁRIO 20. O $\tilde{P}_{n/\mathbb{Z}_2}$ com a ação de $SO(4)$ descrita acima é o fibrado $P_{n-1,1}$ sobre o S^4.

DEMONSTRAÇÃO. Feita acima. Q.E.D.

COROLÁRIO 21. Os fibrados $P_{n,0}$ tem espaços totais $P_n \times_{S^3} SO(4)$ onde S^3 atua em $SO(4)$. Como

$$q * (p,0) := (qp,0)$$

e $SO(4)$ atua pela direta no quociente de maneira óbvia.

DEMONSTRAÇÃO. Ver $[R_2]$. Q.E.D.

COROLÁRIO 22. Os fibrados $P_{0,n}$ tem espaços totais $(P_{n/\mathbb{Z}_2}) \times_{SO(3)} SO(4)$. onde $\mathbb{Z}_2$ atua na última coluna de P_n e $SO(3)$ atua em $SO(4)$ por $\{\eta,-\eta\} \star (p,\theta) := (p,\eta\theta)$ i.e., como subgrupo.

DEMONSTRAÇÃO. Ver $[R_2]$. Q.E.D.

COROLÁRIO 23. Os fibrados $\tilde{P}_{1,-n}$ são obtidos de $\hat{P}_{n/\mathbb{Z}_2}$ ($\mathbb{Z}_2$ atua na última coluna por

$$(p,\theta) \star (A,X) := (p\theta A\overline{\theta},\ p\theta X).$$

DEMONSTRAÇÃO. Da mesma linha que a demonstração do corolário 20.

Q.E.D.

§4. UMA TRIVIALIZAÇÃO DE $\tilde{P}_{13}$

Nesta secção produzimos um difeomorfismo entre $\tilde{P}_{13}$ e $S^7 \times S^3$ e traduzimos a ação livre de S^3 sobre o $\tilde{P}_{13}$, descrita em detalhe na §3, como quociente $\Sigma^7_{[44]}$, em uma ação livre de S^3 sobre o produto $S^7 \times S^3$ com quociente $\Sigma^7_{[44]}$. Como consequência nós obtemos um número infinito de ações livres exóticas de S^3 sobre $S^7 \times S^3$ com quocientes cada uma das $\Sigma^7_{[i]}$, $i = 12, 16, 20, 40, 44$ e 48.

Pelo método de construção dos $\tilde{P}_n$'s da §2, temos que os elementos de $\tilde{P}_{13}$ são as matrizes de $Sp(13)$ que tem a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix}
a & -b|b^2|L^{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_1 \\
b & b\bar{a}bL^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_2 \\
0 & af_8L^{-1} & -bL_9^{-1} & 0 & \cdots & 0 & z_3 \\
0 & (a\bar{b})af_7L^{-1} & af_7L_9^{-1} & -bL_8^{-1} & \cdots & 0 & z_4 \\
0 & (a\bar{b})^2af_6L^{-1} & (a\bar{b})af_6L_9^{-1} & af_6L_8^{-1} & \cdots & 0 & z_5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & (a\bar{b})^9a|a|^2L^{-1} & (a\bar{b})^8a|a|^2L_9^{-1} & (a\bar{b})^7a|a|^2L_8^{-1} & \cdots & -b & z_{12} \\
0 & (a\bar{b})^{10}aL^{-1} & (a\bar{b})^9aL_9^{-1} & (a\bar{b})^8aL_8^{-1} & \cdots & a & z_{13}
\end{pmatrix}$$

Elemento de $\tilde{P}_{13}$.

A projeção sobre o S^7 é a sua primeira coluna e a ação livre de S^3 é pela direta na última coluna.

Para examinar o $\tilde{P}_{13}$ dividimos o S^7 na seguinte maneira:

$$S^7 = U \cup V \qquad \text{onde}$$

$$U := \{ \binom{a}{b} \text{ em } S^7 \mid a \neq 0 \} \qquad \text{e}$$

$$V := \{ \binom{a}{b} \text{ em } S^7 \mid b \neq 0 \} .$$

LEMA 24. O conjunto $U \cap V$ é difeomorfo à $S^3 \times S^3 \times (0, \pi/2)$.

DEMONSTRAÇÃO. Considere as seguintes duas aplicações que são obviamente C^∞

$$\alpha : U \cap V \longrightarrow S^3 \times S^3 \times (0, \pi/2)$$

definida por

$$\alpha \binom{a}{b} := (a|a|^{-1} \;,\; b|b|^{-1} \;,\; \cos^{-1}|a|)$$

$$\beta : S^3 \times S^3 \times (0, \pi/2) \longrightarrow U \cap V$$

definida por

$$\beta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := ((A,B),0) := \begin{pmatrix} \cos\theta & A \\ \cos\theta & B \end{pmatrix} .$$

Como $\operatorname{sen}(\cos^{-1}|a|) = b$ temos que $\alpha \circ \beta$ e $\beta \circ \alpha$ são a identidade.
Q.E.D.

Construimos agora uma secção sobre U resolvendo o seguinte sistema de treze equações lineares

$$(S) = \begin{cases} \overline{(\mathrm{Col}_i)}(\mathrm{Col}_{13}) = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,12 \\ |\mathrm{Linha}_j| = 1 \quad , \quad \text{para um } j \text{ conveniente} \\ \text{com } 1 \leq j \leq 13. \end{cases}$$

SOLUÇÃO SO SISTEMA (S) EM $U = \{a \neq 0\}$.

(1) $\bar{a}z_1 + \bar{b}z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = -a\bar{b}|a|^{-2} z_2$

(2) $-\bar{b}z_{12} + \bar{a}z_{13} = 0 \Longrightarrow z_{13} = a\bar{b}|a|^{-2} z_{12}$

$\vdots$

(11) $-\bar{b}z_3 + \bar{a}f_7 z_4 + \overline{(a\bar{b})}af_6 z_5 + \ldots +$
$\overline{(a\bar{b}^6)}af_1 z_{10} + \overline{(a\bar{b})^7}a|a|^4 z_{11} + \overline{(a\bar{b})^8}a|a|^2 z_{12} + \overline{(a\bar{b})^9}a z_{13} = 0$

(12) $-\bar{b}|b|^2 z_1 + \bar{b}a\bar{b}\, z_2 + \bar{a}f_8 z_3 + \overline{(a\bar{b})}af_7 z_4 + \ldots + \overline{(a\bar{b})^7}af_1 z_{10} +$
$+ \overline{(a\bar{b})^8}a|a|^4 z_{11} + \overline{(a\bar{b})^9}a|a|^2 z_{12} + \overline{(a\bar{b})^{10}}a z_{13} = 0$

(13) $|b|^2 + |b^4||a|^2 L^{-2} + |z_2|^2 = 1$

Primeiro resolvemos (2) e substituimos em (3). Depois resolvemos (3) e substituimos em (4), etc., até em fim temos z_4, z_5, $, \ldots, z_{13}$ como funções de z_3 :

$$z_4 = a\bar{b}|a|^{-2} L_8^{-2} z_3$$

$$z_5 = (a\bar{b})^2 |a|^{-4} L_8^{-2} z_3$$

$$z_6 = (a\bar{b})^3 |a|^{-6} (L_6 L_7 L_8)^{-2} z_3$$

$$\vdots$$

$$z_{12} = (a\bar{b})^9 |a|^{-18} (L_1 \ldots L_8)^{-2} z_3$$

$$z_{13} = (a\bar{b})^{10} |a|^{-20} (L_1 \ldots L_8)^{-2} z_3$$

Substituimos todas essas equações, junto com a

$$z_1 = -a\bar{b}|a|^{-2} z_2$$

na equação (12) e obtemos

$$z_3 = -(a\bar{b})^2 |a|^{-4} L_9^{-2} z_2$$

$$z_4 = -(a\bar{b})^3 |a|^{-6} (L_8 L_9)^{-2} z_2$$

$$\vdots$$

$$z_{11} = -(a\bar{b})^{10} |a|^{-20} (L_1 \ldots L_9)^{-2} z_2$$

$$z_{12} = -(a\bar{b})^{11} |a|^{-22} (L_1 \ldots L_9)^{-2} z_2$$

$$z_{13} = -(a\bar{b})^{12} |a|^{-24} (L_1 \ldots L_9)^{-2} z_2 .$$

Da equação (13) nós temos que

$$|z_2|^2 = |a|^2(1 - |b|^4 L^{-2})$$

e da *Proposição* 12 temos que

$$|z_2|^2 = |a|^2 f_9 L^{-2} .$$

Mas da mesma *Proposição* 12

$$f_9 = |a|^{22}(L_1 \ldots L_9)^2 .$$

Então,

$$z_2 = |a|^{12}(L_1 \ldots L_9)L^{-1}$$

Escolhemos agora o seguinte valor para z_2 :

$$z_2 := - \bar{a}^{12}(L_1 \ldots L_9)L^{-1}$$

Este valor foi escolhido de tal maneira que a função transição , a ser determinada mais para frente, pode ser fatotizada por S^6.

Substituindo esse valor de z_2 nas equações acima, nós obtemos a seguinte secção

$$X : U \times S^3 \longrightarrow \tilde{P}_{13}$$

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), g\right) \longmapsto X\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), g\right)$$

cujas coordenadas x_i, $i = 1,\ldots,13$ da última coluna são

$$x_1 = (a\bar{b})\bar{a}^{12}|a|^{-2} L_1 \ldots L_9 L^{-1} g$$

$$x_2 = -\bar{a}^{12} L_1 \ldots L^9 L^{-1} g$$

$$x_3 = (a\bar{b})^2 \bar{a}^{12}|a|^{-4} L_1 \ldots L_8 (L_9 L)^{-1} g$$

$$x_4 = (a\bar{b})^3 \bar{a}^{12}|a|^{-6} L_1 \ldots L_7 (L_8 L_9 L)^{-1} g$$

$$\vdots$$

$$x_{11} = (a\bar{b})^{10} \bar{a}^{12}|a|^{-20} (L_1 \ldots L_9 L)^{-1} g$$

$$x_{12} = (a\bar{b})^{11} \bar{a}^{12}|a|^{-22} (L_1 \ldots L_9 L)^{-1} g$$

$$x_{13} = (a\bar{b})^{12} \bar{a}^{12}|a|^{-24} (L_1 \ldots L_9 L)^{-1} g$$

Para obter uma secção Y sobre $V = \{b \neq 0\}$ temos que resolver o mesmo sistema (S), com a possibilidade de dividir por b. (em vez de a):

SOLUÇÃO DO SISTEMA (S) EM $V = \{b \neq 0\}$

(1) $\Longrightarrow$ $z_2 = -b\bar{a}|b|^{-2} z_1$

(2) $\Longrightarrow$ $z_{12} = b\bar{a}|b|^{-2} z_{13}$

Substituindo em (3), etc.,

$$z_{11} = (b\bar{a})^2 |b|^{-4} z_{13}$$

$$z_{10} = (b\bar{a})^3 |b|^{-6} L_1^2 z_{13}$$

$$z_9 = (b\bar{a})^4 |b|^{-8} (L_1 L_2)^2 z_{13}$$

$$\vdots$$

$$z_3 = (b\bar{a})^{10} |b|^{-20} (L_1 \ldots L_8)^2 z_{13}$$

Agora substituimos tudo isso em (12):

$$z_1 = (b\bar{a})^{11} |b|^{-22} (L_1 \ldots L_9)^2 z_{13} \quad \text{e}$$

$$z_2 = -(b\bar{a})^{12} |b|^{-24} (L_1 \ldots L_9)^2 z_{13} .$$

É mais fáicl obter o comprimento de z_{13} da última coordenada da secção X, de que calculá-lo diretamente da matriz $\tilde{P}_{13}$.

$$|z_{13}| = |b|^{12} (L_1 \ldots L_9 L)^{-1} .$$

Escolhemos agora um valor para z_{13} de tal maneira que a função de transição se fatoriza por S^6.

$$z_{13} := \bar{b}^{12} (L_1 \ldots L_9 L)^{-1}$$

e substituindo nas equações acima temos a secção

$$Y : V \times S^3 \longrightarrow \tilde{P}_{13}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, q\right) \longrightarrow Y\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, q\right)$$

cujas coordenadas da última coluna são:

$$y_1 = (b\bar{a})^{11}\, \bar{b}^{12}|b|^{-22}(L_1 \ldots L_9)\bar{L}^{1}\, q$$

$$y_2 = -(b\bar{a})^{12}\, \bar{b}^{12}|b|^{-24}(L_1 \ldots L_9)L^{-1}\, q$$

$$y_3 = (b\bar{a})^{10}\, \bar{b}^{12}|b|^{-20}(L_1 \ldots L_8)(L_9L)^{-1}\, q$$

$$\vdots$$

$$y_{11} = (b\bar{a})^{2}\, \bar{b}^{12}|b|^{-4}(L_1 \ldots L_9L)^{-1}\, q$$

$$y_{12} = (b\bar{a})\, \bar{b}^{12}|b|^{-2}(L_1 \ldots L_9L)^{-1}\, q$$

$$y_{13} = \bar{b}^{12}(L_1 \ldots L_9L)^{-1}\, q$$

COROLÁRIO 25: A função transição

$$\lambda_{UV} : U \cap V \longrightarrow S^3$$

entre as duas secções parciais X e Y é

$$\lambda_{UV}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^{12}(b\bar{a})^{12}\bar{b}^{12}|a|^{-24}|b|^{-24} .$$

DEMONSTRAÇÃO. Só verificar que igualando qualquer um par de coordenadas

$$x_i = y_i \quad , \quad i = 1,\ldots,13$$

e resolvendo por g teremos

$$g = \lambda_{UV}\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right)q$$

com o valor de λ_{UV} escrito acima. Q.E.D.

Se $\beta : S^3 \times S^3 \times (0,\pi/2) \longrightarrow U \cap V$ é a aplicação definida na demonstração do Lema 24, temos

LEMA 25. $\lambda_{UV} \circ \beta$ não depende da coordenada θ em $(0,\pi/2)$ e existe aplicação

$$\lambda : S^6 \longrightarrow S^3 \quad \text{com} \quad \lambda \circ c = \lambda_{UV} \circ \beta$$

onde c é a projeção contínua de $S^3 \times S^3$ sobre o S^6.

DEMONSTRAÇÃO. Obviamente,

$$\lambda_{UV} \circ \beta((A,B),\theta) = A^{12}(B\bar{A})^{12}\bar{B}^{12}$$

e isso não depende de θ. Podemos então definir

$$\lambda_{UV} \circ \beta : S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3 .$$

A projeção $c : S^3 \times S^3 \longrightarrow S^6$, onde S^6 é o equador de S^7, é definida identificando $1 \times S^3$ e $S^3 \times 1$ a um ponto (o mesmo nos dois casos) que colocamos como ponto base do S^6. A existência de λ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} S^3 \times S^3 \arrow[rr, "\lambda_{UV} \circ \mu"] \arrow[dr, "c"'] & & S^3 \\ & S^6 \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

comutar é, agora óbvia pelo seguinte:

$$\lambda_{UV} \circ \mu(A,1) = \lambda_{UV} \circ \mu(1,A) = 1 \ .$$

Q.E.D.

COROLÁRIO 26. Existe homotopia C^∞

$$F : S^3 \times S^3 \times [0,\pi/2] \longrightarrow S^3$$

com $F_o = \lambda_{UV} \circ \mu$ e $F_{\pi/2} \equiv 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\tilde{P}_{13}$ é trivial e S^6 é o equador de S^7 (i.e., $S^6 = \Omega S^7$), Lema 25 implica que $\Sigma\lambda$, a suspensão de λ é a aplicação classificante de $\tilde{P}_{13}$, e deve ser trivial, i.e., λ é homotópica a aplicação constante:

Existe homotopia

$$\overline{F} : S^6 \times [0, \pi/2] \longrightarrow S^3$$

com $\overline{F}_o(c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = 1$ e

$$\overline{F}_{\pi/2}(c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda(c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda_{UV} \circ \pi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Esta homotopia pode ser levantada de maneira óbvia a uma F:

$$\begin{tikzcd}
F : S^3 \times S^3 \times [0,\pi/2] \arrow[r] \arrow[d, "c \times id"'] & S^3 \\
S^6 \times [0,\pi/2] \arrow[ur, "\overline{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Podemos também supor que F é C^{∞} com

$$F_\theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \quad \text{para todo } \theta \text{ em } [0, \tfrac{\pi}{6}] \quad \text{e}$$

$$F_\theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^{12}(b\overline{a})^{12}\overline{b}^{12}|a|^{-24}|b|^{-24} \quad \text{para todo } \theta \text{ em } [\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}] .$$

Q.E.D.

Observe agora que podemos colocar

$$\theta = \cos^{-1}|a| \quad \text{em} \quad [0, \pi/2]$$

e obter $w\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ uma *secção global de* P_{13} com a seguinte última coluna:

$$w_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a\bar{b})\bar{a}^{12}|a|^{-2}(L_1 \ldots L_9)L^{-1}\, F_0\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\bar{a}^{12}(L_1 \ldots L_9)L^{-1}\, F_0\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$w_{13}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a\bar{b})^{12}\bar{a}^{12}|a|^{-24}(L_1 \ldots L_9 L)^{-1}\, F_0\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

COROLÁRIO 27. A aplicação $\Phi : S^7 \times S^3 \longrightarrow \tilde{P}_{13}$ com

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h\right) := \begin{pmatrix} a & -b|b|^2 L^{-1} & 0 & 0 & w_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}h \\ b & b\bar{a}b\, L^{-1} & 0 & 0 & w_2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & (a\bar{b})^{10} aL^{-1} & (a\bar{b})^{9} aL_9^{-1} & a & w_{13}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}h \end{pmatrix}$$

é um difeomorfismo entre $S^7 \times S^3$ e $\tilde{P}_{13}$, e a ação livre de S^3 em $S^7 \times S^3$ com quociente $\Sigma^7_{[44]}$ é

$$(*) \qquad q * \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h\right) = \left(\begin{pmatrix} \bar{q}aq \\ \bar{q}bq \end{pmatrix}, \overline{F_0\begin{pmatrix} \bar{q}aq \\ \bar{q}bq \end{pmatrix}}\, \bar{q}F_0\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot h\right)$$

onde $\theta = \cos^{-1}|a|$ em $[0,\pi/2]$.

DEMONSTRAÇÃO. A aplicação Φ é difeomorfismo pois é construida através da secção global de $\tilde{P}_{13}$ descrita acima. A ação de S^3 em $S^7 \times S^3$ é o "pull-back" da ação de S^3 em $\tilde{P}_{13}$ com quociente $\Sigma^7_{[44]}$ (conjugação $\xi \longmapsto \bar{q}\xi q$ para as entradas das primeiras 12 colunas e multiplicação $\omega \longmapsto \bar{q}\omega$ para as entradas da última coluna):

$$q * \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h\right) := \Phi^{-1}\left(q * \Phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h\right)\right)$$

com

$$q * \left(\Phi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h\right) = \begin{pmatrix} \bar{q}aq & \cdots & \bar{q}\, w_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} h \\ \bar{q}bq & \cdots & \bar{q}\, w_2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} h \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & q\, w_{13}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} h \end{pmatrix}$$

onde $w_i\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ é a última coluna da secção global $w\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Se $\Phi\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, g\right) = q * \left(\Phi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, h\right)$,

Como

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, g\right) = \begin{pmatrix} c & \cdots & w_1\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} g \\ d & \cdots & w_2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} g \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & w_{13}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} g \end{pmatrix}$$

temos

$$c = \bar{q}aq \quad , \quad d = \bar{q}bq \quad \text{e}$$

$$w_i\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} g = \bar{q}\, w_i\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} h \quad , \quad i = 1,\ldots,12.$$

Resolvemos agora qualquer uma das

$$w_i \left(\begin{matrix} \bar{q}\, a\, q \\ \bar{q}\, b\, q \end{matrix} \right) g = \bar{q}\, w_i \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) h$$

para o valor de g, observando que para algum i, $w_i \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) \neq 0$.

Por exemplo, para $i = 1$ temos

$$(\bar{q}aq\,\bar{q}\,\bar{b}q)\,(\bar{q}\,\bar{a}\,q)^{12}|a|^{-2}(L_1 \ldots L_9)L^{-1}\, F_\theta \left(\begin{matrix} \bar{q}aq \\ \bar{q}bq \end{matrix} \right) g =$$

$$= \bar{q}(a\bar{b})\bar{a}^{12}|a|^{-2}(L_1 \ldots L_9)L^{-1}\, F_\theta \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) h$$

ou

$$\bar{q}(a\bar{b})\bar{a}^{12}q|a|^{-2}\, F_\theta \left(\begin{matrix} \bar{q}aq \\ \bar{q}bq \end{matrix} \right) g = \bar{q}(a\bar{b})\bar{a}^{12}|a|^{-2}\, F_\theta \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) h$$

Então,

$$g = \overline{F_\theta \left(\begin{matrix} \bar{q}aq \\ \bar{q}bq \end{matrix} \right)}\, \bar{q}\, F_\theta \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right) h \; .$$

Q.E.D.

Obviamente a ação (*) do Corolário 27 é o modelo para um número infinito de ações livres de S^3 sobre $S^7 \times S^3$ com quocientes as esferas $\Sigma^7_{|i|}$, $i = 12,16,20,28,40,44$ e 48, do corolário 17. A única coisa que muda é a potência de k na homotopia de

$a^{12k}(b\bar{a})^{12k}\bar{b}^{12k}|a|^{-24k}|b|^{-24k}$ à uma função constante. A correspondência entre k e [i] é aquela mesma do Corolário 17.

Similariamente, podemos escrever as ações livres de S^3 em Sp(2) com quocientes as esferas $\Sigma^7_{[j]}$ do Corolário 18, usando as mesmas homotopia $F_0\binom{a}{b}$.

OBSERVAÇÃO 28. As ações exóticas do tipo (*) são consequência de considerações puramente homotópicas. Porém, o ingrediente principal é a aplicação

$$F : S^3 \times S^3 \times [0,\pi/2] \longrightarrow S^3$$

que fornece a homotopia entre

$$(A,B) \longrightarrow A^{12}(B\bar{A})^{12}\bar{B}^{12}$$

e

$$(A,B) \longrightarrow 1.$$

A sua existência pode ser interpretada também na seguinte maneira: A álgebra dos quartênios unitários satisfaz uma identidade polinomial, módulo homotopia, do tipo

$$x^{12}y^{12} \sim y^{12}x^{12}$$

ou $x^{12}(y\bar{x})^{12}\bar{y}^{12} - 1 \sim 0.$

Achamos que uma investigação explícita da aplicação F seria muito interessante do ponto de vista Algébrico, Topológico e também do ponto de vista de Geometria Diferncial, relativo às métricas Riemannianas das esferas $\Sigma^7_{[i]}$.

OBSERVAÇÃO. Os demais $SO(4)$-fibrados dos principais $P_{m,n}$ sobre S^4, i.e., com $m = 2,3,\ldots$ e n qualquer (ver p. 37), foram recentemente descritos pelo autor.

BIBLIOGRAFIA

[A-H-S] M.F. ATIYAH, N. HITCHIN e I.M. SINGER, Self duality in four dimensional riemannian geometry. Proc. R. Soc. London, Ser. A 362, 425-461 (1978).

[C - G] J. CHEEGER e D. GROMOLL, On the structure of complete open manifolds of non-negative curvature. Ann. Math.96, 413-443 (1972).

[D - R] A. DERDZINSKI e A. RIGAS, Unflat connection on 3-sphere bundles over S^4. Trans. A.M.S. 265, Nº 2, 485-493 , (1981).

[E - K] J. EELLS e N. KUIPER, An invariant for certain smooth manifolds. Ann. Mat. Pura Appl. 93-110 (1962).

[G - M] D. GROMOLL e W. MEYER, An exotic sphere with non negative sectional curvature. Ann. Math. 100, 407-411 , (1974).

[H] P. HILTON, Suspension theorems and the generalized Hopf invariant , Proc. London Math. Soc.(3) 1, 462-492 (1951).

[Hu] S. - T.HU, Homotopy theory Acad. Press (1959).

[J - W] I.M. JAMES e J.H.C. WHITEHEAD, The homotopy theory of sphere bundles over spheres, I e II, Proc. London Math. Soc. 4 (1954), 196-218 e 5 (1955), 148-166.

[K - N] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU, Foundations of differential geometry, Interscience, New York and London (1963).

[R_1] A. RIGAS, Geodesic spheres as generators of $\pi_q(O)$, $\pi_{q+1}(BO)$, Jour.Dif.Geom. (13) 4, 527-545 (1978).

[R_2] A. RIGAS, Some bundles of non-negative curvature. Math. Ann. (232), 187-193 (1978).

[S] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press (1951).

[W] C.T.C. WALL, Surgery on compact manifolds. Acad. Press (1970).

[We] A. WEINSTEIN, Fat bundles and symplectic manifolds. Advances in Math. Vol. 37, Nº 3, 239-250 (1980).

[T] T. TAMURA, Homeomorphy classification of total spaces of sphere bundles over spheres. Jour. Math. Soc. Japan 10, 29-43 (1958).