PRINCÍPIOS DE REFLEXÃO
E INDESCRITIBILIDADE

LUIZ PAULO DE ALCANTARA

Tese apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas para o concurso de livre docência na área de Fundamentos e História da Matemática.

- 1983 -

PRINCÍPIOS DE REFLEXÃO E INDESCRITIBILIDADE

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - PRELIMINARES	1
§1 - A teoria impredicativa das classes	1
§2 - Os sistemas B e A	6
CAPÍTULO II - PRINCÍPIOS DE REFLEXÃO	10
CAPÍTULO III - O SISTEMA BA	25
§1 - Axiomas de BA	25
§2 - Observações sobre os axiomas de BA	30
§3 - Modelos Naturais de BA	31
BIBLIOGRAFIA	41

INTRODUÇÃO

O princípio de transição do infinito potencial ao infinito atual é utilizado na formulação de axiomas de infinito na teoria axiomática dos conjuntos.

Uma aplicação clássica do princípio é o argumento de Dedekind para a existência de um conjunto infinito.

Em uma forma mais sofisticada, o princípio de transição do infinito potencial ao infinito atual é empregado na formulação do axioma da inacessibilidade. Os axiomas de Zermelo-Fraenkel implicam que o universo é fechado relativamente a certas operações, ou seja, potencialmente fechado. Aplicando o princípio, podemos supor a existência de um conjunto fechado relativamente a estas operações. Analogamente, justificamos os esquemas de reflexão.

Os esquemas de reflexão são empregados como técnica de investigação metamatemática ou como axiomas fortes de infinito (cf. [2], [8], [13]).

Em [2], Bernays considera o seguinte esquema de reflexão:

$$\varphi(X) \longrightarrow \exists \alpha R(\alpha + 1) \equiv \varphi(X \cap R(\alpha)).$$

Uma idéia natural de estender o axioma de Bernays seria por uniformização. Tentaríamos afirmar a existência de um único α para todas as fórmulas. Entretanto, uma tal formulação levaria a

contradição.

Reinhardt [20], introduzindo o conceito de cardinal extendível obtém extensão uniforme do esquema de Bernays (ver [23]).

Neste trabalho, começamos o estudo do sistema BA , baseado em um princípio uniforme de reflexão.

BA é extensão do sistema A de Ackermann, no qual é possível demonstrar a existência de uma classe de cardinais π_m^n -indescritíveis, o que, combinado com um resultado de Tharp [22], acarreta a consistência da teoria B de Bernays.

A existência de cardinais extendíveis implica a existência de modelos naturais de BA .

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

§1. A TEORIA IMPREDICATIVA DAS CLASSES

Apresentaremos, nesse parágrafo, de forma sucinta, o sistema de Zermelo-Fraenkel, que denotaremos ZF, e a teoria impredicativa das classes, MT. Para estudo mais completo dessas teorias, pode-se consultar Fraenkel, Bar-Hillel e Lévy [9] ou Chuaqui [3].

Seguiremos, em todo o trabalho, salvo indicação explícita em contrário, a notação e a terminologia de Drake [6].

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com um único símbolo não lógico, o predicado binário $\in$. Utilizaremos as letras minúsculas latinas $x, y, z, \dots$ como variáveis para conjuntos. Empregaremos os símbolos $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ significando respectivamente 'e', 'ou', 'não', 'implica', 'se e somente se', 'para todo' e 'existe'.

ZF é o sistema de Zermelo-Fraenkel, cujos axiomas no simbolismo de $\mathcal{L}$, são os seguintes:

(ZF1) axioma da extensionalidade

$$\forall x \forall y \forall t ((t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y).$$

(ZF2) axioma da existência do conjunto vazio

$$\exists y \forall x (x \notin y)$$

(ZF3) axioma do par não ordenado

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \iff t = x \vee t = y).$$

(ZF4) axioma de união

$$\forall x \exists z \forall u \forall v (u \in v \in x \implies u \in z).$$

(ZF5) axioma de conjunto potência

$$\forall x \exists z \forall t (t \in z \iff t \subset x).$$

(ZF6) axioma de infinito

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall t (t \in x \implies t \cup \{t\} \in x)).$$

(ZF7) axioma de substituição

$\forall t_1, \dots, t_n \forall a \forall u, v, w (u \in a \wedge \varphi(u, w) \wedge \varphi(u, v) \implies v = w) \implies \exists z \forall x (x \in z \iff \exists t (t \in a \wedge \varphi(t, x)))$, sendo φ uma fórmula tendo como únicas variáveis livres $t_1, \dots, t_n, t, x$.

(ZF8) axioma da regularidade

$$\forall x (x \neq \emptyset \implies \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Utilizando, como de hábito, letras latinas maiúsculas para representar as classes, adotamos a seguinte axiomática para a teoria impredicativa das classes MT:

$$(MT1) \quad \forall X \forall Y \forall Z ((Z \in X \longleftrightarrow Z \in Y) \longrightarrow X = Y)$$

Dizemos que uma classe X é um conjunto se existe uma classe Y tal que $X \in Y$. Escrevemos $M(X)$ para significar que a classe X é conjunto.

(MT2) $\exists Y \forall X (X \in Y \longleftrightarrow M(X) \wedge \varphi)$, sendo φ uma fórmula que não contém ocorrências livres de Y .

$$(MT3) \quad M(X) \longrightarrow \exists Z \forall Y (Y \in Z \longleftrightarrow Y \subseteq X).$$

$$(MT4) \quad M(X) \wedge M(Y) \longrightarrow M(X \cup Y).$$

(MT5) Se F é uma função e $M(X)$, então $M(F''X)$.

$$(MT6) \quad M(X) \longrightarrow M(\cup X).$$

$$(MT7) \quad \exists Y (M(Y) \wedge \phi \in Y \wedge \forall X (X \in Y) \longrightarrow X \cup \{X\} \in Y)$$

$$(MT8) \quad \forall X (X \neq \phi \longrightarrow \exists Y (Y \in X \wedge Y \cap X = \phi))$$

Todos os resultados e definições abaixo figuram em Drake [6]. Nosso propósito consiste apenas em lembrar o que será utilizado com maior frequência.

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ serão empregados como variáveis para os ordinais, e denotaremos a classe dos ordinais por On .

Por indução transfinita, definimos a estrutura cumulativa dos tipos:

$$R(0) = \phi ,$$

$$R(\alpha + 1) = \gamma(R(\alpha)) ,$$

$$R(\lambda) = \bigcup_{\mu < \lambda} R(\mu) , \text{ se } \text{Lím}(\lambda) .$$

Um cardinal é um ordinal inicial. Notamos por $\text{card}(x)$ o cardinal associado a um conjunto x .

Seja α um cardinal. Dizemos que α é fortemente limite se:

- (i) $\kappa > \kappa_0$,
- (ii) $\beta < \alpha \longrightarrow 2^\beta < \alpha$.

α é regular se α não é da forma $\sum_{i \in I} \beta_i$, para $\beta_i < \alpha$ e $\text{card}(I) < \alpha$.

α é inacessível se α é fortemente limite e regular (Notação: $\text{In}(\alpha)$).

Uma função $f : On \longrightarrow On$ é normal se as seguintes condições são verificadas.

(i) f é estritamente crescente

$$\alpha < \beta \longrightarrow f(\alpha) < f(\beta) ,$$

(ii) f é contínua

$$f(\lambda) = \bigcup_{\xi < \lambda} f(\xi), \text{ se } \text{Lim}(\lambda).$$

Seja $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon \rangle$ um modelo de MT. Se $A = R(\alpha)$, dizemos que $\mathcal{A}$ é um modelo natural. Todos os modelos supercompletos de MT são da forma $\langle R(\alpha + 1), \varepsilon \rangle$, $\text{In}(\alpha)$.

Sejam $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon \rangle$ e $\mathcal{B} = \langle B, \varepsilon \rangle$ duas estruturas.

Se $A \subset B$ dizemos que $\mathcal{B}$ é extensão elementar de $\mathcal{A}$ (Notação: $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$) se para toda fórmula φ e elementos $a_1, \dots, a_n \in A$, temos $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

Uma imersão j de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e uma subestrutura $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Se $\mathcal{B}' \prec \mathcal{B}$ a imersão j é chamada imersão elementar de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

A classificação de Lévy para fórmulas de uma linguagem de primeira ordem pode ser estendida a linguagens com variáveis de tipo finito.

As variáveis de tipo n serão denotadas por $X^n, Y^n, \dots$

Seja φ uma fórmula dessa linguagem na forma normal prenex.

φ é uma fórmula de ordem $m+1$ se o primeiro quantificador (logo o de maior ordem) aplica-se a variáveis de tipo m .

Seja φ de ordem $m+1$ e suponhamos que os quantificadores de ordem $m+1$ são

$$\forall x_1^m \dots \forall x_{n_1}^m \exists x_{n_1+1}^m \dots \exists x_{n_2}^m \exists x_{n_2+1}^m \dots \varphi_{n_j}^m$$

i.e. j blocos de $\forall$ e $\exists$, com $j-1$ mudanças de quantificadores (φ é $\forall$ se j é ímpar e $\exists$ se j é par), e o primeiro quantificador é $\forall$.

π_j^m denotará o conjunto de todas as fórmulas da forma descrita acima.

Analogamente, se temos $j-1$ mudanças de quantificadores de ordem m e o primeiro quantificador é $\exists$, definimos o conjunto das fórmulas Σ_j^m .

§2. OS SISTEMAS B e A

Neste parágrafo, introduzimos o sistema de Bernays, B , desenvolvido em [2] e a teoria de Ackermann, que denotaremos por A . Para estudo completo dessas teorias, consultar as referências [1], [2] e [9].

Os axiomas de $\tilde{B}$ são:

(I) axioma da separação:

$\exists A \forall X (X \in A \iff \varphi \wedge \exists Y (X \in Y))$, sendo φ uma fórmula sem ocorrências livres de A .

(II) axioma da extensionalidade:

$$\forall X (X \in A \iff X \in B) \longrightarrow A = B.$$

(III) axioma de subconjuntos

$$(\exists X (B \in X) \wedge A \subseteq B) \longrightarrow \exists X (A \in X)$$

Para cada fórmula φ , seja φ^U a fórmula obtida a partir de substituindo-se toda subfórmula da forma $\exists X \psi$ por $\exists X (X \subseteq U \wedge \psi^U)$ e toda subfórmula da forma $\forall X \psi$, por $\forall X (X \subseteq U \longrightarrow \psi^U)$.

(IV) axioma de reflexão

$$\varphi(A) \longrightarrow \exists U (\exists Y (U \in Y) \wedge \forall X \forall Y (X \in Y \in U \longrightarrow X \in U) \wedge \varphi^U(A \cap U)),$$

sendo $\varphi(A)$ uma fórmula na qual U não ocorre.

A linguagem $\mathcal{L}_A$ de A é obtida juntando-se a $\mathcal{L}$ uma constante V . As variáveis representam classes e $X \in V$ significa que X é um conjunto.

Os axiomas de A são os seguintes:

(α) axioma da extensionalidade

$$\forall X(X \in A \longleftrightarrow X \in B) \longrightarrow A = B$$

(β) axioma de formação de classes:

$\exists \lambda \forall X(X \in \lambda \longleftrightarrow \varphi \wedge X \in V)$, onde φ é uma fórmula em que A não ocorre livre.

(γ) axioma da hereditariedade:

$$A \in B \wedge B \in V \longrightarrow A \in V.$$

(δ) axioma dos subconjuntos:

$$B \in V \wedge A \subseteq B \longrightarrow A \in V.$$

(ε) axioma de formação de conjuntos:

$X_1, X_2, \dots, X_n \in V ((\forall X(\varphi(X) \longrightarrow X \in V) \longrightarrow \exists U(U \in V) \wedge \forall X(X \in U \longleftrightarrow \varphi(X, X_1, \dots, X_n))))$, sendo φ uma fórmula na qual V não ocorre e cujos parâmetros estão entre $X_1, \dots, X_n$.

(ζ) axioma da regularidade:

$$X \in V \wedge X \neq \phi \longrightarrow \exists A(A \in X \wedge A \cap X = \phi).$$

Vamos associar a cada fórmula φ da linguagem de MT uma fórmula $\bar{\varphi}$ da linguagem de A . Diremos que $\bar{\varphi}$ é a tradução de φ na linguagem de $\mathcal{L}_A$.

Dada uma fórmula φ , interpretamos os conjuntos de MT como classes de A contendo como elementos apenas elementos de V .

Todas as traduções dos axiomas de MT, excetuando-se o axioma de substituição, são demonstráveis em A (consultar [9]).

CAPÍTULO II

PRINCÍPIOS DE REFLEXÃO

Seja $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ uma seqüência finita de fórmulas. Seja $x_1, \dots, x_m$ a seqüência de variáveis que ocorrem livres em alguma fórmula φ_i , $1 \leq i \leq n$.

Uma classe U reflete $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sss $\forall x_1, \dots, x_m \in U$
 $\in U((\varphi_1 \xrightarrow{U} \varphi_1^U) \wedge \dots \wedge (\varphi_n \xrightarrow{U} \varphi_n^U))$.

Uma sentença que afirma a existência de uma classe U que reflete todas as fórmulas de uma seqüência dada é um princípio de reflexão.

Formularemos um tal princípio:

Se $V \models \varphi(x_1, \dots, x_k)$, então existe um ordinal α , tal que para todo $x_1, \dots, x_k \in R(\alpha)$, $R(\alpha) \models \varphi(x_1, \dots, x_k)$.

Em outras palavras, se uma sentença φ de ZF é verdadeira em V , existe um $R(\alpha)$ no qual φ é verdadeira.

Formalmente,

(PR1) $\exists \alpha \forall x_1, \dots, x_k \quad R(\alpha) (\varphi \longleftrightarrow \varphi^{R(\alpha)})$, sendo φ uma fórmula da linguagem de ZF com variáveis livres $x_1, \dots, x_k$.

Todas as instâncias de (PR1) são demonstráveis em ZF para fórmulas da linguagem de ZF.

É fácil ver (cf. Lévy [13]) que os seguintes esquemas, aparentemente mais fortes, são equivalentes a (PR1) em ZF:

$$(PR2) \quad \forall \beta \exists \alpha (\beta < \alpha \wedge \forall x_1, \dots, x_k \in R(\alpha) (\varphi \longleftrightarrow \varphi^{R(\alpha)}));$$

$$(PR3) \quad \forall \beta \exists \alpha (\beta < \alpha \wedge \forall x_1, \dots, x_k \in R(\alpha) ((\varphi_1 \longleftrightarrow \varphi_1^{R(\alpha)}) \wedge \dots \wedge (\varphi_n \longleftrightarrow \varphi_n^{R(\alpha)}))).$$

O teorema que enunciaremos a seguir contém (PR3) como caso particular.

LEMA 1. Seja $t(x)$ um termo satisfazendo às seguintes condições:

$$(i) \quad \beta \leq \alpha \longrightarrow t(\beta) \subseteq t(\alpha);$$

$$(ii) \quad \text{Lim}(\lambda) \longrightarrow t(\lambda) = \cup \{t(\xi) : \xi < \lambda\}$$

Então,

$$(\forall y) (y \in x \wedge \text{Ord}(y) \wedge x \neq \emptyset \longrightarrow t(ux) = \cup \{t(\alpha) : \alpha \in x\}.$$

Um termo que satisfaz (i) e (ii) é chamado termo normal.

DEMONSTRAÇÃO:

De (i), segue-se que

$$O\{t(\alpha) : \alpha \in x\} \subseteq t(Ox) .$$

Se existe $\beta \in x$ tal que $(\forall \gamma) (\gamma \in x \longrightarrow \gamma \subseteq \beta)$, então $Ox = \beta$ e, portanto,

$$t(Ox) = t(\beta) = O\{t(\alpha) : \alpha \in x\}$$

Caso contrário, Ox é um ordinal limite; logo por (ii),

$$t(Ox) = O\{t(\alpha) : \alpha \in Ox\} .$$

Mas, por (i),

$$O\{t(\alpha) : \alpha \in Ox\} \subseteq O\{t(\alpha) : \alpha \in x\} \quad \blacksquare$$

TEOREMA 1. Seja $t(x)$ um termo normal e seja $\varphi(x)$ a fórmula $\exists \alpha (x \in t(\alpha))$.

Então, para qualquer sequência finita de fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, com variáveis livres entre $x_1, \dots, x_m$, temos:

$$\forall \alpha \exists \beta ((\alpha \in \beta \wedge \forall x_1, \dots, x_m \in t(\beta) ((\varphi_1^\alpha \iff \varphi_1^{\beta}) \wedge \dots \wedge (\varphi_n^\alpha \iff \varphi_n^{\beta})))) .$$

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir sem perda de generalidade que todas as subfórmulas das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ também ocorrem na lista. Supomos, ainda, que as fórmulas existenciais ocupam as p primeiras

posições na lista.

Seja $1 \leq j \leq p$. Logo, φ_j é da forma,

$\exists y \psi_j(z_1, \dots, z_k, y)$, onde $z_1, \dots, z_k$ são as variáveis livres de φ_j .

Definimos

$$s_j(z_1, \dots, z_k) = \mu \gamma (\exists y \in t(\gamma) \psi_j^\phi(z_1, \dots, z_k, y)).$$

Logo, se dados $z_1, \dots, z_k$, existe y tal que

$\phi(y) \wedge \psi_j(z_1, \dots, z_k, y)$, resulta que $s_j(z_1, \dots, z_k)$ é o menor ordinal γ tal que $y \in t(\gamma)$.

Definimos

$$s_j^*(u) = U\{s_j(z_1, \dots, z_k) : z_1, \dots, z_k \in u\}.$$

Segue-se de (i) que:

$$U\{t(s_j(z_1, \dots, z_k)) : z_1, \dots, z_k \in u\} \subseteq t(s_j^*(u)).$$

Logo, se $z_1, \dots, z_k \in n$ e existe y tal que $\phi(y) \wedge \psi_j^\phi(z_1, \dots, z_k, y)$, então um tal y pode ser escolhido em $t(s_j^*(u))$.

Como $\{z_1, \dots, z_k\} \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$, $\forall x_1, \dots, x_m \in u (\exists y (\phi(y) \wedge \psi_j^\phi))$
 $\iff \exists y \in t(s_j^*(n)) \psi_j^\phi$.

Definimos

$$s^*(u) = s_1^*(u) \cup \dots \cup s_p^*(u)$$

Temos, pois,

$$(1) \quad \forall x_1, \dots, x_m \in u(\exists y(\phi(y) \wedge \psi_j^\phi)) \iff \exists y \in t(s^*(u)) \psi_j^\phi, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Definimos uma sucessão $r(n)$ como se segue:

$$r(0) = \alpha + 1$$

$$r(n+1) = s^*(t(r(n))).$$

Seja $\beta = U\{r(n) : n \in \omega\}$.

Claramente, $\alpha < \beta$. Temos, portanto, que demonstrar

$$(2) \quad \forall x_1, \dots, x_m \in t(\beta) (\varphi_j^\phi \iff \varphi_j^{t(\beta)}), \quad 1 \leq j \leq n.$$

A demonstração se faz por indução sobre a complexidade das fórmulas.

- Se φ_j é atômica, temos $\varphi_j^\phi = \varphi_j^{t(\beta)} = \varphi_j$;

- Se $\varphi_j = \varphi_q \wedge \varphi_r$ ou $\varphi_j = \neg \varphi_p$, (2) segue-se por hipótese de indução;

- Se φ_j é existencial, $j \leq p$ e φ_j é da forma $\exists y \psi_j$.

Por hipótese de indução, (2) é válido para ψ_j e então,

$$\forall x_1, \dots, x_m \in t(\beta) (\exists y \in t(\beta) \psi_j^\Phi \iff \exists y \in t(\beta) \psi_j^{t(\beta)}) .$$

Mas $\exists y \in t(\beta) \psi_j^{t(\beta)}$ é $\psi_j^{t(\beta)}$, logo para demonstrar (2) é suficiente verificar

$$\forall x_1, \dots, x_m \in t(\beta) (\psi_j^\Phi \iff \exists y \in t(\beta) \psi_j^\Phi) , \text{ ou seja}$$

$$(3) \quad \forall x_1, \dots, x_m \in t(\beta) (\exists y (\Phi(y) \wedge \psi_j^\Phi) \iff \exists y \in t(\beta) \psi_j^\Phi) .$$

Suponhamos $x_1, \dots, x_m \in t(\beta)$. Pela definição de β e pelo lema 1 temos,

$$t(\beta) = U\{t(r(n)) : n \in \omega\} .$$

Portanto, para cada i , $1 \leq i \leq m$, existe $n_i \in \omega$ tal que $x_i \in t(r(n_i))$.

Seja $r(n_p) = \max\{r(n_i) : 1 \leq i \leq m\}$ e seja $k = n_p$.

Por (1), temos

$$\exists y (\Phi(y) \wedge \psi_j^\Phi) \iff \exists y \in t(s^*(t(r(k)))) \psi_j^\Phi .$$

Como $s^*(t(r(k))) = r(k+1)$,

$$(4) \quad \exists y (\Phi(y) \wedge \psi_j^\Phi) \iff \exists y \in t(r(k+1)) \psi_j^\Phi .$$

Mas $r(k+1) \leq \beta$, logo $t(r(k+1)) \subseteq t(\beta)$.

Por (4), segue-se a tese. ■

Em virtude do axioma da regularidade e fazendo $t(\alpha) = R(\alpha)$, temos o

COROLÁRIO. Se σ é uma instância de (PR3), $ZF \vdash \sigma$. ■

(PR1) pode ser usado como uma alternativa para axiomatizar ZF.

R. Montague demonstrou que (PR1) é equivalente a conjunção dos axiomas de infinito e substituição (ver [7] ou [18]).

Com o objetivo de obter axiomas fortes de infinito foram estudadas extensões desse princípio.

Em [13], A. Lévy propõe acrescentar aos axiomas de ZF o seguinte esquema:

(M) Toda função normal definida para todos os ordinais admite pelo menos um ponto fixo inacessível.

Formalmente,

$$\begin{aligned}
& (\forall \alpha, \beta, \gamma) (\varphi(\alpha, \beta) \wedge \varphi(\alpha, \gamma) \longrightarrow \beta = \gamma) \wedge (\forall \alpha) (\exists \beta) \varphi(\alpha, \beta) \wedge \\
& (\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta) (\alpha < \gamma \wedge \varphi(\alpha, \beta) \wedge \varphi(\gamma, \delta) \longrightarrow \beta < \delta) \wedge \\
& (\forall \alpha, \beta) (\neg (\exists \sigma) (\sigma + 1 = \alpha) \wedge \alpha \neq 0 \wedge \varphi(\alpha, \beta) \longrightarrow (\forall \gamma) (\gamma < \beta \longrightarrow \\
& (\exists \delta, \eta) (\delta < \alpha \wedge \varphi(\delta, \eta) \wedge \eta > \gamma))) \longrightarrow (\exists \beta) (\varphi(\beta, \beta) \wedge \text{In}(\beta)) \quad ,
\end{aligned}$$

sendo φ uma fórmula da linguagem de ZF.

No mesmo trabalho, Lévy demonstrou que (M) é equivalente à conjunção de

(M') Toda função normal definida para todos os ordinais admite pelo menos um ponto fixo regular;

e

(AI) Todo cardinal é majorado por um cardinal fortemente inacessível.

A demonstração de Lévy não faz uso do axioma da escolha.

Utilizando o axioma da escolha, pode-se demonstrar que $(M) \longleftrightarrow (M')$, (ver de Alcântara [5]).

Como consequência de (M), demonstra-se,

$$(PR4) \quad \forall \beta \exists \alpha (\beta < \alpha \wedge \text{In}(\alpha) \wedge (\varphi \longleftrightarrow \varphi^{R(\alpha)})),$$

ou seja, para toda fórmula φ de ZF existem cardinais inacessíveis arbitrariamente grandes tais que $\varphi \longleftrightarrow \varphi^{R(\alpha)}$.

Como se α for um cardinal inacessível, $R(\alpha)$ modelo natural de ZF, temos (fora de ZF, é claro) que, para um tal α , $\varphi \longleftrightarrow \varphi^{R(\alpha)}$,

para toda fórmula φ .

Assim, (PR4) parece intuitivamente plausível.

Utilizando métodos desenvolvidos em [5], podemos demonstrar, na teoria impredicativa de classes MT, o

TEOREMA 2. (M) é equivalente a cada um dos seguintes esquemas:

(M1) Toda família $(f_i)_{i \in I}$ (onde I é um conjunto) de funções normais, definidas para todos os cardinais, admite pontos fixos comuns inacessíveis arbitrariamente grandes.

(M2) Para toda família $(f_i)_{i \in I}$ (onde I é um conjunto) de funções crescentes, definidas para todos os ordinais, existe pelo menos um regular α , f_i -inacessível para todo $i \in I$ (i.e. $\forall i \in I (\beta < \alpha \longrightarrow f_i(\beta) < \alpha)$).

Necessitamos um lema:

LEMA 2. (M) é equivalente a

(M'') Toda função normal definida para todos os ordinais admite pontos fixos inacessíveis arbitrariamente grandes.

DEMONSTRACÃO. Obviamente (M'') implica (M).

Reciprocamente, seja f normal e f' a derivada de f , ou seja, a função normal que enumera os pontos fixos de f . Consideremos a γ -translação de f' , f'_γ .

f'_γ é normal, logo, por (M), existe β tal que $f'_\gamma(\beta) = \beta$. Mas, $\beta = f'(\gamma + \beta)$; logo, $f(\beta) = \beta$, e como f' é normal $\beta = f'(\gamma + \beta) \geq \gamma + \beta \geq \gamma$. ■

Estamos em condições de demonstrar o teorema 2.

Demonstraremos primeiro que (M'') implica (M').

Seja $(f_i)_{i \in I}$ uma família de funções normais indexada por um conjunto I e consideremos a coleção F de todas as composições finitas das funções $(f_i)_{i \in I}$,

$$F = \{f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n} : i_1, \dots, i_n \in I, n \in \omega\}.$$

Seja γ um ordinal e

$$\alpha = \sup\{g(\gamma + 1) : g \in F\}$$

Como, para todo $i \in I$, $f_i \circ g \in F$, α é um ponto fixo comum a todas as f_i , $i \in I$. Logo, a família $(f_i)_{i \in I}$ admite pontos fixos comuns, arbitrariamente grandes.

Seja h a função que enumera os pontos fixos comuns. Aplicando (M'') a h , segue-se (M1).

Demonstraremos, agora, que (M1) implica (M2).

Seja $(f_i)_{i \in I}$ uma família de funções crescentes definidas para todos os ordinais, indexada por um conjunto.

A cada f_i , associamos uma função normal f_i^* definida como se segue:

$$f_i^*(0) = f_i(0)$$

$$f_i^*(\lambda) = \sup_{\beta < \lambda} f_i(\beta), \text{ Lim}(\lambda);$$

$f_i^*(\alpha + 1) = 0$ menor δ tal que existe β para o qual $\delta = f_i(\beta)$ e $\delta > f_i^*(\alpha)$.

É fácil ver que, para todo β ,

$$f_i^*(\beta) \leq f_i(\beta) \leq f_i^*(\beta + 1).$$

(M2) é obtido aplicando (M1) à família $(f_i^*)_{i \in I}$.

Finalmente, mostramos que (M2) implica (M"), donde se conclui (M) pelo lema 2.

Necessitamos algumas definições preliminares.

Seja ξ um cardinal e t_ξ a sequência definida por

$$t_\xi(0) = \aleph_\xi;$$

$$t_\xi(n+1) = 2^{t_\xi(n)}, \quad n \in \omega$$

$$\text{Seja } \lambda_\xi = \sup_{n \in \omega} t_\xi(n).$$

Consideremos a função g definida na classe dos cardinais por $g(\xi) = \lambda_\xi$. Temos $g(\xi) > \xi$, para todo ξ .

Definimos $f : \text{On} \longrightarrow \text{On}$ pelas cláusulas

$$f(0) = g(0) ;$$

$$f(\alpha + 1) = g(f(\alpha)) ;$$

$$f(\lambda) = \sup_{\beta < \lambda} f(\beta) , \text{Lim}(\lambda) .$$

Facilmente, podemos verificar que f é normal.

Seja h uma função normal.

Aplicando (M2) a f e h , existe um regular α tal que se $\beta < \alpha$, então $h(\beta) < \alpha$ e $f(\beta) < \alpha$. Como f e g são contínuas, $f(\alpha) = g(\alpha) = \alpha$. Falta mostrar que α é inacessível.

Suponhamos $\beta < \alpha$ e seja $\gamma = \beta + 1$; logo $\gamma < \alpha$.

Temos, também,

$$\beta < g(f(\gamma)) = \lambda_{f(\gamma)} = \sup_{n \in \omega} t_{f(\gamma)}(n) .$$

Então, existe $n \in \omega$ tal que $\beta < t_{f(\gamma)}(n)$.

Finalmente, para este n ,

$$2^\beta < 2^{t_{f(\gamma)}^{(n)}} = t_{f(\gamma)}^{(n+1)} < g(f(\gamma)) = f(\gamma+1) \leq f(\alpha) = \alpha . \blacksquare$$

Os esquemas considerados até agora são princípios locais de reflexão, no sentido que a classe que reflete uma fórmula depende da fórmula dada.

Uma tentativa ingênua de se formular um princípio uniforme de reflexão seria acrescentar a ZF um axioma afirmando a existência de um único α tal que $R(\alpha)$ refletisse todas as fórmulas. Mas, um tal axioma implicaria, por exemplo, que $\forall x(\text{Ord}(x) \leftrightarrow x \in \alpha)$ e levaria a uma contradição.

Uma solução bastante elegante que uniformiza (PR1) é o sistema $ZF/\underline{s}$ de Feferman (ver [8]).

A linguagem de $ZF/\underline{s}$ é obtida acrescentando-se a $\mathcal{L}_{ZF}$ uma constante $\underline{s}$.

Os axiomas de $ZF/\underline{s}$ são os seguintes:

- (1) os axiomas de ZF ;
- (2) $\underline{s}$ é não vazio
 $(\exists x)(x \in \underline{s})$;
- (3) $\underline{s}$ é completo
 $(\forall x)(\forall y)(y \in x \wedge x \in \underline{s} \longrightarrow y \in \underline{s})$;
- (4) $\underline{s}$ é supercompleto
 $(\forall x)(\forall y)(x \in \underline{s} \wedge (\forall t)(t \in y \longrightarrow t \in x) \longrightarrow y \in \underline{s})$;

(5) esquema de reflexão

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (x_1, \dots, x_n \in \underline{s} \longrightarrow (\varphi^{(\underline{s})}(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)))$$

, para cada fórmula de φ de $\mathcal{L}_{ZF}$ - (logo φ não contém $\underline{s}$), tendo $x_1, \dots, x_n$ como únicas variáveis livres.

O esquema (5) significa que se (M, E, s) é um modelo de ZF/s , $M_s = \{x : x \in M \wedge x \in s\}$, $x E_s y$ se, e somente se, $x, y \in M_s \wedge x E y$, então (M, E) é uma extensão elementar de (M_s, E_s) , isto é, (M, E) e (M_s, E_s) verificam as mesmas fórmulas de $\mathcal{L}_{ZF}$.

Como consequência de (5), se φ for teorema de ZF , $\varphi^{(\underline{s})}$ é teorema de $ZF/\underline{s}$.

Seja $\sigma = \{\alpha : \alpha \in \underline{s} \wedge \alpha \in \text{On}\}$. Então, σ é o menor ordinal que não pertence a $\underline{s}$. Evidentemente, σ é um ordinal limite estritamente maior do que ω . Temos, portanto $\underline{s} = R(\sigma)$.

Acrescentando-se a $ZF/\underline{s}$ o axioma,

$$(6) \quad (\exists \alpha) (\text{In}(\alpha) \wedge \underline{s} = R(\alpha)) ,$$

prova-se o axioma da inacessibilidade e obtemos uma uniformização de (PR4).

Em [4], estudamos o sistema T , que também conduz a uniformização de (PR1). T é extensão dos sistemas de Feferman e Ackerman.

O teorema 2 e o teorema de Scott-Scarpellini (ver Lolli [15]) sugerem uma possibilidade de uniformização parcial para conjuntos de fórmulas. Pretendemos desenvolver esse tema em trabalhos futuros.

No capítulo precedente descrevemos o sistema $\mathcal{B}$ de Bernays baseado em um princípio local de reflexão:

$$\varphi(X) \longrightarrow \exists \alpha R(\alpha + 1) \models \varphi(X \cap R(\alpha)).$$

Uma tentativa ingênua de uniformização seria, outra vez, postular a existência de um único α para todas as fórmulas. Entretanto, tal suposição levaria a uma contradição tomando $R(\beta + 1)$ como modelo do universo, $\beta > \alpha$, $\varphi(X) = \exists t(t \in X)$ e $X = R(\beta) - R(\alpha)$.

Solução para a uniformização do princípio de Bernays foi obtida por Reinhardt, introduzindo os cardinais l -extendíveis (ver [20] e [21]).

No capítulo III, estudamos uma extensão do sistema Ackermann, $\mathcal{BA}$, baseado em um princípio uniforme de reflexão, que implica a existência de cardinais π_m^n -indescritíveis e logo a consistência de $\mathcal{B}$.

A existência de cardinais l -extendíveis implica a existência de um modelo natural de $\mathcal{BA}$.

CAPÍTULO III

O SISTEMA BA

§1. AXIOMAS DE BA.

A linguagem $\mathcal{L}_{BA}$ do sistema BA é a mesma do sistema A de Ackermann.

Os axiomas de BA são os seguintes:

(I) axioma de formação de classes:

$\exists A \forall X (X \in A \iff \varphi \wedge X \in V)$, onde φ é uma fórmula em que A não ocorre livre.

(II) axioma de extensionalidade:

$$\forall X (X \in A \iff X \in B) \implies A = B.$$

(III) axioma de subconjuntos:

$$B \in V \wedge A \subseteq B \implies A \in V.$$

(IV) axioma de hereditariedade:

$$A \in B \wedge B \in V \implies A \in V.$$

DEFINIÇÃO 1. Seja U uma classe própria. Para cada fórmula $\varphi(A, X_1, \dots, X_n)$, definimos φ_U (restrição de φ a U) como sendo a fórmula $(\exists B) (B \subseteq A \wedge B \in E \wedge \varphi^V(B, X_1, \dots, X_n))$.

(V) princípio impredicativo de reflexão uniforme:

$$x_1, \dots, x_n \in V \wedge A \subseteq V \wedge \varphi(A, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \varphi_V, \quad \text{onde}$$

φ é uma fórmula em que V não ocorre.

(VI) princípio de V -reflexão:

$$x_1, \dots, x_n \in V \longrightarrow (\varphi(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow \varphi^V(x_1, \dots, x_n)), \quad \text{on-$$

de φ é uma fórmula em que V não ocorre.

(VII) axioma de regularidade:

$$x \in V \wedge x \neq \emptyset \longrightarrow \exists Y (Y \in x \wedge Y \cap x = \emptyset).$$

BA é uma extensão da teoria de A de Ackermann.

TEOREMA 1. Se $A \vdash \varphi$, então $BA \vdash \varphi$

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente demonstrar que todos os axiomas de A são teoremas de BA . Os axiomas (α) , (β) , (γ) , (δ) e (ϵ) seguem-se imediatamente de (II), (I), (IV), (III) e (VII), respectivamente. Temos, então, que demonstrar em BA o axioma (ϵ) , ou seja,

$$x_1, \dots, x_n \in V \wedge (\forall t) (\varphi(t, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow t \in V) \longrightarrow$$

$\exists z \in V (\forall t (t \in z \longleftrightarrow \varphi(t, x_1, \dots, x_n))),$ onde φ é uma fórmula em que z não aparece livre e V não ocorre.

Suponhamos $x_1, \dots, x_n \in V$ e $(\forall t) ((\varphi(t, x_1, \dots, x_n) \longrightarrow t \in V).$

Seja $U = \{t \in V : \varphi(t, x_1, \dots, x_n)\}$.

Consideremos a fórmula $\psi(U) = \forall t(t \in U \iff \varphi(t, x_1, \dots, x_n))$.

Aplicando (V) a $\psi(U)$ temos,

$$(\exists u)(u \in V \wedge u \subseteq U \wedge \forall t(t \in u \iff \varphi^V(t, x_1, \dots, x_n))).$$

Por (VI), temos,

$$(\exists u)(u \in V \wedge u \subseteq U \quad \forall t(t \in u \iff \varphi(t, x_1, \dots, x_n))).$$

Segue-se, por (II), que $u = U$ e $U \in V$. ■

BA é também uma extensão da teoria impredicativa de classes MT.

De maneira análoga ao caso de A, interpretamos as variáveis de conjuntos de MT como elementos de V e as variáveis de classes de MT como variáveis de classes em $\mathcal{L}_{BA}$, restrita às classes que contém como elementos, apenas elementos de V.

Assim, a cada fórmula φ da linguagem de MT temos uma tradução $\bar{\varphi}$ na linguagem de BA.

TEOREMA 2. Se $MT \vdash \varphi$, então $BA \vdash \bar{\varphi}$

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente verificar que se φ é um axioma de MT, então $\bar{\varphi}$ é teorema de BA.

Já vimos que todas as traduções dos axiomas de MT, excetuando-se o axioma da substituição, são demonstráveis em A; logo, pelo teorema 1, também em BA.

Para demonstrar em BA a tradução do axioma da substituição, consideremos $a \in V$ e f uma função tal que $f \subset V$. Temos que verificar que $f'' a \in V$.

Seja $b = \text{Dom}(f|_a)$.

Temos que $b \in V$.

Consideremos a fórmula $\psi(X)$

$$'X = f|_a'' b'$$

Aplicando (V) e (VI) a $\psi(X)$, segue-se que,

$$\exists x \in V \wedge x \subseteq X \wedge x = f|_a'' b.$$

E então, temos,

$$f|_a'' b = f'' a \in V. \blacksquare$$

De forma análoga ao princípio de reflexão de Bernays, é possível estender a aplicação do axioma (V) a fórmulas com um número finito de variáveis de classes livres.

TEOREMA 3. $BA \vdash \varphi(A, B) \wedge A \subseteq V \wedge B \subseteq V \longrightarrow (\exists a) (\exists b) (a \subseteq A \wedge b \subseteq B \wedge a \in V \wedge b \in V \wedge \varphi^V(a, b))$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\psi(X)$ a fórmula

' $\exists A \exists B (\varphi(A, B) \wedge \forall x (x \in A \iff \langle x, 0 \rangle \in X) \wedge \forall x (x \in B \iff \langle x, 1 \rangle \in X))$ ' .

Supondo $\varphi(A, B)$, $A \subseteq V$ e $B \subseteq V$, com $X = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$, temos $\psi(X)$.

Aplicando (V), obtemos,

$(\exists u) \{ (u \in V) \wedge u \subseteq X \wedge \exists A \exists B (\varphi^V(A, B) \wedge \forall x (x \in A \iff \langle x, 0 \rangle \in u) \wedge \forall x (x \in B \iff \langle x, 1 \rangle \in u)) \}$.

Temos então,

$u = (a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\})$ com $a, b \in V$ e $a \subseteq A$, $b \subseteq B$. ■

Por indução finita, segue-se o

COROLÁRIO. $BA \vdash \varphi(A_1, \dots, A_n, x_1, \dots, x_k) \wedge A_1 \subseteq V \wedge \dots \wedge A_n \subseteq V \longrightarrow (\exists a_1) \dots (\exists a_n) (a_1 \subseteq A_1 \wedge \dots \wedge a_n \subseteq A_n \wedge a_1 \in V \wedge \dots \wedge a_n \in V \wedge \varphi^V(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_k))$. ■

§2. OBSERVAÇÕES SOBRE OS AXIOMAS DE BA .

1. Adotando o uso corrente de chamar conjuntos aos elementos de V e classes próprias as classes que não pertencem a V , temos como consequência do axioma (I) que $\{X : X \in V \wedge X \notin X\}$ é uma classe própria.

Logo, como $\{X : X \in V \wedge X \notin X\} \subset V$, pelo axioma (III), V também é uma classe própria.

2. A restrição que aparece nos axiomas (V) e (VI) impedindo a ocorrência de V na fórmula é necessária. Em caso contrário, considerando a fórmula ' $X \in V \wedge \varphi(X)$ ' obteríamos, a partir do axioma (ϵ) de A que é demonstrável em BA , que $\{x : x \notin x\}$ é um conjunto.

3. Também como consequência de (ϵ), como ocorre na teoria A , se $\psi(X)$ é uma fórmula cujos parâmetros são conjuntos e V não ocorre, então $\psi(X)$ não pode ser equivalente a $X \in V$.

De fato, suponhamos $\psi(X) \longleftrightarrow X \in V$. Tomando a fórmula ' $\psi(X) \wedge X \notin X$ ' e aplicando (ϵ) teríamos que a classe $\{x : x \notin x\}$ seria um conjunto.

Assim sendo, não é possível em BA (como em A) definir o conjunto por uma fórmula em que V não ocorre.

4. O axioma (I) afirma a existência de classes cujos elementos são conjuntos.

Entretanto, como em A , é possível demonstrar a existência de uma classe que possua como elemento uma classe própria.

De fato, suponhamos que não exista tal classe. Teríamos,

$$\forall A (X \in A \iff X \in V).$$

Por outro lado, todo conjunto é elemento de alguma classe.

Então, a propriedade de ser um conjunto seria equivalente à propriedade de ser elemento de alguma classe e chegaríamos a uma contradição.

Usando o axioma de regularidade, é possível construir tais classes, por exemplo a classe V e as classes $PV, PPV, \dots$ (ver [12]).

5. Como consequência imediata de (V) e (VI) temos,

$$\varphi(A) \longrightarrow (\varphi_V)^V,$$

que pode ser visto como um princípio uniforme de reflexão e que em um certo sentido uniformiza o princípio de reflexão de Bernays.

§3. MODELOS NATURAIS DE BA .

Neste parágrafo trataremos dos modelos naturais da teoria BA no sentido de [16], i.e., modelos da forma $\langle R(\alpha), R(\beta), \in R(\alpha) \rangle$.

A observação 3 do §2 pode ser escrita na seguinte forma:

$$BA \vdash \neg \exists x_0, \dots, x_n (x_0, \dots, x_n \in V \wedge \forall t (t \in V \iff \varphi(t, x_0, \dots, x_n))), \text{ para toda fórmula } \varphi(x, x_0, \dots, x_n).$$

Esta proposição sugere uma generalização da noção de definibilidade (admitindo parâmetros), introduzida em [17] com outra motivação.

DEFINIÇÃO 2. $\mathcal{A} = (A, U, E)$ um modelo de BA. Dizemos que uma subclasse C de A é definível em $(\mathcal{A}, B)$ sss existe uma fórmula $\varphi(x, x_0, \dots, x_n)$ na qual V não ocorre e elementos $b_0, \dots, b_n$ de B tais que para todo $t \in A$,

$$t \in C \iff \mathcal{A} \models \varphi(t, b_0, \dots, b_n), \text{ ou seja}$$

$$C = \{t \in A : \mathcal{A} \models \varphi(t, b_0, \dots, b_n)\}.$$

O teorema 4 é a versão semântica da observação 3 do §2.

TEOREMA 4. Se $(\mathcal{A} = A, U, E)$ é um modelo de BA, então U não é definível em $(\mathcal{A}, U)$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, por absurdo, U definível em $(\mathcal{A}, U)$.

Então, existiria uma fórmula $\varphi(t, x_0, \dots, x_n)$, sem ocorrências de V , e elementos $u_0, \dots, u_n \in U$, tais que para todo $t \in A$,

$$(1) \quad t \in U \iff \mathcal{A} \models \varphi(t, u_0, \dots, u_n) \text{ , ou seja, teríamos}$$

$$U = \{t \in A : \mathcal{A} \models \varphi(t, u_0, \dots, u_n)\}.$$

Então,

$$\mathcal{A} \models u_0, \dots, u_n \in V \wedge \forall t (\varphi(t, u_0, \dots, u_n) \implies t \in V).$$

Como $\mathcal{A}$ é modelo do esquema (ε) de Ackermann,

$$\mathcal{A} \models \exists z (z \in V \wedge \forall t (t \in z \iff \varphi(t, u_0, \dots, u_n))).$$

Logo, existe $u \in U$ tal que para todo $t \in A$,

$$t \in u \iff \mathcal{A} \models \varphi(t, u_0, \dots, u_n)$$

Por (1) e pelo axioma da extensionalidade, teríamos $u = U$ e $U \in U$, o que é contraditório.

TEOREMA 5. Se $\mathcal{A} = \langle R(\lambda), R(\beta), \in \rangle$, com $\lambda > \beta$, $\text{Lim}(\lambda)$, $\mathcal{A} \models \{I, II, III, IV, V\}$ e $\forall \gamma, \beta < \gamma < \lambda$, $R(\gamma)$ não é definível em $(\mathcal{A}, R(\beta))$, então $\mathcal{A} \models \{I, II, III, IV, V, VI\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $\mathcal{A} \models \text{VI}$ sss $R(\beta) \prec R(\lambda)$.

Suponhamos $R(\lambda) \models \varphi(x, y_0, \dots, y_n)$.

Seja η o menor ordinal tal que para algum elemento $a \in R(\lambda)$, $\text{rank}(a) = \eta$ e $R(\lambda) \models \varphi(a, y_0, \dots, y_n)$.

Resulta, então

$$t \in R(\eta) \iff \mathcal{A} \models \exists u \exists v (v = R(u) \wedge t \in v \wedge \text{rank}(a) = u \wedge \varphi(a, y_0, \dots, y_n) \wedge \forall x \forall z (\text{rank}(x) = z \wedge \varphi(x, y_0, \dots, y_n) \implies u \in z)).$$

Logo, $\eta < \beta$ e $R(\beta) \models \varphi(x, y_0, \dots, y_n)$. ■

COROLÁRIO 1. Seja $\mathcal{A} = \langle R(\lambda), R(\beta), \in \rangle$, $\beta < \lambda$, $\text{Lim}(\lambda)$ e $\mathcal{A} \models \text{BA}$.

$R(\beta) \prec R(\lambda)$ sss $\forall \gamma, \beta \leq \gamma < \lambda$, $R(\gamma)$ não é definível em $(\mathcal{A}, R(\beta))$. ■

R. Montague e R. Vaught demonstraram que se $\alpha > \beta$ e $\langle R(\beta), \in \rangle \prec \langle R(\alpha), \in \rangle$, então ambas as estruturas são modelos do sistema de Zermelo-Fraenkel, ZF.

R. Grewe demonstrou que se $\mathcal{A} = \langle R(\alpha), R(\beta), \in \rangle$, $\text{Lim}(\alpha)$, $\alpha > \beta$ e $R(\beta)$ não é definível em $(\mathcal{A}, R(\beta))$, então $\mathcal{A} \models \text{A}$.

Temos, pois,

COROLÁRIO 2. Se $\mathcal{A} = \langle R(\lambda), R(\beta), \in \rangle$, $\text{Lim}(\lambda)$, $\beta < \lambda$ e $\mathcal{A} \models \text{BA}$ então $\langle R(\beta), \in \rangle \models \text{ZF}$ e $\mathcal{A} \models A$. ■

DEFINIÇÃO 3. Seja φ uma fórmula (onde V não ocorre) com apenas variáveis de segunda ordem livres $X_1, \dots, X_n$, α um ordinal e $U_1, \dots, U_n \subseteq R(\alpha)$.

α é descrito por φ com parâmetros $U_1, \dots, U_n$ sss

$$\langle R(\alpha), \in_{R(\alpha)} \rangle \models \varphi(U_1, \dots, U_n) \quad \text{mas,}$$

$$\forall \beta < \alpha, \langle R(\beta), \in_{R(\beta)} \rangle \not\models \varphi(U_1 \cap R(\beta), \dots, U_n \cap R(\beta)).$$

Seja Ω uma classe de fórmulas.

α é Ω -indescritível sss α não é descrito por uma fórmula de Ω .

Sejam $\alpha > 0$, uma fórmula com n variáveis livres sem ocorrência de V e $U_1, \dots, U_n \subseteq R(\kappa)$.

Nessas condições dizemos que κ é α -indescritível se, e somente se sempre que $\langle R(\iota + \alpha), \in \rangle \models \varphi(U_1, \dots, U_n)$ existe $\beta < \iota$ tal que $\langle R(\beta + \alpha), \in \rangle \models \varphi(U_1 \cap R(\beta), \dots, U_n \cap R(\beta))$.

LEMA 1 (Drake [6]): Se $\alpha \geq \aleph$ e κ é α -indescritível, então κ é π_n^p -indescritível para todo $n, p \in \aleph$.

DEMONSTRAÇÃO. Tomando $R(\kappa)$ como um dos parâmetros, em $R(\kappa + \alpha)$ temos $P(R(\kappa))$, $PP(R(\kappa)), \dots$ ou seja $R(\kappa + 1)$, $R(\kappa + 2)$, $\dots$ que serão os domínios das variáveis de segunda ordem, terceira ordem, etc...

Logo, se φ é uma fórmula em que aparecem variáveis de ordem superior, podemos construir uma fórmula $\bar{\varphi}$ da linguagem de ZF substituindo variáveis de ordem $r+1$ por variáveis de conjuntos relativizados a $P^r(s)$, sendo s uma variável livre nova para denotar $R(\kappa)$; subfórmulas atômicas da forma $Y^r \in X^{r+1}$ são substituídas por $y \in x$ (onde y substitui Y^r e x substitui X^{r+1}); subfórmulas da forma $x \in A_i$ são substituídas por $x \in v_i$ (onde $v_1, \dots, v_n$ são as n variáveis livres de $\bar{\varphi}$).

Temos: se $U_1, \dots, U_n \subseteq R(\kappa)$,

$$\langle R(\kappa + \alpha), \in \rangle \models \bar{\varphi}(R(\alpha), U_1, \dots, U_n) \iff$$

$$\langle R(\kappa), \in, U_1, \dots, U_n \rangle \models \varphi.$$

Como isto vale para todo α e se $\beta < \alpha$, $R(\beta) \cap R(\alpha) = R(\beta)$, temos que se κ é α -indescritível, então κ não é descrito por φ ou seja κ é ω_n^P -indescritível para todo $p, n \in \omega$.

DEFINIÇÃO 4. Seja $C \subseteq \kappa$, κ um ordinal. Dizemos que C é fechado em κ se toda sequência crescente de elementos de C , limitada em C , tem limite em C .

C não é limitado em κ se $(\forall \alpha \in \kappa) (\exists \beta \in C) (\beta > \alpha)$.

$A \subseteq \kappa$ é estacionária em κ se para todo $C \subseteq \kappa$, fechado e não limitado em κ temos $A \cap C \neq \emptyset$.

TEOREMA 6. Seja $\kappa = \{\gamma \in V : \text{Ord}(\gamma)\}$, ou seja $\kappa = \text{On} \cap V$.

Para todo α menor que κ , κ é α -indescritível e a classe $A = \{\beta < \kappa : \beta \text{ é } \alpha\text{-indescritível}\}$ é estacionária em κ .

DEMONSTRAÇÃO. Seja φ tal que $\langle R(\kappa + \alpha), \in, U \rangle \models \varphi$.

Seja ψ a fórmula

$$' \langle R(\kappa + \alpha), \in, U \rangle \models \varphi ' .$$

Aplicando V e VI a fórmula ' $\text{Ord}(\kappa) \wedge \psi$ ', utilizando indução sobre a complexidade de φ segue-se que,

$$\langle R(\beta + \alpha), \in, U \cap R(\beta) \rangle \models \varphi \quad \text{para algum } \beta < \kappa .$$

Consideremos a fórmula

$$' \kappa \text{ é } \alpha\text{-indescritível}, C \subseteq \kappa \text{ e } C \text{ não é limitado em } \kappa ' .$$

Aplicando V e VII temos,

$$' \text{existe } \beta, \beta < \kappa, \beta \text{ } \alpha\text{-indescritível}, c \subseteq C \subseteq \beta \text{ e } c$$

não é limitado em β' .

Então,

$\beta = \sup c = \sup(C \cap \beta)$, e como C fechado em κ , $\beta \in C$ e $C \cap A \neq \emptyset$. ■

L. Tharp demonstrou que se para cada n existe α tal que α é π_n^1 -indescritível, então a teoria B é consistente (ver [22]).

COROLÁRIO. $\text{Con}(BA) \longrightarrow \text{Con}(B)$. ■

Na verdade, podemos demonstrar em BA a existência de uma classe de modelos naturais de B .

DEFINIÇÃO 5. κ é extensível a λ se $\kappa < \lambda$ e existe M e $j : R(\kappa+1) \longrightarrow M \subseteq R(\lambda+1)$, sendo j uma imersão elementar tal que:

- (i) $\langle M, \epsilon \rangle \prec \langle R(\lambda+1), \epsilon \rangle$,
- (ii) $\forall x \in R(\kappa), j(x) = x$.

Temos que $j(\kappa) = \lambda$.

TEOREMA 7. Se κ extensível a λ , $\mathcal{A} = \langle R(\lambda), R(\kappa), \epsilon \rangle \models BA$.

DEMONSTRAÇÃO. Trivialmente, $\mathcal{A} \models \{I, II, III, IV, VII\}$. Como

j é imersão elementar e $j(\kappa) = \lambda$, $\mathcal{A} \models VI$, desde que $R(\kappa) \prec R(\lambda)$.

Seja então $j : R(\kappa + 1) \longrightarrow M \subseteq R(\lambda + 1)$.

Suponhamos $x_0, \dots, x_n \in R(\kappa)$, $A \subseteq R(\kappa)$ e

$R(\lambda) \models \varphi(x_0, \dots, x_n, A)$.

Logo,

$R(\lambda + 1) \models (\exists a \subseteq j(A) \wedge a \in R(j(\kappa) \wedge R(\lambda) \models \varphi(x_0, \dots, x_n, a))$.

Logo,

$R(\kappa + 1) \models (\exists a \subseteq A \wedge a \in R(\kappa) \wedge R(\kappa) \models \varphi(x_0, \dots, x_n, a))$.

Temos, pois,

$\exists b \subseteq a$, $b \in R(\kappa)$ tal que

$R(\kappa + 1) \models (R(\kappa) \models \varphi(x_0, \dots, x_n, b))$.

Segue-se que

$R(\lambda + 1) \models (R(\lambda) \models \varphi(x_0, \dots, x_n, b))$ e

$R(\lambda) \models \varphi(x_0, \dots, x_n, b)$, ou seja $\mathcal{A} \models V$. ■

BA pode ser visto como o primeiro de uma hierarquia de sistemas $BA_{(n)}$, obtida iterando o axioma V na seguinte forma:

$$(V)_{(n)} \varphi(A) \wedge A \subset P^{(n)} V \longrightarrow (\exists a) (a \subset A \wedge a \in P^{(n)} V \wedge \varphi(a)).$$

Um estudo completo dessa hierarquia, relacionado com uma hierarquia de teorias de classes a ser desenvolvida por M. V. Marshall em sua tese de doutoramento, será objeto de trabalhos futuros.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. ACKERMANN, Zur Axiomatik der Mengenlehre, *Mathematische Annalen* 131 (1956), 336-345.

- [2] P. BERNAYS, On the problem of schemata of infinity in axiomatic set theory, em *Sets and classes*, North-Holland, Amsterdam, 1976, 121-172.

- [3] R. CHUAQUI, *Axiomatic Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

- [4] L.P. de ALCANTARA, On a system of Feferman, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 13 (1975), 429-437.

- [5] L.P. de ALCANTARA, The equivalence of some axioms of strong infinity, *Non-Classical Logics, Model Theory and Computability*, North-Holland, Amsterdam, 1977, 169 - 177.

- [6] F. DRAKE, *Set Theory, An Introduction to Large Cardinals*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

- [7] E. ENGELER e H. RÖHRL, On the problem of foundations of category theory, *Dialectica*, 23 (1969), 58-66.

- [8] S. FEFERMAN, Set theoretical foundations of category theory, Reports of the Midwest Category Seminar III, Springer, Berlin, 1969, 201-247.
- [9] A. FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL e A. LÉVY, Foundations of Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [10] R. GREWE, Natural Models of Ackermann's set theory, The Journal of Symbolic Logic, 34 (1969), 481-488.
- [11] J. LAKE, Natural models and Ackermann-type set theories, The Journal of Symbolic Logic, 40 (1975), 151-158.
- [12] A. LÉVY, On Ackermann's set theory, The Journal of Symbolic Logic, 24 (1959), 154-166.
- [13] A. LÉVY, Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, Pacific Journal of Mathematics, 10 (1960), 223-238.
- [14] A. LÉVY e R. VAUGHT, Principles of partial reflection in the set theories of Zermelo and Ackermann, Pacific Journal of Mathematics, 11 (1961), 1045-1062.
- [15] G. LOLLI, Categorie, Universi e Principi di Riflessione, Boringhieri, Torino, 1977.

- [16] R. MONTAGUE e R. VAUGHT, Natural models of set theory, *Fundamenta Mathematicae* 47 (1959), 219-242.
- [17] R. MONTAGUE e R. VAUGHT, A note on theories with selectors, *Fundamenta Mathematicae* 47 (1959), 243-247.
- [18] R. MONTAGUE, Fraenkel's addition to the axioms of Zermelo, *Essays on the foundations of mathematics*, Jerusalem, 1961, 91-114.
- [19] W. REINHARDT, Ackermann's set theory equals ZF, *Annals of Mathematical Logic* , 2 (1970), 189-249.
- [20] W. REINHARDT, Remarks on reflection principles, large cardinals and elementary embeddings, em *Axiomatic Set Theory*, Proc. Symp. Pure Math. 13, American Mathematical Society , Providence, RI, 1974, 189-205.
- [21] R. SOLOVAY, W. REINHARDT e A. KANAMORI, Strong axioms of infinity and elementary embeddings, *Annals of Mathematical Logic*, 13 (1978), 73-116.
- [22] L. THARP, On a set theory of Bernays, *The Journal of Symbolic Logic*, 32 (1967), 319-321.

- [23] H. WANG, Large sets, in Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1977, 309-333.