

ELEMENTOS PARA UMA TEORIA GEOMÉTRICA
DAS LINGUAGENS FORMAIS

ANTONIO MÁRIO SETTE

Tese apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e
Ciência da Computação, para
obtenção do título de Livre
Docente em Matemática .

- 1983 -

À René Thom, o pesquisador, e a Carl Sagan, o professor ,
cujas obras reativaram em mim o prazer, a crença e a esperança
na ciência.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a todos nossos colegas que, direta ou indiretamente, colaboraram na realização deste trabalho. Em particular, agradecemos a Marco Antonio Teixeira, Luiz Antonio San Martin e Renato Luna Pedrosa, pelas conversas informais de corredores, das quais resultaram alguns contra-exemplos. A Renato, além disso, pela ativa colaboração.

Um agradecimento todo especial à Profa. Ayda Arruda que nos incentivou e apoiou durante todo o tempo.

Agradecemos também a Neide Durães Sette, pela ajuda na correção do texto e a Lourdes Soares, pelo trabalho de ditilografia.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - PRELIMINARES SOBRE CATEGORIAS E FUNTORES . .	1
CAPÍTULO II - PSEUDOGRUPOS	25
CAPÍTULO III -	49
BIBLIOGRAFIA	95

INTRODUÇÃO

" ... But I am certain that the human mind would not be fully satisfied with a universe in which all phenomena were governed by a mathematical process that was coherent but totally abstract. Are we not then in wonderland? In this situation where man is deprived of all possibility of intellectualization, that is, of interpreting geometrically a given process either he will seek to create, despite everything through suitable interpretation, an intuitive justification of the process, or he will sink into resigned incomprehension which habit will change to indifference. In the case of gravitation there is no doubt that the second attitude has prevailed, for we have not, in 1975, less reason to be astonished at the fall of the apple than had Newton. The dilemma posed all scientific explanation is this: magic or geometry.....

... Classical Euclidean geometry can be considered as a magic; at the price of a minimal distortion of appearances (a point without size, a line without width) the purely formal language of geometry describe adequately the reality of space. We might say, in this sense, that geometry is a successful magic. I should like to state a converse: is not all magic, to the extend that it is successful, geometry?"

René Thom (1975).

O objetivo principal deste trabalho é estabelecer uma relação profunda entre algumas linguagens de uso corrente na lógica e a geometria. De forma mais precisa, demonstraremos (Capítulo III) a existência de geometrias subjacentes à lógica de primeira ordem $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$; à lógica modal $\mathcal{L}_m^T$; à lógica de primeira ordem com quantificadores generalizados $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$ e à lógica de primeira ordem com valores (de verdade) na álgebra de Post, com m elementos p^m .

O material aqui apresentado é fruto de nossas preocupações nestes últimos quatro anos e parte dele encontra-se contida nos seguintes artigos:

- Functorialization of first order logic with finitely many predicates (A.M. Sette e J.S. Sette [18] , publicado em 1977);
- Partial isomorphism extension and a representation theorem for Post-languages (A.M. Sette , aceito para publicação);

- Modal Logic: Back-and-Forth method and a (functorial) representation theorem (A.M. Sette , a ser submetido a publicação);
- A representation theorem for languages with generalized quantifiers through back-and-forth (R.H. Pedrosa e A.M. Sette , a ser submetido a publicação).

Omitimos os resultados relacionados com o assunto e contidos no artigo Characterization of elementary interpretations in category theory (A.M. Sette e L.W. Szczerba).

Um outro objetivo também relevante do nosso trabalho é propor (final do Capítulo III) uma série de problemas como programa de trabalho para os próximos anos. Estamos convencidos da importância e fecundidade de uma análise "geométrica" da lógica. Neste sentido pretendemos que este trabalho, reparadas as imperfeições que eventualmente contenha, seja um embrião de uma monografia sobre o assunto.

Inicialmente dissemos ser nosso principal objetivo demonstrar a existência de geometrias subjacentes à certas lógicas. No entanto, que entendemos por geometria? A fim de responder tal questão, abriremos aqui um parêntese ao final do qual prosseguiremos com nossa introdução, capítulo por capítulo.

BREVE HISTÓRICO

O estudo da geometria parece ter surgido muito cedo. Escritos egípcios e babilônios atestam que há três milênios A.C.

alguns rudimentos do que viria a se chamar geometria euclideana eram desenvolvidos. No entanto, o primeiro estudo sistemático escrito sobre geometria, do qual temos conhecimento, são "Os elementos" de Euclides (300 A.C.).

Durante muito tempo o desenvolvimento desta ciência se deu sob o pressuposto de que as verdades geométricas eram as verdades sobre o espaço físico. Somente no fim do século XVIII, início do século XIX é que, com o surgimento das geometrias não euclidianas (Gauss, Lobatchevsky, Bolyai), a idéia de espaço geométrico (abstrato, não físico) começa a aparecer. Vários tipos diferentes de geometrias foram estudados. Tal fato provocou uma enorme proliferação de geometrias na época (o que, do ponto de vista psicológico, deve ter causado uma enorme sensação de prazer para os mais progressistas e uma terrível sensação de desconforto para aqueles mais tradicionalistas, de qualquer modo a geometria teve um grande progresso nestes anos).

Em 1872, Felix Klein em seu famoso "Programa de Erlanger" introduz, de modo claro, um conceito bastante geral de geometria, dando (ainda que provisoriamente) ordem ao "caos" criado pela proliferação das geometrias não euclidianas. Segundo Klein, cada geometria pode ser caracterizada por um subgrupo do grupo de permutações do espaço e as noções geométricas, i.e., as noções concernentes a uma dada geometria, são precisamente aquelas invariantes pelo subgrupo de permutações que a caracteriza. Além disso, os objetos de estudo de uma subgeometria de uma dada geometria, são as

propriedades invariantes por um subgrupo do grupo que caracteriza a geometria dada. Assim sendo, todo teorema correspondente a uma geometria de um grupo continua válido na geometria de um de seus subgrupos (na subgeometria). Desta maneira, Klein utiliza a noção de grupo de forma a unificar o conceito de geometria e compara a maior parte das geometrias conhecidas na época.

Por que os pseudogrupos? - Ainda em 1854, surge com Riemann uma outra idéia de espaço (geométrico). Para Riemann o espaço não é o "lugar" onde as figuras movem-se livremente, o espaço tem ele mesmo uma estrutura métrica, sendo a geometria algo intrínseco a cada espaço (ver exemplo 1.13). A idéia de espaço, segundo Riemann, passou a ter um enorme interesse a partir dos trabalhos sobre a relatividade (1915-1916), uma vez que o espaço considerado por Einstein é uma variedade de Riemann.

A existência de variedades de Riemann, tais que o grupo das suas isometrias é trivial (i.e., constituído unicamente pela identidade), torna a geometria destes espaços, segundo a concepção de Klein, desprovida de qualquer interesse (para um exemplo de tal situação considere a variedade $M = \mathbb{R}$ e a seguinte métrica:

$$|\omega|_x = x^2 |\omega|).$$

Vários matemáticos (como por exemplo Weil, Cartan, Ehresmann) estiveram envolvidos com a revisão do "Programa de Klein" na busca de uma noção que, como os grupos, unificasse as diversas geometrias englobando também as Riemannianas. Surgiu então, a noção de

pseudogruppo (que "localiza" a idéia de Klein). Tal noção foi formalizada em 1960 por Ehresmann.

A idéia básica envolvida na definição de pseudogruppo é simples. Considere por exemplo $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{(0,0)\}$ e C_0, C_1 círculos de raio $\frac{1}{2}$ com centros em $(0,0)$ e $(0,1)$ respectivamente. É fácil ver que não existe nenhum homeomorfismo $f : \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0$ tal que $f(C_0) = C_1$. Basta notar que o grupo fundamental $\pi(C_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi(C_1) = \{0\}$. Do ponto de vista de Klein C_0 e C_1 não têm a mesma "forma" (o que obviamente é muito estranho). Contudo, podemos constatar que restringindo-nos a subconjuntos convenientes $A_0 \supset C_0$ e $A_1 \supset C_1$, existe então homeomorfismos $f : A_0 \longrightarrow A_1$ tais que $f(A_0) = A_1$. A idéia básica é, pois, restringir o domínio das bijeções consideradas a certos subconjuntos do espaço.

Por geometria entenderemos então o estudo dos invariantes de um pseudogruppo. Como os grupos são pseudogruppos particulares, tal definição engloba as geometrias de Klein.

Capítulo I. Neste capítulo fazemos uma breve introdução às categorias. Além de fixar notações, este capítulo tem a finalidade de tornar o material apresentado auto-suficiente. Observamos que muito embora nosso trabalho esteja situado na interseção da álgebra, da lógica e, em certo sentido, da geometria, ele é particularmente endereçado aos lógicos que apenas a partir de alguns anos, após os trabalhos de Lawvere vêm tendo um contato sistemático com a álgebra categórica. Desta forma, procuramos apresentar as demonstrações com detalhes e uma ampla variedade de exemplos.

Capítulo II. Apresentamos neste capítulo duas definições de pseudogrupos: a primeira, como um par $\langle C, F \rangle$ constituído por um grupóide C (categoria onde todos os morfismos são inversíveis) e por um funtor generalizado F , satisfazendo certas condições; a segunda, como uma estrutura algébrica $\langle C, \cdot \rangle$ onde $\cdot$ é uma operação binária satisfazendo algumas condições. Uma série de propriedades elementares dos pseudogrupos são obtidas. Algumas delas de interesse próprio e úteis no tratamento algébrico dos pseudogrupos. Ainda neste capítulo introduzimos duas noções de morfismo de pseudogrupo, relativas à primeira e segunda definição dada. As respectivas categorias são denotadas por Pg e PG . Finalmente, com base nas propriedades (elementares) demonstradas, estabelecemos a equivalência destas duas categorias (no sentido de Malcev), mostrando que existem funtores $\mu : Pg \longrightarrow PG$ e $\theta : PG \longrightarrow Pg$ tais que $\theta \circ \mu = id$, $\mu \circ \theta = id$ e além disso μ e θ comutam os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 Pg & \xrightarrow{\mu} & PG \\
 \searrow \epsilon & & \swarrow \epsilon \\
 & \text{Con} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 PG & \xrightarrow{\theta} & Pg \\
 \searrow \epsilon & & \swarrow \epsilon \\
 & \text{Con} &
 \end{array}$$

onde ϵ são funtores esquecimento. Este resultado (a menos da forma) deve-se a Ehresmann. Duas razões nos levaram a incluí-lo neste trabalho: a primeira por ser tanto o resultado sem si como sua demonstração, bastante elucidativos; a segunda por não existir

na literatura (ao que me consta) uma demonstração detalhada do mesmo.

Encerramos o capítulo com a noção de pseudogrupo dos isomorfismos locais associados a um pseudogrupo dado.

Capítulo III. Este capítulo é o que contém efetivamente a nossa colaboração. Inicialmente introduzimos algumas famílias G de subpseudogrupos de um pseudogrupo. Cada família é obtida a partir de um pseudogrupo de origem M_0 e de operadores ∂_i que associam a um pseudogrupo C um subpseudogrupo $\partial_i(C)$ ("escolhendo" morfismos). Iterando tal operação a partir de M_0 e exigindo que a classe obtida seja fechada por interseção finita, obtemos G . Em seguida, considerando a família de todos os funtores $F : M \longrightarrow R$, onde $M \in G$ e R é uma categoria (conveniente) de relações, obtemos a classe $\mathcal{L}(G)$ que denominamos linguagem gerada por G . $\mathcal{L}(G)$ é, na verdade, a classe dos invariantes dos $M \in G$ (de tipo R). Os teoremas 3.19; 3.20; 3.21 e 3.22 mostram que, conforme a família G considerada, $\mathcal{L}(G)$ é equivalente (i.e., expressa as mesmas coisas) a uma das lógicas $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$, $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$, $\mathcal{L}^{<T,P>}$ ou $\mathcal{L}_I^T$. Deste modo, tais linguagens são (em cada caso) simples formalizações de $\mathcal{L}(G)$, ou seja, modos particulares de designar (de nomear) os elementos de $\mathcal{L}(G)$ (i.e., os invariantes dos $M \in G$).

As demonstrações dos teoremas 3.19-3.22 têm uma estrutura comum, a qual explicitamos na página . Damos a demonstração completa do teorema 3.19 (caso da lógica $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$). Nos demais casos as

demonstrações são feitas apenas em seus aspectos específicos.

A demonstração do teorema de representação para $L_{\omega\omega}^T(\Gamma)$ é a que apresenta maiores dificuldades e a colaboração do promissor (lógico) matemático Renato Luna Pedrosa foi, sem dúvida, relevante.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES SOBRE CATEGORIAS E FUNTORES

"Category theory starts with the observation that many properties of mathematical systems can be unified and simplified by a presentation with diagrams of arrows".

S. Mac Lane (1971)

A noção de categoria e de funtor foi introduzida por Eilenberg e Mac Lane no trabalho "General Theory of natural equivalences" em 1945 (ver [9]).

Intuitivamente podemos dizer que uma categoria é constituída por uma classe de objetos e certas "comparações" entre eles (tais comparações podendo ser compostas e satisfazendo determinadas leis).

Neste capítulo precisaremos as noções de categoria, de funtor, bem como a de outros conceitos correlatos. Além disso, daremos uma lista de exemplos, alguns deles fundamentais ao entendimento dos capítulos subsequentes.

DEFINIÇÃO 1.1. Uma categoria C é constituída por uma classe $Ob(C)$; por uma função que a cada par (A, B) de elementos de $Ob(C)$

associa uma classe $C(A, B)$ e para cada terno $A, B, C \in \text{Ob}(C)$ uma função

$$\circ : C(A, C) \times C(A, B) \longrightarrow C(A, C)$$

$$(g, f) \longrightarrow g \circ f$$

satisfazendo os seguintes axiomas:

C.1 - Para todo $A, B, C, D \in \text{Ob}(C)$ e todo $f \in C(A, B)$, $g \in C(B, C)$ e $h \in C(C, D)$ tem-se que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (associatividade).

C.2 - Para cada $A \in \text{Ob}(C)$ existe $i_A \in C(A, A)$ tal que $i_A \circ g = g$ e $f \circ i_A = f$ qualquer que seja $B, C \in \text{Ob}(C)$, $f \in C(A, B)$ e $g \in C(C, A)$.

C.3 - $C(A, B) \cap C(C, D) \neq \emptyset$ implica $A = C$ e $B = D$ quaisquer que sejam $A, B, C, D \in \text{Ob}(C)$.

Os elementos de $\text{Ob}(C)$ serão chamados objetos de C . Dados os objetos A, B e $f \in C(A, B)$, f será chamado de morfismo (ou flecha) de A em B (f é uma "comparação" de A para B). Usaremos a notação $f : A \longrightarrow B$ (ou $A \xrightarrow{f} B$) para dizer que f é um morfismo de A em B .

É fácil ver que o objeto i_A , cuja existência é assegurada por C.2 é único. Com efeito, suponhamos que exista um outro i'_A satisfazendo C.2. Vem então que $i_A = i' \circ i_A = i'_A$. A este único

elemento de $C(A,A)$ que satisfaz C.2 denominaremos identidade de A . Observe-se que os axiomas C.2 e C.3 estabelecem uma bijeção $A \in \text{Ob}(C) \longmapsto i_A \in C(A,A)$ da classe dos objetos de C na classe das correspondentes identidades. Esta bijeção possibilita-nos dar uma outra definição de categoria, livre dos objetos.

DEFINIÇÃO 1.2. Seja C uma classe munida de uma operação "o" parcialmente definida (i.e., $o : C^* \subset C \times C \longrightarrow C$). Dados $(f,g) \in C^*$ denotamos por $g \circ f$ a imagem do par (f,g) pela função o ; diremos neste caso que (a composta) $g \circ f$ está definida. Um elemento $e \in C$ é denominado uma identidade se $g \circ e = g$ e $e \circ f = f$ quaisquer que sejam f,g tais que $g \circ e$ e $e \circ f$ estejam definidos. C é uma categoria se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

C.1 - Se $(h \circ g) \circ f$ ou $h \circ (g \circ f)$ está definida, então ambas estão definidas e $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (o que nos permite escrever $h \circ g \circ f$).

C.2 - Se $g \circ h$ e $h \circ f$ estão definidas e h é uma identidade, então $g \circ f$ está definida.

C.3 - Dados $f \in C$ existem identidades $\alpha(f)$ e $\beta(f)$ tais que $f \circ \alpha(f)$ e $\beta(f) \circ f$ estão definidas (e obviamente $f \circ \alpha(f) = f = \beta(f) \circ f$).

Em seguida demonstraremos algumas propriedades elementares conseqüentes da Definição 1.2. $\mathbb{I}(C)$ designa a classes das identidades de C .

PROPRIEDADE 1.3 - As identidades $\alpha(f)$ e $\beta(f)$ cuja existência é assegurada pelo axioma $\mathcal{C}.3$ são únicas ($\alpha(f)$ é denominado domínio de f e $\beta(f)$ o domínio de f).

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $\alpha(f)'$ seja uma outra identidade satisfazendo $\mathcal{C}.3$. Logo $f \circ \alpha(f)'$ é definida e igual a f . Vem então que $f \circ \alpha(f) = (f \circ \alpha(f)') \circ \alpha(f)$ e pelo axioma $\mathcal{C}.1$, $f \circ (\alpha(f)' \circ \alpha(f))$ está definida e, portanto, $\alpha(f)' \circ \alpha(f)$ está definida. Como $\alpha(f)$ e $\alpha(f)'$ são identidades, vem que $\alpha(f) = \alpha(f)' \circ \alpha(f) = \alpha(f)'$.

PROPRIEDADE 1.4 - Sejam $f, g \in C$, $g \circ f$ está definida se, e somente se $\alpha(g) = \beta(f)$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue-se do axioma $\mathcal{C}.2$ que se $\alpha(g) = \beta(f)$ então $g \circ f$ está definida. Suponhamos que $g \circ f$ esteja definida. Vem então que $g \circ f = (g \circ \alpha(g)) \circ (\beta(f) \circ f)$ usando-se o axioma $\mathcal{C}.1$ verifica-se que $g \circ (\alpha(g) \circ \alpha(f)) \circ f$ está definida e, portanto, $\alpha(g) \circ \alpha(f)$ está definida. Como ambas são identidades, segue-se que $\alpha(g) = \beta(f)$.

PROPRIEDADE 1.5 - Seja $e \in \mathbb{I}(C)$. Tem-se então que $\alpha(e) = \beta(e)$ e, portanto, $e \circ e \in C^*$, $e = \alpha(f) = \beta(e)$ e $e \circ e = e$ (i.e., $e^2 = e$).

DEMONSTRAÇÃO. Seja $e \in \mathbb{I}(C)$, tem-se então que $\alpha(f) = e \circ \alpha(e) = \beta(e) = \beta(e)$. Pela propriedade 1.4 vem que $e \circ e \in C^*$ como $e \in \mathbb{I}(C)$, $e^2 = e \circ e = e$, pela propriedade 1.3, $e = \alpha(e) = \beta(e)$.

PROPRIEDADE 1.6 - Dados $e, e' \in \mathbb{I}(C)$, $e \circ e' \in C^*$ se, e somente se $e = e'$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $e = e'$ segue-se diretamente da propriedade 1.5 que $e \circ e' \in C^*$. Por outro lado, se $e \circ e' \in C^*$ segue-se também da propriedade 1.5 que $e' = \alpha(e') = \beta(e) = e$.

Mostra-se facilmente que as duas definições dadas de categoria são equivalentes, no seguinte sentido: Dada uma categoria C , segundo a Def. 1.1, a classe de todos os seus morfismos satisfaz os axiomas da Def. 1.2 (esquece-se os objetos). Reciprocamente, seja C uma categoria segundo a Def. 1.2, $\text{Ob}(C)$ uma classe em correspondência biunívoca com $\mathbb{I}(C)$ e disjunta de $\mathbb{I}(C)$. Designando-se por i_A a identidade correspondente ao elemento $A \in \text{Ob}(C)$ e pondo-se $C(A, B) = \{f \in C \mid i_B \circ f \circ i_A \in C^*\}$ (introduz-se os objetos). Mostra-se que os axiomas da Def. 1.1 são satisfeitos.

De agora em diante usaremos convenientemente as definições 1.1 e 1.2. A distinção no uso das mesmas ficará clara pelo contexto.

Daremos a seguir exemplos de categorias, juntamente com as respectivas denominações, segundo as quais serão referidas:

EXEMPLO. 1.7 - Categoria dos Conjuntos; Con.

$\text{Ob}(\text{Con})$ = classe de todos os conjuntos.

Dados $A, B \in \text{Ob}(\text{Con})$, $C(A, B) = \{f \mid f \text{ é uma aplicação de } A \text{ em } B\}$.

Dados $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $g \circ f$ é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.8 - Categoria dos grupos ; Gr.

$\text{Ob}(\text{Gr})$ = classe de todos os grupos.

Dados $A, B \in \text{Ob}(\text{Gr})$; $\text{Gr}(A, B) = \{f \mid f \text{ é um homomorfismo de } A \text{ em } B\}$.

Dado $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ (i.e., $f \in \text{Gr}(A, B)$ e $g \in \text{Gr}(B, C)$)
 $g \circ f$ é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.9 - Espaços vetoriais; v.

$\text{Ob}(v)$ = classe de todos os espaços vetoriais sobre os reais.

Dado $A, B \in \text{Ob}(v)$, $v(A, B) = \{f \mid f \text{ é uma aplicação linear}\}$.

Dado $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $g \circ f$ é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.10 - Espaços topológicos ; Top.

$\text{Ob}(\text{Top})$ = classe de todos os espaços topológicos.

Dado $A, B \in \text{Ob}(\text{Top})$, $\text{Top}(A, B) = \{f \mid f \text{ é uma função contínua de } A \text{ em } B\}$.

Dado $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $g \circ f$ é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.11 - Espaços topológicos; Top

$\text{Ob}(\text{Top}) =$ classe dos pares $\langle A, a \rangle$ onde $A \in \text{Ob}(\text{Top})$ e $a \in A$.

Dados $\langle A, a \rangle$ e $\langle B, b \rangle \in \text{Ob}(\text{Top})$, $f \in \text{Top}(\langle A, a \rangle, \langle B, b \rangle)$ se e só se $f \in \text{Top}(A, B)$ e $f(a) = b$.

A composição de morfismos coincide com a composição em Top .

EXEMPLO 1.12 - Categoria das variedades diferenciáveis de dimensão n e classe C^k ; Var_k^n

$\text{Ob}(\text{Var}_k^n) =$ classe das variedades diferenciáveis de dimensão n e classe C^k .

Dados $A, B \in \text{Ob}(\text{Var}_k^n)$; $\text{Var}_k^n(A, B)$ é o conjunto das aplicações $f : A \longrightarrow B$ de classe C^k .

A composição é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.13 - Categoria das variedades de Riemann; VR_k^n

$\text{Ob}(\text{VR}_k^n) =$ classe das variedades de Riemann (i.e. variedades A de dimensão n e classe C^k tais que para cada $x \in A$ corresponde um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ definido no espaço T_x tangente

a A no ponto x ; além disso a correspondência $x \longrightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ é de classe C^k).

Dados $A, B \in \text{Ob}(\text{VR}_k^n)$; $\text{VR}_k^n(A, B)$ = conjunto das isometrias $f : A \longrightarrow B$.

A composição é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.14 - Categoria das seções de um feixe de grupos (sobre B); Γ

Seja $p : E \longrightarrow B$ um feixe de grupos, i.e., E, B são espaços topológicos, p um homeomorfismo local tal que $p^{-1}(x)$ é um grupo. Além disso, a operação em $p^{-1}(x)$ é contínua relativamente à topologia induzida. Uma seção é uma função contínua $s : U \subset B \longrightarrow E$, onde U é um aberto de B , tal que $p \circ s = \text{id}_U$.

Γ é a categoria tal que:

$\text{Ob}(\Gamma)$ = conjunto das seções $l_U : U \longrightarrow E$ tais que $l_U(x) = l_x$, i.e., $l_U(x)$ é a identidade do grupo $p^{-1}(x)$.

Dados $l_U, l_{U'} \in \text{Ob}(\Gamma)$, $\Gamma(l_U, l_{U'})$ é o conjunto da seção $s : U \longrightarrow E$ se $U = U'$ e $\Gamma(l_U, l_{U'}) = \emptyset$ caso contrário.

Considere as seções $s, s' : U \longrightarrow E$ a composta $s' \circ s$ é definida por: $(s' \circ s)(x) = s'(x) \cdot s(x)$.

EXEMPLO 1.15 - Categoria dos feixes de grupos sobre B ; F_B .

$\text{Ob}(F_B)$ = classe dos feixes de grupos sobre o espaço topológico B (ver Ex. 1.14).

Dados $p : E \longrightarrow B$; $p' : E' \longrightarrow B \in \text{Ob}(F_B)$, $F_B(p, p') =$ conjunto das funções contínuas $f : E \longrightarrow E'$ tais que $p' \circ f = p$.

A composição é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO. 1.16 - Grupo como categoria: Seja $G = \langle A, \cdot \rangle$ um grupo. G define uma categoria $\tilde{G}$ do seguinte modo:

$$\text{Ob}(\tilde{G}) = \{ e \mid e \text{ é a identidade de } G \}$$

$$\tilde{G}(e, e) = A.$$

A composição é precisamente a operação $\cdot$ do grupo.

(Observe-se que pelo teorema de Cayley $\tilde{G}$ tem uma interpretação "conjuntista".

EXEMPLO 1.17 - Sistema parcialmente ordenado (s.p.o) como categoria: Seja $S = \langle A, \leq \rangle$ um s.p.o. S define uma categoria $\tilde{S}$ do seguinte modo:

$$\text{Ob}(\tilde{S}) = A$$

Dados $a, b \in A$, $\tilde{S}(a, b) = \{ a \xrightarrow{f_{ab}} b \}$ se $a \leq b$ e $\tilde{S}(a, b) = \emptyset$ caso contrário.

A transitividade de relação $\leq$ permite que se defina a composição. Da reflexividade segue-se a existência das identidades. Finalmente, como $\tilde{S}(a, b)$ tem no máximo um elemento, vem que a

composição é associativa.

EXEMPLO 1.18 - Relação de equivalência como categoria. Seja

$E = \langle A, R \rangle$ tal que R é uma relação de equivalência definida em $A \neq \emptyset$. E define uma categoria $\tilde{E}$ do seguinte modo:

$$\text{Ob}(\tilde{E}) = A$$

Dados $a, b \in A$, $\tilde{E}(a, b) = a \xrightarrow{f_{ab}} b$ se aRb e $\tilde{E}(a, b) = \emptyset$ caso contrário.

Os mesmos argumentos do Ex. 1.12 mostram como a composta é definida.

EXEMPLO 1.19 - Classe como categoria: Seja A uma classe. A define uma categoria do seguinte modo:

$$\text{Ob}(A) = A$$

Dados $a, b \in A$, $A(a, b) = \{a \xrightarrow{i_a} a\}$. Se $a \neq b$ e $A(a, b) \neq \emptyset$ caso contrário.

As categorias C tais que $C(A, A) = \{i_A\}$ e $C(A, B) = \emptyset$ se $A \neq B$ são denominadas categorias discretas. As categorias $\tilde{A}$ (Ex. 1.14) são discretas e todas as demais são representadas por categorias do tipo $\tilde{A}$.

EXEMPLO 1.20 - Categoria das estruturas de tipo τ ; M^τ .

Um tipo τ é uma sequência finita $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$ de inteiros positivos. Uma estrutura A de tipo τ é uma $(k+1)$ -upla $\langle A, \rho_1(A), \dots, \rho_k(A) \rangle$ onde $\rho_i(A)$ é uma relação t_i -ária definida em A , i.e., $\rho_i(A) : A^{t_i} \longrightarrow \{0,1\}$; $i=1, \dots, k$, 1 = verdadeiro; 0 = falso.

Dadas as estruturas A, B de tipo τ um morfismo de A em B é uma função de A em B que preserva estrutura, mais precisamente, um morfismo de A em B é uma função $f : A \longrightarrow B$ tal que: se $\rho_i(A)(a_1, \dots, a_{t_i}) = 1$ então $\rho_i(B)(f(a_1), \dots, f(a_{t_i})) = 1$; $i = 1, \dots, k$, M^τ é a categoria tal que:

$\text{Ob}(M^\tau) = \text{conjunto das estruturas de tipo } \tau$.

Dados $A, B \in \text{Ob}(M^\tau)$, $M^\tau(A, B) = \{f \mid f \text{ é um morfismo de } A \text{ em } B\}$.

A composição é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.21 - Categoria das P -estruturas de tipo τ ; $M^{<\tau, P>}$.

Neste exemplo generalizamos o Ex. 1.15 substituindo o conjunto $\{0,1\}$ por um conjunto P qualquer. No Capítulo III estaremos interessados no estudo de algumas dessas situações particulares em que o conjunto P é munido de estruturas especiais de reticulado.

Seja então P um conjunto não vazio. Uma P -estrutura de tipo τ é uma $(k+1)$ -upla $\langle A, \rho_1(A), \dots, \rho_k(A) \rangle$ onde $A \neq \emptyset$ e

$\rho_i(A) : A^{t_i} \longrightarrow P$ é uma função.

Dadas as P estruturas de tipo τ , um morfismo de A em B é uma função que preserva P -estrutura, i.e., $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo se e se f é uma função e se $\rho_i(A)(a_1, \dots, a_{t_i}) = e_j \in P$, então $\rho_i(B)(f(a_1), \dots, f(a_{t_i})) = e_j$ para todo $a_1, \dots, a_{t_i} \in A$; $i = 1, \dots, k$.

$M^{<\tau, P>}$ é a categoria tal que:

$Ob(M^{<\tau, P>}) = \text{conjunto das } P\text{-estruturas de tipo } \tau$.

Dadas $A, B \in Ob(M^{<\tau, P>})$; $M^{<\tau, P>}(A, B) = \{f \mid f \text{ é um morfismo de } A \text{ em } B\}$.

A composição de morfismos é a composição usual de aplicações.

EXEMPLO 1.22 - Categoria das estruturas de Kripke (modelo de Kripke) de tipo τ , com universo distinguido; K^τ

Uma estrutura de Kripke A é um par $(\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma^A}, R^A)$ onde $A_\alpha \in M^\tau$ e R^A é uma relação binária (relação de acessibilidade) definida em Γ^A . Vamos supor que $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$ se $\alpha R^A \alpha'$. Uma estrutura de Kripke distinguida A^{α_0} (abreviadamente uma d-estrutura) é um par (A, A_{α_0}) onde A é uma estrutura de Kripke e $\alpha_0 \in \Gamma^A$.

Dadas as d-estruturas A^{α_0} e B^{β_0} um morfismo de A^{α_0} em

B^{β_0} (em símbolos $f : A^{\alpha_0} \longrightarrow B^{\beta_0}$) é um terno $(A^{\alpha_0}, f_{<\alpha_0, \beta_0>}, B^{\beta_0})$

onde $f_{\langle \alpha_o, \beta_o \rangle} : A_{\alpha_o} \longrightarrow B_{\beta_o} \in M^T(A_{\alpha_o}, B_{\beta_o})$.

Dados $A^{\alpha_o} \xrightarrow{f} B^{\beta_o} \xrightarrow{g} C^{\gamma_o}$ a composta $g \circ f$ é definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} g \circ f &= \langle A^{\alpha_o}, f_{\langle \alpha_o, \beta_o \rangle}, B^{\beta_o} \rangle \circ \langle B^{\beta_o}, g_{\langle \beta_o, \gamma_o \rangle}, C^{\gamma_o} \rangle = \\ &= \langle A^{\alpha_o}, f_{\langle \beta_o, \gamma_o \rangle} \circ f_{\langle \alpha_o, \beta_o \rangle}, C^{\gamma_o} \rangle. \end{aligned}$$

Observe que dado $A^{\alpha_o} \in K^T$,

$$i_{\alpha_o}^A = \langle A^{\alpha_o}, i_{\alpha_o}^A, A^{\alpha_o} \rangle.$$

K^T é a categoria tal que:

$\text{Ob}(K^T)$ = classe das d-estruturas de Kripke.

Dadas $A^{\alpha_o}, B^{\beta_o} \in K^T$; $K^T(A^{\alpha_o}, B^{\beta_o}) = \{f \mid f : A^{\alpha_o} \longrightarrow B^{\beta_o} \text{ é um morfismo de d-estruturas}\}$.

Observemos que se nos exemplos 1.7; 1.8; 1.9; 1.20; 1.21 e 1.22, consideramos apenas aplicações bijetivas, teremos novos e importantes exemplos de categorias. Tais categorias serão denotadas respectivamente por: Con_{iso} , Gr_{iso} , V_{iso} , M_{iso} , $M_{\text{iso}}^{\langle T, P \rangle}$ e K_{iso}^T .

Dada uma categoria C denominamos de categoria dual de C e denotamos por C^* a categoria tal que $\text{Ob}(C^*) = \text{Ob}(C)$;

$C(A, B) = C(B, A)$ e a composição em C^* é tal que $(f, g) \longrightarrow f \circ g$ onde $f \circ g$ é a composta em C .

DEFINIÇÃO 1.23 - Seja C uma categoria e $C' \subset C$ (i.e., C' uma subclasse de C). Dizemos que C' é uma subcategoria de C se e

SC.1 - Se $f, g \in C'$ e $(f, g) \in C^*$ então $g \circ f \in C'$

SC.2 - Se $f \in C'$ então $\alpha(f), \beta(f) \in C'$.

Uma subcategoria C' de C é plena se e dados $\alpha(f), \beta(f) \in C'$ tem-se que $f \in C'$ (i.e., dados $A, B \in \text{Ob}(C')$, $C(A, B) \subset C'$).

Exemplos: Con_{iso} , Gr_{iso} , V_{iso} , M_{iso}^T , $M_{\text{iso}}^{<T, P>}$ e K_{iso}^T

são subcategorias (não plenas) de Con , Gr , V , M^T , $M^{<T, P>}$ e K^T respectivamente. Se C é uma categoria e $X \subset \text{Ob}(C)$ então $C' = \{f \mid f \in C(A, B) \text{ para } A, B \in X\}$ é uma subcategoria plena de C .

DEFINIÇÃO 1.24 - Dada uma categoria C , um morfismo f de C é inversível se existe um morfismo f' de C tal que $f' \circ f = \alpha(f)$ e $f \circ f' = \beta(f)$.

PROPRIEDADE 1.25 - Dado um morfismo f de C se existe f' tal que $f' \circ f = \alpha(f)$ e $f \circ f' = \beta(f)$, f' é único (f' será denominado inverso de f e denotado por f^{-1}).

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que f' e f'' sejam tais que $f' \circ f = f'' \circ f = \alpha(f)$ e $f \circ f' = f \circ f'' = \beta(f)$ (observem que $\alpha(f') = \alpha(f'') = \beta(f)$ e $\beta(f') = \beta(f'') = \alpha(f)$) tem-se então que:

$$\begin{aligned} f' &= f' \circ \alpha(f') = f' \circ \beta(f) = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = \\ &= \alpha(f) \circ f'' = \beta(f'') \circ f'' = f''. \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 1.26 - Uma categoria C é dita um grupóide se todos os morfismos de C são inversíveis.

PROPRIEDADE 1.27 - Seja C uma categoria na qual todo morfismo f admite um inverso à esquerda (i.e., dado f existe f' tal que $f' \circ f = \alpha(f)$). Nestas condições f' é também inverso à direita (i.e., $f \circ f' = \beta(f)$) e a categoria é um grupóide.

DEMONSTRAÇÃO. Com efeito, $f'f = \alpha(f)$ implica $\alpha(f') = \beta(f)$ e $\beta(f') = \beta(f' \circ f) = \beta(f)$. Deste modo $f \circ f'$ está definido e temos $(f \circ f')(f \circ f') = f(f' \circ f) \circ f' = f\alpha(f) \circ f' = f \circ f'$. Como todo morfismo tem inverso à esquerda existe g tal que $g(f \circ f') = \alpha(f \circ f') = \alpha(f') = \beta(f)$, porém, $g(f \circ f') = g(f \circ f')(f \circ f') = \beta(f) \circ f \circ f' = f \circ f'$ e assim $f \circ f' = \beta(f)$.

DEFINIÇÃO 1.28 - Seja C um grupóide e $C' \subset C$. C' é um subgrupóide de C se

SG.1 - C' é uma subcategoria de C .

SG.2 - Se $f \in C'$ então $f^{-1} \in C'$.

$\text{Con}_{\text{iso}}, \text{Gr}_{\text{iso}}, \text{V}_{\text{iso}}, \tilde{G}, \Gamma, M_{\text{iso}}^T, M_{\text{iso}}^{<T,P>}, K_{\text{iso}}^T$ são exemplos de grupóides. Dado uma categoria C , a subcategoria C_{inv} de C constituída por todos os morfismos inversíveis de C é um grupóide denominado grupóide dos inversíveis de C . Note que em Top os inversíveis são os homeomorfismos, i.e., as aplicações contínuas e bijetivas f cuja inversa f^{-1} é também contínua. Dado $X \subset \text{Ob}(C)$ a subcategoria plena C' de C_{inv} determinada por X (i.e., tal que $\text{Ob}(C') = X$) é um subgrupóide de C_{inv} . Se G é um grupo $\tilde{G}$ é um grupóide. Os subgrupóides de $\tilde{G}$ são as categorias $\tilde{H}$ com H subgrupo de G .

Se C é um grupóide, C^* é um grupóide.

DEFINIÇÃO 1.29 - Seja C uma categoria e $f \in C'$ dizemos que f é um monomorfismo se dados h, g tais que $g \circ f$ e $h \circ f$ estão definidos e $g \circ f = h \circ f$, então $h = g$. Dualmente f é um epimorfismo se dados g e h tais que $f \circ g = f \circ h$ estão definidos, então $g = h$.

EXEMPLO 1.30 - Todo morfismo inversível é um monomorfismo e um epimorfismo (abreviadamente é epi e mono). A recíproca não é verdadeira.

EXEMPLO 1.31 - Nas categorias dadas nos exemplos 1.7, 1.8, 1.9, 1.20, 1.21 e 1.22 (e, de modo geral, nas categorias das estruturas.

algébricas) os monomorfismos são os morfismos injetivos e os epimorfismos são os morfismos sobre . Nestes casos, os isomorfismos são os morfismos epi e mono. Na categoria Top os morfismos sobrejetivos são epimorfismos , mas nem todo epimorfismo é sobrejetivo.

OBSERVAÇÃO. Ligado ao conceito de monomorfismo está a noção de subobjeto.

Segundo Ehresmann, dado uma categoria C e $A, B \in \text{Ob}(C)$ dizemos que B é um subobjeto de A se existe um monomorfismo $f : B \longrightarrow A$. Deste modo um subobjeto é um morfismo e, portanto, um elemento de C .

Dado dois monomorfismos $f : B \longrightarrow A$ e $g : C \longrightarrow A$ dizemos que f é equivalente a g se existe um morfismo inversível $h : B \longrightarrow C$ tal que $h \circ g = f$ (em símbolos $f \sim g$). É óbvio que $\sim$ é uma relação de equivalência. Um subobjeto de A é, segundo Grothendiek, uma classe de equivalência $f/\sim$. E, portanto, $f/\sim$ pode não pertencer a C .

A definição de Ehresmann leva em consideração o modo como o subobjeto é "imerso" no objeto, i.e., dois monomorfismos f, g podem ser tais que $f, g : B \longrightarrow A$, f e g têm a mesma "imagem" e $f \neq g$ sendo, portanto, subobjetos diferentes. Exemplo:

$i : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $i(x) = x$ e $f(x) = 2x$ são ambos monomorfismos de Top e definem (segundo Ehresmann) objetos diferentes.

A relação de equivalência introduzida por Grothendieck evita tais situações e, em certo sentido, reflete a noção usual de subobjeto. Por exemplo, pode-se identificar (canonicamente) os subgrupos de um grupo G com os subobjetos de G na categoria Gr dos dois grupos. (Isto ocorre de um modo geral com as "categorias usuais").

Para os nossos propósitos não será necessário o conceito de subobjeto de um objeto de uma categoria em toda sua generalidade. Estaremos sempre restritos ao estudo de categorias mais especiais, onde tal conceito pode ser introduzido de modo bem mais natural como um objeto (uma identidade) da categoria. Nestes casos, tal definição generaliza (em certo sentido) a de Grothendieck.

Intuitivamente um funtor é uma excelente maneira de comparar categorias. Mais precisamente, um funtor F é uma função de uma categoria C em outra C' que preserva a estrutura de categoria (i.e., a composição e as identidades).

DEFINIÇÃO 1.32 - Sejam C e C' categorias, um funtor F de C em C' (em símbolos $F : C \longrightarrow C'$) é uma função de C em C' tal que $F(\mathbb{I}(C)) \subset \mathbb{I}(C')$ e $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Os funtores são também denominados funtores covariantes (um funtor contravariante é uma função $F : C \longrightarrow C'$ tal que $F(\mathbb{I}(C')) \subset \mathbb{I}(C)$ e

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Listaremos a seguir alguns exemplos de funtores, juntamente com a denominação e notação segundo a qual serão mencionados.

EXEMPLO 1.33 - Funtor inclusão : Seja C uma categoria e C' uma subcategoria de C . A aplicação inclusão $i : C' \longrightarrow C$ é um funtor (inclusão), tal funtor será denotado por $C' \longrightarrow C$.

EXEMPLO 1.34 - Funtor esquecimento : Seja C uma das seguintes categorias: $Gr, V, Top, G_{iso}, V_{iso}, Top_{iso}, M_{iso}^{<\tau, P>}, K_{iso}^{\tau}$.

Considere a aplicação $\varepsilon : C' \longrightarrow Con$ definida por $\varepsilon(f) = f$. Tal funtor é denominado funtor esquecimento. O funtor esquecimento associa a cada objeto (a cada estrutura A) seu conjunto subjacente A , e a cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ sua aplicação subjacente $A \xrightarrow{f} B$. Intuitivamente ε esquece a estrutura de A . Nos casos mencionados ε esquece totalmente a estrutura de A e há casos em que ε esquece apenas parte da estrutura. Por exemplo se $\varepsilon : V \longrightarrow Gr$ tal que $\varepsilon(A)$ é o grupo subjacente ao espaço vetorial A e $\varepsilon(f) = f$ i.e., dada a aplicação linear $A \xrightarrow{f} B$, $\varepsilon(f)$ é o homomorfismo de grupo subjacente a f .

EXEMPLO 1.35 - Funtor conjunto das partes. Seja $P : Con \longrightarrow Con$ tal que a cada $A \in Ob(Con) \longrightarrow P(A) =$ conjunto das partes de A e a cada $A \xrightarrow{f} B \in Con(A, B)$ faz corresponder a função $P(f) : P(A) \longrightarrow P(B)$ tal que $X \subset A \longrightarrow f(x) \subset B$.

EXEMPLO 1.36 - Sejam $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ categorias definidas pelos grupos G e H . Os funtores $F : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{H}$ são precisamente os homomorfismos de G em H (ou, para ser mais preciso, definidos por eles).

EXEMPLO 1.37 - Sejam A e B categorias discretas (i.e., classes) os funtores $F : A \longrightarrow B$ são precisamente as funções de A em B .

EXEMPLO 1.38 - Funtor grupo de homotopia $\Pi : \text{Top} \longrightarrow \text{Gr}$ (para maiores detalhes ver [12]). A topologia algébrica é rica em exemplos de importantes funtores.

EXEMPLO 1.39 - O funtor Hom. Seja C uma categoria e $A \in \text{Ob}(C)$. A aplicação $C(A, -)$ que a cada $B \in \text{Ob}(C)$ associa o conjunto de morfismos $C(A, B)$ e que a cada $B \xrightarrow{f} C$ $C(B, C)$ associa a aplicação $C(A, f) : C(A, B) \longrightarrow C(A, C)$ definida por $g \longmapsto f \circ g$; onde $g \in C(A, B)$ é um funtor de C em Con .

EXEMPLO 1.40 - Dados os sistemas parcialmente ordenados $\tilde{S}_1$ e $\tilde{S}_2$ (vistos como categorias) os funtores $F : \tilde{S}_1 \longrightarrow \tilde{S}_2$ são precisamente as funções monótonas, i.e., tais que se $a \leq b$ (em S_1) então $F(a) \leq F(b)$ (em S_2).

Observemos que dada uma categoria C , $i_C : C \longrightarrow C$ é um funtor. Além disso, se $C_1 \xrightarrow{F_1} C_2 \xrightarrow{F_2} C_3$ são funtores, $F_2 \circ F_1$ também o é. Deste modo, os funtores constituem uma categoria

(denotada por Cat) cujos objetos são as próprias categorias.

A noção de funtor generaliza-se, de modo útil, da seguinte maneira:

DEFINIÇÃO 1.41 - Sejam C e C' categorias. Um funtor generalizado F de C em C' (em símbolos $F : C \longrightarrow C'$) é uma função que a cada $f \in C$ associa uma classe $F(f) \subset C$ satisfazendo as seguintes condições:

FG.1 - Dados $f, g \in C$ tais que $g \circ f$ está definida, então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (onde $F(g) \circ F(f)$ designa a classe das compostas $g' \circ f'$ tais que $f' \in F(f)$ e $g' \in F(g)$)

FG.2 - Se $e \in \mathbb{I}(C)$ então $F(e) \subset \mathbb{I}(C')$.

Exemplos de funtores generalizados:

EXEMPLO 1.42 - Todo funtor $F : C \longrightarrow C'$ define um funtor generalizado $\dot{F} : C \longrightarrow C'$ do seguinte modo: $\dot{F}(f) = \{F(f)\}$.

EXEMPLO 1.43 - Se C é o grupóide dos inversíveis de uma das categorias Con , Gr , $\mathcal{V}$, $M^{<\tau, P>}$, K^τ e $F : C \longrightarrow P(C)$ a aplicação que a cada $f \in C(A, B)$ associa a classe $F(f) = \{g \in C(A', B') \text{ tais que } g \text{ é a restrição de } f \text{ a } A'\}$, então F é um funtor generalizado.

EXEMPLO 1.44 - Se C' é o grupóide dos inversíveis de uma das categorias Top , Var_r^n , VR_r^n e F associa a cada $f \in C(A, B)$ a classe $F(f) = \{g \in C(A', B') \text{ tais que } g \text{ é a restrição de } f \text{ a } A'; A' \text{ e } B' \text{ são abertos em } A \text{ e } B \text{ respectivamente}\}$, então F é um funtor generalizado.

EXEMPLO 1.45 - Se $\varepsilon: C \longrightarrow \text{Con}$ é um funtor esquecimento, então $\varepsilon^*: \text{Con} \longrightarrow C'$ tal que $\varepsilon^*(f) = \varepsilon^{-1}(\{f\})$ é um funtor generalizado.

OBSERVAÇÕES FINAIS - No exemplo 1 definimos a categoria M^T das estruturas de tipo finito $\tau = t_1, \dots, t_k$, i.e., $A = A, \rho_1(A), \dots, \rho_k(A)$ onde $A \neq \emptyset$ e $\rho_i: A^{t_i} \longrightarrow \{0, 1\}$. Deste modo, excluimos os casos em que " τ é infinito" ($\tau \in \text{IN}^I$ onde I é um conjunto qualquer) bem como os casos nos quais a estrutura de A admite, além das relações ρ_i , funções $\mu_j: A^{t_j} \longrightarrow A$. Tais restrições não são essenciais. Na realidade os resultados obtidos adiante são extensíveis a estes casos. Para tanto, contudo, é necessário considerarmos outras (famílias de) categorias que passaremos a definir.

Um tipo τ é um par $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ onde $\tau_1: I \longrightarrow \text{IN}$ e $\tau_2: J \longrightarrow \text{IN}$ são funções dos conjuntos I e J em IN respectivamente, e tais que não se tem $\tau_1 = \tau_2 = \emptyset$. Uma estrutura A de tipo τ é um terno $\langle \langle A, \{\rho_i(A)\}_{i \in \xi_1}, \{\mu_j(A)\}_{j \in \xi_2} \rangle \rangle$, tal que A é um conjunto não vazio, $\rho_i(A)$ é uma relação $\tau(i)$ -ária

definida em A (i.e., $\rho_i(A) : A^{\tau(i)} \longrightarrow \{0,1\}$) e $\mu_j(A)$ é uma função $\mu(j)$ -ária definida em A (i.e., $\mu_j(A) : A^{\mu(j)} \longrightarrow A$). Seja A uma τ -estrutura (estrutura de tipo τ), e I_1, J_1 subconjuntos finitos de I e J respectivamente. Uma $\langle I_1, J_1 \rangle$ -subestrutura parcial é um terno $\langle A_1, \{\rho_i(A')\}_{i \in I_1}, \{\mu_j(A')\}_{j \in J_1} \rangle$ tal que $\emptyset \neq A_1 \subset A$; $\rho_i(A')$ e $\mu_j(A')$ são as restrições de $\rho_i(A)$ e $\mu_j(A)$ a A_1 . Observe que, de um modo geral, $\mu_j(A')$ é parcialmente definida, i.e., $\mu_j(A') : X \subset A^{\tau_2(j)} \longrightarrow A$ onde X pode ser um subconjunto próprio de $A^{\tau_2(j)}$.

Dadas as $\langle I_1, J_1 \rangle$ -subestruturas A' de A e B' de B um morfismo de A' em B' em símbolos $f : A' \longrightarrow B'$ é uma função $f : A_1 \longrightarrow B_1$ tal que:

(i) se $\rho_i(A')(a_1, \dots, a_{t_i}) = 1$ então $\rho_i(B')(f(a_1), \dots, f(a_{t_i})) = 1$; $i \in I$ e $a_1, \dots, a_{t_i} \in A_1$.

(ii) se $\mu_j(A')(a_1, \dots, a_{t_j}) \in A$, então $\mu_j(B')(f(a_1), \dots, f(a_{t_j})) = f(\mu_j(A')(a_1, \dots, a_{t_j}))$; $j \in J_1$, e $a_1, \dots, a_{t_j} \in A_1$.

Designaremos por SP^τ a categoria tal que

$Ob(SP^\tau)$ = classe das subestruturas parciais das τ -estruturas.

Dadas as $\langle I_1, J_1 \rangle$ -subestruturas A' e B' ; $SP^\tau(A', B') =$

$\{f : A' \longrightarrow B' \mid f \text{ é um morfismo}\}.$

Se $A' \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} C'$ são morfismos de SP^τ a composta é obtida pela composição usual de funções.

SP^τ é denominada categoria das subestruturas parciais do tipo τ .

A subcategoria plena de SP^τ determinada (gerada) pela classe das (I_1, J_1) -estruturas, onde I_1 e J_1 são finitas, é denominada categoria das subestruturas parcialmente finitas e denotada por SPF^τ .

CAPÍTULO II

PSEUDOGRUPOS

"Groups, like Klein's program, have not disappeared from mathematics; nor is there any likelihood that they will in the immediate future. But with the rapid development of geometry and algebra in the twentieth century, groups took their place as but one of several unifying concepts of recent mathematics. One of these, the pseudo-group is crucial here. It occupies the same position with reference to the geometry that surpassed Klein's program that the group concept occupied with respect to that classic landmark.... . An invariant with respect to a pseudo-group is called a geometric object, and geometry is then identified with the study of pseudo-groups and their invariants".

E.T. Bell (1940).

A primeira referência à noção de pseudogrupo foi feita por Veblen e Whitehead em 1932, no livro "The foundation of Differential Geometry". A situação concreta que originou tal conceito, não se enquadra exatamente no que hoje se entende por pseudogrupo. Ela foi, no entanto, o início de um processo gradual que culminou com a definição algébrica (e abstrata) de pseudogrupo, dada por Ehresmann em 1960, no artigo "Categories Inductives et Pseudogroupes" (ver [6]). J. A. Schouten, J. Haantjes, Golab e Dubikajtis (ver [12], [11], [5]) são alguns dos nomes envolvidos com este processo.

Neste capítulo daremos duas definições de pseudogrupo, devidas a Ehresmann, listaremos alguns exemplos, demonstraremos a equivalência das duas definições e encerraremos o capítulo introduzindo a noção de pseudogrupo dos isomorfismos parciais.

DEFINIÇÃO 2.1. Um pseudogrupo é um par (C, F) onde C é grupóide e $F : C \longrightarrow C$ um funtor generalizado satisfazendo os seguintes axiomas:

Pg 1 - Dados $f \in C$ e $e \in F(\alpha(f))$ existe um único $g \in F(f)$ tal que $\alpha(g) = e$

Pg 2 - Se $g \in F(f)$, então $F(g) \subset F(f)$

Pg 3 - $F(f) = F(g)$ implica $f = g$

Pg 4 -. Dado $A \subset F(f)$, $A \neq \emptyset$, existe $g \in F(f)$ tal que $A \subset F(g)$ e se $A \subset F(h)$, então $g \in F(h)$.

Pg 5 - Existe $0 \in C$ tal que $0 \in F(f)$ qualquer que seja $f \in G$. Além disso, $\alpha(0) = 0$ e $0 \cdot 0' = 0$.

O funtor F é denominado funtor de indução e o morfismo g , cuja existência e unicidade é garantido em Pg 1, denomina-se morfismo (elemento) induzido por f em e . Ehresmann refere-se ao par $\langle C, F \rangle$ como grupóide indutivo [6]. Quando não houver margem para dúvidas designaremos o pseudogruppo $\langle C, F \rangle$ por C .

PROPRIEDADE 2.2. O morfismo g , cuja existência é garantida por Pg 4, é único. (g será denominado agregado de A e denotado por UA).

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que g e g' satisfazem Pg 4. Tem-se então que $g' \in F(g)$ e $g \in F(g')$ e por Pg 2, $F(g) = F(g')$. Segue-se de Pg 3 que $g = g'$.

PROPRIEDADE 2.3. O agregado de uma classe de unidades é uma unidade. Além disso, tem-se que $\alpha(UA) = U\alpha(A)$; $\beta(UA) = U\beta(A)$; $UF(f) = f$ (portanto $f \in F(f)$).

DEMONSTRAÇÃO. A primeira parte do enunciado é consequência imediata do axioma Pg 4 ($A \subset F(e)$ e $UA \in F(e) \subset I(C)$). Vejamos que $\alpha(UA) = U\alpha(A)$. Por um lado, tem-se $A \subset F(UA)$ e, portanto,

$\alpha(A) \subset \alpha(F(UA)) = F(\alpha(UA))$. Logo, por Pg 4, existe $\cup \alpha(A)$ e $\cup \alpha(A) \in F(\alpha(UA))$. Donde, por Pg 2, $F(\cup \alpha(A)) \subset F(\alpha(UA))$. Por outro lado, suponhamos que existe $e \in F(\alpha(UA))$ tal que $e \notin (\cup \alpha(A))$. Vem então do axioma Pg 1, que existe $h \in F(\alpha(UA))$; $h : \alpha(h) = e \longrightarrow \beta(h)$. Como $\cup \alpha(A) \in F(\alpha(f))$ temos, também por Pg 1, que existe $v : \alpha(v) = \cup \alpha(A) \longrightarrow \beta(v)$, $v \in F(f)$. Vejamos que $A \subset F(v)$. Com efeito, se $f_i \in A$, $\alpha(f_i) \in \alpha(A) \subset F(\cup \alpha(A))$, logo, existe (pelo axioma Pg 1) $f'_i : \alpha(f'_i) = \alpha(f_i) \longrightarrow \beta(f'_i)$ com $f'_i \in F(v)$. Pela unicidade (Pg 1), $f'_i = f_i$. Segue-se então que $A \subset F(v)$, $h \notin F(v)$ e $v \in F(f)$ contradizendo o axioma Pg 4, segundo o qual $F(UA) \subset F(v)$.

Observando-se que $\beta(f) = \alpha(f^{-1})$ mostra-se sem dificuldades que $\beta(UA) = \cup \beta(A)$.

Como $\cup F(f) \in F(f)$ tem-se, por Pg 2, que $F(\cup F(f)) \subset F(f)$. Por outro lado, $F(f) \subset F(f)$, logo, $F(\cup F(f)) \subset F(f)$, ou seja, (por Pg 3), $f = \cup F(f)$.

PROPRIEDADE 2.4. Seja C um grupóide e $F : C \longrightarrow C$ um functor generalizado. Tem-se que:

$$(i) F(f) \circ F(\alpha(f)) = F(f) = F(\beta(f)) \circ F(f)$$

$$(ii) F(f^{-1}) \circ F(f) = F(\alpha(f)) \quad e \quad F(f) \circ (f^{-1}) = F(\beta(f))$$

$$(iii) F(\alpha(f)) = \alpha(f(f)) \quad e \quad F(\beta(f)) = \beta(F(f))$$

$$(iv) F(f^{-1}) = (F(f))^{-1}$$

(onde $\alpha(F(f))$, $\beta(F(f))$, $F(f))^{-1}$ têm significados óbvios).

DEMONSTRAÇÃO. (i) e (ii) são consequências imediatas do fato de F ser um funtor generalizado.

Vejamos que $\alpha(F(f)) \subset \alpha(F(\alpha(f))) = F(\alpha(f))$. Com efeito, $\alpha(F(f)) = \alpha(F(f) \circ F(\alpha(f)))$. Se $g \in F(f)$, $g \in F(f) \circ F(\alpha(f))$, portanto $\alpha(g) = \alpha(g' \circ e') = \alpha(e')$ com $g' \in F(f)$ e $e' \in F(\alpha(f))$, donde, $\alpha(g) \in \alpha(F(\alpha(f)))$ e finalmente, $F(\alpha(f)) = \alpha(F(\alpha(f)))$, visto ser F um funtor generalizado. Analogamente mostra-se que $\beta(F(f)) \subset F(\beta(f))$. A fim de demonstrar a inclusão no outro sentido, observamos que $F(f^{-1}) \circ F(f) = F(\alpha(f))$, portanto, se $e \in F(\alpha(f))$ existe $g \in F(f)$ e $g' \in F(f^{-1})$ tal que $e = g'g$. Assim, $e = (e) = \alpha(g' \circ g) = \alpha(g) \in \alpha(F(f))$, ou seja, $F(\alpha(f)) \subset \alpha(F(f))$. Do mesmo modo mostra-se que $F(\beta(f)) \subset \alpha(F(f))$, o que demonstra (iii).

Mostraremos agora que vale (iv). Vejamos inicialmente que se $h \in F(f)$ e $g \in F(f^{-1})$ com $\alpha(g) = \beta(h)$ então $g = h^{-1}$. Com efeito, como $F(\alpha(f)) = F(f^{-1}) \circ F(f)$ e $F(\beta(f)) = F(f) \circ F(f^{-1})$, tem-se que $g \circ h = g \circ h = e \in F(\alpha(f))$ e $h \circ g = e' \in F(\beta(f))$, logo $\alpha(h) = \alpha(g \circ h) = \alpha(e) = e$ e $\beta(h) = \alpha(g) = \alpha(h \circ g) = \alpha(e') = e'$, portanto, $g \circ h = \alpha(h)$ e $h \circ g = \beta(h)$, i.e., $g = h^{-1}$. Seja então $h^{-1} \in (f(f))^{-1}$. Como $F(\beta(f)) = F(\alpha(f^{-1}))$, vem por Pg 1, que existe um único $g \in F(f^{-1})$ tal que $\alpha(g) = \beta(h)$ e, portanto, $h^{-1} = g \in F(f^{-1})$. Fica, portanto, demonstrado que $(F(f))^{-1} \subset F(f^{-1})$. Tomando-se agora f^{-1} em lugar de f vem

$(F(f^{-1}))^{-1} \subset F((f^{-1})^{-1}) = F(f)$, logo, $F(f^{-1}) = ((F(f^{-1}))^{-1})^{-1} \subset (F(f))^{-1}$ e, portanto, dá-se a igualdade.

DEFINIÇÃO 2.5. Dados $f, g \in C'$ ponhamos $g < f$ se e $g \in F(f)$.

PROPRIEDADE 2.6. A relação $<$ definida em C' é uma ordem parcial.

DEMONSTRAÇÃO. Como $f = UF(f) \in F(f)$ vem que $f < f$. Suponhamos que $f < g$ e $g < f$ vem que $f \in F(g)$ e $g \in F(f)$, portanto, por Pg 2 $F(f) \subset F(g)$ e $F(g) \subset F(f)$ o que acarreta por Pg que $f = g$. Finalmente, se $f < g$ e $g < h$ vem que $f \in F(g)$ e $g \in F(h)$ portanto, por Pg 2 $F(g) \subset F(h)$, logo, $f \in F(h)$, i.e., $f < h$.

Observe que o axioma Pg 4 garante que toda classe $A \subset C$ majorada tem supremo (que é $\cup A$). Deste modo, toda família $A \subset C$ tem ínfimo (interseção) que é precisamente o agregado de $\bigcap_{f \in A} F(f)$

(no caso de $A = \{f, g\}$ usaremos a notação $f \cap g$ para o ínfimo de A).

PROPRIEDADE 2.7. Dado $f \in C'$ e $e \in F(\beta(f))$ existe um único $g \in F(f)$ tal que $\beta(g) = e$.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $e \in F(\beta(f)) = F(\alpha(f^{-1}))$ existe (por Pg 1) um único $g^{-1} \in F(f^{-1})$ tal que $\alpha(g^{-1}) = e$. Como $g^{-1} \in F(f^{-1}) = (F(f))^{-1}$ se $g \in F(f)$, vem que existe um único $g \in F(f)$ tal que $\beta(g) = e$.

DEFINIÇÃO 2.8. Seja $\langle C, F \rangle$ um pseudogrupo e $\circ$ a operação (multiplicação) do grupóide C' . Estendemos a operação $\circ$ a todos os pares (g, f) de $C' \times C'$ pondo: $g \cdot f = g_o \circ f_o$ onde $f_o \in F(f)$, $g_o \in F(g)$ e $\beta(f_o) = \beta(f) \cap \alpha(g) = \alpha(g_o)$. A operação $\cdot$ assim estendida será denominada pseudomultiplicação (em C'). Usaremos a notação gf em lugar de $g \cdot f$ (em particular usaremos indistintamente as notações gf e $g \circ f$).

PROPRIEDADE 2.9. A pseudomultiplicação é associativa.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata do fato de $\circ$ ser associativa.

PROPRIEDADE 2.10. A restrição de $\cdot$ às identidades de C é comutativa (i.e., se $e, e' \in \mathbb{I}(C)$ então $ee' = e'e$).

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $e, e' \in \mathbb{I}(C)$, tem-se então que $ee' = e_o e'_o$ onde $e_o \in F(e)$, $e'_o \in F(e')$, $\alpha(e_o) = \beta(e'_o) = \alpha(e) \cap \beta(e') = e \cap e' = e' \cap e = \alpha(e') \cap \beta(e)$, portanto, $e' = e_o e'_o = e'_o e_o = e' e$.

PROPRIEDADE 2.11. $\mathbb{I}(C)$ é fechado com relação à pseudomultiplicação.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $e, e' \in \mathbb{I}(C)$ vem então que $e' = e_o e'_o$, onde $e_o \in F(e)$, $e'_o \in F(e')$ e $e_o = \alpha(e_o) = \beta(e'_o) = e'_o$, portanto, $e_o e'_o = e_o^2 = e_o \in \mathbb{I}(C)$.

PROPRIEDADE 2.12. Considere a classe $C_0 = \{f \in C' \mid f^2 = f\}$. Tem-se, então, que $C_0 = \mathbb{I}(C)$.

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio que $\mathbb{I}(C) \subset C_0$. Seja então $f \in C'_0$, i.e., $f \in C$ e $ff = f$. Multiplicando-se à esquerda e direita por f^{-1} vem $f^{-1}ff^{-1} = f^{-1}ff^{-1}$, logo, $\alpha(f)\beta(f) = f^{-1}$, portanto, $f^{-1} \in \mathbb{I}(C)$. Tem-se, então, $f^{-1}f^{-1} = f^{-1}$, donde $f = (f^{-1})^{-1} \in C_0$.

PROPRIEDADE 2.13. Dados $f, g \in C$ tem-se que $g < f$ se e existe $e \in \mathbb{I}(C)$ tal que $g = fe$.

DEMONSTRAÇÃO. $g < f$ se e $g \in F(f)$, portanto, $e = \alpha(g) \in F(\alpha(f))$. Como $fe = f_0 \circ e_0$ onde $e_0 = \beta(e) = \alpha(f) \cap \beta(e) = \alpha(f) \cap e = e = \alpha(f_0)$, vem que $g = f_0$, i.e., $fe = g \circ e = g$.

Suponhamos agora que existe $e \in \mathbb{I}(C)$ tal que $g = fe$. Vem então que $f = f_0 \circ e_0$, onde $\alpha(f_0) = \alpha(f) \cap \beta(e) = \alpha(f) \cap e = \beta(e) = e$, $f_0 \in F(f)$ e $e_0 \in F(e)$, logo, $e \in F(\alpha(f))$ e, portanto, $g = f_0 \in F(f)$.

DEFINIÇÃO 2.14. Um pseudogrupo é um par $\langle C, \cdot \rangle$ onde C é uma classe não vazia e $\cdot$ uma operação binária definida em C , satisfazendo os axiomas PG 1 - PG 5 seguintes (como anteriormente, utilizaremos a notação gf em lugar de $g \cdot f$ para $\cdot (fg)$; a operação $\cdot$ será chamada de pseudomultiplicação):

PG 1 - A operação $\cdot$ é associativa (i.e., $(hg)f = h(gf)$)
 quaisquer que sejam $h, g, f \in C$.

PG 2 - A restrição da pseudomultiplicação ao conjunto
 $C_0 = \{e \in C \mid e^2 = ee = e\}$ é comutativa (C_0 é, portanto, fechado relativamente à operação $\cdot$).

Antes de formular os demais axiomas, observemos que definindo-se em C_0 a relação binária $e < e'$, see existe $\varepsilon \in C$ tal que $e = e'\varepsilon$ tem-se:

PROPRIEDADE 2.15. A relação $<$ é uma ordem parcial (em C_0) equivalente à $e = ee'$.

DEMONSTRAÇÃO. É óbvio que se $e = ee'$ então $e < e'$. Suponhamos que $e < e'$, i.e., existe $\varepsilon \in C_0$ tal que $e = e'\varepsilon$ tem-se então $e \cdot e' = (e'\varepsilon)e' = e'(ee') = e'(e'\varepsilon) = (e')^2\varepsilon = e'\varepsilon = e$. Portanto, $e < e'$ see $e = e'e$. Segue-se trivialmente que $e < e$ qualquer que seja $e \in C_0$. (i.e., $<$ é reflexiva). Suponhamos agora que $e < e'$ e $e' < e$ vem então que $e = e'e = ee' = e'$ (ou seja, $<$ é anti-simétrica). Finalmente, se $e < e'$ e $e' < e''$ então $e = e'e$ e $e' = e''e'$, logo, $e = (e''e')e = e''(e'e) = e''$ (i.e., $<$ é transitiva).

PG 3 - Dado $f \in C$ a classe dos elementos $e \in C'_0$ tais que $fe = f$ tem um menor elemento (denotado por $\alpha(f)$). Dualmente, a classe das $e \in C'_0$ tais que $ef = e$ possui um menor elemento

(denotado por $\beta(f)$; observe que PG 3 implica que $C_0 \neq \emptyset$).

PG 4 - Dado $f \in C$ existe $f' \in C$ tal que $f'f = \alpha(f)$ e $ff' = \beta(f)$.

PG 5 - Todo $A \subset C$ tem ínfimo (em particular C tem um menor elemento que será designado por 0).

PROPRIEDADE 2.16. Se $e \in C_0$, $\alpha(e) = e = \beta(e)$.

DEMONSTRAÇÃO. $ee = e$, logo, $\alpha(e) < e$. Por outro lado, $e = e\alpha(e)$ e assim $e < \alpha(e)$, portanto, $\alpha(e) = e$. Analogamente, $\beta(e) < e$ e como $e = \beta(e)e = e\beta(e)$; $e < \beta(e)$ portanto, $e = \beta(e)$.

PROPRIEDADE 2.17. Dados $f \in C$ e $e \in C_0$ tem-se que $\alpha(fe) = e\alpha(f)$ e $\beta(ef) = e\beta(f)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\varepsilon = \alpha(f)$ e. Como $fe = f\varepsilon$ tem-se $\alpha(fe) < \varepsilon$. Por outro lado, $f\varepsilon\alpha(fe) = fe$, logo, $e\alpha(fe) = \alpha(f)\varepsilon\alpha(fe) = \alpha(f)^2\varepsilon\alpha(fe) = \alpha(f)\varepsilon\alpha(fe) = f'f\varepsilon\alpha(fe) = ff'\varepsilon = \alpha(f)\varepsilon = \alpha(f)e = \varepsilon$. Assim, $\varepsilon < \alpha(fe)$, ou seja, $\varepsilon = \alpha(fe)$. Onde se conclui $\alpha(fe) = e\alpha(f)$. De modo análogo mostra-se que $\beta(ef) = e\beta(f)$.

PROPRIEDADE 2.18. Dado $f \in C$ existe $f^{-1} \in C'$ tal que $f^{-1}f = \alpha(f)$, $ff^{-1} = \beta(f)$, $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$ e $\alpha(f) = \beta(f^{-1})$ (f^{-1} é denominado inverso de f).

DEMONSTRAÇÃO. De PG 4 vem que dado f existe f' tal que $f'f = \alpha(f)$ e $ff' = \beta(f)$. Vejamos que $\beta(f) < \alpha(f^{-1})$. Com efeito, $ff'\alpha(f') = ff'$ portanto, multiplicando-se à esquerda por $(ff')'$, tem-se $\beta(f)\alpha(f') = \alpha(ff')\alpha(f') = (ff')'(ff')\alpha(f') = (ff')'(ff') = \alpha(ff') = \beta(f)$, logo, $\beta(f) < \alpha(f')$. Ponhamos $f^{-1} = f'\beta(f)$. Vem então que $f^{-1}f = f'\beta(f)f = f'f = \alpha(f)$ e $ff^{-1} = ff'\beta(f) = \beta(f)^2 = \beta(f)$. Da propriedade anterior podemos concluir que $\alpha(f^{-1}) = \alpha(f'\beta(f)) = \beta(f)\alpha(f') = \beta(f)$. De modo análogo mostra-se que $\beta(f^{-1}) < \alpha(f)$ e pondo-se $f^{-1} = \alpha(f)f'$ verifica-se que $ff^{-1} = \beta(f)$, $f^{-1}f = \alpha(f)$ e $\alpha(f) = \beta(f^{-1})$. Finalmente, como $\beta(f) = ff' = f\alpha(f)f'$ tem-se, multiplicando-se por f' , $f'\beta(f) = \alpha(f)^2 f' = \alpha(f)f'$.

PROPRIEDADE 2.19. O inverso de $f \in C$ é único.

A demonstração é inteiramente análoga à da propriedade 1.25.

PROPRIEDADE 2.20. Dado $f \in C$, $(f^{-1})^{-1} = f$.

DEMONSTRAÇÃO. Consequência imediata da propriedade anterior.

PROPRIEDADE 2.21. Sejam $f, g \in C$ tais que $\alpha(g) = \beta(f)$. Tem-se, então, que $\alpha(gf) = \alpha(f)$ e $\beta(gf) = \beta(g)$.

DEMONSTRAÇÃO. Observemos que dado $e \in C_0$, $fe = f$ e $gfe = gf$. Por um lado, é óbvio que se $fe = f$, $gfe = gf$. Por outro lado, se

$gfe = gf$ vem que $g^{-1}gfe = g^{-1}gf$, i.e., $\alpha(g)fe = \alpha(g)f$, como $\alpha(g) = \beta(f)$ tem-se $\beta(f)fe = \beta(f)f$ e, portanto, $fe = f$. De modo análogo mostra-se que $eg = g$ se $egf = gf$. Deste modo, a classe dos $e \in C'_0$ tais que $fe = f$ é igual à classe dos $e \in C'_0$ tais que $gfe = gf$ portanto, $\alpha(gf) = \alpha(f)$. Do mesmo modo, conclui-se que $\beta(gf) = \beta(g)$.

PROPRIEDADE 2.22. Considere o par $\langle C, o \rangle$ onde o é a restrição da pseudomultiplicação $\cdot$ aos pares $g, f \in C$ tais que $\beta(f) = \alpha(g)$ (i.e., $g o f = gf$ se, e somente se $\beta(f) = \alpha(g)$, o é denominada multiplicação restrita). Nesta circunstância, se $C^* = \{(g, f) \mid \beta(f) = \alpha(g)\}$ a operação (parcialmente definida) $o : C^* \longrightarrow C$ define em C uma estrutura de grupóide.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $(h o g) o f$ está definida, i.e., que $\beta(f) = \alpha(h o g)$. Pela propriedade 2.21 vem que $\alpha(h o g) = \alpha(g)$ portanto, $g o f$ está definida. Novamente, pela propriedade 2.21 tem-se que $\alpha(h) = \beta(g) = \beta(g o f)$ e, portanto, $h o (g o f)$ está definida. Finalmente, da definição de o segue-se que $(h o g) o f = (hg)f = h(gf) = h o (g o f)$. De modo semelhante mostrou-se que se $h o (g o f)$ está definida, $(h o g) o f$ também está e que são iguais; o que demonstra $\mathcal{C} 1$.

Suponhamos agora que $g o e$ e $e o f$ estejam definidas com $e \in C_0$. Vem então que $\alpha(g) = \beta(e) = e = \alpha(e) = \beta(f)$, logo, $g o f$ está definida. Vale, portanto, $\mathcal{C} 2$.

Dado $f \in C$ a existência de $\alpha(f)$ e $\beta(f)$ tais que $f \circ \alpha(f)$ e $\beta(f) \circ f$ estão definidas é garantido por PG 3 (observe que se $g \circ \alpha(f)$ está definida, então $\alpha(f) = \beta(\alpha(f)) = \alpha(g)$ e, portanto, $g \circ \alpha(f) = g \circ \alpha(g) = g\alpha(g) = g$; o mesmo ocorrendo em relação a $\beta(f)$).

Segue-se que $\langle C, \circ \rangle$ é uma categoria. A propriedade 2.18 garante que $\langle C, \circ \rangle$ é um grupóide.

PROPRIEDADE 2.23. Dado $f \in C$ tem-se que $(fe)^{-1} = ef^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO. Observemos primeiramente que $(fef^{-1})(fef^{-1}) = fe\alpha(f)ef^{-1} = fef^{-1}$, logo, $fef^{-1} \in C_0$. Por outro lado, $(fef^{-1})fe = fef^{-1}fe = fe\alpha(f)e = fe$ e, multiplicando-se à esquerda por $(fe)^{-1}$, tem-se que $e(f f^{-1})\beta(fe) = \beta(fe)$, i.e., $\beta(fe) < fef^{-1}$. Notando-se ainda que $\beta(fe)fef^{-1} = (fe)(fe)^{-1}fef^{-1} = fe((fe)^{-1}fe)f^{-1} = fe\alpha(fe)f^{-1} = fef^{-1}$, concluímos que $fef^{-1} < \beta(fe)$ e, portanto, que $fef^{-1} = \beta(fe)$. Deste modo, tem-se que $\beta(ef^{-1}) = e\beta(f^{-1}) = e\alpha(f) = \alpha(fe)$ e $feef^{-1} = fef = \beta(fe)$. Pela propriedade 2.22 $\langle C', \circ \rangle$ é um grupóide e pela propriedade 1.27 ef^{-1} é o inverso de fe , logo, $(fe)^{-1} = ef^{-1}$.

A seguir estenderemos a ordem $<$ definida em C_0 para todo C e demonstraremos algumas outras propriedades de C .

DEFINIÇÃO 2.24. Dados $f, g \in C$ ponhamos $g < f$ se existe $e \in C_0$ tal que $g = fe$.

PROPRIEDADE 2.25. Se $\langle C, < \rangle$ é o par onde $<$ é a ordem acima de finida, tem-se que $\langle C, < \rangle$ é um sistema parcialmente ordenado e vale o seguinte:

(i) $g < f$ se e existe $e \in C_0$ tal que $g = ef$.

(ii) Se $f < g$ então $\alpha(f) < \alpha(g)$, $\beta(f) < \beta(g)$ e $f^{-1} < g^{-1}$ (portanto, $f < g$ se e $f^{-1} < g^{-1}$).

(iii) Se $A \subset C_0$ então A é majorada em C_0 se e A é majorada em C e se b é ínfimo de A em C_0 , b é ínfimo de A em C .

DEMONSTRAÇÃO. Do fato de ser $f = f\alpha(f)$ vem que $f < f$ qualquer que seja $f \in C$. Suponhamos que $f < g$ e $g < f$, assim, $f = ge$ e $g = fe'$ para $e, e' \in C_0$, logo, $f = ge = fe'e = gee'e = gee'e' = fe' = g$. Finalmente, se $f < g$ e $g < h$ tem-se $f = ge$ e $g = he'$ com $e, e' \in C_0$ portanto, $f = ge = he'e$, i.e., $f < h$. Logo, $\langle C, < \rangle$ é um sistema parcialmente ordenado.

(i) Mostraremos que $ge = \beta(g)g$ e $e'f = f\alpha(e'f)$. Com efeito, $\beta(ge)g = (ge)(ge)^{-1}g = geg^{-1}g = ge\alpha(g) = ge$. De modo análogo mostra-se que $e'f = fe(e'f)$. Segue-se que existe $e \in C_0$ tal que $f = ge$ se e existe $e' \in C_0$ tal que $f = e'f$.

(ii) se $f < g$ então existe $e \in C_0$ tal que $f = ge$, portanto, $\alpha(f) = \alpha(ge) = e\alpha(g)$. Logo, $\alpha(f) < \alpha(g)$. Como $f < g$ se e existe $e \in C_0$ tal que $f = eg$ vem, de modo análogo, que

$\beta(f) < \beta(g)$. Finalmente, se $f < g$, $f = ge$ e, portanto, $f^{-1} = (ge)^{-1} = eg^{-1}$, i.e., $f^{-1} < g^{-1}$.

(iii) É claro que se A é majorado em C_0 , A é majorado em C . Suponhamos que $f \in C$ é tal que $e < f$ qualquer que seja $e \in A \subset C_0$. Tem-se então que $e = fe'$ com $e' \in C_0$. Vem então que $e\alpha(f) = fe'\alpha(f) = fe(f)e' = fe' = e$, portanto, $\alpha(f) < e$, sendo assim, majorante de A em C_0 . A segunda parte de (iii) decorre do fato de que se $f \in C'$, $e \in C_0$ e $f < e$ então $f \in C_0$.

PROPRIEDADE 2.26. Se $A \subset C_0$ é majorado em C_0 (ou em C) então A tem supremo em C_0 (que é também supremo em C ; tal supremo será chamado agregado de A e denotado por $\cup A$).

DEMONSTRAÇÃO. Se A é majorado, então o conjunto $\{B \in C_0 \mid a < b \text{ qualquer que seja } a \in A\} \neq \emptyset$, logo, B tem ínfimo b_0 , pelo axioma PG 5 b_0 é o supremo de A .

PROPRIEDADE 2.27. Sejam $f, g \in C$ tais que $g < f$ tem-se, então, $g = f\alpha(g)$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $g < f$ então $g = fe$ para $e \in C_0$, logo, $f = f\alpha(f)e = fe'$, com $e' = \alpha(f)$. Deste modo $\alpha(g) = \alpha(fe') = e'\alpha(f) = e'$, ou seja, $g = f\alpha(g)$.

PROPRIEDADE 2.28. Dados $f \in C$ e $e < \alpha(f)$ existe um único $g < f$ tal que $\alpha(g) = e$.

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $g = fe$ é menor que f e $\alpha(g) = \alpha(fe) = e\alpha(f) = e$. Suponhamos que g' satisfaz também as condições do enunciado. Pela propriedade anterior tem-se que $g' = f\alpha(g') = fe = g$.

PROPRIEDADE 2.29. Seja $A \subset C$, $f \in C$ um majorante de A e $e = \cup \alpha(g)$, com $g \in A$. Pondo-se $f_0 = fe$ vem, então, que $\beta(f_0) = \cup \beta(g)$, com $g \in A$.

DEMONSTRAÇÃO. Notemos inicialmente que f_0 é majorante de A . Com efeito, se $g \in A$, $g = f\alpha(g)$ e $\alpha(g) < e$, logo, $g = f\alpha(g) = f\alpha(g)e = fe\alpha(g) = f_0\alpha(g)$, portanto $g < f_0$. Assim, tem-se que $g^{-1} < f_0^{-1}$ e como $\alpha(g^{-1}) = \beta(g) < e_0$ vem que $g^{-1} = f_0^{-1}\alpha(g^{-1})e_0$, ou seja, $g^{-1} < f_0^{-1}e_0$, portanto (propriedade 2.25) $\alpha(g) = \beta(g^{-1}) < \beta(f_0^{-1}e_0)$, logo, $\cup \alpha(g) = \alpha(f_0) < \beta(f_0^{-1}e_0)$. Por outro lado, $f_0^{-1}e_0 < f_0^{-1}$, donde $\beta(f_0^{-1}e_0) < \alpha(f_0)$ o que acarreta $\alpha(f_0) = \beta(f_0^{-1}e_0)$.

Assim sendo, $f_0^{-1}f_0 = \alpha(f_0) = \beta(f_0^{-1}e_0) = f_0^{-1}e_0(f_0^{-1}e_0)^{-1} = f_0^{-1}e_0f_0$. Multiplicando-se à direita por f_0^{-1} e levando-se em conta que $e_0 < \beta(f_0)$, tem-se $f_0 = f_0^{-1}e_0$, ou seja, $e_0 = \alpha(f_0^{-1}) = \beta(f_0)$.

PROPRIEDADE 2.30. Seja $A \subset C$, $f \in C$ um majorante de A e $e = \cup \alpha(g)$, com $g \in A$. Tem-se então que $f_o = fe$ é o agregado de A .

DEMONSTRAÇÃO. Na demonstração da propriedade anterior vimos que f_o é um majorante de A . Além disso, que $\beta(f_o) = \cup \beta(g)$, com $g \in A$. Suponhamos então que h seja um outro majorante de A e $h_o = he$. Assim, $\beta(h_o) = \cup \beta(g) = \beta(f_o)$. Deste modo, $h_o^{-1} \circ f_o$ está definida e como $h_o \alpha(g) = f_o \alpha(g)$, tem-se que $(h_o^{-1} \circ f_o) \alpha(g) = h_o^{-1} f_o \alpha(g) = h_o^{-1} h_o \alpha(g) = \alpha(g) h_o^{-1} h_o \alpha(g) = (h_o \alpha(g))^{-1} (f_o \alpha(g)) = \alpha(g)$ (i.e., $h_o^{-1} \circ f_o$ induz sobre cada $\alpha(g)$, $\alpha(g)$), logo, $e = \cup \alpha(g) = \cup (h_o^{-1} \circ f_o) \alpha(g)$; $g \in A$ e $\cup (h_o^{-1} \circ f_o) \alpha(g) < h_o^{-1} \circ f_o$. Como $\alpha(\cup (h_o^{-1} \circ f_o) \alpha(g)) = \alpha(e) = e$ vem que $(h_o^{-1} \circ f_o) e = e$ (i.e., $h_o^{-1} \circ f_o$ induz e em e) por outro lado, $e = \alpha(h_o^{-1} \circ f_o)$, assim, $(h_o^{-1} \circ f_o) e = h_o^{-1} \circ f_o$, por conseguinte, $h_o^{-1} \circ f_o =$ donde $f_o = h_o$ e, finalmente, $f_o < h_o$.

PROPRIEDADE 2.31. Dado $f \in C$ ponhamos $F(f) = \{g \in C \mid g < f\}$. Tem-se então que $F : C \longrightarrow P(C)$ é um funtor generalizado de C em C' .

DEMONSTRAÇÃO. Observemos que se $e \in \mathbb{I}(C)$ e $e' < e$ então $e' \in \mathbb{I}(C')$, portanto, $F(e) \subset \mathbb{I}(C)$. Sejam agora $f, g \in C$ e mostremos que $F(gf) = F(g)F(f)$. Com efeito, pondo-se $h = gf$ e supondo-se que $h' \in F(gf)$ vem que $h' = he$ para algum $e \in C_o$.

Considerando-se $f' = fe$ e $g' = g\beta(f')$ tem-se $\alpha(g') = \beta(f') \alpha(g) = \beta(f')\beta(f)$ e $g'f' = g\beta(f')f' = gfe = he$, ou seja, $h' = g'f'$ com $g' \in F(g)$ e $f' \in F(f)$. Assim, fica provado que $F(fg) \subset F(g)F(f)$. Inversamente, consideremos $g' \in F(g)$ e $f' \in F(f)$, i.e., $g' = ge_0$ e $f' = fe_1$, tais que $\alpha(g') = \beta(f')$. Como $f' < f$ existe $e'_1 \in C_0$ tal que $f' = e'_1fe$, portanto, $fe_1 = f' = e'_1f$. Assim, $g'f' = ge_0fe_1 = gfe'_1e_1$ e, portanto, $g'f' \in F(gf)$, ou seja, $F(g)F(f) \subset F(gf)$ dando-se, portanto, a igualdade.

DEFINIÇÃO 2.32. Por Pg designaremos a categoria tal que:

$Ob(Pg)$ = classe de todos os pseudogrupos segundo a definição 2.1 (i.e., pares $\langle C, F \rangle$ onde C é um grupóide e F um funtor generalizado satisfazendo $Pg\ 1 - Pg\ 5$).

Dados $A = \langle C, F \rangle$ e $B = \langle \bar{C}, \bar{F} \rangle$ pertencentes a $Ob(Pg)$, um morfismo $G : A \longrightarrow B$ é um funtor $G : C' \longrightarrow \bar{C}'$ tal que $G(F(f)) \subset \bar{F}(G(f))$ qualquer que seja $f \in C'$.

A composição de morfismo é a composição de funtores.

DEFINIÇÃO 2.33. Por PG designaremos a categoria tal que:

$Ob(PG)$ = classe de todos os pseudogrupos segundo a definição 2.14 (i.e., pares $\langle C, \cdot \rangle$ satisfazendo $PG\ 1 - PG\ 5$).

Dados $A = \langle C, \cdot \rangle$, $B = \langle \bar{C}, \bar{\cdot} \rangle$ pertencentes a $Ob(PG)$, um morfismo $G : A \longrightarrow B$ é uma função tal que $G(g \cdot f) = G(g) \bar{\cdot} G(f)$ (abreviadamente $G(gf) = G(g) G(f)$).

A composição de morfismos é a composição usual de aplicações.

PROPRIEDADE 2.34. Seja $G : \langle C, \cdot \rangle \longrightarrow \langle \bar{C}, \bar{\cdot} \rangle$ um morfismo de PG. Tem-se então que:

$$(i) \ G(f^2) = G(f)^2, \text{ portanto } G(C_0) \subset \bar{C}_0.$$

(ii) Se α e $\bar{\alpha}$ são as restrições de $\cdot$ e $\bar{\cdot}$ aos pares f, g tais que $\alpha(g) = \beta(f)$ e $\bar{\alpha}(g) = \bar{\beta}(f)$ respectivamente, então G é um funtor do grupóide $\langle C, \alpha \rangle$ no grupóide $\langle \bar{C}, \bar{\alpha} \rangle$.

(iii) G preserva a ordem, i.e., se $g < f$ em $\langle C, \cdot \rangle$ então $G(g) < G(f)$ (em $\langle \bar{C}, \bar{\cdot} \rangle$).

DEMONSTRAÇÃO. $f \in C_0$ see $ff = f$, portanto, $G(f)G(f) = G(ff) = G(f)$, logo, $G(f) \in \bar{C}_0$. Observe agora que $\langle C, \alpha \rangle$ é um grupóide (segue-se da propriedade 2.22). G é um funtor, visto que preserva o pseudoproduto $\cdot$, em particular preserva (também) α . Finalmente, suponhamos que $g < f$, logo, existe $e \in C_0$ tal que $g = fe$ assim, $G(g) = G(fe) = G(f)G(e)$. Como $G(e) \in \bar{C}_0$, $G(g) < G(f)$ (em $\langle \bar{C}_0, \bar{\cdot} \rangle$).

PROPRIEDADE 2.35. Se $G : \langle C, \cdot \rangle \longrightarrow \langle \bar{C}, \bar{\cdot} \rangle$ é um morfismo de PG, então $G : C \longrightarrow \bar{C}$ é uma aplicação tal que $G(F(f)) \subset \bar{F}(G(f))$ (onde F e $\bar{F}$ são definidos como na propriedade 2.31).

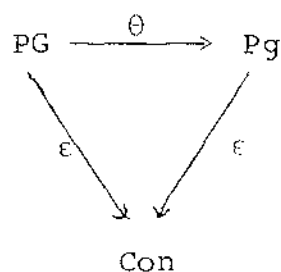
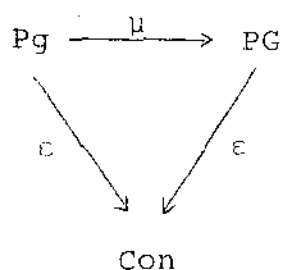
DEMONSTRAÇÃO. Com efeito, G preserva a ordem de $\langle C, \cdot \rangle$ portanto, se $g < f$ então $G(g) < G(f)$, ou seja, $f \in F(g)$ implica

$$G(f) \in \bar{F}(G(g)).$$

PROPRIEDADE 2.36. Se $G : \langle C, F \rangle \longrightarrow \langle \bar{C}, \bar{F} \rangle$ é um morfismo de Pg então, $G : C \longrightarrow \bar{C}$ é uma aplicação tal que $G(g \cdot f) = G(g) \bar{\cdot} G(f)$, onde $\cdot$ e $\bar{\cdot}$ são os pseudogrupos associados a $\langle C, F \rangle$ e $\langle \bar{C}, \bar{F} \rangle$ respectivamente (definição 2.8).

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f, g \in C'$ vem então que $g \cdot f = g_o \circ f_o$ onde $\alpha(g_o) = \beta(f_o)$, logo, $G(gf) = G(g_o \circ f_o) = G(g_o) \bar{\circ} G(f_o) = G(g_o) \bar{\cdot} G(f_o)$.

TEOREMA 2.37. Seja $\mu : Pg \longrightarrow PG$ tal que $\mu(\langle C, F \rangle) = \langle C, \cdot \rangle$ onde $\cdot$ é a pseudomultiplicação associada a $\langle C', F \rangle$, e se $G : \langle C, F \rangle \longrightarrow \langle \bar{C}, \bar{F} \rangle$ é um morfismo de Pg , $\mu(G) = G$. Se $\theta : PG \longrightarrow Pg$ é a aplicação tal que $\theta(\langle C, \cdot \rangle) = \langle C, F \rangle$, onde F é o funtor generalizado associado à ordem de $\langle C, \cdot \rangle$ (ver propriedade 2.31) e $\theta(G) = G$ para todo morfismo $G : \langle C, \cdot \rangle \longrightarrow \langle \bar{C}, \bar{\cdot} \rangle$ de PG , então μ e θ são funtores inversos um do outro que comutam os seguintes diagramas:



onde os ε são funtores esquecimento (i.e., $\varepsilon(\langle C, \cdot \rangle) = \varepsilon(\langle C, F \rangle) =$ classe (ou conjunto) subjacente a C' e $\varepsilon(G) =$ aplicação subjacente ao morfismo G).

DEMONSTRAÇÃO. Das propriedades 2.19 - 2.13 segue-se que $\mu(\langle C, F \rangle)$ é um objeto de PG e das propriedades 2.22 - 2.31, $\theta(\langle C, \cdot \rangle)$ um objeto de Pg . Além disso, das propriedades 2.34 - 2.36 vem que μ e θ são funtores.

Vejamos que $\theta \circ \mu = I_{PG}$ e $\mu \circ \theta = I_{Pg}$. Com efeito, $\mu(\langle C, F \rangle) = \langle C, \cdot \rangle$ (onde $\cdot$ é a pseudomultiplicação associada a $\langle C, F \rangle$) e $\theta(\langle C, \cdot \rangle) = \langle C', F' \rangle$ onde $F'(f) = \{g \in C \mid \text{existe } e \in C \text{ com } g = fe\}$ e C é grupóide $\langle C, \theta \rangle$ tal que θ é a restrição de $\cdot$ aos pares $(g, f) \in C^2$ com $\alpha(g) = \beta(f)$. É óbvio que $\langle C, \theta \rangle$ coincide com $\langle C, \cdot \rangle$ ($\cdot$ é a extensão da operação do grupóide C de $\langle C', F \rangle$ a $C \times C$ e θ a restrição de $\cdot$ aos pares $(gf) \in C \times C$ temos que $\alpha(g) = \beta(f)$). Por outro lado, da propriedade 2.13 vem que $g \in F(f)$ se e só se $g = fe$ para algum $e \in C_0$, portanto, $F(f) = F'(f)$ qualquer que seja $f \in C$. Assim, $\theta(\mu(\langle C, F \rangle)) = \langle C, F \rangle$. Notemos agora que $\theta(\langle C, \cdot \rangle) = \langle C, F \rangle$ onde C' em $\langle C, F \rangle$ é o grupóide $\langle C, \circ \rangle$ obtido restringindo-se a operação $\cdot$ aos pares (g, f) tais que $\alpha(g) = \beta(f)$ e $F(f) = \{g \in C \mid g = fe \text{ com } e \in C_0\}$. $\mu(\langle C, F \rangle) = \langle C, \theta \rangle$ onde θ é a pseudomultiplicação associada a $\langle C, F \rangle$. Observe-se então que $gf = g\alpha(g)\beta(f)f = (g\alpha(g)\beta(f))(\alpha(g)\beta(f)f) = (ge)(ef) = (ge) \circ (ef)$ onde $\alpha(ge) = \beta(ef) = \alpha(g)\beta(f)$ ($ge \in F(g)$

e $ef \in F(f)$, portanto, $gf = g \circ f$. Como $\theta(G) = G = \mu(G)$ (por definição), conclui-se que $\theta \circ \mu = I_{Pg}$ e $\mu \circ \theta = I_{PG}$. A comutatividade dos diagramas é óbvia.

A seguir, daremos alguns exemplos de pseudogrupos e finalizaremos o capítulo com a noção de subpseudogrupo de um pseudogrupo.

EXEMPLO 2.39. Considere o par $\langle C, F \rangle$ onde C é um dos grupóides seguintes: Con_{iso} , Gr_{iso} , V_{iso} , Top_{inv} , $(Var_n^k)_{inv}$, VR_n^k , M_{iso}^T , $M_{iso}^{<\tau, P>}$, K_{iso}^T e $F : C \longrightarrow P(C)$ dada por $g \in F(f)$ se g é a restrição de f a $\alpha(g)$ e $\alpha(g)$ é um subconjunto de $\alpha(f)$ se $C = Con_{iso}$; um subgrupo de $\alpha(f)$, se $C = Gr_{iso}$; um subespaço de $\alpha(f)$ se $C = V_{iso}$; um aberto de $\alpha(f)$ se $C = Top_{inv}$ (ou $(Var_n^k)_{inv}$ ou VR_n^k) ou uma subestrutura de $\alpha(f)$ se C é um dos grupóides M_{iso}^T , $M_{iso}^{<\tau, P>}$ ou K_{iso}^T . Nestas condições $\langle C, F \rangle$ é um pseudogrupo.

EXEMPLO 2.40. Se C é um grupóide e $F : C \longrightarrow P(C)$ é tal que $F(f) = \{f\}$, então $\langle C, F \rangle$ é um pseudogrupo. (em particular, os grupos e os grupóides discretos - as classes - são pseudogrupos).

EXEMPLO 2.41. Seja C um grupóide discreto finito (C é um conjunto finito), P uma partição em C e para cada classe $\hat{a}$, $<\hat{a}$ uma ordem linear definida em $\hat{a}$. Se $F(a) = \{b \in \hat{a} \mid b <\hat{a} a\}$ então $\langle C, F \rangle$ é um pseudogrupo.

DEFINIÇÃO 2.42. Seja C um pseudogruppo e $C' \subset C$. C' é um subpseudogruppo de C se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Se $f, g \in C'$ então $gf \in C'$

(ii) Se $f \in C'$ então $f' \in C'$

(iii) Se $\{f_i\}_{i \in I} \subset C'$, $f_i < f$ qualquer que seja $i \in I$ e $f \in C'$ então $\bigcup_{i \in I} f_i \in C'$. (subpseudogruppo fraco segundo Ehresmann).

EXEMPLO 2.43. Seja (Gr_{iso}, F) o pseudogruppo definido no exemplo 3.39 e Gab_{iso} o subgrupóide de GR constituído pelos grupos abelianos. Tem-se então que (Gab, F) é um pseudogruppo de (Gr, F) .

EXEMPLO 2.44. Se $r < k$ então $(Var_n^k)_{inv}$ e VR_n^k são subpseudogruppos de $(Var_n^r)_{inv}$ e VR_n^r respectivamente.

EXEMPLO 2.45. Todo subgrupo de um grupo é um subpseudogruppo do grupo (visto como pseudogruppo). Da mesma forma, todo subconjunto de um conjunto é um subpseudogruppo do conjunto (visto como pseudogruppo discreto).

No capítulo seguinte trataremos de algumas famílias especiais de subpseudogruppos de pseudogruppos.

Pseudogruppo dos isomorfismos locais associados a um pseudogruppo.

DEFINIÇÃO 2.46. Seja C um pseudogruppo e C^{ℓ} o conjunto dos ternos $f = \langle e, \underline{f}, e' \rangle$ onde $e, e' \in C_0$ e $\underline{f} \in C$. Dados $f = \langle e, \underline{f}, e' \rangle$ e $g = \langle e_1, \underline{g}, e'_1 \rangle$ pertencentes a C^{ℓ} , ponhamos $g \cdot f = \langle e, \underline{g}\underline{f}, e'_1 \rangle$ se $e' = e_1$ e $\langle 0, 0, 0 \rangle$ se $e' \neq e_1$.

PROPRIEDADE 2.47. $\langle C^{\ell}, \cdot \rangle$ é um pseudogruppo (denominado pseudogruppo dos isomorfismos locais associados a C).

DEMONSTRAÇÃO. A associatividade da operação $\cdot$ decorre diretamente da associatividade em C . Observemos que se $f = \langle e, \underline{f}, e' \rangle \in C^{\ell}$ então $f^2 = f$ se $\langle e, \underline{f}, e' \rangle \langle e, \underline{f}, e' \rangle = \langle e, \underline{f}, e' \rangle$, se $e' = e$ e $\langle e, \underline{f}^2, e \rangle = \langle e, \underline{f}, e \rangle$, ou seja, se $\underline{f}^2 = \underline{f}$ se $\underline{f} \in C_0$. Portanto, $C_0 = \{ \langle e, \underline{e'}, e \rangle \in C^{\ell} \mid e' \in C_0 \}$. Por outro lado, $g < f$ se $\langle e_1, \underline{g}, e'_1 \rangle = \langle e, \underline{f}, e' \rangle \langle e_0, \underline{e'_0}, e_0 \rangle$ para algum $e_0 \in C_0$, ou seja, se $e_0 = e$ e $\langle e, \underline{f}\underline{e'_0}, e' \rangle = \langle e, \underline{g}\underline{e'_1} \rangle$, ou seja, se $e = e_1$, $e' = e'_1$ e $\underline{g} = \underline{f}\underline{e'_0}$ e, finalmente, se $\underline{g} < \underline{f}$ (em C). Deste modo, dado $f = \langle e, \underline{f}, e' \rangle \in C^{\ell}$, $\alpha(f)$ existe e é igual a $\langle e, \alpha(\underline{f}), e' \rangle$. Além disso, a família $\{f_i\}_{i \in I}$ de elementos de C^{ℓ} é majorada por $f \in C$ se $\{f_i\}_{i \in I}$ é majorada por $\underline{f}$ e $\bigcup_{i \in I} f_i$ é o agregado de $\{f_i\}_{i \in I}$ se $\bigcup_{i \in I} \underline{f_i}$ é o agregado de $\{\underline{f_i}\}_{i \in I}$.

CAPÍTULO III

"If as Paul Valéry said 'Il n'y a pas de géométrie sans langage' it is no less true (as some logicians hinted) that there is no intelligible language without a geometry, an underlying dynamic whose structurally stable states are formalized by the language"

René Thom (1972)

Iniciaremos este capítulo descrevendo algumas famílias G de pseudogrupos de fundamental importância para tudo o que se segue. Posteriormente, associaremos a cada uma destas famílias G uma linguagem (functorial de primeira ordem) $\mathcal{L}(G)$ gerada por G . Como se verá mais adiante, os elementos da linguagem $\mathcal{L}(G)$ explicitam os invariantes (de certo "tipo") dos pseudogrupos da família G , sendo assim os objetos geométricos (de determinado "tipo") associados aos pseudogrupos de G . Encerraremos o capítulo com alguns teoremas de representação. Tais teoremas estabelecem uma equivalência entre as linguagens $\mathcal{L}(G)$ e algumas linguagens usuais da lógica. Daí, concluiremos, entre outras coisas, que tais linguagens não

são mais que descrições formais (formalizações) dos invariantes geométricos das respectivas geometrias subjacentes a elas e, por outro lado, que as mencionadas geometrias constituem a "realidade (geométrica)" descrita por tais linguagens.

A família G^T de subpseudogrupos de $(M_O^T)^\ell$.

DEFINIÇÃO 3.1. Seja $(M_{iso}^T)^\ell$ o pseudogrupo dos isomorfismos locais associado a M_{iso}^T . Dado $X \subset (M_{iso}^T)^\ell$ definimos o subconjunto $\partial(X)$ do seguinte modo: se $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in X$ (observe que identificamos A com i_A) então $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in \partial(X)$ se e

(i) para todo $a \in A$ existe $b \in B$ e $\langle A, \underline{f}_a, B \rangle \in X$ tal que $\alpha(\underline{f}_a) = \alpha(\underline{f}) \cup \{a\}$ e $\beta(\underline{f}_a) = \beta(\underline{f}) \cup \{b\}$ e $\underline{f}_a(a) = b$;

(ii) (dualmente) dado $b \in B$ existe $a \in A$ e $\langle A, \underline{f}_b, B \rangle \in X$ tal que $\alpha(\underline{f}_b) = \alpha(\underline{f}) \cup \{a\}$ e $\beta(\underline{f}_b) = \beta(\underline{f}) \cup \{b\}$ e $\underline{f}_b^{-1}(b) = a$.

PROPRIEDADE 3.2. Se $X \subset (M_{iso}^T)^\ell$ é um subpseudogrupo, então $\partial(X)$ é um subpseudogrupo de X (e, portanto, também de $(M_{iso}^T)^\ell$).

DEMONSTRAÇÃO. Vê-se facilmente que dado $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in (M_O^T)^\ell$ e $S \subset \alpha(\underline{f})$ tem-se que se f satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 3.1, então a restrição de f a S , i.e., $f|_S = \langle A, \underline{f}|_S, B \rangle$ também satisfaz.

Seja então $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle$, $g = \langle B, \underline{g}, C \rangle$ elementos de $\partial(X)$ e consideremos $gf = \langle A, \underline{g} \underline{f}, C \rangle$. Por definição, $\underline{g} \underline{f} = \underline{g}' \underline{f}'$ onde

$\alpha(\underline{g}') = \alpha(\underline{g}) \wedge \beta(\underline{f}) = \beta(\underline{f}')$, portanto, $\beta(\underline{g}') = f(\alpha(\underline{g}) \wedge \beta(\underline{f}))$ e $\alpha(\underline{f}') = \underline{f}^{-1}(\alpha(\underline{g}) \wedge \beta(\underline{f}))$, i.e., $\underline{g}'$ e $\underline{f}'$ são restrições de $\underline{g}$ e $\underline{f}$ respectivamente, satisfazendo deste modo as condições (i) e (ii) da definição 3.1. Assim sendo, dado $a \in A$ existe $b \in B$ e $\langle A, \underline{f}'_a, B \rangle \in X$ tal que $\alpha(\underline{f}'_a) = \alpha(\underline{f}') \cup \{a\}$, $\beta(\underline{f}'_a) = \beta(\underline{f}') \cup \{b\}$. Como $b \in B$ existe $c \in C$ e $\langle A, \underline{g}'_b, B \rangle \in X$ tal que $\alpha(\underline{g}'_a) = \alpha(\underline{g}') \cup \{b\}$ e $\beta(\underline{f}'_a) = \beta(\underline{f}') \cup \{c\}$ logo, dado $a \in A$ existe $c \in C$ e $\langle A, \underline{g}'_b \underline{f}'_a, B \rangle \in X$ (X é subpseudogruppo, portanto fechado para o (pseudo) produto) tal que $\alpha(\underline{g}'_b \underline{f}'_a) = \alpha(\underline{g}' \underline{f}') \cup \{a\}$ e $\beta(\underline{g}'_b \underline{f}'_a) = \beta(\underline{g}' \underline{f}') \cup \{c\}$. (Procede-se de modo análogo para se provar (ii)).

É imediato que se f satisfaz as propriedades (i) e (ii) f^{-1} também as satisfaz, portanto, se $f \in \partial(X)$, $f^{-1} \in \partial(X)$. Finalmente, observemos que dado $\{f_i\}_{i \in I} \subset \partial(X)$, i.e., os f_i verificam as propriedades (i) e (ii) (definição 3.1) então $\bigcup_{i \in I} f_i$ também as verifica. Consequentemente, $\bigcup_{i \in I} f_i \in X$, visto ser X subpseudogruppo, assim, pertence também a $\partial(X)$, completando a demonstração.

DEFINIÇÃO 3.3. Por G^T designamos a família de subpseudogrupos de $(M_{iso}^T)^\ell$, definida indutivamente do seguinte modo:

$$(i) \quad (M_{iso}^T)^\ell \in G^T$$

(ii) se $M \in G^T$ então $\partial(M) \in G^T$. Em vista da propriedade 3.2

e pondo-se $M_0^\tau = (M_{iso}^\tau)^\ell$; $M_n^\tau = \partial(M_{n-1}^\tau)$ tem-se o seguinte diagrama:

$$M_0^\tau \hookrightarrow M_1^\tau \hookrightarrow \dots \hookrightarrow M_n^\tau \hookrightarrow M_{n-1}^\tau \hookrightarrow \dots$$

A família $G^{<\tau, P>}$ de subpseudogrupos de $(M_{iso}^{<\tau, P>})^\ell$.

Com um procedimento inteiramente análogo ao anterior, quando se definiu G^τ , constrói-se a família $G^{<\tau, P>}$. A seguir, com a finalidade de fixar notação, indicaremos (sem detalhes) os principais pontos da referida construção.

Por $(M_{iso}^{<\tau, P>})^\ell$ designamos o pseudogrupo dos isomorfismos locais associados a $M_{iso}^{<\tau, P>}$. Se $X \subset M_{iso}^{<\tau, P>}$ então $\partial(X)$ designa o subconjunto de X definido como no caso anterior. Vale, então, a seguinte propriedade (análoga à anterior):

PROPRIEDADE 3.4. Se $X \subset (M_{iso}^{<\tau, P>})^\ell$ é um subpseudogrupo, então $\partial(X)$ é um subpseudogrupo de X (e, portanto, também de $(M_{iso}^{<\tau, P>})^\ell$).

DEFINIÇÃO 3.5. Por $G^{<\tau, P>}$ designamos a família de subpseudogrupos de $(M_0^{<\tau, P>})^\ell$ definida indutivamente por

$$(i) \quad (M_{iso}^{<\tau, P>})^\ell \in G^{<\tau, P>}$$

(ii) se $M \in G^{<\tau, P>}$, então, $\partial(M) \in G^{<\tau, P>}$. Pondo-se $M_0^{<\tau, P>} = (M_{iso}^{<\tau, P>})^\ell$; $M_n^{<\tau, P>} = \partial(M_{n-1}^{<\tau, P>})$ e levando-se em conta a

propriedade 2.3, tem-se o seguinte diagrama:

$$M_0^{<\tau, P>} \leftrightarrow M_1^{<\tau, P>} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow M_n^{<\tau, P>} \leftrightarrow M_{n+1}^{<\tau, P>} \leftrightarrow \dots$$

A família $G^\tau(\Gamma)$ de subpseudogrupos de $(M_{iso}^{<\tau, P>})^\ell$.

A fim de definirmos $G^\tau(\Gamma)$ introduziremos algumas noções necessárias.

DEFINIÇÃO 3.6. Seja $X \subset M_0^\tau$, $A \in X$, $S \subset A$ e $a \in A$. Por $\langle X, A, S \rangle(a)$ (leia-se a órbita de a em A e X relativamente (ou em torno de S) designaremos o conjunto $\{x \in A \mid \text{existe } g \in X ; g : A \longrightarrow A \text{ tal que } \alpha(g) = S \cup \{a\}, g|_S = \underline{1}_S \text{ e } g(a) = x\}$ (equivalentemente $\langle X, A, S \rangle(a) = \bigcup_{g \in X'} g(a)$ onde $X' = \{g \in X \mid g : A \longrightarrow A, \alpha(g) = S \cup \{a\}, g|_S = \underline{1}_S\}$)

DEFINIÇÃO 3.7. Um quantificador generalizado (de Mostowski) é uma aplicação ∂ que a cada conjunto $A \neq \emptyset$ associa um conjunto $\partial(A) \subset P(A)$ ($P(A)$ = conjunto das partes de A) de tal modo que se $f : A \longrightarrow B$ é uma bijeção, então $S \in \partial(A)$ se e $f(S) \in \partial(B)$ (i.e., ∂ depende apenas da cardinalidade de A).

Seja Γ uma família finita (restrição não essencial) de quantificadores generalizados. Ponhamos $\Gamma = \{\rho_0, \dots, \rho_n\}$.

DEFINIÇÃO 3.8. Dado $X \subset M_0^\tau$ e $\partial_i \in \Gamma$ designaremos por $\partial_i(X)$ o conjunto de $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle$ que verificam as seguintes condições:

(i) dado $\phi \neq Y \subset A$ e $a \in Y$ existe $f_a = \langle A, \underline{f}_a, B \rangle \in X$ tal que $\underline{f}_a|_{\alpha(\underline{f})} = \underline{f}$, $\alpha(\underline{f}_a) = \alpha(\underline{f}) \cup \{a\}$ e se $\bigcup_{a \in Y} \langle X, A, \alpha(\underline{f}) \rangle (a) \in \partial_i(A)$ então, $\bigcup_{a \in Y} \langle X, B, \beta(\underline{f}) \rangle (\underline{f}_a(a)) \in \partial_i(B)$.

(ii) dado $\phi \neq Y \subset B$ e $b \in Y$ existe $f_b = \langle A, \underline{f}_b, B \rangle \in X$ tal que $\underline{f}_b^{-1}|_{\beta(\underline{f})} = \underline{f}^{-1}$, e $\beta(\underline{f}_b) = \beta(\underline{f}) \cup \{b\}$ e se $\bigcup_{b \in Y} \langle X, B, \beta(\underline{f}) \rangle (b) \in \partial_i(B)$ então $\bigcup_{b \in Y} \langle X, A, \alpha(\underline{f}) \rangle (\underline{f}_b^{-1}(b)) \in \partial_i(A)$.

Como nos casos anteriores, vale o seguinte:

PROPRIEDADE 3.9. Se $X \subset M_O^\tau$ é um subpseudogruppo, então $\partial_i(X)$ é um pseudogruppo de X (e, portanto, também de M_O^τ); $i = 1, \dots, n$.

DEMONSTRAÇÃO. Mostremos primeiramente que dado $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in \partial_i(X)$ e $S \subset \alpha(\underline{f})$ tem-se que $f|_S = \langle A, \underline{f}|_S, B \rangle \in \partial_i(X)$. Observe-mos que dado $Y \subset A$ vem que

$$\bigcup_{y \in Y} \langle X, A, S \rangle (y) = \left(\bigcup_{y \in Y} \langle X, A, S \rangle (y) \right) \cup \left(\langle X, A, S \rangle (y) \cap \alpha(\underline{f}) = \phi \right)$$

$$\cup \left(\bigcup_{y \in Y} \langle X, A, S \rangle (y) - (\langle X, A, S \rangle (y) \cup \alpha(\underline{f})) \right) \cup \left(\bigcup_{y \in Y} \langle X, A, S \rangle (y) \cap \alpha(\underline{f}) \right)$$

$$\langle X, A, S \rangle (y) \cap \alpha(\underline{f}) = \phi \quad y' \in \langle X, A, S \rangle (y) \cap \alpha(\underline{f}) \neq \phi$$

$$= \left(\bigcup_{\substack{y \in Y \\ \langle X, A, S \rangle (y) \cap \alpha(\underline{f}) = \phi}} \langle X, A, \alpha(\underline{f}) \rangle (y) \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{y' \in \langle X, A, S \rangle (y) - \alpha(\underline{f}) \\ \langle X, A, S \rangle (y) \cap \alpha(\underline{f}) \neq \phi}} \langle X, A, \alpha(\underline{f}) \rangle (y') \right) \cup$$

$$\bigcup_{y \in Y} \left(\bigcup_{y' \in \langle X, A, S \rangle (y) \cap \alpha(\underline{f}) \neq \phi} \langle X, A, \alpha(\underline{f}) \rangle (y') \right).$$

Desse modo, o conjunto das uniões

$\bigcup_{y \in Y} \langle X, A, S \rangle (y)$ com $y \in P(A)$ é um subconjunto das uniões

$\bigcup_{y' \in Y'} \langle X, A, S \rangle (y')$, com $Y' \in P(A)$. Assim, se existe $Y \subset A$ e

$a \in Y$ tal que para todo $f_a = \langle A, \underline{f}_a, B \rangle$ com $\alpha(\underline{f}_a) = \alpha(\underline{f}|_S) \cup \{a\}$ e $\underline{f}_a|_S = \underline{f}|_S$ tem-se que $\bigcup_{a \in Y} \langle X, A, S \rangle (a) \in \partial_i(A)$ e

$\bigcup_{a \in Y} \langle X, B, \beta(\underline{f}|_S) \rangle (\underline{f}_a|_S(a)) \notin \partial_i(B)$ então existe um $Y' \subset A$ e

$a \in Y'$ tal que $\bigcup_{a \in Y'} \langle X, A, \alpha(\underline{f}) \rangle (a) \in \partial_i(A)$ e

$\bigcup_{y' \in Y} \langle X, B, \beta(\underline{f}) \rangle (\underline{f}_a(a)) \notin \partial_i(B)$ qualquer que seja $f_a = \langle A, \underline{f}_a, B \rangle$

tal que $\alpha(\underline{f}_a) = \alpha(\underline{f}) \cup \{a\}$ e $\underline{f}_a|_{\alpha(\underline{f})} = \underline{f}$ (observe que toda função cuja restrição a $\alpha(\underline{f})$ é a identidade restrita a $S \subset \alpha(\underline{f})$ é também a identidade). Fica, portanto, provado que se a condição (i) da definição 3.10 não se verifica para $\underline{f}|_S$ então não se verifica também para $\underline{f}$. Analogamente se mostra que se $\underline{f}|_S$ não verifica a condição (ii), então $\underline{f}$ também não a verifica, ou seja, se $\underline{f}|_S \notin \partial_i(X)$ então $\underline{f} \notin \partial_i(X)$.

A fim de mostrar que se $f, g \in \partial_i(X)$, $gf \in \partial_i(X)$, consideremos $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle$, $g = \langle B, \underline{g}, C \rangle$ vem então que $gf = \langle A, \underline{g}\underline{f}, C \rangle$ onde $\underline{g}\underline{f} = \underline{g}' \circ \underline{f}'$ com $\alpha(\underline{g}') = \beta(\underline{f}') = \beta(g) \wedge \alpha(f)$. Como g' e f' são restrições de g e f respectivamente g' e $f' \in \partial_i(X)$. Assim, dados $Y \subset A$, $a \in Y$ existe $\underline{f}'_a$ tal que $\alpha(\underline{f}'_a) = \alpha(f') \cup \{a\}$, $\underline{f}'_a|_{\alpha(f')} = \underline{f}'$ satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição 3.10. Considerando-se $Y' = \{\underline{f}'_a(a) \in B \mid a \in Y\} = \{b_a \in B \mid \underline{f}'_a(a) = b_a\}$ vem que existe $\underline{g}'_{b_a}$ satisfazendo (i) e (ii) da

definição 3.10. Assim sendo, $\underline{h}_a = \underline{g}'_{b_a} \circ \underline{f}'_a$ é tal que $\alpha(\underline{h}_a) = \alpha(\underline{f}') \cup \{a\}$, $\underline{h}_a|_{\alpha(\underline{f}')} = \underline{g}' \circ \underline{f}'$ e a condição (i) e (ii) da definição 3.10 é satisfeita. Portanto, $gf \in \partial_i(X)$.

Finalmente, decorre do fato de $\partial_i(X)$ ser fechado por restrição que o agregado de uma família $\{f_i\}_{i \in \bar{\lambda}}$ majorada em $\partial_i(X)$ pertence a $\partial_i(X)$; o que completa a demonstração da propriedade.

DEFINIÇÃO 3.10. Por $G^\tau(\Gamma)$ designaremos a família de subpseudogrupos do pseudogrupo $\bar{M}_0^\tau$ definida indutivamente por

$$(i) \quad G^\tau(\Gamma)_0 = \{M_0^\tau\}$$

(ii) $G^\tau(\Gamma)_{n+1} = \{\partial_i(M) \mid M \in G^\tau(\Gamma)_n \text{ e } i=1, \dots, m\}$, se $n+1$ é ímpar.

(iii) $G^\tau(\Gamma)_{n+1} = \{M \cap M' \mid M, M' \in G^\tau(\Gamma)_n\}$, se $n+1$ é par

$$G^\tau(\Gamma) = \bigcup_n G^\tau(\Gamma)_n.$$

O grau de quantificação de $M \in G^\tau(\Gamma)$ é o menor n para o qual $M \in G^\tau(\Gamma)_n$; em símbolos $\#(M) = \min\{n \mid M \in G^\tau(\Gamma)_n\}$.

A família K^τ de subpseudogrupos de $(K_{iso}^\tau)^\ell$.

DEFINIÇÃO 3.11. Seja $(K_{iso}^\tau)^\ell = K_o^\tau$ o pseudogrupo dos isomorfismos locais associado a K_{iso}^τ . Observemos que dado $f \in K_o^\tau$ $f =$

$$\langle A^{\alpha_o}, \underline{f}, B^{\beta_o} \rangle \text{ onde } A^{\alpha_o} = \langle A, A_{\alpha_o} \rangle, B^{\beta_o} = \langle B, B_{\beta_o} \rangle; \underline{f} \in K_{iso}^\tau,$$

$\alpha(\underline{f}) \subset A_{\alpha_0}$ e $\beta(\underline{f}) \subset B_{\beta_0}$ (veja exemplo 1.22).

Dado $X \subset K_0^T$, designamos por $\partial_1(X)$ o conjunto constituído pelos $f = \langle A^{\alpha_0}, \underline{f}, B^{\beta_0} \rangle \in X$ que satisfazem as seguintes condições:

(i) Dado $a \in A_{\alpha_0}$ existe $b \in B_{\beta_0}$ e $f_a = \langle A^{\alpha_0}, \underline{f}_a, B^{\beta_0} \rangle \in X$ tal que $\alpha(\underline{f}_a) = \alpha(\underline{f}) \cup \{a\}$, $\underline{f}_a|_{\alpha(\underline{f})} = \underline{f}$ e $\underline{f}_a(a) = b$;

(ii) Dado $b \in B_{\beta_0}$ existe $a \in A_{\alpha_0}$ e $f_b = \langle A^{\alpha_0}, \underline{f}_b, B^{\beta_0} \rangle \in X$ tal que $\beta(\underline{f}_b) = \beta(\underline{f}) \cup \{b\}$, $\underline{f}_b|_{\alpha(\underline{f})} = \underline{f}$ e $\underline{f}_b^{-1}(b) = a$;

Por $\partial_2(X)$ designaremos o subconjunto de X constituído pelos $f = \langle A^{\alpha_0}, \underline{f}, B^{\beta_0} \rangle \in X$ que satisfazem as seguintes condições:

(iii) Dado $\alpha \in \Gamma^A$, $\alpha_0 R^A \alpha$ existe $\beta \in \Gamma^B$ e $f_\alpha = \langle A^\alpha, \underline{f}_\alpha, B^\beta \rangle \in X$ tal que $\underline{f}_\alpha = \underline{f}$;

(iv) Dado $\beta \in \Gamma^B$, $\beta_0 R^B \beta$ existe $\alpha \in \Gamma^A$ e $f_\beta = \langle A^\alpha, \underline{f}_\beta, B^\beta \rangle \in X$ tal que $\underline{f}_\beta = \underline{f}$.

PROPRIEDADE 3.12. Se $X \subset K_0^T$ é um subpseudogruppo, então $\partial_i(X)$; $i = 1, 2$ é um subpseudogruppo de X (e, portanto, de K_0^T).

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração no caso de ser $i = 1$ é inteiramente análoga à da propriedade 3.2. O caso em que $i = 2$ segue-se sem dificuldade com argumentos análogos.

DEFINIÇÃO 3.13. Por K^τ designaremos a família de subpseudogrupos de $(K_{iso}^\tau)^\ell$ definida indutivamente do seguinte modo:

- (i) $(K^\tau)_0 = \{K_0^\tau\}$,
- (ii) $(K^\tau)_{n+1} = \{\partial_i(K) \mid K \in (K^\tau)_n ; i = 1, 2\}$ se $n+1$ é ímpar,
- (iii) $(K^\tau)_{n+1} = \{K_1 \cap K_2, K_1, K_2 \in (K^\tau)_n\}$ se $n+1$ é par,
- (iv) $K^\tau = \bigcup_n (K^\tau)_n$.

Pomos ainda $\#(K) = \min\{n \mid K \in (K^\tau)_n\}$.

Teoremas de representação. No que segue, estabeleceremos alguns teoremas que mostram como as fórmulas de certas linguagens (usuais) da lógica podem ser representadas por funtores. As demonstrações seguem um mesmo esquema geral (explicitado adiante). Faremos a demonstração completa no caso da linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}_{\omega\omega}^\tau$. Nos demais casos daremos os detalhes das demonstrações apenas das etapas específicas de cada um deles.

DEFINIÇÃO 3.14. Designaremos por $\mathcal{L}(G^\tau)$ a classe de todos os funtores $F : M_O^\tau \longrightarrow R = \bigcup_n M_O^{<n>}$ ($M_O^{<n>} = M_O^\tau$ para $\tau = <n>$) verificando as seguintes condições:

(i) $F(M_O^\tau) \subset M_O^{<n>}$ para algum $n \in \mathbb{N}$

(ii) F comuta o seguinte diagrama;

$$\begin{array}{ccc} M_O^\tau & \xrightarrow{F} & R \\ & \searrow \epsilon & \swarrow \epsilon \\ & (Con_{iso})^\ell & \end{array}$$

(os ϵ são funtores esquecimento).

DEFINIÇÃO 3.16. Por $\mathcal{L}(G^{<\tau, P>})$ designamos a classe de todos os funtores $F : M_O^{<\tau, P>} \longrightarrow R^P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_O^{<<n>, P>}$ (onde $M_O^{<<n>, P>} = M_O^{<\tau, P>}$ para $\tau = <n>$) que verificam as seguintes condições:

(i) $F(M_O^{<\tau, P>}) \subset M_O^{<<n>, P>}$ para algum $n \in \mathbb{N}$

(ii) F comuta o seguinte diagrama;

$$\begin{array}{ccc} M_O^{<\tau, P>} & \xrightarrow{F} & R^P \\ & \searrow \epsilon & \swarrow \epsilon \\ & (Con_{iso})^\ell & \end{array}$$

DEFINIÇÃO 3.17. Por $\mathcal{L}(G^\tau(\Gamma))$ designamos a classe de todos os funtores $F : M \longrightarrow R$; com $M \in G^\tau(\Gamma)$, que satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) $F(M) \subset M_O^{<n>}$ para algum $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) F comuta o seguinte diagrama;

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\quad} & R \\
 \searrow \epsilon & & \swarrow \epsilon \\
 & (\text{Con}_{\text{iso}})^{\ell} &
 \end{array}$$

DEFINIÇÃO 3.18. Por $\ell(K^{\tau})$ designamos a classe dos funtores $F : K \longrightarrow R_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_O^{<n>}$ (onde $K \in K^{\tau}$ e $K_O^{<n>} = K_O^{\tau}$ para $\tau = <n>$) verificando as seguintes condições:

- (i) $F(K) \subset K_O^{<n>}$ para algum $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) F comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{F} & R_m \\
 \searrow \epsilon & & \swarrow \epsilon \\
 & (\text{Con}_{\text{iso}}^m)^{\ell} &
 \end{array}$$

$\text{Con}_{\text{iso}}^m$ é a categoria (grupóide) cujos objetos são pares

$\langle \langle \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}, R \rangle, A_{\alpha_0} \rangle$ onde A_{α} são conjuntos não vazios, R uma relação binária definida em Γ tal que $A_{\alpha} \subset A_{\alpha'}$ e $\alpha R \alpha'$ e $\alpha_0 \in \Gamma$. Se $A = \langle \langle \{A_{\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}, R \rangle, A_{\alpha_0} \rangle$ e $B = \langle \langle \{B_{\beta}\}_{\beta \in \Gamma'}, R' \rangle, B_{\beta_0} \rangle$

são objetos de $\text{Con}_{\text{iso}}^{\mathbb{M}}$, um morfismo $A \xrightarrow{f} B$ é uma bijeção $f : A_{\alpha_0} \longrightarrow B_{\beta_0}$. Os ε são funtores esquecimento.

Os teoremas que se seguem mostram como as fórmulas de certas linguagens $\mathcal{L}$ que ocorrem na lógica podem ser representadas por funtores de $\mathcal{L}(G)$, onde G é uma das famílias de pseudogrupos definidas anteriormente. Mais precisamente, mostraremos que os seguintes pares de linguagens são equivalentes: $\mathcal{L}(G^T)$ e $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$; $\mathcal{L}^{<T,P>}$ e $\mathcal{L}(G^{<T,P>})$ onde P é uma álgebra de Post finita; $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$ e $G^T(\Gamma)$ onde Γ é uma família (finita) de quantificadores generalizados e, finalmente, $\mathcal{L}_m^T$ e K^T onde $\mathcal{L}_m^T$ é a lógica (de primeira ordem) modal. A demonstração desses teoremas seguem o seguinte esquema geral:

I - Mostra-se que a cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ (e certo $n \in \mathbb{N}$) pode-se associar (de modo natural) um funtor $F_\varphi \in \mathcal{L}(G)$. A demonstração desta parte é feita por indução, sem muita dificuldade.

II - Nesta parte mostra-se que (reciprocamente) dado um funtor $F \in \mathcal{L}(G)$ existe uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ tal que $F = F_\varphi$. Esta parte requer um cuidado maior e sua demonstração é feita através das seguintes etapas:

1^a ETAPA. Considera-se a classe S de todos os pares $(A, \overset{r}{a})$ onde $A \in \text{Ob}(G_i)$ (lembramos que $\text{Ob}(G_i) = \text{Ob}(G_j)$; $i, j \in I$) e $\overset{r}{a} = (a_1, \dots, a_r) \in A^n$ (no caso $G = K^T$, $\overset{r}{a}$ além dos a_i contém

um índice α). Para cada G_i define-se a relação $\equiv_i$ em S do seguinte modo: $\langle A, \overset{r}{a} \rangle \equiv_i \langle B, \overset{r}{b} \rangle$ see $\underline{f} = \{ \langle a_i, b_i \rangle, i=1, \dots, x \}$ é tal que $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in G_i$. Mostra-se que $\equiv_i$ é uma equivalência em S e que $S/\equiv_i$ é finito.

2ª ETAPA. Para cada classe $w = \langle A, \overset{r}{a} \rangle \in S/\equiv_i$ constrói-se uma fórmula $\varphi_{\overset{r}{a}}^i \in \mathcal{L}$ tal que $\langle B, \overset{r}{b} \rangle \in \langle A, \overset{r}{a} \rangle$ see $\varphi_{\overset{r}{a}}^i(B)(\overset{r}{b}) = 1$ (i.e., $B \models \varphi_{\overset{r}{a}}^i(\overset{r}{b})$).

3ª ETAPA. Nesta etapa mostra-se que dado um funtor F que comuta o diagrama (correspondente) da definição de G , a função $\hat{F}$ definida por $\hat{F}(\langle A, \overset{r}{a} \rangle) = F(A)(\overset{r}{a})$ comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\dot{F}} & \{0,1\} \quad (\text{ou } P \text{ no caso de } G = G^{<\tau, P>}) \\
 \pi \downarrow & \nearrow \hat{F} & \\
 S/\equiv_i & &
 \end{array}$$

onde π é a projeção canônica. Assim sendo, $\hat{F}^{-1}(1) \in S/\equiv_i$ é finito, portanto $\hat{F}^{-1}(1) = \{w_1, \dots, w_s\}$. Para cada w_i existe um $\varphi_i \in \mathcal{L}$ construído na 2ª etapa. Através de $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ constrói-se (em cada caso) φ tal que $F = F_\varphi$. O que conclui o teorema.

III - Tendo-se demonstrado que a cada $\varphi \in \mathcal{L}$ associa-se

$F_\varphi \in \mathcal{L}(G)$ e, reciprocamente, que dado $F \in \mathcal{L}(G)$ constrói-se $\varphi = \psi_F \in \mathcal{L}$ tal que $F = F_\varphi$. Mostra-se então, que tais associações verificam as condições seguintes:

(i) se $F \longrightarrow \psi_F = \varphi \longrightarrow F_\varphi$ então $F = F_\varphi$

(ii) se $\varphi \longrightarrow F_\varphi \longrightarrow \psi_{F_\varphi}$ então φ e ψ_{F_φ} são (semanticamente) equivalentes. Deste modo, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}(G)$ são expressivamente equivalentes (equivalentes na acepção de Lindstron).

Teoremas de representação para $\mathcal{L}_{\omega\omega}^\tau$ - Por $\mathcal{L}_{\omega\omega}^\tau$ denotamos a linguagem de primeira ordem gerada a partir dos seguintes conjuntos de símbolos (alfabeto de $\mathcal{L}_{\omega\omega}^\tau$):

Símbolos lógicos. $\wedge, \neg, \exists$

Símbolos relacionais. $\rho_1, \dots, \rho_k$ (onde ρ_i tem aridade t_i ; $i = 1, \dots, k$)

Variáveis. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Símbolos auxiliares. $(,)$

As noções elementares relativas à sintaxe e à semântica de $\mathcal{L}_{\omega\omega}^\tau$ (como: fórmula, interpretação, etc..) são as usuais (se φ é uma fórmula $\nu\ell(\varphi)$ designa o conjunto das variáveis livres de φ). As fórmulas são, portanto, interpretadas nos objetos de M_O^τ e

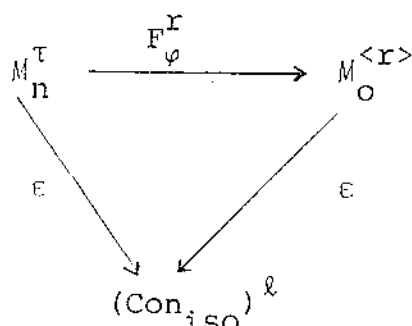
usaremos a notação $\varphi(A)(\bar{a})^r$ para o valor (de verdade) da fórmula φ interpretada em A na r -upla $\bar{a}$, assim $\varphi(A)(\bar{a})^r = 1$, ($= 0$) significa na notação tradicional que $A \models \varphi(\bar{a})$, ($A \not\models \varphi(\bar{a})$).

Se $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ (i.e., φ é uma fórmula de $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$) definimos o grau de quantificação de φ (em símbolos $gr(\varphi)$) do seguinte modo:

- (i) $gr(\varphi) = 0$ se φ é atômica
- (ii) $gr(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \max\{gr(\varphi_1), gr(\varphi_2)\}$
- (iii) $gr(\neg\varphi) = gr(\varphi)$
- (iv) $gr(\exists x \varphi) = gr(\varphi) + 1$

TEOREMA 3.19. $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ e $\mathcal{L}(G)$ são equivalentes (em símbolos $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T \sim \mathcal{L}(G)$).

DEMONSTRAÇÃO. (Parte I). Seja $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ tal que $gr(\varphi) = n$, $r \geq \max(\{1\} \cup \{i \mid x_i \in v\ell(\varphi)\})$ e $F_\varphi^r : M_n^T \longrightarrow M_O^{<r>}$ a função definida por: $F_\varphi^r(A) = \langle A, \varphi(A) \rangle$ e se $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in M_n^T$, $F_\varphi^r(f) = \langle F(A), \underline{f}', F_\varphi(B) \rangle$ (onde $\varepsilon(\underline{f}) = \varepsilon(\underline{f}')$, i.e., $\underline{f}$ e $\underline{f}'$ são as mesmas aplicações na categoria dos conjuntos, usaremos a mesma notação $\underline{f}$ para ambas; $\underline{f}$ e $\underline{f}'$). Nestas condições F_φ^r é um functor que comuta o seguinte diagrama:



(ou seja $F_\varphi^r \in \mathcal{L}(G^\tau)$).

DEMONSTRAÇÃO DA PARTE I. A demonstração será feita por indução sobre a complexidade das fórmulas.

Suponhamos φ atômica e seja $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle$ com $\underline{f} : \alpha(\underline{f}) \subset A \longrightarrow \beta(\underline{f}) \subset B$. Se $\bar{a} \in (\alpha(\underline{f}))^r$ então $\varphi(A)(\bar{a}) = \rho_i(A)(\bar{a})$ para algum $i=1, \dots, k$. Vem então, da definição de f que $\rho_i(A)(\bar{a}) = \rho_i(B)(\underline{f}(\bar{a}))$.

Se φ é da forma $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ ou $\neg \varphi$, a demonstração decorre diretamente da hipótese de indução.

Suponhamos φ da forma $\exists x \psi(x)$ (por meio de uma reenumeração das variáveis ligadas de φ podemos sempre ter $x = x_{r+1}$). Vem então que $\varphi(A)(\bar{a}) = 1$ se e existe $a \in A$ tal que $\psi(A)(\bar{a} a) = 1$. Como $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in M_n^\tau$, existe $b \in B$ e $\underline{f}_a$ extensão de $\underline{f}$ a $\alpha(\underline{f}) \cup \{a\}$ tal que $\langle A, \underline{f}_a, B \rangle \in M_{n-1}^\tau$ e $\underline{f}_a(a) = b$, portanto, pela hipótese de indução $\psi(B)(\underline{f}_a(\bar{a} a)) = \psi(B)(\underline{f}(\bar{a})(b)) = 1$, ou seja, $(\exists x_{r+1} \psi(x_{r+1}))(B)(\underline{f}(\bar{a})) = 1$. De maneira análoga mostra-se que se $\varphi(A)(\bar{a}) = 0$, então $\varphi(B)(\underline{f}(\bar{a})) = 0$.

Mostramos que se $f \in M_n^\tau$, então $F_\varphi^n(f) \in M_0^{<r>}$. Notemos ainda que $F_\varphi^r(gf) = F_\varphi^r(\langle A, \underline{g}, \underline{f}, B \rangle) = F_\varphi^r(\langle B, \underline{g}, C \rangle) \circ F_\varphi^r(\langle A, \underline{f}, B \rangle) = F_\varphi^r(g) \circ F_\varphi^r(f)$ e, portanto, F_φ^r é um funtor (mais precisamente um morfismo de pseudogrupos). O que encerra a demonstração da parte I.

DEMONSTRAÇÃO DA PARTE II.

1ª ETAPA. Seja $S(r)$ a classe de todos os pares $\langle A, \underline{a}^r \rangle$ onde $A \in \text{Ob}(M_0^\tau)$ e $\underline{a}^r \in A^r$. Ponhamos $\langle A, \underline{a}^r \rangle \equiv_n \langle B, \underline{b}^r \rangle$ se $\underline{f} = \{ \langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r \}$ é tal que $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in M_n^\tau$.

Nestas circunstâncias $\equiv_n$ é uma relação de equivalência e $S(r)/\equiv_n$ é finito (qualquer que seja r e n).

DEMONSTRAÇÃO DA 1ª ETAPA. A relação $\equiv_n$ é obviamente uma equivalência. Vejamos $S(r)/\equiv_n$ é finito. A demonstração é feita por indução sobre n .

Se $n = 0$ o número de classes em $S(r)/\equiv_n$ é menor ou igual ao número de estruturas, de tipo τ , que se pode definir num subconjunto $X \subset \{1, \dots, n\}$, portanto, menor ou igual ao cardinal do conjunto $\prod_{i=1}^k P(X^{\tau_i})$ que é finito.

Suponhamos nossa afirmação válida para $S(s)/\equiv_{n-1}$ qualquer que seja s . Pondo-se $\langle A, \underline{a}^r \rangle^{n-1} = \{ W \in S(r+1)/\equiv_{n-1} \mid \langle A, \underline{a}^r, a \rangle \in W$

para algum $a \in A$ tem-se, então, que $\langle A, a^r \rangle \equiv_n \langle B, b^r \rangle$ see
 $\langle A, a^r \rangle^{n-1} = \langle B, b^r \rangle^{n-1}$. Deste modo, existem quando muito
 $\text{card}(P(S(r+1)/\equiv_{n-1}))$ elementos em $S(r)/\equiv_n$ e, portanto, um número
 finito.

Isto completa a 1ª etapa.

2ª ETAPA. Seja $AT_r = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}^r, \text{vl}(\varphi) \subset \{x_1, \dots, x_r\} \text{ e } \varphi \text{ é de uma das formas } \rho_i(v_1, \dots, v_r) \text{ ou } v_1 = v_2 \text{ com } \{v_1, \dots, v_r\} \subset \{x_1, \dots, x_r\}\}$.

Dado $a^r \in A^r$ ponhamos

$$\varphi_{ra}^0 = \left(\bigwedge_{\substack{\varphi \in AT_r \\ \varphi(A)(a^r) = 1}} \varphi \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{\varphi \in AT_r \\ \varphi(A)(a^r) = 0}} \neg \varphi \right)$$

e $TI_r^0 = \{\varphi_{ra}^0 \mid A \in \text{Ob}(M_O^r) \text{ e } a^r \in A^r\}$. Observe que TI_r^0 é finito

visto ser AT_r finito. Suponhamos agora que TI_S^n esteja definido e seja finito qualquer que seja s . Definimos TI_r^{n+1} do seguinte modo:

$$\varphi_{ra}^{n-1} = \left(\bigwedge_{\varphi \in F_1} \exists x \varphi \right) \wedge \left(\bigwedge_{\varphi \in F_2} \forall x \neg \varphi \right)$$

onde: $F_1 = \{\varphi \in TI_{r+1}^{n-1} \mid \varphi(A)(\bar{a}a^r) = 1 \text{ para algum } a \in A\}$; $F_2 =$

$\{\varphi \in TI_{r+1}^{n-1} \mid \varphi(A)(\bar{a}a^r) = 0 \text{ qualquer que seja } a \in A\}$ e $\forall x \neg \varphi$

abrevia (como habitualmente) $\neg \exists x \varphi$. Finalmente,

$$TI_r^{n+1} = \{\varphi_{\frac{r}{a}}^{n+1} \mid A \in \text{Ob}(M_O^T) \text{ e } \frac{r}{a} \in A^r\}.$$

Nestas condições, dado $\widehat{\langle A, \frac{r}{a} \rangle} \in S(r)/\equiv_n$ tem-se que

$$\widehat{\langle B, \frac{r}{b} \rangle} \in \widehat{\langle A, \frac{r}{a} \rangle} \text{ see } \varphi_{\frac{r}{a}}^n(B)(\frac{r}{b}) = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO DA 2ª ETAPA. A demonstração será feita por indução sobre n .

Se $n = 0$ nossa afirmação é óbvia.

Suponhamos a afirmação válida para $n-1$. Seja $\widehat{\langle A, \frac{r}{a} \rangle} \in S(r)/\equiv_n$

e $\widehat{\langle B, \frac{r}{b} \rangle} \in \widehat{\langle A, \frac{r}{a} \rangle}$. Consideremos $\varphi_{\frac{r}{a}}^n = (\bigwedge_{\varphi \in F_1} \exists x_{n+1} \varphi) \wedge (\bigwedge_{\varphi \in F_2} \forall x_{r+1} \neg \varphi)$

Assim, se $\varphi \in F_1$, existe $a \in A$ tal que $\varphi(A)(\frac{r}{a} a) = 1$, por hipótese, $\underline{f}\{\langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r\}$ é tal que $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in M_n^T$ portanto, existe $b \in B$ e uma extensão $\underline{f}_a$ de $\underline{f}$ ao conjunto $\alpha(\underline{f}) \cup \{a\}$ para a qual tem-se $\underline{f}_a(a) = b$ e $\langle A, \underline{f}_a, B \rangle \in M_{n-1}^T$. Pela hipótese de indução $\varphi(B)(b, \underline{f}_a(a)) = 1$, ou seja, $(\exists x \varphi)(B)(\frac{r}{b}) = 1$. Suponhamos agora que $\varphi \in F_2$. Tem-se, portanto, $\varphi(A)(\frac{r}{a} a) = 0$ para todo $a \in A$. Se $(\exists x \varphi)(B)(\frac{r}{b}) = 1$, então $\varphi(B)(\frac{r}{b} b) = 1$ para algum

$b \in B$. Como $\widehat{\langle B, \frac{r}{b} \rangle} \in \widehat{\langle A, \frac{r}{a} \rangle}$ existe um $a \in A$ e uma extensão $\underline{f}_b$ de $\underline{f}$ tal que $\beta(\underline{f}_b) = \beta(\underline{f}) \cup \{b\}$, $\langle A, \underline{f}_b, B \rangle \in M_{n-1}^T$ e $\underline{f}_b^{-1}(b) = a$.

Pela hipótese de indução $\varphi(A)(a \overset{r}{\underset{b}{f}}^{-1}(b)) = 1$ ou ainda

$\exists x \varphi(A)(a) \overset{r}{=} 1$, o que contradiz o fato de ser $\varphi \in F_2$. Assim,

$\exists x \varphi(B)(b) \overset{r}{=} 0$.

Suponhamos agora que $\varphi \overset{n}{r}{\underset{a}{B}}(b) \overset{r}{=} 1$ e seja $\underline{f} = \{ \langle a_i, b_i \rangle \mid i =$

$1, \dots, r \}$. Deste modo, dado $a \in A$, $\exists x \varphi \overset{n-1}{r}{\underset{a}{B}}(b) \overset{r}{=} 1$, portanto

existe $b \in B$ tal que $\varphi \overset{n-1}{r}{\underset{a}{B}}(b) \overset{r}{=} 1$. Pela hipótese de indu-

ção, a correspondência $\underline{f}_a = \underline{f} \cup \{ \langle a, b \rangle \}$ é tal que $\langle A, \underline{f}_a, B \rangle \in M_{n-1}^T$.

Por outro lado, dado $b \in B$ considere $\varphi \overset{n-1}{r}{\underset{b}{B}} \in \Pi_{r+1}^{n-1}$ como

$\varphi \overset{n-1}{r}{\underset{b}{B}}(b) \overset{r}{=} 1$ e, portanto, $(\exists x_{r+1} \varphi \overset{n-1}{r}{\underset{b}{B}})(b) \overset{r}{=} 1$,

$\varphi \overset{n-1}{r}{\underset{b}{B}}(A)(a) \overset{r}{=} 1$ para algum $a \in A$. Caso contrário $\varphi \overset{n-1}{r}{\underset{b}{B}} \in F_2$ e

como por hipótese $\varphi \overset{n}{r}{\underset{a}{B}}(b) \overset{r}{=} 1$ teríamos $(\forall x_{r+1} \neg \varphi \overset{n-1}{r}{\underset{b}{B}})(b) \overset{r}{=} 1$,

ou seja, $\varphi \overset{n-1}{r}{\underset{b}{B}}(b) \overset{r}{=} 0$, o que é obviamente absurdo. Assim sen-

do, pela hipótese de indução, $\underline{f}_b = \underline{f} \cup \{ \langle a, b \rangle \}$ é tal que

$\langle A, \underline{f}_b, B \rangle \in M_{n-1}^T$. Donde se pode concluir que $f \in M_n^T$ ou ainda que

$\langle B, b \rangle \overset{r}{\in} \langle A, a \rangle$.

Fica portanto, concluída a demonstração da 2ª etapa.

3ª ETAPA. Seja $F : M_n^T \longrightarrow M_o^{<n>}$ comutando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M_n^T & \xrightarrow{F} & M_o^{<n>} \\ & \searrow \epsilon & \swarrow \epsilon \\ & (\text{Con}_{iso})^\ell & \end{array}$$

vem então que a função $\dot{F} : S(r) \longrightarrow \{0,1\}$ tal que $\dot{F}(\langle A, \bar{a} \rangle^r) = F(A)(\bar{a})^r$ comuta o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} S(r) & \xrightarrow{\dot{F}} & \{0,1\} \\ \pi \downarrow & & \nearrow \hat{F} \\ S(r)/\equiv_n & & \end{array}$$

Seja $\{w_1, \dots, w_m\} = \hat{F}^{-1}(1) \subset S(r)/\equiv_n$. Pelo resultado da 2ª etapa, existem fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ tais que $\varphi_i(A)(\bar{a})^r = 1$ se $\langle A, \bar{a} \rangle^r \in w_i$; $i = 1, \dots, m$. Se $\bigvee_{i=1}^m \varphi_i$ vem que $F_\varphi = F$. Isto encerra a demonstração da Parte II.

DEMONSTRAÇÃO DA PARTE III. É claro que se $F \longrightarrow \psi_F = \varphi \longrightarrow F_\varphi$ então $F = F_\varphi$.

Suponhamos agora que partimos de $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ e F^r é o functor associado a φ , se agora consideramos a fórmula ψ tal que $F_\varphi^r = F_\psi^r$, vem que $\varphi(A)(\bar{a}) = \psi(A)(\bar{a})$ qualquer que seja $A \in \text{Ob}(M_0^T)$ e $\bar{a} \in A^r$, logo, φ e ψ são semanticamente equivalentes. Isto encerra a demonstração do Teorema 3.19.

Teorema de representação para $\mathcal{L}^{<T,P>}$. Por $\mathcal{L}^{<T,P>}$ designamos a linguagem de primeira ordem gerada a partir dos seguintes conjuntos de símbolos:

Símbolos lógicos. $\wedge, \vee, \neg, \exists, \forall, D_i$; $i = 0, \dots, m-1$

Símbolos relacionais. $\rho_1, \dots, \rho_k$ (onde cada ρ_i tem aridade t_i ; $i = 1, \dots, k$).

Constantes proposicionais. $e_0, \dots, e_{m-1}$

Variáveis. $x_1, \dots, x_n, \dots$

Símbolos auxiliares. $(,)$

A noção de fórmula é a usual. É fácil ver que as fórmulas de $\mathcal{L}^{<T,P>}$ da forma $\rho_i(v_i, \dots, v_{t_i})$; $i = 1, \dots, k$ podem ser interpretadas nos objetos de $M^{<T,P>}$. A fim de interpretarmos as demais fórmulas introduzimos em P as operações seguintes:

$$\wedge : P \times P \longrightarrow P$$

$$(e_i, e_j) \longrightarrow e_i \wedge e_j = e_{\min\{i,j\}}$$

$$\vee : P \times P \longrightarrow P$$

$$(e_i, e_j) \longrightarrow e_i \vee e_j = e_{\max\{i, j\}}$$

$$\neg : P \times P \longrightarrow P$$

$$e_i \longrightarrow \neg e_i = \begin{cases} e_{n-1} & \text{se } i = 0 \\ e_0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

$$D_i : P \longrightarrow P$$

$$e_j \longrightarrow D_i(e_j) = \begin{cases} e_{n-1} & \text{se } i \leq j \\ e_0 & \text{se } i > j \end{cases}$$

(em outras palavras, $P = \langle P^n, \wedge, \vee, \neg, D_0, \dots, D_{n-1} \rangle$ é a álgebra de Post com n elementos). Isto posto, as fórmulas $\mathcal{L}^{<\tau, P>}$ são interpretadas em $A \in \text{Ob}(M_O^{<\tau, P>})$ de modo usual (para maiores detalhes, ver []). Lembramos que com base nas operações de P é possível definir os seguintes operadores:

$$J_i : P \longrightarrow P$$

$$e_j \longrightarrow J_i(e_j) = \begin{cases} e_{n-1} & \text{se } i = j \\ e_0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

TEOREMA 3.20. $\mathcal{L}^{<\tau, P>}$ e $\mathcal{L}(G^{<\tau, P>})$ são equivalentes (em símbolos $\mathcal{L}^{<\tau, P>} \sim \mathcal{L}(G^{<\tau, P>})$).

DEMONSTRAÇÃO (PARTE I). Seja $\varphi \in \mathcal{L}^{<\tau, P>}$ tal que $\text{gr}(\varphi) = n$ (o grau de quantificação de φ é definido da mesma maneira que em $\mathcal{L}_{\omega\omega}^{\tau}$), $r \geq \max(\{1\} \cup \{i \mid x_i \in \text{vl}(\varphi)\})$ e $F_{\varphi}^r : M_n^{<\tau, P>} \longrightarrow M_o^{<r>}$ a função definida $F_{\varphi}^r(A) = \langle A, \varphi(A) \rangle$ e se $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in M_n^{<\tau, P>}$, $F_{\varphi}^r(f) = \langle F_{\varphi}^r(A), \underline{f}', F_{\varphi}^r(B) \rangle$ onde, como no caso anterior, identificamos $\underline{f}'$ com $\underline{f}$. Nestas condições F_{φ}^r define um funtor que comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M_n^{<\tau, P>} & \xrightarrow{\quad} & M_o^{<r>} \\
 \searrow \varepsilon & & \swarrow \varepsilon \\
 & (\text{Con}_{\text{iso}})^{\ell} &
 \end{array}$$

A demonstração da parte I de 3.20 se faz de modo análogo à demonstração da parte I de 3.19.

DEMONSTRAÇÃO (PARTE II). 1^a etapa. Da mesma maneira que no caso anterior, definimos aqui $S(r)$ como a classe dos pares $\langle A, \underline{a}^r \rangle$ onde $A \in \text{Ob}(M^{<\tau, P>})$ e $\underline{a}^r \in A$. Pondo-se $\langle A, \underline{a}^r \rangle \equiv_n \langle B, \underline{b}^r \rangle$ se $\underline{f} = \{ \langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r \}$ é tal que $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in M_n^{<\tau, P>}$ mostra-se que $\equiv_n$ é uma equivalência e que $S(r)/\equiv_n$ é finito.

2^a Etapa. Ponhamos:

$$AT_r = \{ \varphi \in \mathcal{L}^{<\tau, P>} \mid \text{vl}(\varphi) \subset \{x_1, \dots, x_r\} \},$$

e φ é de uma das formas $\rho_j(v_1, \dots, v_n)$ ou $v_1 = v_2; v_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $j = 1, \dots, k$. Dado $A \in \text{Ob}(M_o^{<\tau, P>})$ e $\overset{r}{a} \in A^r$ seja

$$\varphi_{\overset{r}{a}}^o = \bigwedge_{\substack{\varphi \in AT_r \\ \varphi(A)(\overset{r}{a}) = e_j}} J_j(\varphi)$$

e $TI_r^o = \{\varphi_{\overset{r}{a}}^o \mid A \in \text{Ob}(M_o^{<\tau, P>}) \text{ e } \overset{r}{a} \in A^r\}$, TI_r^o é finito. Supondo-se TI_r^n definido (e finito) definimos

$$\varphi_{\overset{r}{a}}^{n+1} = \left(\bigwedge_{\varphi \in F_1} \exists x_{r+1} \varphi \right) \wedge \left(\bigwedge_{\varphi \in F_2} \forall x_{r+1} \neg \varphi \right) \text{ e}$$

$$TI_r^{n+1} = \{\varphi_{\overset{r}{a}}^{n+1} \mid A \in \text{Ob}(M_o^{<\tau, P>}) \text{ e } \overset{r}{a} \in A^r\}.$$

Mostra-se, por indução sobre n e procedendo-se de modo análogo

ao caso $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, que dado $\widehat{\langle A, \overset{r}{a} \rangle} \in S(r)/\equiv_n$ tem-se que

$$\varphi_{\overset{r}{a}}^n(B)(\overset{r}{b}) = e_{m-1} \text{ se } \widehat{\langle B, \overset{r}{b} \rangle} \in \widehat{\langle A, \overset{r}{a} \rangle} \text{ (i.e., se } \widehat{\langle B, \overset{r}{b} \rangle} \notin \widehat{\langle A, \overset{r}{a} \rangle})}$$

$$\varphi_{\overset{r}{a}}^n(B)(\overset{r}{b}) = e_o.$$

3ª Etapa. Se F é um funtor que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M_n^{<\tau, P>} & \xrightarrow{F} & M_0^{<<r>, P>} \\
 & \searrow \varepsilon & \swarrow \varepsilon \\
 & (\text{Con}_{\text{iso}})^{\ell} &
 \end{array}$$

então existe $\varphi \in \mathcal{L}^{<\tau, P>}$ tal que $F = F_\varphi$.

DEMONSTRAÇÃO DA 3ª ETAPA. Seja $\dot{F} : S(r) \longrightarrow P$ definida por: $\dot{F}(\langle A, \overset{r}{a} \rangle) = F(A)(\overset{r}{a})$. Do fato de ser F um funtor, vem que $\dot{F}$ comuta o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 M_r^{<\tau, P>} & \xrightarrow{\dot{F}} & P \\
 \pi \downarrow & \nearrow \hat{F} & \\
 S(r)/\equiv_n & &
 \end{array}$$

Tomando-se $\{w_1^i, \dots, w_{n_i}^i\} \subset \hat{F}^{-1}(e_i)$ e levando-se em conta o resultado da 2ª etapa, existem fórmulas $\varphi_1^i, \dots, \varphi_{n_i}^i$ tais que $\varphi_j^i(B)(\overset{r}{b}) = e_{m-1}$ se, e somente se $\langle B, \overset{r}{b} \rangle \in w_j^i$; $j = 1, \dots, n_i$. Seja então $\psi_i = \varphi_1^i \vee \dots \vee \varphi_{n_i}^i$, observemos que $\dot{F}(\langle A, \overset{r}{a} \rangle) = e_i$ se e somente se $\psi_i(A)(\overset{r}{a}) = e_{m-1}$. Finalmente, se $\varphi = (e_0 \wedge \psi_0) \vee \dots \vee (e_{m-1} \wedge \psi_{m-1})$ vem que: (i) se $F(A)(\overset{r}{a}) = e_i$, então $\langle A, \overset{r}{a} \rangle \in w_j^i \in \hat{F}^{-1}(e_i)$. Assim, pelo resultado da 2ª etapa $\varphi_j^i(A)(\overset{r}{a}) = e_{m-1}$ e

$\varphi_{j_0}^{i_0}(A)(\vec{a}) = e_0$ para $i_0 \neq i$ e $j_0 \neq j$, portanto, $e_i \wedge \psi_i(A)(\vec{a}) =$
 e_i e $e_j \wedge \psi_j(A)(\vec{a}) = e_0$ para $j_0 \neq i$, por conseguinte,
 $\varphi(A)(\vec{a}) = e_i$;

(ii) se $\varphi(A)(\vec{a}) = e_i$, i.e., se $((e_0 \wedge \psi_0) \vee \dots \vee$
 $(e_{m-1} \wedge \psi_{m-1}))(A)(\vec{a}) = e_{m-1}$ então, por construção de φ ,
 $\varphi_i^j(A)(\vec{a}) = e_{m-1}$ para algum i e j . Pelo resultado da 2ª etapa,
vem então que, $\langle A, \vec{a} \rangle \in \hat{F}^{-1}(e_i)$ e, portanto, $F(A)(\vec{a}) = e_i$.

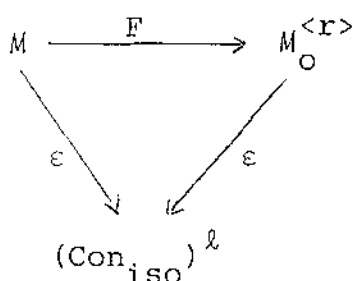
Para a demonstração da Parte III, procede-se de maneira análoga ao que se fez na parte correspondente de 3.19. Fica, assim, concluída a demonstração do Teorema 3.20.

Teorema de Representação para $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$. A linguagem $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$ é obtida quando a $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ se acrescenta o conjunto $\Gamma = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ de símbolos (quantificadores generalizados) e às regras de formação de fórmulas a seguinte regra:

Se φ é uma fórmula e ν uma variável $Q_i \nu \varphi$ é uma fórmula $i = 1, \dots, m$ (a finitude de Γ não é essencial). As fórmulas $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$ são interpretadas nos objetos de $M \in \mathcal{G}^T(\Gamma)$ do mesmo modo que as fórmulas de $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$. A interpretação de $Q_i \nu \varphi$ é definida por
 $(Q_i \nu \varphi)(A)(\vec{a}) = 1$ se e só se $\{a \in A \mid \varphi(A)(\vec{a} a) = 1\} \in \rho_i(A)$, $i=1, \dots, n$.
De agora em diante, vamos considerar $Q_1 = \exists$, i.e., $Q_1 : A \longrightarrow P(A) - \{\emptyset\}$.

TEOREMA 3.21. As linguagens $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$ e $\mathcal{L}(G^T(\Gamma))$ são equivalentes (em símbolos $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma) \sim \mathcal{L}(G^T(\Gamma))$).

DEMONSTRAÇÃO (PARTE I). Vamos mostrar que dada $\varphi \in \mathcal{L}_{\omega\omega}^T(\Gamma)$ e $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq \max(\{1\} \cup \{i \mid x_i \in \text{vl}(\varphi)\})$, então a função $F_\varphi^r : A \longrightarrow \langle A, \varphi(A) \rangle$ e $F_\varphi^r : \langle A, \underline{f}, B \rangle \longrightarrow \langle F_\varphi^r(A), \underline{f}', F_\varphi^r(B) \rangle$ (onde $\varepsilon(\underline{f}) = \varepsilon(\underline{f}')$ e, portanto, identificamos $\underline{f}'$ e $\underline{f}$) é um functor que comuta o seguinte diagrama:



para algum $M \in G^T(\Gamma)$.

DEMONSTRAÇÃO (PARTE I). A demonstração é feita por indução sobre a complexidade das fórmulas. Os casos em que φ é atômica φ é $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, φ é $\neg \varphi_1$ ou φ é $\exists x_1 \psi$ são tratados exatamente do mesmo modo que na correspondente parte de 3.19.

Suponhamos que φ é da forma $Q_1 x \psi$ (podemos supor $x = x_{r+1}$ sem perda de generalidade). Temos, pela hipótese de indução, que existe $M \in G^T(\Gamma)$ tal que F_ψ^{r+1} é um functor que comuta o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow[\psi]{F^{r+1}} & M_0^{<r+1>} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & (\text{Con}_{\text{iso}})^\ell &
 \end{array}$$

Vamos mostrar então que F_φ^r é um funtor que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M' = \partial_i(M) & \xrightarrow[F_\varphi^r]{} & M_0^{<r>} \\
 & \searrow \varepsilon & \swarrow \varepsilon \\
 & (\text{Con}_{\text{iso}})^\ell &
 \end{array}$$

Seja $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in M' = \partial_i(M)$, devemos mostrar então que $F_\varphi^r(f) = \langle F_\varphi^r(A), \underline{f}, F_\varphi^r(B) \rangle \in M_0^{<r>}$.

Observe-se que se $X = \{a \in A \mid \psi(A)(\overset{r}{a}a) = 1\} \in \partial_i(A)$, então $X = \bigcup_{a \in X} \langle M, A, \overset{r}{a} \rangle(a)$ (onde $\langle M, A, \overset{r}{a} \rangle(a) = \langle M, A, \{a_1, \dots, a_n\} \rangle(a)$).

É claro que se $a' \in X$, então $a' \in \bigcup_{a \in X} \langle M, A, \overset{r}{a} \rangle(a)$. Por outro

lado, se $a' \in \bigcup_{a \in X} \langle M, A, \overset{r}{a} \rangle(a)$, então existe $a \in X$ e $\underline{g}$ tal

que $g = \langle A, \underline{g}, B \rangle \in M$ com $\alpha(\underline{g}) = \{a_1, \dots, a_r\} \cup \{a\}$ e $\underline{g}(a_i) = a_i$; $i = 1, \dots, r$ e $\underline{g}(a) = a'$. Como $g \in M$ vem da hipótese de indução que $\psi(A)(\overset{r}{a}a) = 1$ see $\psi(A)(\overset{r}{a}a') = 1$, deste modo, $a' \in X$.

Observe-se que se $Y = \{b \in B \mid \psi(A)(\underline{f}^r(a)b) = 1\}$, então $Y = \bigcup_{a \in X} \langle M, B, \underline{f}^r(a) \rangle (\underline{f}_a(a))$ ($\underline{f}_a$ é a extensão de $\underline{f}$, cuja existência

é garantida pelo fato de $f \in M'$). Suponha que $b \in Y$. Assim, $\psi(B)(\underline{f}^r(a)b) = 1$, portanto, existe $\underline{f}_b$ extensão de $\underline{f}$ tal que $\beta(\underline{f}_b) = \beta(\underline{f}) \cup \{b\}$. Ponha $a \in \underline{f}_b^{-1}(b)$ e observe que pela hipótese de indução $\psi(B)(\underline{f}^r(a)b) = 1$ see $\psi(A)(\underline{a}a) = 1$ e como $b \in Y$, $a \in X$. Considerando-se a composta $\underline{f}_a^{-1} \underline{f}_b$ (onde $\underline{f}_a$ é a extensão de $\underline{f}$ a $\alpha(f) \cup \{a\}$) segue-se que $b \in \bigcup_{a \in X} \langle M, B, \underline{f}^r(a) \rangle (\underline{f}_a(a))$.

Inversamente, se $b \in \bigcup_{a \in Y} \langle M, B, \underline{f}^r(a) \rangle (\underline{f}_a(a))$, então existe $a \in X$

e $g = \langle A, \underline{g}, B \rangle \in M_O^T$ com $\alpha(g) = \{\underline{f}(a_1), \dots, \underline{f}(a_r)\} \cup \{\underline{f}_a(a)\}$; $\underline{g}(\underline{f}(a)) = \underline{f}(a)$ e $\underline{g}(\underline{f}_a(a)) = b$. Consideremos $\underline{f}_a$ restrita a $\{a_1, \dots, a_r\} \cup \{a\}$ e tomemos a composta $\underline{h} = \underline{g} \underline{f}_a$. $\underline{h} = \langle A, \underline{h}, B \rangle \in M$ e, pela hipótese de indução, $\psi(A)(\underline{a}a) = 1$ see $\psi(B)(\underline{f}^r(a)b) = 1$.

Assim, $b \in Y$ uma vez que $a \in X$.

Assim sendo, suponhamos que $\underline{a} \in \alpha(\underline{f})^r$ e $\psi(A)(\underline{a}) = (Q_1 x_{r+1} \psi)(A)(\underline{a}) = 1$. Por definição de Q_1 isto ocorre se, e somente se $X \in \partial_1(A)$. Pela observação feita acima e do fato de $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in M'$ tem-se que $Y \in \partial_1(B)$. Com argumento similar prova-se a inversa. Isto mostra que $F_\varphi^r(f) \in M_O^{<r>}$.

A fim de demonstrar que F_φ^r preserva a composição, procede-se de modo análogo ao que se fez na parte correspondente de 3.19.

Isto completa a demonstração da Parte I de 3.21.

DEMONSTRAÇÃO. (PARTE II). 1^a Etapa. Como nos casos anteriores, de finimos $S(r)$. Para cada $M \in G^T(\Gamma)$ ponhamos $\langle A, \overset{r}{a} \rangle \equiv_M \langle B, \overset{r}{b} \rangle$ se $\underline{f} = \{ \langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r \}$ é tal que $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in M$. É óbvio que $\equiv_M$ é uma equivalência. A demonstração de que $S(r)/\equiv_n$ é fini

to, faz-se por indução. O caso em que $n = 0$ já foi demonstrado em 3.19. Suponhamos a afirmação válida para n e vejamos que vale também para $n + 1$. Se $n+1$ é par a demonstração é feita sem dificuldades.

Suponhamos que $n+1$ é ímpar.

Tem-se então, $M = \partial_i(M')$ com $M' \in G^T(\Gamma)$ e $\#(M') < n+1$ (ver definição 3.10). Considere o seguinte diagrama (denotaremos por $S(r)/_M$ o quociente $S(r)/\equiv_M$):

$$\begin{array}{ccc}
 S(r) & \xrightarrow{\theta} & S(r+1)/_M \\
 \searrow \pi & & \nearrow \bar{\theta} \\
 & S(r)/_M &
 \end{array}$$

onde $\theta(\langle A, \overset{r}{a} \rangle) = \{ \langle A, \overset{r}{a} a \rangle \mid a \in A \}$ e $\bar{\theta}(\langle A, \overset{r}{a} \rangle_M) = \theta(\langle A, \overset{r}{a} \rangle)$ (onde $\langle A, \overset{r}{a} \rangle_M = \widehat{\langle A, \overset{r}{a} \rangle} \in S(r)/_M$). $\bar{\theta}$ está bem definida, uma vez que $\langle A, \overset{r}{a} \rangle \equiv_M \langle B, \overset{r}{b} \rangle$ se e o morfismo $\langle A, \underline{f}, B \rangle \in M$ onde $f = \{ \langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r \}$ pertence a M ; isto garante que $\theta(\langle A, \overset{r}{a} \rangle) = \theta(\langle B, \overset{r}{b} \rangle)$.

Observemos que se $\langle A, \bar{a}^r \rangle_M \in S(r)/_M$ então, pela hipótese de indução, $\bar{\theta}(\langle A, \bar{a}^r \rangle_M)$ é finito. Assim sendo, sejam $a^1, \dots, a^s \in A$ tais que $\bar{\theta}(\langle A, \bar{a}^r \rangle_M) = \{\langle A, \bar{a}^r a^j \rangle_M \mid 1 \leq j \leq s\}$. Suponhamos que $\bar{\theta}(\langle B, \bar{b}^r \rangle_M) = \bar{\theta}(\langle A, \bar{a}^r \rangle_M)$; então existem $b^1, \dots, b^s \in B$ tais que $\langle A, \bar{a}^r a^j \rangle_M = \langle B, \bar{b}^r b^j \rangle_M$; $1 \leq j \leq s$. Temos então, A e B particionados em s classes, $A_1, \dots, A_s$; $B_1, \dots, B_s$. Vê-se facilmente que $A_j = \langle M', A, \bar{a}^r \rangle (a^j)$ e $B_j = \langle M', A, \bar{b}^r \rangle (b^j)$. Além disso, se $X \subset A$, $X \neq \emptyset$, e $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$ são as classes com representantes em X , então $\bigcup_{a \in X} \langle M', A, \bar{a}^r \rangle (a) = \bigcup_{1 \leq t \leq k} \langle M', A, \bar{a}^r \rangle (a^{j_t}) = A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_k}$. Analogamente, se $Y \subset B$, $Y \neq \emptyset$ e se $B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$ são as classes com representantes em Y , então $\bigcup_{b \in Y} \langle M', A, \bar{b}^r \rangle (b) = B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_k}$. Consideremos $\underline{f} = \{\langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r\}$; $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle \in M'$ visto ser $\bar{\theta}(\langle A, \bar{a}^r \rangle) = \bar{\theta}(\langle B, \bar{b}^r \rangle)$. Assim, para f pertencer a M é necessário e suficiente que dado $X \subset A$, $X \neq \emptyset$; $A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_k} \in \partial_i(A)$ e dado $Y \subset B$, $Y \neq \emptyset$; $B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_k} \in \partial_i(B)$ para índices j_t convenientes. Porém, o número de diferentes possibilidades para estas uniões é 2^s e, portanto, dado $\langle A, \bar{a}^r \rangle_M$, o número de diferentes classes $\langle B, \bar{b}^r \rangle_M$ tais que $\bar{\theta}(\langle A, \bar{a}^r \rangle_M) = \bar{\theta}(\langle B, \bar{b}^r \rangle_M)$ é finito. Como $P(S(r+1)/_M)$ é finito, pela hipótese de indução, $S(r)/_M$ é também finito.

Isto conclui a demonstração da 1^a etapa.

2ª ETAPA. Vamos mostrar por indução sobre $\#(M)$ que dado $\langle A, \bar{a} \rangle_M^r$ existe $\varphi \in \mathcal{L}^r(\Gamma)$ tal que $\varphi^M(B)(\bar{b}) = 1$ see $\langle B, \bar{b} \rangle \in \langle A, \bar{a} \rangle_M^r$.

Se $\#(M) = 0$, se procede do mesmo modo que em 3.19.

Se $\#(M) = n+1$ com $n+1$ par, então, $M = M_1 \cap M_2$ com $\#(M_1), \#(M_2) < n+1$. Pela hipótese de indução, existem fórmulas ψ_1 e ψ_2 satisfazendo as condições exigidas. Temos então, $\varphi^M = \psi_1 \wedge \psi_2$.

Seja então $\#(M) = n+1$ com $n+1$ ímpar, i.e., $M = \partial_i(M')$ onde $\#(M') < n+1$.

Utilizaremos, no que segue, a notação e o resultado da 1ª etapa. Deste modo, seja $\langle A_1, \bar{a}_s \rangle_{M'}^{r+1}, \dots, \langle A_s, \bar{a}_s \rangle_{M'}^{r+1}$ as classes de $S(r+1)/M'$, tais que as primeiras $q < s$ classes são precisamente os elementos de $\bar{\theta}(\langle A, \bar{a} \rangle_M^r)$. Existe, portanto, $a_1^r, \dots, a_q^r \in A$ tais que $\langle A_j, \bar{a}_j \rangle_{M'}^{r+1} \equiv_M \langle A, \bar{a} \rangle_M^r (a_j^r)$; $1 \leq j \leq q$. Pela hipótese de indução, existem s fórmulas ψ_j com $\text{vl}(\psi_j) \subset \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$; $1 \leq j \leq s$ tais que $\langle A_j, \bar{a}_j \rangle_{M'}^{r+1} \equiv_M \langle C, \bar{c} \rangle^{r+1}$ see $\psi_j(C)(\bar{c}) = 1$, qualquer $\langle C, \bar{c} \rangle \in S(r+1)$. Pondo-se agora $A_j = \langle M', A, \bar{a} \rangle (a_j^r)$; $1 \leq j \leq q$, vem que $\psi_j(A)(\bar{a} a) = 1$ see $a \in A_j$. Consideremos todas as possíveis $2^q - 1$ disjunções das fórmulas $\psi_1, \dots, \psi_q$. Tais disjunções serão denotadas por $\boxed{}_s$, $1 \leq s \leq 2^q - 1$. Observe que cada $\boxed{}_s$ define um conjunto verdade $A, \text{vl}(\boxed{}_s) = A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_t}$ se $\boxed{}_s = \psi_{j_1} \vee \dots \vee \psi_{j_t}$.

Isto posto, definimos φ do seguinte modo (lembramos que

$$Q_1 = \exists):$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq q} \exists x_{r+1} \psi_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{q \leq j \leq s} \neg \exists x_{r+1} \psi_j \right) \wedge \\ & \bigwedge_{1 \leq s \leq 2^q - 1} \left(\left(\bigwedge_{v_A(\Box_s) \in Q_i(A)} Q_i x_{r+1} \Box_s \right) \wedge \left(\bigwedge_{v_A(\Box_s) \notin Q_i(A)} \neg Q_i x_{r+1} \Box_s \right) \right) \end{aligned}$$

Observemos que $vl(\varphi) \subset \{x_1, \dots, x_r\}$. Não é difícil provar que se $\langle A, \bar{a} \rangle \equiv_M \langle B, \bar{b} \rangle$ então $\varphi(B)(\bar{b}) = 1$.

Mostremos que a recíproca também é verdadeira. Suponhamos que $\varphi(B)(\bar{b}) = 1$, devemos provar então que se $f = \langle A, \underline{f}, B \rangle$ com $\underline{f} = \{\langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r\}$, $f \in M$. Considere $a \in A_j$; como $(\exists x_{r+1} \psi_j)(B)(\bar{b}) = 1$ existe $b \in B$ tal que $\langle A, \bar{a} a \rangle \equiv_{M'} \langle B, \bar{b} b \rangle$. Por outro lado, se existe $b' \in B$ tal que para nenhum $a' \in A$ se tenha que $\langle A, \bar{a} a' \rangle \equiv_{M'} \langle B, \bar{b} b' \rangle$ então, para algum j , $i \leq j \leq s$, $\psi_j(B)(\bar{b} b') = 0$, o que contradiz nossa hipótese de ser $\varphi(B)(\bar{b}) = 1$. Assim, dado $a \in A$ existe uma extensão $\underline{f}_a = \underline{f} \cup \{\langle a, b \rangle\}$ tal que $\langle A, \underline{f}_a, B \rangle \in M'$ e dado $b' \in B$ existe $\underline{f}_{b'} = \underline{f} \cup \{\langle a', b' \rangle\}$

tal que $\langle A, \underline{f}_b, B \rangle \in M'$. Considere então, $X \subset A$, $X \neq \emptyset$ e suponhamos que $\bigcup_{a \in X} \langle M', A, \underline{a}^r \rangle (a) \in \partial_i(A)$. Sabemos que

$\bigcup_{a \in X} \langle M', A, \underline{a}^r \rangle (a) = A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_t}$, onde $A_{j_1}, \dots, A_{j_t}$ são as

classes com representantes em X . Para cada $a \in X$, considere $\underline{f}_a$

definida como acima. Como $\underline{f}_s = \psi_{j_1} \vee \dots \vee \psi_{j_t}$ é tal que

$\nu_A(\underline{f}_s) \in \partial_i(A)$, então $(Q_i x_{r+1} \underline{f}_s^r)(B)(b) = 1$, isto signi-

fica que $\bigcup_{1 \leq k \leq t} \{y \in B \mid \psi_{j_k}^r(B)(b y) = 1\} \in \partial_i(A)$. Porém, esta

última união é exatamente $\bigcup_{a \in X} \langle M', A, \underline{b}^r \rangle (\underline{f}_a(a))$ visto que $b \in$

$\{y \in B \mid \psi_{j_k}^r(B)(b y) = 1\}$ see $\langle A, \underline{a}^r \rangle \equiv_{M'} \langle B, \underline{b}^r \rangle$ onde $a \in A_{j_k}$.

Para se mostrar que dado $Y \subset B$, $Y \neq \emptyset$, $\bigcup_{a \in X} \langle M', B, \underline{b}^r \rangle (\underline{f}_a(a))$

$\in \partial_i(B)$ procede-se da mesma maneira.

Isto completa a demonstração da 2ª etapa.

A 3ª etapa e a parte III, neste caso, não apresentam dificuldades e suas demonstrações seguem a mesma linha que as respectivas demonstrações de 3.19.

Teorema de Representação para $\mathcal{L}_m^\tau$. Por $\mathcal{L}_m^\tau$ designamos a linguagem de primeira ordem modal, obtida quando a $\mathcal{L}_{\omega\omega}^\tau$ se acrescenta o símbolo $\diamond$ (possibilidade) e a seguinte regra para formação de fórmulas: se φ é uma fórmula, $\diamond\varphi$ também o é.

$\mathcal{L}_m^T$ é interpretada nos objetos (modelos de Kripke) de K_O^T . Usaremos , como nos casos anteriores, a notação $\varphi(A)_\alpha^r = 1$, $(\varphi(A)_\alpha^r = 0)$ significando que $A_\alpha \models \varphi(r)$, i.e., o universo A_α do modelo A satisfaz $\varphi(a)$ ($A_\alpha \not\models \varphi(a)$), i.e., A_α não satisfaz $\varphi(a)$.

Se $\varphi \in \mathcal{L}_m^T$, o grau de quantificação de φ em símbolos $gr(\varphi)$, é definido analogamente ao que se fez em 3.19, acrescentando-se a seguinte cláusula:

$$(iv) \quad gr(\diamond \varphi) = gr(\varphi) + 1$$

TEOREMA 3.22. $\mathcal{L}_m^T$ e $\mathcal{L}(K^T)$ são equivalentes (em símbolos $\mathcal{L}_m^T \sim \mathcal{L}(K^T)$).

DEMONSTRAÇÃO (PARTE I). Seja $\varphi \in \mathcal{L}_m^T$ e $r \geq \max(\{1\} \cup \{i \mid x_i \in$

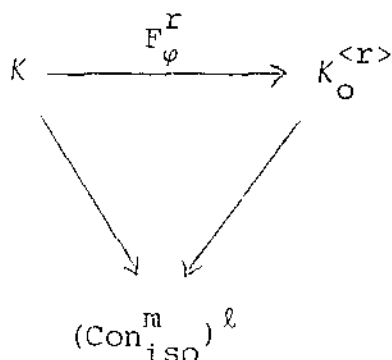
$\in \text{vl}(\varphi)\})$. Considere a função F_φ^r que a cada $A^{\alpha_O} \in K_O^T$ associa

$F_\varphi^r(A^{\alpha_O}) = \langle \{ \langle A_\alpha, \varphi(A^{\alpha_O})_\alpha \rangle \}_{\alpha \in \Gamma^A}, R^{\alpha_O} \rangle \in \text{Ob}(K_O^{<r>})$ e a cada

$f = \langle A^{\alpha_O}, \underline{f}, B^{\beta_O} \rangle$ associa $F_\varphi^r(f) = \langle F_\varphi^r(A^{\alpha_O}), \underline{f}', F_\varphi^r(B^{\beta_O}) \rangle$ com

$\varepsilon(\underline{f}) = \varepsilon(\underline{f}')$ os quais passaremos a denotar pelo mesmo símbolo $\underline{f}$.

Nestas condições F_φ^r é um funtor que comuta o seguinte diagrama:



A demonstração, neste caso, não oferece nenhuma dificuldade e segue a mesma linha que a correspondente de 3.19.

DEMONSTRAÇÃO (PARTE II). 1ª ETAPA. Seja $S(r)$ a classe dos pares $\langle A_o^{\alpha_o, r}, a \rangle$ onde $a \in A_o^{\alpha_o, r}$. Ponhamos $\langle A_o^{\alpha_o, r}, a \rangle \equiv_K \langle B_o^{\beta_o, r}, b \rangle$ se $\underline{f} = \{ \langle a_i, b_i \rangle \mid i = 1, \dots, r \}$ é tal que $f = \langle A_o^{\alpha_o}, \underline{f}, B_o^{\beta_o} \rangle \in K$. É evidente que $\equiv_K$ é uma relação de equivalência. A demonstração de que $S(r)/_K$ (como no caso anterior, escreveremos $S(r)/_K$ em lugar de $S(r)/_{\equiv_K}$) é finito, processa-se do mesmo modo que em 3.19 para o caso $n = 0$. Se $n+1$ é par, a demonstração segue-se da hipótese de indução. Se $n+1$ é ímpar, temos dois casos a considerar: caso(a). $K = \partial_1(K')$ e caso(b). $K = \partial_2(K')$. O caso (a) corresponde à quantificação clássica (i.e., ao quantificador $\exists$) e a demonstração decorre do mesmo modo que em 3.19.

Suponhamos então que $\#(K) = n+1$ e $\#(K) < n+1$. Pondo-se

$$\langle A_o^{\alpha_o, r}, a \rangle_K = \{ w \in S(r)/_K \mid \langle A_o^{\alpha_o, r}, a \rangle \in w, \alpha \in \Gamma^A \text{ e } \alpha_o R^A \alpha \}.$$

É claro que $\langle A_o^{\alpha_o, r}, a \rangle \equiv_K \langle B_o^{\beta_o, r}, b \rangle$ se $\langle A_o^{\alpha_o, r}, a \rangle_K = \langle B_o^{\beta_o, r}, b \rangle_K$

portanto, o cardinal de $S(r)/_K$ é menor ou igual ao cardinal de $P(S(r)/_K)$ que, por hipótese de indução é finito. Fica, portanto, completa a demonstração da 1^a etapa.

2^a ETAPA. Considere-se AT_r definida em 3.19. Se $(A^{\alpha_0}, a) \in S(r)$ e $\#(K) = 0$ temos $\varphi_{r,a}^K = \varphi_{r,a}^0$ e $TI_r^K = TI_r^0$ (ver definição em 3.19).

Suponhamos $\#(K) = n+1$ com $n+1$ par. Neste caso, define-se $\varphi_{r,a}^K$ e TI_r^K do mesmo modo que em 3.21.

Se agora $\#(K) = n+1$ com $n+1$ ímpar, temos dois casos:

CASO(a). $K = \partial_1(K')$ com $\#(K') < n+1$. Proceda-se do mesmo modo que em 3.19.

(CASO(b). $K = \partial_2(K')$ com $\#(K') < n+1$. Ponha-se

$$\varphi_{r,a}^K = \varphi_{r,a}^{K'} \wedge \left(\bigwedge_{\varphi \in F_1} \diamond \varphi \right) \wedge \left(\bigwedge_{\varphi \in F_2} \neg \diamond \varphi \right)$$

(onde $F_1 = \{\varphi \in TI_r^{K'} \mid \diamond \varphi(A^{\alpha_0})(a) = 1\}$ e $F_2 = TI_r^{K'} - F_1$)

$$TI_r^K = \{\varphi_{r,a}^K \mid (A^{\alpha_0}, a) \in S(r)\}$$

Por indução sobre $\#(K)$, mostra-se que dado $W \in S(r)/_K$ existe $\varphi^W \in \mathcal{L}_m^T$ tal que $(B^{\beta_0}, b) \in W$ se e $\varphi^W(B)_{\beta_0}(b) = 1$.

A 3^a etapa e a parte III da demonstração de 3.22 não oferecem dificuldades e seguem as mesmas linhas que as respectivas demonstrações em 3.19. Isto completa a prova do Teorema 3.22.

Observações gerais sobre os Teoremas 3.19 - 3.22.

OBSERVAÇÃO 3.23. O leitor atento deve ter notado (em todos os casos) que as fórmulas de $\mathcal{L}$ são representadas por funtores, cujo valor em dado objeto é sempre uma relação de aridade não nula. Assim, dada uma sentença φ , $F_{\varphi}^r(A) = \langle A, \varphi(A) \rangle$ é tal que aridade de $\varphi(A) = n \geq 1$. Tal fato pode parecer artificial, no entanto, evita a consideração de casos especiais nas demonstrações. Para os mais exigentes, informamos que este procedimento pode ser evitado considerando-se a categoria $M_O^{<0>}$ cujos objetos são conjuntos munidos de relações n -árias, obtendo-se os mesmos resultados (a capacidade expressiva da linguagem não se altera neste caso).

OBSERVAÇÃO 3.24. Os teoremas de representação aqui demonstrados são passíveis de generalizações várias. Por exemplo, considerando-se as famílias de pseudogrupos definidas no final do Capítulo II, pode-se demonstrar teoremas de mesmo tipo para linguagens de tipo infinito com símbolos funcionais. Além disso, o teorema para $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ é ainda válido para $\mathcal{L}_{K\omega}^T$ onde K é um cardinal inacessível.

OBSERVAÇÃO 3.25. Os teoremas 3.19 - 3.22 têm como corolário uma caracterização algébrica (método de back-and-forth) da equivalência

lógica correspondente em cada caso. Para $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ tal método foi introduzido por Fraïssé (neste caso, o correspondente corolário é conhecido como o "Teorema de Fraïssé"). Para $\mathcal{L}^T(\Gamma)$ tal método foi introduzido por X. Caicedo, que também demonstrou, por outros meios, o referido corolário. No caso de $\mathcal{L}^{<\tau, P>}$ e $\mathcal{L}_m^T$ o método foi introduzido pelo autor.

Invariante e Invariante local de um pseudogrupo C .

Parece plausível a definição segundo a qual a geometria é o estudo dos invariantes de um pseudogrupo C . No entanto, que se entende por "invariante de C " ? Uma primeira solução, seria definir um invariante de C como uma propriedade $P(x)$ atribuível aos elementos de $Ob(C)$ satisfazendo a seguinte condição: se $A \in Ob(C)$, $P(A)$ e $A \xrightarrow{f} B \in C$ então $P(B)$. Isto, obviamente, pressupõe uma linguagem na qual P possa ser expressa e, consequentemente, a consideração de distintos tipos de invariantes. O que, obviamente, não invalida nossa definição. Por outro lado, considerando-se, por exemplo, o funtor $\pi : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Gr}$ (funtor grupo de homotopia) é bem natural dizermos que o grupo de homotopia é um invariante (topológico), uma vez que a espaços homeomorfos correspondem grupos iguais (mais precisamente isomorfos). Assim, poderíamos também, seguindo o exemplo, definir invariante de um objeto $A \in Ob(C)$ como a classe de isomorfia da imagem $F(A)$ por um funtor $F : C \longrightarrow C'$.

Na verdade, estas duas soluções bastante naturais são, em certo sentido, equivalentes.

Com efeito, se P é um invariante na primeira acepção, o fato de P satisfazer a condição de invariância (por isomorfismo) implica em que P define o funtor $F_P : C \longrightarrow \{0,1\}$ ($\{0,1\}$ categoria discreta) do seguinte modo: $F_P(A) = P(A)$. Deste modo, P é invariante na segunda acepção.

Reciprocamente, seja $F : C \longrightarrow C'$ um funtor $A \in \text{Ob}(C)$ e $\widehat{F(A)}$ classe de isomorfia em C' . Definamos a propriedade P_F do seguinte modo : $P_F(B)$ se $\widehat{F(B)} \in \widehat{F(A)}$. É claro, então, que P_F é um invariante na primeira acepção.

Assim sendo, denominamos invariante de C de tipo C' uma classe de isomorfia de um objeto de C por um funtor $F : C \longrightarrow C'$. Observe que em ambas definições fizemos menção a um certo "tipo", porém, no primeiro caso isto significava pertencer a uma dada linguagem, e no segundo caso ser uma classe de isomorfia de certa categoria. Apesar de serem as definições referidas equivalentes (em dado sentido), como acabamos de mostrar, os tipos a que nos referimos em ambos os casos, nada tem a ver, em princípio, um com o outro.

Com base nos resultados (teoremas de representação) deste capítulo e face às observações acima feitas, podemos afirmar que as linguagens $\mathcal{L}$, por nós consideradas, são formalizações dos invariantes de tipo R dos pseudogrupos de G .

Finalizaremos o capítulo com alguns problemas e questões; algumas delas são simples cogitações motivadas por certo "feeling".

PROBLEMA 3.26. Obter teoremas de representação (análogos aos deste capítulo) para as seguintes linguagens:

- (i) $\mathcal{L}_{\alpha, \omega}^T$; onde α é um cardinal não inacessível,
- (ii) $\mathcal{L}^{<\tau, L>}$; lógica de primeira ordem, tomando valores em uma álgebra de Lukasiewicz,
- (iii) $\mathcal{L}_I^T$; lógica intuicionista; ou mostrar suas inexistências.

O item (iii) é particularmente importante, qualquer que seja a resposta. Observem que estaríamos explicitando os invariantes de $\mathcal{L}_I^T$, sua geometria subjacente, ou provando a inexistência da mesma.

PROBLEMA 3.27. Como observou Ehresmann, dado um pseudogrupo C a classe $P(e) = \{e' \in C_0 \mid e' < e\}$ é uma paratopologia, i.e., verifica as seguintes condições:

- (i) e e $0 \in P(e)$
- (ii) e_1 e $e_2 \in P(e)$ implica $e_1 \cap e_2 \in P(e)$
- (iii) se $\{e_i\}_{i \in I} \subset P(e)$, então $\bigcup_i e_i \in P(e)$

($P(e)$ não é uma topologia simplesmente porque os $e_i \in P(e)$ são objetos e não conjuntos).

Mostra-se ainda que se o pseudogrupo C é distributivo, i.e., verifica a propriedade (o que ocorre com aqueles aqui tratados).

$$(iv) \quad e_0 \cap \left(\bigcup_i e_i \right) = \bigcup_i e_0 \cap e_i$$

então $P(e)$ é uma álgebra de Heyting. Assim sendo, é possível representar $P(e)$ como um certo espaço topológico (teorema de Stone) ou topológico ordenado (teorema de Priestley). Isto, contudo, não nos permite representar $P(e)$ como um espaço topológico, onde a estrutura da álgebra de Heyting dos abertos fosse isomorfa a $P(e)$.

Põe-se, então, o seguinte problema: que condições se deve impor a um pseudogrupo C para que isto ocorra?

Um caminho seria generalizar o teorema de Cayley para pseudogrupos (isto certamente nos obrigará a impor condições sobre os pseudogrupos). A questão torna-se, portanto, a seguinte: quais os pseudogrupos C para os quais existe um grupo $G(e)$ ($e = 0$ maior elemento de C ; quando este não existe é sempre possível introduzir um) tal que $G \simeq G(e)$ e cada $e' < e$ isomorfo a um subgrupo de $G(e')$ (de tal modo que $e' < e''$ signifique $G(e')$ subgrupo de $G(e'')$)?

PROBLEMA 3.29. Observando-se as propriedades definidoras de um feixe, notamos que tais propriedades garantem a existência de certos objetos globais (seções globais) a partir dos objetos locais (seções locais). Por outro lado, as propriedades definidoras de um pseudogrupo garantem a existência de objetos locais (restrições) a partir de "objetos globais". A conexão entre estes dois conceitos ainda não foi totalmente elucidada (apesar dos trabalhos de Ehresmann sobre o assunto).

PROBLEMA 3.28. Como facilmente pode ser observado, um pseudogrupo C generaliza o pseudogrupo dos isomorfismos dos conjuntos. Quais as condições que se deve impor para caracterizar a categoria dos isomorfismos dos conjuntos? Este problema está relacionado com o problema 3.27.

PROBLEMA 3.29. O tratamento dado aqui às linguagens e os resultados de representação obtidos "clamam" por uma teoria unificada das linguagens formais (ou, ao menos, por uma teoria unificada de uma classe das linguagens formais, às quais poderíamos chamar de geométricas).

PROBLEMA 3.30. As relações existentes entre o enfoque dado neste trabalho ao estudo das linguagens e os recentes tratamentos, via teoria das categorias, dados à lógica, são ainda totalmente desconhecidas.

PROBLEMA 3.31. Alguns teoremas clássicos da teoria dos modelos (compacidade, omissão de tipos) foram já redemonstrados, usando-se o back-and-forth, contudo, neste sentido, muito resta a ser feito. Um tratamento "completo" da teoria dos modelos $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$, via pseudogrupos, mesmo sem grandes pretensões a originalidade, seria, a nosso ver, bem interessante. Observem que muito embora os resultados a serem obtidos sejam conhecidos, sua nova forma e seu significado, em termos da geometria subjacente à linguagem, não o são.

PROBLEMA 3.32. Seguindo-se as demonstrações dos teoremas de representação deste capítulo, facilmente se percebe a gritante semelhança entre os operadores ∂ e operadores que ocorrem na topologia algébrica (operadores de bordo ou cobordo). Por outro lado, nas construções dos grupos de homologia (tome, por exemplo, a simplicial) estão implícitas técnicas de back-and-forth (e, portanto, alguma geometria e, portanto, alguma linguagem). O total esclarecimento destas questões, constitui, sem dúvida, um fascinante problema.

PROBLEMA 3.33. "The theory of Abelian Group is full of hidden(not so hidden) back-and-forth arguments" (J. Barwise [1]). Neste artigo, Barwise faz algumas aplicações do back-and-forth e demonstra alguns resultados em teoria dos grupos. Recentemente, em colaboração com o Prof. Miraglia, obtivemos uma condição de back-and-forth, necessária e suficiente sobre os elementos de duas fórmulas de estruturas $\{A_i\}_{i \in I}$, $\{B_j\}_{j \in J}$, de tal modo que os respectivos limites indutivos sejam $\mathcal{L}_{\omega\omega}^T$ -equivalentes. É bem plausível que aplicações deste resultado possibilite-nos obter informações adicionais sobre os grupos.

PROBLEMAS 3.34. O estudo das linguagens, através do enfoque aqui dado, levanta inúmeros problemas de filosofia e fundamentos das linguagens (formalizadas). Dada a amplitude e complexidade dos mesmos, não os trataremos aqui.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BELL, J.L.; SLOMSON, A.B. - Models and Ultraproducts; North-Holland (1969).
- [2] BELL, E.T. - Development of Mathematics; McGraw-Hill; second edition (1945)
- [3] BOWEN, K.A. - Model Theory for Modal Logic; D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1979).
- [4] CAICEDO, X. - Back-and-Forth Systems for Arbitrary Quantifiers; Mathematical Logic in Latin America, North - Holland (1978).
- [5] DUBIKAJTIS, L. - Sur la Notion de Pseudogroupe de Transformation.
- [6] EHRESMANN, C. - Categories Inductives et Pseudogroupes; Ann. Inst. Fourier, Grenoble 10 (1960), 307-336.
- [7] EHRESMANN, C. - Espèces de Structures Locales; Seminaire de Topologie et de Geometrie Differentiale, Faculté de Sciences de Paris (1961).

- [8] EHRESMANN, C. - Categories et Structures; Dunod, Paris (1965).
- [9] EILEMBERG, S.; MACLANE, S. - General Theory of Natural Equivalences; Trans. Am. Math. Soc. 58, 231-294 (1942).
- [10] FRAISSÉ, R. - Cours de Logique Mathématique; Gauthier - Villars, 2^a edition (1972).
- [11] GOLAB, S. - Tensor Calculus; Elsevier Scientific Publishing Company (1974).
- [12] HAANTJES, J.; SCHOUTEN, J.A. - On the Theory of Geometric Object; Proc. London Math. Soc. 42 (1937), 356-376.
- [13] MACLANE, S. - Categories for the Working Mathematician; Springer-Verlag (1971).
- [14] MITCHELL, B. - Theory of Categories; Academic Press (1965).
- [15] RASIOWA, H. - A Theorem of the Existence of Prime Filter in Post-Algebra and the Completeness Theorem for Some Many-Valued Predicate Calculi; Bull. Acad. Sci. Sér. Math. Astronom, Phys. 17 (1969), 347-354.
- [16] SETTE, A.M. - Partial Isomorphism Extension Method and a Representation Theorem for Post-Languages (a ser publicado).

- [17] SETTE, A.M. -.Back-and-Forth Method and a (Functorial) Representation Theorem (a ser submetido).

- [18] SETTE, A.M. ; SETTE, J.S. - Functiorialization of First Order Language with Finitely Many-Predicate; Atas do I Encontro Brasileiro de Lógica (1977).

- [19] SETTE, A.M.; SZCZERBA, L.W. - Characterization of Elementary Interpretation in Category Theory (a ser submetido).

- [20] THOM, R. - Structural Stability and Morphogenesis ; The Benjamin/Cumming Publishing Company (1975).

- [21] VEBLEN, O.; WHITEHEAD, J.H. The Foundation of Differencial Geometry; Cambridge (1932).

- [22] WYLIE and HILTON. - Homology Theory, Cambridge - University Press (1965).