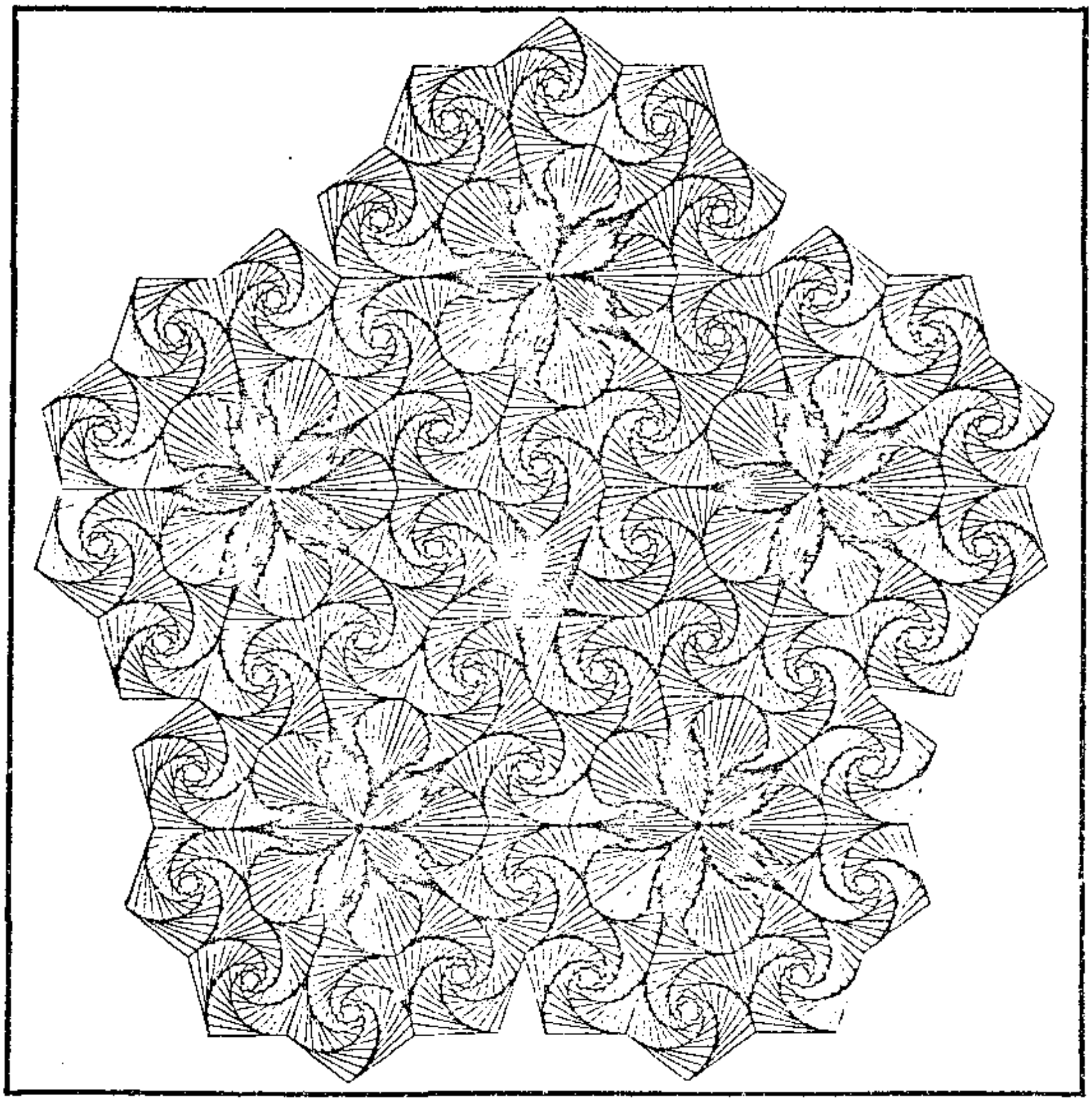
BORDISMO E INVOLUÇÕES

JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL

Tese a ser apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para obtenção do título de Livre Docência (Matemática)

CAMPINAS - SP

1985



"Geometry is a magic that works..."

–R. Thom, 'Stabilité Struturelle et Morphogénèse', 1972.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO 1

1. O ANEL DE COBORDISMO DE THOM 6

2. BORDISMO SINGULAR 15

3. INVOLUÇÕES E BORDISMO 27

4. CALCULO DE $\mathcal{N}_*(BO_K)$ 38

5. A CONSTRUÇÃO DO FIBRADO ESPAÇO PROJETIVO 47

6. O ANEL DAS INVOLUÇÕES 55

7. A ÁLGEBRA DAS INVOLUÇÕES LIVRES 62

8. AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^1 71

9. COMENTÁRIOS 91

BIBLIOGRAFIA 96

INTRODUÇÃO

Em Topologia estudamos as propriedades dos espaços topológicos, das variedades topológicas, das variedades diferenciáveis etc. Na Teoria de Grupo de Transformações (conforme Bredon [35]) estudamos as simetrias de tais objetos, ou mais comumente, estudamos subgrupos dos grupos de simetrias. Esta teoria foi iniciada com os trabalhos de Montgomery e Zippin (veja [132]), nos anos 40. Desde então os problemas nesta área têm interessado a um grande número de matemáticos, os quais fazem uso dos mais variados métodos e técnicas para solucioná-los. O grupo não trivial que primeiro chama atenção é Z_2. Por isto as ações do grupo Z_2 foram as primeiras a serem estudadas. Uma ação (diferenciável) de Z_2 em uma variedade (diferenciável) M nada mais é senão uma aplicação diferenciável $T : M \longrightarrow M$, tal que $T^2 =$ identidade. Uma tal ação é chamada uma involução em M. O estudo destas ações tem ocupado o interêsse de inúmeros matemáticos, nas últimas quatro décadas. Por exemplo, López de Medrano estudou as involuções utilizando métodos e técnicas da Teoria de Cirurgia (veja [114] , [115] , [116]). Conner e Floyd (veja [64]) foram os primeiros a utilizar as técnicas de bordismo no estudo das involuções.

Após os trabalhos de Conner e Floyd, os métodos e técnicas da Teoria de Bordismo foram utilizados extensivamente por um grande número de matemáticos, como se pode ver pela imensa bibliografia ao final dêste trabalho.

Nossa intensão nêste trabalho é apresentar, utilizando os métodos e técnicas de Conner e Floyd, um estudo completo a respeito das involuções. Apresentamos aqui, de uma maneira unificada de tratamento, todos os resultados importantes referentes às involuções. Muitos dêstes resultados já são conhecidos, mas suas demonstrações não são encontradas na literatura matemática conhecida. Muitos resultados apresentados aqui são tratados com um formalismo diverso daquêle em que foram originalmente publicados, visando dar a êste trabalho uma unidade de tratamento. O tratamento adotado aqui, bem como a terminologia e notação utilizadas, dentro do possível são aquêles utilizados por Conner e Floyd em sua monumental obra "Differentiable Periodic Maps" ([64]).

Na Secção 1, apresentamos um estudo completo a respeito do anel de cobordismo de Thom. Nesta secção podem ser encontrados tôdas as definições e conceitos básicos pertinentes ao assunto, bem como todos os resultados mais relevantes, com as referências que julgamos as mais indicadas. Julgamos necessário colocar aqui, não apenas os enunciados dêstes resultados de há muito conhecidos, mas um resumo o mais completo possível da Teoria de Cobordismo, como foi desenvolvida por R. Thom. Pois esta teoria em nossa opinião foi de importância fundamental para o desenvolvimento da Topologia Algébrica e Diferencial. O prêmio Field's Medal atribuido a R. Thom foi em razão de seus trabalhos na Teoria de Cobordismo, bem como o prêmio concedido posteriormente a Milnor e Novikov. A respeito da Teoria de Cobordismo, colocamos aqui as palavras proferidas por H. Hopf por ocasião do Congresso Internacional de Matemática de 1958:

> "... the theory of "Cobordisme" which has, within the few years of its existence, led to the most penetrating insights into the topology of differentiable manifolds".

Na Secção 2, é apresentada a teoria de bordismo singular. O tratamento utilizado é aquêle de Conner e Floyd (veja [64]). Como já dissemos anteriormente, dentro do possível, procuramos manter as notações e terminologias utilizadas por Conner e Floyd na citada obra.

Na Secção 3, iniciamos pròpriamente o estudo das involuções, mostrando inicialmente que as técnicas de bordismo aparecem de maneira natural quando tratamos do estudo das involuções livres de pontos fixos. A seguir, apresentamos a formalização em têrmos da teoria de bordismo, como foi feita por Conner e Floyd. Nesta secção, são definidos os grupos $\mathcal{I}_n$, $\mathcal{B}_n$ e $\mathcal{N}_n(Z_2)$ de bordismo das involuções (sem restrições), das involuções que são livres nos bordos e das involuções livres, respectivamente. São também definidos os respectivos $\mathcal{N}_*$-módulos de bordismo $\mathcal{I}_* = \oplus \mathcal{I}_n$, $\mathcal{B}_* = \oplus \mathcal{B}_n$ e $\mathcal{N}_*(Z_2) = \oplus \mathcal{N}_n(Z_2)$. Após esta formalização, reduzimos o estudo da estrutura algébrica do bordismo das involuções ao estudo dos grupos de bordismo dos espaços classificantes $\mathcal{N}_*(BO_k)$.

Na Secção 4, usando os resultados e técnicas apresentados na secção 2, são calculados explìcitamente os grupos $\mathcal{N}_*(BO_k)$.

Na Secção 5, estudamos detalhada e atentamente a construção do fibrado espaço projetivo (real). Esta construção foi estudada por nós (veja [99]) para o caso complexo. No estudo das involuções esta construção é de grande relevância, como pode ser visto nas secções seguintes do presente trabalho.

Na Secção 6, introduzimos uma noção de produto para involuções, a qual define em $\mathcal{J}_*$ e $\mathcal{B}_*$ estruturas de anéis. Nesta secção apresentamos estas estruturas multiplicativas, exibindo explicitamente os geradores e suas relações. As técnicas utilizadas aqui são, essencialmente, aquelas utilizadas por Alexander (veja [9]), mas adaptadas ao tratamento de Conner e Floyd que adotamos no presente trabalho. Apresentamos aqui as demonstrações completas de todos os resultados obtidos, de modo a contribuir a um melhor entendimento do trabalho de Alexander, bem como para facilitar o posterior estudo das ações semi-livres de S^1.

Na Secção 7, estudamos a estrutura multiplicativa adequada a $\mathcal{T}_*(Z_2)$, a qual é necessàriamente diversa daquela introduzida em $\mathcal{J}_*$, pois a estrutura multiplicativa de $\mathcal{T}_*(Z_2)$, como subanel de $\mathcal{J}_*$, é trivial.

Na Secção 8, aplicamos as técnicas e métodos, utilizados para o estudo das involuções, ao estudo das ações semi-livres de S^1. Êste tipo de análise foi feito inicialmente por Ossa (veja [136]), em sua tese de doutorado, na qual estuda as ações semi-livres de S^1 que preservam a orientação. Ossa em seu trabalho utilizou as técnicas e os métodos análogos aos utilizados por Boardman (veja [28]) no estudo da estrutura multiplicativa das involuções.

Na Secção 9, finalizamos o presente trabalho, apresentando na forma de comentários as conclusões e opiniões que temos a respeito do estudo das involuções e das ações semi-livres de S^1.

Desejamos registrar aqui nossos agradecimentos a diversas pessoas sem o concurso das quais o presente trabalho não teria chegado a um bom têrmo. Inicialmente, nossos agradecimentos ao professor Arunas L. Liulevicius que, no curso de Bordismo Equivariante, ministrado no período de Outono de 1973 no Departamento de Matemática da Universidade de Chicago, nos introduziu ao estudo dos problemas relacionados com involuções em variedades. Muitos dos resultados e demonstrações apresentados aqui são o fruto da orientação paciente e competente do professor Liulevicius. Agradecemos também aos professores e amigos da Universidade de Salerno, com osquais mantive proveitosas conversações e discussões durante a redação dêste trabalho. Um agradecimento especial aos professores M. Carpentieri e A. di Concilio. Ao professor R. Capocelli um agradecimento sincero e reconhecido pelo gentil convite, que tornou possível minha estadia na Universidade de Salerno e a consequente possibilidade de realização do presente trabalho. Aos amigos e colegas do Instituto de Matemática e Estatística e Ciência de Computação da Universidade de Campinas, meus sinceros agradecimentos pela amizade e companheirismo que têm feito de minhas atividades acadêmicas uma fonte de contentamento e de alegrias. Agradecemos também à Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro oferecido durante a realização deste trabalho (conforme processo Nº 84/0192-2).

1. O ANEL DE COBORDISMO DE THOM

Em Topologia Diferencial estudam-se propriedades gerais das variedades. Procuram-se respostas para questões do seguinte tipo:

1. Dadas duas variedades diferenciáveis, sob que condições elas são difeomorfas?

2. Dada uma variedade diferenciável, quando ela pode ser mergulhada em uma outra?

3. Quando uma variedade é o bordo de uma outra?

4. Dada uma variedade, é ela paralelizável?

5. Dada uma variedade qualquer, admite ela uma ação não trivial de algum grupo cíclico?

Cada uma destas questões dá, por assim dizer, origem a uma teoria, na qual procura-se encontrar respostas satisfatórias. Em quase tôdas estas teorias é necessário fazer uso de noções e conceitos de Topologia Algébrica. A primeira questão, por exemplo, é uma questão de classificação. De antemão temos que uma classificação geral não deve ser esperada pois temos o seguinte resultado: dado um grupo finitamente gerado G, pode-se construir uma variedade de dimensão quatro, M(G), cujo grupo fundamental $\pi_1(M(G))$ é G, e de modo que M(G) e M(H) serão homeomorfas se, e sòmente se, G e H são grupos isomorfos (veja [117]). Como não se pode determinar, em geral, quando dois grupos finitamente gerados são isomorfos, vemos que a classificação geral das variedades não poderá ser estabelecida. Nêste exemplo fica clara a importância do uso da Topologia Algébrica no estudo das variedades.

Quanto à terceira questão colocada acima, ela nos leva a introduzir a noção de cobordismo, que é uma relação de equivalência bem mais fraca que difeomorfismo. A primeira descrição desta relação de equivalência é devida a H. Poincaré. Em seu Analysis Situs [140] de 1895, seu conceito de homologia é bàsicamente o mesmo que o conceito de cobordismo usado hoje.

Duas variedades M_1 e M_2, de dimensão m, são cobordantes se existe uma variedade compacta W, de dimensão m+1, com bordo ∂W igual (difeomorfo) à união disjunta de M_1 e M_2. É imediato que a relação de cobordismo é uma relação de equivalência (veja [119]).

A exigência da compacidade de W segue do fato que tôda variedade fechada M é bordo de $M \times [0,1)$. De modo que, se a compacidade não fôsse exigida, a teoria obtida seria trivial.

A classe de cobordismo de uma n-variedade M será denotada por $[M]$. E denotaremos por $\mathcal{N}_n$ o conjunto de tôdas as classes de cobordismo de n-variedades. A operação induzida pela união disjunta faz de $\mathcal{N}_n$ um grupo abeliano, razão pela qual $\mathcal{N}_n$ é chamado o grupo de cobordismo (não orientado) de dimensão n. Temos assim definida uma sequência de grupos abelianos; se denotarmos por

$$\mathcal{N}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$$

a soma direta de todos êsses grupos, temos que $\mathcal{N}_*$ é um anel comutativo com a multiplicação induzida pelo produto cartesiano.

René Thom, em seu famoso trabalho [169], mostrou que $\mathcal{N}_*$ é isomorfo à álgebra polinomial sôbre Z_2, com um gerador Y_n em cada dimensão n, com $n \neq 2^s-1$.

Em seu artigo [169], Thom desenvolveu as três idéias centrais na teoria de cobordismo, a saber:

i. definição dos grupos de cobordismo;

ii. redução a um problema de homotopia; e

iii. determinação de invariantes de cobordismo.

As idéias principais de Thom, para reduzir o problema de cobordismo a um problema de homotopia, são apresentadas de uma maneira bem clara e accessível no livro de Hirsh [90]. Usando argumentos e conceitos, em linguagem para especialistas em Topologia Algébrica, temos nas notas de R. Stong [165], a demonstração do seguinte teorema.

(1.1) TEOREMA: O grupo de cobordismo $\mathcal{N}_n'$ é isomorfo ao

$$\lim_{r \to \infty} \pi_{n+r}(TBO_r, \infty).$$

A estrutura de anel em $\mathcal{N}_*$ é induzida pelas aplicações

$$TBO_r \wedge TBO_s \longrightarrow TBO_{r+s},$$

obtidas da operação de soma de Whitney de fibrados vetoriais.

No teorema acima, TBO_r denota o espaço de Thom sôbre BO_r (veja [165], página 66).

Em [169] Thom mostra que os números de Stiefel-Whitney fornecem todos os invariantes necessários para a determinação dêste tipo de cobordismo. Para definirmos os números de Stiefel-Whitney de uma n-variedade M^n temos que definir inicialmente as classes de Stiefel-Whitney de M^n.

Dada uma n-variedade M^n, temos uma aplicação

$$f : M^n \longrightarrow BO_n \subset BO$$

que classifica o seu fibrado tangente. Como álgebra polinomial sôbre Z_2, temos que $H^*(BO;Z_2)$ é isomorfo a $Z_2[w_1, w_2, \dots]$, onde cada $w_i \in H^i(BO;Z_2)$, $i = 1, 2, \dots$ (estas classes são chamadas as classes características universais). A classe de Stiefel-Whitney de M^n é dada por:

$$W(M) = 1 + w_1(M) + \dots + w_n(M) = f^*(1 + w_1 + w_2 + \dots).$$

Vemos que a i-ésima classe característica de M^n, $w_i(M) \in H^i(M;Z_2)$. Para maiores detalhes e propriedades a respeito destas classes veja [130], [165] ou [94].

Usando estas classes definidas acima, podemos introduzir os números de Stiefel-Whitney, definindo-os do seguinte modo: seja $\mu \in H_n(M;Z_2)$ a classe fundamental de homologia de M. Para qualquer classe de cohomologia $v \in H^n(M;Z_2)$, o índice de Kronecker

$$\langle v , \mu \rangle \in Z_2$$

está definido. Sejam $r_1, r_2, \dots, r_n$ números inteiros não negativos tais que $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$. Então a classe

$$w_1(M)^{r_1} w_2(M)^{r_2} \dots w_n(M)^{r_n} \in H^n(M;Z_2).$$

O número

$$\langle w_1(M)^{r_1} w_2(M)^{r_2} \dots w_n(M)^{r_n}, \mu \rangle \in Z_2$$

é chamado o número de Stiefel-Whitney de M^n (correspondente ao monômio $w_1(M)^{r_1} w_2(M)^{r_2} \dots w_n(M)^{r_n}$).

A relevância dêstes números definidos na página anterior está no seguinte teorema, demonstrado por Thom em [169].

(1.2) TEOREMA (Thom-Pontrjagin): Uma variedade fechada M é bordo se, e sòmente se, todos os seus números de Stiefel-Whitney se anulam.

Pontrjagin, anteriormente a Thom, havia demonstrado a condição necessária.

Para facilitar a determinação de geradores convenientes para a estrutura algébrica de $\mathcal{N}_*$, introduz-se um outro tipo de classes características, as quais são mais apropriadas para se trabalhar com as somas de Whitney de fibrados vetoriais. Para qualquer partição $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ de $k = n(\omega) = i_1 + i_2 + \ldots + i_r$, define-se um polinômio s_ω, em k variáveis, da seguinte maneira: escolha $m \geqslant k$ de modo que as funções elementares $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ em $t_1, \ldots, t_m$ sejam linearmente independentes, e seja

$$s_\omega = s_{(i_1, \ldots, i_r)}$$

o único polinômio satisfazendo a igualdade

$$s_\omega(\sigma_1, \ldots, \sigma_2) = \sum t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r} .$$

Êste polinômio não depende de m. Como exemplos, temos que:

$$s(\ ) = 1$$

$$s_1(\sigma_1) = \sigma_1$$

$$\begin{cases} s_2(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ s_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^3 - 3\,\sigma_1\,\sigma_2 + 3\,\sigma_3 \\ s_{1,2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1\,\sigma_2 - 3\,\sigma_3 \\ s_{1,1,1}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_3 \end{cases}$$

Etc., etc., ...

Considere agora M^n uma n-variedade cuja classe de Stiefel-Whitney é $W = 1 + w_1 + \ldots + w_n$. Para cada partição ω de n temos então definido o correspondente número característico

$$s_\omega(w_1, \ldots, w_n)\left[M^n\right] =$$

$$\langle s_\omega(w_1, \ldots, w_n), \mu \rangle \in Z_2$$

pois $s_\omega(w_1,\ldots,w_n)$ é uma classe de cohomologia em $H^n(M;Z_2)$ e μ é a classe fundamental de homologia de M.

Em [165], R. Stong demonstra o seguinte teorema.

(1.3) TEOREMA : Se RP^n é o espaço projetivo real n-dimensional, então

$$s_{(n)}(W)\left[RP^n\right] = n + 1 \quad \text{mod } Z_2.$$

Na fórmula acima usamos a notação simplificada $(W) = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

Consideremos agora os espaços projetivos reais RP^m e RP^n, de dimensões m e n, respectivamente. Temos as projeções

$$\pi_1 : RP^m \times RP^n \longrightarrow RP^m$$

e

$$\pi_2 : RP^m \times RP^n \longrightarrow RP^n.$$

Sejam $\lambda_n \longrightarrow RP^n$ e $\lambda_m \longrightarrow RP^m$ os fibrados canônicos. Temos então o fibrado 1-dimensional

$$\gamma : \pi_1^*(\lambda_m) \otimes \pi_2^*(\lambda_n) \longrightarrow RP^m \times RP^n$$

formado tomando-se o produto tensorial dos respectivos pull-backs. Sendo γ um fibrado 1-dimensional, êle se classifica em $BO_1 = RP^\infty$. Como $RP^m \times RP^n$ é compacto, existe um inteiro N tal que

$$f(RP^m \times RP^n) \subset RP^N$$

onde $f : RP^m \times RP^n \longrightarrow RP^\infty$ é a função que classifica γ. Deformando se necessário por homotopia f, podemos supor que f é transversa regular em RP^{N-1}. Então

$$H_{m,n} = f^{-1}(RP^{N-1}) \subset RP^m \times RP^n$$

é uma variedade regularmente mergulhada de codimensão 1.

OBSERVAÇÃO: Na verdade $H_{m,n}$ é a hipersuperfície não-singular de grau (1,1) em $RP^m \times RP^n$. Se usarmos coordenadas homogêneas $(u_0,u_1,\ldots,u_m)$ e $(z_0,z_1,\ldots,z_n)$ para denotar os pontos de $RP^m \times RP^n$, respectivamente, então $H_{m,n}$ pode ser identificada como sendo o lugar dos pontos em $RP^m \times RP^n$ que satisfazem a relação

$$u_0 z_0 + \ldots + u_r z_r = 0 ,$$

onde $r = \inf(m,n)$. (Veja [165], páginas 80 e 81).

Em [165], R. Stong demonstra o seguinte teorema.

(1.4) TEOREMA : Se i é um inteiro positivo ímpar não da forma $2^s - 1$, escreva $i = 2^p(2q + 1) - 1$ com $p \geqslant 1$ e $q \geqslant 1$. Seja $m = 2^{p+1}q$ e $n = 2^p$. Considere a hipersuperfície

$$H_{m,n} \subset RP^m \times RP^n.$$

Então temos que

$$s_{(i)}(W)\left[H_{m,n}\right] \neq 0.$$

Usando métodos e técnicas de Liulevicius [112], Stong demonstra em [165], o seguinte teorema.

(1.5) TEOREMA : O anel $\mathcal{N}_*$ é uma álgebra polinomial sôbre Z_2 (com identidade) nas classes Y_i, de dimensão i, i não sendo da forma $2^s - 1$. A classe Y_i pode ser escolhida como a classe de qualquer variedade fechada M^i para a qual o número característico

$$s_{(i)}(W)\left[M\right] \neq 0.$$

Juntando-se ao teorema acima os resultados anteriores (1.3) e (1.4), temos então que:

$$\mathcal{N}_* = Z_2\left[Y_2, Y_4, Y_5, Y_6, Y_8, \ldots\right]$$

com geradores Y_i em tôdas as dimensões i não da forma $2^s - 1$. E podemos tomar $Y_{2r} = \left[RP^{2r}\right]$, e Y_{2r+1} a hipersuperfície $\left[H_{m,n}\right]$ adequada ao teorema (1.4), se $2r + 2$ não é uma potência de 2.

OBSERVAÇÃO: Esta escolha de representantes para os geradores de grau impar é devida a Milnor [126]. Mas na verdade Dold em

[73] foi o primeiro a exibir os representantes dos geradores ímpares. A escolha de Dold é diversa da de Milnor: uma variedade de Dold $P(m,n)$ é a variedade quociente obtida da involução livre $(x,z) \longrightarrow (-x,\bar{z})$ em $S^m \times CP^n$. Se escrevemos $2k = 2^r(2s + 1)$, então o gerador de dimensão $2k - 1$, com $2k - 1 \neq 2^t - 1$, pode ser a classe de $P(2^r - 1, 2^r s)$.

2. BORDISMO SINGULAR

Em [12], Atiyah definiu e estudou os grupos de bordismo singular de um par de espaços topológicos. A teoria de homologia generalizada que se obtem é bastante análoga à teoria de homologia singular. Seguindo sugestão de Atiyah, passaremos a utilizar a terminologia "bordismo" em vez de "cobordismo". Utilizando a exposição de Conner e Floyd [64], apresentaremos nesta secção os conceitos e resultados mais importantes desta teoria. Alguns dos resultados apresentados aqui serão relevantes para os propósitos dêste trabalho.

Fixemos um par (X,A), consistindo de um espaço topológico X e de um subespaço A, contido em X. Uma variedade singular em (X,A) é uma aplicação contínua $f : (B^n, \partial B^n) \longrightarrow (X,A)$, onde B^n é uma n-variedade compacta. Se $A = \emptyset$, então é claro que também $\partial B^n = \emptyset$.

Dizemos que uma variedade singular (B^n,f) em (X,A) borda se, e sòmente se, existe uma variedade compacta C^{n+1} e uma aplicação contínua $F : C^{n+1} \longrightarrow X$ tal que:

i. B^n está contida em ∂C^{n+1} como uma subvariedade regular;

ii. $F \mid B^n = f$ e $f(\partial C^{n+1} - B^n) \subset A$.

Dadas duas variedades singulares (B_1^n, f_1) e (B_2^n, f_2) em (X,A), podemos definir a união disjunta $(B_1^n \cup B_2^n, f_1 \cup f_2)$, com $B_1^n \cap B_2^n = \emptyset$, $(f_1 \cup f_2) \mid B_1^n = f_1$ e $(f_1 \cup f_2) \mid B_2^n = f_2$.

Duas variedades singulares (B_1^n, f_1) e (B_2^n, f_2) em (X,A) são ditas bordantes se, e sòmente se, a união disjunta $(B_1^n \cup B_2^n, f_1 \cup f_2)$ borda em (X,A).

Esta relação é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de bordismo de (B^n, f) por $[B^n, f]$, e por $\mathcal{N}_n(X,A)$ denotaremos a coleção de tôdas as classes de bordismo singular em (X,A) de dimensão n. A operação induzida pela união disjunta torna $\mathcal{N}_n(X,A)$ em um grupo abeliano, isto é,

$$[B_1^n, f_1] + [B_2^n, f_2] = [B_1^n \cup B_2^n, f_1 \cup f_2] .$$

É fácil de se ver que qualquer elemento que borda é um elemento neutro. Também é fácil de se ver que todo elemento é de ordem dois. Chamamos a $\mathcal{N}_n(X,A)$ de grupo de bordismo (não-orientado) n-dimensional de (X,A). Se $A = \emptyset$, denotamos $\mathcal{N}_n(X, \emptyset) = \mathcal{N}_n(X)$.

Se $\mathcal{N}_*(X,A)$ denota a soma direta

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(X,A) ,$$

podemos definir em $\mathcal{N}_*(X,A)$ uma estrutura de módulo graduado sôbre o anel de bordismo de Thom $\mathcal{N}_*$, da seguinte maneira:

Dada uma variedade singular (B^n, f) em (X,A) e uma variedade fechada M^m, uma variedade singular $(B^n \times M^m, g)$ é obtida com $g(x,y) = f(x)$. Definimos uma estrutura de módulo (à direita) colocando

$$[B^n, f]\,[M^m] = [B^n \times M^m, g] .$$

OBSERVAÇÃO : Também se pode obter uma estrutura de módulo à esquerda colocando-se

$$[M^m]\,[B^n, f] = [M^m \times B^n, h]$$

onde $h : M^m \times B^n \longrightarrow X$ é dada por $h(y,x) = f(x)$. Mas na verdade, pode se ver que

$$[M^m]\,[B^n, f] = [B^n, f]\,[M^m] .$$

Dada uma aplicação contínua $\varphi : (X,A) \longrightarrow (X_1, A_1)$ temos associado a ela um homomorfismo natural $\varphi_* : \mathcal{N}_n(X,A) \longrightarrow \mathcal{N}_n(X_1, A_1)$, dado por $\varphi_*[B^n, f] = [B^n, \varphi\circ f]$. Também existe o homomorfismo $\partial : \mathcal{N}_n(X,A) \longrightarrow \mathcal{N}_{n-1}(A)$, dado por

$$\partial\,[B^n, f] = [B^n, f|\partial B^n] .$$

É fácil de ver que ∂ está bem definido e é aditivo. Na verdade φ_* e ∂ são homomorfismos de $\mathcal{N}_*$-módulos de graus 0 e -1, respectivamente.

Temos assim definido um funtor covariante $\{\mathcal{N}_n(X,A), \varphi_*, \partial\}$ na categoria dos pares de espaços topológicos e aplicações de pares. Na verdade êste é um funtor do tipo homologia. O que obtemos é uma teoria de homologia generalizada, onde valem todos os axiomas de Eilenberg-Steenrod para a teoria de homologia, exceto o axioma da dimensão. Para um ponto p, $\mathcal{N}_n(p)$ é o grupo de bordismo $\mathcal{N}_n$ definido na secção anterior. Êste resultado é o teorema (5.1) do livro de Conner e Floyd [64], que anunciamos a seguir.

(2.1) TEOREMA : Na categoria dos pares de espaços e aplicações contínuas de pares o funtor bordismo (não orientado) $\{\mathcal{N}_*(X,A), \varphi_*, \partial\}$ satisfaz os seis primeiros axiomas de Eilenberg-Steenrod para a teoria de homologia. Contudo para um ponto p, temos que $\mathcal{N}_n(p) = \mathcal{N}_n$, o grupo de bordismo (não orientado) de Thom.

Enunciamos agora os axiomas, cujas demonstrações, ou são triviais, ou podem ser encontradas em [64].

(2.2) Se $i : (X,A) \longrightarrow (X,A)$ é a aplicação identidade, então $i_* : \mathcal{N}_n(X,A) \longrightarrow \mathcal{N}_n(X,A)$ é o automorfismo identidade.

(2.3) Se $\varphi : (X,A) \longrightarrow (X_1,A_1)$ e $\psi : (X_1,A_1) \longrightarrow (X_2,A_2)$ são aplicações contínuas, então $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

(2.4) Para qualquer aplicação contínua $\varphi : (X,A) \longrightarrow (X_1,A_1)$ o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \mathcal{N}_{n-1}(A) \arrow[d, "(\varphi|A)_*"] \\ \mathcal{N}_n(X_1,A_1) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{N}_{n-1}(A_1) \end{tikzcd}$$

(2.5) Se $\varphi_0, \varphi_1 : (X,A) \longrightarrow (X_1,A_1)$ são aplicações contínuas homotópicas, então $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$.

(2.6) Para todo par de espaços (X,A) a sequência

$$\longrightarrow \mathcal{N}_n(A) \xrightarrow{i_*} \mathcal{N}_n(X) \xrightarrow{j_*} \mathcal{N}_n(X,A) \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_{n-1}(A) \longrightarrow$$

é exata.

(2.7) Se $\bar{U} \subset \mathrm{Int}(A)$, então a inclusão $i : (X-U,A-U) \longrightarrow (X,A)$ induz um isomorfismo

$$i_* : \mathcal{N}_n(X-U,A-U) \cong \mathcal{N}_n(X,A) .$$

Um grande número de resultados segue diretamente dos seis primeiros axiomas de Eilenberg-Steenrod. Muitos podem ser encontrados em [77]. Alguns estão explìcitamente enunciados e detalhados em Conner e Floyd [64] (veja §6 e §7). Por exemplo, temos os grupos reduzidos de bordismo. Identificando-se $\mathcal{N}_n$ com $\mathcal{N}_n(p)$, onde p é um ponto qualquer, definimos o grupo reduzido $\tilde{\mathcal{N}}_n(X)$ como sendo o núcleo de $\mathcal{E}_* : \mathcal{N}_n(X) \longrightarrow \mathcal{N}_n(p)$, onde $\mathcal{E}$ colapsa X no ponto p. Temos então que

$$\mathcal{N}_n(X) \cong \mathcal{N}_n \oplus \tilde{\mathcal{N}}_n(X) .$$

De modo que uma variedade singular (M^n,f) em X representa um elemento de $\tilde{\mathcal{N}}_n(X)$ se, e sòmente se, $[M^n] = 0$ em $\mathcal{N}_n$.

Se $H_n(X,A;Z_2)$ denota o grupo de homologia singular do par (X,A), temos um homomorfismo natural

$$\mu : \mathcal{N}_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,A;Z_2)$$

definido do seguinte modo: se $[B^n, f] \in \mathcal{N}_n(X,A)$, seja $\sigma_n \in H_n(B^n, \partial B^n; Z_2)$ a classe fundamental de homologia de B^n. Pomos

$$\mu\,[B^n, f] = f_*(\sigma_n) \in H_n(X,A;Z_2).$$

Os seguintes diagramas abaixo são comutativos:

(2.8)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_n(X,A) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & H_n(X,A) \arrow[d, "\varphi_*"] \\
\mathcal{N}_n(X_1,A_1) \arrow[r, "\mu"] & H_n(X_1,A_1)
\end{tikzcd}$$

(2.9)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_n(X,A) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\partial"'] & H_n(X,A) \arrow[d, "\partial"] \\
\mathcal{N}_{n-1}(A) \arrow[r, "\mu"] & H_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

sendo que as aplicações φ_* e ∂ entre os grupos de bordismos são aquelas definidas no início desta secção, e as aplicações φ_* e ∂ entre os grupos de homologia são as usuais.

Dados os pares de espaços (X,A) e (Y,B) temos também um homomorfismo

$$\chi : \mathcal{N}_p(X,A) \otimes \mathcal{N}_q(Y,B) \longrightarrow \mathcal{N}_{p+q}((X,A)\times(Y,B))$$

onde $(X,A)\times(Y,B) = (X\times Y,\ A\times Y \cup X\times B)$, dado da seguinte forma

$$([B^p,f] \otimes [C^q,g]) = [B^p\times C^q,\ f\times g].$$

Se Y é um ponto e B é vazio, obtemos

$$\chi : \mathcal{N}_p(X,A) \otimes \mathcal{N}_q \longrightarrow \mathcal{N}_{p+q}(X,A)$$

que nos fornece exatamente a estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo já descrita anteriormente.

Conner e Floyd em [64] mostram que se (X,A) é um par de CW-complexos, então há uma sequência espectral de bordismo (não orientado) $\{E^r_{p,q},\ d^r\}$ com $E^2_{p,q} \cong H_p(X,A;\mathcal{N}_q)$ e cujo E^∞-têrmo está associado com uma filtração de $\mathcal{N}_*(X,A)$. Observamos que a terminologia e a notação usada por Conner e Floyd em [64] é aquela introduzida por Eilenberg em [42] (veja Capítulo 8).

Na verdade tem-se que

$$H_q(X,A;\mathcal{N}_q) \cong H_p(X,A;Z_2) \otimes \mathcal{N}_q$$

e

$$\chi : E^2_{p,0} \otimes \mathcal{N}_q \cong E^2_{p,q} \qquad \text{para todo p e q.}$$

Em [169], R. Thom demonstrou o seguinte teorema.

(2.10) TEOREMA : Para todo par de CW-complexos (X,A),

$$\mu : \mathcal{N}_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,A;Z_2)$$

é um epimorfismo.

Usando êste teorema de Thom e analisando a sequência espectral de um par de CW-complexos (X,A), Conner e Floyd em [64] demonstram o seguinte teorema.

(2.11) TEOREMA : Para todo par de CW-complexos (X,A), $\mathcal{N}_*(X,A)$ é um $\mathcal{N}_*$-módulo graduado livre isomorfo a $H_*(X,A;Z_2) \otimes \mathcal{N}_*$.

Uma pergunta natural de ser feita é a seguinte: quando se trata de cobordismo, os números de Stiefel-Whitney fornecem os invariantes algébricos que determinam as classes; será que existem classes análogas que determinem as classes de bordismo singular?

A resposta a esta pergunta é positiva, e passamos agora a elaborá-la. Suponhamos que X seja um CW-complexo, e consideremos $\mathcal{N}_*(X)$, isto é, $A = \emptyset$. Seja $[M^n,f] \in \mathcal{N}_n(X)$. Se $h^m \in H^m(X;Z_2)$ é uma classe de cohomologia de X, para cada partição $i_1 + \dots + i_k = n - m$, o número $\langle w_{i_1} \dots w_{i_k} f^*(h^m), \sigma_n \rangle \in Z_2$ está definido (onde os w_i's são as classes características de Stiefel-Whitney de M^n, e $\sigma_n \in H_n(M;Z_2)$ é a classe fundamental de homologia de M^n). Chamamos êste número de número de Whitney da aplicação f associado a h^m. Se h^0 é a identidade de $H^*(X;Z_2)$, então os números de Whitney associados a h^0 são precisamente os números de Stiefel-Whitney de M^n, definidos na secção anterior.

Observe que se $[M^n,f] = 0$, então todos os números de Whitney de $f : M^n \longrightarrow X$ se anulam. Suponha que B^{n+1} seja uma variedade compacta com $\partial B^{n+1} = M^n$ e que $F : B^{n+1} \longrightarrow X$ seja uma aplicação tal que $F \mid M^n = f$. Então temos que

$$\langle w_{i_1} \ldots w_{i_k} f^*(h^m), \sigma_n \rangle =$$

$$\langle i^*\tilde{w}_{i_1} \ldots i^*\tilde{w}_{i_k} \; i^*F^*(h^m), \sigma_n \rangle =$$

$$\langle \tilde{w}_{i_1} \ldots \tilde{w}_{i_k} \; F^*(h^m), i^*\sigma_n \rangle = 0 .$$

De modo que os números de Whitney de f dependem sòmente da classe de bordismo $[M^n, f] \in \mathcal{N}_n(X)$.

Para cada n seja $\{c_{n,i}\}$ uma base aditiva para $H_n(X;Z_2)$. Por (2.10), para cada $c_{n,i}$ podemos escolher uma variedade singular em X, $f_i : M_i^n \longrightarrow X$, com $f_{i_*}(\sigma_n) = c_{n,i}$. Defina $\lambda : H_*(X;Z_2) \otimes \mathcal{N}_* \longrightarrow \mathcal{N}_*(X)$, um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos, colocando

$$\lambda\,(c_{n,i} \otimes 1) = [M_i^n, f_i] \in \mathcal{N}_n(X).$$

Como $H_*(X;Z_2) \otimes \mathcal{N}_*$ é um $\mathcal{N}_*$-módulo graduado livre, temos que está bem definido. Em [64], Conner e Floyd demonstram o seguinte teorema.

(2.12) TEOREMA : O homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos

$$\lambda : H_*(X;Z_2) \otimes \mathcal{N}_* \longrightarrow \mathcal{N}_*(X)$$

é um isomorfismo para todo CW-complexo finito X.

Usando os teoremas (2.11) e (2.12), e mais o fato que para CW-complexos finitos X, a sequência espectral de bordismo não-orientado é trivial, Conner e Floyd em [64] mostram também o seguinte teorema.

(2.13) TEOREMA : Se $f : M^n \longrightarrow X$ é uma variedade singular em um CW-complexo finito X, então $[M^n, f] = 0$ se e sòmente se todos os números de Whitney de f se anulam.

Vemos assim que os números de Whitney são os invariantes algébricos que determinam as classes de bordismo singular em X.

Agora passamos a analisar o caso em que o espaço X é o espaço universal classificante para fibrados vetoriais k-dimensionais, BO_k. Os grupos de bordismo singular em BO_k, $\mathcal{N}_n(BO_k)$, serão de grande importância para os propósitos deste trabalho. Esta é a razão pela qual estudamos com mais atenção este caso particular.

Primeiramente, definimos o conceito de bordismo de fibrados. Sejam $\xi^k \longrightarrow M^n$ e $\eta^k \longrightarrow V^n$ dois fibrados vetoriais k-dimensionais, sôbre os espaços base M^n e V^n, que são variedades fechadas. Dizemos que estes dois fibrados são bordantes se, e sòmente se, existe uma variedade compacta W^{n+1} e um fibrado vetorial k-dimensional, $\lambda^k \longrightarrow W^{n+1}$, tal que $\partial W^{n+1} = M^n \cup V^n$ (união disjunta), e os fibrados $\lambda^k | M^n$ e $\lambda^k | V^n$ são equivalentes aos fibrados ξ^k e η^k, respectivamente.

Esta definição, como veremos a seguir, nos dá uma interpretação, em termos de fibrados vetoriais, do grupo de bordismo singular $\mathcal{N}_n(BO_k)$. De fato, dado um elemento $[M^n, f] \in \mathcal{N}_n(BO_k)$ temos que $f : M^n \longrightarrow BO_k$ é uma aplicação contínua. Consideremos o fibrado induzido $f^*(\gamma_k) \longrightarrow M^n$, onde $\gamma_k \longrightarrow BO_k$ é o fibrado universal k-dimensional.

Se $[M^n, f] = [V^n, g]$ e $F : W^{n+1} \longrightarrow BO_k$ é tal que $\partial W^{n+1} = M^n \cup V^n$, $F \mid M^n = f$ e $F \mid V^n = g$, então $F^*(\gamma_k) \longrightarrow W^{n+1}$ estabelece um bordismo entre $f^*(\gamma_k)$ e $g^*(\gamma_k)$.

Por outro lado, dado um fibrado $\xi^k \longrightarrow M^n$, seja $f : M^n \longrightarrow BO_k$ uma aplicação que classifica ξ^k. Se $g : M^n \longrightarrow BO_k$ também classifica ξ^k, então f é homotópica a g, e portanto $[M^n, f] = [M^n, g]$ em $\mathcal{N}_n(BO_k)$.

Supondo agora que os fibrados vetoriais $\xi^k \longrightarrow M^n$ e $\eta^k \longrightarrow V^n$ sejam bordantes, tomemos $f : M^n \longrightarrow BO_k$ e $g : V^n \longrightarrow BO_k$ aplicações classificantes de ξ^k e η^k, respectivamente. Se $\lambda^k \longrightarrow W^{n+1}$ é um bordismo entre ξ^k e η^k, e seja $F : W^{n+1} \longrightarrow BO_k$ uma aplicação classificante de λ^k. Temos $[M^n, f] = [M^n, F \mid M^n] = [V^n, F \mid V^n] = [V^n, g]$ em $\mathcal{N}_n(BO_k)$.

Existe portanto uma correspondência um a um entre elementos de $\mathcal{N}_n(BO_k)$ e classes de bordismos de fibrados vetoriais k-dimensionais. Denotaremos uma tal classe por $[\xi^k \longrightarrow M^n]$; ou simplesmente por $[\xi^k]$ quando não houver perigo de confusão. A soma de Whitney de fibrados transporta para o conjunto das classes de bordismos a estrutura de grupo abeliano de $\mathcal{N}_n(BO_k)$.

Pelo teorema (2.13), a classe $[\xi^k \longrightarrow M^n]$ é determinada pelos números de Whitney associados. Consideremos a classe de bordismo singular $[M^n, f]$ correspondente. Temos que

$$H^*(BO_k; Z_2) \cong Z_2[w_1, \ldots, w_k]$$

onde $w_i \in H^i(BO_k; Z_2)$ é a i-ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal $\gamma_k \longrightarrow BO_k$ (veja [29]). Assim uma base para o espaço vetorial $H^i(BO_k; Z_2)$ é formada pelos monômios $w_{j_1} \ldots w_{j_s}$, $j_1 + \ldots + j_s = i$, e $f^*(w_{j_1} \ldots w_{j_s}) = \tilde{w}_{j_1} \ldots \tilde{w}_{j_s}$, onde $\tilde{w}_{j_t} \in H^{j_t}(M^n; Z_2)$ denota a j_t-ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado $\xi^k \longrightarrow M^n$. Pelo teorema (2.13), segue que $[\xi^k \longrightarrow M^n] = 0$ se, e sômente se, todos os números

$$\langle \bar{w}_{i_1} \ldots \bar{w}_{i_r} \tilde{w}_{j_1} \ldots \tilde{w}_{j_t}, \sigma_M \rangle$$

se anulam, onde as $\bar{w}_i$'s são as classes de Stiefel-Whitney de M^n, $\sigma_M \in H_n(M^n; Z_2)$ é a classe fundamental de homologia de M^n, e temos que $i_1 + \ldots + i_r + j_1 + \ldots + j_t = n$.

3. INVOLUÇÕES E BORDISMO

Nesta secção estudamos as involuções em variedades, mostrando, como em [98], que é natural utilizarmos as técnicas e métodos da teoria de bordismo em problemas relacionados com aplicações periódicas. Nos anos 60, P. E. Conner e E. E. Floyd foram os primeiros a fazerem uso destas técnicas, mostrando a sua eficácia. A seguir um grande número de matemáticos, usando as idéias de Conner e Floyd, resolveram muitos problemas nesta área, como se pode constatar pela extensa lista bibliográfica ao final dêste trabalho.

Seja M^n uma n-variedade fechada. Uma aplicação diferenciável $T : M^n \longrightarrow M^n$ é uma involução se $T^2 = T \circ T$ = identidade. A involução T é dita livre, se $T(x) \neq x$ para todo x em M^n.

Consideremos o par (M^n,T), onde M^n é uma variedade fechada e $T : M^n \longrightarrow M^n$ é uma involução livre. Em $M \times [-1,1]$ está definida a seguinte relação de equivalência $(m,t) \sim (Tm,-t)$. Seja

$$V = M \times [-1,1] / \sim$$

a variedade quociente. Vemos que V é uma variedade compacta com bordo ∂V, que é o subconjunto obtido de $M \times [-1,1]$, e verificamos que a aplicação $\varphi : M \longrightarrow \partial V$, dada por $\varphi(m) = [(m,1)]$ é um difeomorfismo. Na verdade, acabamos de demonstrar o seguinte teorema.

(3.1) TEOREMA : Se (M^n,T) é uma involução livre, então M^n é bordo.

Este teorema acima mostra claramente uma correlação entre a existência de uma involução livre em uma variedade e o conceito de bordismo. Isto nos motiva a explorar um pouco mais além nesta direçao. Seja $S : V \longrightarrow V$ a involução induzida por $(m,t) \longmapsto (Tm,t)$. Vemos que S deixa ∂V invariante, e pela identificaçao de M^n com ∂V, $\varphi : (M^n,T) \longrightarrow (\partial V, S|\partial V)$, temos que φ é um difeomorfismo equivariante, isto é, $\varphi(Tm) = [(Tm,1)] = S[(m,1)] = S\varphi(m)$. Então vemos que o teorema (3.1), na verdade deve ser enunciado da seguinte forma.

(3.2) TEOREMA : Uma involução livre borda uma variedade com involução.

Este teorema acima nos leva a formalizar esta situação. Consideramos objetos (M^n,T), onde M^n é uma variedade fechada e $T : M^n \longrightarrow M^n$ é uma involução. As involuções (M_1^n,T_1) e (M_2^n,T_2) são bordantes se, e sòmente se, existe uma variedade V^{n+1} com bordo e com uma involução $S : V^{n+1} \longrightarrow V^{n+1}$, tal que ∂V é a união disjunta $M_1^n \cup M_2^n$, e $S|M_1^n = T_1$, $S|M_2^n = T_2$. Esta relação é uma relação de equivalência, e denotamos por $[M^n,T]$ a classe de equivalência da involução (M^n,T). Temos então $\mathcal{J}_n$ o conjunto de todas as classes de involuções em n-variedades fechadas. A operação induzida pela união disjunta define em $\mathcal{J}_n$ uma estrutura de grupo abeliano. Por este motivo $\mathcal{J}_n$ é chamado o grupo de bordismo n-dimensional das involuções.

Se na discussão acima substituimos o têrmo "involução" por "involução livre", obtemos $\mathcal{N}_n(Z_2)$ o grupo de bordismo n-dimensional das involuções livres.

Temos assim definidas duas sequências de grupos abelianos. Se denotarmos

$$\mathcal{J}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_n$$

e

$$\mathcal{N}_*(Z_2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(Z_2)$$

as somas diretas destes grupos, obtemos dois $\mathcal{N}_*$-módulos graduados, pondo

$$[N^m]\,[M^n,T] = [N^m \times M^n, 1 \times T]$$

onde $[N^m] \in \mathcal{N}_m$.

O funtor esquecimento (de que a involução é livre) induz um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos $f : \mathcal{N}_*(Z_2) \longrightarrow \mathcal{J}_*$. O teorema (3.2) afirma então que f é o homomorfismo nulo.

Podemos também introduzir os grupos de bordismo relativo, $\mathcal{B}_n$, da seguinte maneira: os elementos são classes de equivalência de objetos (V^n,T), onde V^n é uma n-variedade com bordo, e $T : V^n \longrightarrow V^n$ é uma involução tal que $T\,|\partial V^n$ é livre. Dizemos que (V,T) e (V',T') são bordantes se, e sòmente se, existe uma variedade compacta W com bordo $\partial W = \partial V \cup \partial V'$ (união disjunta) e uma involução livre $S : W \longrightarrow W$, com $S|\partial V = T|\partial V$, $S|\partial V' = T'|\partial V'$, e de modo que a variedade obtida fazendo-se as colagens pelos bordos

$$V \cup W \cup V' \big/ \partial V \cup \partial V' \equiv \partial W$$

com a involução $T \cup S \cup T'$, borda uma variedade compacta com involução. Esta é realmente uma relação de equivalência, e denotaremos por $\mathcal{B}_n$ o conjunto das classes $[V^n,T]$. Aqui também a operação induzida pela união disjunta define em $\mathcal{B}_n$ uma estrutura de grupo abeliano. Se denotarmos por $\mathcal{B}_*$ a soma direta, $\bigoplus_n \mathcal{B}_n$, destes grupos, vemos que o produto

$$[N^m]\,[V^n,T] = [N^m \times V^n, 1 \times T]$$

com $[N^m] \in \mathcal{N}_m$, define em $\mathcal{B}_*$ uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo.

Temos os seguintes homomorfismos de $\mathcal{N}_*$-módulos: $\partial : \mathcal{B}_* \longrightarrow \mathcal{N}_*(Z_2)$, dado por $\partial[V,T] = [\partial V, T\,\partial V]$, e outro $j : \mathcal{I}_* \longrightarrow \mathcal{B}_*$, dado por $j[M,T] = [M,T]$. O homomorfismo ∂ é de grau -1, e j é de grau 0. Demonstramos a seguir o seguinte teorema.

(3.3) TEOREMA : A sequência de $\mathcal{N}_*$-módulos

$$\longrightarrow \mathcal{N}_*(Z_2) \xrightarrow{\ell} \mathcal{I}_* \xrightarrow{j} \mathcal{B}_* \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_{*-1}(Z_2) \longrightarrow$$

é exata.

Demonstração:

(a) $\ker \mathcal{f} \supset \operatorname{im} \partial$

Isto é, $\mathcal{f}\partial = 0$. Mas isto é óbvio, pois $(\partial V, T|\partial V)$ borda (V,T).

(b) $\ker \mathcal{f} \subset \operatorname{im} \partial$

Seja $\mathcal{f}\alpha = 0$. Dada uma involução (M,T), representando α, tal que é bordo de (V,S), então $\partial(V,S) = (M,T)$.

(c) $\ker j \supset \operatorname{im} \mathcal{f}$

Isto é, $j\mathcal{f} = 0$. Se (M,T) é livre, consideremos então $(M,T)\cup(\emptyset,\emptyset)$. O bordo é vazio, então existe uma variedade com involução livre (M,T), com o mesmo bordo, e tal que $(M,T)\cup(\emptyset,\emptyset)\cup(M,T)$ "coladas" ao longo dos bordos borda $M\times[0,1]$ com a involução dada por $(m,t) \longmapsto (Tm,t)$.

(d) $\ker j \subset \operatorname{im} \mathcal{f}$

Isto é, se $j\alpha = 0$ então $\alpha \in \operatorname{im} \mathcal{f}$. Se $j(M,T) = 0$, então existe uma variedade V compacta tal que $\partial V = \partial M = \emptyset$ e uma involução livre $S : V \longrightarrow V$, tal que $(M,T)\cup(V,S)$, com os bordos identificados, borda. Portanto (M,T) é bordante a (V,S) em $\mathcal{J}_*$, isto é, $(M,T) = \mathcal{f}(V,S) \in \operatorname{im} \mathcal{f}$.

(e) $\ker \partial \supset \operatorname{im} j$

Isto é, $\partial j = 0$. Mas é claro que $\partial j(M,T) = 0$, pois o bordo de M é vazio.

(f) $\ker \partial \subset \operatorname{im} j$

Dada (V,T) com $\partial(V,T) = 0$. Como $\partial(V,T) = 0$ em $\mathcal{N}_*(Z_2)$, isto significa que existe uma involução livre (W,S) com $\partial W = \partial V$, $S|\partial W = T|\partial V$. Seja H a variedade obtida da união $V \cup W$, identificando-se os bordos, munida da involução $T' = T \cup S$. Observe que H é fechada. Considere $H \times [0,1]$ com a involução dada por $T' \times 1$. O bordo consiste de três partes, a saber:

$$(H \times 0,\ T')\ ,\quad (V \times 1,\ T) \quad \text{e} \quad (W \times 1,\ S)$$

sendo esta última uma involução livre. Deste modo vemos que (H,T') e (V,T) são bordantes no grupo relativo. Mas (H,T') vem de j, pois H é fechada. Isto completa a demonstração.■

Podemos agora demonstrar o seguinte teorema.

(3.4) TEOREMA : A sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_* \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{B}_* \xrightarrow{\ \partial\ } \mathcal{N}_{*-1}(Z_2) \longrightarrow 0$$

é exata e se fatora.

Demonstração:

Pelo teorema (3.2), temos que $\not{\ell} = 0$. E pelo teorema (3.3), temos que a sequência é exata. E quando à involução livre (M,T) associamos a variedade V, obtida de $M \times [-1,1]$ passando ao quociente pela relação $(m,t) \sim (Tm,-t)$, com a involução induzida por $T \times 1$, temos na verdade a fatoração (inversa à direita) de ∂.■

Gostariamos de calcular explicitamente estes três $\mathcal{N}_*$-módulos $\mathcal{I}_*$, $\mathcal{B}_*$ e $\mathcal{N}_*(Z_2)$.

Consideremos inicialmente $\mathcal{N}_*(Z_2)$. Seja $T : M^n \longrightarrow M^n$ uma involução livre em uma n-variedade fechada. Então o espaço quociente M/T é uma variedade e a aplicação $\pi : M \longrightarrow M/T$ é um Z_2-fibrado, onde Z_2 age em M através de T, permutando as fôlhas do revestimento. Temos então a aplicação classificante $\rho : M/T \longrightarrow BZ_2 = BO_1 = RP^\infty$.

Por outro lado, se $g : N \longrightarrow BZ_2$ é uma aplicação contínua, o Z_2-fibrado induzido

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{N} & \xrightarrow{g} & EZ_2 & = & S^\infty \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ N & \xrightarrow{g} & BZ_2 & = & RP^\infty \end{array}$$

tem em $\tilde{N}$ uma variedade com uma involução livre. Temos então demonstrado o seguinte teorema.

(3.5) TEOREMA : Os $\mathcal{N}_*$-módulos são isomorfos

$$\mathcal{N}_*(Z_2) \cong \mathcal{N}_*(BO_1) \ .$$

Consideremos agora o bordismo relativo $\mathcal{B}_*$. Seja V uma variedade compacta com bordo, e $T : V \longrightarrow V$ uma involução. Escolha em V uma métrica Riemanniana invariante, de modo que atue em V por isometria. Se $x \in V$ é um ponto fixo de T, isto é, se $T(x) = x$, então a derivada $T^* : \mathcal{T}_x(V) \longrightarrow \mathcal{T}_x(V)$ induz uma involução ortogonal nas fibras do fibrado tangente de V em x, a qual decompõe $\mathcal{T}_x(V)$ no subespaço em que $T^* = 1$, e no subespaço em que $T^* = -1$ (estas sendo as únicas representações ortogonais de Z_2). Para $w \in \mathcal{T}_x(V)$ existe um único caminho em V, começando em x, parametrizado por t (quando t = 0, temos x), de modo que os vetores tangentes ao caminho formem um campo paralelo ao longo do caminho (isto é, uma geodésica, onde t é um múltiplo constante do comprimento de arco) e $f \longmapsto df/dt \,|\, t=0$ é o vetor tangente w (desde que $\|w\|$ seja suficientemente pequeno). Associando a $w \in \mathcal{T}_x(V)$ o ponto do caminho com $t = 1$, define uma aplicação $\exp : \{ w \in \mathcal{T}_x(V);\ \|w\| < \varepsilon \} \longrightarrow V$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno esta aplicação é um difeomorfismo sôbre uma vizinhança de x em V. Como as equações de paralelismo dependem apenas da métrica Riemanniana, que é Z_2-equivariante, temos que a aplicação exp é uma aplicação equivariante. Assim $\exp(T^* w) = T\exp(w)$. Vemos então que o subespaço de $\mathcal{T}_x(V)$, no qual $T^* = 1$, é levado precisamente sôbre os pontos próximos de x, que são fixados por T, e temos assim cartas para o conjunto dos pontos fixos de T, $F = \{ x \in V;\ Tx = x \}$. Logo F é uma subvariedade de V, $F = \bigcup F^k$ a união disjunta de suas componentes k-dimensionais. Como F é fechada em V, e V é compacta, temos que F é compacta. Além disso, o bordo $\partial F = F \cap \partial V$.

Consideremos agora a inclusão $i : F^k \longrightarrow V$, e seja ν^{n-k} o subfibrado de $\mathcal{T}(V) \,|\, F^k$, consistindo dos vetores ortogonais a $i^*(\mathcal{T}(F))$, que é o fibrado normal de F^k em V. Como a métrica Riemanniana é invariante, ν^{n-k} é invariante por T^* (que é multiplicação por -1 nas fibras de ν^{n-k}). Se w está em ν^{n-k}, sôbre o ponto $x \in F^k$, então $\exp(w)$ está em V, o que define $\exp : \{ w \in \nu^{n-k};\ \|w\| < \varepsilon \} \longrightarrow V$, que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno é um difeomorfismo (equivariante) do fibrado $\mathcal{E}$-disco $D(\nu^{n-k})$ sôbre uma vizinhança tubular (Z_2 invariante) de F^k em V.

Se T é uma involução livre em ∂V, então $\partial F^k = \emptyset$, de modo que F^k é uma subvariedade fechada de V, no interior de V, e o fibrado disco $D(\nu^{n-k})$ é uma subvariedade com bordo mergulhada no interior de V. Tomando $\mathcal{E}>0$ suficientemente pequeno, teremos que $D(\nu^{n-k})$ serão disjuntas. Seja $W \subset V$ tal que

$$W = V - \text{Interior}(\bigcup_k D(\nu^{n-k})) .$$

Então $V \times [0,1]$ tem $V \times 0$ e $(\bigcup_k D(\nu^{n-k})) \times 1$ contidos em seu bordo, o restante sendo $\partial V \times [0,1] \cup (W \times 1)$, onde $T \times 1$ age livremente. Logo (V,T) é bordante à união disjunta dos fibrados discos $D(\nu^{n-k})$ sôbre F^k, com a ação dada por -1 nas fibras. Colocando $\nu^{n-k} : F^k \longrightarrow BO_{(n-k)}$ a aplicação classificante do fibrado normal ν^{n-k} sôbre F^k, temos:

(3.6) TEOREMA : Associando a (V,T) as classes das aplicações classificantes $\nu^{n-k} : F^k \longrightarrow BO_{(n-k)}$, define um isomorfismo

$$F : \mathcal{B}_* \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{N}_k(BO_{(n-k)}) = \mathcal{M}_n .$$

Este resultado acima, juntamente com o teorema (3.4), é simplesmente o teorema (28.1) de Conner e Floyd, em [64]. F é chamado o homomorfismo ponto fixo.

Observamos que a fatoração de $\hat{\partial}$ dada na demonstração do teorema (3.4) associa a (M,T) o fibrado disco do fibrado vetorial 1-dimensional associado a $\pi : M \longrightarrow M/T$,

$$M/T = \text{im}\,(M \times 0) \subset \frac{M \times [-1,1]}{(m,t) \sim (Tm,-t)} .$$

Logo o isomorfismo F , dado acima, leva a parcela $\mathcal{N}_{n-1}(BO_1)$ isomòrficamente sôbre $\mathcal{N}_{n-1}(Z_2)$.

É então imediato de se ver que, associando a umá variedade fechada com involução a informação contida nos fibrados normais das componentes de seu conjunto de pontos fixos, isto determina a classe de bordismo, isto é,

$$F \circ j \; : \; \mathcal{I}_n \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{N}_k(BO_{(n-k)}) = \mathcal{M}_n$$

é injetivo, e para (M^n,T) , as classes F^k , ν^{n-k} , com $k \neq n-1$, determinam a classe de F^{n-1} , ν^1 . Logo temos o seguinte teorema.

(3.7) TEOREMA : O homomorfismo ponto fixo

$$F \; : \; \mathcal{I}_n \longrightarrow \bigoplus_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n} \mathcal{N}_k(BO_{(n-k)})$$

é um isomorfismo.

O isomorfismo acima nos dá a estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo de $\mathcal{I}_*$ em têrmos dos grupos de bordismo singular dos espaços classificantes BO_k. Na próxima secção determinamos explicitamente estes grupos de bordismo singular.

4. CÁLCULO DE $\mathcal{N}_*(BO_K)$

Nesta secção calcularemos os grupos de bordismo singular $\mathcal{N}_*(BO_k)$, introduzidos na secção 2 e que serão utilizados a seguir. Iniciamos calculando primeiramente $\mathcal{N}_*(BO_1)$, onde identificamos o espaço classificante $BO_1 = BZ_2$ com RP^{∞}.

Consideremos o espaço topológico $X = Y \times Z$ e seja p um ponto em Z. Temos então os seguintes homomorfismos de $\mathcal{N}_*$-módulos: $(\times p)_* : \mathcal{N}_*(Y) \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y\times Z)$ e $(\mathcal{E}_Y)_* : \mathcal{N}_*(Y\times Z) \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y)$ dados por $(\times p)_* [M,f] = [M,f\times p]$, onde $(f\times p)(x) = (f(x),p)$; e $(\mathcal{E}_Y)_*[N,g] = [N,\pi_1\circ g]$, onde $\pi_1 : Y\times Z \longrightarrow Y$ é a projeção em Y. Claramente temos que $(\mathcal{E}_Y)_*\circ(\times p)_* =$ identidade. Além disso, recordamos que se Y é um ponto q, com a identificação $\mathcal{N}_* = \mathcal{N}_*(q)$, o homomorfismo $(\mathcal{E}_Y)_*$, nêste caso é simplesmente a aumentação $\mathcal{E}_* : \mathcal{N}_*(Z) \longrightarrow \mathcal{N}_*$, dada na secção 2. Recordamos também, que na secção 2 foi introduzido o produto

$$\chi : \mathcal{N}_*(Y) \otimes \mathcal{N}_*(Z) \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y\times Z)$$

que associa a $[M,f] \otimes [N,g]$ a classe de $(M \times N, f \times g)$.

Se $Z = RP^{\infty}$, os elementos de $\mathcal{N}_*(Y \times RP^{\infty})$ podem ser interpretados como sendo classes de equivalências de triplas (M,f,ζ), onde M é uma variedade fechada, $f : M \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua, e ζ é um fibrado linha (1-dimensional) sôbre M. De fato, dada $h : M \longrightarrow Y \times RP^{\infty}$, f é simplesmente $\pi_1 \circ h$ e ζ é o fibrado induzido $(\pi_2 \circ h)^*(\lambda)$, onde $\lambda \longrightarrow RP^{\infty}$ é o fibrado universal sôbre RP^{∞}. Com esta interpretação temos $(\times p)_* [M,f] = [M,f,\theta]$, onde θ é o fibrado linha (1-dimensional) trivial sôbre M; e temos também que $(\mathcal{E}_Y)_* [M,f,\zeta] = [M,f]$.

Temos também um homomorfismo de Smith

$$\Delta_Y : \mathcal{N}_*(Y \times RP^{\infty}) \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y \times RP^{\infty})$$

que é o homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos de grau -1, definido da seguinte maneira: dada a classe representada por (M,f,ζ), seja $g : M \longrightarrow RP^{\infty}$ a aplicação classificante de ζ. Como M é compacta, existe um inteiro positivo N, tal que $g(M) \subset RP^N$, por homotopia em g, podemos supor que $g : M \longrightarrow RP^N$ seja transversa regular a RP^{N-1}. Seja $M' \subset M$ a subvariedade dada por $g^{-1}(RP^{N-1})$ (chamada subvariedade dual a ζ, veja secção 1). Se $i : M' \longrightarrow M$ é a inclusão, denote

$$\Delta_Y [M,f,\zeta] = [M', f \circ i, \zeta | M'] .$$

Observamos que se Y se reduz a um ponto, então Δ_Y é simplesmente o homomorfismo de Smith, $\Delta : \mathcal{N}_*(RP^{\infty}) \longrightarrow \mathcal{N}_*(RP^{\infty})$, dado por Conner e Floyd em [64], nas secções 26 e 34.

Temos o seguinte teorema.

(4.1) TEOREMA : Para qualquer espaço Y, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y) \xrightarrow{(\times p)_*} \mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty) \xrightarrow{\Delta_Y} \mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty) \longrightarrow 0$$

é exata. Além disso, Δ_Y induz um isomorfismo entre o núcleo Ker $(\mathcal{E}_Y)_*$ e $\mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty)$.

Demonstração:

Como $(\mathcal{E}_Y)_* \circ (\times p)_* = 1$, segue-se que $(\times p)_*$ é injetivo. A subvariedade de M dual ao fibrado linha trivial é vazia, pois $g : M \longrightarrow RP^N$ pode ser escolhida de modo que $g(M) \cap RP^{N-1} = \emptyset$; logo $\Delta_Y \circ (\times p)_* = 0$. Se $\Delta_Y [M, f, \zeta] = 0$, seja então $(M', f \circ i, \zeta|M')$ o bordo de (V, g, η). Como o fibrado normal de RP^{N-1} em RP^N é λ (o fibrado canônico), o fibrado de M' em M é $\zeta|M'$, e podemos escolher uma vizinhança tubular $D(\zeta)$ de M' em M. Seja W a variedade obtida de $M \times [0,1] \cup D(\eta)$, identificando-se $D(\eta|M')$ com $D(\zeta) \times 1$ (e reparametrizando-se os ângulos). Como $D(\zeta)$ é homotopicamente equivalente a M', f é homotópica à aplicação $f' : M \longrightarrow Y$ com $f'|D(\zeta) = f|M' \circ \pi$, onde $\pi : D(\zeta) \longrightarrow M'$ é a projeção. Seja $h : W \longrightarrow Y$ definida por $g \circ \pi'$ em $D(\eta)$, onde π' projeta em V e por homotopia de f a f' em $M \times I$. Seja σ o fibrado linha sôbre W dado pelo pull-back de ζ a $M \times I$ e por $\pi'^*(\eta)$ sôbre $D(\eta)$, com o fibrado sôbre $D(\zeta) \times 1$ sendo ζ, que é equivalente a $\pi^*(\zeta|M')$ e portanto é identificado com $\pi'^*(\eta)|D(\eta|M')$. O bordo de (W, h, σ) é dado por duas partes, (M, f, ζ) sôbre $M \times 0$, e uma segunda parte, obtida de $(M - \text{Interior } D(\zeta)) \times 1 \cup S(\eta)$, sôbre a qual σ é trivial. Logo (M, f, ζ) está na imagem de $(\times p)_*$.

Mostraremos agora que Δ_Y é sôbre. Seja dada $[M,f,\zeta]$, e seja $\tilde{M} = RP(\zeta \oplus \theta)$ o espaço total do fibrado espaço projetivo associado a $\zeta \oplus \theta$ (isto é, o fibrado das linhas nas fibras de $\zeta \oplus \theta$), onde $\theta \longrightarrow M$ é o fibrado linha trivial, com $\pi : RP(\zeta \oplus \theta) \longrightarrow M$ sendo a projeção. Seja λ o fibrado linha canônico sôbre $RP(\zeta \oplus \theta)$, com espaço total consistindo de pares (α, x) , onde α é uma linha numa fibra de $\zeta \oplus \theta$ e x é um vetor nesta linha. Associando à classe de (M,f,ζ) a classe de $(\tilde{M}, f\circ\pi, \lambda)$ define um homomorfismo $RP : \mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty) \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty)$. A subvariedade de $RP(\zeta \oplus \theta)$ dual a λ é $RP(\zeta) \approx M$ (via π) e λ se restringe a ζ , de modo que $\Delta_Y \circ RP$ = identidade ; e logo Δ_Y é sôbre.

Além disso, $RP(\zeta \oplus \theta)$ borda a aplicação cilindro de π , que leva em M extendendo π , de modo que $(\mathcal{E}_Y)\circ RP = 0$. Como $\mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty) = \operatorname{Im}(\times p)_* \oplus \operatorname{Ker}(\mathcal{E}_Y)_*$, é imediato que

$$\Delta_Y : \operatorname{Ker}(\mathcal{E}_Y)_* \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty)$$

é um isomorfismo, com inverso dado por RP. ∎

Temos o seguinte corolário.

(4.2) COROLÁRIO : Existem classes (únicas) $x_i \in \mathcal{N}_i(RP^\infty)$, $i \geq 0$, satisfazendo:

i. $x_0 = 1$, a classe do fibrado linha trivial sôbre um ponto;

ii. $\Delta x_i = x_{i-1}$, para $i > 0$, onde $\Delta = \Delta_{ponto}$; e

iii. $\mathcal{E}(x_i) = 0$ em $\mathcal{N}_i$, para $i > 0$, onde $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ponto}$.

Além disso, estas classes formam uma base para o $\mathcal{N}_*$-módulo $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$.

Demonstração:

As propriedades (i), (ii) e (iii) implicam que x_i é obtido aplicando-se a construção RP (fibrado espaço projetivo) i vêzes a x_0. Da sequência exata dada em (4.1), segue-se que estas classes formam uma base.■

Na verdade, estas classes x_i do corolário acima podem ser representadas por variedades com involuções livres bem conhecidas, a saber:

(4.3) COROLÁRIO : O $\mathcal{N}_*$-módulo $\mathcal{N}_*(Z_2)$ é livre com base dada por $\{(S^n,A)\}_{n \geq 0}$, onde $A : S^n \longrightarrow S^n$ é a involução antípoda na n-esfera.

Demonstração:

Uma classe $y_i \in \mathcal{N}_i(RP^\infty)$ é um elemento base admissível se, e sòmente se, $\Delta^i(y_i) = 1$. Em particular, a inclusão $RP^i \hookrightarrow RP^\infty$ correspondendo a (S^i,A) é um elemento base admissível.■

Temos também um outro corolário, que será útil no estudo da estrutura multiplicativa de $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$.

(4.4) COROLÁRIO : Dado um espaço topológico Y qualquer, a multiplicação

$$\chi : \mathcal{N}_*(Y) \otimes \mathcal{N}_*(RP^\infty) \longrightarrow \mathcal{N}_*(Y \times RP^\infty)$$

é um isomorfismo.

Demonstração:

Como $\mathcal{N}_*(Y) \otimes \mathcal{N}_*(RP^\infty)$ é apenas uma soma direta enumerável de cópias de $\mathcal{N}_*(Y)$, cada elemento é da forma $\sum_i \alpha_i \otimes x_i$, com $\alpha_i \in \mathcal{N}_*(Y)$. O isomorfismo é provado fazendo uma indução, usando a sequência exata dada em (4.1).■

Passaremos agora ao cálculo de $\mathcal{N}_*(BO_k)$, onde consideramos BO_k como sendo o espaço dos subespaços n-dimensionais de R^∞ (sequências quase nulas de números reais). Seja $\gamma_k \longrightarrow BO_k$ o fibrado universal, consistindo dos pares (α, x), onde α é um subespaço k-dimensional de R^∞ e $x \in \alpha$. Do fibrado universal $\gamma_k \longrightarrow BO_k$, consideraremos o par $(D(\gamma_k), S(\gamma_k))$, onde temos que $D(\gamma_k)$ é o fibrado disco associado, e $S(\gamma_k)$ é o fibrado esfera associado. A projeção $\pi : D(\gamma_k) \longrightarrow BO_k$ é uma equivalência homotópica, a inversa sendo dada pela secção zero. Para $(\alpha, x) \in S(\gamma_k)$ associamos o subespaço $(k-1)$-dimensional de α ortogonal a x, o que nos dá uma aplicação $\rho : S(\gamma_k) \longrightarrow BO_{(k-1)}$. Para $\beta \in BO_{(k-1)}$, $\rho^{-1}(\beta)$ é o conjunto de todos os pares da forma $(\mathrm{Span}(\beta, x), x)$, com x um vetor unitário ortogonal a β; logo é uma esfera de dimensão infinita, ou seja, é contrátil. Portanto ρ é uma equivalência homotópica (fraca). Temos então uma sequência exata associada ao par de espaços $(D(\gamma_k), S(\gamma_k))$, por (2.6):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_*(S(\gamma_k)) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathcal{N}_*(D(\gamma_k)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathcal{N}_*(D(\gamma_k),S(\gamma_k)) \arrow[ll, bend right, "\partial"'] \\
\mathcal{N}_*(BO_{k-1}) & \mathcal{N}_*(BO_k) &
\end{tikzcd}$$

Tomando o pull-back de γ_k sôbre $S(\gamma_k)$ através de π, $\pi^*(\gamma_k)$ tem uma secção dada sôbre (α,x) por $((\alpha,x),x)$ e o complemento é o espaço (k-1)-dimensional $((\alpha,x),y)$, com y ortogonal a x, que é o pull-back por ρ de γ_{k-1}. Assim vemos que $i_*: \mathcal{N}_*(BO_{k-1}) \longrightarrow \mathcal{N}_*(BO_k)$ é o homomorfismo induzido por $i : BO_{k-1} \longrightarrow BO_k$, que classifica $\gamma_{k-1} \oplus \theta$, com θ o fibrado linha trivial.

Suponhamos agora que seja dada $f : (V, \partial V) \longrightarrow (D(\gamma_k),S(\gamma_k))$, como $BO_k \subset D(\gamma_k)$ é a secção zero, existe um "fibrado vizinhança", e f pode ser deformada (vizinho a $f^{-1}(BO_k)$) a uma $\bar{f}$ transversa regular a BO_k. (Na verdade, f(V) está em $D(\gamma_k^r)$, γ_k^r o fibrado sôbre alguma Grassmanniana de subespaços k-dimensionais em R^{k+r}, que é uma variedade com bordo; faz-se a deformação em $D(\gamma_k^r)$). Assim $\bar{f}^{-1}(BO_k) =$ M é uma subvariedade fechada de codimensão k no interior de V, com $\bar{f} : M \longrightarrow BO_k$, e uma vizinhança tubular de M é levada por uma aplicação fibrada a γ_k por $\bar{f}$. E fazendo outra homotopia em $\bar{f}$, pode se deformar V - vizinhança(M) radialmente em $S(\gamma_k)$. Se $F : V \times I \longrightarrow D(\gamma_k)$ é a homotopia, F é um bordismo entre $f : (V, \partial V) \longrightarrow (D(\gamma_k),S(\gamma_k))$ e $\bar{f} : (D((\bar{f}|M)^*\gamma_k),S((\bar{f}|M)^*\gamma_k)) \longrightarrow (D(\gamma_k),S(\gamma_k))$.

Assim, associando-se a $f : (V, \partial V) \longrightarrow (D(\gamma_k),S(\gamma_k))$ a classe $\bar{f} : M \longrightarrow BO_k$ define o isomorfismo inverso de Thom

$$\Phi^{-1} : \mathcal{N}_m(D(\gamma_k), S(\gamma_k)) \longrightarrow \mathcal{N}_{m-k}(BO_k)$$

com inverso

$$\Phi : \mathcal{N}_{m-k}(BO_k) \longrightarrow \mathcal{N}_m(D(\gamma_k), S(\gamma_k))$$

que associa a $\bar{f} : M \longrightarrow BO_k$ a aplicação $f : D(\bar{f}^* \gamma_k) \longrightarrow D(\gamma_k)$. Portanto, temos a sequência exata

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N}_*(BO_{k-1}) \arrow[r] & \mathcal{N}_*(BO_k) \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{N}_*(BO_k) \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

onde Δ tem grau $-k$, e associa a $f : M \longrightarrow BO_k$ a subvariedade $N \subset M$ dual a $f^*(\gamma_k)$; isto é, se $\zeta \longrightarrow M$ é o fibrado induzido e $z : M \longrightarrow D(\zeta)$ é a secção zero, z é deformada de modo a ser transversa a $z(M)$ e então N é a imagem inversa de $z(M)$.

Para calcularmos $\mathcal{N}_*(BO_k)$, sejam

$$y_i = [RP^i, \lambda] \in \mathcal{N}_i(BO_1),$$

e $y_{i_1} \dots y_{i_k}$ a classe do fibrado k-dimensional $\pi_1^*(\lambda) \oplus \dots \oplus \pi_k^*(\lambda)$ sôbre $RP^{i_1} \times \dots \times RP^{i_k}$, para cada sequência de inteiros $(i_1, \dots, i_k)$, com $i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k$, em $\mathcal{N}_{i_1+\dots+i_k}(BO_k)$.

(4.5) TEOREMA : $\mathcal{N}_*(BO_k)$ é o $\mathcal{N}_*$-módulo livre tendo como base a coleção das classes $y_{i_1} \dots y_{i_k}$.

Demonstração:

BO_o é um ponto, e temos apenas a sequência vazia. Para BO_1, a afirmação acima é o resultado do corolário (4.3). Para $n > 1$, a prova é por indução. Para $y_{i_1} \dots y_{i_{k-1}} \in \mathcal{N}_*(BO_{k-1})$, $i_*(y_{i_1} \dots y_{i_{k-1}})$ é apenas $y_0 y_{i_1} \dots y_{i_{k-1}}$, isto é, apenas adiciona-se um fibrado trivial sôbre um ponto. Também $\Delta(y_{i_1} \dots y_{i_k})$ é dada por $y_{i_1 -1} \dots y_{i_k -1}$, pois $RP^{i-1} \subset RP^i$ é dual a λ. E vemos que o resultado é válido, usando-se a sequência exata.∎

OBSERVAÇÃO: A sequência exata no caso em que $k = 1$ é exatamente a sequência de Smith

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_* \arrow[r] & \mathcal{N}_*(RP^\infty) \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{N}_*(RP^\infty) \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}
$$

do teorema (4.1), onde Y se reduz a um ponto p, e indificamos $\mathcal{N}_*$ com $\mathcal{N}_*(p)$.

5. A CONSTRUÇÃO DO FIBRADO ESPAÇO PROJETIVO

Na secção anterior usamos, na demonstração do teorema (4.1), a construção do fibrado espaço projetivo (real). Nesta secção analisaremos mais atentamente esta construção.

Seja $\xi \xrightarrow{\pi} V^m$ um fibrado (real) k-dimensional sôbre uma m-variedade fechada. Seja $S(\xi) \longrightarrow V^m$ o fibrado (k-1)-esfera associado, isto é, a fibra é a esfera S^{k-1} de dimensão k-1 na fibra de ξ, e o grupo estrutural é $O(k)$. Observamos que $S(\xi)$ é uma (m+k-1)-variedade. A aplicação antípoda $A : S^{k-1} \longrightarrow S^{k-1}$ está no centro de $O(k)$, logo temos uma involução livre $(S(\xi),T)$, que preserva as fibras, e que em cada fibra se reduz à aplicação antípoda. Conner e Floyd chamam $(S(\xi),T)$ de "involução fibrada" (veja [60]).

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} S(\xi) \arrow[rr] \arrow[dr, "q"'] & & S(\xi)/T \arrow[dl, "p"] \\ & V^m & \end{tikzcd}$$

Denotamos por $RP(\zeta)$ o espaço quociente $S(\zeta)/T$. Vemos que $p : RP(\zeta) \longrightarrow V^m$ é um fibrado, tendo o espaço projetivo real RP^{k-1} como fibra. Chamamos êste fibrado de "fibrado espaço projetivo (real)". Vemos também que $RP(\zeta)$ é uma $(m+k-1)$-variedade fechada. E temos o fibrado linha (1-dimensional) canônico $\hat{\zeta} \longrightarrow RP(\zeta)$, um ponto no espaço total de $\hat{\zeta}$ sendo um par, consistindo de uma linha $\pi^{-1}(x)$, $x \in V^m$, juntamente com um vetor nesta linha. Denotemos por $c = c(\hat{\zeta}) \in H^1(RP(\zeta);Z_2)$ a classe característica deste fibrado. Se $i : RP^{k-1} \subset RP(\zeta)$ é uma fibra, então pela naturalidade das classes de Stiefel-Whitney a imagem de $c \in H^1(RP(\zeta);Z_2)$ por $i^* : H^1(RP(\zeta);Z_2) \longrightarrow H^1(RP^{k-1};Z_2)$ é o gerador de $H^*(RP^{k-1};Z_2)$. A fibra RP^{k-1} é assim totalmente não-homóloga a zero em $RP(\zeta)$. Pelo teorema de Leray-Hirsh (veja [30], página 129) a sequência espectral mod Z_2 de p colapsa. Segue-se que para qualquer classe $h^r \in H^r(RP(\zeta),Z_2)$ existem classes únicas $e_r, e_{r-1}, \ldots, e_{r-k+1}$ em $H^*(V^m;Z_2)$ para as quais $h^r = p^*(e_r) + p^*(e_{r-1})\,c + \ldots + p^*(e_{r-k+1})\,c^{k-1}$.

Consideremos agora o fibrado tangente, τ, a $RP(\zeta)$. A aplicação p fatora τ na soma de Whitney $\tau_1 \oplus \tau_2$ (veja [32], página 482). Onde τ_1 é o fibrado normal à fibra e τ_2 é o fibrado tangente à fibra. Por naturalidade, a classe total de Whitney de τ_1 é $1 + p^*(w_1) + \ldots + p^*(w_m)$, onde as w_i's são as classes de Stiefel-Whitney de V^m. A classe total de Whitney de τ_2 foi calculada por Borel-Hirzebruch (veja [32], página 517).

(5.1) TEOREMA (Borel-Hirzebruch) : A classe total de Whitney do fibrado tangente τ_2 ao longo da fibra em $RP(\zeta)$ é dada por $(1+c)^k + (1+c)^{k-1}p^*(v_1) + \ldots + p^*(v_k)$, onde as v_i's são as classes de Whitney do fibrado k-dimensional $\zeta \longrightarrow V^m$. Como τ_2 é um fibrado (k-1)-dimensional, segue-se que

$$c^k = c^{k-1}p^*(v_1) + \ldots + p^*(v_k) .$$

Assim a classe total de Stiefel-Whitney de $RP(\zeta)$ é

$$\left(\sum_0^m p^*(w_j)\right) \left(\sum_0^k (1 + c)^{k-j} p^*(v_j)\right) .$$

Explìcitamente,

$$W_n = \sum_{p+q+r=n} \binom{k-p}{q} p^*(w_r v_p) c^q .$$

Denotaremos por $\theta^n \longrightarrow V^m$ o fibrado n-dimensional trivial sôbre V^m. Seja $\mathcal{M}_* = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathcal{N}_{*-k}(BO_k)$. Usando a construção dada acima, podemos definir o seguinte homomorfismo

$$P : \mathcal{M}_* \longrightarrow \mathcal{N}_{*-1}(RP^{\infty})$$

colocando $P(\sum [\zeta]) = \sum [\hat{\zeta}]$, onde $[\zeta]$ denota a classe do fibrado $\zeta \longrightarrow V^m$, $[\hat{\zeta}]$ denota a classe do fibrado linha (1-dimensional) canônico $\hat{\zeta} \longrightarrow RP(\zeta)$, definido anteriormente. Tomando a aumentação $\mathcal{E}_* : \mathcal{N}_*(RP^{\infty}) \longrightarrow \mathcal{N}_*$, o homomorfismo composto $\mathcal{E}_* \circ P : \mathcal{M}_* \longrightarrow \mathcal{N}_{*-1}$ fornece um método de construção de classes indecomponíveis de bordismo. Conner e Floyd , em [66], apresentam muitos resultados pesquisando nesta direção.

Momentâneamente, retornamos a analisar a sequência exata dada em (3.4). Isto é, o teorema (3.4) nos diz que a sequência abaixo é exata e se fatora

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_* \xrightarrow{j} \mathcal{B}_* \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_*(Z_2) \longrightarrow 0$$

Com a identificação

$$\mathcal{B}_n \cong \mathcal{M}_n = \bigoplus_{k \geq 0}^{n} \mathcal{N}_k(BO_{n-k})$$

dada em (3.6). A sequência exata acima se reduz à sequência dada por Conner e Floyd em [64] (teorema (28.1)); a saber:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_n \xrightarrow{i_*} \mathcal{M}_n \xrightarrow{J} \mathcal{N}_{n-1}(Z_2) \longrightarrow 0$$

onde i_* é a nossa aplicação $F : \mathcal{B}_n \longrightarrow \mathcal{M}_n$, dada em (3.6), restrita a $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{B}_n$. A aplicação J é a soma dos seguintes homomorfismos $\mathcal{N}_k(BO_{n-k}) \longrightarrow \mathcal{N}_{n-1}(Z_2)$, dados assim: se $\xi \longrightarrow V^k$ é um fibrado $(n-k)$-dimensional sôbre uma k-variedade fechada, associamos a êle a involução fibrada $(S(\xi),T)$, introduzida no início desta secção. É fácil de se ver que o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_n \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i_*"'] & \mathcal{B}_n \arrow[r] \arrow[d, "F"', "\cong"] & \mathcal{N}_{n-1}(Z_2) \arrow[r] \arrow[dl, "J"] & 0 \\ & & \mathcal{M}_n & & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Por (3.5), temos também a identificação $\mathcal{N}_n(Z_2) \cong \mathcal{N}_n(RP^\infty)$. E também é fácil de se ver que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_n \arrow[r, "J"] \arrow[dr, "\partial'"'] & \mathcal{N}_{n-1}(Z_2) \arrow[d, phantom, "\| \wr"] \\ & \mathcal{N}_{n-1}(RP^{\infty}) \end{tikzcd}$$

onde ∂' é dado pela soma dos seguintes homomorfismos: se $[\xi \longrightarrow V^k]$ está em $\mathcal{N}_k(BO_{n-k})$, então $\partial'[\xi] = [\hat{\xi} \longrightarrow RP(\xi)]$. Temos então agora a seguinte sequência exata

$$(5.2) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{I}_n \xrightarrow{i_*} \mathcal{M}_n \xrightarrow{\partial'} \mathcal{N}_{n-1}(RP^{\infty}) \longrightarrow 0$$

O homomorfismo $g_* : \mathcal{N}_{n-1}(RP^{\infty}) \longrightarrow \mathcal{M}_n$, que fatora a sequência acima, e que corresponde à construção dada em (3.4), nada mais é senão associar-se ao Z_2-fibrado principal $S(\xi) \longrightarrow RP(\xi)$, o seu fibrado linha (1-dimensional) associado $\hat{\xi} \longrightarrow RP(\xi)$, que chamamos anteriormente de fibrado linha canônico. Isto é, se a aplicação $f : RP(\xi) \longrightarrow RP^{\infty}$, classifica $S(\xi) \longrightarrow RP(\xi)$, então $g_*[RP(\xi) \xrightarrow{f} RP^{\infty}] = [\hat{\xi} \longrightarrow RP(\xi)]$.

Dada a classe $[\xi \longrightarrow V^k] \in \mathcal{N}_k(BO_{n-k})$, considere a classe da seguinte involução $(RP(\xi \oplus \theta), \rho)$, onde θ é o fibrado linha trivial, e ρ é a involução dada por $\rho\langle u,t\rangle = \langle -u,t\rangle$, com $u \in \xi$ e $t \in \theta$. O conjunto dos pontos fixos de ρ é a união $V^k \cup RP(\xi)$, sendo que ξ é o fibrado normal de $V^k \subset RP(\xi \oplus \theta)$, e $\hat{\xi}$ é o fibrado normal de $RP(\xi) \subset RP(\xi \oplus \theta)$.

Consideremos agora o homomorfismo

$$G : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{I}_n$$

dado por $G(\sum[\xi]) = \sum[RP(\xi \oplus \theta), \rho]$.

Temos então o seguinte teorema:

(5.3) TEOREMA : Se (M^n,T) é uma involução em uma n-variedade fechada, e se o conjunto dos pontos fixos de T, $F = \bigcup F^{n-k}$, é a união disjunta das componentes (n-k)-dimensionais. Denotando por $\nu^k \longrightarrow F^{n-k}$ o fibrado normal de F^{n-k} em M^n, então

$$[M^n,T] = \sum_k [RP(\nu^k \oplus \theta), \rho] \quad \text{em} \quad \mathcal{J}_n.$$

Demonstração:

Tomando a imagem de $i_* : \mathcal{J}_n \longrightarrow \mathcal{N}_n$, temos que

$$i_*[M^n,T] + \sum_k i_*[RP(\nu^k \oplus \theta), \rho] =$$

$$= \sum_k \left([\nu^k] + [\nu^k] + [\hat{\nu}^k] \right) =$$

$$= \sum_k [\hat{\nu}^k].$$

Como $\hat{\nu}^k$ é o fibrado linha associado ao Z_2-fibrado principal $S(\nu^k) \longrightarrow RP(\nu^k)$, então

$$\sum [\hat{\nu}^k] = g_* \partial' (\sum [\nu^k]) =$$

$$= g_* \partial' i_* [M^n,T] = 0$$

pois $\partial' i_* = 0$. Como i_* é um homomorfismo injetivo, temos que o teorema é valido.∎

Temos o seguinte corolário:

(5.4) COROLÁRIO : O homomorfismo $G : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{J}_n$ é um inverso à esquerda do homomorfismo $i_* : \mathcal{J}_n \longrightarrow \mathcal{M}_n$ da sequência exata (5.2); isto é, $G\, i_* =$ identidade.

Com o corolário seguinte temos novamente o resultado dado no teorema (3.7).

(5.5) COROLÁRIO : O homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos

$$G \;:\; \bigoplus_{\substack{k\geq 0\\ k\neq 1}} \mathcal{N}_{n-k}(BO_k) \longrightarrow \mathcal{J}_n$$

é um isomorfismo.

Retornando a analisar o homomorfismo $P : \mathcal{M}_* \longrightarrow \mathcal{N}_{*-1}(RP^{\infty})$, dado pela construção do fibrado espaço projetivo (real), observamos inicialmente, que todos os resultados apresentados na secção 2 de nosso artigo [99], onde tratamos da construção do fibrado espaço projetivo complexo, admitem versões correspondentes para o presente caso de P.

Temos, por exemplo, a versão para o caso real do corolário (3.1) de [99], a saber:

(5.6) LEMA : Se $\lambda_n \longrightarrow RP^n$ é o fibrado linha (1-dimensional) canônico sôbre RP^n, $\theta^k \longrightarrow RP^n$ é o fibrado k-dimensional trivial, então

$$s_{n+k}(W)\left[RP(\lambda_n \oplus \theta^k)\right] = \sum_{q=0}^{n} \binom{n+k}{q} + k \;.$$

Usando este lema e o resultado do teorema (1.5) temos:

(5.7) COROLÁRIO : A classe de $RP(\lambda_n \oplus \theta^k)$ é indecomponível se, e sòmente se, $\sum_{q=0}^{n} \binom{n+k}{q} = k + 1 \pmod 2$.

Seja n um número ímpar, para o qual temos que $n + 1 = 2^p(2q + 1)$, com $q > 0$. Denotemos $r = 2^p$ e seja $s = q\, 2^{p+1} - 1$. Usando o resultado do corolário acima, Conner e Floyd demonstram, em [66], o seguinte teorema:

(5.8) TEOREMA : A classe de $RP(\lambda_r \oplus \theta^s)$ é indecomponível em $\mathcal{T}_n$.

6. O ANEL DAS INVOLUÇÕES

Nesta secção definimos produtos de involuções, de modo que em $\mathcal{I}_*$ e $\mathcal{B}_*$ estejam definidas estruturas de álgebras. Calculamos explìcitamente estas estruturas, usando os métodos e técnicas desenvolvidos por J. C. Alexander em [9].

Sejam (V,T) e (W,S) duas variedades compactas, com bordo, com involuções que são livres nos bordos. Temos então a involução $T \times S : V \times W \longrightarrow V \times W$, dada por $(T \times S)(v,w) = (Tv, Sw)$. Reparametrizando os cantos (isto é, escolhendo cartas ao longo de $\partial V \times \partial W$) podemos fazer de $V \times W$ uma variedade com bordo, de modo que temos um par $(V \times W, T \times S)$, com $\partial(V \times W) = (\partial V) \times W \cup V \times (\partial W)$ onde $T \times S$ é livre. Este produto define em $\mathcal{B}_*$ uma estrutura de álgebra sôbre o anel de bordismo $\mathcal{N}_*$.

Se V e W são variedades fechadas, então $V \times W$ também é fechada, e este produto dado acima, também define uma estrutura de álgebra sôbre $\mathcal{N}_*$ em $\mathcal{I}_*$. Além disso, vemos que o homomorfismo $j : \mathcal{T}_* \longrightarrow \mathcal{B}_*$, dado em (3.3), é agora um homomorfismo de álgebras.

Se consideramos agora o conjunto, $Fix(T \times S)$, dos pontos fixos de $T \times S$ em $V \times W$, temos que $(T \times S)(v,w) = (v,w)$ se, e sòmente se, $T(v) = v$ e $S(w) = w$. De modo que $Fix(T \times S) = Fix(T) \times Fix(S)$. Claramente, o fibrado normal do produto $Fix(T) \times Fix(S)$ é a soma de Whitney do fibrado normal de $Fix(T)$ com o fibrado normal de $Fix(S)$. Assim o homomorfismo, dado no teorema (3.6),

$$F : \mathcal{B}_* \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \breve{\mathcal{N}}_k(BO_{*-k}) = \mathcal{M}_*$$

se torna um homomorfismo de álgebras, se à soma direta $\mathcal{M}_*$ é dado o produto

$$\breve{\mathcal{N}}_k(BO_n) \otimes \breve{\mathcal{N}}_r(BO_m) \xrightarrow{\ \chi\ } \breve{\mathcal{N}}_{k+r}(BO_n \times BO_m) \xrightarrow{\ \oplus\ }$$

$$\longrightarrow \breve{\mathcal{N}}_{k+r}(BO_{n+m})$$

que associa $(M,\xi) \otimes (N,\eta)$ a $(M \times N, \pi_1^*(\xi) \oplus \pi_2^*(\eta))$, onde π_1 e π_2 são as projeções no primeiro e no segundo fatores, respectivamente.

Recordamos que, em (5.2), está o homomorfismo $i_*: \mathcal{T}_* \longrightarrow \mathcal{M}_*$, que nada mais é senão o homomorfismo composto $F \circ j$. Portanto, temos que i_* é um homomorfismo de álgebras.

Denotando por $1 \in \mathcal{N}_0(BO_0)$ o fibrado 0-dimensional trivial sôbre um ponto, e por $\alpha_i = (RP^{i-1}, \lambda) \in \breve{\mathcal{N}}_{i-1}(BO_1)$, a classe do fibrado linha (1-dimensional) canônico sôbre RP^{i-1}, temos o seguinte teorema:

(6.1) TEOREMA : $\mathcal{M}_*$ é a algebra polinomial sôbre $\mathcal{N}_*$ nas classes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Demonstração:

Como $\alpha_{i_1+1} \ldots \alpha_{i_n+1}$ é a classe de $y_{i_1} \ldots y_{i_n}$ em $\mathcal{N}_{i_1+\ldots+i_n}(BO_n)$, dada no teorema (4.5), vemos que os monômios nas classes α_i's formam uma $\mathcal{N}_*$-base para a soma direta.∎

Gostariamos agora de descrever a estrutura multiplicativa de $\mathcal{I}_*$. Para isto introduzimos as involuções (RP^r, T_0), onde T_0 é a involução dada por $T_0[x_0, x_1, \ldots, x_r] = [-x_0, x_1, \ldots, x_r]$. Denotamos por P_0^r a classe de (RP^r, T_0). O conjunto dos pontos fixos de T_0 consiste de duas partes: aqueles pontos $[x_0, x_1, \ldots, x_r]$ com $x_0 = 0$, que é $RP^{r-1} \subset RP^r$, com fibrado normal sendo o fibrado linha canônico λ; e aquêles pontos $[x_0, x_1, \ldots, x_r]$, com $x_1 = \ldots = x_r = 0$, que é RP^0, com fibrado normal um fibrado r-dimensional trivial. Deste modo, temos que $i_*(P_0^r) = \alpha_r + \alpha_1^r$ em $\mathcal{M}_r$. Observe que $i_*(P_0^1) = 0$ e que $P_0^1 = 0$.

Definimos agora uma operação $\Gamma : \mathcal{I}_* \longrightarrow \mathcal{I}_*$, que associa à classe de (M,T) a classe de (M',T'), onde M' é a variedade obtida de $M \times S^1$, identificando-se (m,z) com $(Tm,-z)$, e T' é a involução dada por $T'(m,z) = (m,\bar{z})$, onde $\bar{z}$ é o complexo conjugado de z (compare [66], §4).

(6.2) LEMA : Se $\mathcal{E} : \mathcal{J}_* \longrightarrow \mathcal{N}_*$ é a aumentação, então temos

$$i_*(\Gamma(M,T)) = \alpha_1\, i_*(M,T) + \mathcal{E}(M,T)\,\alpha_1.$$

Demonstração:

Denotando por $[(m,z)]$ a classe de (m,z), temos que $T'[(m,z)] = [(m,\bar{z})]$. Agora temos que $T'[(m,z)] = [(m,\bar{z})] = [(m,z)]$ se, e sòmente se, $(m,z) = (m,\bar{z})$ ou $(m,z) = (Tm,-\bar{z})$.

Agora $(m,z) = (m,\bar{z})$ sòmente para $z = \pm 1$, e $M \times \{1\}$ é identificado com $M \times \{-1\}$ em M'. Em particular, $\{(m,z);\ Re(z) > 0\}$ é levado difeomòrficamente em uma vizinhança tubular da imagem de $M \times \{1\}$. Deste modo, temos que a componente do conjunto dos pontos fixos é uma cópia de M, com fibrado normal um fibrado linha trivial, isto é, $\mathcal{E}(M,T)\alpha_1$.

Por outro lado, $(m,z) = (Tm,-\bar{z})$ sòmente para $Tm = m$, isto é, $m \in Fix(T)$, e $z = -\bar{z}$ ou seja $z = \pm i$. Agora, $\{(m,z);\ Im(z) > 0\}$ é levado difeomòrficamente em uma vizinhança tubular da imagem de $M \times \{i\}$ em M', e o fibrado normal da imagem de $Fix(T) \times \{i\}$ em M' é a soma de Whitney do fibrado normal da imagem de $M \times \{i\}$, isto é, o fibrado normal de $Fix(T)$ em M, e a restrição do fibrado normal da imagem de $M \times \{i\}$ em M', que é um fibrado linha trivial. Assim esta outra componente é $\alpha_1\, i_*(M,T)$. ∎

Temos também o seguinte lema.

(6.3) LEMA : Temos que, para todo α, $\beta \in \mathcal{J}_*$, vale

$$\Gamma(\alpha\beta) = \Gamma(\alpha)\beta + \mathcal{E}(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Demonstração:

Aplicando o homomorfismo i_* temos que

$$\begin{aligned}
i_*(\Gamma(\alpha\beta)) &= \alpha_1\, i_*(\alpha\beta) + \mathcal{E}(\alpha\beta)\alpha_1 \\
&= \alpha_1\, i_*(\alpha)\cdot i_*(\beta) + \mathcal{E}(\alpha\beta)\alpha_1 \\
&= \alpha_1\, i_*(\alpha)\, i_*(\beta) + \mathcal{E}(\alpha)\alpha_1\, i_*(\beta) + \\
&\qquad \mathcal{E}(\alpha)\alpha_1\, i_*(\beta) + \mathcal{E}(\alpha)\mathcal{E}(\beta)\alpha_1 \\
&= (i_*\Gamma(\alpha))\, i_*(\beta) + \mathcal{E}(\alpha)\, i_*\Gamma(\beta) \\
&= i_*(\Gamma(\alpha)\beta + \mathcal{E}(\alpha)\Gamma(\beta)).
\end{aligned}$$

E como i_* é injetivo, temos que a afirmação é verdadeira.■

Agora temos o seguinte teorema, que é devido a J. C. Alexander (veja [9]).

(6.4) TEOREMA (Alexander) : $\mathcal{J}_*$ é gerado como álgebra sôbre $\mathcal{N}_*$ pelos elementos $\Gamma^k(P_0^r)$, com $k \geqslant 0$, $r \neq 1$, e com as relações provenientes de

$$\Gamma(\alpha\beta) = \Gamma(\alpha)\beta + \mathcal{E}(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Especìficamente, uma base de $\mathcal{J}_*$ sôbre $\mathcal{N}_*$ é dada pelos elementos

$$(\Gamma^k(P_0^{j_1}).P_0^{j_2}. \ldots . P_0^{j_r}$$

com $k \geqslant 0$, $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \cdots \geqslant j_r > 1$.

(Observe que $P_o^0 = \Gamma^0(P_o^0) = 1$, enquanto que $\Gamma(P_o^0) = 0$. Para $r = 0$, o elemento da base é entendido como sendo 1).

Demonstração:

Primeiramente temos que

$$
\begin{aligned}
(\Gamma^k(P_o^j))\,(\Gamma^s(P_o^m)) &= (\Gamma^k(P_o^j))\,\Gamma\,(\Gamma^{s-1}(P_o^m)) \\
&= \Gamma((\Gamma^k P_o^j).(\Gamma^{s-1} P_o^m)) + \\
&\qquad \mathcal{E}\,(\Gamma^{s-1} P_o^m)\Gamma^{k+1} P_o^j \\
&= (\Gamma^{k+1} P_o^j).(\Gamma^{s-1} P_o^m) + (\mathcal{E}\,\Gamma^k P_o^j) + \\
&\qquad \mathcal{E}\,(\Gamma^{s-1} P_o^m)\Gamma^{k+1} P_o^j \\
&= (\Gamma^{k+2} P_o^j).(\Gamma^{s-2} P_o^m) + (\mathcal{E}\,\Gamma^{k+1} P_o^j)\Gamma^{s-1}P_o^m + \\
&\qquad (\mathcal{E}\,\Gamma^k P_o^j)\Gamma^s P_o^m + \mathcal{E}\,(\Gamma^{s-1} P_o^m)\Gamma^{k+1} P_o^j \\
&= \Gamma^{k+s} P_o^j.P_o^m + \sum_{t=0}^{s-1} \mathcal{E}\,(\Gamma^{k+t} P_o^j)\Gamma^{s-t} P_o^m + \\
&\qquad \sum_{t=1}^{s} \mathcal{E}\,(\Gamma^{s-t} P_o^m)\Gamma^{k+t} P_o^j
\end{aligned}
$$

De modo que todo elemento da subalgebra gerada por $\Gamma^k P_o^j$, para todo k e j está no Span dos elementos básicos propostos.

Agora, aplicando-se i_* a $(\Gamma^k P_o^{j_1}) P_o^{j_2} \ldots P_o^{j_r}$, obtemos $\alpha_1^k \alpha_{j_1}\alpha_{j_2} \ldots \alpha_{j_r}$ adicionado a outros têrmos em α_1's e têrmos de graus menores nos α's. Estes são então linearmente independentes sôbre $\mathcal{N}_*$ e se juntamos os elementos α_1^k , $k > 0$, obtemos uma base para $\mathcal{M}_*$. Agora α_1^k é o fibrado k-dimensional trivial sôbre um ponto, que é levado por ∂F^{-1} em (S^k, A) , que são os elementos básicos de $\widetilde{\mathcal{N}}_*(Z_2)$. Assim as classes dadas geram o núcleo de ∂F^{-1}, e logo temos uma base para $\mathcal{J}_*$. ■

OBSERVAÇÕES :

(6.5) Para o bordismo das involuções livres, $\widetilde{\mathcal{N}}_*(Z_2)$, o produto descrito no início desta secção não é interessante. De fato, se (M,T) e (N,S) são involuções livres, então $(M \times N, T \times S)$ borda $(V \times N, T' \times S)$, se (M,T) borda a involução (V,T') (não necessàriamente livre). O produto conveniente para $\widetilde{\mathcal{N}}_*(Z_2)$ será definido e estudado na próxima secção.

(6.6) Como dissemos no início desta secção, a estrutura multiplicativa de $\mathcal{J}_*$ foi inicialmente descrita por J. C. Alexander. Estes resultados foram anunciados em 1967, mas só foram publicados em 1972, nos Proceedings of the American Mathematical Society (veja [9]). No ano de 1967, J. M. Boardman, independentemente de Alexander, apresentou, usando métodos diversos dos de Alexander a estrutura multiplicativa de $\mathcal{J}_*$ (veja [28]).

7. A ÁLGEBRA DAS INVOLUÇÕES LIVRES

Sabemos, por (4.3), que $\mathcal{N}_*(Z_2)$ é um módulo livre sôbre $\mathcal{N}_*$ com base dada por $\{[S^n, A]\}_{n \geq 0}$. Agora estamos interessados em definir e estudar uma estrutura multiplicativa em $\mathcal{N}_*(Z_2)$. Como dissemos no final da secção anterior, o produto de involuções lá estudado, não é interessante para o estudo das involuções livres. Para as involuções livres, o produto apropriado é aquêle que associa a (M,T) e (N,S) a variedade $V = M \times N/T \times S$, obtida de $M \times N$ identificando-se (m,n) com (Tm,Sn), e com a involução $U : V \longrightarrow V$ dada por $U[(m,n)] = [(Tm,n)] = [(m,Sn)]$, onde $[(m,n)]$ denota a classe de (m,n) em V. A estrutura de álgebra sôbre $\mathcal{N}_*$ obtida em $\mathcal{N}_*(Z_2)$ com este produto foi estudada primeiramente por J. C. Su (veja [166]), e também por F. Uchida (veja [176]). Apresentamos a seguir esta estrutura.

Se denotamos por $M' = M/T$ e por $N' = N/S$, consideremos $\xi \longrightarrow M'$ e $\eta \longrightarrow N'$ os fibrados linhas associados aos fibrados principais $M \longrightarrow M/T$ e $N \longrightarrow N/S$, respectivamente.

Então $V = M \times N/T \times S$ é obtida dos pares de vetores unitários (x,y) em $\zeta \times \eta$, identificando-se (x,y) com $(-x,-y)$ ou $(x,-y)$ com $(-x,y)$. A identificação de (rx,y) com (x,ry) , $r \in R$, nos dá o fibrado produto tensorial e sòmente $\pm 1 \in R$ preserva este subconjunto. Logo $V = M \times N/T \times S$ é o fibrado esfera associado a $\pi_1^*(\zeta) \otimes \pi_2^*(\eta)$ sôbre $M' \times N' = (M \times N/T \times S)/U$.

Deste modo, temos que o isomorfismo $\mathcal{N}_*(Z_2) \cong \mathcal{N}_*(RP^\infty)$, dado em (3.5), é na verdade um isomorfismo de álgebras, se a $\mathcal{N}_*(Z_2)$ é dado o produto definido acima, e a $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$ é dado o produto

$$\chi_* : \mathcal{N}_*(RP^\infty) \otimes \mathcal{N}_*(RP^\infty) \xrightarrow{\chi} \mathcal{N}_*(RP^\infty \times RP^\infty) \xrightarrow{\otimes_*} \mathcal{N}_*(RP^\infty)$$

onde $\otimes : RP^\infty \times RP^\infty \longrightarrow RP^\infty$ é a aplicação que classifica o fibrado linha $\pi_1^*(\lambda) \otimes \pi_2^*(\lambda)$, sendo λ o fibrado linha canônico.

Usando o corolário (4.4), pode-se definir uma comultiplicação em $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$ pondo

$$\psi : \mathcal{N}_*(RP^\infty) \xrightarrow{\delta_*} \mathcal{N}_*(RP^\infty \times RP^\infty) \xrightarrow[\cong]{\chi^{-1}} \mathcal{N}_*(RP^\infty) \otimes \mathcal{N}_*(RP^\infty)$$

onde $\delta : RP^\infty \longrightarrow RP^\infty \times RP^\infty$ é a aplicação diagonal $\delta(x) = (x,x)$.

Pode-se ver então que $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$ é uma álgebra de Hopf sôbre $\mathcal{N}_*$.

(7.1) TEOREMA : A comultiplicação em $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$ é dada por

$$\psi(x_i) = \sum_{k+j=i} x_k \otimes x_j$$

onde $x_i \in \mathcal{N}_i(RP^\infty)$ é a $\mathcal{N}_*$ base dada no corolário (4.2).

Demonstração:

Em $\mathcal{N}_*(RP^\infty) \otimes \mathcal{N}_*(RP^\infty)$ temos os operadores de Smith, $\Delta\otimes 1$ e $1\otimes\Delta$, correspondendo à operação de Smith no primeiro e segundo fator de $RP^\infty \times RP^\infty$, respectivamente. Se (M, ζ) representa uma classe em $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$ a imagem pela diagonal é representada por M com o par de fibrados (ζ, ζ); e aplicando o homomorfismo de Smith em cada uma das variáveis nos dá $N \subset M$ dual a ζ, com fibrados $(\zeta|N, \zeta|N)$, que é a imagem pela diagonal de $(N, \zeta|N) = \Delta(M,\zeta)$. Assim $(\Delta\otimes 1)\circ\psi = \psi\circ\Delta = (1\otimes\Delta)\circ\psi$, de modo que se $k+j = r$

$$(\Delta^k\otimes\Delta^j)\circ\psi(x_i) = \psi\,\Delta^r(x_i) = \psi(x_{i-r}).$$

Como a diagonal e χ comutam com a aumentação $\varepsilon: \mathcal{N}_*(RP^\infty) \longrightarrow \mathcal{N}_*$, temos que

$$\varepsilon((\Delta^k\otimes\Delta^j)\circ\psi(x_i)) = \begin{cases} 0 & k+j \neq i \\ 1 & k+j = i \end{cases}$$

e $\varepsilon((\Delta^k\otimes\Delta^j)\circ\psi(\alpha))$ é o coeficiente de $x_k\otimes x_j$ em $\psi(\alpha)$. ∎

(7.2) TEOREMA : $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$ é uma álgebra exterior sôbre $\mathcal{N}_*$, isto é,

$$\chi_*(a\otimes a) = \varepsilon(a)^2\, x_0 \,.$$

Demonstração:

Seja ζ um fibrado linha sôbre M, e considere $\eta = \pi_1^*(\zeta)\otimes\pi_2^*(\zeta)$ sôbre M. Seja $t : M\times M \longrightarrow M\times M$ a involução reflexão $t(m,m') = (m',m)$; e seja $t^* : E(\eta) \longrightarrow E(\eta)$ a involução definida no espaço total de η, por $t^*(x\otimes y) = y\otimes x$, de modo que t^* cobre t. Temos que o conjunto dos pontos fixos de t em $M \times M$ é a diagonal de M, isto é, $Fix(t) = \{(m,m);\ m \in M\}$, e o seu fibrado normal é τM, o fibrado tangente de M. Assim podemos identificar uma vizinhança tubular de M em $M \times M$ com $D(\tau M)$, de maneira que t aja em $D(\tau M)$ como multiplicação por -1 nas fibras. A restrição de η à diagonal M é o produto tensorial $\zeta \otimes \zeta$ que é um fibrado linha trivial onde t^* age trivialmente. Como M e $D(\tau M)$ são (equivariantemente) homotòpicamente equivalentes, a restrição de η a $D(\tau M)$ tem espaço total $D(\tau M) \times R$, onde t^* age por $t \times 1$.

Deste modo a estrutura de ponto fixo de $M \times M$ e do fibrado η não depende do fibrado linha ζ, e portanto é a mesma para o fibrado linha trivial $\theta \longrightarrow M$. Como fibrado com involução, a união $(M \times M, \eta) \cup (M \times M, \theta)$ é bordante ao fibrado linha (N, σ) para o qual a involução é livre. Especìficamente, pode-se formar W com duas cópias de $(M \times M) \times [0,1]$, identificando $D(\tau M) \times 1$ em uma cópia com $D(\tau M) \times 0$ na outra e formando um fibrado linha sôbre W usando $E(\eta) \times [0,1]$ e $E(\theta) \times [0,1]$, identificando $D(\tau M) \times R \times 1$ no primeiro com $D(\tau M) \times R \times 0$ no segundo, e deixando as involuções reflexão agirem. Então N é a variedade dada por

$$\{(M \times M) - Int(D(\tau M))\} \times 1 \cup \{(M \times M) - Int(D(\tau M))\} \times 0$$

nas duas cópias.

Mas se $t : N \longrightarrow N$ é livre e $t^* : E(\sigma) \longrightarrow E(\sigma)$ é a involução fibrada que cobre t, então a aplicação cilindro de $E(\sigma) \longrightarrow E(\sigma)/t^*$ é um fibrado linha sôbre a aplicação cilindro de $N \longrightarrow N/t$, e portanto (N, σ) é zero em $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$. Logo $\chi_*((M,\zeta) \otimes (M,\zeta)) = \chi_*((M,\theta) \otimes (M,\theta)) = (M \times M, \theta) = [M \times M]\, x_0 = (\mathcal{E}(M,\zeta))^2\, x_0$. ∎

Em $\mathcal{N}_*(RP^\infty \times RP^\infty)$ temos definidas três operações Δ_1, Δ_2 e Δ_δ de grau -1, que associam à classe de (M, ξ, η) a classe de $(N, \xi|N, \eta|N)$, onde $N \subset M$ é a subvariedade dual a ξ, η e $\xi \otimes \eta$, respectivamente.

É imediato de se ver que

$$\Delta_\delta \Delta_i = \Delta_i \Delta_\delta \qquad i = 1, 2$$

$$\text{e} \qquad \Delta_1 \Delta_2 = \Delta_2 \Delta_1 .$$

Pois se ξ, η são dois fibrados linha sôbre M, e $N \subset M$ é dual a ξ e $P \subset N$ é dual a $\eta|N$, então P pode ser obtida fazendo M transversa à secção zero em $\xi \otimes \eta$.

Usando (4.4) podemos identificar $\mathcal{N}_*(RP^\infty \times RP^\infty)$ com $\mathcal{N}_*(RP^\infty) \otimes_{\mathcal{N}_*} \mathcal{N}_*(RP^\infty)$. Então é claro que Δ_1 é $\Delta \otimes 1$ e Δ_2 é $1 \otimes \Delta$. Desejamos uma expressão para Δ_δ.

Primeiramente, como

$$\Delta_\delta(x_i \otimes x_j) \in (\mathcal{N}_*(RP^\infty) \otimes \mathcal{N}_*(RP^\infty))_{i+j-1}$$

devemos ter

$$\Delta_\delta(x_i \otimes x_j) = \sum a_{ij}^{rs} \; x_r \otimes x_s$$

a soma sendo para todos r, s com $r + s < i + j$, com os elementos (únicos) $a_{ij}^{rs} \in \mathcal{N}_{i+j+r+s-1}$.

Agora

$$\Delta_\delta(x_{i-1} \otimes x_j) = \Delta_\delta(\Delta \otimes 1)(x_i \otimes x_j) =$$

$$= (\Delta \otimes 1) \circ \Delta_\delta(x_i \otimes x_j)$$

nos dá

$$\sum a^{rs}_{i-1,j} \quad x_r \otimes x_s = \sum a^{r's'}_{ij} \quad x_{r'-1} \otimes x_{s'}$$

donde segue que

$$a^{rs}_{i-1,j} = a^{r'+1,s'}_{i,j}$$

e anàlogamente

$$a^{rs}_{i,j-1} = a^{r,s+1}_{i,j}$$

por comutatividade de Δ_δ com $1 \otimes \Delta$.. Em particular a^{rs}_{ij} depende apenas de $i - r$ e $j - s$.

Agora

$$0 = \Delta_\delta \circ (\Delta \otimes 1)^{i+1}(x_i \otimes x_j) =$$

$$= \sum a^{rs}_{ij} \quad x_{r-i} \otimes x_s$$

nos da que $a^{rs}_{ij} = 0$ se $r > i$; e anàlogamente $a^{rs}_{ij} = 0$ se $s > j$.

Assim a fórmula pode ser re-escrita

$$\Delta_\delta (x_i \otimes x_j) = \sum b_{pq}(x_{i-p} \otimes x_{j-q})$$

$$= \sum b_{pq}(\Delta^p x_i \otimes \Delta^q x_j)$$

onde a soma é feita para $p, q \geqslant 0$ e $b_{pq} \in \mathcal{N}_{p+q-1}$.

Como $\mathcal{N}_{-1} = 0$, $b_{oo} = 0$. Para (M, ζ, θ) o dual de $\zeta \otimes \theta$ é o dual de ζ, então $\Delta_\delta (x_i \otimes x_o) = x_{i-1} \otimes x_o$, que nos dá então $b_{po} = 1$, se $p = 1$, e 0 se $p \neq 1$. Anàlogamente, temos $b_{oq} = 1$, se $q = 1$, e 0 se $q \neq 1$.

Além disso, se τ é a reflexão $\tau (M, \zeta, \eta) = (M, \eta, \zeta)$, ou seja $\tau (x \otimes y) = y \otimes x$; então $\tau \Delta_\xi = \Delta_\xi \tau$ nos dá que $b_{pq} = b_{qp}$. Assim temos o seguinte teorema.

(7.3) TEOREMA : Existem elementos $b_{pq} = b_{qp} \in \mathcal{N}_{p+q-1}$, tais que

$$\Delta_\delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \sum_{p,q \geq 1} b_{pq} \Delta_1^p \Delta_2^q .$$

A série de potência formal (veja [7]),

$$x + y + \sum_{p,q \geq 2} b_{pq} x^p y^q \in \mathcal{N}_*[[x , y]]$$

é chamada a "lei de grupo formal" para o bordismo não orientado.

(7.4) LEMA : Se $\chi_* = \otimes_* \circ \chi : \mathcal{N}_*(RP^\infty) \otimes \mathcal{N}_*(RP^\infty) \longrightarrow \mathcal{N}_*(RP^\infty)$ é o produto, então

$$\Delta \chi_*(a \otimes b) = \otimes_* \Delta_\delta \chi(a \otimes b) .$$

Demonstração:

Se $a = (M, \xi)$, $b = (N, \eta)$, $\chi_*(a \otimes b) = (M \times N, \pi_1^*(\xi) \otimes \pi_2^*(\eta))$, então

$$\Delta \chi_*(a \otimes b) = (P, (\pi_1^*(\xi) \otimes \pi_2^*(\eta))|P)$$

onde $P \subset M \times N$ é a subvariedade dual a $\pi_1^*(\xi) \otimes \pi_2^*(\eta)$. Assim $\chi(a \otimes b)$ é representada por $(M \times N, \pi_1^*(\xi), \pi_2^*(\eta))$, e por outro lado $\Delta_\delta \chi(a \otimes b)$ é representada por $(P, (\pi_1^*(\xi))|P, (\pi_2^*(\eta))|P)$. Logo $\otimes_* \Delta_\delta \chi(a \otimes b)$ é a classe de $(P, (\pi_1^*(\xi)|P) \otimes (\pi_2^*(\eta)|P)$. ∎

(7.5) LEMA : A multiplicação em $\mathcal{N}_*(RP^\infty)$ satisfaz a seguinte relação

$$\chi_*(x_i \otimes x_j) \equiv \binom{i+j}{i} x_{i+j}$$

módulo elementos decomponíveis na estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo, onde $\binom{i+j}{i}$ é o coeficiente binomial mod 2.

Demonstração:

Como $\chi_*(x_i \otimes x_j) \in \mathcal{N}_{i+j}(RP^\infty)$ temos

$$\chi_*(x_i \otimes x_j) = \sum_{k=o}^{i+j} \alpha_k x_k$$

onde $\alpha_k \in \mathcal{N}_{i+j-k}$. Aplicando agora Δ^{i+j},

$$\begin{aligned} \alpha_{i+j} x_o &= \Delta^{i+j} \chi_*(x_i \otimes x_j) \\ &= \Delta^{i+j} \ominus_* \chi(x_i \otimes x_j) \\ &= \oplus_* \Delta^{i+j} \chi(x_i \otimes x_j) \\ &= \ominus_* \chi(\Delta \otimes 1 + 1 \otimes \Delta + \\ &\qquad + \textstyle\sum b_{pq} \Delta^p \otimes \Delta^q)^{i+j} (x_i \otimes x_j) \end{aligned}$$

Agora desenvolvendo

$$(\Delta \otimes 1 + 1 \otimes \Delta + \sum b_{pq} \Delta^p \otimes \Delta^q)^{i+j}$$

pela fórmula de Taylor temos

$$\sum_{t=o}^{i+j} \binom{i+j}{t} \Delta^t \otimes \Delta^{i+j-t} + \text{termos em } \Delta^p \otimes \Delta^q \text{ com } p+q > i+j$$

e assim, aplicando a fórmula acima a $x_i \otimes x_j$ nos dá $\binom{i+j}{i} x_o \otimes x_o$.

Portanto

$$\alpha_{i+j} x_o = \chi_*(\binom{i+j}{i} x_o \otimes x_o) = \binom{i+j}{i} x_o . \blacksquare$$

(7.6) TEOREMA (J. C. Su) : $\mathcal{N}_*(RP^{\infty})$ é a álgebra exterior sôbre $\mathcal{N}_*$ nas classes x_{2^s} .

Demonstração:

É suficiente mostrar que os produtos

$$x_{2^{s_1}} \cdots x_{2^{s_r}} \quad , \text{ com } \quad 0 \leqslant s_1 < s_2 \quad \cdots < s_r$$

formam uma base de $\mathcal{N}_*$-módulo, ou são indecomponíveis. Pelo lema (7.5) é apenas necessário que

$$\binom{n+2^s}{2^s}$$

seja ímpar se $n < 2^s$, mas

$$\binom{n+2^s}{2^s}$$

é o coeficiente de x^{2^s} em

$$\begin{aligned}
(1 + x)^{n+2^s} &= (1 + x)^n \ (1 + x)^{2^s} \\
&\equiv (1 + x)^n \ (1 + x^{2^s}) \qquad \text{mod } 2 \\
&\equiv (1 + x)^n + x^{2^s}(1 + x)^n \\
&\equiv 1 + \dots + x^n + x^{2^s+n} + \dots \blacksquare
\end{aligned}$$

8. AÇÕES SEMI-LIVRES DE S^I

Todos os métodos e técnicas da Teoria de Bordismo, que utilizamos no estudo das involuções, podem ser generalizados de uma maneira natural, de modo que possam ser aplicados no estudo das ações semi-livres de $S^1 = \{z \in C \; ; \; |z| = 1\}$. Em [136], Ossa estudou as ações semi-livres de S^1 que preservam a orientação. Em seu trabalho, Ossa estuda a estrutura multiplicativa destas ações, usando uma generalização dos métodos introduzidos por Boardman em [28]. Shimada e Wu, em [147], também estudaram estas ações que preservam a orientação, utilizando uma generalização dos métodos de Alexander (veja [9]) para estudar a estrutura multiplicativa. Nesta secção estudamos as ações semi-livres de S^1 em variedades não orientadas, aplicando para este estudo a generalização dos métodos e técnicas apresentados e utilizados no estudo das involuções nas secções anteriores.

Seja $S^1 = \{z \in C \; ; \; |z| = 1\}$, a esfera unitária no corpo de todos os números complexos C. Seja M^n uma n-variedade compacta. Uma ação diferenciável $T : S^1 \times M^n \longrightarrow M^n$ é semi-livre se em cada ponto $x \in M^n$, o subgrupo de isotropia de x é trivial, isto é, se $S^1_x = \{z \in S^1 \; ; \; T(z,x) = x\}$ é $\{1\}$ ou S^1. A ação T é dita livre se o subgrupo de isotropia de qualquer ponto $x \in S^1$ é sempre $\{1\}$.

Seja (M^n,T) uma ação semi-livre de S^1 em uma n-variedade fechada. Dizemos que (M^n,T) borda se, e sòmente se, existe uma ação semi-livre de S^1, $S : W^{n+1} \longrightarrow W^{n+1}$, em uma (n+1)-variedade compacta W^{n+1} tal que (M^n,T) é igual (equivariantemente difeomorfa) a $(\partial W^{n+1}, S \mid \partial W^{n+1})$. Duas ações semi-livres de S^1 (M^n_1,T_1) e (M^n_2,T_2) são bordantes se, e sòmente se, a união disjunta $(M^n_1 \cup M^n_2, T_1 \cup T_2)$ borda. Esta é uma relação de equivalência, e denotamos por $SF_n(S^1)$ a coleção de tôdas as classes de equivalências $[M^n,T]$ de ações semi-livres de S^1 em n-variedades fechadas. A operação induzida pela união disjunta define uma estrutura de grupo abeliano em $SF_n(S^1)$. Se N^m é uma variedade fechada e (M^n,T) é uma ação semi-livre de S^1, temos que $(N^m \times M^n, 1 \times T)$ é semi-livre. Então se denotamos $SF_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} SF_n(S^1)$, a soma direta dos grupos abelianos $SF_n(S^1)$, vemos que esta é um $\mathcal{N}_*$-módulo se colocamos

$$[N^m]\,[M^n,T] = [N^m \times M^n, 1 \times T] \;.$$

Se no discurso acima substituimos o têrmo "semi-livre" pelo têrmo "livre", definimos o grupo de bordismo de ações livres de S^1, que é denotado por $\mathcal{N}_n(S^1)$. Também fica definido o $\mathcal{N}_*$-módulo

$$\mathcal{N}_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{N}_n(S^1) \;.$$

A seguir, como no estudo das involuções feito na secção 3, consideramos os grupos de bordismos relativos. Isto é, consideramos a relação de bordismo no conjunto dos pares (V^n,T), onde V^n é uma variedade n-dimensional compacta com bordo, e T é uma ação semi-livre de S^1 em V^n tal que $T|\partial V^n$ é livre. Dois pares de tais ações (V_1^n,T_1) e (V_2^n,T_2) são bordantes se, e sòmente se, existe:

(1) (V^n,S) uma ação livre de S^1 em uma variedade compacta V^n, tal que $\partial V^n = \partial V_1^n \cup \partial V_2^n$ e $S|\partial V_1^n = T_1|\partial V_1^n$ e $S|\partial V_2^n = T_2|\partial V_2^n$; e

(2) (U^{n+1},T) uma ação semi-livre de S^1 em uma variedade compacta U^{n+1}, tal que $(\partial U^{n+1},T|\partial U^{n+1})$ é igual (equivariantemente difeomorfa) a (W,T'), onde

$$W = \frac{V_1^n \cup V^n \cup V_2^n}{\partial V_1^n \cup \partial V_2^n = \partial V}$$

e $T' = T_1 \cup T \cup T_2$.

Esta relação também é de equivalência, e denotamos por $\mathcal{B}_n(S^1)$ o conjunto das classes de equivalências $[V^n,T]$. Como antes, a operação de união disjunta define uma estrutura de grupo abeliano em $\mathcal{B}_n(S^1)$. E a soma direta

$$\mathcal{B}_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{B}_n(S^1)$$

é um $\mathcal{N}_*$-módulo com

$$[N^m][M^n,T] = [N^m \times M^n, 1 \times T] .$$

Como na secção 3, estão definidos os seguintes homomorfismos de $\mathcal{N}_*$-módulos:

$$\not{f} : \mathcal{N}_n(S^1) \longrightarrow SF_n(S^1)$$

que associa $[M^n,T]$ a $[M^n,T]$, induzido pelo funtor esquecimento (de que a ação é livre) ;

$$j \;:\; SF_n(S^1) \longrightarrow \mathcal{B}_n(S^1)$$

que associa $[M^n,T]$ a $[M^n,T]$, uma vez que $\partial M^n = \emptyset$.

$$\partial : \mathcal{B}_n(S^1) \longrightarrow \mathcal{F}_n(S^1)$$

que associa $[V^n,T]$ a $[\partial V^n,T|\partial V^n]$.

Correspondendo ao teorema (3.3), temos o seguinte teorema:

(8.1) TEOREMA : A sequência

$$\xrightarrow{\not{f}} SF_n(S^1) \xrightarrow{j} \mathcal{B}_n(S^1) \xrightarrow{\partial} \mathcal{F}_{n-1}(S^1) \xrightarrow{\not{f}}$$

é exata.

Demonstração:

(i) $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} \not{f}$.

Seja $j[M^n,T] = 0$. Por definição temos que existe: 1. um par (V^n,S) com S livre e $\partial V^n = \partial M^n = \emptyset$; e, 2. um par (U^{n+1},T') com T' semi-livre e $(\partial U^{n+1},T'|\partial U^{n+1}) = (M^n \cup V^n, T \cup S)$. Então $[M^n,T] = [V^n,S]$. Por outro lado, supondo que $[V^n,S] \in \mathcal{N}_n(S^1)$, queremos mostrar que $[V^n,S]$ borda um elemento em $\mathcal{B}_n(S^1)$. Mas isto é claro, pois 1. $\partial V^n = \partial V^n = \emptyset$ e S é livre; e, 2. $\partial([0,1] \times V^n,\ 1 \times S) = (V^n \cup V^n, S \cup S)$.

(ii) Ker ∂ = Im j.

Seja $\partial[M^n,T] = 0$. Por definiçao existe um par (V^n,S) com S livre e $(\partial V^n, S|\partial V^n) = (\partial M^n, T|\partial M^n)$. Seja $(N^n,R) = (M^n \cup V^n / \partial M^n \equiv \partial V^n,\ T \cup S)$. Observe que $[N^n,R] \in SF_n(S^1)$. Afirmamos que $j[N^n,R] = [M^n,T]$. Mas isto segue do fato que 1. (V^n,S) é como acima; e, 2. $(N^n \times [0,1],\ R \times 1)$ é um par com $R \times 1$ semi-livre e $\partial(N^n \times [0,1], R \times 1) = (N^n \times 0 \cup N^n \times 1, R \times 0 \cup R \times 1) =$

$$= (N^n \cup V^n \cup M^n / \partial N^n \cup \partial M^n \equiv \partial V^n,\ R \cup S \cup T).$$

Por outro lado, $\partial j[M^n,T] = 0$, pois $\partial M^n = \emptyset$.

(iii) Ker $\not{f}$ = Im $\hat{\partial}$.

Seja $\not{f}[M^{n-1},T] = 0$. Por definição existe um par (V^n,S) com S semi-livre e $(\partial V^n, S|\partial V^n) = (M^{n-1},T)$. Deste modo $[M^{n-1},T] = \partial[V^n,S]$. Por outro lado, $\not{f}\partial[M^n,T] = [\partial M^n, T|\partial M^n]$ que por definição borda em $SF_{n-1}(S^1)$. ∎

Correspondendo ao teorema (3.2), temos o seguinte teorema:

(8.2) TEOREMA : O homomorfismo $\not{f} : \mathcal{N}_n(S^1) \longrightarrow SF_n(S^1)$ é o homomorfismo nulo.

Demonstração:

Seja $[M^n,T] \in \mathcal{N}_n(S^1)$. Considere $V^{n+1} = M^n \times D^2/T \times S$ onde $S : S^1 \times D^2 \longrightarrow D^2$ é a ação definida no disco D^2 associando ao par (s,z) o ponto $sz \in D^2$. Como $T \times S$ é uma ação livre, temos que V^{n+1} é uma variedade com bordo, o bordo sendo $M^n \times S^1/T \times S$. Como $T \times 1$ e $T \times S$ comutam em $M^n \times D^2$, $T \times 1$ induz uma ação semi-livre de S^1 em V^{n+1}. E vemos que a aplicação $\varphi : M^n \longrightarrow M^n \times S^1/T \times S$, dada por $\varphi(m) = [m,1]$ é um difeomorfismo equivariante. ■

Considerando o homomorfismo $\tilde{G}_n : \mathcal{N}_n(S^1) \longrightarrow \mathcal{B}_{n+1}(S^1)$ definido por $\tilde{G}_n [M^n,T] = [M^n \times D^2/T \times S, T \times 1]$, temos que $\partial \circ \tilde{G}_n [M^n,T] = [M^n,T]$. Isto demonstra o seguinte teorema, que é o análogo ao (3.4) :

(8.3) TEOREMA : A sequência

$$0 \longrightarrow SF_n(S^1) \xrightarrow{j} \mathcal{B}_n(S^1) \underset{\tilde{G}_{n-1}}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}} \mathcal{N}_{n-1}(S^1) \longrightarrow 0$$

é exata e se fatora.

Na secção 3 mostramos que o conjunto dos pontos fixos de uma involução era uma subvariedade, queremos demonstrar o mesmo resultado para as ações semi-livres de S^1. Na verdade este resultado é válido para qualquer ação semi-livre de um grupo de Lie compacto, como veremos a seguir.

Seja G um grupo de Lie compacto que atua em uma n-variedade compacta. A ação $T : G \times M^n \longrightarrow M^n$ é semi-livre se G atua livremente (isto é, sem pontos fixos) fora do conjunto $F = Fix(T)$. Em outras palavras, se $x \in M^n$ então o subgrupo de isotropia de x, G_x é igual a $\{e\}$ ou G.

Como M^n é paracompacta e G é um grupo de Lie compacto, em [35] Bredon mostra que M^n admite uma métrica riemanniana com a qual G atua como um grupo de isometrias de M^n, isto é, a ação de G não altera o produto interno no espaço tangente de M^n.

Se $x \in M^n$ é um ponto fixo da ação T, então temos induzida uma representação ortogonal de G em $\mathcal{T}_x(M)$,

$$\rho_x : G \longrightarrow GL(\mathcal{T}_x(M)) .$$

Se $v \in \mathcal{T}_x(M)$, então $\rho_x(g)(v) = g_*(v)$, onde g_* é a diferencial de $\varphi_g : M \longrightarrow M$, dada por $\varphi_g(x) = T(g,x)$.

Temos o seguinte lema:

(8.4) LEMA : Seja $V = \{ v \in \mathcal{T}_x(M) ; \rho_x(g)(v) = v , g \in G \}$. Então a restrição da aplicação exponencial $\exp : \mathcal{T}_x(M) \longrightarrow M$ é um difeomorfismo local de V em $F = Fix(T)$, o conjunto dos pontos fixos da ação de G por T. Além disso, o complemento ortogonal $V^{\perp}$ de V em $\mathcal{T}_x(M)$ é um subespaço G-invariante, no qual G atua livremente exceto pelo vetor nulo.

Como consequência deste lema temos que cada componente conexa de $F = Fix(T)$ é uma subvariedade de M, as cartas sendo dadas pelos difeomorfismos locais $\exp : W \subset V \longrightarrow F$.

No caso em que $G = S^1$ temos o seguinte teorema:

(8.5) TEOREMA : Seja $T : S^1 \times M \longrightarrow M$ uma ação semi-livre. Seja F^k a união das componentes de dimensão k de $F = \mathrm{Fix}(T)$, o conjunto dos pontos fixos de T. Então o fibrado normal ν_k de $F^k \subset M$ tem naturalmente uma estrutura complexa, tal que a ação de S^1 em ν_k é a multiplicação escalar.

Demonstração:

O resultado segue imediatamente do lema anterior e do fato que o espaço vetorial real C é a única representação real irredutível na qual S^1 atua livremente exceto pelo vetor nulo.■

O teorema acima é devido a Conner e Floyd (veja [64], § 38).

Denotemos por $$\mathcal{M}_n(S^1) = \bigoplus_{k \geq 0}^{[n/2]} \mathcal{N}_{n-2k}(BU_k) ,$$

onde BU_k é o espaço classificante para os fibrados k-dimensionais unitários. E denotemos $\mathcal{M}_*(S^1) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{M}_n(S^1)$. Então temos o análogo ao teorema (3.6), isto é, temos:

(8.6) TEOREMA : Existe um isomorfismo

$$F : \mathcal{B}_n(S^1) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0}^{[n/2]} \mathcal{N}_{n-2k}(BU_k)$$

dado por: a $[M^n, T]$ associa $\sum_k [\nu^k \longrightarrow F^{n-2k}]$.

Demonstração:

O homomorfismo inverso é dado por

$$F^{-1}\left[\nu^k \longrightarrow F^{n-2k}\right] = \left[D(\nu^k), S\right] ,$$

onde $D(\nu^k)$ é o fibrado disco unitário e S é a multiplicação escalar.∎

Observamos que $\mathcal{B}_*(S^1)$ e $\mathcal{M}_*(S^1)$ são álgebras sôbre $\mathcal{N}_*$ com os produtos dados por:

$$\left[M^m, T\right]\cdot\left[N^n, S\right] = \left[M^m\times N^n, T\times S\right]$$

e

$$\left[\gamma^p \longrightarrow V^s\right]\cdot\left[\gamma^q \longrightarrow W^t\right] = \left[\pi_1^*(\gamma)\oplus\pi_2^*(\gamma) \longrightarrow V\times W\right]$$

Como $Fix(T\times S) = Fix(T)\times Fix(S)$ e o fibrado normal a $Fix(T)\times Fix(S)$ é a soma do fibrado normal a $Fix(T)$ com o fibrado normal a $Fix(S)$, vemos que os homomorfismos

$$F : \mathcal{B}_*(S^1) \longrightarrow \mathcal{M}_*(S^1)$$

e

$$F\circ j : SF_*(S^1) \longrightarrow \mathcal{M}_*(S^1)$$

são na verdade homomorfismos de álgebras sôbre $\mathcal{N}_*$.

Usando o isomorfismo F identificamos $\mathcal{B}_*(S^1)$ com $\mathcal{M}_*(S^1)$, e a seguir calculamos a sua estrutura. Para isto denotamos por $\left[\eta_n \longrightarrow CP^n\right]$ o fibrado linha (complexo) canônico sôbre CP^n, o espaço projetivo complexo n-dimensional.

(8.7) TEOREMA : $\mathcal{M}_*(S^1)$ é uma álgebra polinomial graduada sôbre $\mathcal{N}_*$, cujos geradores são as classes $[\eta_n \longrightarrow CP^n]$, com $n \geq 0$.

Demonstração:

Usamos o teorema (2.11). Fixado $k+1$, seja $\omega = (j_1,\ldots,j_{k+1})$ uma partição de algum inteiro não negativo n, tal que $j_1 \leq \cdots \leq j_{k+1}$. Seja $X_\omega = [\eta \longrightarrow CP^{j_1}] \ldots [\eta \longrightarrow CP^{j_{k+1}}]$ em $\mathcal{N}_{2n}(BU_{k+1})$. Considere o homomorfismo de Thom (veja (2.10))

$$\mu : \mathcal{N}_*(BU_{k+1}) \longrightarrow H_*(BU_{k+1};Z_2).$$

Afirmamos que os elementos $\mu(X_\omega)$ formam uma base homogênea aditiva para $H_*(BU_{k+1};Z_2)$. Como $BU_1 = CP^\infty$, existe uma aplicação classificante $f : (CP^\infty)^{k+1} \longrightarrow BU_{k+1}$. Esta aplicação induz um monomorfismo

$$f^* : H^*(BU_{k+1};Z_2) \longrightarrow H^*((CP^\infty)^{k+1};Z_2)$$

cuja imagem é o grupo dos polinômios simétricos em $y_1,\ldots,y_{k+1}$. Sendo que $H^*((CP^\infty)^{k+1};Z_2) = Z_2[y_1,\ldots,y_{k+1}]$, com $y_i \in H^{2i}((CP^\infty)^{k+1};Z_2)$.

Seja $s_\omega = y_1^{j_1}\ldots y_{k+1}^{j_{k+1}}$. Então os elementos formam uma base aditiva para $f^*(H^*(BU_{k+1};Z_2)) = H^*(BU_{k+1};Z_2)$. Mas o índice de Kronecker

$$\langle s_\omega, \mu(X_\omega)\rangle = 1 .$$

Logo a afirmação é verdadeira e portanto o teorema é válido.■

Seja $[M^n,S] \in \mathcal{N}_n(S^1)$, então $M^n \longrightarrow M^n/S$ é um S^1-fibrado principal; logo existe uma aplicação $f : M^n/S \longrightarrow CP^\infty$

classificando este fibrado. Podemos então definir um homomorfismo

$$\varphi : \tilde{\mathcal{N}}_n(S^1) \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{n-1}(CP^\infty)$$

pondo $\varphi\left[M^n,S\right] = \left[M^n/S,f\right]$.

Correspondendo ao teorema (3.5) temos:

(8.8) TEOREMA : O homomorfismo $\varphi : \tilde{\mathcal{N}}_n(S^1) \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{n-1}(CP^\infty)$ é um isomorfismo.

Demonstração:

O inverso $\varphi^{-1} : \tilde{\mathcal{N}}_{n-1}(CP^\infty) \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_n(S^1)$ é definido como se segue: seja $\left[V^{n-1},f\right] \in \tilde{\mathcal{N}}_{n-1}(CP^\infty)$, considere o diagrama pull-back

$$\begin{array}{ccc} E(f^*\nu) & \longrightarrow & S^\infty \\ \downarrow & & \downarrow \nu \\ V^{n-1} & \xrightarrow{f} & CP^\infty \end{array}$$

onde $E(f^*\nu) = \{(v,s) \in V^{n-1} \times S^\infty ;\ f(v) = \nu(s)\}$. A ação de S^1 em $E(f^*\nu)$ sendo a multiplicação escalar na segunda coordenada. Definimos $\varphi^{-1}\left[V^{n-1},f\right] = \left[E(f^*\nu),S^1\right]$.∎

Observamos que toda vez que escrevermos $\left[M,S^1\right]$, a ação de S^1 em M é a multiplicação escalar.

Temos também um teorema análogo ao corolário (4.3).

(8.9) TEOREMA : $\mathcal{N}_*(S^1)$ é um $\mathcal{N}_*$-módulo com base dada pelos elementos $\left\{\left[S^{2n+1}, S^1\right]\right\}_{n\geqslant 0}$.

Demonstração:

O resultado é verdade pois, por (8.7), $\mathcal{N}_*(CP^\infty)$ é um $\mathcal{N}_*$-módulo com base dada por $\left\{\left[\gamma_n \longrightarrow CP^n\right]\right\}_{n\geqslant 0}$ e φ^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos, com $\varphi^{-1}\left[\gamma_n \longrightarrow CP^n\right] = \left[S^{2n+1}, S^1\right]$. ■

Por (8.9), um elemento qualquer de $\mathcal{N}_{2n+1}(S^1)$ pode ser escrito de maneira única como

$$\sum_{r=0}^{n} \left[X^{2r}\right]\left[S^{2(n-r)+1}, S^1\right]$$

enquanto que um elemento arbitrário de $\mathcal{N}_{2n}(S^1)$ pode ser escrito univocamente como

$$\sum_{r=0}^{n-1} \left[X^{2r+1}\right]\left[S^{2(n-r)-1}, S^1\right].$$

Logo a fatoração

$$G_{2n+1}\left(\sum_{r=0}^{n} \left[X^{2r}\right]\left[S^{2(n-r)+1}, S^1\right]\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \left[X^{2r}\right]\left[\theta^{(n-r)+1} \longrightarrow CP^0\right],$$

onde θ^r é o fibrado (complexo) r-dimensional trivial; enquanto que

$$G_{2n}\left(\sum_{r=0}^{n-1} \left[X^{2r+1}\right]\left[S^{2(n-r)-1}, S^1\right]\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \left[X^{2r+1} \right] \left[\sigma^{n-r} \longrightarrow CP^0 \right] .$$

Temos também o resultado análogo ao corolário (5.4), a saber:

(8.10) TEOREMA : Existe um homomorfismo

$$\bar{G} : \mathcal{M}_n(S^1) \longrightarrow SF_n(S^1)$$

tal que $\bar{G} \circ j$ = identidade, onde $j : SF_n(S^1) \longrightarrow \mathcal{M}_n(S^1)$ é o homomorfismo dado no teorema (8.1).

Demonstração:

Definimos $\bar{G}$ da seguinte maneira: suponha que $\xi^k \longrightarrow V^{n-2k}$ seja um fibrado (complexo) k-dimensional sôbre uma variedade fechada V^{n-2k}, e seja $\sigma \longrightarrow V^{n-2k}$ o fibrado (complexo) linha trivial. Considere $CP(\xi \oplus \sigma)$ o espaço total do fibrado espaço projetivo complexo sobre V^{n-2k} associado a $\xi \oplus \sigma$ (veja [99]). Consideremos a ação $P : S^1 \times CP(\xi \oplus \sigma) \longrightarrow CP(\xi \oplus \sigma)$, dada por $P(s, [u,v]) = [su,v]$, onde $s \in S^1$, $u \in E(\xi)$ e $v \in E(\sigma)$. Então P é uma ação semi-livre de S^1, cujo conjunto de pontos fixos é formado de duas partes:

V^{n-2k} , com fibrado normal ξ^k ,

$CP(\xi)$, com fibrado normal $\bar{\eta}$,

onde η é o fibrado (complexo) linha associado ao S^1-fibrado principal $S(\xi) \longrightarrow CP(\xi)$ (veja [99]). Colocamos por definição:

$$\bar{G} : \mathcal{N}_{n-2k}(BU_k) \longrightarrow SF_n(S^1)$$

como sendo

$$\bar{G}\left[\zeta^k \longrightarrow V^{n-2k}\right] = \left[CP(\zeta \oplus \tau), P\right] .$$

Para se ver que $\bar{G} \circ j$ = identidade, é suficiente notar, como em (5.3), que $j\left[M^n, T\right] = j\left[CP(\nu^k \oplus \mathbb{C}), P\right]$, onde denotamos por $\sum_k \left[\nu^k \longrightarrow F^{n-2k}\right]$ o conjunto dos pontos fixos de $\left[M^n, T\right]$.■

Agora passamos a analisar as relações entre $SF_*(S^1)$ e $\mathcal{J}_*$. Se $S^1 = \{z \in C ; |z| = 1\}$, podemos considerar $Z_2 = \{-1, 1\} \subset S^1$. Assim uma ação semi-livre de S^1

$$S^1 \times M^n \longrightarrow M^n$$

em uma variedade compacta com bordo (possìvelmente vazio) induz pela restrição a Z_2 uma ação de Z_2 (ou seja, uma involução)

$$Z_2 \times M^n \longrightarrow M^n .$$

Se o subgrupo de S^1-isotropia de $x \in M^n$ é S^1 ou $\{1\}$, então o subgrupo de Z_2-isotropia de $x \in M^n$ é Z_2 ou $\{1\}$, respectivamente. Assim pela restrição de uma ação de S^1 a Z_2, definimos os seguintes homomorfismos de $\mathcal{N}_*$-módulos :

$$t_1 : SF_*(S^1) \longrightarrow \mathcal{J}_*$$

$$t_2 : \mathcal{B}_*(S^1) \longrightarrow \mathcal{B}_*$$

$$t_3 : \mathcal{N}_*(S^1) \longrightarrow \mathcal{N}_*(Z_2)$$

onde $\mathcal{J}_*$, $\mathcal{B}_*$ e $\mathcal{N}_*(Z_2)$ são como na secção 3.

(8.11) TEOREMA : A imagem $t_3(\mathcal{N}^{\sim}_*(S^1)) \subset \mathcal{N}^{\sim}_*(Z_2)$ é um $\mathcal{N}^{\sim}_*$-módulo com base $\left\{\left[S^{2n+1},A\right]\right\}_{n\geq 0}$, onde A é a involução antípoda.

Demonstração:

Pelo teorema (8.9), temos que $\mathcal{N}^{\sim}_*(S^1)$ é um $\mathcal{N}^{\sim}_*$-módulo com base $\left\{\left[S^{2n+1},S^1\right]\right\}_{n\geq 0}$. Como temos que

$$t_3\left[S^{2n+1},S^1\right] = \left[S^{2n+1},A\right]$$

e t_3 é um homomorfismo de $\mathcal{N}^{\sim}_*$-módulos, o teorema é válido.■

Seja $r_* : \mathcal{N}^{\sim}_k(BU_m) \longrightarrow \mathcal{N}^{\sim}_k(BO_{2m})$ o homomorfismo induzido pela aplicação classificante $r : BU_m \longrightarrow BO_{2m}$. É fácil de se ver que $r_* : \mathcal{M}_*(S^1) \longrightarrow \mathcal{M}_*$ é um homomorfismo de álgebras sobre $\mathcal{N}^{\sim}_*$. Também pode se ver fàcilmente que o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_*(S^1) & \xrightarrow{F} & \mathcal{M}_*(S^1) \\ {\scriptstyle t_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_*} \\ \mathcal{B}_* & \longrightarrow & \mathcal{M}_* \end{array}$$

é comutativo.

(8.12) TEOREMA : A imagem $r_*(\mathcal{M}_*(S^1)) \subset \mathcal{M}_*$ é a álgebra graduada sobre $\mathcal{N}^{\sim}_*$, cujos geradores são os quadrados $\left\{\left[\lambda_n \longrightarrow RP^n\right]^2\right\}_{n\geq 0}$.

Demonstração:

Como consequêcia do teorema (4.5), temos que $\mathcal{M}_*$ é a álgebra polinomial sobre $\mathcal{N}_*$, cujos geradores são $\left\{\left[\lambda_n \longrightarrow RP^n\right]\right\}_{n\geqslant 0}$. Por (8.7) temos que $\mathcal{M}_*(S^1)$ é a álgebra polinomial sobre $\mathcal{N}_*$, cujos geradores são $\left\{\left[\eta_n \longrightarrow CP^n\right]\right\}_{n\geqslant 0}$. Como temos que

$$r_*\left[\eta_n \longrightarrow CP^n\right] = \left[\lambda_n \longrightarrow RP^n\right]^2$$

e r_* é um homomorfismo de álgebras, o teorema é válido.∎

Analisaremos agora a imagem

$$t_1(SF_*(S^1)) \subset \mathcal{J}_* \ .$$

Denotemos por R_o^j a classe de (CP^j,S), onde S é a ação $(s,\left[z_o,\ldots,z_j\right]) \longmapsto \left[s\ z_o,z_1,\ldots,z_j\right]$. O conjunto dos pontos fixos desta ação é formado de duas partes:

$$CP^o \ , \quad \text{com fibrado normal} \quad \mathbb{C}^j \ ;$$

e

$$CP^{j-1} \ , \quad \text{com fibrado normal} \quad \eta_{j-1} \ .$$

Definimos agora o operador

$$\mathcal{K} : SF_*(S^1) \longrightarrow SF_*(S^1)$$

do seguinte modo:

seja (M^n,T) uma ação de S^1 em uma variedade fechada M^n. Consideremos as ações de S^1 em $D^2 \times M^n$

$$T_1 \; : \; (t,(z,m)) \longmapsto (t\,z,\ m)$$

$$T_2 \; : \; (t,(z,m)) \longmapsto (t\,z, T(t,m)) \; .$$

Se nos restringimos a $S^1 \times M^n$ obtemos as ações induzidas $(S^1 \times M^n, T_1)$ e $(S^1 \times M^n, T_2)$, as quais são equivariantemente difeomorfas por

$$\varphi \; : \; (S^1 \times M^n, T_1) \longrightarrow (S^1 \times M^n, T_2)$$

$$(s,\ x) \longmapsto (s,\ T(s,x)) \; .$$

Tomemos a união disjunta $(D^2 \times M^n, T_1) \cup (D^2 \times M^n, T_2)$. Construimos M^{n+2} uma variedade fechada, e uma ação τ_1 de S^1 em M^{n+2}, usando a identificação de $(S^1 \times M^n, T_1)$ com $(S^1 \times M^n, T_2)$ através de φ. Esta construção é devida a Conner e Floyd (veja [64], § 42).

Definimos

$$\mathcal{K}\left[M^n, T \right] = \left[M^{n+2}, \tau_1 \right] .$$

Observamos que o conjunto dos pontos fixos de $\left[M^{n+2}, \tau_1 \right]$ é formado de duas partes:

$F_T = \mathrm{Fix}(T)$, com fibrado normal $\nu \oplus \sigma$, onde
$\nu \longrightarrow F_T$ é o fibrado normal
de $F_T \subset M^n$

M^n , com fibrado normal σ .

Se aplicamos a operação $\mathcal{K}$, definida acima, obtemos $\mathcal{K}^k \left[M^n, T \right]$. Denotamos por $V(n,k)$ a variedade obtida após aplicarmos $\mathcal{K}^k$. Analisando o conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{K}^k \left[M^n, T \right]$, temos que êste é dado por:

$$\left[\nu \oplus \sigma^{k} \longrightarrow F_T\right] + \left[\sigma^{k} \longrightarrow V(n,0)\right] +$$

$$+ \left[\sigma^{k-1} \longrightarrow V(n,1)\right] + \ldots + \left[\sigma \longrightarrow V(n,k-1)\right] .$$

Como consequência do teorema (8.10), temos que é válido o seguinte:

(8.13) TEOREMA : Se $\nu \longrightarrow F_T$ é o fibrado normal do conjunto dos pontos fixos de (M^n,T) , então

$$\left[V(n,k)\right] = \left[CP(\nu \oplus \sigma^{k+1})\right] + \sum_{j=o}^{k-1} \left[CP^{k-j}\right] \left[V(n,j)\right] .$$

Usando o teorema 24.4 de Conner e Floyd, em [64], podemos relacionar as classes de $RP(\lambda_n \oplus \theta^k)$, onde $\lambda_n \longrightarrow RP^n$ é o fibrado (real) linha canônico, e θ é o fibrado linha (real) trivial; e $CP(\eta_n \oplus \sigma^k)$, onde $\eta_n \longrightarrow CP^n$ é o fibrado (complexo) linha canônico, e σ é o fibrado linha (complexo) trivial. A saber temos o seguinte:

(8.14) TEOREMA : $\left[CP(\eta_n \oplus \sigma^k)\right] = \left[RP(\lambda_n \oplus \theta^k)\right]^2 .$

No teorema (6.4), mostramos que $\mathcal{J}_*$ é gerado como álgebra sôbre $\mathcal{N}_*$ pelos elementos $\Gamma^k(P_o^r)$ com $k \geqslant 0$, $r \neq 1$

com as relações provenientes de

$$\Gamma(\alpha\beta) = \Gamma(\alpha)\beta + \mathcal{E}(\alpha)\Gamma(\beta) .$$

Exatamente do mesmo modo pode se provar:

(8.15) TEOREMA : $SF_*(S^1)$ é gerado como álgebra sobre $\mathcal{N}_*$ pelos elementos

$$\mathcal{K}^k(R^j_o) \quad , \quad \text{com} \quad k \geq 0 \quad , \quad j \neq 1 ,$$

e com as relações provenientes de

$$\mathcal{K}(\alpha\beta) = \mathcal{K}(\alpha)\beta + \mathcal{E}(\alpha)\mathcal{K}(\beta) .$$

(8.16) TEOREMA : A imagem $t_1(\mathcal{K}^k(R^j_o)) = (\Gamma^k(P^j_o))^2$.

Demonstração:

O conjunto dos pontos fixos de $\Gamma^k(P^j_o)$ é $[\lambda \oplus \rho^k \longrightarrow RP^{j-1}] + [\varepsilon^{j+k} \longrightarrow RP^o] + [\varepsilon^k \longrightarrow (\Gamma^o(P^j_o))] + [\varepsilon^{k-1} \longrightarrow \mathcal{E}(\Gamma(P^j_o))] + \ldots + [\varepsilon \longrightarrow \mathcal{E}(\Gamma^{k-1}(P^j_o))]$. O conjunto dos pontos fixos de $\mathcal{K}^k(R^j_o)$ é $[\eta \oplus \sigma^k \longrightarrow CP^{j-1}] + [\sigma^{j+k} \longrightarrow CP^o] + [\sigma^k \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{K}^o(R^j_o))] + \ldots + [\sigma \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{K}^{k-1}(R^j_o))]$. Assim $j_*(\Gamma^k(P^j_o))^2 = t_2\, j_*(\mathcal{K}^k(R^j_o))$. Pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & SF_*(S^1) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "t_1"'] & \mathcal{B}_*(S^1) \arrow[d, "t_2"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}_* \arrow[r, "j_*"] & \mathcal{B}_*
\end{tikzcd}$$

o teorema é válido. ∎

Como consequência dos teoremas (8.15) e (8.16), temos o seguinte teorema:

(8.17) TEOREMA : A imagem $t_1(SF_*(S^1)) \subset \mathcal{J}_*$ é o $\mathcal{N}_*$-módulo gerado pelos quadrados $[M^n, T]^2$ em $\mathcal{J}_*$.

Também é claro que é verdadeiro o seguinte teorema:

(8.18) TEOREMA : O diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & SF_*(S^1) & \longrightarrow & \mathcal{U}_*(S^1) & \longrightarrow & \mathcal{N}_*(S^1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle t_1} & & \downarrow{\scriptstyle t_2} & & \downarrow{\scriptstyle t_3} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_* & \longrightarrow & \mathcal{U}_* & \longrightarrow & \mathcal{N}_*(Z_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

é comutativo.

9. COMENTÁRIOS

Nesta secção apresentamos, na forma de comentários, algumas opiniões que temos a respeito do estudo das involuções e das ações semi-livres de S^1.

(9.1) Em [169], R. Thom também estudou Ω_* o anel de cobordismo orientado. Neste caso a definição da relação de cobordismo leva em consideração a orientação das variedades. O estudo da estrutura de anel de Ω_* é bem mais difícil que o estudo de $\mathcal{N}_*$ que apresentamos na secção 1. R. Thom, em [169], reduziu o problema a um problema de homotopia, e mostrou que $\Omega_* \otimes Q$ é um anel polinomial racional nas classes $[CP^{2i}]$. A seguir Milnor (veja [120]) mostrou que Ω_* não tem torsão ímpar e que o quociente $\Omega_*/$ Torsão é um anel polinomial sobre Z com geradores nas dimensões 4i.

Em [178], Wall mostrou que Ω_* possue sòmente torsão de ordem 2 e descreveu o quociente $\Omega_*/2\ \Omega_*$ (veja também [165]).

(9.2) No Capítulo 1 de [64], Conner e Floyd apresentam a teoria de bordismo singular para o caso orientado. Os resultados desta teoria são essencialmente os mesmos apresentados na secção 2 do presente trabalho, apenas levando-se em consideração as orientações das variedades, não havendo grandes diferenças técnicas, nem surgindo dificuldades novas. Esta teoria é utilizada para se estudar o bordismo de involuções que preservam a orientação.

(9.3) O estudo das involuções em variedades orientadas é o que apresenta maiores dificuldades. Estas dificuldades técnicas surgem de complicações provenientes do fato que o número primo 2 ocorre na ordem do grupo atuante e também na torsão de Ω_*. Stong em [155] estuda as ações de Z_p que preservam a orientação, mas impõe a condição que o número primo p seja diverso de 2. Sòmente recentemente, Kosniowski e Ossa em seu artigo [109], de 1982, calculam a estrutura destes grupos de bordismo como módulos sôbre Ω_*. O resultado, como era de se esperar, é bastante complicado. É uma soma direta (com a notação de [109]) $P_* \oplus T_* \oplus F_*$, com P_* uma álgebra polinomial sobre Ω_*, T_* um $\Omega_* \otimes Z_2$-módulo livre, e F_* sendo uma complicação com três conjuntos de geradores e dez tipos de relações. Este trabalho é de entendimento bastante difícil, exigindo do leitor um bom conhecimento específico das técnicas mais sofisticadas de cobordismo. O estudo da estrutura multiplicativa das involuções em variedades orientadas é ainda um problema em aberto (aos corajosos).

(9.4) O estudo das involuções fracamente complexas, isto é, aquelas que preservam a estrutura fracamente complexa da variedade, foi feito inicialmente por R. Stong em 1970. Stong em seu artigo [155] apresenta a estrutura de módulo sobre $\mathcal{U}_*$ (o anel de cobordismo unitário, estudado por Milnor em [121]). A estrutura multiplicativa foi estudada por nós (veja [97]) em 1975. Em [97], são apresentados geradores multiplicativos para as dimensões mais baixas, suas relações e são desenvolvidas técnicas eficientes para determinar os produtos deste anel. Posteriormente Kosniowski (veja [104]) apresentou um conjunto de geradores multiplicativos, determinando de forma completa a estrutura de anel do bordismo das involuções fracamente complexas.

(9.5) As ações semi-livres de S^1 que preservam a orientação das variedades foram estudadas inicialmente por Ossa, em 1969, em sua tese de doutorado. Ossa notou que as técnicas usadas por Boardman (veja [28]) para estudar a estrutura multiplicativa das involuções (não orientadas) apresentavam uma correspondência natural com aquelas necessárias ao estudo das ações semi-livres de S^1. Em 1974, quando ainda estávamos no Departamento de Matemática da Universidade de Chicago, nós também havíamos observado tal fato. Apenas posteriormente descobrimos que Ossa já havia usado isto anteriormente. Quanto às ações semi-livres de S^1 em variedades não orientadas, os resultados apresentados na secção 8 do presente trabalho constam da tese de doutorado de F. Capobianco (veja [37]), e foram colocados aqui como um complemento natural ao estudo do bordismo das involuções.

(9.6) Como comentário final, julgamos pertinente apresentar aqui uma traduçao do paragrafo "Ulam's Dilemma", do livro "The Mathematical Experience", livro esse de autoria de P. J. Davis e R. Hersh.

Stanislaw Ulam descreve em sua autobiografia (Adventures of a Mathematician): "A uma conferência que apresentei ao vigésimo quinto aniversário da construção do computador de von Neumann em Princeton há poucos anos atrás, eu repentinamente comecei a estimar silenciosamente em minha mente quantos teoremas são publicados anualmente nas revistas de Matemática. Fiz um cálculo mental rápido e cheguei a um número aproximado de cem mil teoremas por ano. Mencionei este número e minha audiência ficou boquiaberta. No dia seguinte, dois matemáticos dos mais jovens que estavam na palestra vieram me contar que, impressionados pelo número enorme, êles se dispuseram a uma pesquisa mais sistemática e detalhada na biblioteca do Instituto. Multiplicando o número de revistas, pelo número de publicações anuais, pelo número de artigos por publicação e pela média do número de teoremas por artigo, a estimativa deles chegava a aproximadamente duzentos mil teoremas em um ano. Se o número de teoremas é maior do que um pode compilar, a quem se pode confiar para julgar o que é "importante"? Não se pode ter a sobrevivência do melhor se não há interação. É realmente impossível manter-se a par mesmo dos resultados mais importantes e excitantes. Como se pode reconciliar isto, com o ponto de vista que a Matemática sobreviverá como uma ciêcia única? Em Matemática um acaba se esposando com seu pequeno campo de pesquisas. Por isto, o julgamento do valor da pesquisa matemática se torna cada vez mais e mais difícil, e nós na maioria estamos nos tornando técnicos. A variedade de objetos estudados pelos cientistas jovens está crescendo exponencialmente. Talvez pudessemos chamar a isto uma poluição de pensamento; é possìvelmente um espelho da prodigalidade da natureza que produz um milhão de espécies de insetos diferentes".

A transcrição colocada acima tenta dar uma justificativa para a validade da apresentação, de uma forma completa e com um tratamento unificado, de notação, métodos e técnicas, do estudo das involuções em variedades, tendo em vista a lista bibliográfica que está ao final do presente trabalho.

BIBLIOGRAFIA

1. Adams, J.F.: On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math. 72 (1960), 20-104.

2. _______: On formulae of Thom and Wu, Proc. London Math. Soc. 11 (1961), 741-752.

3. _______: On the groups J(X), II, Topology 3 (1965), 137-173.

4. _______: On the groups J(X), IV, Topology 5 (1966), 21-71.

5. _______: "Novikov's work on operations on complex cobordism", Lecture Notes, Univ. of Chicago, 1967.

6. _______: "Lectures on Lie groups", Benjamin, New York, 1969.

7. _______: "Quillen's work on formal groups and complex cobordism", Lecture Notes, Univ. of Chicago, 1970.

8. Adams, J.F.: "Algebraic Topology: a student's guide", Cambridge Univ. Press, 1972.

9. Alexander, J.C.: The bordism ring of manifold with involutions. Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 536-542.

10. Alexandroff, P., and Hopf, H.: "Topologie", Springer-Verlag, 1933.

11. Atiyah, M.F.: Immersions and embeddings of manifolds. Topology 1 (1961), 125-132.

12. _______: Bordism and cobordism. Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 200-208.

13. _______: Thom complexes. Proc. London Math. Soc. 11 (1961), 291-310.

14. _______: "K-theory". Benjamin, New York, 1967.

15. Atiyah, M.F., and Bott, R.: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I. Ann. of Math. 86 (1967), 374-407.

16. _______: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, II. Applications. Ann. of Math. 88 (1968), 451-491.

17. Atiyah, M.F., and Hirzebruch, F.: Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. Symp. Pure Math., 3, pp. 7-38. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1961.

18. Atiyah, M.F., and Hirzebruch, F.: Spin-manifolds and group actions. "Essays on Topology and related Topics, Memoires dédiés a à Georges de Rham", pp. 18-28. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

19. Atiyah, M.F., Segal, G.B.: The index of elliptic operators, II. Ann. of Math. 87 (1968), 531-545.

20. ______: Equivariant K-theoy and completion. J. Differential Geometry 3 (1969), 1-18.

21. Atiyah, M.F., and Singer, I.M.: The index of elliptic operators, I. Ann. of Math. 87 (1968), 484-530.

22. ______: The index for elliptic operators, III. Ann. of Math. 87 (1968), 546-604.

23. ______: The index for elliptic operators, IV. Ann. of Math. 93 (1971), 119-138.

24. ______: The index for elliptic operators, V. Ann. of Math. 93 (1971), 139-149.

25. Beem, R.P.: The action of free G-bordism on G-bordism. Duke Math. Journal 42 (1975), 297-305.

26. Beem, R.P., and Wheeler, E.R.: The image of unitary bordism in

unoriented bordism - the oriented case. Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 445-449.

27. Boardman, J.M.: On manifolds with involution. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 136-138.

28. _______: Cobordism of involutions revisited. Lecture Notes in Math. No. 298, Springer-Verlag, Berlin (1972), 131-151.

29. Borel, A.: La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes. Comment. Math. Helv. 27 (1953), 165-197.

30. _______: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes Lie compact. Ann. of Math. 57 (1953), 115-207.

31. _______: Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compcts connexes. Tohoku Math. J. 13 (1961), 216-240.

32. Borel, A., and Hirzebruch, F.: On characteristic classes of homogeneous spaces, I. Am. J. Math. 80 (1958), 458-538; II. Am. J. Math. 81 (1959), 315-382.

33. Borel, A., and Serre, J.P.: Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. Am. J. Math. 75 (1953), 409-448.

34. Borel, A. et al.: Seminar on transformation groups. Ann. Study

46, Princeton, 1960.

35. Bredon, G.E.: "Introduction to compact transformation groups". Academic Press, New York and London, 1972.

36. Burdick, R.O.: Oriented manifolds fibered over the circle. Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 449-452.

37. Capobianco, F.L.: Involutions and semi-free S^1 actions. Thesis, University of Virginia, 1975.

38. ______: Stationary points of $(Z_2)^k$-actions. Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 377-380.

39. ______: Manifolds with involution whose fixed set has codimension four. Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 157-162.

40. ______: Fixed sets of involutions. Pacific J. Math. 75 (1978), 339-345.

41. Capobianco, F.L., and Kosniowski, C., and Stong, R.E.: Free involutions. Math. Ann. 242 (1979), 21-26.

42. Cartan, H., and others: Cartan Seminar Notes, 1950-51, Paris;

43. Cartan, H., and Eilenberg, S.: "Homological Algebra". Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1956.

44. Chevalley, C.: "Theory of Lie Groups", Princeton Univ. Press, New Jersey, 1946.

45. Conner, P.E.: Concerning the action of a finite group. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42 (1956), 349-351.

46. ______: On the action of a finite group on $S^n \times S^n$. Ann. of Math. 66 (1957), 586-588.

47. ______: On the action of the circle group. Michigan Math. J. 4 (1957), 241-247.

48. ______: A note on a theorem of Mostow. Proc; Amer. Math. Soc. 9 (1958), 467-471.

49. ______: On a theorem of Montgomery and Samelson. Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 464-466.

50. ______: A note on a theorem of Liao. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 730-733.

51. ______: Orbits of uniform dimension. Michigan Math. J. 6 (1959), 25-32.

52. ______: Retraction properties of the orbit space of a compact topological transformation group. Duke Math. J. 27 (1960), 341-357.

53. _______: A bordism theory for actions of an abelian group. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 244-247.

54. _______: Diffeomorphisms of period two. Michigan Math. J. 10 (1963), 341-352.

55. _______: "Seminar on Periodic Maps". Lecture Notes in Math. No. 46, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1967.

56. _______: "Lectures on the Action of a Finite Group". Lecture Notes in Math. No. 73, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1968.

57. Conner, P.E., and Floyd, E.E.: Orbit spaces of circle groups of transformations. Ann. of Math. 67 (1958), 90-98.

58. _______: A note on the action of SO(3). Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 616-620.

59. _______: On the construction of periodic maps without fixed points. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 354-360.

60. _______: Fixed point free involutions and equivariant maps. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 416-441.

61. _______: Fixed point free involutions and equivariant maps, II. Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962); 222-228.

62. Conner, P.E., and Floyd, E.E.: Differentiable periodic maps. Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 76-86.

63. _______: Periodic maps which preserve a complex structure. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 574-579.

64. _______: "Differentiable Periodic Maps". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1964.

65. _______: Maps of odd period. Ann. of Math. 84 (1966), 132-156.

66. _______: Fibring within a cobordism class. Michigan Math. J. 12 (1965), 33-47.

67. _______: Torsion in SU-bordism. Memoirs Amer. Math. Soc. No. 60 1966.

68. _______: "The relation of cobordism to K-theories". Lecture Notes in Math. No. 28, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966.

69. Conner, P.E., and Landweber, P.S.: The bordism class of an SU manifold. Topology 6 (1967), 415-421.

70. Conner, P.E., and Montgomery, D.: Transformation groups on a $K(\pi,1)$, I. Michigan Math. J. 6 (1959), 405-412.

71. Conner, P.E., and Montgomery, D.: An example for SO(3). Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48 (1962), 1918-1922.

72. Conner, P.E., and Raymond, F.: Actions of compact Lie groups on aspherical manifolds. "Topology of Manifolds", pp. 227-264. Markham Publ., Chicago, Illinois, 1970;

73. Dold, A.: Erzeugende der Thomschen Algebra N. Math. Z. 65 (1956), 25-35.

74. _______: "Lectures on Algebraic Topology". Springer- Verlag, Berlin and New York, 1972.

75. Dugundji, J.: "Topology". Allyn and Bacon, Boston, 1966.

76. Dyer, E.: "Cohomology Theories". Benjamin, New York, 1969.

77. Eilenberg, S., and Steenrod, N.: "Foundations of Algebraic Topology". Princeton Univ; Press, Princeton, New Jersey, 1952.

78. Floyd, E.E.: Some retraction properties of the orbit decomposition spaces of periodic maps. Amer. J. Math. 73 (1951), 363-367.

79. _______: Examples of fixed points sets of periodic maps. Ann. of Math. 55 (1952), 167-171.

80. Floyd, E.E.: On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 138-147.

81. ______: On related periodic maps. Amer. J; Math. 74 (1952), 547-554.

82. ______:: Orbit spaces of finite transformation groups, I. Duke Math. J. 20 (1953), 563-568.

83. ______: Orbit spaces of finite transformation groups, II. Duke Math. J. 22 (1955), 33-38.

84. ______: Examples of fixed-point sets of periodic maps, II. Ann. of Math. 64 (1956), 396-398.

85. ______: Orbits of torus groups operating on manifolds. Ann. of Math. 65 (1957), 505-512.

86; ______: Fixed point sets of compact abelian Lie groups of transformations; Ann. of Math. 65 (1957), 30-35.

87. ______: Periodic maps via Smith theory. "Seminar on Transformation Groups", Ann. of Math. Studies, No. 46, Chapter III. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1960.

88. ______: Isotropy subgroups of toral groups. "Seminar on Trans-

formation Groups", Ann. of Math. Studies, No. 46, Chapter VI. Princeton Univ; Press, Princeton, New Jersey, 1960.

89. Floyd, E.E;, and Richardson, R.W.: An action of a finite group on an n-cell without stationary points. Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959), 73-76.

90. Hirsh, M.W.: "Differential Topology". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.

91. Hirzebruch, F.: "Topological Methods in Algebraic Geometry". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966.

92. ________: Involutionen auf Mannigfaltigkeiten. "Proc. Conf. Transformation Groups, New Orleans 1967", pp. 148-166, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1968.

93. Hoo, C.S.: Remarks on the bordism algebra of involutions. Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1083-1086.

94. Husemoller, D.: "Fibre Bundles". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975.

95. Kamata, M.: The structure of the bordism groups $\mathcal{U}_*(BZ_p)$. Osaka J. Math. 7 (1970), 409-416.

96. Kamata, M.: On the ring structure of $\mathcal{U}_*(BU(1))$. Osaka J. Math. 7 (1970), 417-422.

97. Kiihl, J.C.S.: On the bordism of weakly complex involutions. Thesis, University of Chicago, 1975.

98. ______: Bordismo de involuções. Atas do 10º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1975.

99. ______: On the complex projective bundle construction. Lecture Notes in Math. No. 597, Springer-Verlag, Berlin and New York (1977), 568-580.

100. ______: On a dual submanifold homomorphism. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, Serie II, Tomo XXIX (1980), 411-419.

101. ______: U-structures and sphere bundles. Trab. do Depto. Matemática, USP, No. 53 (1983).

102. Kosniowski, C.: Z/p manifolds with isolated fixed points. Math. Z. 136 (1974), 179-191.

103. ______: A note on RO(G) graded G bordism theory. Oxford Quarterly J. of Math. 26 (1975), 411-418.

104. ______: Generators of the unitary Z/p bordism ring. Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 344-346.

105. Kosniowski, C.: Generators of the Z/p bordism ring. Math. Z. 149 (1976), 121-130.

106. _______: Characteristic numbers of Z/p manifolds. J. London Math. Soc. 14 (1976), 283-295.

107. _______: Z/p manifols with low dimensional fixed point set. "Transformation Groups", (L.M.S. Lecture Note Series 26). Cambridge University Press, Cambridge (1977), 92-120.

108. Kosniowski, C., and Stong, R.E.: Involutions and characteristic numbers. Topology 17 (1978), 309-330.

109. Kosniowski, C., and Ossa, E.: The structure of the module of oriented involutions. Proc. London Math. Soc. 45 (1982), 267-290.

110. Lang, S.: "Differential Manifolds". Addison-Wesley, Reading, Mass. and London, 1972.

111. Liulevicius, A.L.: The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations. Memoirs of the Amer. Math. Soc., No. 42, 1962.

112. _______: A proof of Thom's theorem. Comm. Math. Helv. 37 (1962), 121-131.

113. Liulevicius, A.L.: On Characteristic Classes. Lecture Notes. Aarhus University, 1968.

114. Lopez de Medrano, S.: Involutions of homotopy spheres and homology 3-spheres. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 727-731.

115. _______: Some results on involutions of homotopy spheres. "Proc. Conf. Transformation Groups, New Orleans 1967", pp. 167-174. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1968.

116. _______: "Involutions on Manifolds". Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

117. Markov, A.: The inslubility of the problem of homeomorphy. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 121 (1956), 399-405.

118. Milnor, J.W.: The Steenrod algebra and its dual. Ann. of Math. 67 (1958), 150-171.

119. _______: "Differential Topology", mimeographed, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1958.

120. _______: On the cobordism ring Ω_*. Notices Amer. Math. Soc. 5 (1958), 457.

121. _______: On the cobordism ring Ω_* and a complex analogue, Part I. Amer. J. Math. 82 (1960), 505-521.

122. Milnor, J.W.: A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds. Proc. Symp. Pure Math. Vol. III, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1961, 39-55.

123. _______: A survey of cobordism theory. Enseignement Mathematique 8 (1962), 16-23.

124. _______: Spin structures on manifolds. Enseignement Mathematique 9 (1963), 198-203.

125. _______: Microbundles I. Topology 3 (1964), 53-81.

126. _______: On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and spin manifolds. Topology 3 (1965), 223-230.

127. _______: "Lectures on the h-cobordism Theorem". Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1965.

128. _______: Characteristic classes for spherical fibre spaces. Mimeographed, Princeton University, 1965.

129. Milnor, J.W., and Moore, J.C.: On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math. 81 (1965), 211-264.

130. Milnor, J.W., and Stasheff, J.D.: "Characteristic Classes". Ann. of Math. Studies No. 76, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1974.

131. Munkres, J.R.: "Elementary Differential Topology". Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966.

132. Montgomery, D., and Zippin, L.: Topological transformation groups, I. Ann. of Math. 41 (1940), 778-791.

133. _______: A class of transformation groups in E^n. Amer. J. Math. 5 (1954), 460-465.

135. _______: "Topological Transformation Groups". Wiley, New York, 1955.

136. Ossa, E.: Fixpunktfreie S^1-Aktionen. Math. Ann. 186 (1970), 45-52.

137. Palais, R.S.: Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1965.

138. Pergher, P.L.Q.: Bordismo de Fibrados e Involuções. Thesis. ICM.USP; São Carlos, 1983.

139. Peterson, F.P.: Relations among Stiefel-Whitney classes of manifolds. Notes, Aarhus Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus, 1962.

140. Poincaré, H.: Analysis Situs. Journal de l'Ecole Polytechnique 1 (1895), 1-121.

141. Pontrjagin, L.S.: Characteristic cycles on differentiable manifolds. Math. Sbor. (N.S.) 21 (63)(1947), 233-284 (AMS translations, No. 32).

142. ______: Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. Trudy Mat. Inst. im Steklov, No. 45, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1955 (AMS translations, series 2, vol. 11, 1959).

143. Reinhart, B.L.: Cobordism and the Euler number. Topology 2 (1963), 173-178.

144. Rohlin, V.A.: A 3 dimensional manifold is the boundary of a 4 dimensional manifold. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 81 (1951), 355.

145. Royster, D.C.: Aspherical generators of unoriented cobordism. Proc; Amer. Math. Soc. 66 (1977), 131-137.

146. ______: Stabilizations of periodic maps on manifolds. Michigan Math. J. 27 (1980), 235-245.

147. Shimada, N., and WU, C.-M.: Bordism algebras of periodic transformations. Osaka J. Math. 10 (1973), 25-32.

148. Spanier, E.H.: "Algebraic Topology". McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

149. Steenrod, N.E.: "The Topology of Fibre Bundles". Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1951.

150. Steenrod, N.E., and Epstein, D.B.A.: "Cohomology Operations". Princeton Univ; Press, Princeton, New Jersey, 1962.

151. Stong, R.E.: Determination of $H^{*}(BO(k,\ldots,\infty);Z_2)$ and $H^{*}(BU(k,\ldots,\infty);Z_2)$. Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), 526-544.

152. _______: Bordism and involutions. Ann. Math. 90 (1969), 47-74.

153. _______: Equivariqnt bordism and $(Z/2)^k$ actions. Duke Math. J. 37 (1970), 779-785.

154. _______: Unoriented bordism and actions of finite groups. Mem. Amer. Math. Soc. No. 103 (1970).

155. _______: Complex and oriented equivariant bordism. "Topology of Manifolds", pp. 291-316. Markham Publ., Chicago, Illinois 1970.

156. _______: On fibering of cobordism classes. Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1973), 431-447.

157. _______: Cobordism and Stiefel-Whitney numbers. Topology 4 (1965), 241-256.

158. Stong, R.E.: Relations among characteristic numbers - I. Topology 4 (1965), 267-281; - II, Topology, 5 (1966), 133-148.

159. _______: On the squares of oriented manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 133-148.

160. _______: Cobordism of maps. Topology 5 (1966), 245-258.

161. _______: Involutions fixing projective spaces. Michigan Math. J. 13 (1966), 445-447.

162. _______: On complex-spin manifolds. Ann. of Math. 85 (1967), 526-536.

163. _______: Some remarks on sympletic cobordism. Ann. of Math. 86 (1967), 425-433.

164. _______: Stationary point free group actions. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 1089-1092.

165. _______: "Notes on Cobordism Theory". Princeton Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1968.

166. Su, J.C.: A note on the bordism algebra of involutions. Michigan Math. J. 12 (1965), 25-31.

167. Szczarba, R.: On tangent bundles of fibre spaces and quocient

spaces. Amer. J. Math. 86 (1964), 685–697.

168. Thom, R.: Espaces fibrés en spheres et carrés de Steenrod. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 69 (1952), 109–181.

169. _______: Quelques propriétés globales des variétés differentiables. Comm. Math. Helv. 28 (1954), 17–86.

170. _______: Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangleés. Symposium International de Topologia Algebraica, Mexico, 1958.

171. _______: Travaux de Milnor sur le cobordisme. Seminaire Bourbaki 1958/59, Paris.

172. tom Dieck, T.: Faserbündel mit Gruppenoperation. Arch. Math. 20 (1969), 136–143.

173. _______: Bordism of G-manifolds and integrality theorems. Topology 9 (1970), 345–358.

174. _______: Actions of finite abelian p-groups without stationary points. Topology 9 (1970), 359–366.

175. Uchida, F.: Exact sequences involving cobordism groups of immersions. Osaka J. Math. 6 (1969), 397–408.

176. Uchida, F.: Bordism algebra of involutions. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 615-619.

177. _______: Cobordism groups of semi-free S^1- and S^3-actions. Osaka J. Math. 7 (1970), 345-351.

178. Wall, C.T.C.: Determination of the cobordism ring. Ann. of Math. 72 (1960), 292-311.

179. Wasserman, A.: Cobordism of group actions. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 866-869.

180. _______: Equivariant differential topology. Topology 8 (1969), 127-150.

181. Wronski, J.M.: "Oeuvres Mathématiques". Reprinted Paris, J. Herman, 1925.

182. Wu, C.-M.: Bordism and maps of odd prime period. Osaka J. Math. 8 (1971), 405-424.