

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
TESE DE DOUTORADO

O Problema de Hill em Relatividade Geral

Autor: ANDRÉ FABIANO STEKLAIN

Orientador: PROF. DR. PATRICIO A. LETELIER SOTOMAYOR

Título: O Problema de Hill em Relatividade Geral.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **André Fabiano Steklain** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 6 de abril de 2009.



Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Patricio Aníbal Letelier Sotomayor
2. Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas
3. Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer
4. Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira
5. Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Steklain, André Fabiano

St37p Problema de Hill em relatividade geral / André Fabiano Steklain --
Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Problema de Hill. 2. Expansão pós-Newtoniana. 3. Potenciais
pseudo-Newtonianos. 4. Estabilidade. 5. Seções de Poincaré. 6. Expoentes
de Lyapunov. 7. Fractais. I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

(cqc/imecc)

Título em inglês: Hill problem in general relativity

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Hill problem. 2. Post-Newtonian expansion. 3. Pseudo-Newtonian potentials. 4. Stability. 5. Poincaré sections. 6. Lyapunov exponents. 7. Fractals.

Área de concentração: Física

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Patricio Anibal Letelier Sotomayor (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas (IFT-Unesp)
Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer (IF-UFPR)
Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira (UERJ)
Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar (IFGW-Unicamp)

Data da defesa: 06/04/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 06 de abril de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



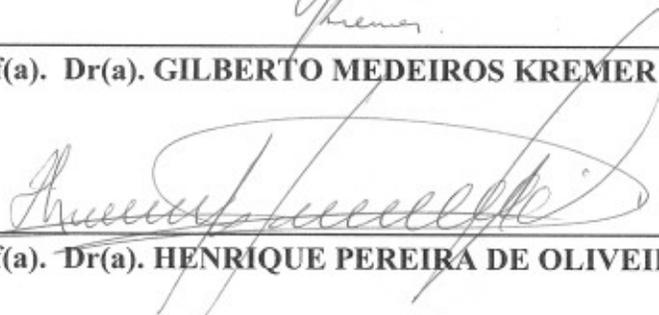
Prof(a). Dr(a). PATRICIO ANIBAL LETELIER SOTOMAYOR



Prof(a). Dr(a). GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS



Prof(a). Dr(a). GILBERTO MEDEIROS KREMER



Prof(a). Dr(a). HENRIQUE PEREIRA DE OLIVEIRA



Prof(a). Dr(a). MARCUS ALOIZIO MARTINEZ DE AGUIAR

Dedico esta tese à minha esposa Adriana e à minha filha Bianca.

“If you’re going to try, go all the way. Otherwise don’t even start. This could mean losing girlfriends, wives, relatives, jobs. And maybe your mind. It could mean not eating for three or four days. It could mean freezing on a park bench. It could mean jail. It could mean derision. It could mean mockery, isolation. Isolation is the gift. All the others are a test of your endurance. Of how much you really want to do it. And you’ll do it, despite rejection in the worst odds. And it will be better than anything else you can imagine. If you’re going to try, go all the way. There is no other feeling like that. You will be alone with the gods. And the nights will flame with fire. You will ride life straight to perfect laughter. It’s the only good fight there is.”

(Charles Bukowski)

Agradecimentos

Agradeço principalmente ao Prof. Patricio Aníbal Letelier Sotomayor pela orientação inspiradora e, sobretudo, pela amizade e paciência durante todo este tempo. Agradeço também aos membros que compuseram a banca examinadora pelas sugestões.

Agradeço à minha esposa Adriana todos estes anos de amor e compreensão que me deram força para vencer todos os obstáculos.

Agradeço a meus pais Pedro e Rosemari pelo amor e apoio incondicional em todos os momentos da minha vida.

Agradeço a todos os meus amigos pelo apoio que recebi para terminar este trabalho. Em especial Alberto Moreau, Bernardo Meirelles, Carlos Zunino, Edgard Amorim, Myriano Henriques, Rafael Moraes, Vitor Macedo e Thirza Sorpreso, pessoas com as quais aprendi muito, por tantos anos de amizade desinteressada e verdadeira.

Agradeço a todos os funcionários do IMECC, em especial a Fátima, Tânia, Cidinha e Ednaldo. Também agradeço aos funcionários das bibliotecas do IMECC e do IFGW.

Agradeço aos meus colegas de Petrobras, em especial André Schwartz, Cleber Carbonari, Julio Garcia, Helder Silverio, Henrique Fraquelli e Rodrigo Nunes, por me ensinarem a fazer limonada dos limões da vida. Agradeço também à Petrobras pela experiência que adquiri nestes anos.

Finalmente, agradeço ao CNPq e à FAPESP o apoio financeiro sem o qual a realização desta tese seria impossível.

Sumário

Resumo	xiii
Abstract	xv
Introdução	xvii
1 Sistemas Dinâmicos e Caos	1
1.1 Sistemas Dinâmicos e Espaços de Fase	1
1.2 Estabilidade Linear	2
1.3 Sistemas Hamiltonianos	4
1.4 Teoria de Perturbação Elementar	6
1.5 Caos e o Teorema KAM	8
1.6 Seções de Poincaré	10
1.7 Expoentes de Lyapunov	11
1.8 Fractais e Escape Fractal	13
2 O Problema de Hill	15
2.1 O Problema de Hill Newtoniano	15
2.2 Estabilidade do Problema de Hill	18
2.3 Potenciais Pseudo-Newtonianos e o Problema de Hill Generalizado	23
3 O Potencial de Paczyński-Wiita	27
3.1 O Potencial de Paczyński-Wiita	27
3.2 Estabilidade do Problema de Hill com o Potencial de Paczyński-Wiita	28
4 O Potencial ABN	37
4.1 O potencial ABN	37
5 Hill e Relatividade Geral	47
5.1 Métrica de um Sistema Binário no Problema de Hill	47
5.2 Equações de Hill na métrica 1PN	69
5.3 Estabilidade das Órbitas	70

6	Conclusões	83
A	Implementação dos Programas	85
A.1	GENERFRAC	85
A.2	DIMFRAC	94
A.3	POINCARE	99
A.4	LYAPWOLF	111
	Referências Bibliográficas	122

Resumo

Neste trabalho a dinâmica do problema de Hill é analisada utilizando-se duas metodologias diferentes. Na primeira metodologia, ainda no contexto da mecânica newtoniana, utilizamos potenciais que reproduzem efeitos da relatividade geral. Foram utilizados os potenciais de Paczyński-Wiita e um dos potenciais de Artemova, Björnsson e Novikov (ABN). Estes potenciais reproduzem os efeitos que surgem no contexto da métrica de Schwarzschild (horizonte de eventos) e da métrica de Kerr (efeito Lense-Thirring), respectivamente. Na segunda metodologia as equações de movimento são obtidas a partir da relatividade geral, utilizando a métrica aproximada de um sistema binário obtida a partir de uma expansão pós-newtoniana de primeira ordem (1PN). A análise da dinâmica envolveu o estudo da estabilidade das órbitas fechadas, utilizando ferramentas clássicas como seções de Poincaré e expoentes de Lyapunov. Foram estudadas também trajetórias não limitadas utilizando escape fractal. Dentre os resultados obtidos destacam-se dois fatos. No caso do potencial ABN, existe uma influência da rotação na estabilidade das órbitas. No caso relativístico existe um limite para o qual o sistema, em geral caótico, se torna estável, diferentemente do que se poderia esperar de acordo com os potenciais pseudo-Newtonianos, em particular considerando o potencial de Paczyński-Wiita.

Abstract

In this work the Hill problem dynamics is analyzed using two different approaches. In the first approach, still in the realm of Newtonian mechanics, we use potentials that reproduce General Relativity effects. We use the Paczyński-Wiita and one of the Artemova, Björnsson e Novikov (ABN) potentials. These potentials reproduce effects that arise in the context of the Schwarzschild metric (event horizon) and of the Kerr metric (Lense-Thirring effect), respectively. On the second approach the equations of motion are obtained using general relativity, from the approximate metric of a binary system obtained from post-Newtonian expansions up to first order (1PN). In the analysis of the dynamics we study the stability of bounded orbits using classical tools, like Poincare sections and Lyapunov exponents. We also study open trajectories using Fractal Escape analysis. From our results we remark that two features. For the ABN potential there is an influence of the rotations on the stability of the orbits. In general relativity there is a limit where the system, in general chaotic, become stable, in disagreement with the pseudo-Newtonian potentials, in particular the Paczyński-Wiita potential.

Introdução

No século 19 G.W. Hill apresentou um problema de três corpos restrito baseado no sistema Sol-Terra-Lua [1]. Neste problema o movimento kepleriano da Lua ao redor da Terra sofre apenas uma perturbação proveniente do Sol, que, embora seja mais massivo do que a Terra, se encontra a uma grande distância do sistema Terra-Lua. Esta aproximação é conhecida como o Problema de Hill.

Atualmente esta aproximação ainda é utilizada em modelos em que uma órbita circular sofre influência de um corpo massivo distante. Esta aproximação é também bastante utilizada em estudos de dinâmica estelar, em particular ao se estudar a dinâmica de conglomerados e estrelas dentro de galáxias. Neste caso a galáxia, o conglomerado e a estrela podem ser considerados, respectivamente, como o Sol, a Terra e a Lua no problema de Hill. Embora neste caso as órbitas possam estar longe de serem circulares e a galáxia e o conglomerado possam estar longe de se comportarem como massas pontuais, o problema de Hill pode ser tomado como uma primeira aproximação, e pode facilmente acomodar as modificações necessárias, como pode ser visto, por exemplo, em Heggie [2]. A interação de um sistema kepleriano binário com uma onda gravitacional com polarização circular normalmente incidente também pode ser representada por um sistema de Hill, conforme Chicone *et al.* [3].

O problema de Hill clássico (com potencial gravitacional Newtoniano) não é completamente integrável, como já foi demonstrado por Meletlidou *et al.* [4]. A instabilidade das órbitas do problema de Hill clássico também já foi mostrada por Simó e Stuchi [5], através de seções de Poincaré. Neste trabalho, seções de Poincaré também serão utilizadas para demonstrar a instabilidade das órbitas.

O problema de Hill foi inicialmente formulado no contexto da mecânica newtoniana. Contudo, existem casos limites - corpos muito massivos, grandes velocidades - tais que correções relativísticas ou mesmo um tratamento totalmente baseado na relatividade geral é necessário.

Na primeira parte deste trabalho o potencial newtoniano será substituído por dois tipos de potenciais pseudo-newtonianos. O primeiro é o conhecido potencial de Paczyński-Wiita [6], o qual simula efeitos relativísticos provenientes de sistemas com simetria esférica descritos pela métrica de Schwarzschild. O segundo é um dos potenciais apresentados por Artemova, Björnsson e Novikov [7], o qual simula os efeitos relativísticos de um sistema com a presença de rotação descrito pela métrica de Kerr. Originalmente estes potenciais foram aplicados para

estudar discos de acreção em buracos negros. Assim como a métrica de Kerr se reduz à métrica de Schwarzschild quando a rotação tende a zero, o potencial de Artemova-Björnsson-Novikov tende ao potencial de Paczyński-Wiita neste mesmo limite. Estes potenciais, por sua vez, tendem ao potencial newtoniano no limite das massas tendendo a zero. Contudo, estes potenciais não são aproximações reais da relatividade. Por simularem alguns dos seus efeitos, no entanto, são considerados aproximações de “ordem zero” para a relatividade geral. Estes potenciais são úteis à medida que os problemas em relatividade geral envolvem uma grande quantidade de equações não lineares, de forma que o seu tratamento é em geral muito complicado. Os potenciais pseudo-newtonianos podem fornecer, então, uma primeira visão do que pode ser o comportamento do sistema.

Na segunda parte deste trabalho um tratamento rigoroso no campo da relatividade geral é efetuado. Utiliza-se para tanto uma métrica aproximada de um sistema binário obtido com auxílio de aproximações pós-newtonianas, a exemplo dos trabalhos de Alvi [8] e Blanchet *et al.* [9]. A derivação das equações de movimento, desta forma, são obtidas depois de longos cálculos no âmbito destas aproximações, as quais se encaixam nas aproximações do problema de Hill. A posse das equações, obtidas em um tratamento puramente relativístico permite, então, verificar a validade das aproximações com potenciais pseudo-newtonianos.

O objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade das órbitas dos problemas de Hill newtoniano, pseudo-newtoniano e relativístico, comparando-os e verificando a influência das massas dos corpos massivos e da rotação. Para o potencial de Paczyński-Wiita serão estudados o sistema Sol-Terra-Lua e o sistema Via Láctea-Aglomerado M2-Estrela. Para o potencial de Artemova-Björnsson-Novikov será estudado um sistema do tipo super aglomerado-galáxia-estrela, no qual a dependência das propriedades dinâmicas com a rotação é mais evidenciada. Para o problema relativístico serão estudados vários sistemas.

No Capítulo 1 são revisados alguns dos principais conceitos e definições em sistemas dinâmicos e caos, visando relacioná-los mais adiante ao problema de Hill. São apresentados a definição de sistemas dinâmicos e conceitos de integrabilidade e caos em sistemas hamiltonianos, juntamente com o teorema KAM. Serão também apresentadas uma introdução das teorias das seções de Poincaré, dos expoentes de Lyapunov e do escape fractal, técnicas que permitem investigar a estabilidade de sistemas limitados e abertos.

No Capítulo 2 é apresentado o problema de Hill, e as equações de Hill serão generalizadas para comportar potenciais pseudo-newtonianos.

No Capítulo 3 é apresentado o potencial de Paczyński-Wiita e as equações de Hill modificadas com este potencial. A seguir a estabilidade das órbitas será analisada utilizando seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov e dimensão fractal.

No Capítulo 4 é apresentado o potencial ABN e as equações de Hill modificadas com este potencial. A seguir a estabilidade das órbitas será analisada utilizando seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov e dimensão fractal.

No Capítulo 5 são obtidas as equações de Hill no contexto da relatividade geral, utilizando aproximações pós-newtonianas de primeira ordem (1PN). A seguir a estabilidade das órbitas é

analisada utilizando seções de Poincaré, expoentes de Lyapunov e dimensão fractal.
No Capítulo 6, finalmente, são apresentadas as conclusões obtidas deste trabalho.

Sistemas Dinâmicos e Caos

Este capítulo possui o objetivo de apenas revisar de forma superficial alguns conceitos que serão utilizados mais adiante. Para uma introdução completa aos conceitos de sistemas dinâmicos e caos existem vários livros sobre o assunto, sendo que o conteúdo deste capítulo foi extraído principalmente de duas referências, Murray e Dermott [10] e Ott [11].

1.1 Sistemas Dinâmicos e Espaços de Fase

Define-se um *Sistema Dinâmico* como uma prescrição matemática determinística de um estado que evolui no tempo, conforme Ott [11]. Um exemplo de um sistema dinâmico (o qual alguns autores, como Almeida [12], preferem definir como o próprio sistema dinâmico) consiste de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem no tempo (definido como t), dado da forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

sendo $\mathbf{x} : R_+ \rightarrow R^n$ o vetor das quantidades que definem o sistema e $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ a função que define como o sistema evolui no tempo. No caso em que \mathbf{F} não depende de t o sistema é dito *autônomo*. A equação (1.1) pode ter mais de uma solução. Contudo, dada uma condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, se \mathbf{F} for suave existe apenas uma única solução, a qual determina completamente o sistema.

Dado um sistema dinâmico como em (1.1), cada componente do vetor \mathbf{x} pode ser tomada como uma coordenada em um espaço. Este espaço é chamado de *espaço de fase* do sistema. Cada ponto neste espaço em um dado instante de tempo define completamente o estado do sistema. Conforme o sistema evolui com o tempo $\mathbf{x}(t)$ forma uma linha contínua no espaço de fase. Esta linha é chamada *linha de fase*, e o movimento do sistema nesta linha é chamado *fluxo de fase*. Devido à unicidade das soluções de (1.1) as linhas não se interceptam. Quando muitas soluções correspondentes à diferentes condições iniciais são desenhadas no mesmo espaço de fase emerge uma figura às vezes de forma complicada, e tem-se então o que se chama *retrato de fase*.

1.2 Estabilidade Linear

Embora a seguinte análise possa ser estendida para qualquer sistema, a título de ilustração vamos considerar sistemas autônomos com apenas duas dimensões. Neste contexto a equação (1.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (1.2)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (1.3)$$

sendo f e g funções suaves (em geral não lineares) de x e y . Com base nestas equações, os *pontos fixos* do sistema são os pontos onde o fluxo é estacionário (isto é, $\dot{x} = \dot{y} = 0$). Ou seja, se (x_0, y_0) é um ponto fixo então

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad (1.4)$$

$$g(x_0, y_0) = 0. \quad (1.5)$$

O número de pontos fixos (x_0, y_0) depende da forma de f e g . A partir destes pontos é possível analisar a estabilidade partindo de um pequeno deslocamento $(\delta x, \delta y)$ do ponto fixo. Expandindo f e g a partir de cada um destes pontos tem-se

$$\delta\dot{x} = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y + f_{xy}(x_0, y_0)\delta x\delta y + \dots, \quad (1.6)$$

$$\delta\dot{y} = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y + g_{xy}(x_0, y_0)\delta x\delta y + \dots \quad (1.7)$$

Considerando a expansão apenas até primeira ordem, tem-se uma linearização do sistema. Nesta aproximação a evolução dos deslocamentos $(\delta x, \delta y)$ é dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

A matriz 2×2 da equação (1.8), ou \mathbf{M} , é a chamada *matriz de estabilidade*. Denotando a matriz coluna dos deslocamentos por $\delta\mathbf{X}$, o sistema (1.8) possui como solução

$$\delta\mathbf{X} = c_1 \mathbf{V}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{V}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.9)$$

sendo \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 e λ_1 , λ_2 respectivamente os autovetores e autovalores associados à matriz \mathbf{M} , e sendo os coeficientes c_1 e c_2 arbitrários. A partir desta solução é possível analisar o comportamento do sistema próximo aos pontos fixos. Pela fórmula (1.9) tem-se que a parte imaginária dos λ_i , $i = 1, 2$, corresponde a uma rotação em torno do ponto fixo, e a parte real corresponde ao afastamento ou aproximação da linha de fase deste ponto. Se os autovalores forem puramente imaginários as linhas de fase serão elipses em torno dos pontos fixos. Com partes reais não nulas estas linhas são espirais que se aproximam ou se afastam destes pontos. Quando o sistema apresenta n dimensões a análise pode ser estendida, com n autovalores e n autovetores associados. Os autovalores fornecem a dinâmica local da vizinhança dos pontos fixos. Os pontos fixos podem ser classificados com base nas forma dos autovalores λ_i . Se $\lambda_i < 0$ e $\lambda_j > 0$, em

particular, o ponto é um *ponto hiperbólico*, ou do tipo “sela”, sendo que uma direção cresce e a outra decresce exponencialmente. Se $\lambda_i = i\alpha$ e $\lambda_j = -i\alpha$ tem-se um *ponto elíptico*, ou “centro”, na qual as linhas próximas apenas descrevem uma rotação em torno do ponto fixo.

O fato de ocorrerem autovalores complexos implica que os sistemas não são hiperbólicos. Esta propriedade é fundamental para a ocorrência de *shadowing*, isto é, para que exista uma órbita verdadeira suficientemente perto da órbita numérica calculada, conforme Asonov [13]. O fato do sistema não ser hiperbólico não implica, contudo, que não ocorra *shadowing*. De fato, existem alguns resultados limitados, como os trabalhos de Hammel, Yorke e Grebogi [14] e Coven [15] que mostram a presença desta propriedades para alguns sistemas não hiperbólicos, e suporemos a sua validade para o problema de Hill.

Caso o sistema seja dado como um conjunto de equações de segunda ordem este pode ser facilmente transformado em um sistema de primeira ordem. Seja, como exemplo, um sistema de duas equações de segunda ordem:

$$\ddot{x} = h(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (1.10)$$

$$\ddot{y} = k(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \quad (1.11)$$

Fazendo-se a seguinte transformação:

$$u = \dot{x}, \quad (1.12)$$

$$v = \dot{y}, \quad (1.13)$$

obtém-se o seguinte conjunto de equações de primeira ordem:

$$\dot{x} = u, \quad (1.14)$$

$$\dot{y} = v, \quad (1.15)$$

$$\dot{u} = h(x, y, u, v), \quad (1.16)$$

$$\dot{v} = k(x, y, u, v). \quad (1.17)$$

Deste modo, os pontos fixos são obtidos fazendo-se a parte direita das equações acima igual a zero:

$$u_0 = 0, \quad (1.18)$$

$$v_0 = 0, \quad (1.19)$$

$$h(x_0, y_0, 0, 0) = 0, \quad (1.20)$$

$$k(x_0, y_0, 0, 0) = 0. \quad (1.21)$$

No sistema original isto é equivalente a fazer $\dot{x} = \dot{y} = 0$ e $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. A matriz de estabilidade correspondente é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_x(\mathbf{p}_0) & h_y(\mathbf{p}_0) & h_u(\mathbf{p}_0) & h_v(\mathbf{p}_0) \\ k_x(\mathbf{p}_0) & k_y(\mathbf{p}_0) & k_u(\mathbf{p}_0) & k_v(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

sendo $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, 0, 0)$.

Seja um sistema dado de acordo com a equação (1.1). Este sistema é *estruturalmente estável* se \mathbf{F} possui uma vizinhança de campos tais que, para cada campo pertencente a esta vizinhança, existe um homeomorfismo associando as órbitas deste campo às órbitas do campo \mathbf{F} . Em outras palavras, dada uma perturbação suficientemente pequena de um campo vetorial, existe um homeomorfismo que associa as órbitas do sistema perturbado às do sistema original.

1.3 Sistemas Hamiltonianos

Conceitos Gerais

Nos sistemas hamiltonianos a dinâmica é toda especificada através de uma função $H : \mathbf{R}^{2N} \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$, o hamiltoniano $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$. Neste caso, o estado do sistema é especificado pelo “momentum” \mathbf{p} e pela “posição” \mathbf{q} , os quais possuem a mesma dimensionalidade N , que corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. As equações que definem este sistema são dadas por

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad (1.23)$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (1.24)$$

Da estrutura destas equações resulta que, no caso em que o hamiltoniano não depende explicitamente do tempo, o valor de $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ permanece uma constante (isto é, $dH/dt = 0$) durante a evolução temporal de \mathbf{q} e \mathbf{p} . Identificando o hamiltoniano como a energia E do sistema, tem-se que esta se conserva para sistemas independentes do tempo, ou seja, $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{constante}$.

Os sistemas Hamiltonianos possuem uma característica muito importante que convém ressaltar. Estes sistemas preservam volumes de $2N$ dimensões no espaço de fases. Isto é, se tivermos inicialmente uma superfície fechada S_0 e evoluirmos cada ponto desta superfície de acordo com as equações (1.23), temos que a nova superfície S_t formada é fechada e encobre um volume no espaço de fases, que é igual ao volume encoberto pela superfície S_0 . Esta incompressibilidade do espaço de fases de sistemas Hamiltonianos é provada no *Teorema de Liouville*.

Outra característica importante dos sistemas Hamiltonianos é a sua natureza *simplética*. Isto é, se considerarmos três órbitas que estão deslocadas infinitesimalmente uma da outra, $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$, $(\mathbf{p}(t) + \delta\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}(t))$ e $(\mathbf{p}(t) + \delta\mathbf{p}'(t), \mathbf{q}(t) + \delta\mathbf{q}'(t))$, então a quantidade

$$\delta\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}' - \delta\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{p}'$$

é independente do tempo, ou seja,

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q}' - \delta\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{p}') = 0. \quad (1.25)$$

Isto significa que áreas infinitesimais são preservadas pelo fluxo. Pode-se provar que a condição do hamiltoniano ser simplético implica em conservação de volume, de forma que a condição simplética é a propriedade mais fundamental destes sistemas.

A quantidade $\delta \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{q}' - \delta \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{p}'$ é a forma diferencial do *invariante integral de Poincaré*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, \quad (1.26)$$

onde a integral é tomada ao redor de um caminho γ no espaço de fases.

Sistemas Integráveis

Uma função $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ é uma *integral de movimento* se, conforme $\mathbf{p}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ evoluem no tempo de acordo com as equações (1.23), f permanece constante, isto é, $df/dt = 0$. Por exemplo, se o Hamiltoniano independe do tempo, ele próprio é uma constante de movimento, conforme visto anteriormente. Temos, para a variação de f com relação ao tempo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}. \quad (1.27)$$

Definimos os *parênteses de Poisson* por

$$[q_1, q_2] = \frac{\partial q_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial q_1}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.28)$$

Portanto, se H não depende do tempo, a condição para que f seja uma constante de movimento é

$$[f, H] = 0. \quad (1.29)$$

Em geral, um sistema de n equações de primeira ordem requer $n - 1$ integrais (incluindo as constantes de movimento, não triviais, e as constantes de integração, triviais) para que se possa efetuar a “integração” do sistema (para mais detalhes, ver Tabor [16]). Isto significa que a princípio seriam necessárias $2N - 1$ constantes de movimento para se integrar um sistema hamiltoniano. Contudo, devido à estrutura simplética destas equações, apenas N constantes são necessárias. Desta forma, temos que um Hamiltoniano independente do tempo é dito *integrável* se possui N constantes de movimento *independentes*, isto é, $f_i(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $i = 1, \dots, N$, distintos e tais que $[f_i, H] = 0$ e $[f_i, f_j] = 0$ para $i \neq j$.

Variáveis de Ação-Ângulo

Para um sistema hamiltoniano autônomo completamente integrável pode existir um conjunto de coordenadas tais que as coordenadas conjugadas $\theta_1, \dots, \theta_N$ são cíclicas (correspondendo aos ângulos), de forma que os momenta conjugados I_1, \dots, I_N são constantes (correspondendo às ações). Para fazer a transformação do conjunto de coordenadas original para este novo conjunto é necessário uma *função geradora*. Tratando-se de hamiltonianos que não possuem dependência explícita com o tempo, a função geradora pode ser tomada como a *função característica de Hamilton*, $S(\mathbf{q}, \mathbf{I})$. Essa função depende apenas das coordenadas originais \mathbf{q} e dos novos momenta \mathbf{I} . Os momenta originais q_i e as novas coordenadas θ_i são, desta forma, dadas

por

$$p_i = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial q_i}, \quad (1.30)$$

$$\theta_i = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial I_i}, \quad (1.31)$$

para $i = 1, \dots, N$. Para encontrar a função geradora S associada a esta transformação é necessário resolver a equação de Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q_1, \dots, q_N; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}\right) = K. \quad (1.32)$$

Sendo K o novo hamiltoniano que depende apenas dos momenta I_i , $i = 1, \dots, N$. Dado que a função geradora não depende explicitamente do tempo, este hamiltoniano é igual ao hamiltoniano original H , uma constante de movimento. Resolver esta equação equivale a resolver as equações de movimento do sistema.

Uma vez obtidas as coordenadas de ação-ângulo a integração das equações de movimento é um exercício trivial. Tem-se:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial K}{\partial I_i} = \omega_i, \quad (1.33)$$

$$\dot{I}_i = \frac{\partial K}{\partial \theta_i} = 0, \quad (1.34)$$

de forma que, integrando-se, tem-se:

$$\theta_i = \omega_i t + k_i, \quad I_i, \alpha_i = \text{constante}. \quad (1.35)$$

A forma destas soluções mostra que o espaço de fases é topologicamente equivalente a um toro N -dimensional.

1.4 Teoria de Perturbação Elementar

Apesar de desejáveis, sistemas hamiltonianos completamente integráveis são raros. Apesar disso estes hamiltonianos desempenham um papel importante no entendimento dos sistemas não-integráveis. Muitas vezes é conveniente representar um sistema hamiltoniano na forma da soma de uma parte integrável H_0 com uma perturbação não-integrável H_1 , ou seja

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \epsilon H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (1.36)$$

sendo o parâmetro de integração ϵ tal que $\epsilon \ll 1$. A idéia por trás deste procedimento é encontrar soluções aproximadas para $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ na forma de soluções exatas de H_0 mais correções devidas a H_1 . Assim sendo, expande-se a solução $\mathbf{x}(t)$ na forma de potências de ϵ , ou seja

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \epsilon \mathbf{x}_1(t) + \epsilon^2 \mathbf{x}_2(t) + \dots, \quad (1.37)$$

sendo $\mathbf{x}_0(t)$ a solução exata de H_0 e as correções $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ calculadas recursivamente. O limite $\epsilon \rightarrow 0$ traz a solução exata, e espera-se que alguns poucos termos da expansão bastem para uma representação acurada da solução verdadeira, dado que ϵ seja pequeno o suficiente. Mesmo para pequenos valores de ϵ não há garantia de que esta representação continue acurada para longos intervalos de tempo, o que leva ao problema da convergência.

Teoria da Perturbação Canônica

A teoria da perturbação canônica explora algumas propriedades especiais das variáveis de ângulo-ação. Ela funciona bem em sistemas com um grau de liberdade e para sistemas com mais graus de liberdade ela mostra de maneira sucinta as dificuldades associadas à solução de problemas de muitos corpos, dificuldades estas que representam o comportamento caótico.

Considerando um sistema com N graus de liberdade tem-se para a equação (1.36), em função das variáveis de ângulo-ação do hamiltoniano integrável H_0 :

$$H(\mathbf{I}, \theta) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \theta), \quad (1.38)$$

sendo $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_N)$ e $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ os vetores N -dimensionais de ação e ângulo, respectivamente. As equações de Hamilton são expressas conforme o seguinte:

$$\dot{\mathbf{I}} = - \left(\frac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial \theta_N} \right) = -\nabla_{\Theta} H_0(\mathbf{I}) = 0, \quad (1.39)$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial I_1}, \dots, \frac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial I_N} \right) = \nabla_I H_0(\mathbf{I}) = \omega_0(\mathbf{I}), \quad (1.40)$$

sendo que $\omega_0(\mathbf{I}) = (\omega_{01}(\mathbf{I}), \dots, \omega_{0N}(\mathbf{I}))$ é o vetor N -dimensional da frequência.

O objetivo consiste em construir perturbativamente um novo conjunto de variáveis (\mathbf{J}, ϕ) que transformam o sistema perturbado na sua forma integrável $H(\mathbf{J}, \phi) = K(\mathbf{J})$, através de uma função geradora $S = S(\theta, \mathbf{J})$ que satisfaz às relações

$$\mathbf{I} = \nabla_{\theta} S(\mathbf{J}, \theta), \quad (1.41)$$

$$\phi = \nabla_{\mathbf{J}} S(\mathbf{J}, \theta). \quad (1.42)$$

A função geradora S é expandida na forma de potências de ϵ da seguinte forma

$$S = \theta \cdot \mathbf{J} + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2 + \dots \quad (1.43)$$

Sendo que o primeiro termo corresponde à transformação identidade usual.

Para estas novas variáveis tem-se, substituindo-se $\mathbf{I} = \nabla_{\theta} S$:

$$H_0(\nabla_{\theta} S) + \epsilon H_1(\nabla_{\theta} S, \theta) = K_0(\mathbf{J}) + \epsilon K_1(\mathbf{J}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.44)$$

sendo que a parte à direita da equação corresponde à expansão em potências de ϵ de $K(\mathbf{J})$ até primeira ordem. Comparando as expressões termo a termo, tem-se

$$\mathcal{O}(\epsilon^0) : \quad H_0(\mathbf{J}) = K_0(\mathbf{J}), \quad (1.45)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^1) : \quad \nabla_{\theta} S_1 \cdot \nabla_{\mathbf{I}} H_0(\mathbf{J}) + H_1(\mathbf{J}, \theta) = K_1(\mathbf{J}). \quad (1.46)$$

Usando as equações (1.40) e (1.46) obtém-se

$$\omega_0(\mathbf{J}) \cdot \nabla_{\theta} S_1(\mathbf{J}, \theta) = K_1(\mathbf{J}) - H_1(\mathbf{J}, \theta). \quad (1.47)$$

A correção de primeira ordem é determinada assumindo que S_1 é uma função periódica de θ e tomando a média em todas as variáveis de ângulo, ou seja

$$K_1(\mathbf{I}) = \bar{H}_1(\mathbf{J}, \theta), \quad (1.48)$$

onde \bar{H}_1 é dado por

$$\bar{H}_1(\mathbf{J}, \theta) = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_N H_1(\mathbf{J}, \theta). \quad (1.49)$$

O problema surge ao se tentar resolver a equação (1.47) para S_1 . Expandindo S_1 e a parte periódica de H_1 , ou seja, $\tilde{H}_1 = H_1 - \bar{H}_1$, em séries de Fourier N -dimensionais:

$$S_1(\mathbf{J}, \theta) = \sum_{\mathbf{m}} S_{1\mathbf{m}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{m} \cdot \theta}, \quad (1.50)$$

$$\tilde{H}_1(\mathbf{J}, \theta) = \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \tilde{H}_{1\mathbf{m}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{m} \cdot \theta}, \quad (1.51)$$

sendo $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)$. Utilizando-se a equação (1.47), S_1 é dado por

$$S_1(\mathbf{J}, \theta) = i \sum_{\mathbf{m}} \frac{\tilde{H}_{1\mathbf{m}}(\mathbf{J})}{\mathbf{m} \cdot \omega_0(\mathbf{J})} e^{i\mathbf{m} \cdot \theta}. \quad (1.52)$$

Uma análise deste resultado mostra que, se as frequências fundamentais ω_0 forem comensuráveis ($\omega_0(\mathbf{J}) \cdot \mathbf{m} \approx 0$) a soma será divergente. De fato, mesmo que $\omega_0(\mathbf{J})$ seja incomensurável existe algum \mathbf{m} tal que $\omega_0 \cdot \mathbf{m}$ seja arbitrariamente pequeno. Este é o problema dos pequenos denominadores que deteve avanços na mecânica clássica por duzentos anos. A resolução deste problema foi obtida com o teorema de Kolmogorov, Arnold e Moser, o conhecido teorema KAM.

1.5 Caos e o Teorema KAM

Em 1954 Kolmogorov [17] formulou um teorema que mais tarde foi provado por Arnold [18] e Moser [19], o qual forneceu uma solução ao problema dos pequenos denominadores. Seguindo a notação de Arnold, assume-se que uma função integrável H_0 é perturbada por uma função H_1 tal que

$$H(\mathbf{I}, \theta) = H_0(\mathbf{I}) + H_1(\mathbf{I}, \theta), \quad (1.53)$$

sendo que H_1 é periódico nas coordenadas de ângulo originais e, em determinado sentido, é “pequeno o suficiente”. As equações são dadas por

$$\dot{I}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \theta_i}, \quad (1.54)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(\mathbf{I}) + \frac{\partial H_1}{\partial I_i}, \quad (1.55)$$

sendo ω_i as frequências não-perturbadas, isto é, $\omega_i = \partial H_0 / \partial I_i$

Conforme Komolgorov, para a maioria das condições iniciais o movimento permanece predominantemente quasi-periódico, isto é, confinado aos tori, e o complemento deste conjunto de movimentos quasi-periódicos, que constitui o conjunto de movimentos caóticos possui uma pequena medida de Lebesgue conforme H_1 permanece pequeno. O teorema KAM é formulado assumindo-se que o Hamiltoniano é analítico em um domínio complexo do espaço de fases e que o movimento não perturbado é não degenerado, isto é,

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_i} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0. \quad (1.56)$$

É possível indicar, no sistema não perturbado, um torus T_0 em particular ao qual é associado um conjunto de freqüências $\omega = \omega(\mathbf{I})$. Seleciona-se, então, especificamente um vetor de freqüência incomensurável $\omega = \omega^*$. As equações para o *torus* invariante $T_0(\omega^*)$ do sistema não perturbado são estabelecidas como $\mathbf{I} = \mathbf{I}^*$, onde $\omega(\mathbf{I}^*) = \omega^*$. Ou seja, o sistema possui freqüências ω^* em $T_0(\omega)$ e $\dot{\theta} = \omega^*$ é o fluxo linear no torus T_0 . De acordo com essas notações uma das versões do teorema de KAM é a seguinte:

Teorema 1.5.1. (Arnold e Avez, 1968) *Se H_1 é “pequeno o bastante” então para quase todo ω^* existe um torus invariante $T(\omega^*)$ do sistema perturbado tal que $T(\omega^*)$ é “próximo” de $T_0(\omega^*)$. Mais, os tori $T(\omega^*)$ formam um conjunto de medida positiva que tende a zero conforme $|H_1| \rightarrow 0$.*

A prova deste teorema está além do escopo deste texto. A filosofia deste teorema é diferente da teoria da perturbação tradicional. Ao invés de tentar construir soluções globais para a equação de Hamilton-Jacobi tendo como base a solução não perturbada, o teorema KAM prova a existência de *tori* individuais no sistema (fracamente) perturbado que satisfazem certas condições. Isto é, prova-se que um dado *torus* $T(\omega^*)$ existe se ω^* é suficientemente irracional.

O teorema KAM também requer que a perturbação seja “suficientemente pequena”. No entanto, não existe uma estimativa precisa de quão “pequena” deve ser esta perturbação. Contudo, o teorema prevê a existência dos *tori* sob uma (pequena) perturbação. A analiticidade do hamiltoniano H_0 também não é estritamente necessária.

Por fim, o teorema KAM não diz nada a respeito do destino dos “*tori* racionais”, que são “destruídos” pela perturbação. São estes *tori* que fornecem as sementes do comportamento caótico observado em sistemas não-integráveis, conforme será visto no problema de Hill mais adiante.

Nas seções seguintes serão apresentadas as técnicas utilizadas para analisar e comparar a estabilidade dos sistemas de Hill newtoniano, com potenciais pseudo-newtonianos e relativístico. Elas não só permitem analisar a estrutura do espaço de fases (no caso das Seções de Poincaré) como permitem quantificar a sensibilidade às condições iniciais (no caso dos expoentes de Lyapunov e da dimensão fractal). Estas ferramentas serão largamente utilizadas no restante deste trabalho.

1.6 Seções de Poincaré

As seções de Poincaré constituem uma forma de reduzir o estudo de um fluxo em um espaço de fases \mathbf{R}^n a uma aplicação (difeomorfismo) em um espaço de fases \mathbf{R}^{n-1} .

As seções de Poincaré são obtidas considerando-se a interseção do fluxo com uma hipersuperfície (em geral um hiperplano) transversal às órbitas, considerando-se apenas as interseções com a mesma orientação. Um exemplo é dado na Figura 1.1. Neste exemplo, se a órbita $\mathbf{x}(t)$ dada perfura o plano Σ de baixo para cima o ponto de interseção é registrado. O conjunto dos pontos de interseção de todas as órbitas do fluxo com o plano Σ na orientação dada forma uma seção de Poincaré.

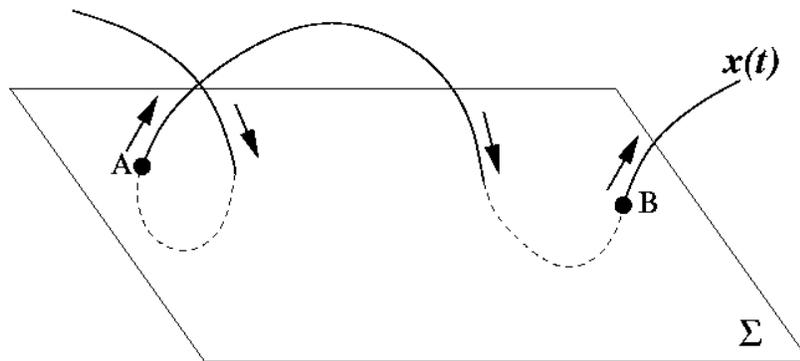


Figura 1.1: Registro da seção de Poincaré. A órbita perfura o plano Σ em questão, e, se o sentido da órbita é de baixo para cima, o ponto é registrado. No caso são registrados os pontos A e B . O conjunto dos pontos do fluxo registrados forma a seção de Poincaré.

No plano Σ define-se a aplicação de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ dada por

$$P(\mathbf{x}_k) = P(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}(t_0 + \tau_k), \quad (1.57)$$

sendo τ_k o tempo mínimo necessário para que a órbita $\mathbf{x}(t)$ perfure o plano Σ na orientação de $x(t_0)$. Uma órbita periódica correspondente a um ponto fixo \mathbf{x}_f da aplicação P é dada por

$$P(\mathbf{x}_f) = \mathbf{x}_f. \quad (1.58)$$

Em particular, pontos fixos do sistema que estejam no plano Σ correspondem a pontos fixos da aplicação de Poincaré. É possível linearizar esta aplicação na vizinhança dos pontos fixos e observar os seus autovalores, conforme foi realizado com o conjunto de equações que define o sistema dinâmico. Deve-se tomar cuidado, no entanto, com o fato da aplicação de Poincaré ser discreta, em contraste com o sistema de equações, que depende do parâmetro contínuo t . Contudo, segundo Almeida [12], na vizinhança dos pontos fixos as estruturas são equivalentes, e existem generalizações dos teoremas de Hartman-Grobman e da variedade estável.

A vantagem da utilização das seções de Poincaré é a visualização dos tori de KAM e a sua destruição, no caso da passagem de um sistema integrável para um sistema caótico por meio de uma perturbação.

1.7 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov fornecem um meio de medir algumas propriedades características das órbitas, tais como o estiramento ou encolhimento de conjuntos invariantes dentro do espaço de fases. Define-se expoente de Lyapunov para a condição inicial \mathbf{x}_0 e orientação inicial de um deslocamento inicial dado por $\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0/|\mathbf{y}_0|$, como

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \mathbf{y}_0 \rightarrow \mathbf{0}}} \log \left(\frac{|\mathbf{y}(t)|}{|\mathbf{y}_0|t} \right), \quad (1.59)$$

sendo $\mathbf{y}(t)$ a evolução temporal do deslocamento infinitesimal de acordo com as equações do sistema dinâmico.

Se a dimensão do espaço de fases é N , existirão no máximo N expoentes distintos para um dado conjunto de condições iniciais \mathbf{x}_0 , sendo que o valor obtido para o expoente depende da direção do deslocamento inicial \mathbf{u}_0 . Pode-se mostrar que direções que fornecem diferentes expoentes de Lyapunov devem ser perpendiculares entre si [16]. Os expoentes de Lyapunov podem ser ordenados conforme o seu valor da seguinte forma:

$$\lambda_1(\mathbf{x}_0) \geq \lambda_2(\mathbf{x}_0) \geq \dots \geq \lambda_N(\mathbf{x}_0), \quad (1.60)$$

sendo $\lambda_1(\mathbf{x}_0)$ correspondente à direção de maior crescimento (ou menor encolhimento) e $\lambda_N(\mathbf{x}_0)$ à direção de maior encolhimento (ou menor crescimento) do deslocamento das órbitas.

Para sistemas hamiltonianos, conforme já foi afirmado, vale o teorema de Liouville. Isto significa que, dado um conjunto de condições iniciais, o hipervolume deste conjunto no espaço de fases é preservado conforme as órbitas evoluem. Seja, por exemplo, uma hiperesfera de valores iniciais no espaço de fases. O hipervolume desta hiperesfera é dada por:

$$V_0 = \alpha_N R_0^N, \quad (1.61)$$

sendo α_N um fator geométrico dependente da dimensão do espaço de fases e R_0 o raio da hiperesfera. Evoluindo temporalmente os pontos deste conjunto de acordo com um sistema hamiltoniano, a hiperesfera transforma-se em um elipsóide, uma vez que alguns dos eixos aumentam e outros diminuem (veja a Figura 1.2). O hipervolume é dado, desta maneira, por:

$$V_t = \alpha_N \prod_{i=1}^N R_0 e^{\lambda_i t}. \quad (1.62)$$

No entanto, de acordo com o teorema de Liouville, tem-se que os dois volumes são iguais. Isto implica na seguinte igualdade:

$$\prod_{i=1}^N e^{\lambda_i t} = 1. \quad (1.63)$$

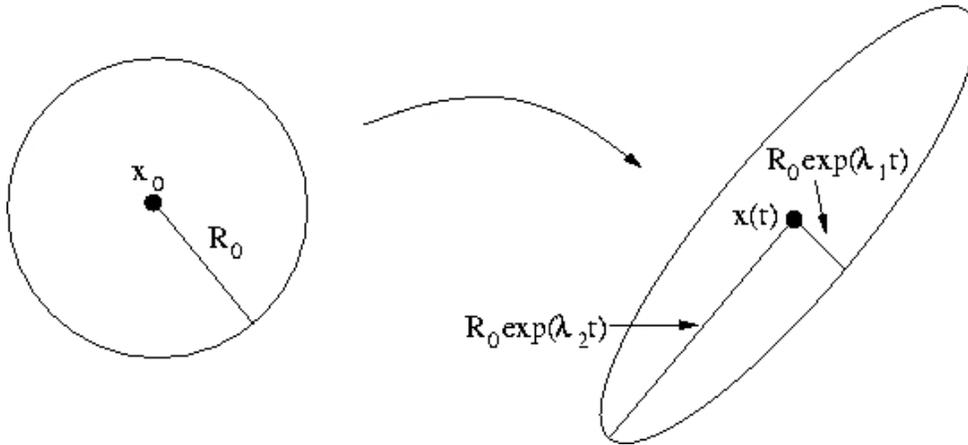


Figura 1.2: Evolução temporal de um volume de condições iniciais em um sistema hamiltoniano com expoentes λ_1 e λ_2 .

Calculando o logaritmo dos dois lados da equação obtém-se e sabendo que a relação é válida para qualquer instante t deve-se ter

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0. \quad (1.64)$$

Esta é uma propriedade válida para sistemas hamiltonianos, mas que não vale em geral. Em particular, não vale para sistemas dissipativos em que existem atratores. Isto significa que, para um sistema hamiltoniano, caso existam expoentes positivos devem existir também expoentes negativos. A presença de expoentes positivos está ligada à sensibilidade às condições iniciais, e, portanto, uma região do espaço de fases é dita caótica caso existam expoentes positivos, mesmo que neste caso devam existir também expoentes negativos. Quanto maior o expoente de Lyapunov, maior a sensibilidade às condições iniciais, e, portanto, maior a instabilidade do sistema. Contudo, os expoentes de Lyapunov não são uma medida absoluta, dependendo das dimensões escolhidas para a unidade de tempo (uma análise dimensional fornece $[\lambda] = [T]^{-1}$). Portanto, ao se comparar dois sistemas diferentes deve-se tomar o cuidado de escolher as mesmas unidades de tempo.

O método utilizado para calcular os expoentes de Lyapunov foi introduzido primeiramente por Benettin *et al.* [20]. No entanto, o algoritmo utilizado foi adaptado do artigo de Wolf *et al.* [21]. O método é bastante simples e consiste em integrar uma “órbita de referência” com o sistema completo de equações, conforme o sistema de equações (1.1), e N “órbitas de deslocamento”, sendo N o número de equações do sistema. As órbitas de deslocamento são dadas por

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x}, \quad (1.65)$$

sendo $\mathbf{J}_F(\mathbf{x})$ a matriz linearizada do sistema, ou jacobiana, dada por

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial F_N}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (1.66)$$

Esta matriz depende da órbita de referência $\mathbf{x}(t)$, devendo ser calculada a cada instante t . Deve-se escolher as condições iniciais de forma que os vetores $\delta\mathbf{x}_0$ gerem o espaço \mathbf{R}^N . Neste trabalho utilizou-se um conjunto de N vetores ortogonais entre si. Conforme as órbitas evoluem no tempo os deslocamentos mais alinhados com a direção dos expoentes de Lyapunov positivos tendem a crescer mais em relação aos deslocamentos nas direções correspondentes aos expoentes negativos ou nulos, que não crescem ou diminuem. Eventualmente deve-se ortonormalizar este grupo de vetores, pois alguns vetores crescem demais, e existe uma tendência a sempre se alinhar com as direções de maior crescimento caso exista uma componente nesta direção. O resultado é que este grupo de órbitas de deslocamento em geral se alinham com as direções referentes aos expoentes de Lyapunov. Este alinhamento faz com que os expoentes da taxa de crescimento/encolhimento destes vetores tendam aos respectivos expoentes de Lyapunov.

1.8 Fractais e Escape Fractal

Fractais são conjuntos em que sucessivas magnificações em determinadas regiões não permitem chegar a estruturas simples, tais como um plano, uma reta ou um ponto. Deste modo, nestas regiões, dado um ponto no conjunto, podem existir pontos arbitrariamente próximos que não estejam no mesmo conjunto. Os pontos da fronteira se encontram distribuídos de uma forma não trivial que tende a repetir a si mesma. Esta propriedade, chamada *auto-similaridade*, possui uma estreita relação com a sensibilidade às condições iniciais que define um sistema caótico.

O escape fractal é uma técnica que permite estudar a instabilidade de órbitas em sistemas não limitados. Esta técnica se aplica quando o sistema possui duas ou mais rotas de escape definidas, ou seja, regiões distintas do espaço tais que as coordenadas das órbitas que passam por essa região crescem indefinidamente. A idéia geral é a seguinte. Escolhe-se um conjunto inicial de condições iniciais; para cada ponto deste conjunto, integra-se a órbita e verifica-se por qual rota de escape a órbita segue; divide-se o conjunto de condições iniciais em subconjuntos (bacias) correspondentes às diferentes rotas de escape seguidas. Caso o sistema seja caótico, os conjuntos obtidos possuem fronteiras fractais com os outros conjuntos. Estas fronteiras demonstram, então, a sensibilidade às condições iniciais do sistema.

Para comparar os sistemas entre si é necessário um método quantitativo, o qual é fornecido por meio da *dimensão fractal*. A dimensão fractal é uma quantidade estatística que fornece uma indicação do quão completamente um fractal parece preencher o espaço, conforme escalas cada vez mais mais finas são atingidas. Existem muitas definições específicas de dimensões fractais, sendo que nenhuma deve ser tratada como definição universal. Do ponto de vista teórico as definições mais importantes são as dimensões de Hausdorff, de empacotamento, e, de um modo

mais geral, as dimensões de Rényi [11, 22]. Por outro lado, as dimensões de *box-counting* e a de correlação são mais utilizadas na prática, devido à facilidade de sua implementação. A dimensão de *box-counting* baseia-se no seguinte. Dado o conjunto no qual o fractal está imerso, ele é dividido em pequenas “caixas” de lado ϵ , e são contadas as caixas em que existe pelo menos um ponto pertencente ao fractal. A dimensão fractal de *box-counting* d é então dada pela seguinte relação [11]:

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}, \quad (1.67)$$

sendo $N(\epsilon)$ o número de caixas de lado ϵ que contêm pelo menos um ponto pertencente ao fractal. é fácil demonstrar que, no caso de conjuntos não fractais (pontos, linhas, superfícies, etc.) a dimensão de *box-counting* se reduz às dimensões clássicas (respectivamente 0, 1, 2, etc.). Em particular, vamos utilizar a dimensão de *box-counting* adaptada para fractais “gordos”. Neste método utiliza-se o fato de que, em um círculo de raio ϵ suficientemente pequeno ao redor de um ponto p_0 de um dos conjuntos, a probabilidade P_ϵ de outro ponto neste círculo não pertencer ao mesmo conjunto é dada por

$$P_\epsilon \propto \epsilon^{D-d}, \quad (1.68)$$

sendo D a dimensão do conjunto onde o fractal está inserido (no caso de um plano 2D, por exemplo, tem-se $D = 2$) e d a dimensão fractal. O método consiste em fazer uma contagem $N(\epsilon)$ dos pontos que não permanecem no mesmo conjunto depois de deslocados de uma pequena distância ϵ . Repetindo-se este procedimento para vários valores de ϵ , dado que $N(\epsilon)$ é proporcional a P_ϵ , tem-se a seguinte relação:

$$\log N(\epsilon) = (D - d)\epsilon + \alpha, \quad (1.69)$$

sendo α uma constante. Esta relação é uma reta cujo coeficiente angular fornece o valor de $D - d$. A partir desta relação, conhecido D , determina-se o valor de d .

O Problema de Hill

2.1 O Problema de Hill Newtoniano

Antes de discutir o problema de Hill é necessário introduzir o problema de três corpos restrito. Este problema é composto de dois corpos, com massas m_1 e m_2 , em órbitas keplerianas em torno do seu centro de massa, e um terceiro corpo, de massa desprezível, que não influencia o movimento dos dois primeiros mas se move em função da atração gravitacional destes. Uma simplificação deste problema constitui em considerar que as órbitas dos corpos massivos são circulares e que o movimento do terceiro corpo é restrito ao plano destas órbitas. O problema de Hill é um caso especial do problema restrito de três corpos planar e circular.

Seja um problema de três corpos planar e circular conforme ilustrado na Figura 2.1. A origem do sistema de coordenadas inercial que representa a posição dos corpos pode ser tomado na posição do centro de massa do sistema. As órbitas dos corpos massivos $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ fazem

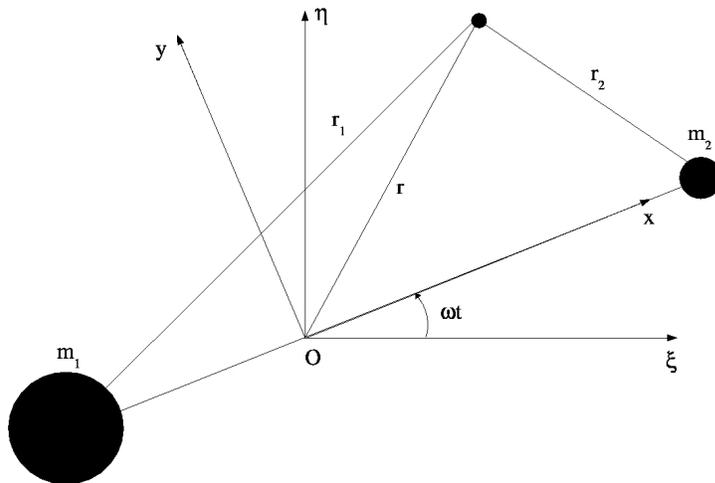


Figura 2.1: Problema de três corpos restrito planar e circular, em um sistema de coordenadas (ξ, η) inercial e em um sistema de coordenadas (x, y) rotacionando com uma frequência angular ω tal que as posições dos corpos massivos são fixas.

círculos em torno deste ponto com frequência angular ω , conforme o seguinte:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(\omega t) \\ x_1 \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \xi_2(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cos(\omega t) \\ x_2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

sendo x_1 e x_2 dados por

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R, \quad (2.3)$$

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} R, \quad (2.4)$$

onde R é a distância (fixa) entre os dois corpos massivos. A relação entre R e ω (terceira lei de Kepler) é dada de acordo com a gravitação newtoniana:

$$R = \left(\frac{G(m_1 + m_2)}{\omega^2} \right)^{1/3}. \quad (2.5)$$

A equação de movimento do corpo não massivo na forma vetorial é dada por

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \frac{Gm_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2). \quad (2.6)$$

No sistema de coordenadas inerciais esta equação se torna um sistema acoplado:

$$\ddot{\xi} = -\frac{Gm_1}{r_1^3}(\xi - \xi_1) - \frac{Gm_2}{r_2^3}(\xi - \xi_2), \quad (2.7)$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{Gm_1}{r_1^3}(\eta - \eta_1) - \frac{Gm_2}{r_2^3}(\eta - \eta_2), \quad (2.8)$$

sendo r_1 e r_2 dados por

$$r_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}, \quad (2.9)$$

$$r_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}. \quad (2.10)$$

Pode-se trocar o sistema de coordenadas inercial por um sistema de coordenadas rotacionando com frequência angular ω , conforme a Figura 2.1. A relação do novo sistema de coordenadas com o antigo é dado por

$$x = \xi \cos(\omega t) + \eta \sin(\omega t), \quad (2.11)$$

$$y = -\xi \sin(\omega t) + \eta \cos(\omega t). \quad (2.12)$$

Neste sistema de coordenadas a posição dos corpos massivos é fixa:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

As equações de movimento do corpo não massivo são dadas por

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = -\frac{Gm_1}{r_1^3}(x - x_1) - \frac{Gm_2}{r_2^3}(x - x_2), \quad (2.15)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y = -\frac{Gm_1}{r_1^3}y - \frac{Gm_2}{r_2^3}y, \quad (2.16)$$

sendo r_1 e r_2 dados por

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}, \quad (2.17)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}. \quad (2.18)$$

Efetuada uma translação da origem do sistema de coordenadas, do centro de massa para o corpo de massa m_2 ($x \rightarrow x + x_2$), as equações assumem a seguinte forma:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2(x + x_2) - \frac{Gm_1}{r_1^3}(x - R) - \frac{Gm_2}{r_2^3}x, \quad (2.19)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2y - \frac{Gm_1}{r_1^3}y - \frac{Gm_2}{r_2^3}y, \quad (2.20)$$

sendo r_1 e r_2 dados por

$$r_1 = \sqrt{(x - R)^2 + y^2}, \quad (2.21)$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.22)$$

Considerando-se o corpo m_1 muito massivo ($m_1 \gg m_2$) e muito afastado dos outros dois corpos ($R \gg r_1$) tem-se, em primeira ordem,

$$r_1 \approx R \approx \left(\frac{Gm_1}{\omega^2}\right)^{1/3}, \quad (2.23)$$

$$-\frac{Gm_1}{r_1^3}(x - R) \approx -\frac{Gm_1}{R^2} \left(-1 - 2\frac{x}{R}\right), \quad (2.24)$$

$$-\frac{Gm_1}{r_1^3}y \approx -\frac{Gm_1}{R^3}y. \quad (2.25)$$

As equações (2.15) e (2.16) tomam a seguinte forma:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \left(3\omega^2 - \frac{Gm_2}{r_2^3}\right)x, \quad (2.26)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} - \frac{Gm_2}{r_2^3}y. \quad (2.27)$$

Estas são as *equações de Hill*. Escolhendo as unidades de tempo e de massa tais que $\omega = 1$ e $G(m_1 + m_2) = 1$, e fazendo a transformação de escala $(x, y) \rightarrow (Gm_2)^{1/3}(x, y)$, obtém-se o sistema de equações independente das massas:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \left(3 - \frac{1}{r^3}\right)x, \quad (2.28)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{1}{r^3}y, \quad (2.29)$$

com r dado por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.30)$$

A constante de Jacobi deste sistema é dada por

$$C_J = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{r}. \quad (2.31)$$

Os momenta conjugados deste sistema são $p_x = \dot{x} + y$ e $p_y = \dot{y} - x$. O hamiltoniano correspondente é dado por

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x + \frac{1}{2}(y^2 - 2x^2) - \frac{1}{r}. \quad (2.32)$$

Substituindo os momenta conjugados na equação (2.32) recupera-se a constante de Jacobi dada em (2.31).

A expansão até segunda ordem do potencial do corpo m_1 corresponde à aproximação deste potencial ao de um oscilador harmônico, sendo válida caso o corpo m_1 esteja muito distante. Neste caso este potencial é uma perturbação do sistema composto pelos demais corpos. Isto ocorre no sistema Sol-Terra-Lua, para o qual esta aproximação foi derivada pela primeira vez por Hill [1]. A Lua possui massa desprezível em relação ao Sol (m_1) e à Terra (m_2), de forma que o subsistema Terra-Lua é bem descrito como um sistema kepleriano. Ao mesmo tempo o Sol, estando muito distante e sendo ao mesmo tempo muito massivo em comparação com a Terra, exerce apenas uma perturbação sobre a órbita da Lua em torno da Terra.

Esta perturbação de segunda ordem exercida pela massa m_1 é suficiente para que o problema deixe de ser integrável, conforme demonstrado por Meletlidou e Ichtiaroglou [4]. A única constante de movimento é a constante de Jacobi, correspondente ao hamiltoniano do sistema. O sistema possui comportamento caótico em determinadas regiões do espaço de fases, conforme mostrado por Simó e Stuchi [5]. Antes de investigar estas propriedades em detalhe, o procedimento que levou às equações de Hill será generalizado para englobar outros potenciais radiais que possuam comportamento assintoticamente newtoniano.

2.2 Estabilidade do Problema de Hill

Dinâmica Próximo aos Pontos Fixos

O problema de Hill newtoniano possui dois pontos fixos bem conhecidos, os pontos lagrangianos L_1 e L_2^* . Estes pontos são obtidos de acordo com a definição dada na Seção 1.2. As equações de Hill formam um conjunto de duas equações de segunda ordem, e, desta forma,

*Os pontos lagrangianos foram introduzidos por J. L. Lagrange em 1772, e denotam, no sistema de três corpos restrito, os pontos em que a órbita do corpo de massa desprezível possui órbita estacionária. De fato existem cinco pontos lagrangianos, mas no problema de Hill os demais pontos se encontram muito distantes. Considera-se, desta maneira, apenas os pontos L_1 e L_2 .

os pontos fixos são encontrados fazendo-se $\dot{x} = \dot{y} = 0$ e $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ nas equações (2.28) e (2.29). Obtém-se:

$$3x_0 - \frac{x_0}{r_0^3} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{y_0}{r_0^3} = 0, \quad (2.34)$$

sendo x_0 e y_0 as componentes dos pontos fixos e $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. As soluções deste sistema de equações são:

$$x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad (2.35)$$

$$y_0 = 0. \quad (2.36)$$

Note que x_0 e y_0 não podem ser ambos nulos, pois neste caso os termos em $1/r$ divergem. A matriz de estabilidade \mathbf{M} para os pontos lagrangianos L_1 e L_2 é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

O polinômio característico associado é dado por

$$(\lambda^2 + 3)(\lambda^2 - 9) = 0. \quad (2.38)$$

Portanto, os autovalores desta matriz são

$$\lambda = \pm i\sqrt{3} \quad \text{e} \quad (2.39)$$

$$\lambda = \pm 3. \quad (2.40)$$

Como existem dois autovalores reais, um positivo e um negativo, os pontos fixos correspondem a um ponto de sela na direção dos respectivos autovetores. Existem também dois autovalores imaginários, um positivo e outro negativo, de forma que nas outras duas direções o ponto é elíptico (de centro). Deste modo classifica-se os pontos lagrangianos L_1 e L_2 do problema de Hill newtoniano como pontos fixos do tipo *sela-centro*.

Seções de Poincaré

Apesar do problema de Hill newtoniano ser caótico existem regiões regulares (estáveis) no seu espaço de fases, isto é, regiões onde os tori de KAM são preservados. Existem também regiões onde estes tori foram completamente destruídos e regiões de transição, conforme pode ser visto na Figura 2.2. A região regular está à esquerda ($x < 0$). À direita ($x > 0$) boa parte dos tori foram destruídos, com preservação dos tori mais internos, os quais são, no entanto, deformados pela perturbação. Na região de transição um determinado tori é deformado, formando ilhas de instabilidade.

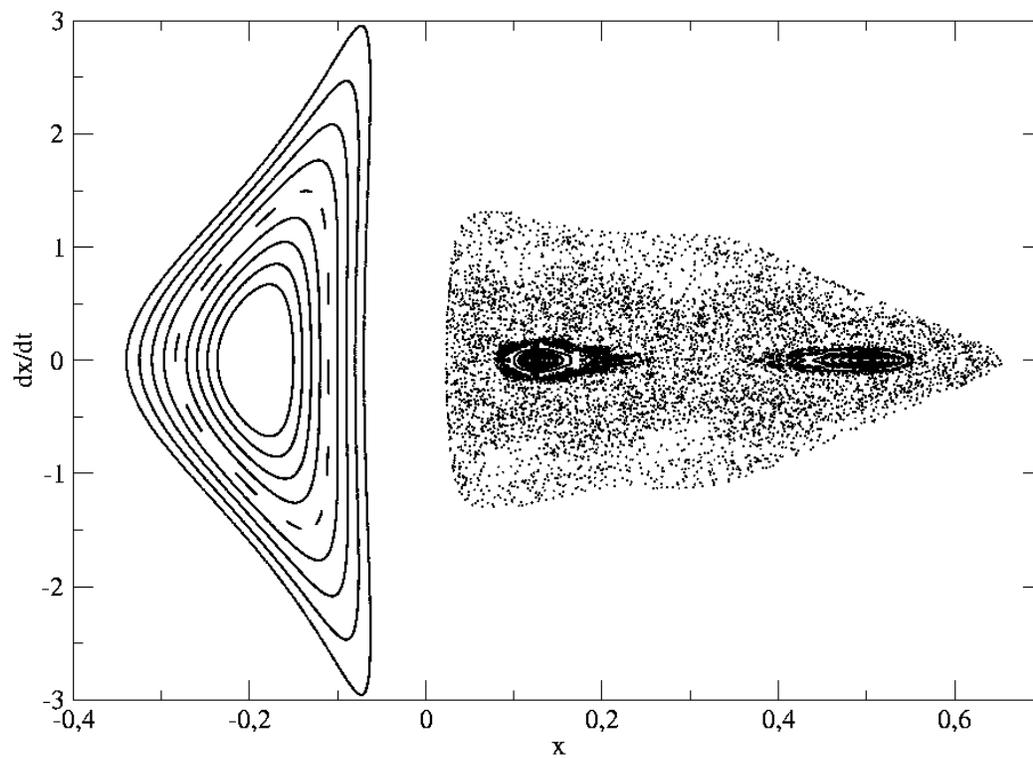


Figura 2.2: Seções de Poincaré para o Problema de Hill newtoniano. À esquerda ($x < 0$), uma região regular (estável), com preservação dos tori. À direita ($x > 0$), região instável, e, mais internamente, a região de transição.

Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são obtidos conforme o método mostrado na Seção 1.7. A Figura 2.2 demonstra como o coeficiente de separação das órbitas evolui com o tempo de integração do sistema. Pode-se notar que este coeficiente de separação converge para um determinado valor para $t \rightarrow \infty$. Este valor fornece o valor do expoente de Lyapunov. Obteve-se para o maior

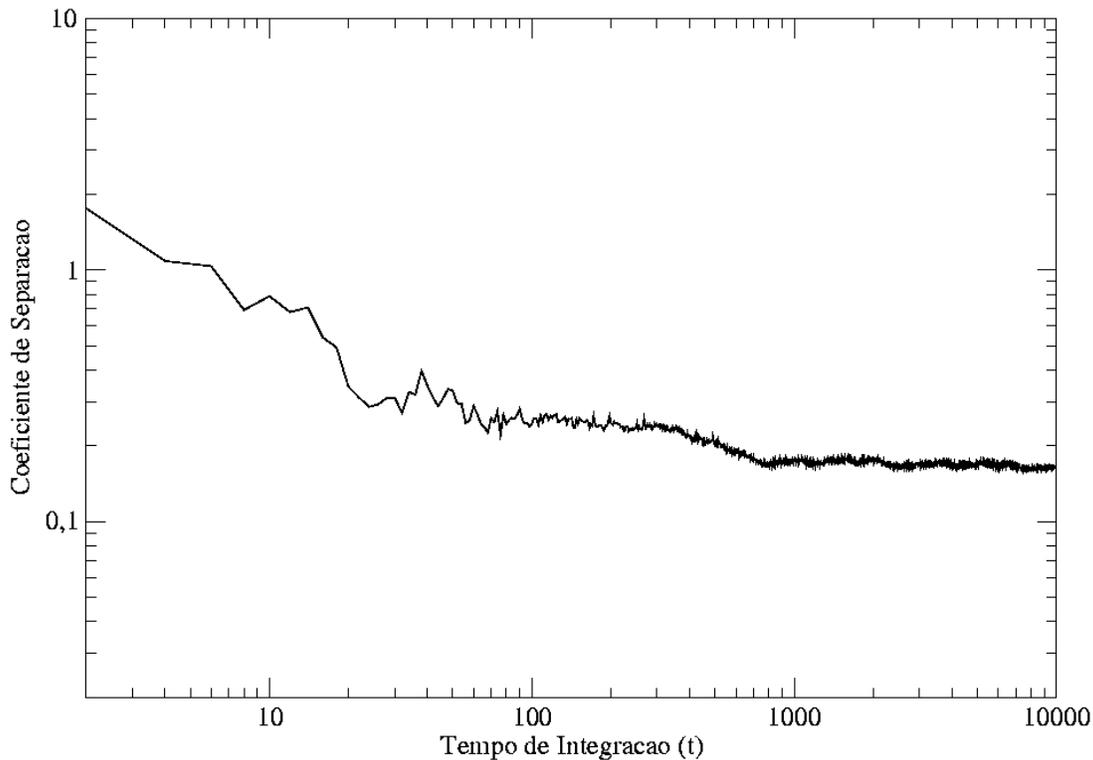


Figura 2.3: Evolução temporal do logaritmo do coeficiente de crescimento do vetor deslocamento. O limite para $t \rightarrow \infty$ é o expoente de Lyapunov.

expoente de Lyapunov do problema de Hill newtoniano $\lambda = 0,141$.

Dimensão Fractal

O problema de Hill admite duas trajetórias de escape, $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Estas duas rotas estão mostradas na Figura 2.4. Desta forma, dado um conjunto de condições iniciais, a sua evolução temporal fornece pelo menos dois tipos distintos de órbitas, uma que escapa pela rota $x \rightarrow \infty$ e outra que escapa pela rota $x \rightarrow -\infty$. O comportamento da órbita serve para classificar o seu respectivo ponto no conjunto de condições iniciais. Escolheu-se neste trabalho um conjunto tal que a componente x varia de $-0,2$ a $0,2$, $y = 1 \cdot 10^{-7}$ e o ângulo da velocidade inicial, θ , varia de 0 a 2π , sendo o módulo dado pela constante de Jacobi, neste

caso $C_J = -2,16$. Logo, o conjunto de condições iniciais possui duas dimensões. Evoluindo as trajetórias resultantes destas condições iniciais e classificando os pontos de acordo com sua trajetória obtém-se o resultado mostrado na Figura 2.5a. Nesta figura, as regiões em cor preta e cinza são relativas às órbitas que escapam pela rota com $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$, respectivamente. A região branca corresponde ao conjunto de condições iniciais que não escaparam por nenhuma rota no tempo de integração. Estas órbitas podem escapar por uma das rotas para um tempo maior ou então permanecer na região central, em órbitas quasi-ligadas. Vamos considerar apenas as regiões preta e cinza. Na Figura 2.5b é mostrada uma ampliação da área correspondente ao quadrado branco na Figura 2.5a. Pode-se ver, nesta ampliação, que o conjunto cinza se mistura com o conjunto preto de forma não trivial, apresentando auto-similaridade, ou seja, conforme esta região é ampliada, obtém-se o mesmo padrão de mistura entre os dois conjuntos, o qual não se reduz a um plano, uma reta ou um ponto. Portanto, conclui-se que a região de fronteira entre os dois conjuntos é um fractal. Esta propriedade está diretamente ligado à caoticidade do sistema. Em particular, este é um fractal “gordo”, uma vez que, dada uma região nesta fronteira, o subconjunto dos pontos desta região que estão em um ou outro conjunto possui medida não zero. A Figura 2.2 mostra o gráfico da dependência do número de pontos que mudam de bacia em razão do deslocamento ϵ . Utilizando o coeficiente angular da reta ajustada, o valor da dimensão fractal d obtido de acordo com o método descrito na Seção 1.8 para o caso newtoniano é dado por $d = 1,452 \pm 0,003$.

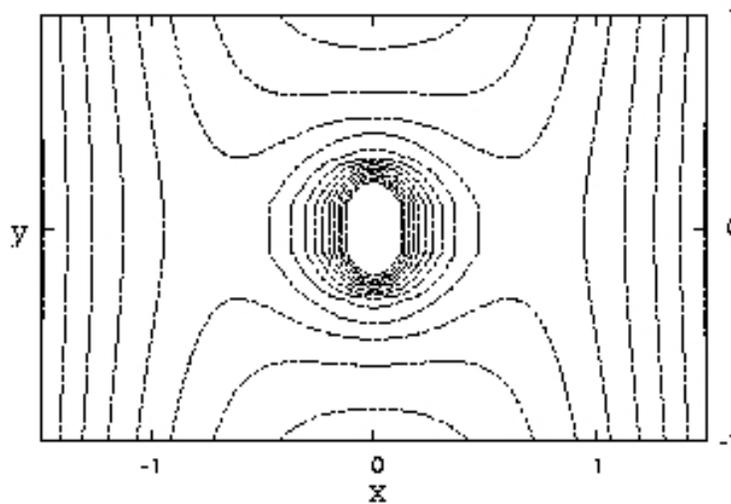


Figura 2.4: Curvas de nível do potencial efetivo do problema de Hill. Para valores da constante de Jacobi maiores do que $C_J = -2,17$ existem duas rotas de escape; uma com $x \rightarrow \infty$ e outra com $x \rightarrow -\infty$.

2.3 Potenciais Pseudo-Newtonianos e o Problema de Hill Generalizado

Potenciais pseudo-newtonianos são potenciais gravitacionais que, a grandes distâncias, se comportam como o potencial gravitacional newtoniano. Desta forma, dado um corpo de massa m com um potencial gravitacional associado $U(\mathbf{r})$, este potencial é pseudo-newtoniano se, para $r \rightarrow \infty$,

$$U(\mathbf{r}) \approx -\frac{Gm}{r}. \quad (2.41)$$

Neste trabalho serão considerados apenas potenciais centrais, ou seja, $U(\mathbf{r}) = U(r)$. Grande parte do desenvolvimento da seção anterior pode ser adaptado para estes tipos de potencial.

As equações (2.7) e (2.8) são modificadas trocando-se os potenciais newtonianos por U_1 e U_2 , potenciais pseudo-newtonianos associados respectivamente às massas m_1 e m_2 :

$$\ddot{\xi} = -\frac{\partial U_1}{\partial r_1}(\xi - \xi_1) - \frac{\partial U_2}{\partial r_2}(\xi - \xi_2), \quad (2.42)$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{\partial U_1}{\partial r_1}(\eta - \eta_1) - \frac{\partial U_2}{\partial r_2}(\eta - \eta_2), \quad (2.43)$$

sendo r_1 e r_2 dados de acordo com as equações (2.9) e (2.10).

Dado que U_1 e U_2 obedecem à condição (2.41) para grandes distâncias, dado $m_1 \gg m_2$, vale a terceira lei de Kepler:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} \approx \frac{Gm_1}{r^3} = \omega^2. \quad (2.44)$$

Com auxílio desta relação, repetindo o procedimento do capítulo anterior (mudança para um sistema de coordenadas rotacional com origem no corpo massivo m_2 , restrição para o caso limite de corpo m_1 muito massivo e muito distante) tem-se

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \left(3\omega^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r}\right) x, \quad (2.45)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} - \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} y. \quad (2.46)$$

Fazendo-se novamente $\omega = 1$, $G(m_1 + m_2) = 1$ e $(x, y) \rightarrow (Gm_2)^{1/3}(x, y)$ obtém-se o sistema de equações independente das massas:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \left(3 - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}\right) x, \quad (2.47)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} y, \quad (2.48)$$

sendo U dado por

$$U(r) = \frac{1}{(Gm_2)^{1/3}} U_2 \left((Gm_2)^{1/3} r \right). \quad (2.49)$$

Estas são as *equações do problema de Hill generalizado*.

A constante de Jacobi do problema de Hill generalizado é dada por

$$C_{JG} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{3}{2}x^2 + U(r). \quad (2.50)$$

Neste trabalho serão utilizados o potencial proposto por Paczyński e Wiita [6] e um dos potenciais propostos por Artemova, Björnsson e Novikov [7]. Estes potenciais simulam efeitos da Relatividade Geral, embora não sejam aproximações reais do sistema relativístico no limite newtoniano. Eles possuem a vantagem de serem simples, e indicam como alterações no sistema no sentido de aproximá-lo do caso relativístico podem afetar o comportamento das trajetórias.

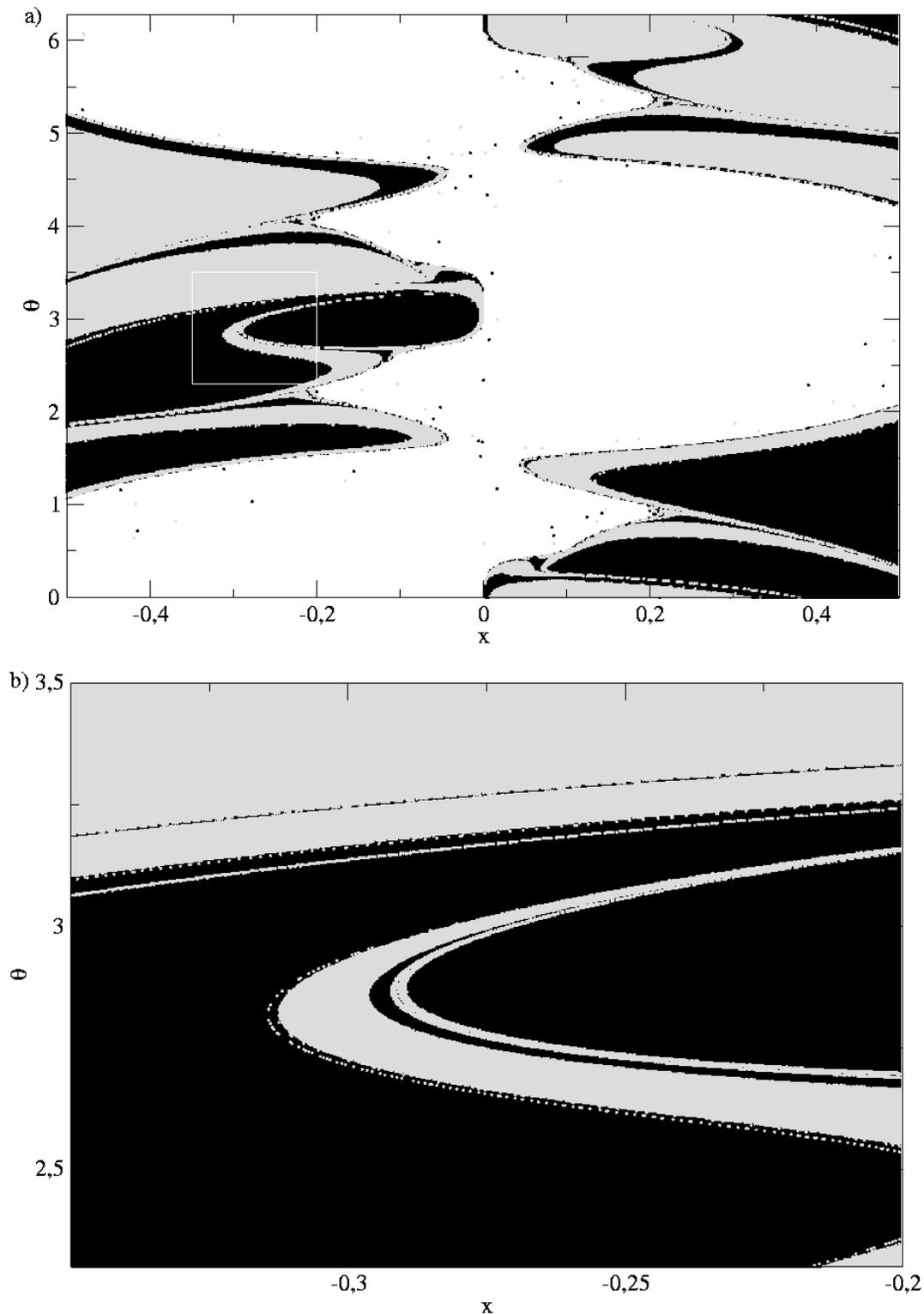


Figura 2.5: Fractal obtido através da integração das trajetórias no conjunto de condições iniciais dado. a) O conjunto total utilizado. b) Ampliação correspondente à região limitada pelo retângulo branco na figura original.

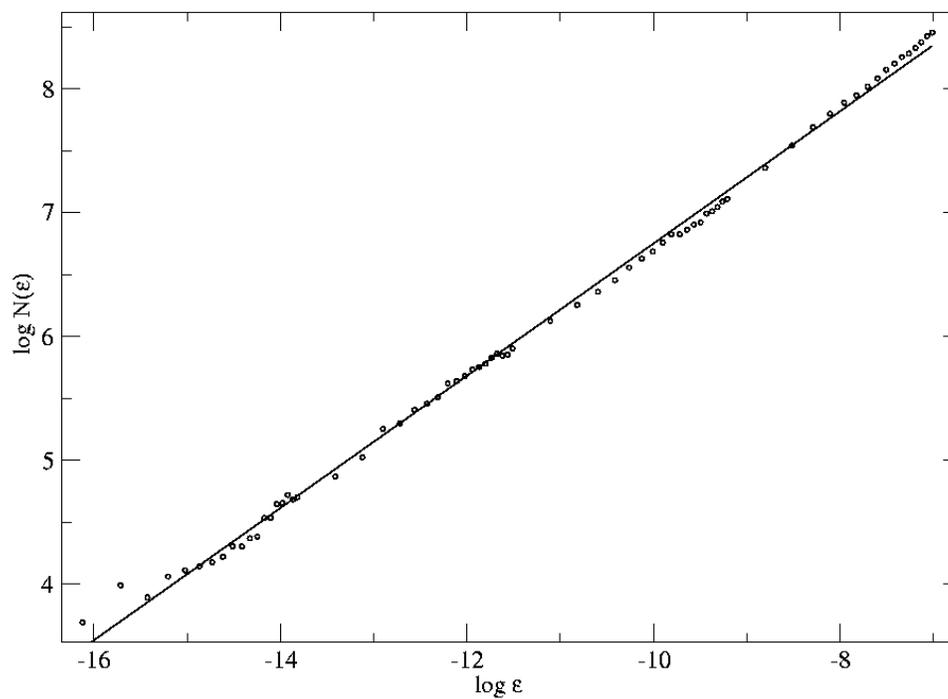


Figura 2.6: Relação linear entre $\log N(\epsilon)$ e $\log \epsilon$. A reta é o resultado da regressão linear dos pontos, e seu coeficiente angular fornece d .

O Potencial de Paczyński-Wiita

O potencial de Paczyński-Wiita foi inicialmente formulado para estudar discos de acreção ao redor de buracos negros, conforme o artigo original de Paczyński e Wiita [6]. Este potencial é utilizado para simular efeitos da relatividade geral, em particular da métrica de Schwarzschild. Ele introduz artificialmente o horizonte de eventos e reproduz corretamente as posições da última órbita estável e a órbita marginalmente ligada da métrica de Schwarzschild (embora falhe em reproduzir os momenta angulares associados a estas órbitas). Neste capítulo serão estudados o potencial de Paczyński-Wiita e a sua influência na dinâmica do problema de Hill.

3.1 O Potencial de Paczyński-Wiita

O potencial de Paczyński-Wiita é definido com base no potencial gravitacional newtoniano. Ele é obtido trocando-se a dependência de r por $r - r_S$, sendo $r_S = 2Gm/c^2$ o raio de Schwarzschild. Tem-se, desta forma,

$$U_{PW}(r) = -\frac{Gm}{r - r_S}. \quad (3.1)$$

Uma das vantagens deste potencial é que ele reproduz exatamente as posições da última órbita estável e da órbita marginalmente estável da métrica de Schwarzschild. De acordo com os resultados da Seção 2.3, as equações de Hill correspondentes são dadas por

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \left(3 - \frac{1}{r(r - r_S^*)^2}\right)x, \quad (3.2)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{1}{r(r - r_S^*)^2}y, \quad (3.3)$$

sendo r dado conforme a equação (2.30). A constante r_S^* é raio de Schwarzschild referente à massa m_2 nas unidades e na escala do problema. Ela é dada numericamente por

$$r_S^* = \left[\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right]^{1/3} \frac{r_S}{R}. \quad (3.4)$$

A constante de Jacobi associada é dada por

$$C_{JPW} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{r - r_S^*}. \quad (3.5)$$

Interpretação da Constante r_S^*

No problema de Hill newtoniano não existe dependência de qualquer parâmetro, como pode ser visto nas equações (2.28) e (2.29). No caso do potencial de Paczyński-Wiita, ao contrário, o sistema possui um parâmetro r_S^* que faz com que os sistemas sejam diferentes entre si. A análise da estabilidade será feita com base na variação deste parâmetro. Esta variação, contudo, possui duas interpretações.

Na primeira interpretação, consideramos que, ao aumentar r_S^* , estamos aumentando apenas a massa m_2 , mantendo, no entanto, a relação $m_1 \gg m_2$. Neste caso a dependência de R e ω é muito pequena, de forma que estas quantidades podem ser consideradas constantes.

Na segunda interpretação, consideramos que, ao aumentar r_S^* , estamos aumentando a massa dos corpos massivos de tal modo que a razão entre elas, m_2/m_1 , seja fixa. Neste caso as quantidades R e ω acabam por depender de r_S^* . Como os expoentes de Lyapunov dependem da escala do tempo, é preciso uniformizá-los antes de se fazer a comparação.

A análise das seções de Poincaré e a dimensão fractal, neste caso, não dependem de como se interpreta a variação de r_S^* . Para o caso relativístico, contudo, diferenças importantes irão surgir, conforme será mostrado no Capítulo 5.

3.2 Estabilidade do Problema de Hill com o Potencial de Paczyński-Wiita

Dinâmica Próximo aos Pontos Fixos

No problema de Hill com o potencial de Paczyński-Wiita os pontos fixos são dados segundo o seguinte sistema de equações:

$$3x_0 - \frac{x_0}{r_0(r_0 - r_S^*)^2} = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{y_0}{r_0(r_0 - r_S^*)^2} = 0. \quad (3.7)$$

De acordo com este sistema de equações tem-se novamente $y_0 = 0$. Porém, para $x_0 \neq 0$, deve-se ter:

$$|x_0|(|x_0| - r_S^*)^2 = \frac{1}{3}. \quad (3.8)$$

Esta equação possui soluções não triviais para $r_S^* \neq 0$. Apesar disto verifica-se que este polinômio de terceiro grau pode possuir três raízes distintas. Caso estas raízes sejam reais o sistema deve possuir mais pontos fixos do que o problema de Hill newtoniano, o que teria uma grande influência sobre a dinâmica do sistema.

Pode-se determinar o comportamento deste polinômio de acordo com o valor de r_S^* . Seja a função

$$f(x) = x(x - r_S^*)^2 - \frac{1}{3}, \quad (3.9)$$

Para $x < 0$ tem-se $f(x) < 0$. Logo, todas as raízes reais do polinômio devem ser positivas. Além disso, tem-se $f(r_S^* + 1) = r_S^* + 2/3 > 0$. Como f é um polinômio e, portanto, é uma função contínua, deve haver pelo menos uma raiz real x_0 no intervalo $[0, r_S^* + 1]$. A função derivada f' é dada por

$$f'(x) = (3x - r_S^*)(x - r_S^*). \quad (3.10)$$

As raízes de f' são triviais, e correspondem, respectivamente, a um máximo local ($x = r_S^*/3$) e a um mínimo local ($x = r_S^*$). O mínimo local corresponde ao valor $f(r_S^*) = -1/3$. O máximo local é dado por

$$f\left(\frac{r_S^*}{3}\right) = \frac{4}{27}r_S^{*3} - \frac{1}{3}. \quad (3.11)$$

A função f terá mais de uma raiz caso o valor do máximo local for maior ou igual a zero. Isto corresponde à seguinte condição:

$$r_S^* \geq \left(\frac{9}{4}\right)^{1/3} \approx 1,31. \quad (3.12)$$

Os diferentes casos para diferentes valores de r_S^* estão ilustrados na Figura 3.1. A condição (3.12) indica que, para que o sistema possua mais de um ponto fixo, deve-se ter, de acordo com a equação (3.4), e lembrando que $m_1 \gg m_2$

$$r_S \geq (1,31)^2 \frac{R^{3/2}}{r_{S1}^{1/2}}, \quad (3.13)$$

sendo r_{S1} o raio de Schwarzschild referente à massa m_1 , dado por

$$r_{S1} = \frac{2G(m_1 + m_2)}{c^2}. \quad (3.14)$$

De acordo com as considerações feitas para o presente problema, deve-se ter $r_S, r_{S1} < R/2$, isto é, as regiões limitadas pelos respectivos horizontes de eventos não se sobrepõem. Contudo, este vínculo não pode ser satisfeito simultaneamente com a condição (3.13). Utilizando as duas condições obtém-se

$$r_S \geq (1,31)^2 \frac{R^{3/2}}{r_{S1}^{1/2}} \geq 2,42R \geq \frac{R}{2}. \quad (3.15)$$

Este resultado implica que o problema de Hill com o potencial pseudo-newtoniano de Paczyński-Wiita não possui mais de dois pontos fixos, os quais correspondem aos pontos lagrangianos L_1 e L_2 .

Para $r_S^* \ll |x_0|$ (o raio de Schwarzschild é geralmente pequeno) pode-se resolver a equação (3.8) perturbativamente, obtendo-se em primeira ordem de r_S^* :

$$|x_0| \approx \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{2}{3}r_S^*. \quad (3.16)$$

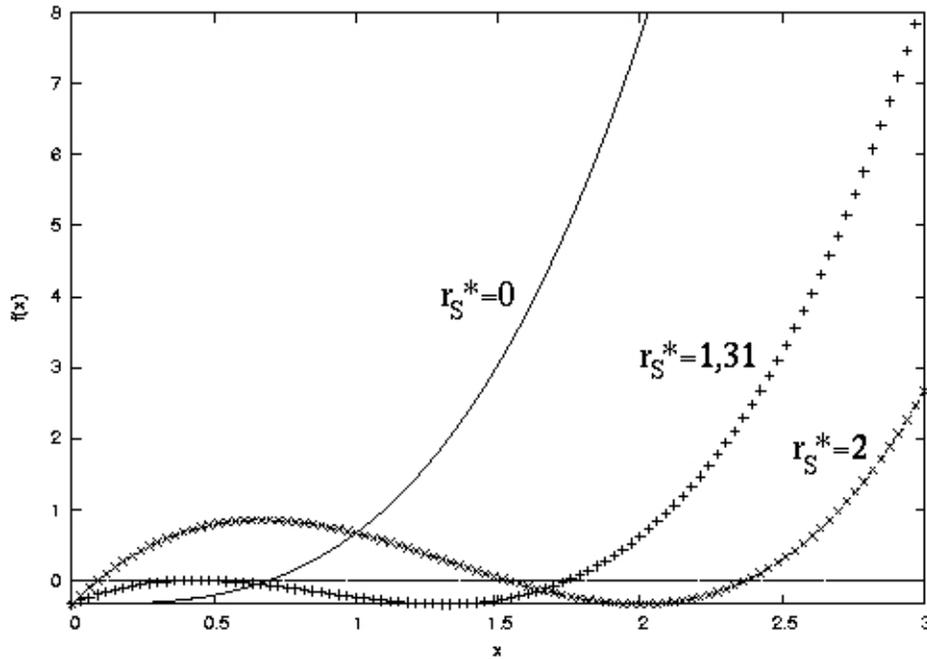


Figura 3.1: Função $f(x)$ para alguns valores de r_S^* . A linha representa $r_S^* = 0$ (caso newtoniano); as cruzes representam $r_S^* = 1,31$; a linha com sinais de multiplicação representa $r_S^* = 2$. Note que o valor 1,31 representa o caso limite em que mais pontos fixos são inseridos no sistema.

Este resultado mostra que, para r_S^* pequeno o bastante, os pontos fixos deste sistema diferem pouco dos pontos Lagrangianos do caso newtoniano, sendo afastados da origem por uma distância pequena.

A matriz de estabilidade \mathbf{M} nestes pontos é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 + \frac{6r_S^*}{|x_0| - r_S^*} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

O polinômio característico associado é dado por

$$(\lambda^2 + 3) \left(\lambda^2 - 9 - \frac{6r_S^*}{|x_0| - r_S^*} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Os autovalores desta matriz são

$$\lambda = \pm i\sqrt{3} \quad \text{e} \quad (3.19)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{9 + \frac{6r_S^*}{|x_0| - r_S^*}}. \quad (3.20)$$

Para $r_S^* < |x_0|$ tem-se que a quantidade dentro da raiz em (3.20) é positiva, de forma que os pontos fixos continuam sendo da forma sela-centro. Caso tenha-se $r_S^* \ll |x_0|$ esta raiz pode

ser expandida em uma série de potências de r_S^* , obtendo-se, em primeira ordem:

$$\lambda \approx \pm \left(3 + \sqrt[3]{3r_S^*} \right), \quad (3.21)$$

sendo muito próximo dos valores obtidos para o caso newtoniano. Isto indica que a dinâmica dos pontos fixos para os sistemas newtoniano e com o potencial de Paczyński-Wiita com r_S^* pequeno são similares, não havendo eventos novos para o último, como o aparecimento de novos pontos de sela, os quais podem modificar profundamente a dinâmica do sistema em questão. Em particular, para $r_S^* = 0$ recupera-se toda a dinâmica newtoniana, o que era de se esperar, pois o potencial de Paczyński-Wiita se reduz ao potencial de Newton neste limite.

Verifica-se que não existem mudanças significativas na dinâmica do problema de Hill sob influência do potencial de Paczyński-Wiita, tais como a inclusão de novos pontos fixos ou a mudança de comportamento destes pontos. Por esta razão os métodos utilizados para estudar estes sistemas devem levar em conta principalmente aspectos quantitativos da dinâmica, os quais variam de um sistema para outro.

Seções de Poincaré

O problema de Hill com o potencial de Paczyński-Wiita é bastante similar ao problema de Hill newtoniano. Contudo, as seções de Poincaré apresentam diferenças sutis de acordo com o parâmetro r_S^* . As regiões instáveis das seções de Poincaré para alguns destes parâmetros está mostrada na Figura 3.2. Uma ampliação destas seções está mostrada na Figura 3.3.

Um meio de comparar a instabilidade de diferentes sistemas caóticos consiste em analisar a destruição de tori de KAM. Uma maior destruição destes tori indica que o sistema é mais instável. Todas as ampliações da Figura 3.3 referem-se à mesma região das seções da Figura 3.2. É possível observar com mais detalhes as diferenças entre as seções com diferentes valores de r_S^* . A seção obtida para $r_S^* = 5 \cdot 10^{-10}$ é bastante similar ao caso newtoniano. Para valores maiores, como $r_S^* = 5 \cdot 10^{-6}$, a maior destruição dos tori começa a ficar mais evidente. Este resultado indica que os sistemas com maiores valores de r_S^* são mais instáveis. Isto ocorre pois neste caso a partícula sem massa adquire uma velocidade maior ao orbitar BN2, já que este possui uma massa maior e, portanto, aplica uma aceleração maior.

Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov para o potencial de Paczyński-Wiita em função de r_S^* estão mostrados nas Figuras 3.4 e 3.5. A Figura 3.4 corresponde à interpretação da variação de r_S^* como a variação da massa m_2 mantendo-se m_1 fixo. A Figura 3.5 corresponde à interpretação da variação de r_S^* como a variação das massas m_1 e m_2 mantendo-se a razão m_2/m_1 fixa. Nos dois casos os expoentes de Lyapunov são praticamente constantes até $r_S^* = 10^{-8}$, valor a partir do qual o valor começa a aumentar em média para valores maiores de r_S^* . Este aumento demonstra que, em média, o sistema possui maior sensibilidade às condições iniciais (órbitas que começam próximas divergem mais rapidamente) para maiores valores de r_S^* . Este resultado confirma a conclusão que se obteve a partir da análise das seções de Poincaré, isto é, a instabilidade dos sistemas aumenta conforme aumenta o valor de r_S^* .

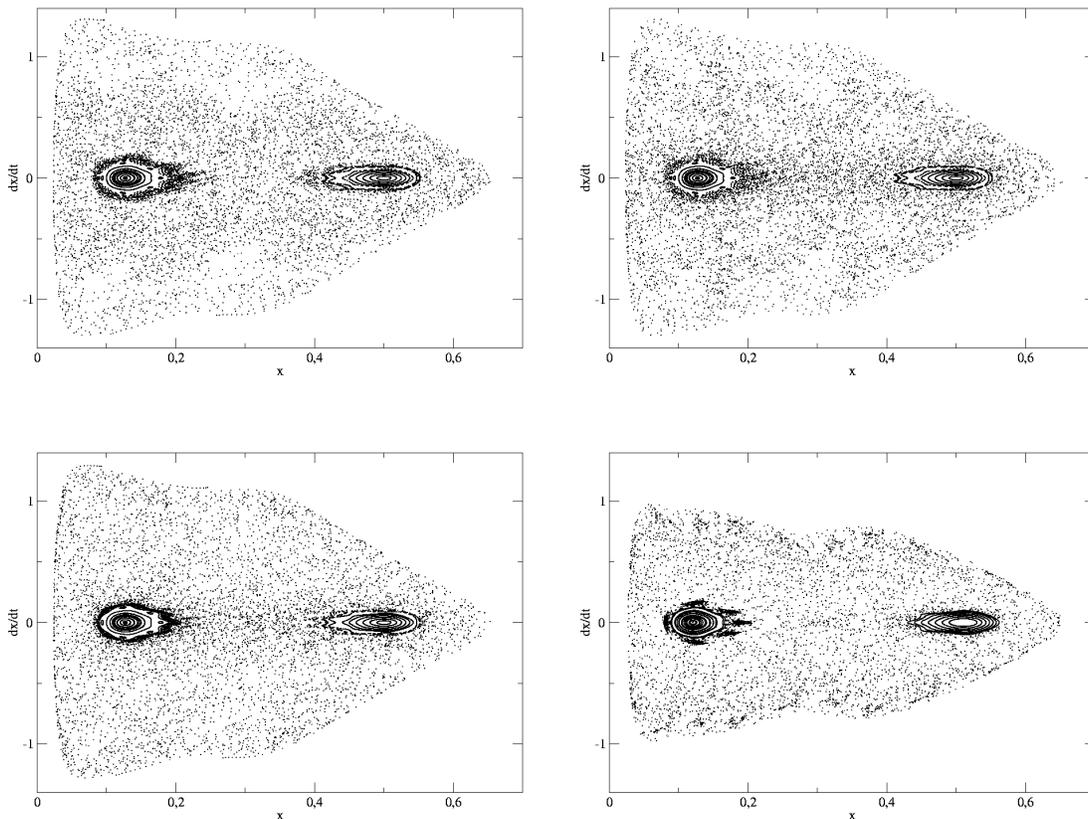


Figura 3.2: Seções de Poincaré para diferentes valores do parâmetro r_s^* . Nesta figura estão mostradas apenas as regiões não regulares. Acima, à esquerda: potencial newtoniano. Acima, à direita: Paczyński-Wiita com $r_s^* = 5 \cdot 10^{-10}$. Abaixo, à esquerda: Paczyński-Wiita com $r_s^* = 5 \cdot 10^{-6}$. Abaixo, à direita: Paczyński-Wiita com $r_s^* = 5 \cdot 10^{-4}$.

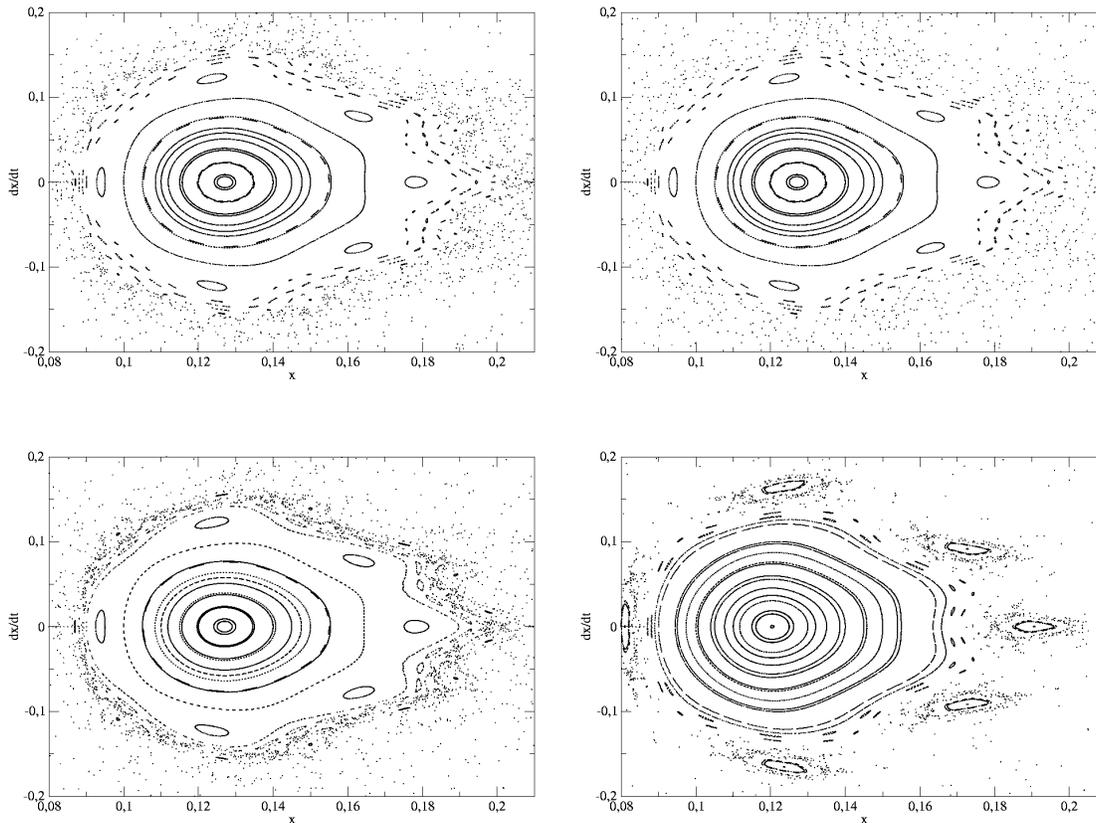


Figura 3.3: Ampliação das Seções de Poincaré da Figura 3.2 para diferentes valores do parâmetro r_s^* . Todas as ampliações referem-se à mesma região. Acima, à esquerda: potencial newtoniano. Acima, à direita: Paczyński-Wiita com $r_s^* = 5.10^{-10}$. Abaixo, à esquerda: Paczyński-Wiita com $r_s^* = 5.10^{-6}$. Abaixo, à direita: Paczyński-Wiita com $r_s^* = 5.10^{-4}$.

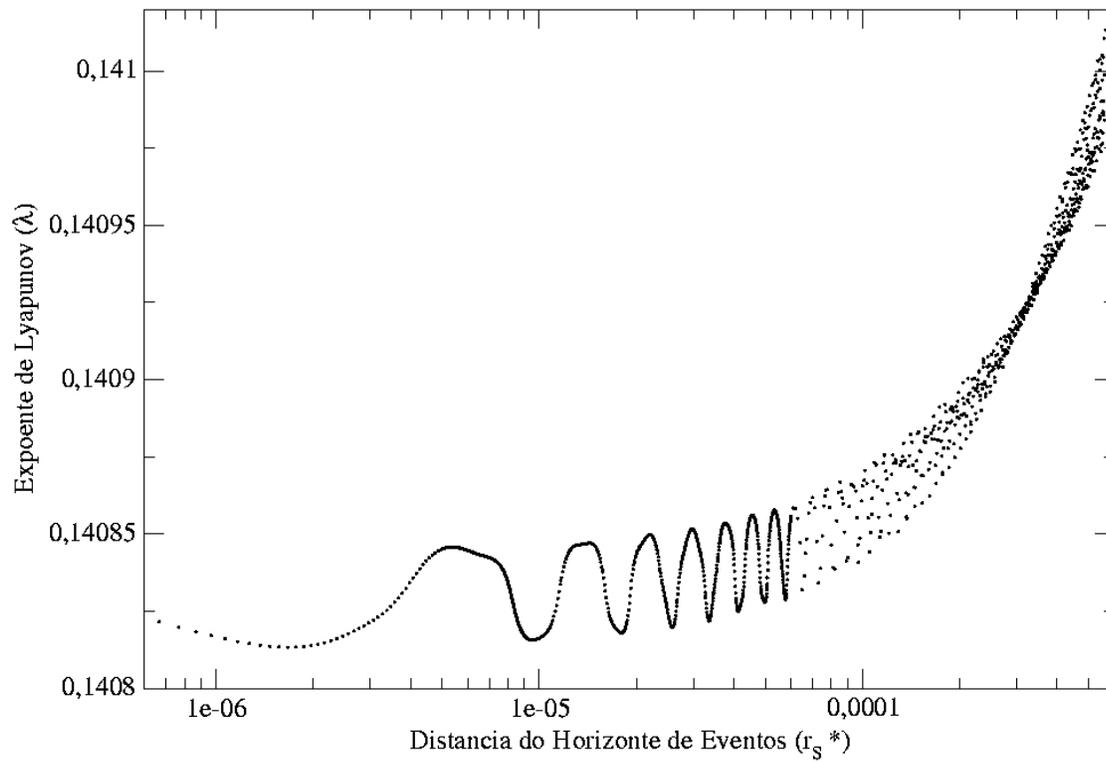


Figura 3.4: Expoentes máximos de Lyapunov para diferentes valores de r_s^* na primeira interpretação (somente m_2 aumenta).

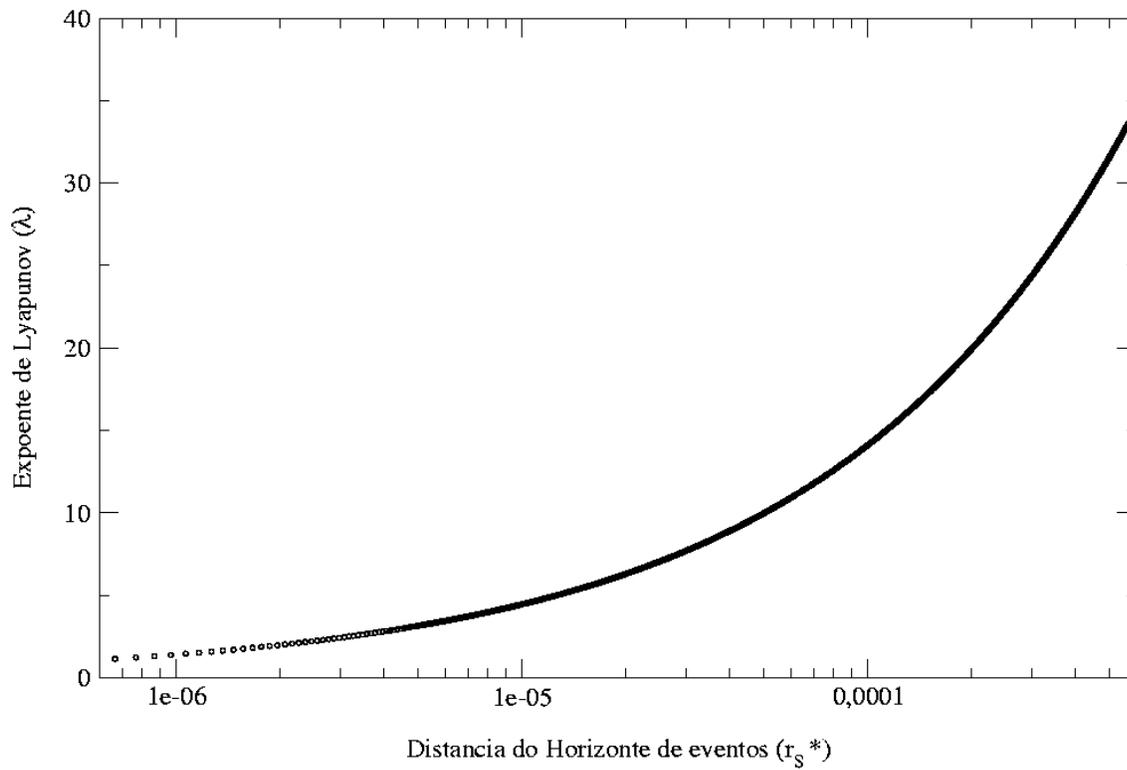


Figura 3.5: Expoentes máximos de Lyapunov para diferentes valores de r_s^* na segunda interpretação (m_1 e m_2 com m_2/m_1 fixo).

Dimensão Fractal

Os valores da dimensão fractal para o potencial de Paczyński-Wiita estão mostrados na Figura 3.6 em função de r_S^* . Apesar de existirem apenas poucos pontos, é possível verificar que o comportamento da dimensão fractal segue de forma aproximada o comportamento do maior expoente de Lyapunov. Os valores são aproximadamente constantes (se situam na mesma margem de erro) até $r_S^* = 5 \cdot 10^{-10}$, aumentando com r_S^* para valores maiores. Um valor maior da dimensão fractal indica maior dependência das condições iniciais, e, portanto, maior instabilidade. Logo, novamente confirma-se a maior instabilidade dos sistemas com maiores valores de r_S^* .

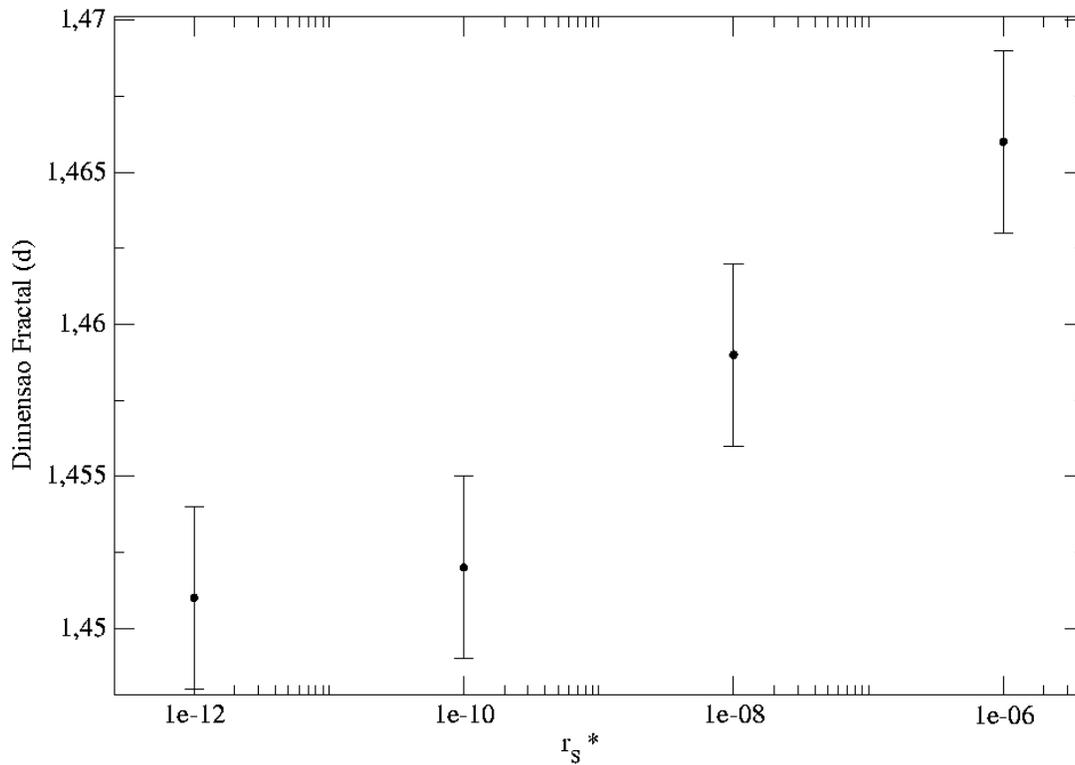


Figura 3.6: Dimensões Fractais para diferentes valores de r_S^* .

O Potencial ABN

Da mesma forma que Paczyński e Wiita, Artemova, Björnsson e Novikov [7] também formularam potenciais para estudar discos de acreção ao redor de buracos negros. Os potenciais ABN são, de certa forma, generalizações do potencial de Paczyński-Wiita. Eles permitem simular efeitos da métrica de Kerr [23], uma generalização da métrica de Schwarzschild que descreve a dinâmica de distribuições de matéria rotacionais. Assim como o potencial de Paczyński-Wiita, estes potenciais descrevem com precisão as posições da última órbita estável e a órbita marginalmente ligada da métrica de Kerr. Neste capítulo, serão estudados um dos potenciais ABN e sua influência na dinâmica do problema de Hill.

4.1 O potencial ABN

Os potenciais de Artemova, Björnsson e Novikov foram propostos de maneira a atender a três condições principais. As condições impostas a estes potenciais são as seguintes: (1) a aceleração de queda livre deve possuir a seguinte forma:

$$F = -\frac{Gm}{r^{2-\alpha}(r-r_1)^\alpha}, \quad (4.1)$$

que se reduz ao potencial newtoniano para $\alpha = 0$ e ao potencial de Paczyński-Wiita para $\alpha = 2$; (2) a aceleração de queda livre deve tender ao infinito quando r tende ao horizonte de eventos, r_1 , do buraco negro; e (3) a posição do extremo da função de condição de contorno, $f(r)^*$, deve coincidir com a posição da última órbita estável no problema relativístico exato. Um destes potenciais é dado, na forma de força radial, por:

$$F_{ABN} = -\frac{Gm}{r^{2-\beta}(r-r_1)^\beta}. \quad (4.3)$$

*Na teoria relativística de acreção de matéria em buracos negros, o raio da última órbita estável é também o limite mais interno do disco de acreção, onde forças viscosas não afetam significativamente as trajetórias dos gases. Na mecânica newtoniana pode-se imitar este comportamento fazendo a tensão viscosa igual a zero para este valor de r . Isto leva ao aparecimento do seguinte multiplicador (condição de contorno):

$$f(r) = 1 - \frac{l_{in}}{l(r)}, \quad (4.2)$$

sendo $l(r)$ o momentum angular kepleriano em r e l_{in} o momentum angular na posição da última órbita estável.

Tabela 4.1: Valores of r_{ml}/r_S para o potencial ABN e para a geometria de Kerr para alguns valores de a .

a	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.998
U_{ABN}	4	3.797	3.370	2.904	2.376	1.069
Kerr	4	3.797	3.373	2.914	2.395	1.091
a	0	-0.1	-0.3	-0.5	-0.7	-0.998
U_{ABN}	4	4.198	4.578	4.942	5.288	5.746
Kerr	4	4.198	4.580	4.949	5.308	5.825

A constante r_1 é a posição do horizonte de eventos, determinada pela expressão exata da relatividade geral:

$$r_1 = \left[1 + (1 - a^2)^{1/2} \right] \frac{r_S}{2}, \quad (4.4)$$

sendo a o momentum angular do centro. Pode-se ver a partir desta expressão que o valor de r_1 reduz-se ao raio de Schwarzschild, r_S , na ausência de rotação ($a = 0$), uma vez que a métrica de Kerr reduz-se a métrica de Schwarzschild neste limite. O parâmetro β é obtido aplicando-se a condição (3), ou seja, exigindo-se que o extremo de f coincida com a última órbita estável. O valor da última órbita estável, r_{in} , obtida do problema relativístico exato é dado por [24]:

$$r_{in} = \left[3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \right] \frac{r_S}{2}, \quad (4.5)$$

sendo os sinais correspondentes à rotação ($a > 0$) e contra-rotação ($a < 0$) respectivamente. Os valores de Z_1 e Z_2 são dados por:

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2)^{1/3} [(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}], \quad (4.6)$$

$$Z_2 = (3a^2 + Z_1^2)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Desta forma, β é dado por:

$$\beta = \frac{r_{in}}{r_1} - 1. \quad (4.8)$$

Um gráfico de β como função de a está mostrado na Figura 4.1.

Os valores obtidos da posição da órbita marginalmente ligada r_{ml} para alguns valores de a estão listados na Tabela 4.1 juntamente com os valores exatos obtidos a partir da métrica de Kerr. Nota-se que os valores exibem uma boa concordância entre si. Mukhopadhyay [25] apontou, em um dos seus trabalhos, que ao utilizar o potencial ABN para valores negativos de a o erro de r_{ml} poderia ser de até 500%. Contudo, utilizando a equação correta para contra-rotação o erro em r_{ml} é menor do que 2%.

Esta expressão para a aceleração de queda livre pode ser integrada em um potencial. Obtém-se a seguinte expressão:

$$U_{ABN}(r) = -\frac{Gm}{(\beta - 1)r_1} \left[\left(\frac{r}{r - r_1} \right)^{\beta - 1} - 1 \right]. \quad (4.9)$$

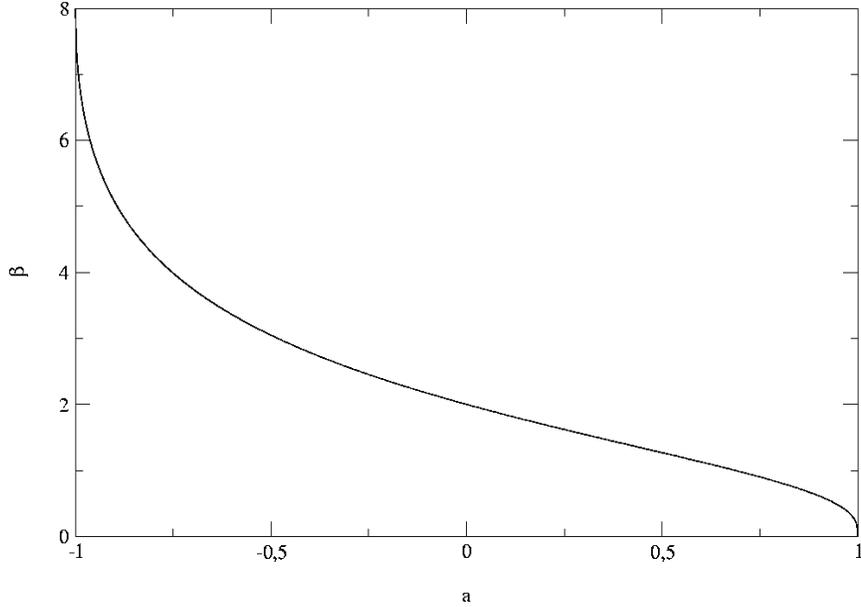


Figura 4.1: Parâmetro β em função do momentum angular a .

Na ausência de rotação ($a=0$) tem-se $\beta = 2$, e resgata-se o potencial de Paczyński-Wiita. Desta forma, pode-se considerar o potencial ABN como uma extensão do potencial de Paczynski-Wiita na presença de rotação. Utilizando-se este potencial obtém-se as equações de Hill modificadas:

$$\ddot{x} = -2\dot{y} + \left(3 - \frac{1}{r^{3-\beta} (r - r_1^*)^\beta} \right) x, \quad (4.10)$$

$$\ddot{y} = 2\dot{x} - \frac{1}{r^{3-\beta} (r - r_1^*)^\beta} y, \quad (4.11)$$

sendo r dado pela equação (2.30) e r_1^* a posição do horizonte de eventos nas unidades e na escala do problema, dado numericamente por:

$$r_1^* = \left[\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right]^{1/3} \frac{r_1}{R}. \quad (4.12)$$

A constante de Jacobi associada é dada por:

$$C_{JABN} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{(\beta - 1)r_1^*} \left[\left(\frac{r}{r - r_1^*} \right)^{\beta-1} - 1 \right]. \quad (4.13)$$

Como pode ser visto na Figura 4.1, para $a = 1$ tem-se $\beta = 0$ e para $a = -1$ tem-se $\beta = 8$. O primeiro caso se reduz ao caso newtoniano exato, e no segundo caso a singularidade em $r = 0$

desaparece. Além disso, estes valores começam a se afastar dos valores exatos das posições da órbita marginalmente ligada, r_{ml} . Por este motivo, neste trabalho vamos considerar a variando apenas de $-0,5$ a $0,5$, intervalo em que o potencial ABN fornece uma boa aproximação. Neste intervalo serão vistas as modificações da dinâmica que pretendemos apresentar.

Dinâmica Próximo aos Pontos Fixos

Na dinâmica do potencial ABN os pontos fixos são dados pelo seguinte conjunto de equações:

$$3x_0 - \frac{x_0}{r_0^{3-\beta} (r_0 - r_1^*)^\beta} = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{y_0}{r_0^{3-\beta} (r_0 - r_1^*)^\beta} = 0. \quad (4.15)$$

Mais uma vez tem-se que $y_0 = 0$. Para x_0 tem-se a equação

$$|x_0|^{3-\beta} (|x_0| - r_1^*)^\beta = \frac{1}{3}. \quad (4.16)$$

Esta equação não possui soluções triviais, sobretudo pelo expoente β , que é um número real. A questão que surge é se este potencial, de forma mais complicada, pode apresentar mais pontos fixos que os potenciais anteriores. Procedendo de forma similar ao caso do potencial de Paczyński-Wiita, seja a função f definida por

$$f(x) = x^{3-\beta} (x - r_1^*)^\beta - \frac{1}{3}. \quad (4.17)$$

Devido ao fato do exponencial β não ser em geral um inteiro vamos considerar $x \geq r_1^*$. De fato estamos interessados apenas na dinâmica além do horizonte de eventos dos corpos massivos, que é a região onde a dedução das equações de Hill generalizadas é válida. Tem-se que $f(r_1^*) = -1/3 < 0$, e existe x_p tal que $f(x_p) > 0^*$. Portanto, como f é contínua, deve existir x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Por outro lado, a derivada desta função é dada por

$$f'(x) = [3x - (3 - \beta)r_1^*] x^{2-\beta} (x - r_1^*)^{\beta-1}. \quad (4.18)$$

A expressão acima indica que f possui dois extremos, um máximo local em $x = (1 - \beta/3)r_1^*$ e um mínimo local em $x = r_1^*$. Neste caso, como $\beta > 0$, o fato de se exigir $x > r_1^*$ o máximo local não influencia na órbita, uma vez que se encontra fora do domínio de interesse (um argumento semelhante poderia ser construído para o potencial de Paczyński-Wiita, impondo a condição $x > r_S^*$). Portanto, não devem existir mais de uma raiz para a função $f(x)$ definida em (4.17), exatamente como nos casos newtoniano e com o potencial de Paczyńskii-Wiita.

Para $r_1^* \ll |x_0|$ os pontos críticos são dados, em primeira ordem de r_1^* , por

$$|x_0| \approx \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{\beta}{3} r_1^*. \quad (4.19)$$

De fato, fazendo $x_p = \max\{1, \frac{r_1^}{1-3^{1/\beta}}\}$ tem-se $x_p^3 > 1$ e $x_p^{-\beta} (x_p - r_1^*)^\beta > 1/3$, de forma que $f(x_p) > 0$.

Pode-se observar novamente que, para o limite de r_1^* pequeno os pontos fixos diferem pouco dos pontos lagrangianos da dinâmica newtoniana. A matriz estabilidade \mathbf{M} é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 + \frac{3\beta r_1^*}{|x_0| - r_1^*} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

O polinômio característico associado é dado por

$$(\lambda^2 + 3) \left(\lambda^2 - 9 - \frac{3\beta r_1^*}{|x_0| - r_1^*} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Finalmente, os autovalores são

$$\lambda = \pm i\sqrt{3} \quad e \quad (4.22)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{9 + \frac{3\beta r_1^*}{|x_0| - r_1^*}}. \quad (4.23)$$

Para r_1^* pequeno, novamente tem-se que os pontos fixos são do tipo *sela-centro*. Expandindo-se os autovalores (4.23) em potências de r_1^* tem-se, em primeira ordem,

$$\lambda \approx \pm \left(3 + \sqrt[3]{3} \frac{\beta}{2} r_1^* \right), \quad (4.24)$$

ou seja, é próximo dos valores obtidos para o caso newtoniano e com o potencial de Paczyński-Wiita. De fato, para $r_1^* = 0$ recupera-se a dinâmica newtoniana e, para $\beta = 2$ recupera-se a dinâmica do potencial de Paczyński-Wiita, o que é esperado, pois nestes limites o potencial ABN reduz-se ao potencial newtoniano e de Paczyński-Wiita, respectivamente.

Seções de Poincaré

Para o potencial ABN as diferenças entre os sistemas estão ao se variar o parâmetro a . Seguindo o exemplo do potencial de Paczyński-Wiita as diferenças entre as seções de Poincaré também são bastante sutis, devido ao fato de se utilizar um valor pequeno para r_1^* (da ordem de 10^{-4}). Este valor corresponde aproximadamente à Via Láctea, ao aglomerado M2 e a uma estrela típica representando os papéis do Sol, da Terra e da Lua respectivamente. Valores maiores, que poderiam levar a modificações mais profundas na dinâmica, necessitam de uma correspondência com sistemas físicos reais. Os resultados estão mostrados nas Figura 4.2. Nesta figura são mostradas as seções correspondentes ao valor positivo e negativo de a . Na Figura 4.3 é mostrada uma ampliação das seções correspondentes aos valores 0, 5 e $-0,5$.

Estas figuras permitem mostrar, além da óbvia dependência com o parâmetro a , a relação entre a rotação (correspondente a valores positivos de a) e a contra-rotação (correspondente a valores negativos de a). Na rotação o corpo massivo está rotacionando no mesmo sentido da translação da partícula teste em torno deste corpo. Já na contra-rotação o corpo massivo

está rotacionando em sentido contrário ao da órbita. Utilizando um sistema de referência onde o corpo massivo está em repouso, a velocidade angular da partícula teste é maior no caso da contra-rotação, e seria de se esperar que este sistema seja mais instável. De fato, analisando a Figura 4.3 pode-se notar o surgimento de ilhas (deformação dos tori) na seção referente à contra-rotação ($a = -0,5$) que não possuem correspondente no caso da rotação ($a = 0,5$), indicando maior instabilidade no primeiro caso.

Exponentes de Lyapunov

Os expoentes obtidos em função de a para o potencial ABN estão mostrados na Figura 4.4. Nesta figura está claro como se comportam os sistemas de acordo com a variação do momentum angular a . Confirmando o resultado da análise das seções de Poincaré, verifica-se que os coeficientes de Lyapunov, são maiores no caso da contra-rotação (a negativo), indicando que estes sistemas são mais instáveis do que os seus correspondentes co-rotantes, devido à maior sensibilidade às condições iniciais.

Um outro aspecto a se considerar é o fato do sistema se tornar mais estável conforme o valor de a aumenta em módulo, ou seja, o caso mais instável corresponde a $a = 0$ (potencial de Paczyński-Wiita). Esta característica não é tão facilmente verificada no caso das seções de Poincaré, uma vez que as diferenças entre as seções são bastante sutis. O mecanismo físico pelo qual o sistema se torna mais estável devido à rotação, no entanto, não é muito claro, e a validade deste resultado ainda precisa ser confirmada através do estudo do sistema puramente relativístico.

Dimensão Fractal

Para o potencial ABN os valores de d obtidos são mostrados na Figura 4.5 como função de a . Note que, para este caso, valores negativos de a (contra-rotação) apresentam valores de d em geral maiores que os obtidos para valores positivos de a (co-rotação). A dimensão fractal possui estreita relação com a instabilidade do sistema, sendo que, quanto maior o valor de d , maior a instabilidade do sistema. Isto parece se confirmar neste caso, estando de acordo com os resultados obtidos previamente pelos outros métodos.

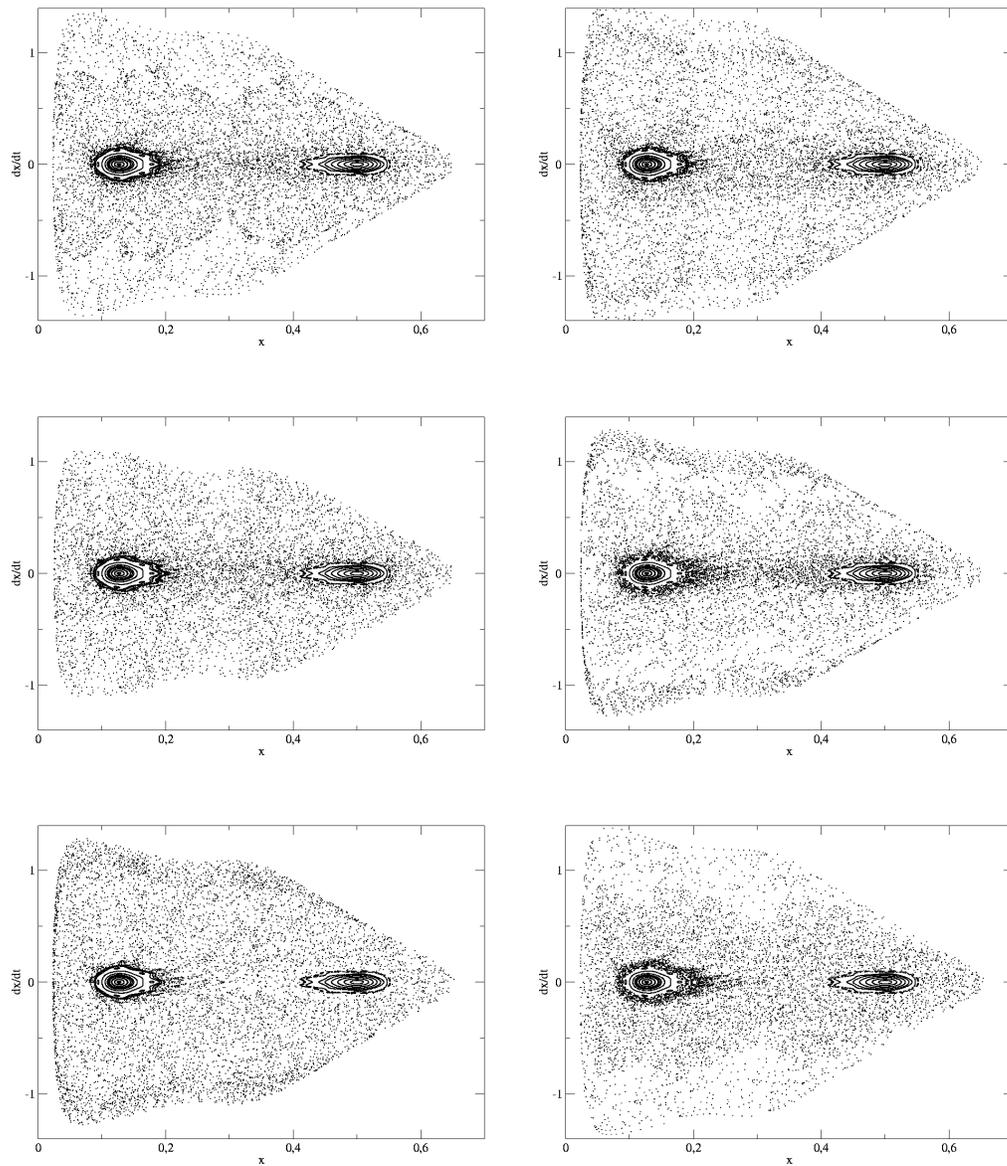


Figura 4.2: Seções de Poincaré para diferentes valores do momentum angular a . As seções à esquerda correspondem a a positivo e à direita correspondem a a negativo. Acima, $a = \pm 0, 1$. No meio, $a = \pm 0, 3$. Abaixo, $a = \pm 0, 5$. A taxa de destruição dos tori de KAM é maior para valores negativos.

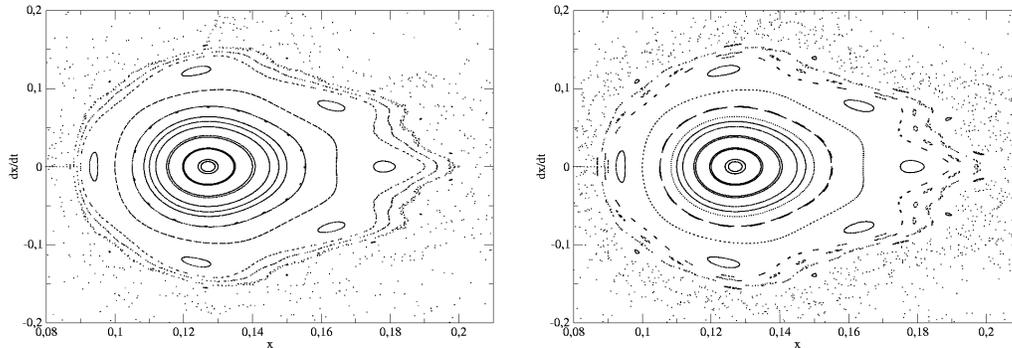


Figura 4.3: Ampliações das seções de Poincaré. Esquerda, momentum angular $a = 0,5$. Direita, momentum angular $a = -0,5$. Note que para $a = -0.5$ aparecem ilhas, indicando aumento da instabilidade.

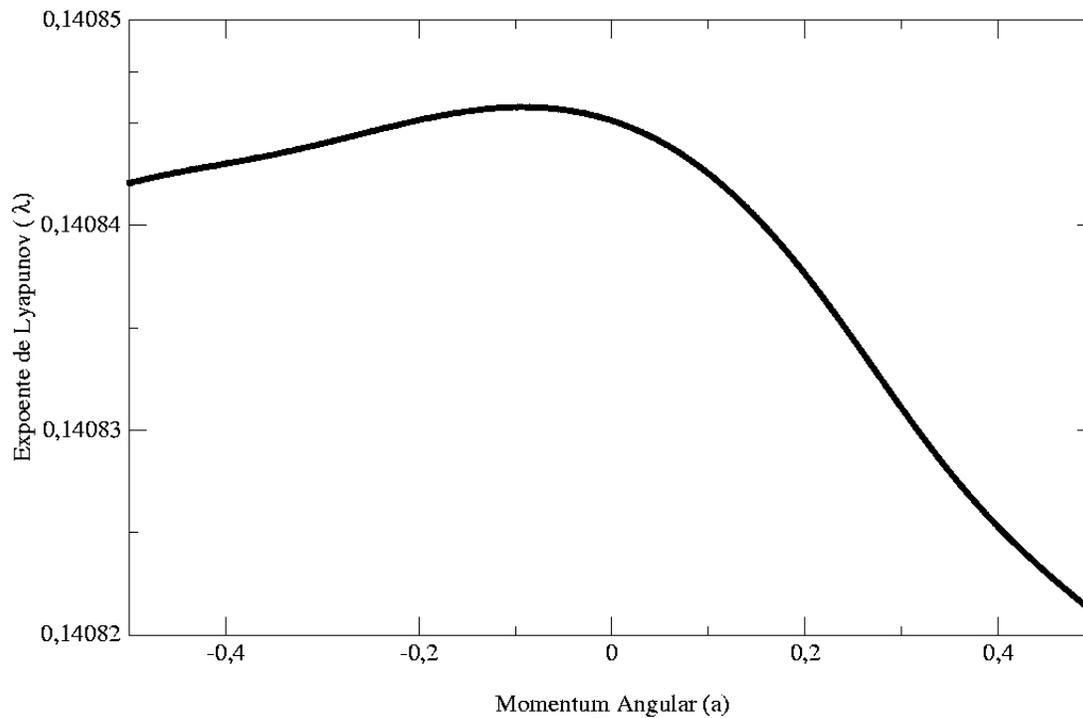


Figura 4.4: Expoentes máximos de Lyapunov para diferentes valores do momentum angular a .

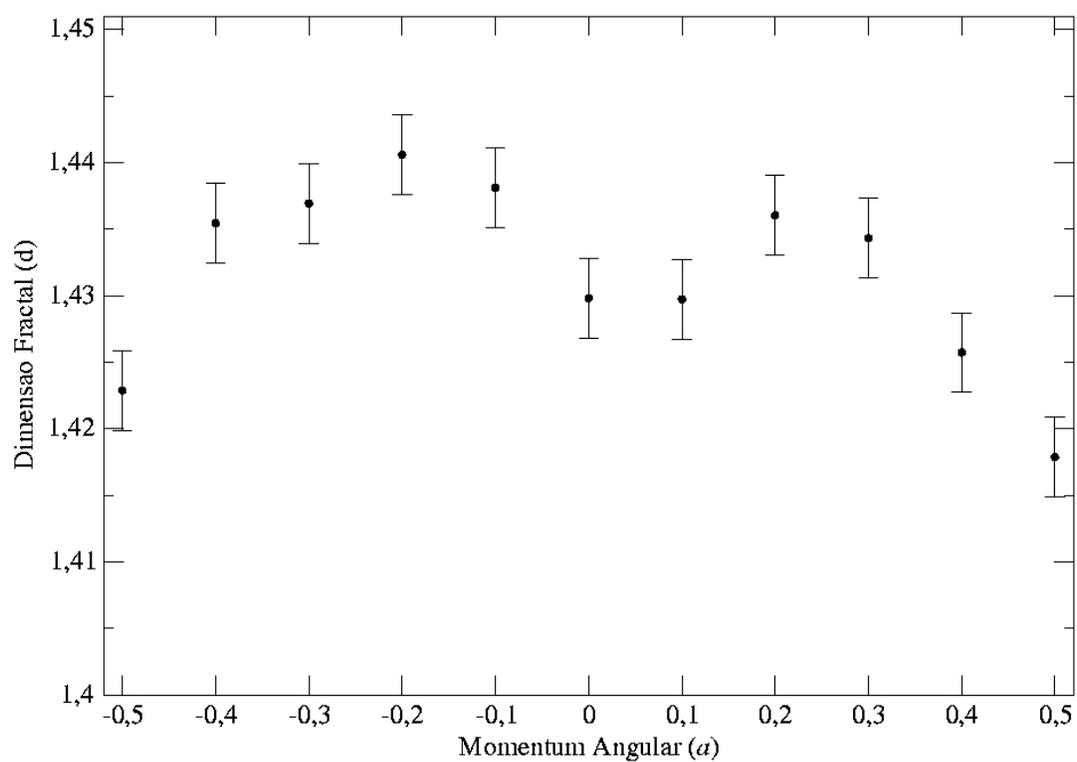


Figura 4.5: Dimensões Fractais para diferentes valores de a .

Hill e Relatividade Geral

No contexto da relatividade geral o problema de Hill é formulado de maneira diferente da mecânica newtoniana, embora as hipóteses básicas continuem as mesmas. Em relatividade geral o movimento do corpo de massa desprezível se dará através das curvas geodésicas do espaço-tempo cuja geometria, por sua vez, é influenciada pelos dois corpos massivos (sistema binário).

Desta forma, o estudo das órbitas do corpo de massa desprezível é dado conforme o seguinte. Primeiramente deve-se encontrar a métrica do espaço-tempo sob influência dos dois corpos massivos. A partir da métrica obtém-se as curvas geodésicas deste espaço-tempo. Por fim, parametrizando-se adequadamente as curvas geodésicas obtém-se as equações de movimento. Na seção seguinte, cada um destes passos será detalhado, sendo expostas as equações de movimento. A partir destas equações será utilizado o mesmo método utilizado nos casos newtoniano e pseudo-newtoniano para obter as equações de Hill puramente relativísticas. Por fim faremos a análise da estabilidade das órbitas utilizando as ferramentas usuais.

5.1 Métrica de um Sistema Binário no Problema de Hill

Até o presente não foi possível encontrar de forma analítica a métrica do espaço-tempo influenciado por um sistema binário, devido principalmente à falta de simetria deste sistema. Contudo, é possível construir uma métrica aproximada costurando-se diversas métricas que se encaixam nas diferentes regiões do espaço-tempo. Neste trabalho utilizaremos a métrica aproximada obtida por Alvi [8].

Sejam dois buracos negros (BN1 e BN2), sendo m_1 e m_2 suas respectivas massas. Define-se as seguintes quantidades:

$$m = m_1 + m_2; \tag{5.1}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m}. \tag{5.2}$$

Neste trabalho iremos utilizar coordenadas harmônicas. Coordenadas harmônicas são definidas de forma a satisfazerem à equação de d'Alembert se tratadas como campos escalares. Em formulação covariante, as coordenadas $\{x^\mu\}$ são harmônicas caso cada uma satisfaça à

seguinte condição:

$$0 = \nabla_a \nabla^a x^\mu = g^{ab} (\partial_a \partial_b x^c + \Gamma_{ab}^c \partial_c x^\mu) = g^{ab} (\partial_a \delta_b^c + \Gamma_{ab}^c \delta_c^\mu) = g^{ab} \Gamma_{ab}^\mu, \quad (5.3)$$

utilizado-se a propriedade $\nabla_a \phi = \partial_a \phi$ para campos escalares. A condição $g^{ab} \Gamma_{ab}^\mu = 0$ é claramente não tensorial, dado que os símbolos de Christoffel Γ_{ab}^c não são tensores. Portanto, esta condição é válida para um determinado conjunto de coordenadas que, no entanto, sempre existe, ao menos localmente. Para coordenadas inerciais em uma geometria plana do tipo Minkowski, isto é, $g^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, esta condição é satisfeita trivialmente ($\Gamma_{ab}^c = 0$), de forma que a utilização de coordenadas deste tipo não prejudica a transição para o limite newtoniano. Vamos denotar as trajetórias dos buracos negros em coordenadas harmônicas $x_A^j(t')$, com $A = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. Em outras palavras, $x_A^j(t)$ são as coordenadas espaciais no instante t' do centro de atração do campo gravitacional do buraco negro A . Será utilizado negrito para denotar coordenadas espaciais. Por exemplo, $\mathbf{x}_A = (x_A^1, x_A^2, x_A^3)$. A notação $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é utilizada para a quantidade $\delta_{jk} a^j b^k$, e $|\mathbf{a}|$ é, por definição, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$.

Denotemos a separação entre os buracos negros $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{R}$, de acordo com o sistema newtoniano. A separação \mathbf{R} em geral depende do tempo, ou seja, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$. Tomando o centro de massa do sistema como a origem do sistema de coordenadas espaciais as trajetórias dos buracos negros são dadas por

$$\mathbf{x}_1(t) = \frac{m_2}{m} \mathbf{R}(t), \quad (5.4)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = -\frac{m_1}{m} \mathbf{R}(t). \quad (5.5)$$

Define-se, então, as seguintes quantidades:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad (5.6)$$

$$r_A = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_A|, \quad (5.7)$$

$$R = |\mathbf{R}|, \quad (5.8)$$

$$\omega = \frac{\epsilon}{R} = \sqrt{\frac{Gm}{R^3}}. \quad (5.9)$$

para $A = 1, 2$.

A partir destas definições é possível fixar os limites de quatro regiões do espaço-tempo no qual está inserido este sistema binário. As zonas, desta maneira, correspondem respectivamente à união da respectiva região e as suas superposições com as regiões vizinhas. Define-se os limites interiores $r_1^{in} = \sqrt{Gm_1 R/c^2}$ e $r_2^{in} = \sqrt{Gm_2 R/c^2}$. Esta escolha é conveniente dado que $r_1^{in}/R \rightarrow 0$ e $Gm_1/c^2 r_1^{in} \rightarrow 0$ conforme $Gm_1/c^2 R \rightarrow 0$. De forma similar, $r_2^{in}/R \rightarrow 0$ e $Gm_2/c^2 r_2^{in} \rightarrow 0$ conforme $Gm_2/c^2 R \rightarrow 0$. Define-se também o limite exterior $r^{ext} = \lambda_c/2\pi = R/2\epsilon$, sendo $\lambda_c = \pi/\omega$ o comprimento de onda característico da radiação gravitacional emitida pelo sistema binário.

Dados estes limites, as regiões do espaço-tempo podem ser divididas de acordo com o seguinte:

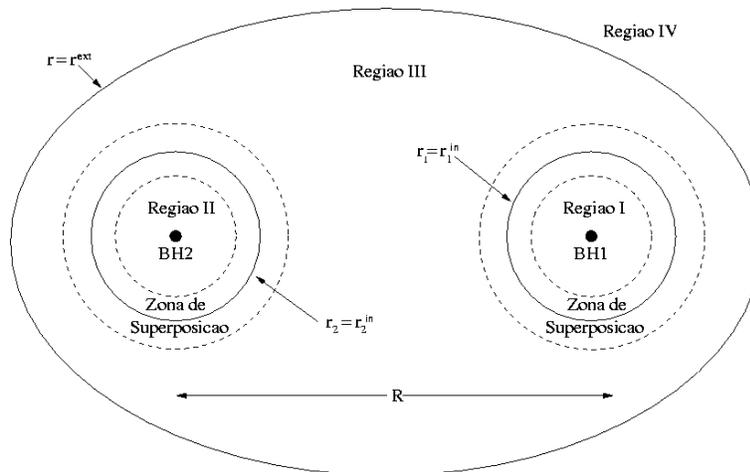


Figura 5.1: Regiões do espaço-tempo. Adaptado de Alvi [8].

- Região I: $r_1 < r_1^{in}$ (mas fora do horizonte de eventos aparente de BN1);
- Região II: $r_2 < r_2^{in}$ (mas fora do horizonte de eventos aparente de BN2);
- Região III: $r_1 > r_1^{in}$, $r_2 > r_2^{in}$ e $r < r^{ext}$;
- Região IV: $r > r^{ext}$.

Estas regiões estão mostradas na Figura 5.1.

Para cada uma dessas regiões é possível adaptar uma métrica aproximada de forma que elas coincidam nas regiões de superposição. Tomando $m_1 > m_2$ as órbitas típicas do problema de Hill estão confinadas às regiões II e III. Vamos considerar cada caso separadamente, supondo que cada tipo de órbita não ultrapasse sua respectiva região além da zona de superposição (onde as duas aproximações coincidem).

Métrica na Região I

Na região I as órbitas estão muito próximas a BN1. Desta forma, a métrica nesta região é dada basicamente pela métrica de Schwarzschild (devido a BN1), porém deformada por perturbações de maré correspondentes à influência de BN2. Estas perturbações são obtidas através da métrica da região III, uma vez que as duas métricas devem possuir o mesmo comportamento assintótico na zona de superposição. Além disso, estas perturbações devem ser soluções das equações linearizadas de Einstein ao redor da métrica de Schwarzschild e devem ser finitas no horizonte $r_S = Gm_1/c^2$.

Vamos considerar o movimento de BN1 em um espaço-tempo arbitrário. Define-se, de acordo com o princípio da equivalência, o Sistema de Referência Localmente Inercial (*Locally Inertial Reference Frame*, LARF) de BN1. De acordo com Thorne e Hartle [26], neste sistema de referência a métrica pode ser expandida em potências da massa m_1 de BN1, conforme o

seguinte:

$$g = g^{(0)} + m_1 g^{(1)} + m_1^2 g^{(2)} + \dots, \quad (5.10)$$

sendo $g^{(0)}$ a métrica representando o campo gravitacional do universo externo sem BN1 e $g^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) componentes da métrica representando o campo gravitacional interno e interações não lineares entre os campos externo e interno.

No caso do sistema binário em questão, a métrica externa é devida somente a BN2, sendo, portanto, uma métrica de Schwarzschild. Entretanto vamos considerar primeiramente uma métrica de Kerr, fazendo mais tarde o limite $a = 0$ (sendo a o momentum angular por unidade de massa). A métrica de Kerr, nas coordenadas de Boyer-Lindquist [27], é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - 2 \frac{2Mr}{\Sigma} a \operatorname{sen}^2(\theta) dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma} \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (5.11)$$

sendo

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad (5.12)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{A} = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \operatorname{sen}^2(\theta). \quad (5.14)$$

Nesta seção utilizaremos unidades tais que $c, G = 1$. Além das constantes de movimento Φ e E , associadas aos campos de Lie ∂_ϕ e ∂_t , existem outras, K e μ , determinadas por Carter [28] a partir das equações geodésicas. Logo, as primeiras integrais do movimento são

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta \Sigma} (\mathcal{A} E - 2Mr a \Phi), \quad (5.15)$$

$$\Sigma^2 \dot{r}^2 = \{ E (r^2 + a^2) - a \Phi \}^2 - \Delta (\mu^2 r^2 + K), \quad (5.16)$$

$$\Sigma^2 \dot{\theta}^2 = K - \mu^2 a^2 \cos^2(\theta) - \left(a E \operatorname{sen}(\theta) - \frac{\Phi}{\operatorname{sen}(\theta)} \right)^2, \quad (5.17)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{2Mr}{\Sigma} a E + \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \frac{\Phi}{\operatorname{sen}^2(\theta)} \right) \right\}. \quad (5.18)$$

Neste conjunto de equações o ponto representa diferenciação com respeito ao tempo próprio. As constantes de movimento μ , E e Φ são, respectivamente, a massa de repouso, a energia e o momentum angular em torno do eixo de simetria da partícula teste orbitante, e K é a quarta constante de Carter. É possível normalizar o tempo próprio de forma a se fazer $\mu^2 = 1$, e iremos utilizar esta normalização.

A métrica externa deve ser expressa em coordenadas no LARF de BN1. Com este objetivo em vista, vamos considerar primeiramente um observador em queda livre em uma órbita circular e equatorial ao redor de um buraco negro tipo Kerr de massa m_2 . O buraco negro representa BN2, enquanto o sistema de referência local do observador no sistema de Lorentz (o mesmo que o sistema de referência próprio) representa o LARF de BN1. A métrica próxima à linha mundo do observador é determinada então pelos campos de maré tipo-elétrico e tipo-magnético gerados pela presença de BN2 e medidos no sistema lorentziano local do observador.

Estes campos de maré podem ser obtidos tomando-se as componentes do tensor de Weyl \mathbf{C} correspondente ao espaço-tempo de Kerr em uma tetrada ortonormal propagada paralelamente ao longo da linha mundo do observador. Os vetores nesta tetrada formam, então, a base do sistema lorentziano local na posição da órbita geodésica. O campo de maré tipo-elétrico foi computado por Fishbone [29] e Marck [30]. Marck primeiramente computou a tetrada $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ propagada paralelamente ao longo de geodésicas arbitrárias do espaço-tempo de Kerr. Nesta tetrada o vetor λ_0 corresponde à 4-velocidade da geodésica (sendo portanto paralelamente propagada). As suas componentes são dadas por

$$\lambda_0^{(0)} = (1/\Delta\Sigma)^{1/2} \{E(r^2 + a^2) - a\Phi\}, \quad (5.19)$$

$$\lambda_0^{(1)} = (\Sigma/\Delta)^{1/2}\dot{r}, \quad (5.20)$$

$$\lambda_0^{(2)} = \Sigma^{1/2}\dot{\theta}, \quad (5.21)$$

$$\lambda_0^{(3)} = (1/\Sigma)^{1/2}(aE\text{sen}(\theta) - \Phi/\text{sen}(\theta)). \quad (5.22)$$

O segundo vetor da tetrada é dado utilizando-se o tensor de Killing-Yano [30] de ordem dois para a métrica de Kerr. Suas componentes são dadas por

$$\lambda_2^{(0)} = (\Sigma/K\Delta)^{1/2}a\cos(\theta)\dot{r}, \quad (5.23)$$

$$\lambda_2^{(1)} = (1/K\Sigma\Delta)^{1/2}a\cos(\theta) \{E(r^2 + a^2) - a\Phi\}, \quad (5.24)$$

$$\lambda_2^{(2)} = -(1/K\Sigma)^{1/2}(aE\text{sen}(\theta) - \Phi/\text{sen}(\theta)), \quad (5.25)$$

$$\lambda_2^{(3)} = (\Sigma/K)^{1/2}r\dot{\theta}. \quad (5.26)$$

O terceiro e o quarto vetores são dados da seguinte forma. Existem dois vetores que formam uma base ortonormal natural, quando tomados em conjunto com λ_0 e λ_2 . Suas componentes são dadas por

$$\tilde{\lambda}_1^{(0)} = \alpha(\Sigma/K\Delta)^{1/2}r\dot{r}, \quad (5.27)$$

$$\tilde{\lambda}_1^{(1)} = \alpha(1/K\Sigma\Delta)^{1/2}r \{E(r^2 + a^2) - a\Phi\}, \quad (5.28)$$

$$\tilde{\lambda}_1^{(2)} = \beta(1/K\Sigma)^{1/2}a\cos(\theta)(aE\text{sen}(\theta) - \Phi/\text{sen}(\theta)), \quad (5.29)$$

$$\tilde{\lambda}_1^{(3)} = -\beta(\Sigma/K)^{1/2}a\cos(\theta)\dot{\theta}, \quad (5.30)$$

e

$$\tilde{\lambda}_3^{(0)} = \alpha(1/\Delta\Sigma)^{1/2} \{E(r^2 + a^2) - a\Phi\}, \quad (5.31)$$

$$\tilde{\lambda}_3^{(1)} = \alpha(\Sigma/\Delta)^{1/2}\dot{r}, \quad (5.32)$$

$$\tilde{\lambda}_3^{(2)} = \beta\Sigma^{1/2}\dot{\theta}, \quad (5.33)$$

$$\tilde{\lambda}_3^{(3)} = \beta(1/\Sigma)^{1/2}(aE\text{sen}(\theta) - \Phi/\text{sen}(\theta)), \quad (5.34)$$

sendo

$$\alpha = 1/\beta = (K - a^2\cos^2(\theta))^{1/2} / (r^2 + K)^{1/2}. \quad (5.35)$$

estes vetores, no entanto, não são paralelamente propagados. Impondo esta condição para combinações destes vetores, obtém-se outros dois vetores que são paralelamente propagados ao longo das geodésicas. Estes novos vetores são dados por

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 \cos(\Psi) - \tilde{\lambda}_3 \sin(\Psi), \quad (5.36)$$

$$\lambda_3 = \tilde{\lambda}_1 \sin(\Psi) + \tilde{\lambda}_3 \cos(\Psi), \quad (5.37)$$

com Ψ dado pela seguinte equação:

$$\dot{\Psi} = \frac{K^{1/2}}{\Sigma} \left\{ \frac{E(r^2 + a^2) - a\Phi}{r^2 + K} + a \frac{(\Phi - aE \sin^2(\theta))}{K - a^2 \cos^2(\theta)} \right\}. \quad (5.38)$$

Dada esta tetrada, as componentes do tensor de maré são escritas da seguinte maneira:

$$R_{0i0j} = \mathbf{C}(\lambda_0, \lambda_i, \lambda_0, \lambda_j), \quad (5.39)$$

sendo \mathbf{C} o tensor de Weyl. Estas componentes, segundo Pirani [31] são suficientes para calcular a aceleração relativa (campo de maré) entre duas geodésicas em uma dada vizinhança. Na métrica de Kerr para o caso especial de geodésicas equatoriais circulares (isto é, $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta}$ e $\dot{r} = 0$) as componentes não nulas deste campo são as seguintes:

$$R_{0101} = \frac{m_2}{\Sigma^3} \left[1 - 3 \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2} \right) \cos^2(\bar{\Omega}T) \right], \quad (5.40)$$

$$R_{0202} = \frac{m_2}{\Sigma^3} \left[1 - 3 \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2} \right) \sin^2(\bar{\Omega}T) \right], \quad (5.41)$$

$$R_{0303} = \frac{m_2}{\Sigma^3} \left(1 + \frac{3K^2}{\Sigma^2} \right), \quad (5.42)$$

$$R_{0102} = R_{0201} = -\frac{3m_2}{\Sigma^3} \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2} \right) \cos(\bar{\Omega}T) \sin(\bar{\Omega}T), \quad (5.43)$$

sendo $\bar{\Omega} = \Psi/T$:

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{m_2}{\Sigma^3}}, \quad (5.44)$$

e a quarta constante de Carter K :

$$\frac{K}{\Sigma} = \frac{\sqrt{m_2/\Sigma} \pm a/\Sigma}{\left(1 - 3m_2/\Sigma \mp 2a\sqrt{m_2/\Sigma^3} \right)^{1/2}}. \quad (5.45)$$

Estas componentes fornecem o campo de maré tipo-elétrico. O campo de maré tipo-magnético é obtido de forma similar, calculando-se as componentes

$$R_{0ijk} = \mathbf{C}(\lambda_0, \lambda_i, \lambda_j, \lambda_k). \quad (5.46)$$

Os componentes não nulos são dados por

$$R_{0112} = -R_{0201} = R_{0323} = -R_{0332} = \frac{3m_2K}{\Sigma^4} \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2}\right)^{1/2} \cos(\bar{\Omega}T), \quad (5.47)$$

$$R_{0212} = -R_{0221} = R_{0331} = -R_{0313} = \frac{3m_2K}{\Sigma^4} \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2}\right)^{1/2} \text{sen}(\bar{\Omega}T). \quad (5.48)$$

Para $\Sigma \gg m_2$ os campos de maré tipo-elétrico e tipo-magnético em $\mathcal{T} = 0$ se relacionam entre si via um *boost* de Lorentz com velocidade $(m_2/\Sigma)^{1/2}$. Tem-se, por exemplo,

$$R_{0112}|_{\mathcal{T}=0} = -(m_2/\Sigma)^{1/2} [R_{0101} + R_{1212}]_{\mathcal{T}=0} = -(m_2/\Sigma)^{1/2} [2R_{0101} + R_{0202}]_{\mathcal{T}=0}, \quad (5.49)$$

em menor ordem de m_2/d .

No sistema de Lorentz local a métrica do espaço-tempo pode ser escrita como uma expansão em potências da distância \mathcal{R} da linha-mundo geodésica do observador, conforme Manasse e Misner [32]. Os dois tipos de campo de maré determinam a métrica até os termos em $\mathcal{O}(\mathcal{R}^2)$. Explorando-se alguma liberdade de *gauge* [33], a métrica pode ser escrita em coordenadas locais $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ na forma

$$g_{00} = -1 - R_{0i0j}(\mathcal{T})\mathcal{X}^i\mathcal{X}^j + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3), \quad (5.50)$$

$$g_{0i} = -\frac{2}{3}R_{0jik}(\mathcal{T})\mathcal{X}^j\mathcal{X}^k + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3), \quad (5.51)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} [1 - R_{0k0m}(\mathcal{T})\mathcal{X}^k\mathcal{X}^m] + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3), \quad (5.52)$$

sendo $\mathcal{R} = (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)^{1/2}$. Substituindo-se os resultados (5.40) a (5.43), (5.47) e (5.48) tem-se

$$g_{00} = -1 + \frac{m_2}{\Sigma^3} \left[3 \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2}\right) (\mathcal{X}\cos(\bar{\Omega}T) + \mathcal{Y}\text{sen}(\bar{\Omega}T))^2 - \mathcal{R}^2 - \frac{3K^2}{\Sigma^2}\mathcal{Z}^2 \right], \quad (5.53)$$

$$g_{0\mathcal{X}} = \frac{2m_2K}{\Sigma^4} \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2}\right)^{1/2} [(\mathcal{Z}^2 - \mathcal{Y}^2)\text{sen}(\bar{\Omega}T) - \mathcal{X}\mathcal{Y}\cos(\bar{\Omega}T)], \quad (5.54)$$

$$g_{0\mathcal{Y}} = \frac{2m_2K}{\Sigma^4} \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2}\right)^{1/2} [(\mathcal{X}^2 - \mathcal{Z}^2)\cos(\bar{\Omega}T) + \mathcal{X}\mathcal{Y}\text{sen}(\bar{\Omega}T)], \quad (5.55)$$

$$g_{0\mathcal{Z}} = \frac{2m_2K}{\Sigma^4} \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2}\right)^{1/2} (\mathcal{Y}\cos(\bar{\Omega}T) - \mathcal{X}\text{sen}(\bar{\Omega}T))\mathcal{Z}, \quad (5.56)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left\{ 1 + \frac{m_2}{\Sigma^3} \left[3 \left(1 + \frac{K^2}{\Sigma^2}\right) (\mathcal{X}\cos(\bar{\Omega}T) + \mathcal{Y}\text{sen}(\bar{\Omega}T))^2 - \mathcal{R}^2 - \frac{3K^2}{\Sigma^2}\mathcal{Z}^2 \right] \right\} \quad (5.57)$$

A taxa de rotação $\bar{\Omega}$ é correta apenas para partículas teste. A taxa de rotação correta de BN2 no LARF de BN1 é determinada pela métrica pós-newtoniana e pelos requerimentos (i) de que a métrica concorda com a métrica LARF e (ii) o sistema de coordenadas LARF é não-rotante relativo aos sistemas inerciais locais. A taxa de rotação é então calculada transformando-se a métrica pós-newtoniana em coordenadas internas e requerendo que as duas métricas coincidam na zona de superposição. A taxa de rotação é, então, dada por

$$\Omega = \omega \left[1 - \frac{m_1m_2}{mR} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right], \quad (5.58)$$

sendo $\epsilon = \sqrt{m/R}$.

O próximo passo é aplicar a métrica (5.53) no caso dos buracos negros muito separados e não-rotantes. Para isso especializa-se esta métrica para o caso em que $a = 0$ e toma-se o limite para m_2/Σ pequeno, utilizando-se apenas os termos de menor ordem em m_2/Σ . Desta forma pode-se substituir Σ por R , $\bar{\Omega}$ por Ω e as coordenadas locais $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ pelas coordenadas internas (T, X, Y, Z) . Além disso, o observador (BN1) possui massa, então os fatores de $(m_2/R)^{1/2}$, que correspondem a um *boost* de Lorentz com baixa velocidade $(m_2/R)^{1/2}$ devem ser corrigidos utilizando-se a velocidade relativa entre os buracos negros, $\epsilon = (m/R)^{1/2}$. Desta forma, deve-se trocar os fatores $(m_2/R)^{1/2}$ por $(m/R)^{1/2}$. Tem-se:

$$g_{00} = -1 + \frac{m_2}{R^3} [3(X \cos(\Omega T) + Y \sin(\Omega T))^2 - \rho^2], \quad (5.59)$$

$$g_{0X} = \frac{2m_2}{R^3} \sqrt{\frac{m}{R}} [(Z^2 - Y^2) \sin(\Omega T) - XY \cos(\Omega T)], \quad (5.60)$$

$$g_{0Y} = \frac{2m_2}{R^3} \sqrt{\frac{m}{R}} [(X^2 - Z^2) \cos(\Omega T) + XZ \sin(\Omega T)], \quad (5.61)$$

$$g_{0Z} = \frac{2m_2}{R^3} \sqrt{\frac{m}{R}} (Y \cos(\Omega T) - X \sin(\Omega T)) Z, \quad (5.62)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left\{ 1 + \frac{m_2}{R^3} [3(X \cos(\Omega T) + Y \sin(\Omega T))^2 - \rho^2] \right\}, \quad (5.63)$$

sendo $\rho = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$. Esta métrica inclui os campos de maré provocados pela presença de BN2, porém não leva em consideração a métrica causada pela presença de BN1. Na zona próxima ao redor de BN1 esta métrica fornece a forma da perturbação em BN1.

O próximo passo é resolver as equações de Einstein linearizadas ao redor da métrica de Schwarzschild para uma perturbação finita no horizonte $\rho = m_1/2$ e tende assintoticamente à métrica (5.59) conforme $\rho/m_1 \rightarrow \infty$. Neste caso, serão utilizadas coordenadas internas esféricas e isotrópicas (T, ρ, θ, ϕ) , de forma que

$$X = \rho \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (5.64)$$

$$Y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (5.65)$$

$$Z = \rho \cos(\theta). \quad (5.66)$$

A métrica de Schwarzschild não perturbada é dada, nestas coordenadas, conforme o seguinte:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - m_1/2\rho}{1 + m_1/2\rho} \right)^2 dT^2 + \left(1 + \frac{m_1}{2\rho} \right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)]. \quad (5.67)$$

A métrica (5.59) nestas coordenadas é dada por:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -dT^2 + d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) - \\ & \frac{4m_2\rho^3}{R^3} \epsilon dT [\cos(\theta) \sin(\phi - \Omega T) d\theta + \sin(\theta) \cos(2\theta) \cos(\phi - \Omega T) d\phi] + \\ & \frac{m_2\rho^2}{R^3} [3\sin^2(\theta) \cos^2(\theta - \Omega T) - 1] [dT^2 + d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)]. \end{aligned} \quad (5.68)$$

A linearidade destas equações de Einstein permite procurar separadamente as soluções correspondendo a campos tipo-elétrico e tipo-magnético. A forma destas perturbações é encontrada resolvendo-se as equações de Einstein linearizadas ordem por ordem em ϵ e utilizando-se o formalismo de Regge-Wheeler [34] para análise de perturbações estacionárias da métrica de Schwarzschild. Neste formalismo, as perturbações são decompostas em modos pares e ímpares e são analisadas em um *gauge* escolhido para simplificar os cálculos. A perturbação tipo-elétrica é uma superposição de modos pares com números angulares $l = 2$ e $m = -2, 0, 2$, enquanto a tipo-magnética é uma superposição de modos ímpares com números angulares $l = 2$ e $m = -1, 1$. Resolvendo-se estas equações com as restrições (i) e (ii) acima tem-se, finalmente, a métrica na Região I próxima a BN1, nas coordenadas isotrópicas (T, X, Y, Z) :

$$g_{00} = -\left(\frac{1 - m_1/2\rho}{1 + m_1/2\rho}\right)^2 + \frac{m_2}{R^3} \left(1 - \frac{m_1}{2\rho}\right)^4 [3(X \cos(\Omega T) + Y \sin(\Omega T))^2 - \rho^2], \quad (5.69)$$

$$g_{0X} = \frac{2m_2}{R^3} \sqrt{\frac{m}{R}} \left(1 - \frac{m_1}{2\rho}\right)^2 \left(1 + \frac{m_1}{2\rho}\right)^4 [(Z^2 - Y^2) \sin(\Omega T) - XY \cos(\Omega T)], \quad (5.70)$$

$$g_{0Y} = \frac{2m_2}{R^3} \sqrt{\frac{m}{R}} \left(1 - \frac{m_1}{2\rho}\right)^2 \left(1 + \frac{m_1}{2\rho}\right)^4 [(X^2 - Z^2) \cos(\Omega T) + XY \sin(\Omega T)], \quad (5.71)$$

$$g_{0Z} = \frac{2m_2}{R^3} \sqrt{\frac{m}{R}} \left(1 - \frac{m_1}{2\rho}\right)^2 \left(1 + \frac{m_1}{2\rho}\right)^4 (Y \cos(\Omega T) - X \sin(\Omega T))Z, \quad (5.72)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{m_1}{2\rho}\right)^4 \left(\delta_{ij} + \frac{m_2}{R^3} [3(X \cos(\Omega T) + Y \sin(\Omega T))^2 - \rho^2] \times \right. \\ \left. \left\{ \left[\left(1 + \frac{m_1}{2\rho}\right)^4 - \frac{2m_1^2}{\rho^2} \right] \delta_{ij} - \frac{2m_1}{\rho} \left(1 + \frac{m_1^2}{4\rho^2}\right) \frac{X^i X^j}{\rho^2} \right\} \right) \quad (5.73)$$

O próximo passo é efetuar a mudança desta métrica de coordenadas internas (T, X, Y, Z) para coordenadas co-rotantes (t, x, y, z) . Isto é feito tomando-se a métrica pós-newtoniana da Região III na zona de superposição e colocando-a em coordenadas internas. A partir deste resultado utiliza-se a transformação inversa para colocar a métrica na Região I, derivada em coordenadas internas, em coordenadas co-rotantes. O resultado é dado por:

$$g_{\mu\nu}(x, y, z) = \sum_{\alpha, \sigma=0}^3 P_{\alpha\sigma}(x, y, z) K_{\mu}^{\alpha}(x, y, z) K_{\nu}^{\sigma}(x, y, z), \quad (5.74)$$

sendo as quantidades $P_{\alpha\sigma}$ dadas de acordo com o seguinte, recuperadas as constantes c e G :

$$P_{00} = - \left(\frac{1 - Gm_1/2c^2\rho}{1 + Gm_1/2c^2\rho} \right) + \frac{Gm_2}{c^2R^3} \left(1 - \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 (3\Gamma^2 - \rho^2) - \frac{4G\epsilon m_2 \Omega \Gamma}{c^4 R^3} \left(1 - \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^2 \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 (2Z^2 - \rho^2) + \frac{\Omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 (\Gamma^2 + \Lambda^2) \quad (5.75)$$

$$P_{10} = P_{01} = - \frac{2\epsilon Gm_2}{c^2 R^3} \left(1 - \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^2 \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \Gamma \Lambda - \Omega \Lambda \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \times \left\{ 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R^3} (3\Gamma^2 - \rho^2) \left[\left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 - \frac{2G^2 m_1^2}{c^4 \rho^2} \right] \right\}, \quad (5.76)$$

$$P_{20} = P_{02} = \frac{2\epsilon Gm_2}{c^2 R^3} \left(1 - \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^2 \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 (\Gamma^2 - Z^2) + \Omega \Gamma \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \times \left\{ 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R^3} (3\Gamma^2 - \rho^2) \left[\left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 - \frac{2Gm_1^2}{c^4 \rho^2} \right] \right\}, \quad (5.77)$$

$$P_{03} = P_{30} = \frac{2\epsilon Gm_2}{c^2 R^3} \left(1 - \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^2 \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \Lambda Z, \quad (5.78)$$

$$P_{11} = \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \left\{ 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R^3} (3\Gamma^2 - \rho^2) \left[\left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 - \frac{2G^2 m_1^2}{c^4 \rho^2} \right] - \frac{2Gm_1}{c^2 \rho^3} \left(1 + \frac{G^2 m_1^2}{4c^4 \rho^2} \right) \Gamma^2 \right\}, \quad (5.79)$$

$$P_{22} = \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \left\{ 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R^3} (3\Gamma^2 - \rho^2) \left[\left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 - \frac{2G^2 m_1^2}{c^4 \rho^2} \right] - \frac{2Gm_1}{c^2 \rho^3} \left(1 + \frac{G^2 m_1^2}{4c^4 \rho^2} \right) \Lambda^2 \right\}, \quad (5.80)$$

$$P_{33} = \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \left\{ 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R^3} (3\Gamma^2 - \rho^2) \left[\left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 - \frac{2G^2 m_1^2}{c^4 \rho^2} \right] - \frac{2Gm_1}{c^2 \rho^3} \left(1 + \frac{G^2 m_1^2}{4c^4 \rho^2} \right) Z^2 \right\}, \quad (5.81)$$

$$P_{12} = P_{21} = - \frac{2G^2 m_1 m_2}{c^4 R^3 \rho^3} \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \left(1 + \frac{G^2 m_1^2}{4c^4 \rho^2} \right) (3\Gamma^2 - \rho^2) \Gamma \Lambda, \quad (5.82)$$

$$P_{13} = P_{31} = - \frac{2G^2 m_1 m_2}{c^4 R^3 \rho^3} \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \left(1 + \frac{G^2 m_1^2}{4c^4 \rho^2} \right) (3\Gamma^2 - \rho^2) \Gamma Z, \quad (5.83)$$

$$P_{23} = P_{32} = - \frac{2G^2 m_1 m_2}{c^4 R^3 \rho^3} \left(1 + \frac{Gm_1}{2c^2\rho} \right)^4 \left(1 + \frac{G^2 m_1^2}{4c^4 \rho^2} \right) (3\Gamma^2 - \rho^2) \Lambda Z. \quad (5.84)$$

As quantidades Z , Γ , Λ , ρ , ϵ e Ω são dadas por

$$Z = z \left(1 + \frac{Gm_2}{c^2 R} - \frac{Gm_2 \xi}{c^2 R^2} \right), \quad (5.85)$$

$$\Gamma = \xi \left(1 + \frac{Gm_2}{c^2 R} \right) - \frac{Gm_2}{2c^2 R^2} (\xi^2 + y^2 - z^2), \quad (5.86)$$

$$\Lambda = y \left[1 + \frac{Gm_2}{c^2 R} \left(1 + \frac{m_2}{2m} \right) \right], \quad (5.87)$$

$$\rho = (\Gamma^2 + \Lambda^2 + Z^2)^2, \quad (5.88)$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{Gm}{R}}, \quad (5.89)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{Gm}{r^3}} \left(1 - \frac{Gm_1 m_2}{c^2 m R} \right), \quad (5.90)$$

sendo $\xi = x - m_2 R/m$. Finalmente, as quantidades K_α^β são dadas por

$$K_0^0 = c - \frac{Gm_2}{cR} \left(1 + \frac{m_2}{2m} \right), \quad K_1^0 = \frac{\epsilon Gm_2 y}{c^3 R^2} \left(1 + \frac{m_1}{m} - \frac{3\xi}{R} \right), \quad (5.91)$$

$$K_2^0 = -\frac{\epsilon}{c} \left[\frac{m_2}{m} + \frac{Gm_2}{c^2 R} \left(3 + \frac{m_1}{m} + \frac{m_2^2}{2m^2} \right) \right] + \frac{\epsilon Gm_2}{c^3 R^2} \left[\left(1 + \frac{m_1}{m} \right) \xi - \frac{1}{2R} (3\xi^2 - 3y^2 - z^2) \right] \quad (5.92)$$

$$K_3^0 = \frac{\epsilon Gm_2}{c^3 R^3} yz, \quad (5.93)$$

$$K_0^1 = 0, \quad K_1^1 = 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R} - \frac{Gm_2 \xi}{c^2 R^2}, \quad K_2^1 = -\frac{Gm_2 y}{c^2 R^2}, \quad K_3^1 = \frac{Gm_2 z}{c^2 R^2}, \quad (5.94)$$

$$K_0^2 = 0, \quad K_1^2 = 0, \quad K_2^2 = 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R} \left(1 + \frac{m_2}{2m} \right), \quad K_3^2 = 0, \quad (5.95)$$

$$K_0^3 = 0, \quad K_1^3 = -\frac{Gm_2 z}{c^2 R^2}, \quad K_2^3 = 0, \quad K_3^3 = 1 + \frac{Gm_2}{c^2 R} - \frac{Gm_2 \xi}{c^2 R^2}. \quad (5.96)$$

Métrica na Região III

Na região III utilizaremos a métrica na aproximação pós-newtoniana 1PN em coordenadas harmônicas para duas partículas pontuais. Esta métrica já foi calculada em um trabalho de Blanchet, Faye e Ponsot [35]. Neste trabalho as equações de movimento são computadas até a ordem pós-newtoniana 5/2 (2,5PN), onde os efeitos de reação radiativa começam a aparecer [35]. No presente trabalho, contudo, será utilizada a aproximação até 1PN, utilizando-se os termos de ordem 2,5 desprezados como estimativa dos erros na métrica 1PN. Esta aproximação é suficiente para descrever, em primeira aproximação, o problema de Hill, problema de três corpos restrito e cujas órbitas envolvidas são circulares.

Vamos descrever a seguir como é obtida esta métrica. Dado o tensor de energia-momentum T^{ab} , assume-se que suas componentes possuem suporte espacialmente compacto (isto é, suas componentes são nulas fora de um conjunto compacto de coordenadas espaciais) e corresponde

fisicamente a um sistema auto-gravitante se movendo lentamente e sem a ação de grandes pressões. De outra forma, $|T^{0i}/T^{00}| \sim \lambda$, $|T^{ij}/T^{00}| \sim \lambda^2$ e $U/c^2 \sim \lambda^2$, sendo U o potencial newtoniano associado e λ um parâmetro pós-newtoniano pequeno que tende a zero conforme a velocidade da luz se torna muito maior do que a velocidade característica do sistema ($\lambda \sim 1/c$). Neste trabalho designaremos um termo pós-newtoniano de ordem λ^n através da notação $\mathcal{O}(c^{-n})$.

A equação de Einstein é dada por

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (5.97)$$

sendo G_{ab} o tensor de Einstein [36]. Em coordenadas harmônicas esta equação assume a seguinte forma (utilizando-se a notação de Einstein, na qual símbolos repetidos na parte inferior e superior indicam somatório):

$$\begin{aligned} -g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta, \mu\nu} + g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \left(g_{\alpha\mu, \rho} g_{\beta\nu, \sigma} - g_{\alpha\mu, \rho} g_{\beta\sigma, \nu} + g_{\alpha\mu, \rho} g_{\nu\sigma, \beta} + g_{\beta\mu, \rho} g_{\nu\sigma, \alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\rho, \alpha} g_{\nu\sigma, \beta} \right) \\ = \frac{16\pi G}{c^4} \left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Segundo o trabalho de Fock [38], a métrica 1PN é simplificada utilizando a aproximação de zona próxima, $\partial_0 g_{\mu\nu}^{in} / \partial_i g_{\mu\nu}^{in} = \mathcal{O}(c^{-1})$, para a variação da métrica nos já algebricamente pequenos termos não lineares na equação (5.98) (apenas as não-linearidades quadráticas da componente tempo-tempo necessitam ser consideradas no nível da aproximação 1PN). Considera-se, portanto, as seguintes expansões:

$$g_{00} = -1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (5.99)$$

$$g_{0i} = g_{0i}^{(3)} + \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (5.100)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (5.101)$$

sendo que o índice entre parênteses se refere à ordem de cada termo. Inserindo estas equações na equação (5.98) a cada ordem e depois juntando os resultados obtém-se

$$\square \ln(-g_{00}^{in}) = \frac{8\pi G}{c^4} (T^{00} + T^{ss}) + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (5.102)$$

$$\square g_{0i}^{in} = \frac{16\pi G}{c^4} T^{0i} + \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (5.103)$$

$$\square g_{ij}^{in} = -\frac{8\pi G}{c^4} \delta_{ij} (T^{00} + T^{ss}) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (5.104)$$

sendo $\square \equiv \nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2$ o d'Alembertiano para a métrica plana, $\eta^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$, e T^{ss} a soma das componentes espaciais do tensor energia-momentum, ou seja,

$$T^{ss} = \sum_{i=1}^3 T^{ii}. \quad (5.105)$$

Neste ponto é conveniente introduzir uma “densidade de massa gravitacional ativa”, dada por

$$\sigma = \frac{T^{00} + T^{ss}}{c^2}, \quad (5.106)$$

e uma “densidade de corrente de massa ativa”, dada por

$$\sigma_i = \frac{T^{0i}}{c}. \quad (5.107)$$

Dentro da acurácia da métrica 1PN é possível expressar σ em termos das componentes mistas do tensor energia-momentum:

$$\sigma = \frac{\sqrt{-g}}{c^2} (-T_0^0 + T_s^s) [1 + \mathcal{O}(c^{-4})], \quad (5.108)$$

sendo $g = \det(g_{\mu\nu})$ o determinante da métrica. Esta equação está relacionada à massa de Tolman, válida para sistemas estacionários [39]. A lei de conservação de massa local, $\nabla_\mu T^{0\mu} = 0$, assegura a conservação da “massa gravitacional ativa” em ordem newtoniana:

$$\partial_i \sigma + \sum_{i=1}^3 \partial_i \sigma_i = \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (5.109)$$

Imitando-se o procedimento no caso newtoniano introduz-se os seguintes potenciais retardados “escalar” e “vetorial” gerados por σ e σ_i :

$$V^{in}(\mathbf{x}, t) = G \int \frac{d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \sigma(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c), \quad (5.110)$$

$$V_i^{in}(\mathbf{x}, t) = G \int \frac{d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \sigma_i(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c). \quad (5.111)$$

Desta forma, as soluções do sistema de equações (5.102) a (5.104) são dadas por

$$g_{00}^{in} = -1 + \frac{2}{c^2} V^{in} - \frac{2}{c^4} (V^{in})^2 + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (5.112)$$

$$g_{0i}^{in} = -\frac{4}{c^3} V_i^{in} + \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (5.113)$$

$$g_{ij}^{in} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2} V^{in} \right) + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (5.114)$$

Vamos aplicar esta solução considerando-se um sistema binário de duas partículas pontuais. O tensor energia-momentum é dado por

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \mu_1(t) v_1^\mu(t) v_1^\nu(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t)) + \mu_2(t) v_2^\mu(t) v_2^\nu(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2(t)). \quad (5.115)$$

Nesta equação δ é a distribuição de Dirac em três dimensões, \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 são as trajetórias dos dois corpos (em coordenadas harmônicas), $v_1^\mu = (c, \mathbf{v}_1)$ e $v_2^\mu = (c, \mathbf{v}_2)$, sendo $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{x}_1/dt$ e $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{x}_2/dt$ as velocidades das coordenadas. A quantidade μ_A ($A=1,2$) representa a massa efetiva do corpo A , definida por

$$\mu_A(t) = \frac{m_A}{\sqrt{g g_{\rho\sigma} \frac{v_A^\rho v_A^\sigma}{c^2}}}. \quad (5.116)$$

Convém também definir a seguinte quantidade:

$$\tilde{\mu}_A(t) = \left[1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right] \mu_A(t). \quad (5.117)$$

Em ordem newtoniana, tem-se:

$$\mu_A = m_A + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (5.118)$$

$$\tilde{\mu}_A = m_A + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (5.119)$$

$$\sigma = \sum_{A=1}^2 \tilde{\mu}_A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (5.120)$$

$$\sigma_i = \sum_{A=1}^2 \mu_A v_a^i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) + \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (5.121)$$

O fato de se utilizar cargas pontuais faz com que existam singularidades no tensor energia-momentum, as quais precisam ser, de alguma forma, superadas. Neste trabalho será utilizada a regularização de Hadamard. A regularização de Hadamard [40, 41] é baseada na parte finita de funções que admitem um tipo especial (“temperado”) de singularidade.

Vamos considerar uma classe de funções F dependendo do ponto \mathbf{x} assim como da localização das fontes \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , e admitindo que, quando o ponto se aproxima de uma das fontes ($r_A = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_A| \rightarrow 0$, $A = 1, 2$) existe uma expansão do seguinte tipo:

$$F(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{-k_0 \leq k \leq 0} r_A^k f_k(\mathbf{n}_A; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{O}(r_A), \quad (5.122)$$

com k inteiro. Define-se o valor da função na posição da fonte A como a parte finita de Hadamard, que é a média em respeito às direções $\mathbf{n}_A = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A)/r_A$, para cada \mathbf{x} , no limite $r_A \rightarrow 0$, do termo de ordem zero na expansão (5.122), ou seja,

$$(F)_A \equiv F(\mathbf{x}_A; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \int \frac{d\Omega(\mathbf{n}_A)}{4\pi} f_0(\mathbf{n}_A; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (5.123)$$

Além disso utilizaremos a parte finita de Hadamard para dar sentido à integração espacial do produto entre F e a função delta de Dirac centrada na posição da fonte 1, uma vez que F é singular no suporte desta função. Define-se

$$\int d^3\mathbf{x} F(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \equiv (F)_A, \quad (5.124)$$

com $(F)_A$ dado na equação (5.123).

Vamos considerar os potenciais V e V_i em ordem newtoniana, dados por

$$V = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (5.125)$$

$$V_i = \frac{Gm_1}{r_1} v_1^i + \frac{Gm_2}{r_2} v_2^i + \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (5.126)$$

Estes potenciais são infinitos no ponto A , mas aplicando a regra (5.123) tem-se, para a parte finita:

$$(V)_A = \frac{Gm_2}{r_{AB}} + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (5.127)$$

$$(V_i)_A = \frac{Gm_2}{r_{AB}} v_B^i + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (5.128)$$

sendo $r_{AB} = |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|$, $A \neq B$. Este resultado concorda com o resultado newtoniano. Aplicando a regra (5.124) tem-se

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \sigma V = \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}} + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (5.129)$$

que também está de acordo com o resultado newtoniano.

Vamos derivar as equações de movimento do sistema binário em ordem reduzida, o que significa que, no resultado final, todas as acelerações e respectivas derivadas são substituídas pelos funcionais explícitos dados por equações uma ordem menor. Em outras palavras, para obter as equações de movimento na aproximação 1PN as equações de movimento do sistema binário serão dadas em ordem 0P, ou seja, em ordem newtoniana. Em coordenadas harmônicas tem-se:

$$\frac{dv_1^i}{dt} = -\frac{Gm_2}{r_{12}^3} n_{12}^i, \quad (5.130)$$

$$\frac{dv_2^i}{dt} = -\frac{Gm_1}{r_{12}^3} n_{21}^i. \quad (5.131)$$

Para obter a métrica na expansão 1PN os potenciais retardados das equações (5.110) devem ser conhecidos até a ordem 1PN. Substituindo as densidades de massa e corrente de massa gravitacional ativa e expandindo as integrais tem-se

$$V = G \int \frac{d^3\mathbf{z}}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} \sum_{A=1}^2 \tilde{\mu}_A(t_R) \delta[\mathbf{z} - \mathbf{y}_A(t_R)] \quad (5.132)$$

$$= G \sum_{A=1}^2 \left[\frac{\tilde{\mu}_A}{r_A} - \frac{1}{c} \partial_t \tilde{\mu}_A + \frac{1}{2c^2} \partial_t^2 (r_A \tilde{\mu}_A) - \frac{1}{6c^3} \partial_t^3 (r_A^2 \tilde{\mu}_A) \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (5.133)$$

sendo que o símbolo ∂_t^m representa derivada parcial de ordem m com relação ao tempo.

Vamos derivar $\tilde{\mu}_A$ em ordem 1PN. Tem-se, nesta aproximação:

$$g = -1 - \frac{4}{c^2} (V)_A + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (5.134)$$

$$g_{\rho\sigma} \frac{v_A^\rho v_A^\sigma}{c^2} = -1 + \frac{2}{c^2} (V)_A + \frac{v_A^2}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (5.135)$$

sendo que os potenciais devem ser calculados na localização do ponto A , utilizando-se a regra (5.123). Segundo (5.117), então, tem-se:

$$\tilde{\mu}_A = m_A \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(-(V)_A + \frac{3}{2} v_A^2 \right) \right]. \quad (5.136)$$

Inserindo $(V)_A$ em ordem newtoniana, tem-se

$$\tilde{\mu}_A = m_A \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{Gm_B}{r_{AB}} + \frac{3}{2}v_A^2 \right) \right], \quad (5.137)$$

sendo $A \neq B$. Inserindo, por sua vez, estes valores na expressão de V em (5.132) tem-se

$$V = \sum_{A=1}^2 Gm_A \left\{ \frac{1}{r_A} + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{(n_A v_A)^2}{2} + \frac{2}{r_A} v_A^2 + \frac{Gm_B}{4} \left(-\frac{r_A}{r_{AB}^3} - \frac{5}{r_A r_{AB}} + \frac{r_B^2}{r_A r_{AB}^3} \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(c^{-3}), \quad (5.138)$$

sendo, novamente, $A \neq B$. Para V_i basta a aproximação newtoniana, ou seja,

$$V_i = \sum_{A=1}^2 \frac{Gm_A}{r_A} v_A^i + \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (5.139)$$

Desta forma a métrica 1PN é dada por

$$g_{00} = -1 + \sum_{A=1}^2 \left\{ \frac{2}{c^2} \frac{Gm_A}{r_A} + \frac{1}{c^4} \left[\frac{Gm_A}{r_A} [-(n_A v_A)^2 + 4v_A^2] - 2 \frac{G^2 m_A^2}{r_A^2} + G^2 m_A m_B \left(-\frac{2}{r_A r_B} - \frac{r_A}{2r_{AB}^3} + \frac{r_A^2}{2r_B r_{AB}^3} - \frac{5}{2r_B r_{AB}} \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (5.140)$$

$$g_{0i} = -\frac{4}{c^3} \sum_{A=1}^2 \frac{Gm_A}{r_A} v_A^i + \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (5.141)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{2}{c^2} \sum_{A=1}^2 \frac{Gm_A}{r_A} \right) \delta_{ij} + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (5.142)$$

Como já foi dito anteriormente, nesta aproximação o movimento do sistema binário é dado em ordem newtoniana. Dentro desta aproximação pode-se considerar o caso especial no qual os dois corpos massivos descrevem órbitas circulares no plano $z = 0$ ao redor do centro de massa do sistema, de forma que $r_{AB} = R = \text{constante}$. Tomando-se como origem do sistema de coordenadas o centro de massa do sistema binário tem-se

$$\mathbf{x}_1 = \frac{m_2}{m} \mathbf{R}(t), \quad (5.143)$$

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{m_1}{m} \mathbf{R}(t), \quad (5.144)$$

sendo \mathbf{R} dado por

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = R(\cos \omega t, \sin \omega t, 0), \quad (5.145)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm}{R^3}}. \quad (5.146)$$

Utilizando estas definições a métrica é dada por

$$g_{00} = -1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) - \frac{2}{c^4} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right)^2 + \frac{Gm_1}{c^4 r_1} [-(n_1 v_1)^2 + 4v_1^2] + \frac{Gm_2}{c^4 r_2} [-(n_2 v_2)^2 + 4v_2^2] - 2 \frac{G^2 m_1 m_2}{c^4 R} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{G^2 m_1 m_2}{c^4 R^3} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (5.147)$$

$$g_{0i} = -\frac{4}{c^3} \left(\frac{Gm_1}{r_1} v_1^i + \frac{Gm_2}{r_2} v_2^i \right) + \mathcal{O}(c^{-5}), \quad (5.148)$$

$$g_{ij} = \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \right] \delta_{ij} + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (5.149)$$

Considerando coordenadas co-rotantes (t', x', y', z') dadas por

$$t = t', \quad (5.150)$$

$$x = x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t', \quad (5.151)$$

$$y = x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t', \quad (5.152)$$

$$z = z'. \quad (5.153)$$

Nestas coordenadas tem-se $\mathbf{R} = R(1, 0, 0)$. A métrica, neste novo sistema de coordenadas, é dada por

$$g_{0'0'} = -1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r'_1} + \frac{Gm_2}{r'_2} \right) - \frac{2}{c^4} \left(\frac{Gm_1}{r'_1} + \frac{Gm_2}{r'_2} \right)^2 + \frac{Gm_1 m_2}{c^4 m R} \left[3 \left(\frac{Gm_2}{r'_1} + \frac{Gm_1}{r'_2} \right) - \left(\frac{Gm_2}{r'_1{}^3} + \frac{Gm_1}{r'_2{}^3} \right) - 2 \left(\frac{Gm}{r'_1} + \frac{Gm}{r'_2} \right) \right] - 7 \frac{Gm_1 m_2}{c^4 m R^2} \left(\frac{Gm}{r'_1} - \frac{Gm}{r'_2} \right) x + \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r'_1} + \frac{Gm_2}{r'_2} \right) \right] \frac{\omega^2}{c^2} (x^2 + y^2), \quad (5.154)$$

$$g_{0'1'} = -\omega \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r'_1} + \frac{Gm_2}{r'_2} \right) \right] y, \quad (5.155)$$

$$g_{0'2'} = \omega \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r'_1} + \frac{Gm_2}{r'_2} \right) \right] x - 4 \frac{Gm_1 m_2}{c^4 m} \omega R \left(\frac{Gm}{r'_1} - \frac{Gm}{r'_2} \right), \quad (5.156)$$

$$g_{0'3'} = 0, \quad (5.157)$$

$$g_{i'j'} = \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r'_1} + \frac{Gm_2}{r'_2} \right) \right] \delta_{i'j'}. \quad (5.158)$$

Deixando as linhas $(')$ de lado pode-se finalmente escrever esta métrica em termos do ele-

mento de linha

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left\{ -1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) - \frac{2}{c^4} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right)^2 + \right. \\
& \frac{Gm_1m_2}{c^4mR} \left[3 \left(\frac{Gm_2}{r_1} + \frac{Gm_1}{r_2} \right) - \left(\frac{Gm_2}{r_1^3} + \frac{Gm_1}{r_2^3} \right) - 2 \left(\frac{Gm}{r_1} + \frac{Gm}{r_2} \right) \right] - \\
& 7 \frac{Gm_1m_2}{c^4mR^2} \left(\frac{Gm}{r_1} - \frac{Gm}{r_2} \right) x + \\
& \left. \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \right] \frac{\omega^2}{c^2} (x^2 + y^2) \right\} dt^2 \\
& + 2\omega \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \right] dt(xdy - ydx) \\
& - 8 \frac{Gm_1m_2}{c^4m} \omega R \left(\frac{Gm}{r_1} - \frac{Gm}{r_2} \right) dt dy \\
& + \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{5.159}
\end{aligned}$$

Métrica nas Outras Regiões

Por completeza vamos fornecer a métrica nas regiões II e IV. Na região II a métrica é dada de forma análoga à métrica da região I, pois se trata de um sistema similar, apenas trocando-se os buracos negros de lugar. A métrica, então, é dada por

$$g_{\mu\nu}(x, y, z) = \sum_{\alpha, \sigma=0}^3 \bar{P}_{\alpha\sigma}(-x, -y, z) \bar{K}_{\mu}^{\alpha}(-x, -y, z) \bar{K}_{\nu}^{\sigma}(-x, -y, z), \tag{5.160}$$

sendo que $\bar{P}_{\alpha\sigma}$ e \bar{K}_{ν}^{σ} são dados pelas equações (5.76) a (5.96) trocando-se os subíndices 1 por 2, além da troca de sinais de x e y , indicando a troca da posição de BN1 por BN2.

Vamos apenas deixar indicada a métrica da região IV, que corresponde à região de radiação

gravitacional gerada por dois buracos negros, a qual é dada de acordo com o seguinte:

$$\begin{aligned}
g_{00} = & -1 + \frac{2m}{r} \left(1 - \frac{m_1 m_2}{2mR}\right) - \frac{2m^2}{r^2} + A + \frac{2\epsilon^2}{R} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) B \\
& - 2\epsilon (x \sin(\omega r) + y \cos(\omega r)) D + \omega^2 (x^2 + y^2) E \\
& + \frac{\epsilon^4}{R^2} (x \sin(\omega r) + y \cos(\omega r))^2 N + \epsilon^2 (x \sin(\omega r) + y \cos(\omega r))^2 S \\
& - \frac{12m_1 m_2 \epsilon^5}{mr^2 R^2} \frac{\delta m}{m} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) (x \sin(\omega r) + y \cos(\omega r)),
\end{aligned} \tag{5.161}$$

$$\begin{aligned}
g_{0x} = & \epsilon B \sin(\omega r) + R D \cos(\omega r) - \omega E y + \frac{\epsilon^3}{R} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) N \sin(\omega r) \\
& - \epsilon R (x \sin(\omega r) + y \cos(\omega r)) S \cos(\omega r) \\
& + \frac{6m_1 m_2 \epsilon^4}{r^2 R m} \frac{\delta m}{m} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) (x \cos(2\omega r) - y \sin(2\omega r)),
\end{aligned} \tag{5.162}$$

$$\begin{aligned}
g_{0y} = & \epsilon B \cos(\omega r) + R D \sin(\omega r) + \omega E x + \frac{\epsilon^3}{R} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) N \cos(\omega r) \\
& + \epsilon R (x \sin(\omega r) + y \cos(\omega r)) S \sin(\omega r) \\
& - \frac{6m_1 m_2 \epsilon^4}{r^2 R m} \frac{\delta m}{m} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) (x \sin(2\omega r) + y \cos(2\omega r)),
\end{aligned} \tag{5.163}$$

$$g_{0z} = 0, \tag{5.164}$$

$$\begin{aligned}
g_{xx} = & E + \frac{m^2 x^2}{r^4} + \epsilon^2 N \sin^2(\omega r) + R^2 S \cos^2(\omega r) \\
& + \frac{6m_1 m_2 \epsilon^3}{mr^2} \frac{\delta m}{m} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) \sin(2\omega r),
\end{aligned} \tag{5.165}$$

$$\begin{aligned}
g_{yy} = & E + \frac{m^2 y^2}{r^4} + \epsilon^2 N \cos^2(\omega r) + R^2 S \sin^2(\omega r) \\
& - \frac{6m_1 m_2 \epsilon^3}{mr^2} \frac{\delta m}{m} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) \sin(2\omega r),
\end{aligned} \tag{5.166}$$

$$g_{zz} = E + \frac{m^2 z^2}{r^4}, \tag{5.167}$$

$$g_{xy} = \frac{6m_1 m_2 \epsilon^3}{mr^2} \frac{\delta m}{m} (x \cos(\omega r) - y \sin(\omega r)) \cos(2\omega r), \tag{5.168}$$

$$g_{xz} = \frac{m^2}{r^4} x z, \tag{5.169}$$

$$g_{yz} = \frac{m^2}{r^4} y z, \tag{5.170}$$

sendo $\delta m = m_1 - m_2$. As quantidades A , B , D , E , N e S são dadas por

$$\begin{aligned}
A = & \frac{m_1 m_2}{m r^3} \left\{ 2\epsilon^2 \left[(x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r))^2 - (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 \right] + \right. \\
& \frac{6R\epsilon}{r} (x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) + \\
& \left. \frac{R^2}{r^2} \left[3(x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 - r^2 \right] \right\} + \\
& \frac{m_1 m_2}{m r^4} \frac{\delta m}{m} \left\{ \frac{R^3}{r^3} (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) \left[3r^2 - 5(x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 \right] + \right. \\
& \frac{3R^2\epsilon}{r^2} (x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) \left[r^2 - 5(x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 \right] + \\
& \frac{2m}{r} (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) \times \\
& \left. \left[3(x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 - 6(x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) - r^2 \right] + \right. \\
& \left. \epsilon^3 (x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) \left[7(x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 - 2(x \operatorname{sen}(\omega r) + \right. \right. \\
& \left. \left. y \operatorname{cos}(\omega r)) - r^2 \right] \right\}, \tag{5.171}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & -\frac{4m_1 m_2}{m r^2} \left[\epsilon (x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) + \frac{R}{r} (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) \right] + \frac{2m_1 m_2}{m r^3} \\
& \times \frac{\delta m}{m} \left\{ \epsilon^2 \left[2(x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r))^2 - 3(x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 \right] + \frac{6R\epsilon}{r} \right. \\
& \times (x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) + \frac{R^2}{r^2} \left[3(x \operatorname{cos}(\omega r) - \right. \\
& \left. y \operatorname{sen}(\omega r))^2 - r^2 \right], \tag{5.172}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & \frac{2m_1 m_2 \epsilon^2}{r^2} \left(\frac{2}{R} (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) - \frac{1}{r} \frac{\delta m}{m} \left\{ \frac{4\epsilon}{R} (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) \right. \right. \\
& \left. \left. \times (x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) + \frac{1}{r} \left[3(x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r))^2 - r^2 \right] \right\} \right) \tag{5.173}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E = & 1 + \frac{2m}{r} \left(1 - \frac{m_1 m_2}{2mR} \right) + \frac{m^2}{r^2} + A + \\
& \frac{2m_1 m_2 \epsilon^2}{m r^2} \frac{\delta m}{m} \left[\frac{R}{r} (x \operatorname{cos}(\omega r) - y \operatorname{sen}(\omega r)) + \epsilon (x \operatorname{sen}(\omega r) + y \operatorname{cos}(\omega r)) \right], \tag{5.174}
\end{aligned}$$

$$N = \frac{4m_1m_2}{mr} \left\{ 1 - \frac{\delta m}{m} \left[\frac{\epsilon}{r} (x \text{sen}(\omega r) + y \text{cos}(\omega r)) + \frac{R}{r^2} (x \text{cos}(\omega r) - y \text{sen}(\omega r)) \right] \right\}, \quad (5.175)$$

$$S = \frac{2m_1m_2\epsilon^2}{mrR} \left\{ -\frac{2}{R} + \frac{1}{r} \frac{\delta m}{m} \left[\frac{\epsilon}{R} (x \text{sen}(\omega r) + y \text{cos}(\omega r)) + \frac{1}{r} (x \text{cos}(\omega r) - y \text{sen}(\omega r)) \right] \right\}. \quad (5.176)$$

Equações de Movimento na Região III

Vamos considerar o movimento do corpo limitado apenas à Região III, de forma que precisaremos utilizar apenas a métrica na aproximação pós-newtoniana derivada anteriormente. Dada esta métrica, o movimento de um corpo de massa desprezível é dado através das curvas geodésicas. As equações que descrevem estas curvas estão descritas em qualquer livro de Relatividade Geral, como o de Wald [36], e são dadas por:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (5.177)$$

sendo τ um parâmetro da curva.

Desta forma, as equações de movimento são dadas através das seguintes equações, já parametrizadas pela coordenada temporal t , conforme Weinberg [37]:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] \frac{dx^i}{dt}. \quad (5.178)$$

Utilizando a métrica (5.159) obtém-se finalmente as seguintes equações de movimento,

considerando-se o movimento do corpo de massa desprezível apenas no plano $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{Gm_1}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{Gm_2}{r_2^3}(x-x_2) + \omega^2x + 2\omega\frac{dy}{dt} + \\
&\frac{1}{c^2} \left\{ \left[\frac{Gm_1}{r_1^3}(x-x_1) + \frac{Gm_2}{r_2^3}(x-x_2) \right] \left[4\frac{Gm_1}{r_1} + 4\frac{Gm_2}{r_2} - \omega^2(x^2+y^2) \right] + \right. \\
&2 \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \omega^2x + \frac{Gm_1m_2}{mR} \left[\frac{Gm_1}{r_1^3}(x-x_1) + \frac{Gm_2}{r_2^3}(x-x_2) - \right. \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{Gm_2}{r_1^3}(x-x_1) + \frac{Gm_1}{r_2^3}(x-x_2) \right) + \\
&\frac{3}{2} \left(\frac{Gm_2}{r_1^5}(x-x_1) + \frac{Gm_1}{r_2^5}(x-x_2) \right) + \\
&\left. \frac{7}{2} \left(\frac{Gm}{r_1^3}(x-x_1) + \frac{Gm}{r_2^3}(x-x_2) \right) \frac{x}{R} - \frac{7Gm}{2R} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right] - \\
&\left[\frac{Gm_1}{r_1^3}(y^2+x(x-x_1)) + \frac{Gm_2}{r_2^3}(y^2+x(x-x_2)) \right. \\
&- 2 \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \left. \right] 2\omega\frac{dy}{dt} + \\
&\left(\frac{Gm_1}{r_1^3}(x-x_1) + \frac{Gm_2}{r_2^3}(x-x_2) \right) \left(3 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) + \\
&4 \left(\frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} \right) y \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \left. \right\},
\end{aligned} \tag{5.179}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{Gm_1}{r_1^3}y - \frac{Gm_2}{r_2^3}y + \omega^2y - 2\omega\frac{dx}{dt} + \\
&\frac{1}{c^2} \left\{ \left[\frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} \right] \left[4\frac{Gm_1}{r_1} + 4\frac{Gm_2}{r_2} - \omega^2(x^2+y^2) \right] y + \right. \\
&2 \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \omega^2y + \frac{Gm_1m_2}{mR} \left[\frac{Gm_1}{r_1^3}y + \frac{Gm_2}{r_2^3}y - \right. \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{Gm_2}{r_1^3} + \frac{Gm_1}{r_2^3} \right) y + \\
&\frac{3}{2} \left(\frac{Gm_2}{r_1^5}y + \frac{Gm_1}{r_2^5}y \right) + \frac{7Gm}{2R} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) xy \left. \right] + \\
&\left[\frac{Gm_1}{r_1^3}(y^2+x(x-x_1)) + \frac{Gm_2}{r_2^3}(y^2+x(x-x_2)) - \right. \\
&2 \left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \right) \left. \right] \omega\frac{dx}{dt} + \\
&\left(\frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} \right) \left(3 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) y + \\
&4 \left(\frac{Gm_1}{r_1^3}(x-x_1) + \frac{Gm_2}{r_2^3}(x-x_2) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{5.180}$$

Estas equações de movimento expressam por si só a dificuldade de se trabalhar com sis-

temas poucos simétricos no âmbito da Relatividade Geral. Estas equações constituem uma aproximação de primeira ordem, uma correção para massas e velocidades não muito superiores às tratáveis de acordo com a mecânica newtoniana. A sua forma complicada valida a utilização dos potenciais pseudo-newtonianos descritos nos capítulos anteriores. De posse destas equações, contudo, é interessante verificar se estes potenciais constituem de fato uma boa aproximação para o caso relativístico. Sabe-se que os potenciais pseudo-newtonianos reproduzem a última órbita estável e a órbita marginalmente ligada. O próximo passo é verificar se de fato a expansão destes potenciais corresponde à expansão pós-newtoniana expressa nas equações (5.179) e (5.180). A expansão do potencial de Paczyński-Wiita fornece o seguinte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{Gm_2}{r_2^3}(x-x_2) + \omega^2x + 2\omega\frac{dy}{dt} + \frac{1}{c^2} \left\{ 4\frac{G^2m_1^2}{r_1^4}(x-x_1) + 4\frac{G^2m_2^2}{r_2^4}(x-x_2) \right\}, \quad (5.181)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r_1^3}y - \frac{Gm_2}{r_2^3}y + \omega^2y - 2\omega\frac{dx}{dt} + \frac{1}{c^2} \left\{ 4\frac{G^2m_1^2}{r_1^4}y + 4\frac{G^2m_2^2}{r_2^4}y \right\}. \quad (5.182)$$

Através destas equações comprova-se que a utilização de potenciais pseudo-newtonianos fornece apenas uma parte da correção pós-newtoniana, sendo em geral insuficiente para valores maiores da velocidade angular ω .

O próximo passo é obter as equações de Hill na aproximação pós-newtoniana 1PN. A próxima seção é devotada a obter estas equações.

5.2 Equações de Hill na métrica 1PN

Finalmente vamos utilizar as equações de movimento (??) para obter as equações de Hill no contexto desta métrica. Para este propósito utilizaremos o mesmo procedimento adotado no caso newtoniano. Este procedimento consiste em mudar a origem do sistema de coordenadas para a posição do corpo massivo BN2 e fazer uma mudança de escala utilizando o parâmetro μ . De outra forma, fazer a mudança de coordenadas $x \rightarrow x_2 + \mu^{1/3}x, y \rightarrow \mu^{1/3}y$. O próximo passo é encontrar as equações no limite μ pequeno (em ordem $\mathcal{O}(\mu^{1/3})$), correspondendo a $m_2 \ll m_1$. Nesta aproximação as equações são dadas por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt} + \left(3 - \frac{1}{r^3}\right)x + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{5}{\mu^{1/3}} + \left(-12 + \frac{3}{r}\right)x + 2\frac{dy}{dt} \right], \quad (5.183)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} - \frac{y}{r^3} + \frac{1}{c^2} \left[\left(5 + \frac{3}{r}\right)y - 2\frac{dy}{dt} \right], \quad (5.184)$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, conforme já definido anteriormente. Estas equações também podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(1 + \frac{1}{c^2}\right) 2 \frac{dy}{dt} + \left[3 - \frac{1}{r^3} - \frac{12}{c^2} + \frac{3}{c^2 r}\right] x - \frac{5}{c^2 \mu^{1/3}}, \quad (5.185)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) 2 \frac{dx}{dt} + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{5}{c^2} + \frac{3}{c^2 r}\right) y. \quad (5.186)$$

Neste caso, em analogia com os sistemas newtoniano e pseudo-newtonianos, pode-se definir o “potencial” da aproximação pós-newtoniana da seguinte forma:

$$U_{PN}(x, y) = -\frac{1}{r} - \frac{3r}{c^2} - \left(3 - \frac{12}{c^2}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2c^2} y^2 + \frac{5}{\mu^{1/3} c^2} x, \quad (5.187)$$

lembrando que este potencial só é válido na Região III, não havendo a questão do comportamento de U_{PN} no infinito, como se poderia pensar. A constante de Jacobi é dada por

$$C_{PN} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U_{PN}(x, y) \quad (5.188)$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{r} - \frac{3r}{c^2} - \left(3 - \frac{12}{c^2}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2c^2} y^2 + \frac{5}{\mu^{1/3} c^2} x. \quad (5.189)$$

Ao contrário do caso newtoniano, o problema em relatividade geral não é totalmente independente de μ , aparecendo um termo constante dependente deste valor. A explicação para este termo reside no fato de que, o caso relativístico não é totalmente independente da escala como o caso newtoniano. Por exemplo, o potencial relativo a um corpo esférico no caso newtoniano é independente da escala utilizada no problema, mas em Relatividade Geral aparecem fatores como o horizonte de eventos, os quais se modificam no contexto destas transformações.

Outro ponto a se considerar é a questão da velocidade angular aumentar por um fator $(1 + 1/c^2)$ nesta aproximação. Este fato está ligado à precessão dos periélios, um efeito bem conhecido em Relatividade Geral.

As correções relativísticas, como já seria de se esperar, se tornam desprezíveis para sistemas como o sistema Sol-Terra-Lua, em que as massas são pequenas e, portanto, os raios de Schwarzschild correspondentes do Sol e da Terra são muito menores do que as distâncias típicas do sistema (o fator $1/c^2$, por exemplo, está na ordem de 10^{-28}). Contudo, para sistemas massivos e compactos estas correções passam a desempenhar um papel cada vez mais importante. Na próxima seção estudaremos como estas correções podem afetar a estabilidade destes sistemas, quando comparados com o comportamento que teriam em um ambiente puramente newtoniano.

5.3 Estabilidade das Órbitas

Dinâmica Próxima aos Pontos Fixos

Os pontos fixos do problema de Hill com potenciais newtoniano e pseudo-newtonianos já foram calculados, exatamente ou de forma aproximada. Os resultados podem ser vistos nos Capítulos 2, 3 e 4. Para o sistema relativístico o procedimento será análogo.

Estes pontos são obtidos de acordo com a definição dada na seção 1.2. As equações de Hill na métrica 1PN formam um conjunto de duas equações de segunda ordem, e, desta forma, os pontos fixos são encontrados fazendo-se $\dot{x} = \dot{y} = 0$ e $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ nas equações (5.185) e (5.186), obtendo-se:

$$\left(3 - \frac{12}{c^2} - \frac{1}{r_0^3} + \frac{3}{c^2 r_0}\right) x_0 - \frac{5}{c^2 \mu^{1/3}} = 0, \quad (5.190)$$

$$\left(\frac{5}{c^2} - \frac{1}{r_0^3} + \frac{3}{c^2 r_0}\right) y_0 = 0, \quad (5.191)$$

sendo x_0 e y_0 as componentes do ponto fixo e $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. A única solução possível para a equação (5.191) é $y_0 = 0$. Deste modo, tem-se, para a primeira equação:

$$\left(3 - \frac{12}{c^2} - \frac{1}{|x_0|^3} + \frac{3}{c^2 |x_0|}\right) x_0 - \frac{5}{c^2 \mu^{1/3}} = 0, \quad (5.192)$$

Este sistema de equações é bastante complicado, de forma que as suas soluções exatas não são triviais. Contudo, como no caso dos potenciais pseudo-newtonianos, soluções aproximadas podem ser obtidas perturbativamente. Vamos escrever a equação (5.192) de outra forma:

$$\left(3 - \frac{12}{c^2}\right) x_0^3 - \left(\frac{5}{c^2 \mu^{1/3}} \mp \frac{3}{c^2}\right) x_0^2 \mp 1 = 0, \quad (5.193)$$

sendo o sinal superior para $x_0 > 0$ e o sinal inferior para $x_0 < 0$. Não se pode ter $x_0 = 0$, pois o ponto $(0, 0)$ corresponde à singularidade central.

Esta equação possui soluções não triviais para c finito. O fato deste ser um polinômio de terceiro grau possibilita a ocorrência de seis soluções distintas (três x_0 positivos e três x_0 negativos). Caso de fato existam mais do que duas soluções, como já foi dito, podem existir outros pontos hiperbólicos, e, portanto, maior instabilidade.

Pode-se determinar o comportamento destes polinômios de acordo com o valor de r_S^* utilizando cálculo. Vamos considerar primeiramente $x_0 > 0$. Seja a função

$$f(x) = \left(3 - \frac{12}{c^2}\right) x^3 - \left(\frac{5}{\mu^{1/3}} - 3\right) \frac{x^2}{c^2} - 1. \quad (5.194)$$

Os parâmetros μ e c determinam o comportamento do polinômio. As restrições destes parâmetros são $0 < \mu < 1$ e $c > 1$. A primeira restrição indica que o coeficiente $(5/\mu^{1/3} - 3)$ deve ser necessariamente positivo. O coeficiente $(3 - 12/c^2)$ será positivo contanto que $c > 2$. De fato, $c < 2$ equivale a $R < 4Gm_1/c^2$, ou seja, o corpo secundário deve estar muito próximo do corpo primário. Voltando às quantidades definidas no Capítulo 5, o limite inferior entre as regiões I e III é dado por $r_1^{in} < 2Gm_1/c^2$, ou seja, dentro do horizonte de eventos da massa primária. Esta região está, portanto, fora do limite de validade da métrica pós-newtoniana 1PN, de forma que não tem utilidade prática discutir tais casos. De fato estamos estudando o problema de Hill no contexto da métrica 1PN, para qual foi utilizada a hipótese $c \gg 1$. Em estudos posteriores, envolvendo a métrica da Região I, poderão ser discutidos menores valores

de c . Tais casos tem importância no caso de órbitas muito próximas ao horizonte de eventos de buracos negros.

Conforme a discussão acima, os coeficientes de x^3 e de x^2 são positivos. Para $x < 0$, portanto, tem-se $f(x) < 0$, e todas as raízes reais de $f(x)$ devem ser positivas. Além disso, para $x > x_p$, com x_p dado por

$$x_p = \frac{\left(\frac{5}{\mu^{1/3}} - 3\right)}{c^2 \left(3 - \frac{12}{c^2}\right)} + \frac{1}{\left(3 - \frac{12}{c^2}\right)^{1/3}}, \quad (5.195)$$

tem-se $f(x_m) > 0$. Logo, deve existir pelo menos uma raiz entre 0 e x_p . A seguir, vamos tomar a derivada de $f(x)$, $f'(x)$:

$$f'(x) = 3 \left(3 - \frac{12}{c^2}\right) x^2 - 2 \left(\frac{5}{\mu^{1/3}} - 3\right) \frac{x}{c^2}. \quad (5.196)$$

A função $f'(x)$ possui zeros para $x = 0$ e x_m dado por

$$x_m = \frac{2 \left(\frac{5}{\mu^{1/3}} - 3\right)}{3c^2 \left(3 - \frac{12}{c^2}\right)}. \quad (5.197)$$

É fácil ver que o ponto $x = 0$ é um máximo local e o ponto x_m é um mínimo local. O polinômio de terceiro grau $f(x)$ teria mais de uma raiz apenas caso o seu máximo local fosse positivo. Entretanto este não é o caso, pois $f(0) = -1$. Logo, $f(x)$ possui apenas uma raiz real.

Como já foi dito, $f(x) = 0$ não possui solução trivial. A sua solução exata, entretanto, não é tão interessante quanto sua solução aproximada, obtida perturbativamente. Utilizando-se o parâmetro $1/c^2$ como termo perturbativo tem-se, em primeira ordem, para $x > 0$:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{4}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{3} + \frac{5}{3\mu^{1/3}} \right). \quad (5.198)$$

Analogamente, para $x < 0$, tem-se:

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{4}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3\mu^{1/3}} \right). \quad (5.199)$$

Pode-se ver que para $c \rightarrow \infty$ os resultados tendem para o valor do sistema newtoniano ($\pm 1/\sqrt[3]{3}$), como seria de se esperar. Analogamente ao caso dos potenciais pseudo-newtonianos, para c grande os pontos fixos deste sistema diferem pouco dos pontos Lagrangianos do caso newtoniano, sendo afastados da origem de uma pequena distância.

A matriz de estabilidade \mathbf{M} nos pontos fixos é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -B & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.200)$$

sendo A e B , em primeira ordem de $1/c^2$ dados por

$$A = 9 \mp \frac{1}{c^2} \left[12 + \left(-3 \pm \frac{5}{\mu^{1/3}} \right) \left(\sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right) \right] \quad (5.201)$$

$$B = 3 \mp \frac{1}{c^2} \left[4 \pm 5 + 3\sqrt[3]{3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \left(-3 \pm \frac{5}{\mu^{1/3}} \right) \right] \quad (5.202)$$

Note que, no limite $c \rightarrow \infty$ a matriz (5.200) se reduz à matriz estabilidade do caso newtoniano, dada em (2.37). O polinômio característico associado é dado por

$$(\lambda^2 + B)(\lambda^2 - A) = 0. \quad (5.203)$$

Os autovalores desta matriz são

$$\lambda = \pm i\sqrt{B} \quad \text{ou} \quad (5.204)$$

$$\lambda = \pm\sqrt{A}. \quad (5.205)$$

Nos limites deste trabalho as quantidades dentro das raízes em (5.204) são positivas, e os pontos fixos são do tipo sela-centro.

A partir destes resultados pode-se verificar que a dinâmica do problema de Hill em relatividade geral pouco difere da dinâmica newtoniana para c grande. Conforme c decresce (ou seja, as velocidades típicas ficam maiores em relação à velocidade da luz) os pontos fixos se deslocam e os coeficientes de separação se alteram. Contudo, não ocorrem o surgimento de novos pontos críticos, que poderiam causar alterações mais drásticas nesta dinâmica.

Seções de Poincaré

Como pode ser verificado na seção anterior a dinâmica do problema de Hill relativístico difere pouco da dinâmica do sistema newtoniano para $c \gg 1$. Para valores menores de c , contudo, a diferença entre os dois sistemas é apreciável, embora não ocorra nenhuma mudança fundamental no sistema relativístico. Estas diferenças podem ser vistas com auxílio das seções de Poincaré.

As seções de Poincaré do problema de Hill relativístico podem ser vistas nas Figuras 5.2 e 5.3. A diferença fundamental entre as duas figuras, conforme já discutido na Seção 3.1, é a interpretação da variação do parâmetro r_S^* . Para o potencial pseudo-newtoniano de Paczyński-Wiita as duas interpretações fornecem o mesmo resultado. Para o caso relativístico, contudo, o fato da massa de BN1 aumentar acarreta modificações na métrica que refletem em modificações no parâmetro c . De outra forma, aumentando-se a massa de BN1 aumenta-se a velocidade do sistema em relação à velocidade da luz. Isto explica as alterações ocorrerem de forma mais brusca na Figura 5.3.

As seções de Poincaré da Figura 5.2 apresentam pequenas diferenças de acordo com a variação do parâmetro r_S^* . Uma ampliação destas seções está mostrada na Figura 5.4. Pode-se verificar através destas figuras que, de forma geral, conforme aumenta o valor do parâmetro r_S^* , aumenta a quantidade de tori que são destruídos nas seções de Poincaré. Através destas figuras

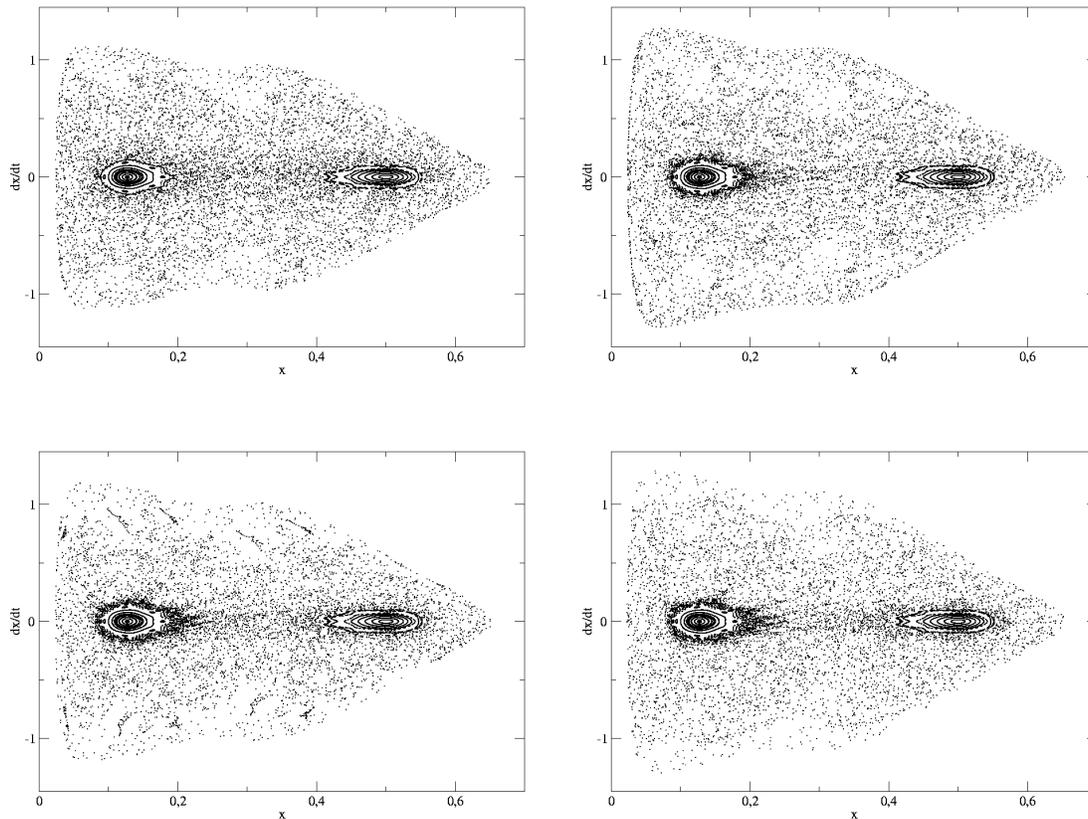


Figura 5.2: Seções de Poincaré para o sistema relativístico para diferentes valores do parâmetro r_S^* . Nesta figura estão mostradas apenas as regiões não regulares com a massa BN1 fixa. Acima, à esquerda: $r_S^* = 5.10^{-12}$. Acima, à direita: $r_S^* = 5.10^{-10}$. Abaixo, à esquerda: $r_S^* = 5.10^{-6}$. Abaixo, à direita: $r_S^* = 5.10^{-4}$.

observa-se que um acréscimo na massa de BN2 em relação à massa de BN1 deixa o sistema mais instável. Conforme já foi explicado no Capítulo 3 isto ocorre pois neste caso a partícula sem massa adquire uma velocidade maior ao orbitar BN2. Contudo, como a massa de BN2 é muito menor do que a de BN1, este efeito é bastante sutil.

No caso da Figura 5.3 as diferenças entre as seções são bem mais evidentes. Uma ampliação das seções pode ser vista na Figura 5.5. Pode-se verificar que, para valores de r_S^* até 5.10^{-6} mais tori de KAM são destruídos. Contudo, a partir deste valor, começam a aparecer ilhas de estabilidade na parte caótica, até o valor em que o problema parece ser totalmente estável. Este comportamento atípico não é observado no caso do potencial de Paciência-Wiita, constituindo uma notável característica do problema na ótica da Relatividade Geral.

Coeficientes de Lyapunov

Repetindo o que já foi dito, os coeficientes de Lyapunov complementam a técnica das seções de Poincaré, permitindo uma comparação numérica entre os diferentes sistemas, além de demon-

strar diretamente a dependência das condições iniciais dos sistemas. Os resultados obtidos para o problema de Hill relativístico estão mostrados nas Figuras 5.6 e 5.7.

A Figura 5.6 mostra os resultados obtidos considerando-se a massa de BN1 fixa. Pode-se ver que não há uma grande variação dos coeficientes, que flutuam em torno do valor obtido para o caso newtoniano, $\lambda = 0,141 \pm 0,001$. Não é possível detectar se existe qualquer tendência de decrescimento ou crescimento dos coeficientes que possam indicar se os sistemas se tornam respectivamente mais estáveis ou instáveis de acordo com a variação do parâmetro r_S^* . Este resultado concorda com os resultados obtidos pelas Seções de Poincaré no sentido em que a variação da massa de BN2 em relação à massa de BN1 produz apenas mudanças sutis no sistema. Isto se deve ao fato da massa de BN2 ser muito menor do que a massa de BN1.

A Figura 5.7 mostra os resultados obtidos considerando-se a massa de BN1 variável. Neste caso as mudanças nos coeficientes de Lyapunov é apreciável. Nesta figura observa-se que o valor do maior coeficiente de Lyapunov aumenta até atingir um máximo para aproximadamente $r_S^* = 7.10^{-6}$, e depois diminui, atingindo valor zero para valores de r_S^* maiores do que 10^{-5} . Este resultado confirma o que foi obtido a partir das Seções de Poincaré, segundo o qual a instabilidade do sistema atinge um máximo para depois diminuir e atingir um estado em que o sistema se torna estável. Esta característica do sistema no âmbito da Relatividade Geral é bastante singular, e é bastante diferente do resultado obtido para o caso do potencial de Pacziński-Wiita, que foi utilizado para mimetizar características inerentes da Relatividade Geral.

Dimensão Fractal

A Dimensão Fractal fornece informações sobre a estabilidade do sistema no caso de órbitas abertas. Os resultados obtidos para o problema de Hill relativístico estão mostrados nas Figuras 5.8 e 5.9.

Nos dois casos, tanto para a massa de BN1 fixa (Figura 5.8) ou variável (Figura 5.9), não existe uma correspondência clara entre a instabilidade no caso das órbitas limitadas e a sensibilidade às condições iniciais no caso das órbitas abertas. Embora no caso dos sistemas newtoniano e com potenciais pseudo-newtonianos estes resultados aparentem possuir correlação com os respectivas seções de Poincaré e coeficientes de Lyapunov, não é clara a ligação entre estas propriedades. Um complicador mais grave é o fato destas dimensões serem obtidas com uma incerteza muito grande, o que acaba prejudicando a sua interpretação.

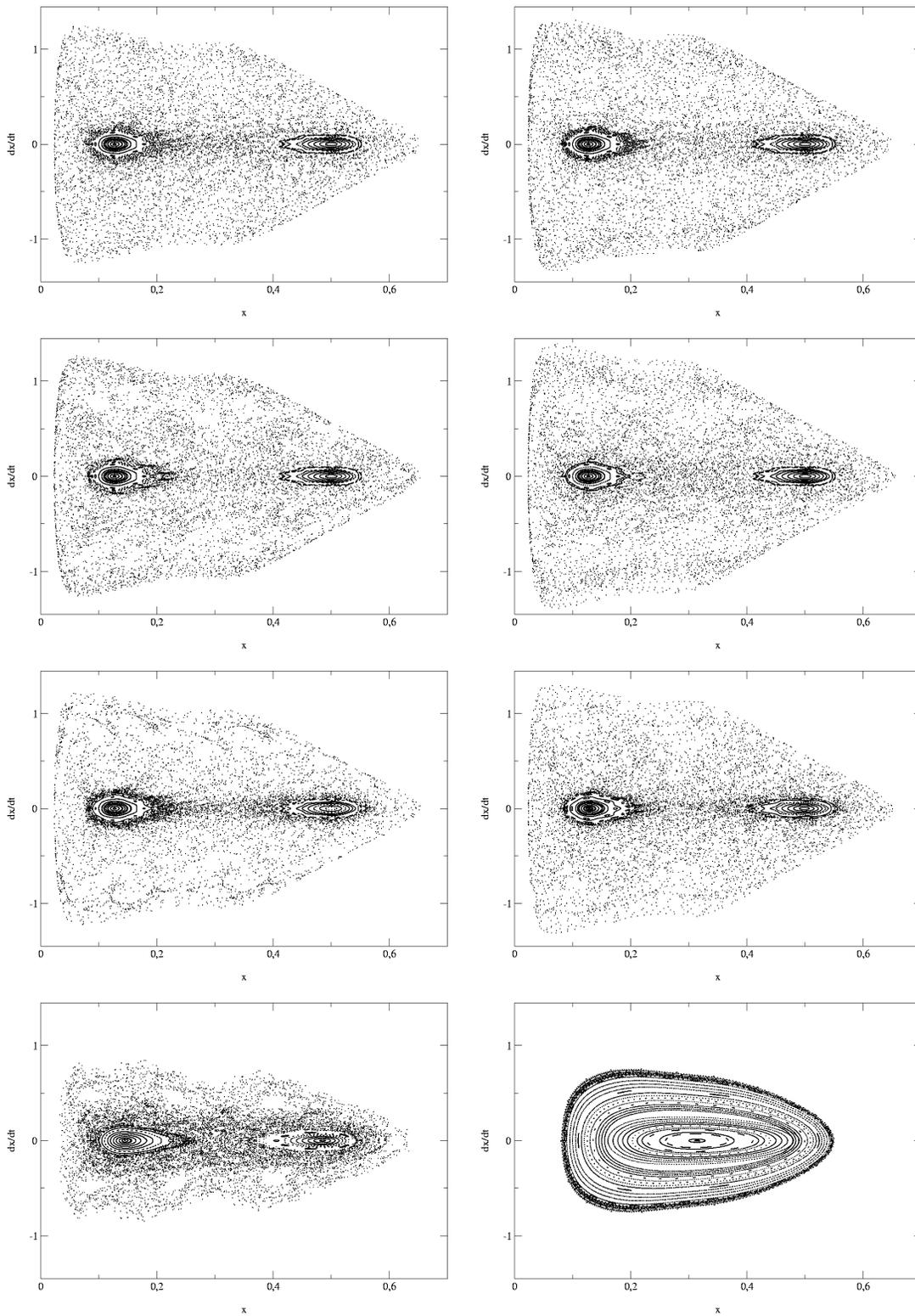


Figura 5.3: Seções de Poincaré para o sistema relativístico para diferentes valores do parâmetro r_S^* . Nesta figura estão mostradas apenas as regiões com x positivo para a massa de BN1 variável. Da esquerda para a direita e de cima para baixo: $r_S^* = 5.10^{-12}$, $r_S^* = 5.10^{-11}$, $r_S^* = 5.10^{-10}$, $r_S^* = 5.10^{-9}$, $r_S^* = 5.10^{-8}$, $r_S^* = 5.10^{-7}$, $r_S^* = 5.10^{-6}$ e $r_S^* = 5.10^{-5}$.

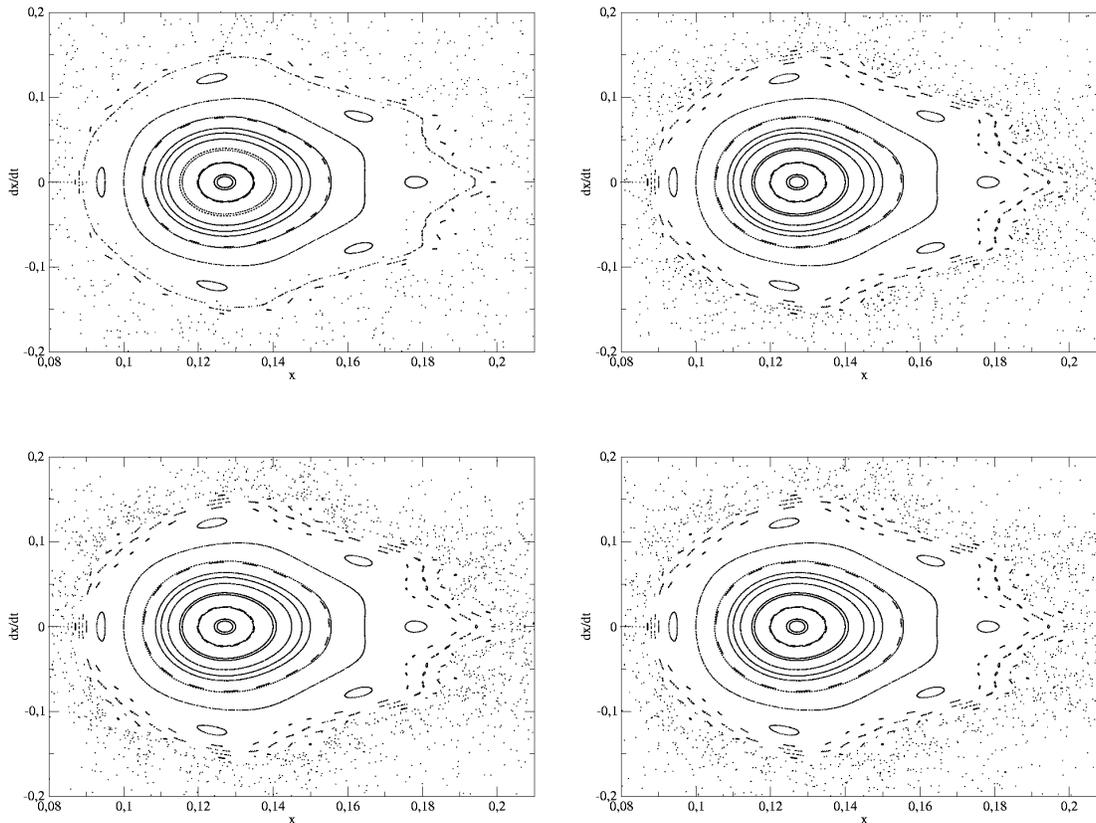


Figura 5.4: Ampliação das Seções de Poincaré da Figura 5.2 para diferentes valores do parâmetro r_S^* . Todas as ampliações referem-se à mesma região. Acima, à esquerda: $r_S^* = 5.10^{-12}$. Acima, à direita: $r_S^* = 5.10^{-10}$. Abaixo, à esquerda: $r_S^* = 5.10^{-6}$. Abaixo, à direita: $r_S^* = 5.10^{-4}$.

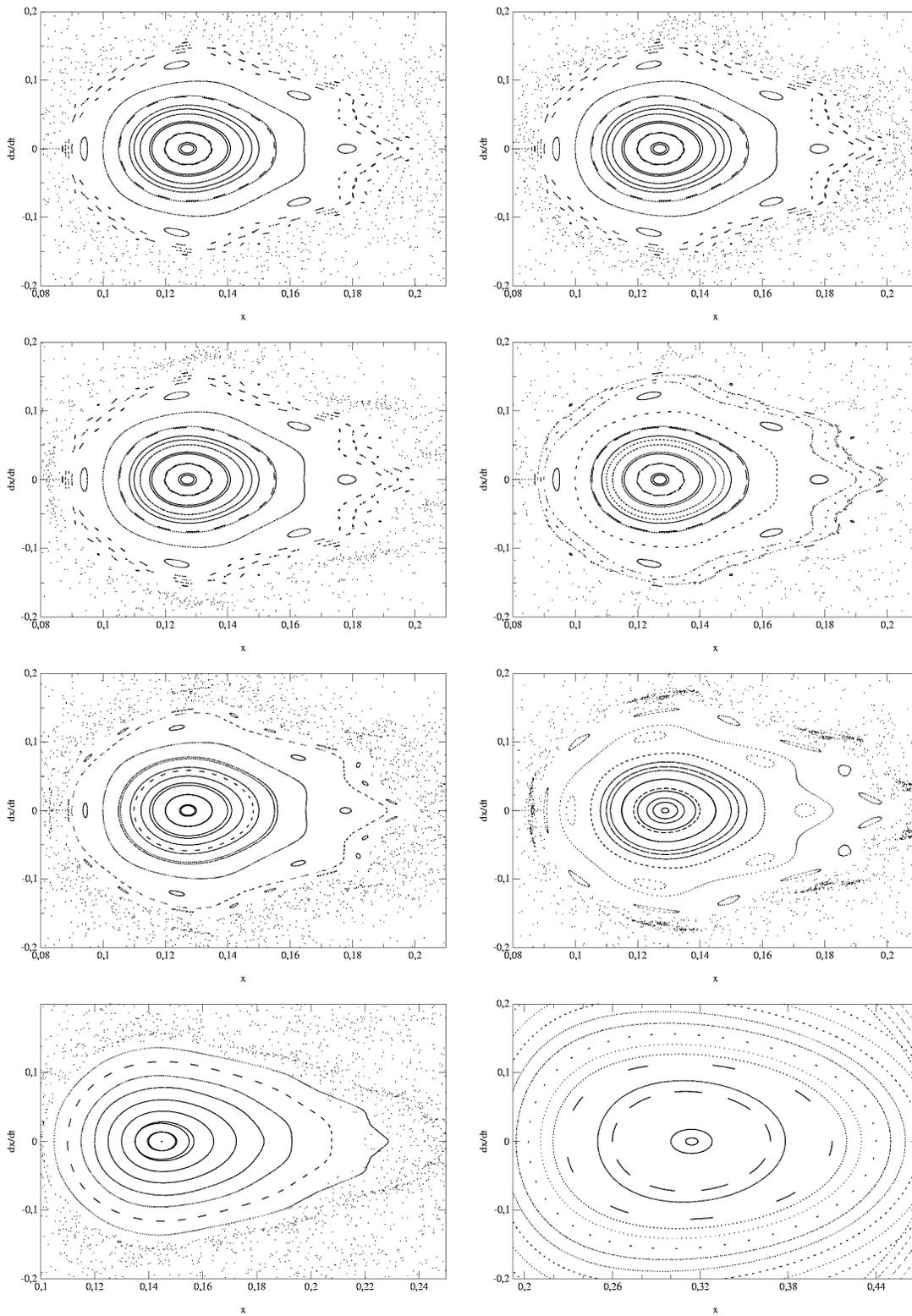


Figura 5.5: Ampliação das Seções de Poincaré da Figura 5.3 para diferentes valores do parâmetro r_S^* . Todas as ampliações se referem à mesma região, com exceção da última, mais abaixo à direita. Da esquerda para a direita e de cima para baixo: $r_S^* = 5.10^{-12}$, $r_S^* = 5.10^{-11}$, $r_S^* = 5.10^{-10}$, $r_S^* = 5.10^{-9}$, $r_S^* = 5.10^{-8}$, $r_S^* = 5.10^{-7}$, $r_S^* = 5.10^{-6}$ e $r_S^* = 5.10^{-5}$.

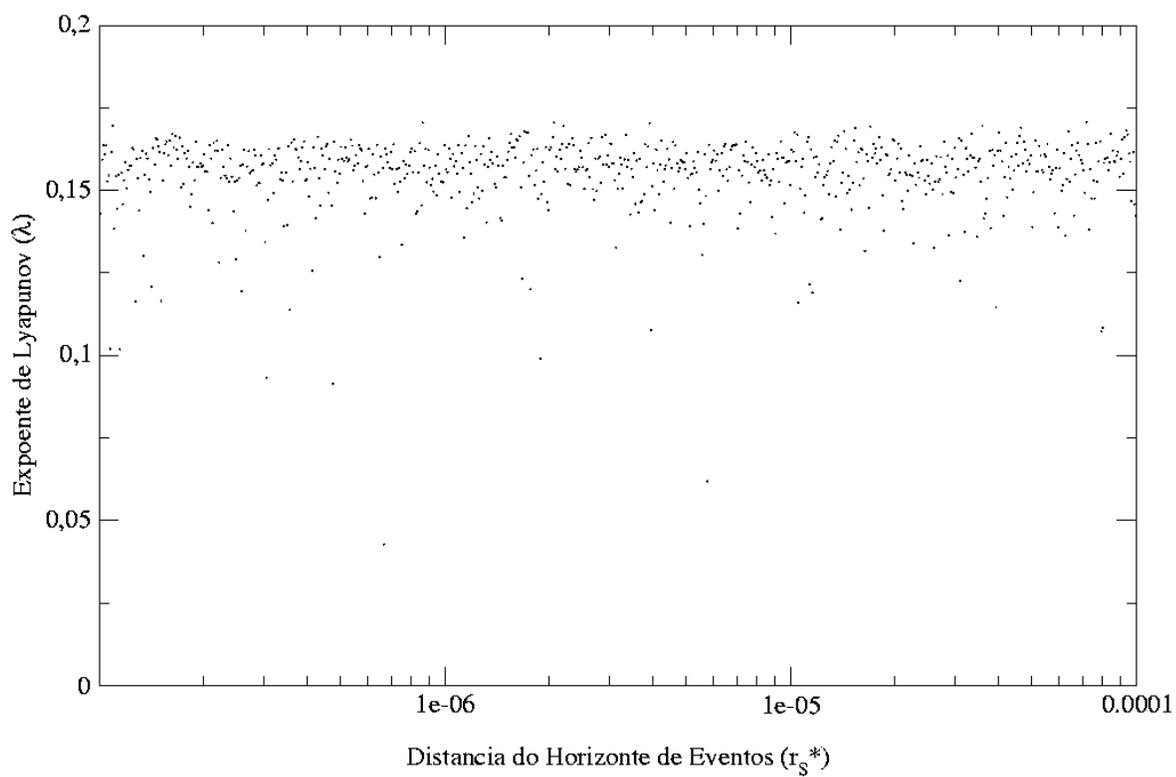


Figura 5.6: Expoentes de Lyapunov para diferentes valores de r_S^* .

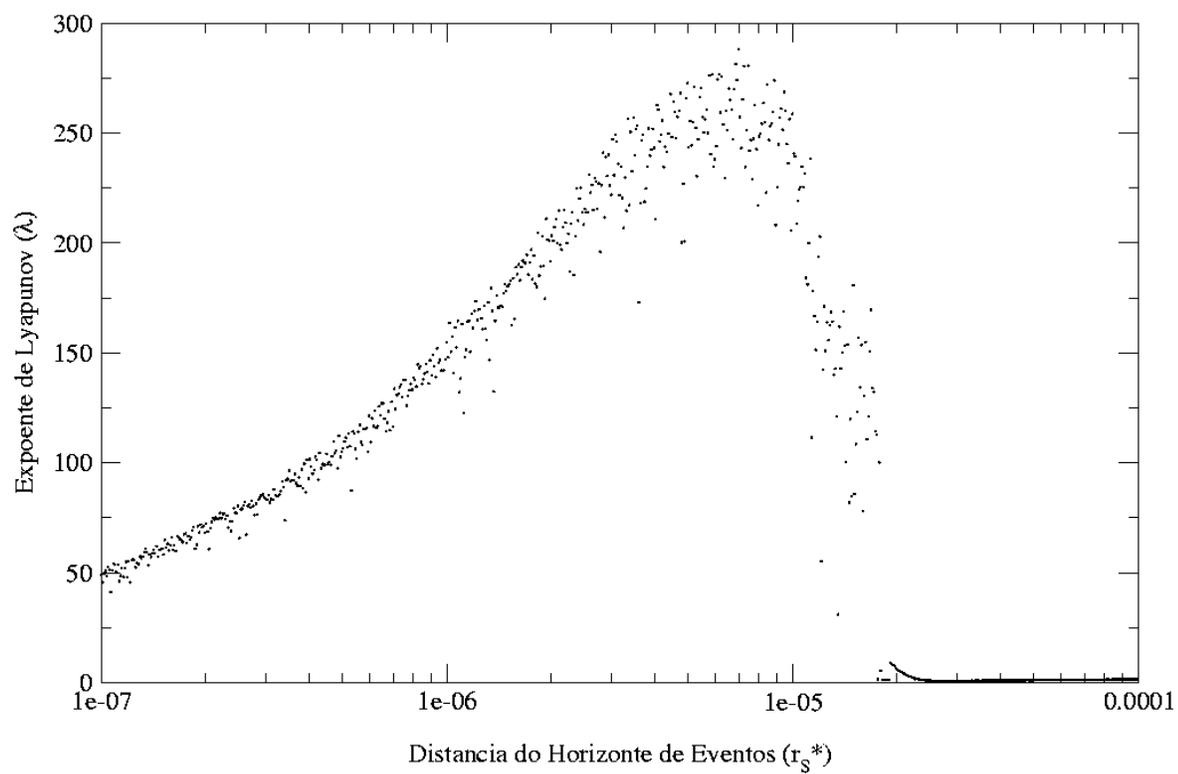


Figura 5.7: Expoentes de Lyapunov para diferentes valores de r_s^* .

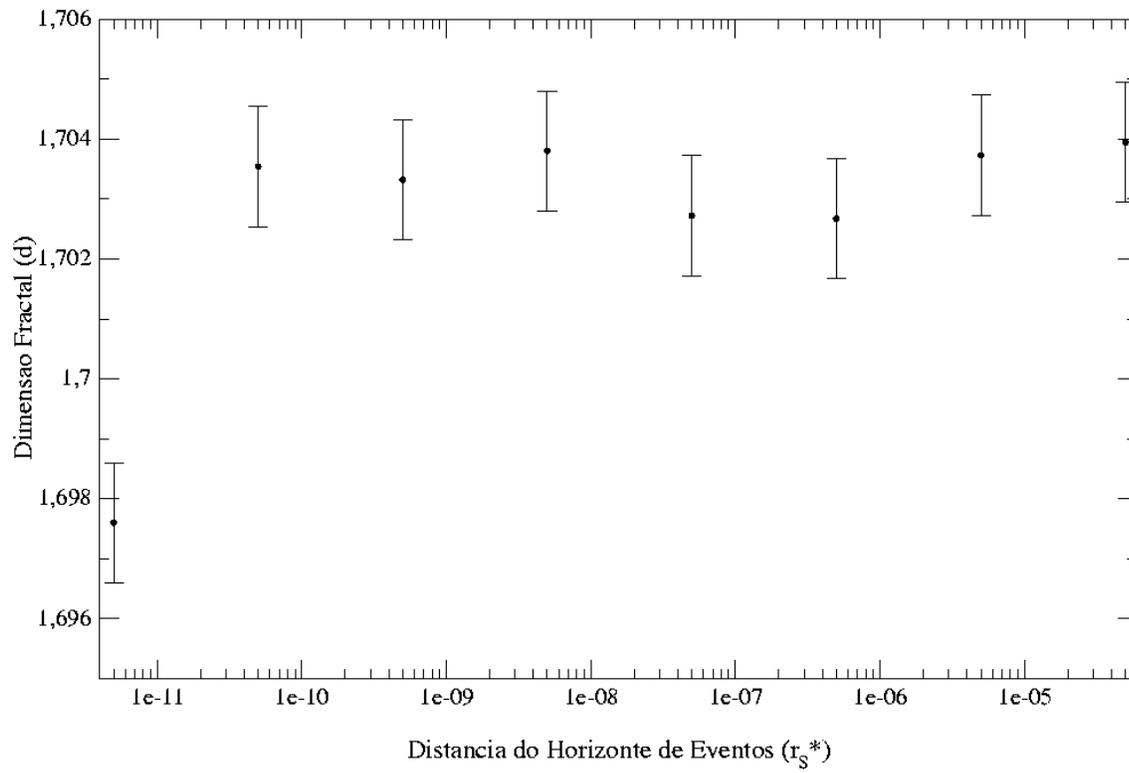


Figura 5.8: Dimensões Fractais para diferentes valores de r_S^* .

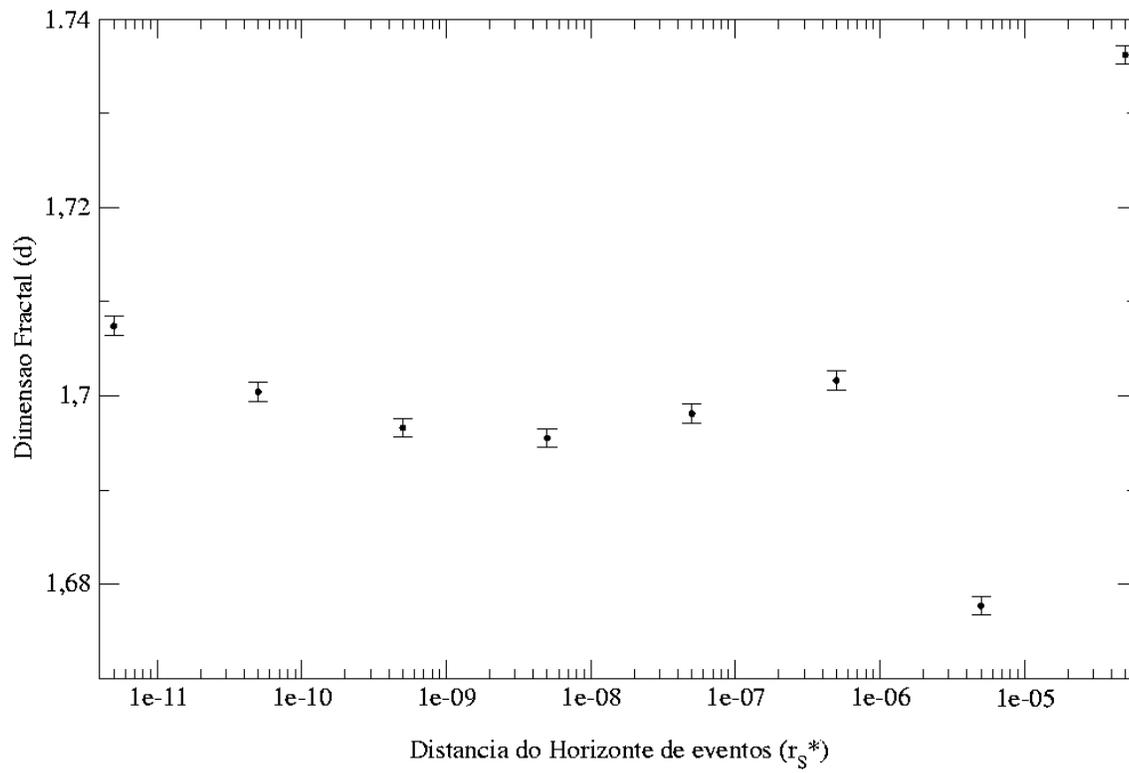


Figura 5.9: Dimensões Fractais para diferentes valores de r_S^* .

Conclusões

Neste trabalho apresentamos três generalizações de complexidade crescente do problema de Hill clássico, um caso especial do problema de três corpos circular e planar. As primeiras duas são baseadas em potenciais pseudo-newtonianos, o potencial de Paczyński-Wiita e o potencial ABN, que simulam efeitos provenientes da relatividade geral, em especial, provenientes de métricas como a de Schwarzschild (horizonte de eventos) e de Kerr (horizonte de eventos e arraste de referenciais inerciais). A terceira é baseada em um tratamento completamente relativístico do problema, com base em aproximações pós-newtonianas de primeira ordem (1PN).

O problema de Hill newtoniano, os dois modelos pseudo-Newtonianos e o modelo completamente relativístico foram analisados à luz dos sistemas dinâmicos, utilizando-se três métodos: seções de Poincaré, coeficientes de Lyapunov e dimensões fractais. Estes métodos permitiram comparar os sistemas, um em relação ao outro e cada sistema individualmente, dado que cada um dos modelos pseudo-newtonianos e o modelo relativístico fornecem parâmetros com os quais são feitas as análises. No caso do potencial de Paczyński-Wiita e no caso relativístico o parâmetro é r_S^* , o raio do horizonte de eventos, e no caso do potencial ABN, o parâmetro é a , o momentum angular da métrica de Kerr associada.

Para o potencial de Paczyński-Wiita encontrou-se que a instabilidade do sistema em média aumenta conforme aumenta o valor de r_S^* . Os coeficientes de Lyapunov mostraram, ainda, que esta estabilidade apresenta oscilações, o que podem fazer com que, localmente, valores maiores de r_S^* sejam menos instáveis do que sistemas com r_S^* um pouco menor.

Para o potencial ABN obteve-se que sistemas que apresentam contra-rotação (a negativo) são mais instáveis do que os sistemas correspondentes que apresentam co-rotação (a com mesmo módulo, porém positivos). Este resultado possui uma justificativa física, uma vez que a velocidade angular relativa é maior nos sistemas que apresentam co-rotação, e é confirmado por resultados de trabalhos anteriores, tais como o de Letelier e Vieira [42] e o de Guéron e Letelier [43]. Os coeficientes de Lyapunov, no entanto, mostram que possivelmente existe uma forte dependência do parâmetro a , o que provavelmente se dá pelo fato desta dependência estar localizada em um expoente.

Para o caso completamente relativístico, ao se considerar a variação de r_S^* como o aumento das massas m_1 e m_2 mantendo-se a razão m_2/m_1 fixa, obtém-se que o sistema fica mais instável até um determinado valor de r_S^* . A partir deste valor a instabilidade diminui até o sistema se

tornar completamente estável. Esta é uma característica inesperada do problema relativístico, a qual deve ser estudada mais a fundo. Este caso ilustra as limitações dos potenciais pseudo-newtonianos na avaliação de propriedades dinâmicas dos sistemas e indica a importância de se utilizar a relatividade geral nestes estudos.

Este trabalho mostrou o problema de Hill em primeira aproximação do caso relativístico. Em futuros trabalhos pretende-se aprofundar esta análise utilizando a próxima aproximação, de ordem $5/2$ de acordo com Blanchet *et al.* [9]. Nesta aproximação efeitos de radiação gravitacional estão presentes, tornando o problema mais complexo. Deve-se também utilizar a métrica da Região I e analisar a dinâmica próxima ao buraco negro BN2. Outra possibilidade é substituir as massas pontuais por distribuições de matéria incluindo efeitos de rotação e comparar os resultados com o potencial ABN.

Finalmente, este trabalho gerou três artigos. O primeiro, um estudo do problema de Hill newtoniano em comparação com o potencial de Paczyński-Wiita, foi publicado na *Physics Letters A* [46]. O segundo, uma análise do problema de Hill com o potencial ABN, também foi publicado na *Physics Letters A* [47]. O último, o problema de Hill no contexto das aproximações pós-newtonianas de ordem 1PN, está sendo finalizado.

Implementação dos Programas

Neste apêndice os códigos dos programas utilizados nos cálculos deste trabalho são transcritos e explicados em detalhe.

A.1 GENERFRAC

Propósito do Programa

O propósito do programa GENERFRAC é evoluir, através das equações de movimento do sistema em questão, um conjunto de condições iniciais fornecido e classificá-los de acordo com o comportamento das respectivas órbitas, obedecendo ao critério definido pelo usuário. A saída do programa consiste em dois ou mais arquivos que contêm, cada um, uma parte do conjunto de condições iniciais original separada segundo este critério.

No caso implementado (problema de Hill com o potencial ABN [7], o programa lê a partir de um arquivo de dados (*box.dat*) a posição inicial e o ângulo com que a partícula inicia a trajetória, lê as outras informações contidas no arquivo *data.dat*, integra a trajetória utilizando um integrador conhecido (o DODE, descrito e explicado detalhadamente no livro de Shampine e Gordon [54]) e classifica o ponto de acordo com qual das duas rotas de escape do sistema a partícula segue, gravando o ponto proveniente do arquivo *box.dat* no arquivo *preto.dat* ou *cinza.dat* conforme a rota de escape seguida pela partícula.

Compilação do Programa

O programa foi escrito em FORTRAN 77 [53]. Para ser executado ele precisa ser compilado juntamente com o integrador, que é externo (no caso o integrador DODE) e o arquivo com as funções úteis ao sistema. A compilação pode ser feita no linux da seguinte forma:

```
f77 -o generfrac generfrac.f dode.f system.f
```

Neste caso o arquivo resultante é o arquivo *generfrac*, que pode ser executado através do seguinte comando:

```
./generfrac
```

Para rodar o executável são necessários dois arquivos de dados, o *data.dat* (que contém informações para a integração do sistema, tais como parte das condições iniciais, tempo de integração, erro tolerado, etc.) e o *box.dat* (que representa o conjunto de condições iniciais que se deseja integrar). Nas próximas seções será explicado o funcionamento de cada um dos arquivos, incluindo formas de alterá-lo para outros sistemas dinâmicos.

O arquivo *generfrac.f*

O arquivo *generfrac.f* é o corpo do programa. Ele é subdividido nas seguintes partes: Declaração de Variáveis, Abertura dos Arquivos de Dados e Leitura dos Parâmetros, Ajuste das Variáveis, Integração da Órbita e Classificação do Ponto, e, por último, a Finalização do Programa. Este arquivo foi concebido de forma que as alterações mais substanciais sejam feitas no arquivo *system.f*, mantendo a forma do corpo do programa. Isto facilita a transição para outros sistemas, a qual é feita de forma mais didática.

Declaração das Variáveis

Esta parte corresponde às seguintes linhas:

```

IMPLICIT NONE
CHARACTER basin*5
INTEGER N,l,j,ifl
DOUBLE PRECISION E,B,y0,x,o,y,ti,tf,dt,x0,o0,BETA,eabs,erel
DIMENSION y(4)
NAMELIST/PARFIS/E,B,BETA
NAMELIST/PARINT/eabs,erel,ifl
NAMELIST/CONDINIC/x0,y0,o0,basin
NAMELIST/TIME/ti,tf,dt
NAMELIST/NPONTOS/N
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
COMMON/CI/y0
COMMON/TIMES/ti,tf,dt
COMMON/INTG/eabs,erel,ifl

```

Nesta parte todas as variáveis utilizadas no programa são declaradas, especificando-se o tipo (número inteiro, real com precisão dupla). São também declarados as listas de nomes de parâmetros para leitura no arquivo *data.dat*, utilizando o comando NAMELIST, variáveis externas ao programa principal, utilizando-se o comando EXTERNAL e constantes que serão utilizadas em mais de um programa, utilizando-se o COMMON. O papel de cada variável será explicado mais adiante.

Abertura dos Arquivos de Dados e Leitura dos Parâmetros

Esta parte contém as seguintes linhas:

```
OPEN(UNIT=1,FILE='data.dat')
READ(1,PARFIS)
READ(1,PARINT)
READ(1,CONDINIC)
READ(1,TIME)
READ(1,NPONTOS)
CLOSE(UNIT=1,STATUS='KEEP')
OPEN(UNIT=2,FILE='box.dat')
```

Nesta parte são lidos os parâmetros utilizados no programa. O primeiro arquivo aberto é o arquivo *data.dat*. No caso implementado são lidos cinco grupos de parâmetros, conforme declarado com o comando NAMELIST acima. São eles PARFIS, PARINT, CONDINIC, TIME e NPONTOS. No primeiro grupo, PARFIS, são lidos os parâmetros físicos relacionados ao sistema em questão. No caso implementado, os parâmetros são E (constante de Jacobi, correspondente à “energia” do sistema), B (raio do horizonte de eventos) e $BETA$ (coeficiente do potencial ABN).

No segundo grupo, PARINT, são lidos os parâmetros necessários para o funcionamento do integrador. No caso do integrador DODE, os parâmetros necessários são *eabs* (erro absoluto máximo tolerado para cada passo executado), *erel* (erro relativo máximo tolerado para cada passo executado) e *ifl* (variável que indica como a integração será iniciada, com ou sem extrapolação do ponto final).

No terceiro grupo, CONDINIC, são lidos as condições iniciais complementares necessárias ao sistema, as quais permanecem constantes para todas os valores lidos em *box.dat*. No caso deste sistema são lidas as variáveis x_0 e y_0 (coordenadas da posição inicial; neste programa apenas o valor y_0 é utilizado), θ_0 (ângulo com que a trajetória se inicia; não utilizada neste programa) e *basin* (bacia escolhida; também não utilizada neste programa).

No quarto grupo, TIME, são lidos os parâmetros relacionados ao tempo de integração e ao tamanho de cada passo calculado pelo integrador. Neste caso, são lidos os parâmetros t_i (instante inicial; início da integração), t_f (instante final; término da integração) e dt (tamanho de cada passo da integração).

Por fim, no último grupo, NPONTOS, é lido o parâmetro N , o número de pontos do arquivo *box.dat*. Não há um número máximo de pontos, mas se deve prestar atenção se ele é sempre maior que o número de condições iniciais.

Depois de feita a leitura das variáveis fecha-se o arquivo *data.dat* sem fazer alterações. O próximo passo é abrir o arquivo *box.dat* para fazer a leitura das condições iniciais e os arquivos *preto.dat* e *cinza.dat* para o armazenamento dos resultados. Se os dois últimos arquivos não existirem eles serão criados automaticamente.

Ajuste das Variáveis

Nesta parte do programa podem ser feitos ajustes nas variáveis, embora estes ajustes devam ser feitos de preferência no próprio arquivo de dados (*data.dat*). No caso implementado foi feito o seguinte ajuste:

$B=B*5.D-6$

Integração da Órbita e Classificação do Ponto

Esta parte corresponde às seguintes linhas:

```
CALL OPENBASINS
DO l=1,N
  READ(2,*,end=20) x,o
  CALL FINDBASIN(x,o,0.d0,basin)
  CALL WRITEBASIN(x,o,basin)
ENDDO
```

A subrotina OPENBASIN possui o papel de abrir os arquivos de saída (no caso, os arquivos *preto.dat* e *cinza.dat*). A subrotina responsável por evoluir as órbitas e fazer a classificação do ponto segundo sua órbita é a subrotina FINDBASIN. A função WRITEBASIN tem o papel de escrever o ponto nos respectivos arquivos (*preto.dat* ou *cinza.dat* conforme a rota de escape). O funcionamento destas funções será explicado mais adiante.

Finalização do Programa

Finalmente, tem-se as últimas linhas do programa:

```
CONTINUE
FORMAT(5e16.8)
CLOSE(UNIT=2)
CALL CLOSEBASINS

STOP
END
```

A qual corresponde ao fechamento do arquivo de dados (*box.dat*), dos arquivos de saída (*preto.dat* e *cinza.dat*), utilizando a subrotina CLOSEBASINS, e à finalização do programa.

O arquivo *system.f*

O arquivo *system.f* contém as funções e subrotinas necessárias ao funcionamento do programa principal. Ela contém também funções e subrotinas necessárias ao funcionamento de outros programas, porém esta seção é devotada apenas ao programa GENERFRAC. As sub-

rotinas acionadas pelo programa principal são OPENBASINS, CLOSEBASINS, FINDBASIN, WRITEBASIN. Estas subrotinas dependem de outras funções que estão no próprio arquivo *system.f*, as quais serão descritas mais adiante.

Subrotinas OPENBASINS, CLOSEBASINS e WRITEBASIN

A subrotina OPENBASINS é transcrita a seguir:

```
SUBROUTINE OPENBASINS
OPEN(UNIT=3,FILE='preto.dat')
OPEN(UNIT=4,FILE='cinza.dat')
END
```

Esta rotina simples é responsável pela abertura dos arquivos de saída, no caso, os arquivos *preto.dat* e *cinza.dat*. A subrotina CLOSEBASINS é transcrita a seguir:

```
SUBROUTINE CLOSEBASINS
CLOSE(UNIT=3)
CLOSE(UNIT=4)
END
```

De forma análoga, ela é responsável pelo fechamento dos respectivos arquivos. A subrotina WRITEBASIN é dada pelo seguinte:

```
SUBROUTINE WRITEBASIN(x,o,bacia)
IMPLICIT NONE
CHARACTER bacia*5
DOUBLE PRECISION x,o
IF(bacia.eq.'preto') THEN
    write(3,*) x,o
ENDIF
IF(bacia.eq.'cinza') THEN
    write(4,*) x,o
ENDIF
END
```

Conforme será apresentado a seguir, a subrotina FINDBASIN faz a classificação do ponto e retorna uma variável do tipo *character*, que indica em qual arquivo o ponto deve ser registrado. A subrotina WRITEBASIN tem como entrada esta variável e executa a ação de registrar o ponto no arquivo. Neste sistema implementado, se a subrotina FINDBASIN retornar *preto*, o ponto é registrado no arquivo *preto.dat*. Caso a subrotina FINDBASIN retorne *cinza*, o ponto

deve ser registrado no arquivo *cinza.dat*.

Subrotina FINDBASIN

Esta é a subrotina principal do programa GENERFRAC. É ela que, de fato, faz a integração das órbitas e a classificação dos pontos. O código é dado a seguir:

```

SUBROUTINE FINDBASIN(x,o,epsilon,bacia)
IMPLICIT NONE
CHARACTER bacia*5
DOUBLE PRECISION y,y0,x,o,ti,tf,dt,t0,t,work,iwork,BETA
DOUBLE PRECISION E,B,eabs,erel,epsilon,ea,er
INTEGER NSTEP,I,ifl,fl
DIMENSION y(4),work(100+21*4),iwork(5)
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
COMMON/CI/y0
COMMON/TIMES/ti,tf,dt
COMMON/INTG/eabs,erel,ifl
EXTERNAL DERIV
NSTEP=INT((tf-ti)/dt)
CALL START(x,o,y,epsilon)
ea=eabs
er=erel
fl=ifl
t0=ti
DO I=1,NSTEP
  t=FLOAT(I)*dt
  CALL dode(DERIV,4,y,t0,t,er,ea,fl,work,iwork)
  IF(y(2).gt.0.and.y(1).gt.1) THEN
    bacia = 'preto'
    print*,bacia
    GOTO 100
  ENDIF
  IF(y(2).lt.0.and.y(1).lt.-1) THEN
    bacia = 'cinza'
    print*,bacia
    GOTO 100
  ENDIF
ENDDO
bacia='branco'
100 CONTINUE

```

```
101  FORMAT(5e16.8)
      END
```

Não serão dados detalhes deste código, mas convém ressaltar algumas partes essenciais. Primeiramente, para preparar as condições iniciais para a integração da órbita é utilizada a rotina *START*. Esta rotina deve ser modificada em caso de outros sistemas ou mesmo outros tipos de condições iniciais serem utilizados. Ela possui como entrada as condições iniciais fornecidas (no caso implementado as coordenadas iniciais e o ângulo com que a partícula inicia a trajetória) e, de acordo com a energia da partícula, fornece as condições iniciais na forma de um vetor \mathbf{y} , sendo $y(1)$ e $y(3)$ as coordenadas e $y(2)$ e $y(4)$ as velocidades iniciais.

É necessário uma preparação dos dados para a integração. O intervalo de tempo durante o qual se fará a integração é dividido em *NSTEP* passos (definidos conforme o tamanho de cada passo, dt), e as variáveis necessárias ao DODE são gravadas em novas variáveis, uma vez que os valores originais são requeridos a cada conjunto de condições iniciais.

O próximo passo é fazer a integração através da subrotina DODE. Mais adiante esta subrotina será tratada com mais detalhes. Na saída da integração é modificado o vetor \mathbf{y} (que passa a corresponder ao instante final (t) de cada passo). A cada passo integrado o resultado obtido é testado. O critério de classificação pode variar, conforme o sistema em questão. No caso implementado, o critério consiste em qual das rotas de escape presentes no sistema a partícula segue. Neste caso existem duas rotas de escape, $x \rightarrow \infty$ (rotulado de *preto*) e $x \rightarrow -\infty$ (rotulado de *cinza*). Para isso é suficiente que a partícula ultrapasse o ponto lagrangiano do sistema com o movimento no sentido da rota de escape. Estes critérios estão contidos nos dois comandos IF contidos no programa. Caso o ponto atinja uma das condições a integração para. Caso nenhuma das condições seja satisfeita até o término da integração, ao fim do processo o ponto é classificado como *branco*.

O arquivo *dode.f*

O arquivo *dode.f* é o integrador do sistema. Ele é constituído de um algoritmo para resolver equações diferenciais ordinárias de *primeira ordem*. Conforme pode ser lido no próprio código, as equações diferenciais são resolvidas por um conjunto de rotinas, DE, STEP e INTRP. O programa aloca os dados nas matrizes WORK e IWORK, e chama a rotina DE. A rotina DE é um supervisor que direciona a solução. Ela chama as rotinas STEP e INTRP para avançar a integração e fazer a interpolação nos pontos de saída. A rotina STEP utiliza uma forma modificada das fórmulas de Adams de diferenças finitas e extrapolação local. Ela ajusta a ordem e o tamanho do passo de forma a controlar o erro local por passo unitário. Normalmente cada chamada de STEP avança a solução um passo em direção ao parâmetro final de integração (*TOUT*). Por questões de eficiência DE integra além de *TOUT*, mas nunca além de dez vezes o valor do intervalo de integração, ou seja, $T0 + 10 * (TOUT - T0)$, onde $T0$ é o parâmetro inicial. Em seguida ele chama INTRP para interpolar a solução em *TOUT*. Existe uma opção para parar a integração em *TOUT*, mas deve ser usada somente quando é impossível continuar a integração além deste parâmetro. O código é completamente explicado e documentado no

livro de Shampine e Gordon [54].

O integrador DODE utiliza os seguintes parâmetros de entrada:

- as equações do sistema, na forma da subrotina DERIV;
- a dimensão do sistema (no caso, quatro equações de primeira ordem);
- as condições iniciais, dadas na forma do vetor \mathbf{y} ;
- os instantes inicial e final de integração;
- os valores admitidos dos erros relativo e absoluto ($er = erel$ e $ea = eabs$);
- o estado inicial da integração ($fl = ifl$);
- duas matrizes ($WORK$, $IWORK$), internas ao programa.

A subrotina DERIV fornece a forma do sistema de equações diferenciais. No caso implementado o sistema é constituído de duas equações ordinárias de segunda ordem, podendo ser transformado em um sistema de quatro equações de primeira ordem. O código é dado abaixo, com a parte correspondente às equações do sistema em negrito:

```

SUBROUTINE DERIV(t,yy,yp)
  IMPLICIT NONE
  DOUBLE PRECISION t,yy,yp,E,B,DUDT,DVDT,BETA
  COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
  DIMENSION yy(4),yp(4)
  yp(1)=yy(2)
  yp(2)=DUDT(yy(1),yy(3),yy(2),yy(4))
  yp(3)=yy(4)
  yp(4)=DVDT(yy(1),yy(3),yy(2),yy(4))
  RETURN
END

```

As funções $DUDT$ e $DVDT$ são definidas separadamente, como uma FUNCTION. É nesta etapa em que as equações do sistema são colocadas. Por exemplo, no caso do Problema de Hill com o potencial ABN, $DVDT$ é dada por:

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION DVDT(u,v,uu,vv)
  IMPLICIT NONE
  DOUBLE PRECISION u,v,uu,vv,E,B,BETA,DLT
  COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
  DLT=DSQRT(u**2+v**2)
  DVDT=-2.d0*uu-v/((DLT**(3-BETA))*(DLT-B)**BETA)

```

```
RETURN  
END FUNCTION DVDT
```

As condições iniciais são fornecidas pela rotina `START`, na forma do vetor \mathbf{y} . Os parâmetros inicial e final (t_i e t_f), assim como as tolerâncias aos erros relativo e absoluto ($erel$ e $eabs$) são fornecidas de acordo com o arquivo `data.dat`. O parâmetro ifl é sempre colocado como $ifl = 1$. Isto significa que a integração pode ir além de $TOUT$ para cada passo. Caso se trabalhe com um sistema no qual a integração não pode ultrapassar determinado valor $TOUT$, no passo em questão deve-se fazer a mudança $ifl = -1$.

Na saída do programa são retornadas as mesmas variáveis de entrada:

- as equações do sistema, sem modificação;
- a dimensão do sistema, sem modificação;
- o vetor \mathbf{y} , no instante atingido pela integração;
- o instante inicial (modificado para o instante atingido pela integração, normalmente o instante final) e o instante final (não modificado);
- os valores admitidos dos erros relativo e absoluto ($er = erel$ e $ea = eabs$), sem modificação;
- o estado final da integração (fl), sendo que, para saída normal, $fl = 2$;
- duas matrizes ($WORK$, $IWORK$), internas ao programa, adaptadas para o próximo passo.

Na saída normal o instante atingido pela integração é o instante final e a variável fl é retornada como $fl = 2$. Caso ocorram erros, eles são especificados segundo o valor retornado pela variável fl :

- $fl = 3$: a integração não atinge $TOUT$ pois as tolerâncias aos erros são muito pequenas; deve-se aumentar estes valores para continuar;
- $fl = 4$: a integração não atinge $TOUT$ porque mais de 500 passos são necessários;
- $fl = 5$: a integração não atinge $TOUT$ porque as equações parecem ser *stiff*;
- $fl = 6$: parâmetros de entrada inválidos (erro fatal);

Caso a integração for inicializada com $fl = -1$, o sistema retornará valores negativos conforme a saída ($fl = -2, -3, \dots$)

A.2 DIMFRAC

Princípio do Cálculo da Dimensão Fractal

A dimensão de *box counting* é explicada com mais detalhes em Ott [11] e Grebogi [50]. Deslocando-se um determinado ponto de uma bacia de uma distância ϵ , a probabilidade de que esta nova condição inicial não pertença à bacia original é, para ϵ pequeno, $P(\epsilon) \propto \epsilon^{(D-d)}$, sendo D a dimensão do conjunto (neste caso 2) e d a dimensão de *box counting*, também chamada dimensão exterior ou dimensão fractal (se não for um valor inteiro).

Propósito do Programa

O propósito do programa DIMFRAC é encontrar a dimensão do fractal obtido através do programa GENERFRAC. Basicamente o programa lê cada ponto de um dos arquivos de saída do programa GENERFRAC (no caso *preto.dat* ou *cinza.dat*), e faz uma série de pequenos deslocamentos, integrando as órbitas para cada deslocamento, sendo contabilizado o número de pontos que não permanece na mesma bacia. O logaritmo deste número é armazenado em um arquivo (*dimensao.dat*) juntamente com o logaritmo do respectivo deslocamento, e a partir da relação entre estes dois valores a dimensão fractal de *box counting* pode ser obtida por regressão linear.

Compilação do Programa

O programa DIMFRAC é compilado semelhantemente ao programa GENERFRAC:

```
f77 -o dimfrac dimfrac.f dode.f system.f
```

O arquivo resultante é o arquivo *dimfrac*, que pode ser executado através do seguinte comando:

```
./dimfrac
```

Para rodar o executável são necessários dois arquivos de dados, o *data.dat* (que contém informações para a integração do sistema, tais como parte das condições iniciais, tempo de integração, erro tolerado, etc.) e o *preto.dat* ou *cinza.dat* (saídas do programa GENERFRAC, representam o conjunto de condições iniciais que serão testados para se verificar se permanecem na mesma bacia). Nas próximas seções será explicado o funcionamento de cada um dos arquivos, incluindo formas de alterá-los para outros sistemas dinâmicos.

O arquivo *dimfrac.f*

O arquivo *generfrac.f* é o corpo do programa. Ele é subdividido nas seguintes partes: Declaração de Variáveis, Abertura dos Arquivos de Dados e Leitura dos Parâmetros, Ajuste das Variáveis, Integração da Órbita e Classificação do Ponto, e, por último, a Finalização do

Programa. Este arquivo, assim como o *genergrac.f*, foi concebido de forma que as alterações mais substanciais sejam feitas no arquivo *system.f*, mantendo a forma do corpo do programa.

Declaração das Variáveis

Esta parte corresponde às seguintes linhas:

```
IMPLICIT NONE
CHARACTER basin*5
INTEGER N,l,j,ifl
DOUBLE PRECISION E,B,y0,x,o,y,ti,tf,dt,x0,o0,BETA,eabs,erel
DIMENSION y(4)
NAMELIST/PARFIS/E,B,BETA
NAMELIST/PARINT/eabs,erel,ifl
NAMELIST/CONDINIC/x0,y0,o0,basin
NAMELIST/TIME/ti,tf,dt
NAMELIST/NPONTOS/N
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
COMMON/CI/y0
COMMON/TIMES/ti,tf,dt
COMMON/INTG/eabs,erel,ifl
```

Nesta parte todas as variáveis utilizadas no programa são declaradas, especificando-se o tipo (número inteiro, real com precisão dupla). São também declarados as listas de nomes de parâmetros para leitura no arquivo *data.dat*, utilizando o comando NAMELIST, variáveis externas ao programa principal, utilizando-se o comando EXTERNAL e constantes que serão utilizadas em mais de um programa, utilizando-se o COMMON. O papel de cada variável será explicado mais adiante.

Abertura dos Arquivos de Dados e Leitura dos Parâmetros

Esta parte contém as seguintes linhas:

```
OPEN(UNIT=1,FILE='data.dat')
READ(1,PARFIS)
READ(1,PARINT)
READ(1,CONDINIC)
READ(1,TIME)
READ(1,NPONTOS)
CLOSE(UNIT=1,STATUS='KEEP')
OPEN(UNIT=2,FILE='displacements.dat')
OPEN(UNIT=3,FILE='dimensao.dat')
```

Nesta parte são lidos os parâmetros utilizados no programa. O primeiro arquivo aberto é o arquivo *data.dat*. No caso implementado são lidos cinco grupos de parâmetros, conforme declarado com o comando NAMELIST acima. São eles PARFIS, PARINT, CONDINIC, TIME e NPONTOS. No primeiro grupo, PARFIS, são lidos os parâmetros físicos relacionados ao sistema em questão. No caso implementado, os parâmetros são E (constante de Jacobi, correspondente à “energia” do sistema), B (raio do horizonte de eventos) e $BETA$ (coeficiente do potencial ABN).

No segundo grupo, PARINT, são lidos os parâmetros necessários para o funcionamento do integrador. No caso do integrador DODE, os parâmetros necessários são *eabs* (erro absoluto máximo tolerado para cada passo executado), *erel* (erro relativo máximo tolerado para cada passo executado) e *ifl* (variável que indica como a integração será iniciada, com ou sem extrapolação do ponto final).

No terceiro grupo, CONDINIC, são lidos as condições iniciais complementares necessárias ao sistema, as quais permanecem constantes para todas os valores lidos em *box.dat*. No caso deste sistema são lidas as variáveis $x0$ e $y0$ (coordenadas da posição inicial; neste programa apenas o valor $y0$ é utilizado), $\theta0$ (ângulo com que a trajetória se inicia; não utilizada neste programa) e *basin* (bacia escolhida; também não utilizada neste programa).

No quarto grupo, TIME, são lidas os parâmetros relacionados ao tempo de integração e ao tamanho de cada passo calculado pelo integrador. Neste caso, são lidos os parâmetros t_i (instante inicial; início da integração), t_f (instante final; término da integração) e dt (tamanho de cada passo da integração).

Por fim, no último grupo, NPONTOS, é lido o parâmetro N , o número de pontos do arquivo *box.dat*. Não há um número máximo de pontos, mas se deve prestar atenção se ele é sempre maior que o número de condições iniciais.

Depois de feita a leitura das variáveis fecha-se o arquivo *data.dat* sem fazer alterações. O próximo passo é abrir o arquivo *displacements.dat* para fazer a leitura dos diferentes valores de deslocamento que serão aplicados aos dados da bacia e o arquivo *dimensao.dat*, no qual serão armazenados o logaritmo do número de pontos que não permanece na bacia e o respectivo deslocamento.

Ajuste das Variáveis

Nesta parte do programa podem ser feitos ajustes nas variáveis, embora estes ajustes devam ser feitos de preferência no próprio arquivo de dados (*data.dat*). No caso implementado foi feito o seguinte ajuste:

$$B=B*5.D-6$$

Verificação da Permanência dos Pontos na Bacia

Esta parte corresponde às seguintes linhas:

DO l=1,N

```

        k=0
        READ(2,*,end=20) epsilon
        CALL OPENBASIN(basin)
        DO g=1,N
            READ(4,*,end=10) x,o
            IF(CHANGEBASIN(x,o,epsilon,basin)) THEN
                k=k+1
            ELSE
                IF(CHANGEBASIN(x,o,-epsilon,basin)) THEN
                    k=k+1
                ENDIF
            ENDIF
        ENDDO
10    CONTINUE
        CLOSE(UNIT=4)
        WRITE(3,*) LOG(epsilon),LOG(k)
    ENDDO

```

O programa lê cada um dos valores de deslocamento (*epsilon*) contidos no arquivo *displacements.dat*. Para cada um destes valores o programa aciona a subrotina OPENBASINS, que abre os arquivos *preto.dat* e *cinza.dat*. O arquivo a ser utilizado foi escolhido a partir da variável *basin*. A seguir, para cada ponto desta bacia a permanência do ponto quando aplicado o deslocamento (positivo e negativo) é testada pela subrotina CHANGEBASIN. Caso ocorra mudança de bacia, isto é contabilizado através da variável *k*. Por fim, escreve-se o logaritmo do valor do deslocamento e do número de pontos que mudaram de bacia.

Finalização do Programa

As últimas linhas do programa são dadas por:

```

20    CONTINUE
101   FORMAT(5e16.8)
        CLOSE(UNIT=2)
        CLOSE(UNIT=3)
        CALL CLOSEBASINS

        STOP
        END

```

As quais correspondem ao fechamento do arquivo de deslocamentos (*displacements.dat*) e do arquivo com os logaritmos dos números de pontos que trocam de bacia para cada deslo-

camento (*dimensao.dat*) e, por fim, à finalização do programa.

O arquivo *system.f*

O arquivo *system.f* contém as funções e subrotinas necessárias ao funcionamento do programa principal. Ela contém também funções e subrotinas necessárias ao funcionamento de outros programas, porém esta seção é devotada apenas ao programa DIMFRAC. As subrotinas acionadas pelo programa principal são OPENBASINS, CLOSEBASINS, e CHANGEBASIN. Estas subrotinas podem depender de outras funções que estão no próprio arquivo *system.f*, as quais serão descritas conforme necessário.

As Subrotinas OPENBASIN e CHANGEBASIN

As subrotinas OPENBASIN e CLOSEBASIN são ligeiramente diferentes das subrotinas OPENBASINS e CLOSEBASINS, pois as primeiras objetivam a abertura de apenas do arquivo referente à bacia escolhida pelo usuário através da variável *bacia*. A subrotina OPENBASIN é transcrita a seguir:

```

SUBROUTINE OPENBASIN(bacia)
  IMPLICIT NONE
  CHARACTER bacia*5
  IF(bacia.eq.'preto') THEN
    OPEN(UNIT=4,FILE='preto.dat')
  ENDIF
  IF(bacia.eq.'cinza') THEN
    OPEN(UNIT=4,FILE='cinza.dat')
  ENDIF
END

```

Para o sistema implementado, de acordo com o valor da variável tipo character *bacia*, podendo ser “preto” ou “branco”, o programa abrirá o arquivo correspondente (“preto.dat” ou “cinza.dat”, respectivamente). Esta subrotina deve ser modificada de acordo com o número de bacias e o seus respectivos nomes.

A subrotina CHANGEBASIN é dada abaixo:

```

LOGICAL FUNCTION CHANGEBASIN(x,o,epsilon,basin)
  IMPLICIT NONE
  CHARACTER basin*5,bacia*5
  DOUBLE PRECISION epsilon,x,o,E,B,y0,ti,tf,dt,BETA,eabs,erel
  INTEGER ifl
  COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
  COMMON/CI/y0
  COMMON/TIMES/ti,tf,dt

```

```

COMMON/INTG/eabs,erel,ifl
EXTERNAL DERIV
CHANGEBASIN=.FALSE.
CALL FINDBASIN(x,o,epsilon,bacia)
IF(bacia.eq.basin) THEN
    GOTO 50
ELSE
    CHANGEBASIN=.TRUE.
ENDIF
50 CONTINUE
RETURN
END

```

Esta subrotina é na verdade uma função lógica. De acordo com o valor da variável *epsilon* ela aplica um deslocamento positivo e negativo na coordenada x em cada ponto, e com o auxílio da subrotina FINDBASIN encontra a bacia referente a estes novos pontos. Caso os dois pertençam à mesma bacia a função retorna o valor “.FALSE.”. Caso pelo menos um dos pontos pertença a uma bacia diferente a função retorna o valor “.TRUE.”. Com base neste valor o programa principal aumenta o valor da variável k caso a função retorne “.TRUE.”.

O arquivo *dode.f*

O programa DIMFRAC utiliza a subrotina FINDBASIN, a mesma presente no programa GENERFRAC, utilizando, portanto, o mesmo integrador, o DODE. O funcionamento deste integrador está descrito em linhas gerais na parte referente ao arquivo *dode.f* da seção que trata sobre o funcionamento do GENERFRAC.

A.3 POINCARE

Propósito do Programa

O propósito do programa POINCARE é gerar as seções de Poincaré do sistema dinâmico em questão. O plano da seção é o plano $y = 0$ com a restrição $\dot{y} > 0$. O programa primeiramente lê os parâmetros de integração e as diferentes condições iniciais nos arquivos *data.dat* e *condinic.dat*. A seguir, integra as órbitas utilizando um método Runge-Kutta de quarta ordem através de uma subrotina imbutida no próprio arquivo do programa. As intersecções da trajetória com o plano $y = 0$ são encontradas através do método de Henón [55]. Por fim, o programa grava as intersecções com $\dot{y} > 0$ no arquivo *secao.dat*, que é a saída do programa.

Compilação do Programa

O programa POINCARE é compilado da seguinte forma:

```
f77 -o poincare poincare.f sistema.f
```

O arquivo resultante é o arquivo *poincare*, que pode ser executado através do seguinte comando:

./poincare

Para rodar o executável são necessários os arquivos de dados *data.dat* (que contém informações para a integração do sistema, tais como parte das condições iniciais, tempo de integração, erro tolerado, etc.) e o arquivo *condinic.dat* (que contém as condições iniciais para a integração das órbitas). Nas próximas seções será explicado o funcionamento de cada um dos arquivos, incluindo formas de alterá-lo para outros sistemas dinâmicos.

O método de Henón

A dificuldade da implementação das Seções de Poincaré reside em encontrar os pontos que estão sobre a seção (o hiperplano $y = 0$ no caso deste trabalho) com a precisão desejada. Em geral integra-se a trajetória até que y mude de sinal, o que indica que a seção foi atravessada. O passo seguinte é fazer uma interpolação dos dois últimos pontos da trajetória (que se encontram em lados opostos na seção) para encontrar o ponto da trajetória que se encontra na seção. Existem muitas maneiras de se fazer esta interpolação. Contudo um método proposto por Henón [55] é particularmente eficaz.

O método (ou *truque*) de Henón é dado da seguinte forma. Seja um sistema de equações diferenciais dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_N) \\ &\dots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \tag{A.1}$$

A título de simplificação suponha que a Seção de Poincaré seja do tipo $x_N = 0$. É o caso deste trabalho, e esta escolha não implica em nenhuma perda de generalidade, uma vez que a técnica pode ser estendida para o caso geral. Neste caso, integrando-se a trajetória como descrito no parágrafo anterior, tem-se os dois pontos de lados opostos da seção. Sabe-se que, se a condição fosse da forma $t = a$, como t é a variável independente, o problema se resumiria a calcular a trajetória até o instante a dado. A idéia do método de Henón é mudar o sistema de equações de tal forma que x_N seja a variável independente. Isto pode ser feito dividindo-se

todas as $N - 1$ primeiras equações pela última em (A.1), e invertendo-se a última equação:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_N} &= \frac{f_1(x_1, \dots, x_N)}{f_N(x_1, \dots, x_N)} \\ &\dots \\ \frac{dx_{N-1}}{dx_N} &= \frac{f_{N-1}(x_1, \dots, x_N)}{f_N(x_1, \dots, x_N)} \\ \frac{dt}{dx_N} &= \frac{1}{f_N(x_1, \dots, x_N)}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Desta forma, a condição $x_N = 0$ é facilmente alcançada integrando-se o novo sistema, uma vez que agora x_N é o parâmetro de integração. O procedimento resume-se ao seguinte. Uma vez que a órbita atravessou a seção (isto é, x_N mudou de sinal) escolhe-se o último ponto ou o anterior (não há grande diferença em se escolher qualquer um dos dois), e muda-se o sistema (A.1) para o sistema (A.2). Integrando-se este sistema até $x_N = 0$, então, obtém-se o ponto que está sobre a seção. Encontrado o ponto, então, muda-se novamente para o sistema (A.1) e prossegue-se normalmente com a integração da órbita até que a órbita atravesse novamente a seção, e então repete-se o mesmo procedimento. Esta constante troca de sistemas é o motivo pelo qual o método de integração não deve depender dos passos anteriores, o que explica a preferência pelo Runge-Kutta de quarta ordem. O único erro deste processo é da ordem do erro de um passo do método de integração, sendo, portanto, negligível se comparado ao erro total de integração do sistema. O código do programa utilizado neste trabalho, escrito em FORTRAN 77 será transcrito nas próximas seções.

O arquivo *poincare.f*

O arquivo *poincare.f* é o corpo do programa. Ele é subdividido nas seguintes partes: Declaração de Variáveis, Abertura dos Arquivos de Dados e Leitura dos Parâmetros, Ajuste das Variáveis, Integração da Órbita e Classificação do Ponto, e, por último, a Finalização do Programa.

Declaração das Variáveis

Esta parte corresponde às seguintes linhas:

```
PROGRAM POINCARE
IMPLICIT NONE
INTEGER BACIA,NVAR,NPONTOS,KMAX,KOUNT,KSEC,I,J,NM,NB
PARAMETER(NPONTOS=10000)
DOUBLE PRECISION Z(5),POT,BETA
DOUBLE PRECISION DZSAV,TP(NPONTOS),ZP(5,NPONTOS),TI,TF,B
DOUBLE PRECISION EPS,E,L,PRECISAO,PASSO,PASSOMIN,C0
DOUBLE PRECISION XSEC(NPONTOS),YSEC(5,NPONTOS),Z0
NAMELIST/PARFIS/E,B,BETA,BACIA
```

```

NAMELIST/PARK4/TI,TF,PASSO,PASSOMIN,PRECISAO,KMAX,DZSAV,NVAR
NAMELIST/SECAO/Z0
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
COMMON/BLOCO/KMAX,KOUNT,DZSAV,TP,ZP
COMMON/SECAO/XSEC,YSEC,Z0,KSEC

```

Nesta parte todas as variáveis utilizadas no programa são declaradas, especificando-se o tipo (número inteiro, real com precisão dupla, parâmetro). São também declarados as listas de nomes de parâmetros para leitura no arquivo *data.dat*, utilizando o comando NAMELIST e constantes que serão utilizadas em mais de um programa, utilizando-se o COMMON. O papel de cada variável será explicado mais adiante.

Abertura dos Arquivos de Dados e Leitura dos Parâmetros

Tem-se as seguintes linhas:

```

OPEN(UNIT=1,FILE='secao.dat')
OPEN(UNIT=2,FILE='condinic.dat')
DO 36 I=1,100000
  READ(2,*,end=36) Z(1),Z(2),Z(3)
  OPEN(UNIT=3,FILE='data.dat')
  READ(3,PARFIS)
  READ(3,PARK4)
  READ(3,SECAO)
  CLOSE(UNIT=3,STATUS='KEEP')

```

Nesta parte o arquivo abre o arquivo de saída, *secao.dat*, e o arquivo de condições iniciais, *condinic.dat*. O comando DO corresponde às diferentes condições iniciais que o programa integra. Para cada condição inicial o programa lê novamente os parâmetros diretamente do arquivo *data.dat*, pois estes mudam durante a integração das órbitas.

Ajuste das Variáveis

Nesta parte do programa podem ser feitos ajustes nas variáveis e cálculos adicionais, tal como a determinação das condições iniciais restantes a partir da energia. No caso implementado tem-se:

```

B=B*5.D-6
Z(4)=DSQRT(-Z(3)**2+2*POT(Z(1),Z(2)))
Z(5)=0

```

Neste caso a variável $Z(4)$, que corresponde a \dot{y} , é determinada a partir da energia cinética, uma vez que as condições iniciais estão vinculadas à condição $C_J = \text{constante}$, sendo C_J a

Constante de Jacobi do sistema, correspondente à “energia”. A variável $Z(5)$ corresponde ao tempo, e é escolhido inicialmente 0. Define-se o tempo como variável para que se possa efetuar o truque de Henón, onde os papéis das variáveis y e t são trocados para se encontrar o ponto de intersecção com a seção $y = 0$.

Integração das Órbitas e Obtenção das Seções de Poincaré

Esta parte corresponde às seguintes linhas:

```

CALL RK4POINC(Z,NVAR,TI,TF,PRECISAO,PASSO,PASSOMIN,NB,NM)
DO 30 J=1,KSEC
  IF(YSEC(4,J).GT.0.D0)THEN
    WRITE(1,37) YSEC(1,J),YSEC(3,J),YSEC(4,J)
  END IF
30  CONTINUE
36  CONTINUE
37  FORMAT(5E15.7)

```

Esta é a parte onde acontece efetivamente a integração da órbita e registro dos pontos que pertencem à seção de Poincaré. A rotina RK4POINC integra o sistema e encontra as intersecções da órbita com o plano $y = 0$. O comando IF faz com que somente os pontos com $\dot{y} > 0$ sejam registrados no arquivo *secao.dat*. O funcionamento da rotina RK4POINC será detalhado mais adiante.

Finalização do Programa

As últimas linhas do programa são dadas por:

```

CLOSE(UNIT=1)
CLOSE(UNIT=2)
STOP
END

```

As quais correspondem ao fechamento do arquivo dos pontos das seções de Poincaré (*secao.dat*) e do arquivo de condições iniciais (*condinic.dat*) e, por fim, à finalização do programa.

A subrotina RK4POINC

As subrotina RK4POINC é transcrita a seguir:

```

SUBROUTINE RK4POINC(YSTART,NVAR,X1,X2,EPS,H1,HMIN,NOK,NBAD)
PARAMETER(MAXSTP=2*10**6,NMAX=10,TWO=2.D0,ZERO=0.D0)
PARAMETER(TINY=1.D-30,NPONTOS=10000)
DOUBLE PRECISION YSTART(NVAR),YSCAL(NMAX),Y(NMAX)
DOUBLE PRECISION DYDX(NMAX),X,X1,H1,X2,XSAV

```

```

DOUBLE PRECISION H,DXSAV,XP(NPONTOS),YP(5,NPONTOS)
DOUBLE PRECISION EPS,HDID,HNEXT,HMIN,XSEC(NPONTOS),
DOUBLE PRECISION YSEC(5,NPONTOS),YANT(NMAX),XANT,POT,Z0
COMMON/BLOCO/KMAX,KOUNT,DXSAV,XP,YP
COMMON/SECAO/XSEC,YSEC,Z0,KSEC
KOPCAO=1
NOK=0
NBAD=0
KOUNT=0
KSEC=0
IF(YSTART(2).EQ.Z0)THEN
  KSEC=KSEC+1
  XSEC(KSEC)=YSTART(5)
  DO 40 J=1,NVAR
    YSEC(J,KSEC)=YSTART(J)
40  CONTINUE
END IF
X=X1
H=DSIGN(H1,X2-X1)
DO 11 I=1,NVAR
  Y(I)=YSTART(I)
11  CONTINUE
IF(KMAX.GT.0) XSAV=X-DXSAV*TWO
DO 16 NSTP=1,MAXSTP
  CALL CASCA(X,Y,DYDX,KOPCAO)
  DO 12 I=1,NVAR
    YSCAL(I)=DABS(Y(I))+DABS(H*DYDX(I))+TINY
12  CONTINUE
IF(KMAX.GT.0)THEN
  IF(DABS(X-XSAV).GT.DABS(DXSAV))THEN
    IF(KOUNT.LT.(KMAX-1))THEN
      KOUNT=KOUNT+1
      XP(KOUNT)=X
      DO 13 I=1,NVAR
        YP(I,KOUNT)=Y(I)
13  CONTINUE
      PRINT*,POT(Y(1),Y(2))-Y(3)**2/2-Y(4)**2/2
      XSAV=X
    END IF
  END IF
END IF

```

```

END IF
IF((X+H-X2)*(X+H-X1).GT.ZERO) H=X2-X
DO 20 I=1,NVAR
    YANT(I)=Y(I)
20 CONTINUE
XANT=X
CALL PASSOCONTROL(Y,DYDX,NVAR,X,H,EPS,YSCAL,HDID,HNEXT,
&KOPCAO)
IF(Y(4).NE.0.D0)THEN
    IF((Y(2)-Z0)*(YANT(2)-Z0).LT.0.D0)THEN
        KOPCAO=0
        CALL CASCA(YANT(2),YANT,DYDX,KOPCAO)
        CALL RK4(YANT,DYDX,NVAR,YANT(2),-YANT(2)+Z0,Y,KOPCAO)
        KSEC=KSEC+1
        DO 30 J=1,5
            YSEC(J,KSEC)=Y(J)
30 CONTINUE
        XSEC(KSEC)=Y(5)
        X=Y(5)
        KOPCAO=1
        CALL CASCA(X,Y,DYDX,KOPCAO)
        CALL RK4(Y,DYDX,NVAR,X,1.D-3,Y,KOPCAO)
        X=X+1.D-3
    END IF
END IF
IF(HDID.EQ.H)THEN
    NOK=NOK+1
ELSE
    NBAD=NBAD+1
END IF
IF((X-X2)*(X2-X1).GE.ZERO)THEN
    DO 14 I=1,NVAR
        YSTART(I)=Y(I)
14 CONTINUE
IF(KMAX.NE.0)THEN
    KOUNT=KOUNT+1
    XP(KOUNT)=X
    DO 15 I=1,NVAR
        YP(I,KOUNT)=Y(I)
15 CONTINUE

```

```

        END IF
        RETURN
    END IF
    IF(DABS(HNEXT).LT.HMIN) THEN
        STOP 'PASSO MENOR QUE O MINIMO'
        PRINT*,YP(1,KOUNT),YP(2,KOUNT),XP(KOUNT)
        RETURN
    END IF
    H=HNEXT
16  CONTINUE
    STOP 'TOO MANY STEPS'
    RETURN
END

```

Esta subrotina não precisa ser modificada, por isso o seu funcionamento será explicado apenas em linhas gerais. As variáveis de entrada do programa são *YSTART* (vetor de variáveis dado no instante inicial *X1*; é também por onde é dada a saída do programa, o vetor de variáveis no instante final *X2*), *NVAR* (número de variáveis do vetor *YSTART*), *X1* (instante inicial), *X2* (instante final; é também por onde é dado o instante final efetivo, isto é, o instante até o qual foi possível continuar a integração), *EPS* (precisão dada), *H1* (passo inicial proposto), *HMIN* (tamanho mínimo do passo; pode ser zero). Como saída, além do instante final efetivo (em *X2*) e do vetor de variáveis neste instante (dado em *YSTART*) o programa também fornece o número de passos “bons” (*NOK*) e “ruins” (*NBAD*) tomados pelo integrador.

Além destas variáveis existem algumas compartilhadas por outros programas através do comando COMMON. O primeiro conjunto de variáveis, BLOCO, corresponde às variáveis *KMAX* (que indica quantos passos intermediários podem ser armazenados em *XP* e *YP*; se *KMAX* = 0 estas variáveis ficam vazias, e se *KMAX* é excedido *XP* e *YP* guardam adicionalmente apenas o resultado final), *KOUNT* (que é a contagem dos pontos armazenados em *XP* e *YP*; *KOUNT* não pode exceder *KMAX*), *DXSAV* (que indica o tamanho mínimo dos passos que podem ser armazenados), *XP* e *YP* (as variáveis onde são guardados os passos). O segundo conjunto, SECAO, corresponde às variáveis *XSEC* (os instantes em que a órbita se encontra com a seção $y = 0$), *YSEC* (valor das variáveis quando encontram o plano $y = 0$), *Z0* (que define a seção $y = Z0$; para este caso, $Z0 = 0$), *KSEC* (o número de pontos armazenados em *XSEC* e *YSEC*).

O papel desta subrotina é integrar a órbita a partir das condições iniciais e encontrar os pontos em que $y = 0$. Para isto ele utiliza o integrador RK4 com o controlador do tamanho do passo PASSOCONTROL de forma que o erro não ultrapasse o valor permitido. Ele guarda passos anteriores em *YSAV* e *XSAV*, e, caso a seção seja ultrapassada, ele prepara o sistema para o truque de Henón através da subrotina CASCA. A variável que indica se o sistema deve ser modificado é a variável *KOPCAO*, que passa do valor 1 (a órbita ainda não atravessou o

plano $y = 0$) para o valor 0 (a órbita atravessou o plano $y = 0$). Depois de realizada a modificação, utilizando os passos salvos, o sistema é integrado até o plano $y = 0$ e o resultado obtido é armazenado nas variáveis $YSEC$ (vetor de variáveis) e $XSEC$ (instante em que a órbita atinge o plano $y = 0$). O sistema então é modificado novamente para sua forma original e a órbita é novamente integrada, até atravessar novamente o plano $y = 0$, e assim sucessivamente. No fim da rotina se obtém as variáveis $YSEC$ e $XSEC$, que contém os pontos da trajetória que estão no plano $y = 0$.

A subrotina PASSOCONTROL

As subrotina PASSOCONTROL é transcrita a seguir:

```

SUBROUTINE PASSOCONTROL(Y,DYDX,N,X,HTRY,EPS,YSCAL,
&HDID,HNEXT,KOPCAO)
  PARAMETER(NMAX=10,PGROW=-0.20D0,PSHRNK=-0.25D0)
  PARAMETER(FCOR=1.D0/15.D0,ONE=1.D0,SAFETY=0.9D0)
  PARAMETER(ERRCON=6.D-4)
  REAL*8 Y(N),DYDX(N),YSCAL(N),YTEMP(NMAX),YSAV(NMAX),DYSAV(NMAX)
  REAL*8 X,HTRY,EPS,HDID,HNEXT,XSAV,H,HH,ERRMAX
  XSAV=X
  DO 11 I=1,N
    YSAV(I)=Y(I)
    DYSAV(I)=DYDX(I)
11  CONTINUE
    H=HTRY
1   HH=0.5D0*H
    CALL RK4(YSAV,DYSAV,N,XSAV,HH,YTEMP,KOPCAO)
    X=XSAV+HH
    CALL CASCA(X,YTEMP,DYDX,KOPCAO)
    CALL RK4(YTEMP,DYDX,N,X,HH,Y,KOPCAO)
    X=XSAV+H
    IF(X.EQ.XSAV) STOP 'PASSO NAO-SIGNIFICATIVO'
    CALL RK4(YSAV,DYSAV,N,XSAV,H,YTEMP,KOPCAO)
    ERRMAX=0.D0
    DO 12 I=1,N
      YTEMP(I)=Y(I)-YTEMP(I)
      ERRMAX=DMAX1(ERRMAX,DABS(YTEMP(I)/YSCAL(I)))
12  CONTINUE
    ERRMAX=ERRMAX/EPS
    IF(ERRMAX.GT.ONE)THEN
      H=SAFETY*H*(ERRMAX**PSHRNK)

```

```

      GO TO 1
    ELSE
      HDID=H
      IF(ERRMAX.GT.ERRCON)THEN
        HNEXT=SAFETY*H*(ERRMAX**PGROW)
      ELSE
        HNEXT=4.D0*H
      END IF
    END IF
    DO 13 I=1,N
      Y(I)=Y(I)+YTEMP(I)*FCOR
13  CONTINUE
    RETURN
  END

```

Da mesma forma que a subrotina RK4POINC esta subrotina não precisa ser modificada, de forma que o seu funcionamento também não será detalhado. As variáveis de entrada desta subrotina são Y (vetor de variáveis no instante X), $DYDX$ (vetor de derivadas no instante X), N (número de variáveis), X (o instante dado), $HTRY$ (passo tentativo), EPS (precisão requerida), $YSCAL$ (vetor contra o qual o erro é escalado) e $KOPCAO$ (indica se o sistema é o original ou o modificado para o truque de Henón). As variáveis de saída são $HDID$ (passo efetivamente realizado) e $HNEXT$ (o próximo passo tentativo).

Esta subrotina controla o precisão da integração da órbita ajustando o tamanho de cada passo. Para isso o programa toma o passo tentativo e executa a integração para este passo e para dois “meio-passos” (o passo tentativo é dividido em dois e a integração é efetuada em duas etapas). Os resultados são tomados em escala (com auxílio do vetor $YSCAL$) e são comparados entre si de forma a se determinar o erro relativo entre os dois resultados. Caso este erro seja maior do que a precisão requerida (dada por EPS) o passo tentativo é encolhido de um fator dependente deste erro e o processo recomeça. Caso o erro seja menor do que a precisão requerida é utilizado o resultado com o menor passo. Existem alguns mecanismos de controle imbutidos nesta subrotina. O programa deve se assegurar de que o passo tentativo não é nulo e também para saber com qual sistema está trabalhando, o original ou o modificado (através da variável $KOPCAO$ e a subrotina CASCA)

A subrotina CASCA

As subrotina CASCA é transcrita a seguir:

```

SUBROUTINE CASCA(PARINT,Z,DZDT,KOPCAO)
  REAL*8 DZDT(5),Z(5),PARINT
  REAL*8 EPS,B,E,L,C0,Z1,Z2,TRUQUE
  REAL*8 DUDT,DVDT

```

```

COMMON/BLOCO2/B,EPS,E,L,C0
Z1=Z(1)
Z2=Z(2)
IF(KOPCAO.EQ.1)THEN
  DZDT(1)=Z(3)
  DZDT(2)=Z(4)
  DZDT(3)=DUDT(Z(1),Z(2),Z(3),Z(4))
  DZDT(4)=DVDT(Z(1),Z(2),Z(3),Z(4))
  DZDT(5)=1.D0
  RETURN
ELSE
  TRUQUE=Z(4)
  DZDT(1)=Z(3)/TRUQUE
  DZDT(2)=1.D0
  DZDT(3)=DUDT(Z(1),Z(2),Z(3),Z(4))/TRUQUE
  DZDT(4)=DVDT(Z(1),Z(2),Z(3),Z(4))/TRUQUE
  DZDT(5)= 1.D0/TRUQUE
  RETURN
END IF
END

```

A subrotina *CASCA* é a parte do programa responsável pelo truque de Henón. É esta rotina que faz a modificação do sistema, a partir do original, para o novo sistema no qual a variável independente é a variável y . O algoritmo já está bem detalhado na subseção referente ao truque de Henón, por isso não é necessário repetí-lo aqui. As variáveis de entrada são *PARINT* (o “instante” no qual será feita a modificação), *Z* (o vetor de variáveis antes da modificação), *DZDT* (o vetor de derivadas antes da modificação), e *KOPCAO* (a variável que indica se a órbita já cruzou o plano $y = 0$). A saída corresponde às mesmas variáveis *PARINT*, *Z* e *DZDT*, modificados. Caso tenha-se $KOPCAO = 0$ a órbita cruzou o plano $y = 0$ e efetua-se a mudança de tal forma que a variável independente seja y . Caso tenha-se $KOPCAO = 1$ o sistema não está mais perto deste plano, e, portanto, o sistema retorna à sua forma original. Este algoritmo foi elaborado para comportar um sistema duas de equações de segunda ordem. Caso o sistema seja diferente é necessário editar esta parte do programa. As modificações, no entanto, são em geral simples.

A subrotina **RK4**

As subrotina *RK4* é transcrita a seguir:

```

SUBROUTINE RK4(Y,DYDX,N,X,H,YOUT,KOPCAO)
PARAMETER (NMAX=10) !NUMERO MAXIMO DE VARIAVEIS

```

```

REAL*8 Y(N),DYDX(N),YOUT(N),YT(NMAX),DYT(NMAX),DYM(NMAX)
REAL*8 H,HH,X,XH,H6
HH=H*0.5D0
H6=H/6.D0
XH=X+HH
DO 11 I=1,N
    YT(I)=Y(I)+HH*DYDX(I)
11 CONTINUE
CALL CASCA(XH,YT,DYT,KOPCAO)
DO 12 I=1,N
    YT(I)=Y(I)+HH*DYT(I)
12 CONTINUE
CALL CASCA(XH,YT,DYM,KOPCAO)
DO 13 I=1,N
    YT(I)=Y(I)+H*DYM(I)
    DYM(I)=DYT(I)+DYM(I)
13 CONTINUE
CALL CASCA(X+H,YT,DYT,KOPCAO)
DO 14 I=1,N
    YOUT(I)=Y(I)+H6*(DYDX(I)+DYT(I)+2.D0*DYM(I))
14 CONTINUE
RETURN
END

```

Esta rotina avança a solução dada usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. As variáveis de entrada são Y (vetor de variáveis no instante X), $DYDX$ (vetor de derivadas no instante X), N (número de variáveis no vetor Y), X (instante inicial, no qual são dados Y e $DYDX$), H (o tamanho do passo) e $KOPCAO$, que indica se o sistema é o original ou o modificado. A variável de saída é $YOUT$, que é o vetor de variáveis calculado no instante $X + H$.

O arquivo *sistema.f*

O arquivo *sistema.f* está transcrito a seguir

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION DUDT(u,v,uu,vv)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION u,v,uu,vv,E,B,DLT,BETA
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
DLT=DSQRT(u**2+v**2)
DUDT=2.d0*vv+(3.d0-1/((DLT**(3-BETA))*(DLT-B)**BETA))*u

```

```

RETURN
END FUNCTION DUDT

DOUBLE PRECISION FUNCTION DVDT(u,v,uu,vv)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION u,v,uu,vv,E,B,BETA,DLT
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
DLT=DSQRT(u**2+v**2)
DVDT=-2.d0*uu-v/((DLT**(3-BETA))*(DLT-B)**BETA)
RETURN
END FUNCTION DVDT

DOUBLE PRECISION FUNCTION POT(u,v)
IMPLICIT NONE
DOUBLE PRECISION u,v,E,B,BETA,DLT
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
DLT=DSQRT(u**2+v**2)
POT = E + 1.5*u**2 + ((DLT/(DLT-B))**(BETA-1)-1)/(B*(BETA-1))
RETURN
END FUNCTION POT

```

Nestes arquivos estão as equações que definem o sistema dadas na forma de duas funções, *DUDT* e *DVDT*. O caso implementado trata-se de um sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem. O programa foi elaborado para este tipo de sistema. Caso o sistema seja diferente é necessário fazer alterações neste arquivo e na subrotina *CASCA*. As demais partes do programa não dependem da forma das equações.

A.4 LYAPWOLF

Propósito do Programa

O programa *LYAPWOLF* tem como propósito calcular os coeficientes de Lyapunov do sistema baseando-se no crescimento da diferença entre duas órbitas próximas. No entanto, ao invés de integrar com base no mesmo sistema de equações duas órbitas distintas que comecem próximas e comparar a taxa de afastamento entre elas, o algoritmo utiliza um sistema composto contendo o sistema original e uma linearização do mesmo, que integram respectivamente uma órbita e um conjunto de vetores de diferença com base nesta órbita. Os coeficientes de Lyapunov são obtidos através da taxa de crescimento destes vetores de diferença depois de um determinado tempo de integração. Para evitar problemas numéricos devidos ao crescimento dos vetores efetua-se uma ortonormalização de Gram-Schmidt a cada passo. O método será detalhado mais adiante.

Compilação do Programa

O programa LYAPWOLF é compilado da seguinte forma:

```
f77 -o lyapwolf lyapwolf.f system.f dverk.f
```

O arquivo resultante é o arquivo *lyapwolf*, que pode ser executado através do seguinte comando:

```
./lyapwolf
```

Para rodar o executável é necessário apenas o arquivo de dados *data.dat* (que contém informações para a integração do sistema, tais como parte das condições iniciais, tempo de integração, erro tolerado, etc.). Nas próximas seções será explicado o funcionamento de cada um dos arquivos, incluindo formas de alterá-lo para outros sistemas dinâmicos.

Método Para Calcular os Coeficientes de Lyapunov

A definição do maior coeficiente de Lyapunov é dada de acordo com o limite duplo

$$\lambda = \lim_{\substack{\delta_0 \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \left[\frac{\log(\delta/\delta_0)}{t} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Ou seja, o coeficiente máximo de Lyapunov é dado pelo logaritmo da taxa de separação entre duas trajetórias inicialmente muito próximas ($\delta_0 \rightarrow 0$), depois de passado um longo tempo de evolução ($t \rightarrow \infty$). Caso o coeficiente seja positivo ($\lambda > 0$) as órbitas se separam exponencialmente, e o sistema é dito *caótico*. Seja o sistema autônomo composto por N equações dado por

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}), \quad (\text{A.4})$$

sendo $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ a função vetorial de \mathbf{y} que define o sistema. O sistema de equações dado em (A.4) e as condições iniciais $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ definem uma órbita de forma única. Fazendo-se a linearização do sistema define-se o vetor diferença de \mathbf{y} por

$$\delta\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{y})\delta\mathbf{y}, \quad (\text{A.5})$$

sendo $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{y})$ o jacobiano do sistema, dado por

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_N}{\partial x_1} & \frac{\partial y_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

que depende da órbita de referência \mathbf{y} . Novamente as condições iniciais $\delta\mathbf{y}(t_0) = \delta\mathbf{y}_0$ determinam uma solução de forma única. A norma do vetor $\delta\mathbf{y}(t)$ fornece, em primeira ordem, a distância entre a órbita de referência $\mathbf{y}(t)$ com condições iniciais $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ e uma segunda órbita com condições iniciais $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 + \delta\mathbf{y}_0$, calculada no instante t .

Em particular os sistemas hamiltonianos são não-dissipativos. Isto significa que se um determinado conjunto de condições iniciais é evoluído através de um sistema hamiltoniano o volume que este conjunto ocupará no espaço de fases deve permanecer constante. Isto significa que, se λ_i , $i = 1, \dots, N$ são os coeficientes de Lyapunov do sistema, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0$. Desta forma, se existe $\lambda_j > 0$, deve existir algum $\lambda_k < 0$. Se $\lambda_j > 0$ corresponde ao crescimento do vetor $\delta\mathbf{y}(t)$ para determinada direção, $\lambda_k < 0$ corresponde analogamente ao decrescimento deste vetor para outra direção. Isto significa que um vetor de diferença que inicialmente possua uma componente na direção de maior crescimento, se aproxima arbitrariamente desta direção depois de um tempo suficientemente longo. Se o vetor de diferença inicial estiver em uma direção perpendicular a de maior crescimento, mas possuir uma componente na direção de segundo maior crescimento, o vetor tenderá a esta direção. E assim por diante, até as direções de encolhimento. Estas direções são perpendiculares umas às outras, de forma que, ao calcular todos os coeficientes deve-se ter um conjunto ortogonal de vetores diferença.

O crescimento da distância entre as duas órbitas em sistemas caóticos limitados pode se tornar um problema no cálculo dos coeficientes de Lyapunov. Se o tempo necessário para a convergência do cálculo dos coeficientes for demasiado longo, a distância entre as órbitas pode se tornar da ordem de grandeza do tamanho da distância, e isto afetará seu crescimento exponencial dado que o sistema é limitado. Para contornar este problema é necessário re-escalonar a distância entre as órbitas.

O algoritmo para calcular os coeficientes de Lyapunov consiste no seguinte. São integradas a órbita de referência e as órbitas de diferença respectivas. O número de órbitas de diferença é igual ao número de equações (de primeira ordem) que compõe o sistema (no caso implementado, quatro equações de Hill modificadas). As equações do sistema original e linearizado se encontram no arquivo *sistema.f*. As condições iniciais das órbitas de diferença inicialmente são perpendiculares entre si (para assegurar que sejam integradas todas as direções). Depois de um passo de integração, é calculada a norma de cada vetor de diferença $\delta\mathbf{y}(t)$, e registrado o crescimento do seu comprimento com relação ao comprimento imediatamente anterior, que é sempre unitário, conforme pode ser visto a seguir. Depois disso é aplicado o procedimento de ortonormalização de Gram-Schmidt, de forma a tornar o conjunto de vetores novamente ortogonal e controlar o crescimento excessivo, tornando os comprimentos de referência sempre unitários. A seguir as órbitas são novamente integradas até o próximo passo, e assim sucessivamente, até um período escolhido. Caso esse período de integração seja suficientemente longo as direções dos vetores diferença devem permanecer razoavelmente constantes, assim como o valor do coeficiente obtido a cada passo. Cada coeficiente de crescimento corresponde, desta forma, a um dos coeficientes de Lyapunov.

O arquivo *lyapwolf.f*

O programa LYAPWOLF é basicamente uma cópia de Wolf *et al* [21]. A única adaptação necessária para outros sistemas é quando às constantes em COMMON, as quais podem variar para diferentes sistemas. A seguir será descrito o funcionamento de cada parte do programa principal.

Declaração de Variáveis

Tem-se as seguintes linhas

```

PROGRAM LYAPWOLF
IMPLICIT NONE
CHARACTER basin*5
INTEGER I,N,NN,IO,NEQ,IND,J,K,L,iff,Q
DOUBLE PRECISION Y,ZNORM,GSC,CUM,C,W
DOUBLE PRECISION TOL,STPSIZE,t0,t,E,f,NSTEP,P
DOUBLE PRECISION A,B,x0,y0,o0,ti,tf,dt,eabs,erel
DOUBLE PRECISION work,iwork,BETA
PARAMETER(N=4)
1  PARAMETER(NN=20)
EXTERNAL FCN
DIMENSION Y(NN),ZNORM(N),GSC(N),CUM(N)
DIMENSION work(100+21*NN),iwork(5),C(24),W(NN,9)
NAMELIST/PARFIS/E,B,BETA
NAMELIST/PARINT/eabs,erel,iff
NAMELIST/CONDINIC/x0,y0,o0,basin
NAMELIST/TIME/ti,tf,dt
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA

```

Nesta parte todas as variáveis utilizadas no programa são declaradas, especificando-se o tipo (número inteiro, real com precisão dupla, parâmetro). São também declarados as listas de nomes de parâmetros para leitura no arquivo *data.dat*, utilizando o comando NAMELIST e constantes que serão utilizadas em mais de um programa, utilizando-se o COMMON. O papel de cada variável será explicado mais adiante.

Abertura dos Arquivos de Dados e Leitura dos Parâmetros

Esta parte corresponde às seguintes linhas

```

OPEN(UNIT=1,FILE='evolucao.dat')
OPEN(UNIT=2,FILE='coeficientes.dat')
OPEN(UNIT=3,FILE='data.dat')

```

```

READ(3,PARFIS)
READ(3,PARINT)
READ(3,CONDINIC)
READ(3,TIME)
CLOSE(UNIT=3,STATUS='KEEP')

```

Nesta são abertos os arquivos de dados do sistema (*data.dat*) e os arquivos de saída (*evolucao.dat* e *coeficientes.dat*). A seguir os valores do arquivo *data.dat* são lidos e este arquivo é fechado sem alterações.

Ajuste das Variáveis

Nesta parte do programa podem ser feitos ajustes nas variáveis, embora estes ajustes devam ser feitos de preferência no próprio arquivo de dados (*data.dat*). No caso implementado foi feito o seguinte ajuste:

$$B=B*5.D-6$$

Preparação das variáveis para a integração

Esta parte consiste nas seguintes linhas

```

CALL STARTL(x0,y0,o0,Y)
DO I = 1,N
  CUM(I) = 0.0
ENDDO
t0=ti
NSTEP = (tf-ti)/dt
NEQ = NN

```

Nesta parte o problema prepara as condições iniciais na forma $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ para a órbita de referência e $(\delta x_0, \delta y_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0)$ para as quatro órbitas de diferença, com auxílio da sub-rotina STARTL. A seguir, coloca os coeficientes de crescimento inicialmente iguais a zero, o tempo inicial t_i igual a t_0 , define o número de passos ($NSTEP$) conforme o tamanho do passo (dt) e define o número de equações de acordo com NN , utilizando valores que foram lidos a partir do arquivo *data.dat*.

Integração das Órbitas

Tem-se as seguintes linhas

```

DO P = 1.D0,NSTEP,1.D0
  t = ti + dt*P

```

```

CALL DVERK(NEQ,FCN,t0,Y,t,eabs,ifl,C,NEQ,W)
ZNORM(1) = 0.0
DO J = 1,N
    ZNORM(1) = ZNORM(1) + Y(N*J+1)**2
ENDDO
ZNORM(1) = DSQRT(ZNORM(1))
DO J = 1,N
    Y(N*J+1) = Y(N*J+1)/ZNORM(1)
ENDDO

```

O primeiro comando DO refere-se aos *NSTEP* passos tomados. As órbitas são integradas utilizando a subrotina DVERK até o passo seguinte. A seguir, é calculada a norma do primeiro vetor diferença (que será o vetor que fornecerá o valor do coeficiente máximo de Lyapunov). Em seguida este vetor é normalizado, de forma a prepará-lo para a ortonormalização de Gram-Schmidt. A norma original deste vetor, contudo, é guardada na variável *ZNORM(1)*.

Ortonormalização de Gram-Schmidt

As próximas linhas do programa corresponde à ortogonalização dos demais vetores diferença em relação ao primeiro através do método de Gram-Schmidt. Este método é bem conhecido: dado um conjunto de *N* vetores linearmente independentes não ortogonais, (v_1, \dots, v_N) , um conjunto ortogonal equivalente (u_1, \dots, u_N) é dado por

$$u_i = v_i - \sum_j^{i-1} \frac{u_j^T v_i}{u_j^T u_j} u_j. \quad (\text{A.7})$$

Por fim, $t_i = u_i / \|u_i\|$ são os vetores ortonormais correspondentes. As linhas do programa são as seguintes

```

DO J = 2,N
    DO K = 1,(J-1)
        GSC(K) = 0.0
        DO L = 1,N
            GSC(K) = GSC(K)+Y(N*L+J)*Y(N*L+K)
        ENDDO
    ENDDO
DO K = 1,N
    DO L = 1,(J-1)
        Y(N*K+J) = Y(N*K+J)-GSC(L)*Y(N*K+L)
    ENDDO
ENDDO
ZNORM(J) = 0.0

```

```

DO K = 1,N
  ZNORM(J) = ZNORM(J)+Y(N*K+J)**2
ENDDO
ZNORM(J) = DSQRT(ZNORM(J))
DO K = 1,N
  Y(N*K+J) = Y(N*K+J)/ZNORM(J)
ENDDO
ENDDO

```

Conforme pode ser visto, as normas originais são guardadas no vetor de variáveis *ZNORM*. Esta informação é utilizada mais adiante, ao se analisar a variação destas normas depois do passo de integração.

Obtenção dos Coeficientes de Lyapunov

Esta parte corresponde às seguintes linhas

```

DO K = 1,N
  CUM(K) = CUM(K)+DLOG(ZNORM(K))
ENDDO
IF (MOD(P,2000.D0).EQ.0) THEN
  WRITE(1,*) t,CUM(4)/t
ENDIF
ENDDO
WRITE(2,*) CUM(1)/t,CUM(2)/t,CUM(3)/t,CUM(4)/t
WRITE(2,*) 'SOMA = ',(CUM(1)+CUM(2)+CUM(3)+CUM(4))/t

```

Nesta parte a partir do crescimento/decrescimento das normas dos vetores diferença são obtidos os coeficientes de crescimento, tomando-se o logaritmo deste fator de crescimento/decrescimento e dividindo pelo tempo de integração t . São obtidos N coeficientes, o maior sendo o primeiro. A cada passo estes coeficientes são registrados no arquivo *evolucao.dat*. No último passo, por fim, estes coeficientes, que já convergiram para os valores dos coeficientes de Lyapunov, são escritos no arquivo *coeficientes.dat*. Como se trata de um sistema hamiltoniano é registrada também a soma destes coeficientes, para certificar-se de que o resultado é nulo.

Finalização do Programa

As linhas

```

CLOSE(UNIT=1)
CLOSE(UNIT=2)
END

```

correspondem, por fim, ao fechamento dos arquivos *evolucao.dat* e *coeficientes.dat* e finalização do programa.

Este programa possui além dos programa principal uma série de subrotinas, que estão escritas nos arquivos *system.f* e *system.f* e *dverk.f*. A seguir o conteúdo de cada um destes arquivos será detalhado.

O arquivo *system.f*

Este arquivo possui as subrotinas complementares ao programa principal que devem ser alteradas para cada sistema. Em particular este programa utiliza as subrotinas STARTL e FCN.

A Subrotina STARTL

A subrotina STARTL está transcrita abaixo.

```

SUBROUTINE STARTL(x0,y0,o0,Y)
INTEGER NN,N
DOUBLE PRECISION x0,y0,o0,Y,E,B,BETA,v
PARAMETER(N=4)
PARAMETER (NN=20)
DIMENSION Y(NN)
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
Y(1) = x0
Y(2) = y0
v=DSQRT(2.0*( E + 1.5*Y(1)**2 + 1./(DSQRT(Y(1)**2+Y(2)**2))))
Y(3) = v*COS(o0)
Y(4) = v*SIN(o0)
DO I = N+1,NN
    Y(I) = 0.0
ENDDO
Y(5)=1.d0
Y(10)=1.d0
Y(15)=1.d0
Y(20)=1.d0
RETURN
END

```

Esta subrotina tem como objetivo estabelecer as condições iniciais as órbita de referência e das órbitas de diferença. No caso implementado o sistema lê as condições como a posição inicial (x_0, y_0) , a “energia” E e o ângulo com que a partícula inicia a trajetória o_0 . A partir destes dados, conhecendo a função potencial, ele determina a energia cinética e , a partir dela, o módulo da velocidade inicial v . De posse do ângulo o_0 e do módulo v obtém-se as componentes da velocidade inicial. As condições iniciais dos vetores de diferença são definidas de forma simples, colocando uma das componentes igual a 1 e as demais iguais a 0. Isto assegura a

ortonormalidade inicial deste conjunto de vetores iniciais. Todas as componentes são guardadas no vetor de variáveis Y . O número de componentes de Y é dado por $N + N \times N$, sendo N o número de equações de primeira ordem do sistema. No caso implementado tem-se $N = 4$, de forma que o vetor Y possui $4 + 4 \times 4 = 20$ componentes.

A Subrotina FCN

A subrotina FCN é dada a seguir

```

SUBROUTINE FCN (NEQ,T,Y,YP)
IMPLICIT NONE
INTEGER I,NEQ
DOUBLE PRECISION T,Y,YP,AA,M,DLT,B,BB,DELTA1,E,CC,BETA
DIMENSION Y(20),YP(20)
COMMON/CONSTANTES/E,B,BETA
DLT = DSQRT(Y(1)**2+Y(2)**2)
BB = 1/((DLT**(3-BETA))*((DLT-B)**BETA))
AA=BB*(3*(DLT-B)+BETA*B)/((DLT-B)*DLT**2)
YP(1) = Y(3)
YP(2) = Y(4)
YP(3) = 2.*Y(4) + (3. - BB)*Y(1)
YP(4) = -2.*Y(3) - BB*Y(2)
DO I = 0,3
  CC = AA*(Y(1)*Y(5+I) + Y(2)*Y(9+I))
  YP(5+I) = Y(13+I)
  YP(9+I) = Y(17+I)
  YP(13+I)= 2.*Y(17+I)+(3. - BB)*Y(5+I) + CC*Y(1)
  YP(17+I)= -2.*Y(13+I) - BB*Y(9+I) + CC*Y(2)
ENDDO
RETURN
END

```

Esta subrotina fornece as equações do sistema. A primeira parte corresponde à órbita de referência, sendo, portanto, o sistema completo. A segunda parte corresponde às órbitas de diferença, sendo, portanto, o sistema linearizado, conforme o sistema da equação (A.6). São integradas N cópias deste sistema linearizado, o que está expresso na forma do comando DO. Esta subrotina é customizada para ser utilizada pelo integrador DVERK. As entradas são NEQ (número de equações), T (o instante correspondente na integração) e Y (o vetor de variáveis no instante T). A saída, utilizada pelo integrador, é o vetor YP , o qual que representa o vetor de derivadas no instante T .

O arquivo *dverk.f*

A subrotina `DVERK(NEQ, FCN, t, Y, tfinal, eabs, ifl, C, NW, W)` é um integrador externo ao programa desenvolvido por Hull *et al.* [56], podendo ser trocado caso necessário. Neste caso trata-se de um método de Runge-Kutta baseado no par de fórmulas de quinta e sexta ordem formuladas por Verner [57] para um sistema de equações de primeira ordem com condições iniciais. As variáveis de entrada são dadas por

- *NEQ*, o número de equações do sistema (o qual deve ser dado na forma de equações de primeira ordem);
- *FCN*, subrotina que fornece as derivadas no instante inicial *t*;
- *t*, o instante inicial;
- *Y*, o vetor de variáveis no instante inicial *t*;
- *tfinal* o instante final;
- *eabs*, ordem do erro tolerado;
- *ifl*, variável que fornece como inicia a integração, com o uso do vetor de comunicações *C*. Caso *ifl* = 1 o vetor de comunicações é inicialmente com valores automáticos. Para *ifl* = 2 deve-se fornecer as primeiras 9 entradas de *C*;
- *C*, o vetor de comunicações. As primeiras 9 componentes deste vetor tratam de informações necessárias à integração que podem ser fornecidas pelo usuário (fornecendo-se *ifl* = 2). As demais são calculadas automaticamente pelo programa. As variáveis fornecidas pelo usuário são *C*(1) (a forma do controle do erro), *C*(2) (valor base caso *C*(1) = 3), *C*(3) (passo mínimo da integração), *C*(4) (passo inicial), *C*(5) (fator de escala da integração), *C*(6) (passo máximo), *C*(7) (número máximo de passos), *C*(8) e *C*(9) (número de interrupção). Uma descrição mais detalhada do funcionamento destas variáveis é dada no código fonte do programa;
- *NW* é a primeira dimensão da matriz *W*. Deve ser maior ou igual a *NEQ*, no caso implementado coloca-se *NW* = *NEQ*;
- *W* matriz de trabalho utilizada no programa, responsável por guardar os valores necessários à próxima integração. É preciso apenas declará-la.

A saída do programa é dada utilizando-se as variáveis de entrada. São elas:

- *t* o instante integrado final. Caso a integração termine normalmente tem-se *t* = *tfinal*. Caso contrário *t* fornece o instante em que a integração foi interrompida;
- *Y* vetor de variáveis no instante *t*;

- ifl retorna o resultado da integração. O programa retorna $ifl = 3$ quando a integração termina normalmente. Se $ifl = 4, 5$ ou 6 a integração foi interrompida a pedido do usuário (através das opções $C(8)$ e $C(9)$). Caso ifl seja negativo a integração não foi capaz de atingir t_{final} , seja por que não foi possível satisfazer a tolerância ao erro desejada ($ifl = -3$), ou o passo necessário é muito pequeno ($ifl = -2$) ou então o número de passos ficou muito grande ($ifl = -1$);
- W matriz de trabalho que fornece as variáveis necessárias a uma nova integração a partir do instante final integrado.

As variáveis importantes ao funcionamento do programa LYAPWOLF são as variáveis Y e t . As demais são variáveis úteis apenas no contexto da integração, que podem ser ajustadas para se obter o melhor resultado.

Referências Bibliográficas

- [1] Hill, G.W. Am. J. Math., **1** (1878) 129.
- [2] Heggie, D. 2001, *em* The Restless Universe, ed. B. A. Steves e A. J. Maciejewski (Scottish Universities Summer School in Physics and Institute of Physics Publishing, Bristol), 109.
- [3] Chicone, C., Mashhoon, B. e Retzloff, D. G. Ann. Inst. H. Poincaré, **64** (1996) 87.
- [4] Meletlidou, E., Ichtiaroglou S. e Winterberg, F. J. Celest. Mech. Dyn. Astron., **80** (2001) 145.
- [5] Simó, C. e Stuchi, T. J. Phys. D, **140** (2000) 1
- [6] Paczyński, B. e Wiita, P. J. A&A, **88** (1980) 23
- [7] Artemova, I. V., Björnsson, G. e Novikov, I. D. Astroph. J., **461** (1996) 565.
- [8] Alvi, K. Phys. Rev. D **61** (1999) 124013.
- [9] Blanchet, L., Faye, G. e Ponsot, B. Phys. Rev. D, **58** (1998) 124002.
- [10] Murray, C. D. e Dermott, S. F. 1999, Solar System Dynamics (Cambridge University Press, Cambridge)
- [11] Ott, E. 1993, Chaos in Dynamical Systems (Cambridge University Press, Cambridge)
- [12] Almeida, A.M.O. 1995, Sistemas Hamiltonianos - Caos e Quantização (Editora da Unicamp, Campinas)
- [13] Asonov, D. V. 1967, *Geodesic Flows and Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature*, Proc. Steklov Inst. Math. 90.
- [14] Hammel, S. M., Yorke, J. A. e Grebogi, C. J. Complexity, **3** (1987) 136.
- [15] Coven, E. M., Kan, I., Yorke, J. A. Trans. Am. Math. Soc., **308** (1986) 227.
- [16] Tabor, M. 1989, Chaos and Integrability in Non-Linear Dynamics (John Wiley & Sons, New York).

- [17] Komolgorov, A. N. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **98** (1954) 525.
- [18] Arnold, V. I. Russ. Math. Surv., **18** (1963) 85.
- [19] Moser, J. Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys., *K1* (1962) 1.
- [20] Benettin, G., Galgani L., Giorgilli A., e Strelcyn, J.W. Meccanica, **15** (1980) 9.
- [21] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. e Vastano, J. A. Phys. D, **16** (1985) 285.
- [22] Renyi, A. 1970, Probability Theory (North Holland, Amsterdam)
- [23] Kerr, R.P. Phys. Rev. Lett., **11** (1963) 237.
- [24] Novikov, I.D. e Frolov, V.P. 1989, Physics of Black Holes (Kluwer, Dordrecht).
- [25] Mukhopadhyay, B. Astroph. J. **581** (2002) 427.
- [26] Thorne, K.S. e Hartle, J.B. Phys. Rev. D. **31** (1985) 1815.
- [27] Boyer, R.H. e Lindquist, J. Math. Phys. **8** (1967) 265.
- [28] Carter, B. Phys. Rev. **174** (1968) 1559.
- [29] Fishbone, L.G. Astrophys. J. **185** (1973) 43.
- [30] Marck, J.-A. Proc. R. Soc. London A **385** (1983) 431.
- [31] Pirani, F.A.E. Acta Phhys. Pol. **15** (1956) 389.
- [32] Manasse, F.K. e Misner, C.W. J. Math. Phys. **4** (1963) 735.
- [33] Thorne, K.S, Price, R.H. e Macdonald, D.A. (editores) *Black holes: The Membrane Paradigm* (Yale University Press, New Haven, 1986).
- [34] Regge, T. e Wheeler, J.A., Phys. rev. **108** (1957) 1063.
- [35] Blanchet, L., Faye, G., e Ponsot, B. Phys. Rev. D **58**, (1998) 124002.
- [36] Wald, R.M. 1984, General Relativity (The University of Chicago Press, Chicago).
- [37] Weinberg, S. 1972, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (John Wiley & Sons, New York).
- [38] Blanchet, L. e Damour, T., Ann. Inst. Henri Poincaré: Phys. Theor. **50** (1989) 377.
- [39] Tolman, R. The Phys. Rev. **35** (1930) 875.
- [40] Hadamard, J. 1932, Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques (Hermann, Paris).

- [41] Sellier, A. Proc. R. Soc. London A **445** (1994) 69.
- [42] Letelier, P.S. e Vieira, W.M., Phys. Rev. D **56** (1997) 8095.
- [43] Guéron, E. e Letelier, P.S., Phys. Rev. E **66** (2002) 046611.
- [44] Guéron, E. e Letelier, P.S. A&A, **368** (2001) 716.
- [45] Moura, A.P.S. e Letelier, P.S. Phys. Lett. A, **256** (1999) 362.
- [46] Steklain, A.F. e Letelier, P.S., Phys. Lett. A, **352** (2006) 398.
- [47] Steklain, A.F. e Letelier, P.S., Phys. Lett. A, **373** (2009) 188.
- [48] Alligood, K., Sauer, T. e Yorke, J. 1996, Chaos - An Introduction to Dynamical Systems (Springer-Verlag, Berlin), 203.
- [49] Arnold, V.I. 1997, Mathematical Aspects of Classical & Celestial Mechanics (Springer-Verlag, Berlin), 88.
- [50] Grebogi C., Nusse, H.E., Ott, E. e Yorke J.A. 1988, in Dynamical Systems, ed. J.C. Alexander (Springer-Verlag, Berlin), 220.
- [51] Ivanov, P.B., Polnarev, A.G. e Saha, P. MNRAS, **358** (2005) 1361.
- [52] Semerák O. e Karas V. A&A **343** (1990) 325.
- [53] Nyhoff, L. e Leestma, S. 1996, FORTRAN 77 for Engineers and Scientists with an Introduction to FORTRAN 90 (Prentice Hall, New Jersey).
- [54] Shampine, F. e Gordon, M.K. 1975, Computer Solutions of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem (W.H. Freeman & Co, New York).
- [55] Henón, M. Phys. Rev. D, **5** (1982) 412.
- [56] Hull, T.E., Enright, W.H. e Jackson 1976, K.R. User's guide for DVERK - a subroutine for solving non-stiff ODEs. Technical Report No. 100, Department of Computer Science, University of Toronto, 1974.
- [57] Verner, J. H., Appl. Numer. Math. **22** (1996) 345.