Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Sobre Semigrupos Numéricos

por

Renata Rodrigues Marcuz Silva

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela

Dezembro/2006

Sobre semigupos numéricos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Renata Rodrigues Marcuz Silva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 de Dezembro de 2006.

Torres

Prof. Dr. Fernando Torres Orihuela
Orientador

Banca examinadora:
Prof. Dr. Fernando Torres Orihuela.
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti.
Prof. Dr. Gilvan Oliveira.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

	Silva, Renata Rodrigues Marcuz
Si38s	Sobre Semigrupos Numéricos / Renata Rodrigues Marcuz Silva -- Campinas, [S.P.:s.n.], 2006.
	Orientador: Fernando Eduardo Torres Orihuela
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica.
	1. Semigrupos. 2. Números Naturais. 3. Álgebra. I. Torres Orihuela, Fernando. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica. III. Título.
	(mca/imecc)

Título em ingles: About Numerical Semigroups

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Semigroups. 2. Natural Numbers. 3. Algebra.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela (IMECC - Unicamp)
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC - Unicamp)
Prof. Dr. José Gilvan de Oliveira (Depto. Matemática - UFES)

Data da defesa: 07/12/2006

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 07 de dezembro de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof. (a). Dr (a). FERNANDO EDUARDO TORRES ORIHUELA

José Gilvan de Oliveira

____

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ GILVAN DE OLIVEIRA

____

Prof. (a). Dr (a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a minha família que sempre me deu apoio e incentivo, fatores determinantes para a conclusão deste trabalho.

Gostaria de agradecer ao Fernando Torres Orihuela pela atenção, incentivo, paciência e perseverança, qualidades imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores que acompanharam meus passos e contribuíram de inúmeras formas para o desfecho deste caminho, em especial, ao Prof. Dr. Mario Gneri.

A todos os meus amigos que de maneira direta ou indiretamente, contribuíram para realização deste trabalho, em especial, ao Juan que sempre foi receptivo e ajudou a esclarecer muitas das minhas dúvidas, a Paula pelos estudos intensivos, ao Maurício por sua paciência e ajuda e ao Ademir pelo seu apoio incondicional.

"Assim como falham as palavras quando querem exprimir qualquer pensamento, assim falham os pensamentos quando querem exprimir qualquer realidade."

Fernando Pessoa

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a todos as pessoas que gostam de matemática.

Muere lentamente

Muere lentamente quien no viaja,
quien no lee,
quien no escucha msica,
quien no halla encanto en s mismo

Muere lentamente
quien destruye su amor propio;
quien no se deja ayudar

Muere lentamente
quien se transforma en esclavo del hbito,
repitiendo todos los das los mismos senderos;
quien no cambia de rutina,
no se arriesga a vestir un nuevo color
o no conversa con quien desconoce.

Muere lentamente
quien evita una pasin
y su remolino de emociones;
aquellas que rescatan el brillo de los ojos
y los corazones decados.

Muere lentamente

quien no cambia la vida cuando est insatisfecho

con su trabajo, o su amor;

quien no arriesga lo seguro por lo incierto

para ir tras de un sueo;

quien no se permite,

por lo menos una vez en la vida,

huir de los consejos sensatos

Vive hoy!

Arriesga hoy!

Hazlo hoy!

No te dejes morir lentamente!

No te impidas ser feliz!

Pablo Neruda

RESUMO

Um semigrupo (numérico) é um sub-semigrupo dos inteiros não negativos tal que o seu complemento neste conjunto é finito. O número de elementos deste conjunto complementar é chamado de gênero e o primeiro elemento positivo do semigrupo recebe o nome de multiplicidade.

Tais semigrupos aparecem na forma natural em diversos contextos da matemática. Nossa motivação aqui provém dos semigrupos de Weierstrass (Superfícies de Riemann). Neste trabalho se estuda portanto a estrutura (alguns invariantes) de semigrupos abstratos, levando em conta o seu gênero e a sua multiplicidade.

Os protótipos das problemáticas abordadas nesta dissertação são facilmente explicados aos leigos em matemática através de um exemplo simples: Suponha que existam apenas moedas de valores 5, 8 e 9. Então o valor 12 é o maior valor dos sete possíveis que não pode ser construído por meio destas moedas.

ABSTRACT

A numerical subgroup is a sub-semigroup of the non-negative integers $\mathbf{N}_0$ whose complement in $\mathbf{N}_0$ is finite. The number of elements of the complement set is called genus and the first positive element of semigroup is called multiplicity.

Such semigroups appear in a natural way in several branches of Mathematics. Our motivation comes from Weierstrass semigroups (Riemann Surfaces). We shall study the structure of abstract semigroups, by taking into account both its genus and multiplicity.

There is a nice property that a can be explained to the non specialist: Suppose you have some coins whose values are only 5, 8 and 9 pounds, then 12 pounds cannot be obtained with these coins.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Um subconjunto H do conjunto $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$ dos inteiros não negativos é chamado **semigrupo numérico** se as seguintes condições são satisfeitas:

- Zero pertence a H e se a e b pertencem a H então $a + b$ também pertence a H.

- O complementar de H em $\mathbf{N}_0$ é um conjunto finito.

A partir deste ponto por **semigrupo** subentende-se semigrupo numérico. Escreve-se H como sendo:

$$H = \{0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < ...\}.$$

Cada um dos n_i com $i \geq 1$ recebe o nome de **não lacuna** e n_1 é conhecido por **multiplicidade.**

O conjunto $L = L(H) := \mathbf{N}_0 \setminus H$ se escreve como:

$$L = \{1 = \ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \ldots < \ell_{g-1} < \ell_g\},$$

e cada um dos ℓ_i é chamado de **lacuna**. O número positivo $g := g(H) = \#L$ é chamado de **gênero** de H.

Observe que se H é um semigrupo e $1 \in H$ então $H = \mathbf{N}_0$, e portanto, $L = \emptyset$. Assim, se $1 \in H$ tem-se que $g = 0$. É de interesse deste trabalho estudar apenas os semigrupos tais que $g > 1$, e sendo assim, $1 \notin H$ o que implica que $1 \in L$, ou seja, $\ell_1 = 1$.

Os semigrupos se manifestam em diversos campos da matemática, como por exemplo, na geometria. O Capítulo 4 se encarrega de ilustrar uma determinada situação geométrica, a saber, a dos Semigrupos de Weierstrass. Além disso, a existência de tais semigrupos restringe a estrutura dos objetos matemáticos que estão ligados a estes.

O objetivo desta dissertação é expor alguns resultados da "Teoria de Semigrupos (Numéricos)". Tais resultados dependem apenas do gênero e da multiplicidade do semigrupo (e alguns outros invariantes que são conseqüências destes). Por exemplo, no Capítulo 4 se distinguem semigrupos que não são de Weierstrass por uma condição aritmética entre os elementos do complementar (veja a Condição de Buchweitz em 4).

Este trabalho também se propõe a estudar g e ℓ_g encontrando para estes cotas superiores e inferiores. Neste sentido trabalha-se com dois tipos de abordagens.

Como a do Capítulo 2 quando, dado o semigrupo H de gênero g fixo, estuda-se o invariante ℓ_g. É através de alguns resultados obtidos neste Capítulo que se pode encontrar condições que permitam a construção de semigrupos.

Esta abordagem é modificada no Capítulo 3. Neste, através dos geradores do semigrupo H que encontram-se fixados, tenta-se obter cotas para g e ℓ_g. Em particular, descreve-se tais invariantes em função dos geradores para o caso particular de um semigrupo gerado por três elementos co-primos entre si.

Outro aspecto bem interessante dos semigrupos é a facilidade que se tem ao explicar o problema de Frobenius aqui abordado para pessoas que são leigas com relação a matemática através de um exemplo simples como o pagamento de salários em um país. Suponha que um determinado país possua apenas moedas nos valores: 5, 8 e 9. Nenhum funcionário poderia receber um salários de: 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 12 unidades monetárias, porque não é possível se obter nenhum destes valores com as moedas disponíveis neste país.

Capítulo 2

Propriedades de um Semigrupo

Considere um semigrupo H de gênero $g > 1$ e sejam $1 = \ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g$ suas lacunas.

O objetivo deste capítulo é enunciar e provar os Teoremas abaixo cujo autor é Gilvan Oliveira ([8], [7]). A partir destes resultados surgirão condições necessárias para a existência de semigrupos.

Diz-se que H é **hiperelíptico** se $2 \in H$, caso contrário H é chamado de **não hiperelíptico.**

Teorema 1. *(Veja também Buchweitz ([1])) Seja H um semigrupo de gênero g.*

1) *H é hiperelíptico se, e somente se, existe j com $2 \leq j \leq g-1$ tal que $\ell_j = 2j - 1$.*

2) *H é não hiperelíptico se, e somente se, $\ell_j \leq 2j - 2$ para cada $2 \leq j \leq g-1$ e $\ell_g \leq 2g - 1$*

Excluindo alguns casos, pode-se melhorar ainda mais o Teorema anterior. É sobre esta ótica que se enuncia o Teorema 2.

Considere

- $L_1 := \{1, 2, \ldots, g-3, 2g-7, 2g-6, 2g-5\}$;

- $L_2 := \{1, 2, \ldots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$;

- $L_3 := \{1, 2, \ldots, m-1, m, g-2, g-1, \ldots, 2g-5-m, 2g-5, 2g-4\}$ com $(2g-6)/3 \leq m \leq g-3$

Teorema 2. *Seja H um semigrupo de multiplicidade $n_1 \geq 5$ e gênero $g \geq 11$. Se o conjunto de suas lacunas L é diferente dos conjuntos: L_1, L_2 e L_3 definidos acima, então $\ell_j \leq 2j-4$ para cada $4 \leq j \leq g-1$.*

Nota: Pode-se reescrever tais Teoremas fazendo uso das não lacunas.

O ponto de partida da demonstração do Teorema 1 é o Lema abaixo.

Lema 1. *Seja H um semigrupo de gênero g. Tem-se que $\ell_j \leq 2j-1, \ \ \forall \ \ 1 \leq j \leq g$.*

Demonstração. Lembrando que $g > 1$ tem-se que $\ell_1 = 1$. Tome j tal que $2 \leq j \leq g$. Considere os pares ordenados da forma: $(a, \ell_j - a)$ com $1 \leq a \leq \left[\dfrac{\ell_j}{2}\right]$.

Assim ou $a \notin H$ ou $\ell_j - a \notin H$ e deste modo conclui-se que em cada par existe pelo menos uma lacuna.

Logo:

$$\#\left\{\text{lacuna entre 1 e } \left[\frac{\ell_j}{2}\right]\right\} \geq \left[\frac{\ell_j}{2}\right]$$

Repare que:

$$\#\left\{\text{lacuna entre 1 e } \left[\frac{\ell_j}{2}\right]\right\} < j.$$

Assim

$$\left[\frac{\ell_j}{2}\right] \leq \#\left\{\text{lacuna entre 1 e } \left[\frac{\ell_j}{2}\right]\right\} \leq j-1,$$

isto é,

$$\left[\frac{\ell_j}{2}\right] + 1 \leq j.$$

Como

$$\left[\frac{\ell_j}{2}\right] \leq \frac{\ell_j}{2} < \left[\frac{\ell_j}{2}\right] + 1$$

segue que $\dfrac{\ell_j}{2} < j$, ou seja, $\ell_j \leq 2j-1$.

Portanto, para cada $2 \leq j \leq g$, tem-se que $\ell_j \leq 2j-1$. □

A partir do Lema 1 segue que $H := \{0, n_1, \ldots, n_{g-1}, n_g = 2g, 2g+1, 2g+2, \ldots\}$ ou equivalentemente, no intervalo $[1, 2g]$, existem exatamente g lacunas e g não lacunas. Além disso, pode-se concluir que no intervalo $[1, 2j-1]$ existem pelo menos j lacunas para cada $j \in \{1, \ldots, g\}$.

Observação 1. *Como* $\ell_j \leq 2j-1, \ \forall \ 2 \leq j \leq g$ *então* $n_j \geq 2j, \ \forall \ 1 \leq j \leq g$.

De fato, como dito anteriormente no intervalo $[1, 2j-1]$ existem pelo menos j lacunas, isto é, $\#$ {lacuna entre 1 e $2j-1$ } $\geq j$, e portanto, $\#$ {de não lacuna entre 1 e $2j-1$ } $\leq j-1$. Como $n_1 < n_2 < \ldots < n_{j-1} < n_j$ tem-se que $n_j > 2j-1$, ou seja, $n_j \geq 2j, \ \forall \ 1 \leq j \leq g$. □

O Teorema 1, abaixo demonstrado, caracteriza os semigrupos hiperelípticos e não hiperelípticos com respeito a seus elementos, além de fornecer condições de construí-los.

Demonstração do Teorema 1:

1) Como $g > 1$ segue que $\ell_1 = 1$. Da hipótese de que H é hiperelíptico, isto é, $2 \in H$ e através da propriedade aditiva do semigrupo tem-se que $2k \in H, \ \forall \ k \in \mathbf{N}_0$. Do Lema 1 segue que $\ell_j = 2j-1$ para todo $1 \leq j \leq g$.

   Reciprocamente tem-se que existe $i \in \{2, 3, \ldots, g-1\}$ tal que $\ell_i = 2i-1$. Considere $k \in \mathbf{N}$ tal que $k = \max\{i \in \{2, \ldots, g-1\} : \ell_i = 2i-1\}$. Se $k = 2$ então $\ell_2 = 2.2 - 1 = 3$ e portanto $2 \in H$.

   Suponha que $k \geq 3$. Então $\ell_{k+1} \neq 2(k+1)-1 = 2k+1$. Pelo Lema 1 tem-se então que $\ell_{k+1} < 2k+1$, isto é, $\ell_{k+1} \leq 2k$. Como $\ell_k < \ell_{k+1}$ obtém-se que $\ell_{k+1} = 2k$, e sendo assim k é uma lacuna de H.

   Considere o intervalo $[1, 2k]$. Tal intervalo possui $k+1$ lacunas uma vez que $\ell_{k+1} = 2k$. Desta maneira existem $k-1$ não lacunas neste intervalo. Considere os $k-1$ pares da forma $(a, \ell_{k+1} - a)$ com $1 \leq a \leq k-1$. Como k e $2k \in L$ e não se encontram entre os elementos dos pares ordenados considerados acima, cada um destes pares é constituído de uma lacuna e uma não lacuna.

Em particular, considerando o par $(1, 2k-1)$, como $2k-1 = \ell_k \in L$ tem-se que $1 \in H$ o que seria um absurdo. Conclui-se portanto que $k = 2$, o que significa que H é hiperelíptico.

2) Do Lema 1 tomando-se $j = g$ tem-se que $\ell_g \leq 2g - 1$. Por hipótese H é não hiperelíptico, assim $2 \notin H$, ou seja, $\ell_2 = 2$.

Considere $g \geq 3$ e $3 \leq j \leq g-1$ fixo tal que $\ell_j = 2j-1$. Como $\ell_j < \ell_{j+1}$ segue que $\ell_{j+1} \geq 2j$. Suponha por absurdo que $\ell_{j+1} = 2j$. Tem-se que $j \notin H$.

Cada par ordenado da forma $(a, \ell_{j+1} - a)$ com $1 \leq a \leq j-1$ tem uma lacuna e uma não lacuna. Tomando o par $(1, \ell_{j+1} - 1) = (1, 2j-1) = (1, \ell_j)$ segue que $1 \in H$ o que é absurdo.

Portanto $\ell_{j+1} > 2j$, isto é, $\ell_{j+1} \geq 2j+1$. Por outro lado, tem-se que $\ell_{j+1} \leq 2(j+1) - 1 = 2j + 2 - 1 = 2j + 1$. Sendo assim, $\ell_{j+1} = 2j+1$.

Considere o par ordenado $(2, \ell_{j+1} - 2) = (2, 2j+1-2) = (2, 2j-1) = (2, \ell_j)$ de onde $2 \in H$ o que contradiz a hipótese de H ser não hiperelíptico. Conclui-se que $\ell_j < 2j-1$, ou seja, $\ell_j \leq 2j-2$ para cada $2 \leq j \leq g$.

Para mostrar a recíproca basta mostrar que $2 \notin H$, ou seja, $\ell_2 = 2$. Sabe-se que $\ell_1 = 1$. Por hipótese, $\ell_2 \leq 2$ e como $\ell_1 < \ell_2$ obtém-se que $1 < \ell_2 \leq 2$ e sendo assim $\ell_2 = 2$. □

Um semigrupo H de gênero g tal que $\ell_g = 2g-1$ recebe um nome especial: **semigrupo simétrico.** Tal semigrupo tem uma propriedade muito interessante e extremamente importante, que está enunciada no Lema que se segue.

Lema 2 (Propriedade de Simetria). *Seja H um semigrupo simétrico de gênero g. Para todo $n \in \mathbf{N}$ tem-se que $n \in H$ se, e somente se, $\ell_g - n \notin H$.*

Demonstração. Seja $n \in H$. Suponha por absurdo que $\ell_g - n \in H$ então pela propriedade aditiva do semigrupo H tem-se que $n + (\ell_g - n) = \ell_g \in H$ o que é um absurdo. Logo $\ell_g - n \notin H$ para todo $n \in H$.

Reciprocamente, como H é simétrico $\ell_g = 2g - 1$.

Caso 1) Se $\ell_g - n < 0$, isto é, $2g - 1 < n$, ou ainda, $n \geq 2g$ então é claro que $n \in H$.

Caso 2) Se $0 < \ell_g - n < 2g - 1$, considere os $g - 1$ pares ordenados da forma $(a, \ell_g - a)$ com $1 \leq a \leq g - 1$. No intervalo $[1, 2g - 1]$ existem g lacunas já que $\ell_g = 2g - 1$. Além disso, como $2g - 1 \notin H$ não se encontra entre os elementos dos pares ordenados considerados tem-se que entre os pares existem $g - 1$ lacunas. Portanto cada um destes pares é formado por uma lacuna e uma não lacuna.

Desta forma como $\ell_g - n \notin H$ tem-se que $n \in H$, o que conclui a demonstração.

□

Outra propriedade que está ligada a simetria dos semigrupos tais que $\ell_g = 2g - 2$ encontra-se enunciada no Lema seguinte.

Lema 3. *Seja H um semigrupo de gênero g tal que $\ell_g = 2g - 2$. Então $g - 1 \notin H$ e para cada $n \neq g - 1$ tem-se que $n \in H$ se, e somente se, $\ell_g - n \notin H$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $g - 1 \in H$. Logo $g - 1 + g - 1 = 2g - 2 \in H$ uma vez que H é fechado para a adição. Mas, por hipótese, $\ell_g = 2g - 2$ e tem-se assim que $\ell_g \in H$ o que é um absurdo. Deste modo, $g - 1 \notin H$.

Considere os $g - 2$ pares ordenados da forma $(n, \ell_g - n)$ com $1 \leq n \leq g - 2$. No intervalo $[1, 2g - 2]$ existem g lacunas. Como $2g - 2$ e $g - 1$ não estão entre os pares considerados e $2g - 2, g - 1 \in L$ segue que existem $g - 2$ lacunas entre os pares ordenados.

Conclui-se então que cada um destes pares é constituído por uma lacuna e uma não lacuna, em outras palavras, $n \in H$ se, e só se, $\ell_g - n \notin H$ para todo $n \neq g - 1$. □

Uma questão pertinente que surge neste momento se baseia em verificar se dado um subconjunto qualquer H de $\mathbf{N}_0$ que satisfaz a condição: $n_j \geq 2j+1$ para cada $1 \leq j \leq g-2$ tem-se necessariamente que H é um semigrupo.

Para demonstrar que esta indagação não é verdadeira, apresenta-se o seguinte contra-exemplo:

Considere $g = 5$ e $H = \{0, 3, 5, 7, 9, n_5 = 10, 11, 12, 13, \ldots\}$. H satisfaz a condição, porém não é um semigrupo porque $3, 5 \in H$ e $6 = 3+3, 8 = 3+5 \notin H$.

Para demonstrar o Teorema 2 se faz necessário a apresentação de mais um resultado.

Considere

- $L_4 := \{1, 2, \ldots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$;
- $L_5 := \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$

Teorema 3. *Seja H um semigrupo de gênero g tal que $\ell_3 = 3$. Se o conjunto das lacunas L difere dos conjuntos L_4 e L_5 acima então $\ell_j < 2j-2$ para todo $4 \leq j \leq g-1$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $j \in \{4, 5, \ldots, g-1\}$ tal que $\ell_j \geq 2j-2$. Considere k o maior inteiro que satisfaz tal desigualdade. Como $\ell_3 = 3$ segue que $\ell_2 = 2$ e portanto H é não hiperelíptico. Pelo Teorema 1 segue que $\ell_k = 2k-2$ o que garante que $k-1 \notin H$.

Suponha que $\ell_k + 1 \notin H$. Considere os $k-1$ pares ordenados da forma $(a, \ell_k + 1 - a)$, $\forall\ 1 \leq a \leq k-1$. No intervalo $[1, 2k-1]$ existem $k+1$ lacunas e como $2k-1$ e $2k-2 \in L$ e estes não estão entre os pares considerados cada um dos pares acima é constituído por uma lacuna e uma não lacuna.

Desta forma $\ell_k + 1 - (k-1) = k \in H$ uma vez que $k-1 \notin H$. Como $k+(k-2) = 2k-2 = \ell_k$ segue que $k-2 \notin H$ e portanto $\ell_k+1-(k-2) = k+1 \in H$. Como $(k+1)+k-3 = 2k-2 = \ell_k$ tem-se que $k-3 \notin H$. Como $k-3 \notin H$ tem-se que $\ell_k + 1 - (k-3) = k+2 \in H$. Como $(k+2)+(k-4) = 2k-2 = \ell_k$ segue que

$k-4 \notin H$. Logo $\ell_k + 1 - (k-4) = k+3 \in H$. Sendo que $(k+3)+(k-5) = \ell_k$ então $k-5 \notin H$. Logo $\ell_k + 1 - (k-5) = k+4 \in H$.

Procedendo desta maneira pode-se concluir que $2k-3 \in H$. Como $2k-3+1 = \ell_k$ tem-se que $1 \notin H$. Portanto $1, 2, \ldots, k-1 \notin H$ e $k, k+1, \ldots, 2k-3 \in H$.

Caso 1) $k < g-1$.

Tem-se portanto que $4 \leq k \leq g-2$, isto é, que $g \geq 6$.

Se $k = 4$ tem-se que

$$\{1, 2, 3, 6, 7\} \subseteq L$$

e

$$H = \{0, 4, 5, 2.4 = 8, 4{+}5 = 9, 2.5 = 10, 3.4 = 12, 2.4{+}5 = 13, 4{+}2.5 = 14, 3.5 = 15, \ldots\}$$

e sendo $g \geq 6$ tem-se que $11 \in L$ e portanto

$$L = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\} = L_1$$

contradizendo a hipótese.

Suponha que $k \geq 5$ então $g \geq 7$. Observe que

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots, k-1, 2k-2, 2k-1\} \subseteq L$$

e

$$k, k+1, k+2, \ldots, 2k-3 \in H.$$

Além disso, como H é fechado para adição, tem-se que $2k, 2k+1, 2k+2, 2k+3, 2k+4, \ldots, 4k-6, 4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k, \ldots \in H$.

Resta garantir que $4k-5, 4k-4 \in H$. Tem-se que $4k-5 = 2k + (2k-5)$ e como $2k-5 \in H$ se $k \geq 5$ tem-se que $4k-5 \in H$.

Observe que $4k-4 = 2k + 2k - 4$ e como $2k-4 \in H$ se $k \geq 5$ tem-se que $4k-4 \in H$.

Logo

$$L = \{1, 2, 34, \ldots, k-1, 2k-2, 2k-1\}$$

e sendo assim $g = k + 1$, contradizendo o fato de $k \geq g - 2$.

Caso 2) $k = g - 1$.

Assim, $\ell_{g-1} = 2g-4$ e sendo $\ell_{g-1} < \ell_g \leq 2g-1$ tem-se que $2g-3 \leq \ell_g \leq 2g-1$. Suponha que $\ell_g \geq 2g - 2$.

Se $\ell_g = 2g-2$ pelo Lema 3 segue que $2 \in H$ uma vez que $\ell_g - 2 = (2g-2)-2 = 2g - 4 = \ell_{g-1}$ o que contradiz o fato de $\ell_3 = 3$.

Se $\ell_g = 2g-1, H$ é simétrico e pelo Lema 2 e do fato de $\ell_g - 3 = 2g-4 = \ell_{g-1}$ tem-se que $3 \in H$ o que é um absurdo.

Conseqüentemente $\ell_g < 2g - 2$ o que significa que $\ell_g = 2g - 3$. Portanto $L = L_4$ o que contradiz a hipótese. □

Prova do Teorema 2

Por hipótese $n_1 \geq 5$ o que implica que $\ell_1 = 1, \ell_2 = 2, \ell_3 = 3$ e $\ell_4 = 4$, ou seja, $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq L$. Pelo Teorema 3 tem-se que $\ell_j < 2j - 2$ para cada $4 \leq j \leq g - 1$, isto é, $\ell_j \leq 2j - 3$ para cada $4 \leq j \leq g - 1$.

Para finalizar a demonstração basta mostrar que $\ell_j \neq 2j - 3$ para cada $4 \leq j \leq g - 1$. Suponha por absurdo que exista i tal que $\ell_i = 2i - 3$. Considere k o maior inteiro com esta característica.

Afirmação: Das condições iniciais tem-se que $\ell_{k+1} \neq \ell_k + 1$.

De fato, suponha que $\ell_{k+1} = \ell_k + 1$. Como $\ell_k = 2k-3$ então $\ell_{k+1} = 2k-2$. Por isso, tem-se que $k - 1 \notin H$ porque caso contrário tem-se que $(k-1) + (k-1) = \ell_{k+1} \in H$ o que seria impossível.

Considere os $k - 3$ pares ordenados da forma $(a, \ell_{k+1} - a)$ com $2 \leq a \leq k - 2$. No intervalo $[1, 2k - 3]$ existem k lacunas uma vez que $\ell_k = 2k - 3$. Como 1 e $2k - 3 \in L$ segue que o intervalo $[2, 2k - 4]$ tem portanto $k - 2$ lacunas. Sendo $k-1$ uma lacuna que não compõe nenhum dos pares acima conclui-se que existem $k - 3$ lacunas nos pares ordenados considerados.

Devido a isso cada um destes pares são formados por uma lacuna e uma não lacuna. Como existem $k - 3$ não lacunas tem-se que n_1 é um elemento de algum desses pares. Além disso, tem-se que:

$$\#\{\text{lacunas entre } 2 \text{ e } k-2\} \leq k-3 < k$$

o que implica que $n_1 \leq k$.

Sobre as hipóteses consideradas tem-se que a igualdade necessariamente ocorre.

Com efeito, suponha que $n_1 < k$, ou seja, $n_1 \leq k-1$. Como $k-1 \in L$ então $n_1 \leq k-2$.

Se existe $n \in H \setminus \{0\}$ tal que $n < k-2$, então $\ell_k - n \in L$ porque pela propriedade aditiva de H, $n + (\ell_k - n) = \ell_k \in H$ o que não acontece.

Entretanto $\ell_k - n = 2k-2-1-n = 2k-2-(n+1) = \ell_{k+1} - (n+1) \in L$. Sendo cada um dos pares mencionados acima compostos de uma lacuna e uma não lacuna segue que $n+1 \in H$.

Então todo inteiro n tal que $n_1 \leq n \leq k-3$ é uma não lacuna de H. Portanto, $n_1, n_1+1, \ldots, k-3, k-2 \in H$. Como $2, 3, \ldots, n_1 - 1 \in L$ segue dos pares acima que $(2k-2)-2 = 2k-4, (2k-2)-3 = 2k-5, \ldots, (2k-2)-(n_1-2) = 2k-n_1, (2k-2)-(n_1-1) = 2k-1-n_1 \in H$. Como H é fechado para a adição $2k-1, \ldots, 3k-6 \in H$ e $3k-4, \ldots, 4k-8 \in H$.

Com isso em mente tem-se que:

$$L \subseteq \{1, 2, \ldots, n_1 - 1, k-1, k, \ldots, 2k-2-n_1, 2k-3, 2k-2, 3k-5\},$$

ou seja,

$$L \subseteq \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \cup \{k-1, k, \ldots, 2k-2-n_1\} \cup \{2k-3, 2k-2, 3k-5\}$$

de onde $g \leq (n_1 - 1) + (2k-2-n_1) - (k-1) + 1 + 3 = k+2$, isto é, $k \geq g-2$.

Logo $3k-5 \geq 3(g-2)-5 = 3g-11$. Note que $3g-11 \geq 2g$, porque se $3g-11 < 2g$ então $g < 11$, o que é absurdo. Portanto $3k-5 \in H$. É por esta razão que

$$L \subseteq \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \cup \{k-1, k, \ldots, 2k-2-n_1\} \cup \{2k-3, 2k-2\}$$

e assim $g \leq k+1$. Lembrando que $k \leq g-1$ tem-se que $g = k+1$, isto é, $k = g-1$. Logo $L = L_3$ o que contradiz a hipótese. Conseqüentemente $n_1 = k$.

Em posse desta informação obtém-se que $k, k+1, ..., 2k-4 \in H$. Utilizando-se da propriedade da adição dos semigrupos, os elementos $2k, 2k+1, \ldots, 4k-8 \in H$. Sendo $n_1 \geq 5$ tem-se que $4k-5, 4k-4, 4k-3, 4k-2 \in H$.

Considere um inteiro m tal que $m \geq 4k$. Pelo algoritmo de Euclides pode-se escrever que $m = 2kq + r$ onde $0 \leq r < 2k$ e $q \geq 1$. Entretanto, $m = 2kq + r = 2k(q-1) + (2k+r)$ com $2k \leq r < 4k$ e $q \geq 2$.

Se $r \neq 4k-7, 4k-6, 4k-1$ segue que $m \in H$. Por outro lado:

$$m = 2k(q-1)+4k-7 = 2k(q-1)+(k-1)-(k-1) = 2[(q-1)-1]k+(k+1)+4k-8$$

com $2[(q-1)-1]k, (k+1)$ e $4k-8 \in H$ o que implica que $m \in H$.

Analogamente mostra-se que se

$$m = 2k(q-1)+4k-6 = 2k(q-1)+(k-2)-(k-2) = 2[(q-1)-1]k+(k+2)+4k-8$$

então $m \in H$.

De forma semelhante, sendo

$$m = 2k(q-1)+4k-1 = 2k(q-1)+(k-3)-(k-3) = 2[(q-1)-1]k+(k+3)+4k-3$$

como $2[(q-1)-1]k, (k+3)$ e $4k-3 \in H$ tem-se $m \in H$.

Conseqüentemente todo inteiro $m \geq 4k$ pertence a H. Disto segue que:

$$L \subseteq \{1, 2, \ldots, k-1, 2k-3, 2k-2, 2k-1, 4k-7, 4k-6, 4k-1\},$$

ou seja,

$$L \subseteq \{1, 2, \ldots, k-1\} \cup \{2k-3, 2k-2, 2k-1, 4k-7, 4k-6, 4k-1\}$$

de onde $g \leq k-1+6 = k+5$, isto é, $k \geq g-5$.

Observe que se $4k-1 \in L$ então $\ell_g = 4k-1$ e do Lema 1 obtém-se que $\ell_g \leq 4g-21 \leq 2g-1$, isto é, $g \leq 10$ contradizendo a hipótese de que $g \geq 11$. É por esta razão que $4k-1 \notin L$ e assim $g \leq k+4$, isto é, $k \geq g-4$.

Se $4k-6 \in L$ então $\ell_g = 4k-6$ e do Lema 1 segue que $\ell_g \leq 4g-22 \leq 2g-1$ o queimplica que $g < 11$ o que contradiz o fato de $g \geq 11$. Deste modo, $4k-6 \notin L$ e $g \leq k+3$ de onde $k \geq g-3$.

Se $4k-7 \in L$ então $\ell_g = 4k-7$ e do Lema 1 tem-se que $\ell_g \leq 4g-19 \leq 2g-1$. Assim$2g \leq 18$, ou seja, H é tal que $g < 11$ o que é um absurdo. Desta forma, $4k-7 \notin L$ e $g \leq k+2$, isto é, $k \geq g-2$. Além disso, tem-se que

$$L \subseteq \{1, 2, \ldots, k-1\} \cup \{2k-3, 2k-2, 2k-1\}.$$

De posse da informação que $k \leq g-1$ tem-se que $k+1 \leq g \leq k+2$.

Considere primeiramente que $g = k+1$, ou seja, $k = g-1$. Então $L = L_2$ o que contradiz a hipótese do Teorema.

Só resta analisar o caso em que $g = k+2$, isto é, $k = g-2$. Neste caso, $L = L_3$ o que contradiz a hipótese ao se considerar $m = g-3$.

Conclui-se que $\ell_{k+1} \neq \ell_k + 1$.

Caso 1) Considere $k \leq g-2$.

Sabe-se que $\ell_k = 2k-3$ e além disso tem-se que $\ell_{k+1} \leq 2(k+1)-3 = 2k-1$. Por $\ell_k < l_{k+1}$ tem-se que $2k-2 \leq l_{k+1} \leq 2k-1$.

Devido a k ser máximo segue que $\ell_{k+1} \neq 2(k+1)-3 = 2k-1$ de onde conclui-se que $\ell_{k+1} = 2k-2$. Contudo $2k-2 = (2k-3)+1 = \ell_k + 1$, ou seja, $\ell_{k+1} = \ell_k + 1$ que contradiz a afirmação.

Caso 2) Considere $k = g-1$.

Imediatamente tem-se que $\ell_{g-1} = 2g-5$. Como $\ell_{g-1} < \ell_g$ então $\ell_g \geq 2g-4$. Como $\ell_g \neq \ell_{g-1}+1 = 2g-4$ obtém-se que $\ell_g \geq 2g-3$.

Suponha que $\ell_g \geq 2g-2$. Desta forma $2g-2 \leq \ell_g \leq 2g-1$.

Se $\ell_g = 2g-2$ pelo Lema 3 tem-se $\ell_g - 3 = 2g-5 = \ell_{g-1} \notin H$ e sendo assim $3 = \ell_3 \in H$ o que é absurdo. Conclui-se que $\ell_g \neq 2g-2$ o que implica que $\ell_g = 2g-1$.

Sendo $\ell_g = 2g-1$ tem-se que H é um semigrupo simétrico e pelo Lema 2 tem-se que $\ell_g - 4 = 2g-5 \notin H$ e portanto $4 \in H$ contradizendo o fato de $n_1 \geq 5$.

Conseqüentemente $\ell_g < 2g-2$, isto é, $\ell_g = 2g-3$. Considere os $g-4$ pares da forma $(a, \ell_g - a)$ com $3 \leq a \leq g-2$. No intervalo $[1, 2g-3]$ existem g lacunas e sendo $1, 2, 2g-3 \in L$ segue que no intervalo $[3, 2g-4]$ existem $g-3$ lacunas.

Como $2g-5$ não faz parte dos pares acima considerados e $2g-5 \in L$ segue que existem $g-4$ lacunas entre os pares. Pode-se concluir então que cada par é formado de uma lacuna e uma não lacuna.

Tomando $n \in H \setminus \{0\}$ segue que $\ell_{g-1} - n \notin H$. Mas $\ell_{g-1} - n = 2g-5-n = (2g-3)-(n+2)$. Assim $\ell_g - (n+2) \notin H$.

Se $8 \leq n+2 \leq g$ então como $\ell_g - (n+2) \notin H$ segue que $n+2 \in H$. Se $g-1 \leq n+2 \leq 2g-6$ então $a = \ell_g - (n+2)$ e como $a \notin H$ tem-se que $\ell_g - a = n+2 \in H$. Portanto: $n_1, n_1+2, \ldots, n_1+2g, \ldots \in H$.

Desta maneira tem-se que n_1 é par e que

$$L = \{1, 2, \ldots, n_1 - 1, n_1 + 1, n_1 + 3, \ldots, 2g-5, 2g-3\}.$$

Com efeito, suponha que n_1 seja ímpar. Como $n_1, n_1+2, \ldots, n_1+2g, \ldots \in H$ tem-se que todo elemento ímpar pertence a H, isto é, $2g-5, 2g-3 \in H$ o que seria impossível. Logo n_1 é par.

Além disso, como:

$$L = \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \cup \{n_1+1, n_1+3, \ldots, 2g-5, 2g-3\}$$

seque que $g = n_1 - 1 + \dfrac{(2g-3)-(n_1+1)}{2} = g + \dfrac{n_1}{2} - 2$ de onde $n_1 = 4$ o que contradiz o fato de $n_1 \geq 5$. Conseqüentemente tem-se que $\ell_j \leq 2j-4$. $\square$

Observação 2. *As hipóteses do Teorema 2 são necessárias.*

1) Se $L = L_1$ então $\ell_{g-1} = 2g-7$, ou seja, $\ell_{g-2} > 2g-8$.

2) Se $L = L_2$ tem-se que $\ell_{g-1} = 2g-4$, e portanto, $\ell_{g-1} > 2g-6$.

3) Se $L = L_3$ tem-se que $\ell_{g-1} = 2g-5$, isto é, $\ell_{g-1} > 2g-6$.

4) Considere o semigrupo

$$H = \{g-1, g, g+1, \ldots, 2g-6, 2g-4, 2g-2, 2g-1, 2g, 2g+1, 2g+2, \ldots\}$$

tal que $g \leq 10$. *Tem-se que* $L = \{1, 2, 3, \ldots, g-3, g-2, 2g-5, 2g-3\}$. *Logo* $L \neq L_1, L_2$ *e* L_3. *Desta forma tem-se que* $\ell_{g-1} = 2g-5$, *ou seja,* $\ell_{g-1} > 2g-6$.

5) Seja $n = 3$. *Considere*

$$H = \{3, 6, 9, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, ...\}.$$

Tem-se que $g = 12$ *e* $L = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 20, 23\}$. *Logo* L *difere de* L_1, L_2 *e* L_3. *Além disso,* $\ell_{g-2} = 2g-4$, *e portanto,* $\ell_{g-2} > 2g-8$.

6) Cada um dos $H_i = \mathbf{N} \setminus L_i$ *é um semigrupo.*

CAPÍTULO 3

Os Geradores de um Semigrupo

Este capítulo se propõe a estudar, sobre a ótica de geradores de um semigrupo H de gênero g, alguns resultados envolvendo o gênero g e a maior lacuna l_g do semigrupo H.

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$. O semigrupo **gerado** pelo conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é dado por:

$$H := < a_1, a_2, \ldots, a_n > = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{N}_0\}$$

Lema 4. *H é um semigrupo numérico se, e somente se, mdc$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.*

Demonstração. Suponha que $d_1 = \text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 1$. Da propriedade do mdc obtém-se que $d_1|a_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, ou seja, $a_i = d_1k_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Tome $h \in H$. Então $h = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ e portanto $h = d_1k_1x_1 + d_1k_2x_2 + \ldots + d_1k_nx_n$, isto é, $h = d_1(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n)$.

Observe que qualquer $q \in \mathbf{N}$ com $\text{mdc}(d_1, q) = 1$ tem-se que $(d_1 - 1)q \notin H$ e sendo assim conclui-se que $\#L = \infty$.

Reciprocamente, $\text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{mdc}(\text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n) = 1$. Chame $d_2 = \text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Então $\text{mdc}(d_2, a_n) = 1$ e pelas propriedades do mdc existem $x, y \in Z$ tais que $d_2z + a_nt = 1$.

Suponha que $z \geq a_n$. Pelo algoritmo da divisão de Euclides tem-se que $z =$

$a_nq + r$ com $q \geq 1$ e $0 \leq r < a_n$. Deste modo $d_2z + a_nt = d_2(a_nq + r) + a_nt = d_2r + a_n(d_2q + t)$. Chamando $x = r$ e $y = d_2q + t$ tem-se que $d_2z + a_nt = d_2x + a_ny$.

Portanto pode-se considerar a seguinte igualdade $d_2x + a_ny = 1$ para todo x e $y \in Z$ com $0 \leq x < a_n$ e esta nova representação se torna única.

Como $d_2 = \text{mdc}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ obtém-se que $a_i = d_2q_i$ para cada $1 \leq i \leq n - 1$.

Tome $h \in H$. Então h pode se escrever como $h = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Sendo assim, $h = d_2q_1x_1 + d_2q_2x_2 + \ldots + d_2q_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n$, isto é, $h = d_2(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_{n-1}x_{n-1}) + a_nx_n$.

Considere $m \geq 0$. Logo $h + m = h + 1m = d_2(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_{n-1}x_{n-1}) + a_nx_n) + m(d_2x + a_ny)$, ou seja, $h + 1m = d_2(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_{n-1}x_{n-1} + mx) + a_n(x_n + my)$.

Observe que para que $h + m \in H$ deve-se ter que $h + m \geq 0$. Desta forma, $q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_{n-1}x_{n-1} + mx \geq 0$ e $a_n(x_n + my) \geq 0$. É claro que $q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_{n-1}x_{n-1} + mx \geq 0$ uma vez que $q_i, m, x \geq 0, \ \forall \ 1 \leq i \leq n - 1$.

Resta agora garantir que $x_n + my \geq 0$. Para que isso aconteça é necessário que: $m \geq \left[\dfrac{-x_n}{y}\right]$. Considere $m_0 = \left[\dfrac{-x_n}{y}\right] + 1$. Segue que $h + m \in H, \ \forall \ m \geq m_0$.

Desta maneira, $H \subseteq \{m_0, m_0 + 1, \ldots\}$. Consequentemente $L \subseteq \{1, 2, \ldots, m_0 - 1\}$ e portanto $\#L < \infty$. $\square$

Observação 3. *Existe um conjunto natural que gera um semigrupo.*

Tome:

$$s_i = min\{h \in H : h \equiv i \pmod{n_1}\}.$$

Então H é gerado por $\{n_1, s_1, \ldots, s_{n_1-1}\}$. Não se tem necessariamente que este número de geradores de H é o menor possível.

Problemática: Discutir a possibilidade de se obter uma fórmula explícita para o gênero g e para a maior lacuna ℓ_g em função dos geradores do semigrupo H.

Exemplo 1. *(veja também [5]) Para $H =< a_1, a_2 >$ pode se escrever que $g = \dfrac{(a_1 - 1)(a_2 - 1)}{2}$ e $\ell_g = (a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1$.*

Com efeito, como $\text{mdc}(a_1, a_2) = 1$ então existem z e $t \in Z$ tais que $a_1z + a_2t = 1$. Suponha que $z \geq a_2$. Pelo algoritmo da divisão de Euclides tem-se que $z = a_2q + r$ com $q \geq 1$ e $0 \leq r < a_2$.

Deste modo $a_1z + a_2t = a_1(a_2q + r) + a_2t = a_1r + a_2(a_1q + rt)$. Chamando $x = r$ e $y = a_1q + rt$ tem-se que $a_1z + a_2t = a_1x + a_2y$.

Portanto pode-se considerar a seguinte igualdade $a_1x + a_2y = 1$ para todo x e $y \in Z$ com $0 \leq x < a_2$. Esta nova representação se torna única. Então para qualquer $n \in \mathbf{N}$ tem-se que $n = n.1 = n(a_1x + a_2y) = a_1nx + a_2ny$.

Desta maneira $n \in H$ se, e somente se, $a_1nx, a_2ny \geq 0$. Tome $m = max\{n : n \notin H\}$. Então m é dado por $x = a_2 - 1$ e $y = -1$. Assim $\ell_g = a_1(a_2 - 1) - a_2 = (a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1$. Como $n_g = \ell_g + 1$ tem-se que $\ell_g + 1 = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$. Para determinar g deve-se contar até quando $a_1(a_2 - 1) - na_2 \in H$, ou seja, $a_1(a_2 - 1) - na_2 > 0$, isto é, $0 \leq n \leq a_1 - 1$.

Conclui-se que $g = \dfrac{(a_1 - 1)(a_2 - 1)}{2}$. □

No caso em que $n > 2$, em geral, se desconhece uma resposta para este problema. No caso em que $n = 3$ e supondo que os geradores são co-primos dois a dois, Rosales e Sanches-Garcia exibiram uma fórmula para o gênero e para última lacuna, que será exposta aqui.

Faz-se necessário a apresentação de alguns resultados preliminares.

Considere H um semigrupo minimamente gerado por $\{a_1, a_2, a_3\}$ tais que $\text{mdc}(a_i, a_j) = 1$ para todo $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq 3$. Sejam i, j e k números inteiros entre 1 e 3. Defina:

$$c_i := \min\{n \in \mathbf{N} : na_i \in < a_j, a_k >\}.$$

Tem-se que:

$$\begin{cases} c_1a_1 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3; \\ c_2a_2 = r_{21}a_1 + r_{23}a_3; \\ c_3a_3 = r_{31}a_1 + r_{32}a_2. \end{cases}$$

Lema 5. *Os r_{ij} acima definidos são inteiros positivos.*

Demonstração. Assuma que $r_{13} = 0$ então $c_1a_1 = r_{12}a_2$. Pela definição de c_1 tem-se que $c_1 \leq a_2$ e como $c_1a_1 = r_{12}a_2$ é fácil ver que $a_2|c_1a_1$. Lembrando que os a_i são co-primos entre si tem-se que $c_1 = a_2$.

Por outro lado, existe um $z \in \{1, 2, \ldots, a_2 - 1\}$ tal que $za_1 = a_3 \ mod(a_2)$. Desta forma, $za_1 - a_3 = ka_2$ com $k \in Z$. Mostra-se que $k \in \mathbf{N}$.

De fato, ao considerar o elemento $za_1 + a_2 + a_3$ de H, como $za_1 = ka_2 + a_3$ obtém-se que $za_1 + a_2 + a_3 = (k+1)a_2 + 2a_3$, ou seja, $k+1 \geq 0$, ou ainda, $k \geq -1$.

Suponha que $k = -1$. Desta forma, sendo $za_1 = ka_2 + a_3$ tem-se que $a_3 = za_1 + a_2$ o que contradiz o fato de $\{a_1, a_2, a_3\}$ ser o conjunto mínimo geradores de H. Portanto $k \geq 0$.

Se $k = 0$ então $a_3 = za_1$ e portanto $a_1|a_3$. o que é impossível uma vez que $\text{mdc}(a_1, a_3) = 1$. Conclui-se que $k > 0$, ou seja, $k \in \mathbf{N}$. Levando em conta que $z < a_2$ e da definição de c_1 tem-se que $c_1 \leq z < a_2$, ou seja, $c_1 < a_2$ o que contradiz a afirmação anterior de que $c_1 = a_2$.

Repetindo tal processo para os restantes r_{ij} obtém-se que estes são todos inteiros positivos. $\square$

Lema 6. *Tem-se que*

$$c_1 > r_{12} \text{ e } c_1 > r_{13};$$

$$c_2 > r_{21} \text{ e } c_2 > r_{23};$$

$$c_3 > r_{31} \text{ e } c_3 > r_{32}.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que $c_1 \leq r_{13}$. Então pelo algoritmo de Euclides tem-se que $r_{13} = c_1q + r$ com $q \geq 1$ e $0 \leq r < c_1$.

Como $c_3a_3 = r_{31}a_1 + r_{32}a_2$ e utilizando a igualdade $r_{13} = c_1q + r$ obtém-se $c_3a_3 = c_1a_1q + ra_1 + r_{32}a_3$.

Substituindo $c_1a_1 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3$ na última igualdade resulta que $(c_3 - qr_{13})a_3 = ra_1 + (qr_{12} + r_{32})a_2$.

Como todas as constantes são números naturais pode-se concluir que $qr_{12} + r_{32} \in \mathbf{N}$ o que contradiz a definição de c_3. Conclui-se que $c_1 > r_{13}$.

Repetindo o processo para os demais c_i o resultado está demonstrado. $\square$

Lema 7. *Tem-se que*

$$c_1 = r_{12} + r_{31};$$

$$c_2 = r_{21} + r_{32};$$

$$c_3 = r_{31} + r_{23}.$$

Demonstração. Como $c_1a_1 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3$ e $c_2a_2 = r_{21}a_1 + r_{23}a_3$ tem -se que $(c_1 - r_{12})a_1 + (c_2 - r_{21})a_2 = (r_{13} + r_{23})a_3$.

Da definição de c_2 pode-se concluir que $c_3 \leq r_{13} + r_{23}$. De maneira análoga conclui-se que $c_1 \leq r_{12} + r_{31}$ e que $c_2 \leq r_{21} + r_{32}$.

Além disso, $c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = (r_{12} + r_{31})a_1 + (r_{21} + r_{32})a_2 + (r_{13} + r_{23})a_3$ e portanto tem-se que $c_1 = r_{12} + r_{31}$, $c_2 = r_{21} + r_{32}$ e $c_3 = r_{13} + r_{23}$. □

Seja $\mathrm{Ap}(H, a) := \{n \in H : n - a \notin H\}$.

Lema 8. *Tem-se que* $\#Ap(H, a) = a$.

Demonstração. Primeiramente deve se mostrar que:

$$\mathrm{Ap}(H, a_1) = \{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\}$$

onde cada $s_i = \min\{h \in H : h \equiv i \pmod{a_1}\}$.

Para isso primeiramente mostra-se que $\{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\} \subseteq \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Seja $s \in \{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\}$. Se $s = 0$ então tem-se que $s - a_1 = -a_1 \notin H$. Logo $s \in \mathrm{Ap}(h, a_1)$.

Tome $s \neq 0 \in \{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\}$ então $s = s_i$ para algum $1 \leq i \leq a_1 - 1$. Da definição de s_i tem-se que $s_i = k_ia_1 + i$ onde tem-se que $k_i \geq 1$ uma vez que a_1 é a multiplicidade do semigrupo H.

Portanto tem-se que $s_i - a_1 = a_1(k_i - 1) + i \notin H$. Desta maneira tem-se que $s \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Falta mostrar que $\mathrm{Ap}(H, a_1) \subseteq \{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\}$.

Tome $h \in H$. Se $h = 0$ então $h \in \{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\}$. Seja $h \neq 0 \in H$. Considere a multiplicidade a_1 de H. Pelo algoritmo de Euclides tem-se que $h = a_1k + i$ onde $0 \leq i \leq a_1$.

Da definição de s_i tem-se que $s_i \leq h$. Suponha por absurdo que $s_i < h$. Desta maneira, $h = s_i + t$ com $t > 0$ Como $h \equiv i \pmod{a_1}$ e $s_i \equiv i \pmod{a_1}$ tem-se que $t \equiv i \pmod{a_1}$. Desta forma, obtém-se que $t = a_1 q + i$.

Observe que $h - a_1 = s_i - a_1(k - q - 1)$ e mais ainda que $k + q - 1 > 0$. Como $s_i \in H$ segue que $h - a_1 \in H$ contradizendo o fato de $h \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Conclui-se portanto que $h = s_i$, ou seja, $\mathrm{Ap}(H, a_1) \subseteq \{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\}$. Conseqëntemente tem-se que $\mathrm{Ap}(H, a_1) = \{0, s_1, \ldots, s_{a_1-1}\}$.

Desta forma, $\#\mathrm{Ap}(H, a) = a$. □

Lema 9. *Seja H um semigrupo de gênero g e multiplicidade a_1. Tem-se que:*

$$Ap(H, a_1) = \{xa_2 + ya_3 : (x, y) \leq (c_2, c_3)\}$$

onde $(x, y) \leq (c_2, c_3)$ significa que $x \leq c_2$ e $y \leq c_3$.

Demonstração. Será demonstrado que todo elemento s de $\mathrm{Ap}(H, a_1)$ é da forma $xa_2 + ya_3$ com $x < c_2$ e $y < c_3$ com x e $y \in \mathbf{N}_0$.

Seja $s \in \mathrm{Ap}(H, a_2)$. Então pela definição do conjunto $\mathrm{Ap}(H, a_1)$ tem-se que $s = xa_1 + ya_2 + za_3$ com x, y e $z \in \mathbf{N}_0$ tal que $s - a_1 = (x-1)a_1 + ya_2 + za_3 \notin H$, ou seja, $x - 1 < 0$, o que implica em $x < 1$. Como $x \in \mathbf{N}_0$ então $x = 0$. Desta forma, $s = ya_2 + za_3$.

Falta mostrar que $y < c_2$ e $z < c_3$. Tome $ya_2 + za_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$. Suponha por absurdo que $y \geq a_2$. Então pelo algoritmo de Euclides tem-se que $y = c_2 q + r$ com $q \geq 1$ e $0 \leq r < c_2$. Logo:

$ya_2 + za_3 = (c_2 q + r)a_2 + za_3 = c_2 a_2 q + ra_2 + za_3$.

Lembrando que $c_2 a_2 = r_{21} a_1 + r_{23} a_3$ tem-se que:

$ya_2 + za_3 = (r_{21} a_1 + r_{23} a_3)q + ra_2 + za_3$,

ou seja,

$ya_2 + za_3 = r_{21} q a_1 + ra_2 + (z + r_{23} q)a_3$.

Considere $ya_2 + za_3 - a_1$. Tem-se que $ya_2 + za_3 - a_1 = (r_{21} q - 1)a_1 + ra_2 + (z + r_{23} q)a_3 \in H$ uma vez que $r_{21} q - 1 > 0$, $r > 0$ e $z + r_{23} q > 0$ o que é impossível porque $ya_2 + za_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Conclui-se portanto que $y < c_2$. Analogamente pode-se mostrar que $z < c_2$. Desta forma o Lema está demonstrado. □

Defina, em H a seguinte relação de ordem: para n_1 e $n_2 \in H$ tem-se que $n_1 \preceq n_2$ se $n_2 - n_1 \in H$, obtém-se que:

Lema 10. *Seja H um semigrupo de gênero g e multiplicidade a_1. Tem-se que*

$$max_{\preceq}(Ap(H,a_1)) = \{(c_2-1)a_2 + (r_{13}-1)a_3, (r_{12}-1)a_2 + (c_3-1)a_3\}.$$

Demonstração. Demonstra-se inicialmente que $(c_2-1)a_2 + (r_{13}-1)a_3$ e $(r_{12}-1)a_2 + (c_3-1)a_3 \in \mathrm{Ap}(H,a_1)$.

Suponha por absurdo que $(c_2-1)a_2+(r_{13}-1)a_3 \notin \mathrm{Ap}(H,a_1)$ então $(c_2-1)a_2+(r_{13}-1)a_3 - a_1 \in H$, ou seja, $(c_2-1)a_2 + (r_{13}-1)a_3 - a_1 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$.

Desta maneira, $(x_1+1)a_1 + (x_3+1-r_{13})a_3 = (c_2-1-x_2)a_2$. Como c_2 é mínimo segue que $x_3 + 1 - r_{13} < 0$, isto é, $x_3 < r_{13} - 1$.

Deste modo, $(x_1+1)a_1 + (x_2+1-c_2)a_2 = (r_{13} - (x_3+1))a_3$ e pelo Lema 6 tem-se que $c_3 > r_{13}$. Portanto, obtém-se que $c_3 > c_3-(x_3+1) > r_{13}-(x_3+1) > 0$, e por c_3 ser mínimo segue que $x_2 + 1 - c_2 < 0$.

Conclui-se que $(x_1+1)a_1 = (c_2-1-x_2)a_2 + (r_{13}-1-x_3)a_3$ com $c_2 - 1 - x_2$ e $r_{13} - 1 - x_3 \in \mathbf{N}$.

Da definição de c_1 tem-se que $c_1 \leq x_1 + 1$. Do algoritmo de Euclides tem-se que $x_1 + 1 = c_1q + r$ com $q > 0$ e $0 \leq r < c_1$.

Pode-se escrever então que: $(c_1q + r)a_1 = (c_2-1-x_2)a_2 + (r_{13}-1-x_3)a_3$ com $c_2 - 1 - x_2 = (c_2-1-x_2)a_2 + (r_{13}-1-x_3)a_3$ com $c_2 - 1 - x_2$. Da definição de c_1 e rearranjando os termos da expressão acima obtém-se que $(c_2-1-x_2)a_2 = ra_1 + ((q+1)r_{13} + x_3 + 1)a_3$ com $r, (q+1)r_{13} + x_3 + 1 > 0$ o que contradiz o fato de c_2 ser mínimo.

Portanto $(c_2-1)a_2 + (r_{13}-1)a_3 \in \mathrm{Ap}(H,a_1)$. De forma semelhante pode-se mostrar que $(r_{12}-1)a_2 + (c_3-1)a_3 \in \mathrm{Ap}(H,a_1)$.

Tome $s \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$ então pelo Lema 9 $s = x_2a_2 + x_3a_3$ com x_2 e $x_3 \in \mathbf{N}_0$. Mais ainda, tem-se que $x < c_2$ e $y < c_3$. Quer se mostrar que $(x, y) \leq (r_{13}-1, r_{13})$ ou $(x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)$.

Suponha que $(x, y) \nleq (r_{13} - 1, r_{13})$. Como $y < c_3$ tem-se que $x > r_{12} - 1$, isto é, $x \geq r_{12}$.

Suponha inicialmente que $y \geq r_{13}$. Desta forma pode-se reescrever $xa_2 + ya_3$ da seguinte maneira:

$$r_{12}a_2 + r_{13}a_3 + (x - r_{13})a_2 + (y - r_{13})a_3.$$

Lembrando que $c_1a_1 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3$ tem-se que:

$$xa_2 + ya_3 = c_1a_1 + r_{12}a_2 + r_{13}a_3.$$

Por outro lado tem-se que $xa_2 + ya_3 - a_1 = (c_1 - 1)a_1 + r_{12}a_2 + r_{13}a_3$. Como $c_1 \geq 1, x \geq r_{12}$ e $y \geq r_{13}$ obtém-se que $xa_2 + ya_3 - a_1 \in H$ contradizendo o fato de $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$. Conseqüentemente $y < r_{13}$, ou seja, $y \leq r_{12}$. Sendo assim, $(x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1)$.

De maneira similar prova-se que se $(x, y) \nleq (c_2 - 1, r_{13} - 1)$ então tem-se que $(x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)$.

Portanto dado $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$ tem-se que

$$xa_2 + ya_3 \preceq (r_{12} - 1)a_2 + (c_3 - 1)a_3$$

ou

$$xa_2 + ya_3 \preceq (c_2 - 1)a_2 + (r_{13} - 1)a_3$$

uma vez que $(r_{12}-1-x)a_2+(c_3-1-y)a_3$ e $(c_2-1-x)a_2+(r_{13}-1-y)a_3 \in H$. $\square$

Lema 11. *Os geradores a_1, a_2 e a_3 podem ser reescritos como:*

$$\begin{cases} a_1 = r_{12}r_{13} + r_{12}r_{23} + r_{13}r_{32} \\ a_2 = r_{13}r_{21} + r_{21}r_{23} + r_{23}r_{31} \\ a_3 = r_{12}r_{31} + r_{21}r_{32} + r_{31}r_{32} \end{cases}$$

Demonstração. Considere o conjunto $\mathrm{Ap}(H, a_1)$. Pelo Lema 8 tem-se que $\#\mathrm{Ap}(H, a_1) = a_1$. Tome $x_2, y_2 \in \{1, \ldots, c_2 - 1\}$ e $x_3, y_3 \in \{1, \ldots, c_3 - 1\}$ tais que $x_2a_2 + x_3a_3 = y_2a_2 + y_3a_3$.

Afirmação: Tem-se que $x_2 = y_2$ e $x_3 = y_3$.

Isso decorre da definição de c_2 e c_3 e do Lema 10.

Considere o conjunto

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1) \text{ ou } (x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)\}$$

Mostra-se inicialmente que $\#\mathrm{Ap}(H, a_1) = \#C$.

Note que $C \subseteq \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

De fato, seja $(x, y) \in C$. Suponha que $(x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1)$. Do Lema 6 tem-se que $r_{13} - 1 \leq c_3 - 1$ e portanto $(x, y) \leq (c_2 - 1, c_3 - 1)$ e do Lema 9 obtém-se que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Suponha agora que $(x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)$. Pelo Lema 6 tem-se que $r_{12} - 1 \leq c_2 - 1$ e portanto $(x, y) \leq (c_2 - 1, c_3 - 1)$ e pelo Lema 9 obtém-se que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Consequentemente $C \subseteq \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Considere ψ definida por:

$$\begin{array}{rcl} \psi \ : \ \mathrm{Ap}(H, a_1) & \to & C \\ xa_2 + ya_3 & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

Da Afirmação tem-se que ψ está bem definida. Falta provar que ψ é uma função bijetora.

ψ é injetora porque dados $xa_2 + ya_3$ e $za_2 + ta_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$ tais que $\psi(xa_2 + ya_3) = \psi(za_2 + ta_3)$, ou seja, $(x, y) = (z, t)$ tem-se que $x = z$ e $y = t$ e portanto $xa_2 + ya_3 = za_2 + ta_3$.

Resta demonstrar que ψ é sobrejetora. Seja $(x, y) \in C$. Se $(x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1)$, ou seja, $x \leq c_2 - 1 < c_2$ e $y \leq r_{13} - 1$. Do Lema 6 tem-se que $r_{13} - 1 < c_3 - 1 < c_3$ e portanto $(x, y) < (c_2, c_3)$. Pelo Lema 9 tem-se que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$ e mais ainda $\psi(xa_2 + ya_3) = (x, y)$.

Similarmente, se $(x, y) \leq (r_{12}-1, c_3-1)$, ou seja, $x \leq r_{12}-1$ e $y \leq c_3-1 < c_3$. Do Lema 6 tem-se que $r_{12}-1 < c_2-1 < c_2$ e portanto $(x, y) < (c_2, c_3)$. Pelo Lema 9 tem-se que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$ e mais ainda $\psi(xa_2 + ya_3) = (x, y)$.

Logo ψ é sobrejetora e conseqüentemente ψ é bijetora. Além disso, como $C \subseteq \mathrm{Ap}(H, a_1)$ tem-se que $\#\mathrm{Ap}(H, a_1) = \#C$.

Sendo o conjunto

$C = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1)\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)\}$ tem-se que:

$\#C = \#\{(x, y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} : (x, y) \leq (c_2-1, r_{13}-1)\} + \#\{(x, y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} : (x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)\} - \#\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1)\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)\}$.

Pelo Lema 6 segue que $c_2 - 1 > r_{12} - 1$ e que $c_3 - 1 > r_{13} - 1$. Sendo assim:
$\#C = \#\{(x, y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} : (x, y) \leq (c_2-1, r_{13}-1)\} + \#\{(x, y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} : (x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)\} - \#\{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x, y) \leq (r_{12} - 1, r_{13} - 1)\}$.

Com isso em mente tem-se que $\#\mathrm{Ap}(H, a_1) = r_{12}c_3 + r_{13}c_2 - r_{12}r_{13}$, ou seja, $a_1 = r_{12}c_3 + r_{13}c_2 - r_{12}r_{13}$. Do Lema 7 segue que $a_1 = r_{12}r_{13} + r_{12}r_{23} + r_{13}r_{32}$.

De maneira similar se mostra que $a_2 = r_{13}r_{21} + r_{21}r_{23} + r_{23}r_{31}$ e que $a_3 = r_{12}r_{31} + r_{21}r_{32} + r_{31}r_{32}$. □

Lema 12. *Tem-se que*

$$a_1 = c_2c_3 - r_{23}r_{32};$$

$$a_2 = c_1c_3 - r_{13}r_{31};$$

$$a_3 = c_1c_2 - r_{12}r_{21}.$$

Demonstração. Pelo Lema 7 segue que $c_2c_3 - r_{23}r_{32} = (r_{12}r_{13} + r_{12}r_{32} + r_{23}r_{13} + r_{23}r_{32}) - r_{23}r_{32}$, isto é, $c_2c_3 - r_{23}r_{32} = r_{12}r_{13} + r_{12}r_{23} + r_{13}r_{32}$ e pelo Lema 11 pode-se concluir que $c_2c_3 - r_{23}r_{32} = a_1$.

De maneira simétrica demonstra-se os outros resultados. □

Seja H um semigrupo. Diz-se que um elemento $x \notin H \setminus \{0\}$ é um **pseudo número de Frobenius** se para todo $n \in N$ tem-se que $n + x \in H$. O conjunto constituído pelos pseudos números de Frobenius de H será representado por $P_g(H)$ e a sua cardinalidade recebe o nome de tipo e será aqui representada por $t(H)$.

Observação 4. *Tem-se que* $\ell_g = \max(P_g(H))$.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [10]

Lema 13. *Seja* H *um semigrupo,* $n \neq 0 \in H$ *e seja* $max_{\preceq}(Ap(H,n)) = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{ik}\}$. *Então:*

$$P_g(H) = \{\omega_{i_1} - n, \omega_{i_2} - n, \ldots, \omega_{ik} - n\}.$$

O resultado enunciado abaixo por Selmer em [11] é muito conhecido e extremamente importante, porque exibe uma maneira de escrever o gênero de qualquer semigrupo desde que o conjunto de Apery $\mathrm{Ap}(H, n_1)$ seja conhecido.

Lema 14. *Seja* H *um semigrupo numérico e seja* n_1 *a multiplicidade de* H. *Assuma que* $Ap(H, n_1) = \{0, \omega_1, \ldots, \omega_{n_1-1}\}$. *Então:*

$$g = \frac{1}{n_1}(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n_1-1}) - \frac{n_1 - 1}{2}$$

Lema 15. *Seja* H *um semigrupo minimamente gerado por* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *tal que* $mdc(a_i, a_j) = 1$ *com* $i \neq j$ *para cada* $1 \leq i, j \leq 3$. *Tem-se que:*

$$P_g(H) = \{(c_3 - 1)a_3 + (r_{12} - 1)a_2 - a_1, (r_{13} - 1)a_3 + (c_2 - 1)a_2 - a_1\}.$$

Demonstração. Do Lema 10 tem-se que $\max_{\preceq}(\mathrm{Ap}(H, a_1)) = \{(c_3 - 1)a_3 + (r_{12} - 1)a_2, (r_{13} - 1)a_3 + (c_2 - 1)a_2\}$ e do Lema 13 segue o resultado. □

Considere

$$\alpha = (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)^2 - 4(c_1a_1c_2a_2 + c_1a_1c_3a_3 + c_2a_2c_3a_3 - a_1a_2a_3)$$

e

$$\beta = (c_1 - 2)a_1 + (c_2 - 2)a_2 + (c_3 - 2)a_3.$$

Tome $\Delta = \sqrt{\alpha}$.

Lema 16. *Tem-se que* $\Delta > 0$ *e* $P_g(H) = \dfrac{1}{2}\{\beta + \Delta, \beta - \Delta\}$.

Demonstração. Pela definição de c_1 tem-se que:

$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = (r_{12} + c_2)a_2 + (r_{13} + c_3)a_3$. Logo:

$(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)^2 = (r_{12} + c_2)^2a_2^2 + 2(r_{12} + c_2)(r_{13} + c_3)a_2a_3 + (r_{13} + c_3)^2a_3^2$.

Além disso,

$c_1a_1c_2a_2 = r_{12}c_2a_2^2 + r_{13}c_2a_2a_3$

$c_1a_1c_3a_3 = r_{12}c_3a_2a_3 + r_{13}c_2a_3^2$.

Pelo Lema 11 tem-se que:

$a_1a_2a_3 = (r_{12}r_{13} + r_{12}r_{23} + r_{13}r_{32})a_2a_3$. Deste modo:

$\alpha = (r_{12}^2+2r_{12}c_2+c_2^2)a_2^2+(r_{13}^2+2r_{13}c_3+c_3^2)a_3^2+2(r_{12}r_{13}+r_{12}c_3+c_2r_{13}+c_2c_3)a_2a_3-$ $4[r_{12}c_2a_2^2 + (r_{13}c_2 + r_{12}c_3 + c_2c_3)a_2a_3 + r_{13}c_3a_3^2 - (r_{12}r_{13} + r_{12}r_{23} + r_{13}r_{32})a_2a_3]$.

Reagrupando os termos obtém-se que:

$\alpha = (r_{12} - c_2)^2a_2^2 + 2(3r_{12}r_{13} - r_{12}c_3 - r_{13}c_2 - c_2c_3 + 2r_{12}r_{23} + 2r_{13}r_{32})a_2a_3 + (r_{13} - c_3)^2a_3^2$.

Pelo Lema 7 se escreve que:

$\alpha = r_{32}^2a_2^2 + 2(-r_{23}r_{32})a_2a_3 + r_{23}^2a_3^2$, ou seja, $\alpha = (r_{32}a_2 - r_{23}a_3)^2$. Devido a este resultado se conclui que Δ é positivo.

Pelo Lema 15) tem-se que $P_g(H) = \{(c_3 - 1)a_3 + (r_{12} - 1)a_2 - a_1, (r_{13} - 1)a_3 + (c_2 - 1)a_2 - a_1\}$.

Suponha que $(c_3 - 1)a_3 + (r_{12} - 1)a_2 - a_1 < (r_{13} - 1)a_3 + (c_2 - 1)a_2 - a_1$, ou seja, $(c_3 - r_{13})a_3 < (c_2 - r_{12})a_2$. Do Lema 6 segue que $r_{32}a_2 < r_{23}a_3$.

Como $\ell_g = max\{P_g(H)\}$ tem-se que $\ell_g = c_2a_2 + r_{13}a_3 - (a_1 + a_2 + a_3)$. Do Lema 7 e da definição de c_1 reescreve-se ℓ_g da seguinte maneira: $\ell_g = c_1a_1 + r_{23}a_3 - (a_1 + a_2 + a_3)$.

Semelhantemente obtém-se que se $r_{32}a_2 > r_{23}a_3$ ℓ_g se reescreve como $\ell_g = c_1a_1 + r_{32}a_2 - (a_1 + a_2 + a_3)$.

Conclui-se que $\ell_g = c_1a_1 + max\{r_{32}a_2, r_{23}a_3\} - (a_1 + a_2 + a_3)$.

Portanto $P_g(H) = \{c_1a_1 + max\{r_{32}a_2, r_{23}a_3\} - (a_1 + a_2 + a_3), c_1a_1 +$

$\min\{r_{32}a_2, r_{23}a_3\} - (a_1 + a_2 + a_3)\}$.

Como para quaisquer a e $b \in \mathbf{N}$ pode se escrever que $max\{a, b\} = \dfrac{a + b + \sqrt{(a-b)^2}}{2}$ e $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - \sqrt{(a-b)^2}}{2}$.

Desta maneira tem-se que:

$P_g(H) = \{c_1a_1 + \dfrac{r_{32}a_2 + r_{23}a_3 + \Delta}{2} - (a_1 + a_2 + a_3), c_1a_1 + \dfrac{r_{32}a_2 + r_{23}a_3 - \Delta}{2} - (a_1 + a_2 + a_3)\}$

de onde

$P_g(H) = \dfrac{1}{2}\{2c_1a_1 + r_{32}a_2 + r_{23}a_3 + \Delta - 2(a_1 + a_2 + a_3), 2c_1a_1 + r_{32}a_2 + r_{23}a_3 - \Delta - 2(a_1 + a_2 + a_3)\}$,

ou seja

$P_g(H) = \dfrac{1}{2}\{(c_1 - 2)a_1 + c_1a_1 + r_{32}a_2 + r_{23}a_3 + \Delta - 2(a_2 + a_3), (c_1 - 2)a_1 + c_1a_1 + r_{32}a_2 + r_{23}a_3 - \Delta - 2(a_2 + a_3)\}$.

Lembrando que $c_1a_1 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3$ tem-se que:

$P_g(H) = \dfrac{1}{2}\{(c_1 - 2)a_1 + r_{12}a_2 + r_{13}a_3 + r_{32}a_2 + r_{23}a_3 + \Delta - 2(a_2 + a_3), (c_1 - 2)a_1 + r_{12}a_2 + r_{13}a_3 + r_{32}a_2 + r_{23}a_3 - \Delta - 2(a_2 + a_3)\}$,

isto é

$P_g(H) = \dfrac{1}{2}\{(c_1 - 2)a_1 + (r_{12} + r_{32})a_2 + (r_{13} + r_{23})a_3 + \Delta - 2(a_2 + a_3), (c_1 - 1)a_1 + (r_{12} + r_{32})a_2 + (r_{13} + r_{23})a_3 - \Delta - 2(a_2 + a_3)\}$.

Pelo Lema 7 e reagrupando os termos obtém-se que

$P_g(H) = \dfrac{1}{2}\{(c_1 - 2)a_1 + (c_2 - 2)a_2 + (c_3 - 2)a_3 + \Delta, (c_1 - 2)a_1 + (c_2 - 2)a_2 + (c_3 - 2)a_3 - \Delta\}$.

Pela definição de β tem-se que

$$P_g(H) = \frac{1}{2}(\beta + \Delta, \beta - \Delta)$$

o que encerra a demonstração. □

Defina

$$\gamma = (c_1 - 1)a_1 + (c_2 - 1)a_2 + (c_3 - 1)a_3.$$

Teorema 4. *Considere H um semigrupo de gênero minimamente gerado por $\{a_1, a_2, a_3\}$ tais que $mdc(a_i, a_j) = 1$ para todo $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq 3$. Então: $\ell_g = \frac{1}{2}(\beta + \Delta)$ e $g = \frac{1}{2}(\gamma - c_1c_2c_3 + 1)$.*

Demonstração. Do Lema 16 e da observação 4 tem-se que $\ell_g = \frac{1}{2}(\beta + \Delta)$. Falta mostrar que $g = \frac{1}{2}(\gamma - c_1c_2c_3 - 1)$.

Para mostrar tal fato devemos encontrar o conjunto $\mathrm{Ap}(H, a_1)$. Considere os conjuntos:

$$A := \{xa_2 + ya_3 : (x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1)\}$$

e

$$B := \{xa_2 + ya_3 : (x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)\}$$

Primeiramente vamos mostrar que: $\mathrm{Ap}(H, a_1) = A \cup B$.

De fato, seja $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$. Então pelo Lema 9 tem-se que $x < c_2$ e $y < c_3$, ou equivalentemente, $x \leq c_2 - 1$ e $y \leq c_3 - 1$.

Caso 1) $x \geq r_{12}$.

Suponha que $y \geq r_{13}$. Então:

$$xa_2 + ya_3 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3 + (x - r_{12})a_2 + (y - r_{13})a_3.$$

Lembrando que $c_1a_1 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3$ tem-se que:

$$xa_2 + ya_3 = c_1a_1 + (x - r_{12})a_2 + (y - r_{13})a_3.$$

Observe que

$$xa_2 + ya_3 - a_1 = (c_1 - 1)a_1 + (x - r_{12})a_2 + (y - r_{13})a_3 \in H$$

porque $c_1 \geq 1, x \geq r_{12}$ e $y \geq r_{13}$ o que seria um absurdo uma vez que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Conclui-se que $y < r_{13}$, ou seja, $y \leq r_{13} - 1$. Como $x \leq c_2 - 1$ tem-se que $(x, y) \leq (c_2 - 1, r_{13} - 1)$ e portanto $xa_2 + ya_3 \in A$.

Caso 2) $x < r_{12}$, isto é $x \leq r_{12} - 1$.

Neste caso, como $y < c_3 - 1$ tem-se que $(x, y) \leq (r_{12} - 1, c_3 - 1)$ e portanto $xa_2 + ya_3 \in B$.

Consequentemente tem-se que $xa_2 + ya_3 \in A \cup B$ e sendo assim $\mathrm{Ap}(H, a_1) \subseteq A \cup B$. Falta mostrar que se $A \cup B \subseteq \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Tome $xa_2 + ya_3 \in A \cup B$. Suponha que $xa_2 + ya_3 \in A$. Então $x \leq c_2 - 1$ e $y \leq r_{13} - 1$. Do Lema 6 tem-se que $r_{13} - 1 < c_3 - 1$ e portanto $x \leq c_2 - 1$ e $y \leq c_3 - 1$ e pelo Lema 9 segue que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$.

Analogamente se $xa_2 + ya_3 \in B$. Então $x \leq r_{12} - 1$ e $y \leq c_3 - 1$. Do Lema 6 tem-se que $r_{12} - 1 < c_2 - 1$ e portanto $x \leq c_2 - 1$ e $y \leq c_3 - 1$ e pelo Lema 9 segue que $xa_2 + ya_3 \in \mathrm{Ap}(H, a_1)$. Consequentemente $\mathrm{Ap}(H, a_1) \subseteq A \cup B$ de onde pode se concluir que $\mathrm{Ap}(H, a_1) = A \cup B$.

O conjunto A é formado pelos elementos:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & a_2 & 2a_2 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 \\
a_3 & a_2 + a_3 & 2a_2 + a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + a_3 \\
2a_3 & a_2 + 2a_3 & 2a_2 + 2a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + 2a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(r_{13}-1)a_3 & a_2 + (r_{13}-1)a_3 & 2a_2 + (r_{13}-1)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + (r_{13}-1)a_3 \\
r_{13}a_3 & a_2 + r_{13}a_3 & 2a_2 + r_{13}a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + r_{13}a_3 \\
(r_{13}+1)a_3 & a_2 + (r_{13}+1)a_3 & 2a_2 + (r_{13}+1)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + (r_{13}+1)a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(c_3-2)a_3 & a_2 + (c_3-2)a_3 & 2a_2 + (c_3-2)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + (c_3-2)a_3 \\
(c_3-1)a_3 & a_2 + (c_3-1)a_3 & 2a_2 + (c_3-1)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + (c_3-1)a_3
\end{array}$$

E o conjunto B é formado por:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 & \cdots & (c_2-1)a_2 \\
a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + a_3 & \cdots & (c_2-1)a_2 + a_3 \\
2a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + 2a_3 & \cdots & (c_2-1)a_2 + 2a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & vdots \\
(r_{13}-2)a_3 & \cdots & (r_{12}-2)a_2 + (r_{13}-2)a_3 & \cdots & (c_2-1)a_2 + (r_{13}-2)a_3 \\
(r_{13}-1)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 + (r_{13}-1)a_3 & \cdots & (c_2-1)a_2 + (r_{13}-1)a_3
\end{array}$$

Desta maneira tem-se que $\mathrm{Ap}(H, a_1)$ é constituído pelos elementos:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \cdots & (r_{12}-1)a_2 & \cdots & (c_2-1)a_2 \\
a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2+a_3 & \cdots & (c_2-1)a_2+a_3 \\
2a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2+2a_3 & \cdots & (c_2-1)a_2+2a_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & vdots \\
(r_{13}-1)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2+(r_{13}-1)a_3 & \cdots & (c_2-1)a_2+(r_{13}-1)a_3 \\
r_{13}a_3 & \cdots & (r_{12}-2)a_2+r_{13}a_3 & & \\
(r_{13}+1)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2+(r_{13}+1)a_3 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(c_3-2)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2+(c_3-2)a_3 & & \\
(c_3-1)a_3 & \cdots & (r_{12}-1)a_2+(c_3-1)a_3 & &
\end{array}$$

Com esta informação tem-se que:

$$\sum_{\omega\in \mathrm{Ap}(H,a_1)} := \sum_1 + \sum_2$$

onde

$$\sum_1 = \sum_{k=0}^{c_2-1}\sum_{t=0}^{r_{13}-1}(ka_2+ta_3)$$

e

$$\sum_2 = \sum_{k=0}^{r_{12}-1}\sum_{t=0}^{c_3-r_{13}-1}(ka_2+(t+r_{13})a_3).$$

Tem-se que:

$$\sum_1 = a_2(\sum_{k=0}^{c_2-1}k\sum_{t=0}^{r_{13}-1}1)+a_3(\sum_{k=0}^{c_2-1}\sum_{t=0}^{r_{13}-1}t)$$

de onde

$$\sum_1 = a_2r_{13}(\sum_{k=0}^{c_2-1}k)+\frac{(r_{13}-1)a_3r_{13}}{2}(\sum_{k=0}^{c_2-1}1)$$

e

$$\sum_2 = a_2(\sum_{k=0}^{r_{12}-1}k\sum_{t=0}^{c_3-r_{13}-1}1)+a_3(\sum_{k=0}^{r_{12}-1}\sum_{t=0}^{c_3-r_{13}-1}t+r_{13}\sum_{k=0}^{r_{12}-1}\sum_{t=0}^{c_3-r_{13}-1}1),$$

ou seja,

$$\sum_1 = \frac{a_2r_{13}(c_2-1)c_2}{2}+\frac{(r_{13}-1)a_3r_{13}c_2}{2}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{2} &= \frac{a_2r_{13}(c_2-1)c_2}{2} + \frac{a_3r_{12}c_3^2 - 2a_3r_{12}r_{13}c_3 - a_3r_{12}c_3 - a_3r_{12}r_{13}}{2} \\ &+ a_3r_{13}r_{12}c_3 - a_3r_{13}^2r_{12}.\end{aligned}$$

Efetuando os cálculos tem-se:

$$\sum_{\omega\in \mathrm{Ap}(H,a_1)} = \frac{a_2r_{13}c_2^2 - a_2r_{13}c_2}{2} + \frac{(r_{13}^2a_3c_2 - a_3r_{13}c_2)}{2}.$$

Sendo assim, tem-se que

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in \mathrm{Ap}(H,a_1)} &= \frac{a_2r_{13}(c_2-1)c_2}{2} + \frac{a_3r_{12}c_3^2 - 2a_3r_{12}r_{13}c_3 - a_3r_{12}c_3 - a_3r_{12}r_{13}}{2} \\ &+ a_3r_{13}r_{12}c_3 - a_3r_{13}^2r_{12} + \frac{a_2r_{13}c_2^2 - a_2r_{13}c_2}{2} + \frac{r_{13}^2a_3c_2 - a_3r_{13}c_2}{2}.\end{aligned}$$

Efetuando os cálculos e reagrupando os termos obtém-se que:

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in \mathrm{Ap}(H,a_1)} &= \frac{1}{2}\{-r_{12}c_3a_2 - r_{12}c_3a_3 + r_{12}^2c_3a_2 + r_{12}c_3^2a_3 - r_{13}c_2a_2 - r_{13}c_2a_3\} \\ &+ \frac{1}{2}\{r_{13}^2c_2a_3 + r_{13}c_2^2a_2 + r_{12}r_{13}a_2 + r_{12}r_{13}a_3 - r_{12}^2r_{13}a_2 - r_{12}r_{13}^2a_3\}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 14 tem-se que:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{a_1}\left(\sum_{\omega\in \mathrm{Ap}(H,a_1)} \omega\right) - \frac{a_1-1}{2} = \frac{1}{2a_1}\left(\sum_{\omega\in \mathrm{Ap}(H,a_1)} \omega - a_1^2 + a_1\right) \\ &= \frac{1}{2c_1a_1}\left\{c_1\left(\sum_{\omega\in \mathrm{Ap}(H,a_1)} \omega\right) - c_1a_1^2 + c_1a_1\right\}.\end{aligned}$$

Lembrando que $c_1a_1 = r_{12}a_2 + r_{13}a_3$, do Lema 7 e pelo Lema 12 e após alguns cálculos obtém-se que $g = \frac{1}{2}(\gamma - c_1c_2c_3 + 1)$. □

Exemplo 2. *Considere o semigrupo $H = <15, 17, 19>$. Quer-se encontrar g e ℓ_g para tal semigrupo.*

Considere $A = \{x \in \mathbf{N} : 15x \in < 17, 19 >\}$. Da definição de c_1 e após efetuar alguns cálculos tem-se que $c_1 = \min(A) = 10$.

Considere agora $B = \{y \in \mathbf{N} : 17y \in < 15, 19 >\}$. Utilizando a definição de c_2, segue que $c_2 = \min(B) = 2$.

Finalmente dado $C = \{z \in \mathbf{N} : 19z \in < 15, 17 >\}$, depois de alguns cálculos encontra-se que $c_3 = \min(C) = 8$.

Lembrando que $\alpha == (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)^2 - 4(c_1a_1c_2a_2 + c_1a_1c_3a_3 + c_2a_2c_3a_3 - a_1a_2a_3)$ $\beta = (c_1 - 2)a_1 + (c_2 - 2)a_2 + (c_3 - 2)a_3$, $\Delta = \sqrt{\alpha}$ e $\gamma = (c_1 - 1)a_1 + (c_2 - 1)a_2 + (c_3 - 1)a_3$ tem-se que $\alpha = 4$, $\beta = 234$ $\Delta = 2$ e $\gamma = 285$.

Aplicando o Teorema 4 para o semigrupo H definido, obtém-se que $\ell_g = 118$ e $g = 63$.

Exemplo 3. *Considere $p \geq 5$ ímpar. Seja o semigrupo $H =< p - 2, p, p + 2 >$. Deseja-se obter os invariantes g e ℓ_g em função dos geradores deste semigrupo.*

Primeiramente observe que H é minimamante gerado por $\{p - 2, p, p + 2\}$. Seja $A = \{a \in \mathbf{N} : a(p - 2) \in < p, p + 2 >\}$. Tem-se que $c_1 = \min(A)$.

Observe que $p - 1 \in A$.

De fato, $(p - 1)(p - 2) = p^2 - 3p + 2 = (p - 4)p + 1(p + 2) \in < p, p + 2 >$ uma vez que $p - 4 > 0$.

Portanto, $c_1 \leq p - 1$. Desta maneira, $c_1 = p - k$ com $1 \leq k \leq p - 2$. Sabe-se que $(p - k)(p - 2) \in < p, p + 2 >$, ou seja, existem α e $\beta \in \mathbf{N}$ tais que $c_1(p - 2) = \alpha p + \beta(p + 2)$.

Se mostrará que necessariamente $\alpha = p - 2(k + 1)$ e que $\beta = k$. Sejam α e $\beta \in \mathbf{N}$ tais que $\alpha = a_1p + b_1$ e $\beta = a_2p + b_2$ onde a_1, b_1, a_2 e $b_2 \in Z$. Logo $\alpha p + \beta(p + 2) = (a_1 + a_2)p^2 + (b_1 + b_2 + 2a_2)p + 2b_2 = p^2 - (k + 2)p + 2k$ de onde $a_1 + a_2 = 1$ $b_1 + b_2 + 2a_2 = -(k + 2)$ $b_2 = k$. Portanto

$$\alpha = (1 - a_2)p - 2(k + a_2 + 1)$$

e

$$\beta = a_2p + k.$$

Sendo $\alpha > 0$ tem-se que

$$a_2 < \frac{p-2(k+1)}{p+2}.$$

Como $k \geq 1$ então $2(k+1) \geq 4$. Sendo assim, $p-2(k+1) \leq p-4 < p+2$. Sendo assim, $a_2 < 1$.

Analogamente, $\beta > 0$ e portanto $a_2 > \left[\frac{-k}{p}\right]$ e sendo $k \leq p-1 < p$ segue que $a_2 > -1$.

Tem-se que $a_2 \in Z$ é tal que $-1 < a_2 < 1$, ou seja, $a_2 = 0$. Conlui-se que $\alpha = p - 2(k+1)$ e $\beta = k$.

Tomando $m = \max\{x \in \mathbf{N} : p - 2(x+1) > 0\}$ segue que $c_1 = p - m$.

Observe que $c_2 = 2$ uma vez que $2p = 1(p-2) + 1(p+2) \in < p-2, p+2 >$.

Seja $B = \{b \in \mathbf{N} : b(p+2) \in < p-2, p >\}$. Então $c_3 = \min(B)$.

Observe que $p - 3 \in B$.

Com efeito, $(p-3)(p+2) = p^2 - p - 6 = 3p-2) + (p-4)p \in < p-2, p >$ pois $p - 4 > 0$. Portanto $c_3 \leq p - 3$. Assim $c_3 = p - t$ com $3 \leq t \leq p - 3$.

Como $(p-t)(p+2) \in B$ então existem q e $r \in \mathbf{N}$ tais que $(p-t)(p+2) = q(p-2) + rp$.

Quer-se mostrar que $q = t$ e $r = p - 2(t-2)$. Considere $q = f_1p + g_1$ e $r = f_2p + g_2$ com f_1, f_2, g_1 e $g_2 \in Z$. Então:

$q(p-2) + rp = (f_1 + f_2)p^2 + (g_1 + g_2 - 2f_1)p - 2g_1 = p^2 - (t-1)p - 2t$. Deste modo, pode-se concluir que $g_1 = t, \;\; f_2 = 1 - f_1$ e $g_2 = 2(f_1 + 1 - t)$. Sendo assim, $q = f_1p + t$ e $r = (1 - f_1)p + 2(f_1 + 1 - t)$.

Como $q > 0$ segue que $f_1 > \frac{-t}{p}$ e $t < p$ obtém-se que $f_1 > -1$.

Além disso, $r > 0$, isto é, $f_1 < \frac{p-2(t-1)}{p-2}$. Sendo que $t \geq 3$ e através de algumas operações tem-se que $f_1 < 1$. Porém $f_1 \in Z$ e $f_1 > -1$, ou seja $f_1 = 0$.

Concluindo tem-se que $q = t$ e $r = p + 2(1-t) = p - 2(t-1)$.

Considere $n = \max\{y \in \mathbf{N} : p - 2(y-1) > 0\}$. É fácil ver que $c_3 = p - n$.

Utilizando-se a expressão para calcular α e fazendo os rearranjos necessários obtem-se que $\alpha = 4$. Portanto $\beta = 2$.

Aplicando-se o Teorema 4 tem-se que $\ell_g =$ e que $g =$.

Capítulo 4

Semigrupos de Weierstrass

Este capítulo se propõe a ilustrar certos fatos da geometria algébrica clássica que motivam o estudo de semigrupos numéricos. Estes fatos serão enunciados sem demonstração.

Seja $\mathcal{X}$ uma superfície de Riemann compacta e $P \in \mathcal{X}$. Defina

$$H(P) := \{n \in \mathbf{N} : \text{ existe } f \in \mathbb{C}(\mathcal{X}) \text{ tal que } \mathrm{div(f)}_\infty = \mathrm{nP}\} \cup \{0\}$$

onde $\mathbb{C}(\mathcal{X})$ representa o conjunto de todas as funções meromorfas de $\mathcal{X}$ e $\mathrm{div}_\infty(\mathrm{f}) = \mathrm{nP}$ significa que $\mathcal{X}$ é regular exceto no ponto P e a ordem em tal ponto é igual a n.

Da propriedade $\mathrm{div}_\infty(\mathrm{fg}) = \mathrm{div}_\infty(\mathrm{f}) + \mathrm{div}_\infty(\mathrm{g})$ garante-se que $H(P)$ é um semigrupo de $\mathbf{N}$. Resta mostrar que este semigrupo é numérico, ou seja, $\mathbf{N} \setminus H(P)$ é um conjunto finito. Este resultado é garantido pelo Teorema de Riemann - Rock e o seu gênero conforme definido no Capítulo 1 coincide com o gênero, como espaço topológico, de $\mathcal{X}$. O semigrupo $H(P)$ é dito **de Weierstrass**.

Problemática: Será que todo semigrupo H é um semigrupo de Weierstrass?

Após quase 80 anos Buchtweitz [1] (Veja também Komeda [3]) observou uma condição necessária e não trivial para que um semigrupo seja de Weierstrass.

Seja H um semigrupo de gênero g e considere $L = \{\ell_1 < \ell_2 < \ldots < \ell_g\}$ o conjunto das lacunas de H. Defina o conjunto das soma de n lacunas de H como sendo

$$nL := \{\ell_{i_1} + \ell_{i_2} + \ldots + \ell_{i_n} : \ell_{i_j} \in L, \ \forall \ 1 \leq j \leq n\}.$$

Condição de Buchweitz: Se H é Weierstrass então $\#nL \leq (2n-1)(g-1) \ \forall \ n \geq 2 \in \mathbf{N}$.

Este resultado é uma aplicação direta do Teorema Riemann - Roch. Tal condição permitiu se exibir o primeiro exemplo de um semigrupo que não é de Weierstrass. Este semigrupo tem gênero 16 e é dado por:

$$H = \{0, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, \ldots\}.$$

O conjunto das lacunas de H é dado por

$$L = \{1, 2, \ldots, 11, 12, 19, 21, 24, 25\}.$$

Assim considerando $n = 2$ tem-se que $1 + \ell_i$ com $1 \leq i \leq 16$ pode assumir os valores $2, 3, 4, 5, \ldots, 11, 12, 13, 20, 22, 25, 26$. Analogamente $2 + \ell_i = 3, 4, 5, \ldots, 13, 14, 21, 23, 26, 27$ com $1 \leq i \leq 16$. Repetindo tal processo para as demais lacunas do conjunto H e ordenando os elementos obtém-se que

$$2L = \{2, 3, 4, \ldots, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50\},$$

ou seja,

$$2L = \{2, 3, 4, \ldots, 37, 38\} \cup \{40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50\}.$$

Portanto $\#(2L) = 38 - 2 + 1 + 9 = 46$, contradizendo a condição de Buchweitz. Desta forma H não é um semigrupo de Weierstrass.

O resultado abaixo foi provado por Oliveira em [6].

Teorema 5. *Seja H um semigrupo não hiperelíptico de gênero g.*

1) *H é simétrico se, e somente se, para cada inteiro $n \geq 2$ tem-se que:* $nL = \{n, n+1, n+2, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \cup \{(n-1)(2g-1) + \ell_j \ : \ \ell_j \in L$ *para cada j tal que* $1 \leq j \leq g\}$.

   Em particular, $\#(nL) = (2n-1)(g-1)$ *para cada* $n \geq 2$.

2) Se H é tal que $\ell_{g-1} = 2g-4$ ou $\ell_g \geq 2g-2$ então $\#(2L) = 3g-3$.

Para se demonstrar este Teorema faz-se necessários alguns outros resultados.

Lema 17. *Se H é um semigrupo não hiperelíptico de gênero g então cada inteiro m de 2 até $2g$ é soma de duas lacunas de H, com exceção de ℓ_g.*

Demonstração. Tome $m \geq 2$ fixo. Suponha por absurdo que m não é soma de duas lacunas de H. Considere os pares ordenados da forma $(a, m-a)$ tal que $1 \leq a \leq \left[\frac{m}{2}\right]$. É claro que cada um dos pares tem pelo menos uma não lacuna porque m não é soma de duas lacunas de H.

Portanto no intervalo $[1, m-1]$ existem pelo menos $\left[\frac{m}{2}\right]$ não lacunas. Chame de j o número de lacunas de H tais que $\ell_j < m$. Tem-se que:

$$(m-1) - j \geq \left[\frac{m}{2}\right],$$

isto é,

$$j \leq (m-1) - \left[\frac{m}{2}\right].$$

Como $\left[\frac{m}{2}\right] \leq \frac{m}{2} < \left[\frac{m}{2}\right] + 1$ obtém-se que:

$$j < \frac{m}{2}$$

o que resulta em $m \geq 2j+1$.

Da propriedade de j tem-se que $\ell_{j+1} \geq m$. Como H é não hiperelíptico pelo Teorema 1 tem-se que $\ell_{j+1} \leq 2(j+1) - 2 = 2j$ e portanto se $j+1 < g$:

$$\ell_g \geq m \geq 2g-1$$

o que é impossível.

Então $j+1 = g$. Desta forma $\ell_g = 2g-1 = m$. □

Lema 18. *Seja H um semigrupo de gênero g. Se L difere dos conjuntos $\{1, 2, \ldots, g-2, g-1, 2g-2\}$ e $\{1, 2, \ldots, g-2, g-1, 2g-1\}$ então existem inteiros i_g e j_g no intervalo $[2, g-1]$ tais que $\ell_g + 1 = \ell_{i_g} + \ell_{j_g}$.*

Demonstração. Suponha que $\left[\dfrac{\ell_g}{2}\right] + 1$ seja uma lacuna de H. Considere que ℓ_g seja par, então $\left[\dfrac{\ell_g}{2}\right] \in L$. Tomando $\ell_{i_g} = \left[\dfrac{\ell_g}{2}\right]$ e $\ell_{j_g} = \left[\dfrac{\ell_g}{2}\right] + 1$ tem-se que $\ell_g + 1 = \ell_{i_g} + \ell_{j_g}$. Considerando ℓ_g seja ímpar e tomando $\ell_{i_g} = \left[\dfrac{\ell_g}{2}\right] + 1 = \ell_{j_g}$ obtém-se que $\ell_g + 1 = \ell_{i_g} + \ell_{j_g}$.

Caso contrário, considere o seguinte intervalo $[1, \ell_g]$. Neste intervalo existem g lacunas e $\ell_g - g$ não lacunas. Quando se exclui do intervalo acima 1 e $\ell_g \in L$ obtém-se que no intervalo $[2, \ell_g - 1]$ existem $g - 2$ lacunas e $\ell_g - g$ não lacunas.

A demonstração então se divide em dois casos.

Caso 1) O número de não lacunas é menor que o número de lacunas, isto é, $\ell_g - g < g - 2$.

Considere os pares da forma $(a, \ell_g - a)$ com $2 \leq a \leq \left[\dfrac{\ell_g}{2}\right]$. Por hipótese existe um inteiro $z \in \{2, \ldots, \left[\dfrac{\ell_g}{2}\right]\}$ tal que z e $\ell_g - z \in L$.

Observe que: $\ell_g + 1 = \ell_g - z + z + 1$.

Se $z+1 \notin H$, tomando $\ell_{i_g} = \ell_g - z$ e $\ell_{j_g} = z+1$ obtém-se que $\ell_g + 1 = \ell_{i_g} + \ell_{j_g}$.

Se $z + 1 \in H$ tem-se que $\ell_g - (z + 1) \notin H$ e tomando $\ell_{i_g} = \ell_g - (z + 1)$ e $\ell_{j_g} = z$ obtém-se que $\ell_g + 1 = \ell_{i_g} + \ell_{j_g}$.

Caso 2) O número de não lacunas é maior ou igual ao número de lacunas, isto é, $\ell_g - g \geq g - 2$.

Por hipótese tem-se que $\ell_g \geq 2g - 2$. Por outro lado, $\ell_g \leq 2g - 1$. Portanto: $2g - 2 \leq \ell_g \leq 2g - 1$.

Suponha que $\ell_g = 2g - 2$. Por esta razão é que $g - 1 \notin H$. Como $L \neq \{1, 2, \ldots, g - 1, 2g - 2\}$ existe um inteiro m com $0 < m < g - 1$ tal que $m \in H \setminus \{0\}$. Escolha z o maior inteiro com esta propriedade. Pelo Lema 3 tem-se que $\ell_g - z \notin H$.

Repare que $\ell_g + 1 = (\ell_g - z) + (z + 1)$. Da escolha de z tem-se que $z + 1 \geq g - 1$. Mas $z < g - 1$ de onde $g - 1 \leq z + 1 < g$, ou seja, $z + 1 = g - 1$.

Tomando $\ell_{i_g} = \ell_g - z$ e $\ell_{j_g} = z + 1$ obtém-se que $\ell_g + 1 = \ell_{i_g} + \ell_{j_g}$.

Suponha que $\ell_g = 2g-1$ então H é simétrico. Além disso, $L \neq \{1, 2, \ldots, g-1, 2g-1\}$ o que implica que existe um inteiro m com $0 < m \leq g-1$ tal que $m \in H \setminus \{0\}$.

Seja z o maior inteiro com a característica acima. Como H é simétrico, pela Lema 3 obtém-se que $\ell_g - z \notin H$.

Mas $\ell_g - z = \ell_g + 1 - (z+1)$, ou seja, $\ell_g + 1 = \ell_g - z + z + 1$. Para finalizar a demonstração basta mostrar que $z + 1 \notin H$.

Pela característica de z tem-se que $z+1 > g-1$ e desta forma $g-1 < z \leq g$, ou seja, $z+1 = g$. Contudo $\ell_g - z = 2g-1-(g-1) = g \notin H$, isto é, $z+1 \notin H$. Tomando $\ell_{i_g} = \ell_g - z$ e $\ell_{j_g} = z+1$ obtém-se que $\ell_g + 1 = \ell_{i_g} + \ell_{j_g}$. □

Demonstração do Teorema 5

1) Para verificar tal igualdade é necessário mostrar que

$$nL \subseteq \{n, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \cup \{(n-1)(2g-1)+\ell_j : \ell_j \in L \text{ e } 1 \leq j \leq g\}$$

e que

$$\{n, \ldots, (n-1)(2g-1)-1\} \cup \{(n-1)(2g-1)+\ell_j : \ell_j \in L \text{ e } 1 \leq j \leq g\} \subseteq nL.$$

Para provar a primeira desigualdade utiliza-se a indução sobre n. Observe que para $n = 2$ a afirmaąo decorre do Lema 17. Considere que para $n = k$ a afirmação seja válida.

Quer-se mostrar que para $k+1$ a afirmação é verificada. Seja $z \in \{k\ell_g + \ell_j : \ell_j \in L \text{para} 1 \leq j \leq g\}$ então é claro que $z \in (k+1)L$. Considere agora $z \in \{k, k+1, \ldots, k\ell_{g-1}\}$ fixo.

Suponha inicialmente que $z \leq k+2g-3$. Então $k+1 \leq z \leq k+2g-3$, ou seja, $k \leq z-1 \leq k+2g-4$. Observe que se $k+2g-4 \leq (k-1)\ell_g - 1$ então $z-1 \in kL$. Assim $z-1 = \ell_{i_1} + \ell_{i_2} + \ldots + \ell_{i_k}$, isto é, $z = \ell_{i_1} + \ell_{i_2} + \ldots + \ell_{i_k} + 1$ e portanto $z \in (k+1)L$.

Falta garantir que $k+2g-4 \leq (k-1)\ell_g - 1$. Como $k \geq 2$ tem-se que $2k(g-1) \geq 4(g-1)$. Assim $2kg-2k \geq 4g-4$, ou seja, $2kg-k-2g \geq k+2g-4$ de onde $k+2g-4 \leq 2g(k-1)-k = (2g-1)(k-1)-1 = \ell_g(k-1)-1$ finalizando a demonstração.

Considere agora que $z = k+2g-2$. Logo $z-2 = k+2g-4$ o que pelo raciocínio acima leva a concluir que $z-2 \in kL$. Sendo assim, $z-2 = \ell_{i_1}+\ell_{i_2}+\ldots+\ell_{i_n}$, isto é, $z = \ell_{i_1}+\ell_{i_2}+\ldots+\ell_{i_n}+2$ o que leva a concluir que $z \in (k+1)L$ pois H é não hiperelíptico.

Suponha agora que $z \geq k+2g-1$. Como $z \in [k, k\ell_g-1]$ segue que $k+2g-1 \leq z \leq k(2g-1)-1$. Desta maneira $k \leq z-(2g-1) \leq (k-1)(2g-1)-1$, ou seja, $z-\ell_g \in kL$ e portanto $z = \ell_{i_1}+\ell_{i_2}+\ldots+\ell_{i_n}+\ell_g$ e conseqüentemente $z \in (k+1)L$.

Termina desta forma a indução. Pode então concluir que:

$$nL \subseteq \{n, n+1, \ldots, (n-1)\ell_g-1\} \cup \{(n-1)\ell_g+\ell_j : \ell_j \in L \text{ para todo } 1 \leq j \leq g\}.$$

Falta demonstrar a outra inclusão. Considere $m \in nL$. Ent ao tem-se que $m = \ell_{i_1}+\ell_{i_2}+\ldots+\ell_{i_n}$. Se $n \leq m \leq (n-1)\ell_g-1$ não a nada a mostrar. Suponha então que $m \geq (n-1)\ell_g$. Desta forma, $m = (n-1)\ell_g+s$ com $s \geq 0$ e portanto:

$$\ell_{i_n} = (n-1)\ell_g-(\ell_{i_1}+\ldots,\ell_{i_{n-1}})+s = (\ell_g-\ell_{i_1})+(\ell_g-\ell_{i_2})+\ldots+(\ell_g-\ell_{i_{n-1}})+s.$$

Como H é simétrico $\ell_g - \ell i_j \in H$ para cada $1 \leq j \leq n$. Além disso, como $\ell_{i_n} \in L$ obtém-se que $s \notin H$, isto é, $m \in \{(n-1)\ell_g+\ell_j : \ell_j \in L \text{ para todo } 1 \leq j \leq g\}$. Conseqüentemente

$$nL \subseteq \{n, n+1, \ldots, (n-1)\ell_g-1\} \cup \{(n-1)\ell_g+\ell_j : \ell_j \in L \text{ para todo } 1 \leq j \leq g\}.$$

Da igualdade acima se obtém que $\#(nL) = (n-1)\ell_g-1-n+1+g = (2n-1)(g-1)$.

Suponha por absurdo que H não seja simétrico. Então $\ell_g \neq 2g-1$, isto é, $2g-1-\ell_g \neq 0$. Seja um inteiro r fixo tal que $r > \dfrac{g}{2g-1-\ell_g}$.

Como cada lacuna é um inteiro entre 1 e ℓ_g a soma de r lacunas corresponderá a um número compreendido no intervalo $[r, r\ell_g]$. Logo, $\#(rL) \leq r\ell_g - r + 1 = (\ell_g - 1)r + 1$. Como da hipótese $\#(rL) = (2r-1)(g-1)$ tem-se que $(2r-1)(g-1) \leq r(\ell_g - 1)r + 1$ o que acarreta $r \leq \dfrac{g}{2g-1-\ell_g}$ o que seria impossível. Desta maneira conclui-se que H deve ser simétrico.

2) Considere $\ell_g \geq 2g-2$ então tem-se duas possibilidades $\ell_g = 2g-2$ ou $\ell_g = 2g-1$. Se $\ell_g = 2g-2$ segue do Lema 3 que $g-1 \notin H$ e do Lema 17 os inteiros $2, 3, \ldots, 2g-2$ são soma de duas lacunas. Contudo $\ell_g+\ell_1, \ell_g+\ell_2, \ldots, \ell_g+\ell_g$ também são soma de duas lacunas.

Para mostrar que qualquer soma de duas lacunas pode ser escrita desta forma, considere um inteiro $z > 2g-2$ que seja soma de duas lacunas de H, ou seja, $z = \ell_i + \ell_j$ com $\ell j > g-1$. Então pode-se escrever que $m = \ell g + s$ com $s \geq 0$.

Das duas igualdades anteriores pode-se concluir que $\ell_i = \ell_g - \ell_j + s$ e como $\ell_i \in L$ e utilizando a simetria de H tem-se que $\ell_g - \ell_i = \ell_j - s \in H$, isto é, $s \in L$. Conseqüentemente:

$$2L = \{2, 3, \ldots, 2g-2\} \cup \{\ell_g + \ell_1, \ldots, \ell_g + \ell_g\}.$$

Desta maneira, $\#(2L) = 2g - 2 - 2 + 1 + g = 3g - 3$.

Considere agora o caso em que $\ell_g = 2g-1$. Ele decorre do item anterior do Teorema em questão.

Assuma neste momento que $\ell_{g-1} = 2g-4$. Já analisou-se o caso em que $\ell_g \geq 2g-2$ e portanto resta considerar $\ell_g < 2g-2$, ou seja, $\ell_g = 2g-3$ uma vez que $\ell_g > \ell_{g-1} = 2g-4$.

No intervalo $[2, 2g-5]$ existem $g-3$ lacunas porque $1, 2g-4, 2g-3 \in L$ não fazem parte do mesmo. Considere agora os $g-3$ pares ordenados da forma $(a, \ell_g - a)$ com $2 \leq a \leq g-2$. Cada um deles será composto por uma lacuna e uma não lacuna de H.

Como $\ell_{g-1} = 2g-4$ é imediato que $g-2 \in L$. Se $g-2 \notin H$ então dos pares acima tem-se que $\ell_g - (g-2) = g-1 \in H$. Considere agora os $g-3$ pares ordenados seguintes $(b, \ell_{g-1} - b)$ com $2 \leq b \leq g-2$. Novamente cada um deles será constituído por um elemento que será uma lacuna e um elemento que será uma não lacuna de H.

Sendo que $g-1 \in H$ e observando que $g-1 = \ell_{g-1} - (g-3)$ obtém-se que $g-3 \in L$. Se $g-3 \notin H$ pelos pares da forma $9a, \ell_g - a)$ tem-se que $g \in H$.

Procedendo com este raciocínio conclui-se que $g-1, g, \ldots, 2g-5 \in H$ e $2, 3, \ldots, g-2 \notin H$. Logo $L = \{1, 2, \ldots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$. Com posse desta informação e após alguns cálculos encontra-se que

$$2L = \{2, 3, \ldots, 3g-5\} \cup \{4g-8, 4g-7, 4g-6\}.$$

E em particular, $\#(2L) = 3g-5-2+1+3 = 3g-3$. $\square$

Deste modo a condição de Buchweitz é satisfeita para os semigrupos simétricos e para os semigrupos tais que $\ell_g = 2g-2$ ou $\ell_{g-1} = 2g-4$ e portanto não é possível afirmar se existem ou não semigrupos desta forma que não são de Weiertrass.

Contudo, Stöhr provou a existência de semigrupos simétricos que não são de Weierstrass através da utilização de certos resultados de recobrimentos duplos. De maneira semelhante, fazendo uso de certos resultados de recobrimentos de ordem três, Oliveira e Stöhr demonstraram a existência de semigrupos que não são de Weierstrass (veja [12]).

Referências Bibliográficas

[1] Buchweitz, R. O.; Über Deformation monomialer Kurvensingularitäten und Weierstrasspunkte auf Riemannsche Flächen, Tese, Hannover, 1976.

[2] Johnson, S. M.; *A linear diophantine problem*, Canad. J. Math., 1960, 390 - 398.

[3] Komeda, J.; *Non-Weierstrass Numerical Semigroups*, Semigrup Forum, **57**, 1998, 157 - 185.

[4] Kunz, E.; "Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry," Birkhauser Boston.

[5] Nijenhuis, A. & Wilf, H. S.; *Representation of Integers Linear Forms in Nonnegatives Integers,*, J. Number Theory textbf4, 1972, 98-106.

[6] Oliveira, G. & Stöhr, K. O.; *Gorestein curves with quasi-symmetric Weierstrass semigroups,* Geom. Dedicata, **67** (1), 1997, 45 - 63.

[7] Oliveira, G.; *Carta pessoal*, 1996.

[8] Oliveira, G.; *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves*, Manuscripta Mathematica, 1991, **71** (4), 431 -450.

[9] Rosales, J. C.; Sanches-Garcia, P. A., *Numerical semigroups with embedding dimension three*, Arch. Math., 2004, **86** (6), 488 - 496.

[10] Rosales, J. C. & Branco, M. B.; *Numerical Semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups*, J. Pure Appl. Algebra, 2002, **171** (2 - 3), 303 - 314.

[11] SELMER,E. S.; *On the linear diophantine problem of Frobenius*, J. Reine Angew. Math. **(293/294)**, 1977, 1-17.

[12] TORRES, F; *Weierstrass points and doble coverings of curves with aplications: Symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups,* Manuscripta Math., **83**, 1994, 39-58.