UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS EM SISTEMAS REVERSÍVEIS

Gláucia Aparecida Soares Miranda

Orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

Campinas, Setembro de 2007

Órbitas Homoclínicas em Sistemas Reversíveis

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Gláucia Aparecida Soares Miranda** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de Setembro de 2007.

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira IMECC/UNICAMP.

Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino IMECC/UNICAMP.

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva IBILCE/UNESP.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

Miranda, Gláucia Aparecida Soares

M672o Órbitas homoclínicas em sistemas reversíveis / Gláucia Aparecida Soares Miranda -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Marco Antônio Teixeira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Campos vetoriais. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Singularidades (Matemática). I. Teixeira, Marco Antônio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Homoclinic orbits in reversible systems.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Vector fields. 2. Dynamical systems. 3. Singularity (Mathematical)

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva (IBILCE-UNESP)
Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 05/09/2007

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de setembro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA

Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof. (a). Dr (a). PAULO RICARDO DA SILVA

Ao meu pai (in memoriam)

Geraldo Saraiva Soares

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter dado-me esta oportunidade.

Ao professor Marco Antônio Teixeira pelo competente trabalho de orientação, paciência e compreensão.

Ao Maurício e à Ana Cristina pelas discussões que muito contribuíram para conclusão do trabalho.

Aos membros da banca examinadora Paulo Regis Caron Ruffino e Paulo Ricardo da Silva.

Aos professores do IMECC/UNICAMP e do DMA/UFV, em especial ao professor Olímpio Hiroshi Miyagaki pelos valiosos anos de orientação, disponibilidade e, principalmente, pela amizade.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP em especial à Tânia, ao Edinaldo e à Cidinha.

Ao meu pai Geraldo (*in memoriam*) e minha mãe Maria José por tudo. À minha irmã Mariele pelo incentivo constante, compreensão, carinho e por cuidar dos meus cachorros. À minha sobrinha Ariele, que apesar de muito pequenina, é capaz de me deixar extremamente feliz com um simples sorriso.

Ao meu marido, Marcelo, pelo amor, carinho, incentivo e paciência desde que nos conhecemos.

Aos meus avós, tios e primos, em especial, agradeço ao meu tio João por tudo.

À minha sogra Josiane, ao meu sogro Heloísio, aos meus cunhados Daniel e Ricardo e à Priscila.

Aos meus amigos Ana Cristina, Denise, Fernanda, Sarah, Luana, Roberta (*in memoriam*), Cláudia, Suzana, Luciany, Rutyele, Marília, Elimar, José Antônio, Anderson Tiago, Bruno, Paula, Rodolfo, Anderson, Lien, a toda turma de doutorado do primeiro semestre de 2007, a todos os colegas da UFV, do IMECC, aos colegas da minha cidade e a outros que há muito não os vejo.

Ao Cnpq pelo apoio financeiro indispensável no período de 08/2006 a 07/2007.

RESUMO

Neste trabalho tratamos da dinâmica de uma família genérica a 1-parâmetro f_μ, $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, de campos vetoriais reversíveis definidos em $\mathbb{R}^4$. Mais especificamente, assumimos que $f_0(0) = 0$, que os autovalores de $Df_0(0)$ são reais e dados por ± 1, $\pm\gamma$, com $\gamma > 1$ e que a variedade instável de 0, $W^u(0)$, é tangente ao eixo de simetria num ponto $M \neq 0$. O nosso principal objetivo nesta dissertação é exibir condições para a persistência de órbitas homoclínicas de f_μ, $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$.

ABSTRACT

In this work we deal with the dynamics of a generic one-parameter family f_μ, $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$, of reversible vector fields defined in $\mathbb{R}^4$. More specifically, we assume that $f_0(0) = 0$, the eigenvalues of $Df_0(0)$ are real and given by $\pm 1, \pm\gamma$, with $\gamma > 1$ and the unstable manifolds of 0, $W^u(0)$, possesses a tangency with symmetry axis at a point $M \neq 0$. The main purpose of this dissertation is to exhibit conditions for the persistence of homoclinic orbits for f_μ, with $\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Índice

Introdução

Os Sistemas Dinâmicos Reversíveis desempenham importante papel devido a sua presença em problemas práticos e em vários ramos da Física e Engenharia. Em diversos casos, a reversibilidade nos auxilia na interpretação e formulação matemática de fenômenos naturais.

Muitas das equações diferenciais da Física são reversíveis. Podemos citar, por exemplo, as equações de Maxwell no Eletromagnetismo as quais, sob certas condições, são reversíveis; as equações de Einstein da Relatividade Geral Clássica; as equações de Schrödinger na Mecânica Quântica; vários sistemas Hamiltonianos na Mecânica Clássica; as equações do famoso problema de três corpos (veja [12]) e outros exemplos que podem ser encontrados em [11], onde é feita uma abordagem de resultados recentes sobre Sistemas Dinâmicos Reversíveis.

O conceito de reversibilidade para campos vetoriais está intimamente ligado a uma involução R, mais precisamente, dada uma involução $R : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, C^r-suave $(r > 1)$, dizemos que um campo vetorial $f : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ é R-reversível se

$$DR(z) \cdot f(z) = -f(R(z)), \quad \forall z \in \mathcal{M},$$

onde $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável n-dimensional. Consideramos ao longo do texto que o conjunto $Fix(R)$ é uma subvariedade $n/2$-dimensional de $\mathcal{M}$, sendo n um natural par.

Segue imediatamente desta definição que R aplica órbitas do fluxo associado ao campo vetorial f em órbitas do mesmo fluxo invertendo a direção do percurso em relação ao tempo, ou seja, se $z(t)$ é uma órbita do campo R-reversível f, então $R(z(-t))$ também é uma órbita de tal campo vetorial. Uma outra conseqüência desta definição é que um estado de equilíbrio reversível θ do campo vetorial f pode ser considerado genericamente isolado. Várias propriedades relevantes devidas à reversibilidade serão discutidas no texto.

O objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica de uma família a 1-parâmetro de campos vetoriais reversíveis f_μ ($\mu \in (-\epsilon, \epsilon)$ parâmetro real) definidos em $\mathbb{R}^4$ satisfazendo:

- $f_0(0) = 0$;

- os autovalores de $Df_0(0)$ são reais e dados por ± 1, $\pm\gamma$, com $\gamma > 1$;

- f_0 possui uma órbita homoclínica Γ;

- em $\mu = 0$, a variedade instável $W^u(0)$ e $Fix(R)$ possuem uma tangência quadrática no ponto $M = \Gamma \cap Fix(R)$.

Pretendemos encontrar condições que garantam, tanto a existência de órbitas periódicas do campo f_μ, em cada μ, quanto a persistência da órbita homoclínica Γ. Neste sentido, os resultados principais são os Teoremas (A) e (B), que foram demonstrados por Bernold Fiedler e Dmitry Turaev e podem ser encontrados em [6]. O Teorema (A) detecta órbitas 1-periódicas reversíveis, denominadas órbitas principais, em uma pequena vizinhança tubular U de $\Gamma \cup \{0\}$ e também estabelece a inexistência de órbitas k-homoclínicas em U, para $k \geq 2$. O Teorema (B) garante que uma "cunha" de órbitas periódicas reversíveis elípticas é gerada de Γ para $\mu \neq 0$. A principal ferramenta usada para se demonstrar tais teoremas é o Teorema de Ovsyannikov-Shilnikov sobre mudanças de coordenadas, o qual pode ser encontrado em [17].

O texto será apresentado sob a seguinte forma:

No Capítulo 1 definiremos Sistemas Reversíveis e destacaremos algumas propriedades importantes do fluxo de tais sistemas. Apresentaremos vários exemplos e também uma aplicação do Teorema de Montgomery-Bochner para mostrar que, sendo n um natural par, toda involução $R : \mathbb{R}^{n/2} \times \mathbb{R}^{n/2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localmente, numa vizinhança de um ponto fixo, é conjugada a $R(x, y) = (x, -y)$.

No Capítulo 2 restringiremos nosso estudo a campos vetoriais R-reversíveis f definidos em $\mathbb{R}^4$, sendo R uma involução linear e veremos como a reversibilidade restringe o espectro da matriz de linearização de f em torno de equilíbrios reversíveis.

No Capítulo 3 inicialmente discutiremos o Teorema de Ovsyannikov-Shilnikov sobre mudanças de coordenadas e, em seguida, fixaremos algumas hipóteses técnicas para exibir os resultados principais: os Teoremas (A) e (B) citados acima. Também apresentaremos as demonstrações de tais teoremas através da mudança de coordenadas exibida pelo Teorema de Ovsyannikov-Shilnikov.

As referências encontram-se no final do texto.

CAPÍTULO 1

Sistemas Dinâmicos Reversíveis

Nosso objetivo neste capítulo é introduzir definições e resultados que serão importantes para uma melhor compreensão do texto. Em geral, não apresentaremos demonstrações e, em casos mais importantes, indicaremos as devidas referências bibliográficas.

As referências utilizadas são [1], [5], [6], [10], [11], [13] e [19].

1.1 Introdução

Vamos considerar sistemas dinâmicos com tempo contínuo ($t \in \mathbb{R}$) e com tempo discreto ($i \in \mathbb{Z}$) definidos em algum espaço de fase $\mathcal{M}$.

Para o caso contínuo, considere uma equação diferencial ordinária autônoma sobre uma variedade diferenciável n-dimensional $\mathcal{M}$ (na maioria das aplicações de nosso interesse $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$) da forma

$$\frac{dz}{dt}(t) = f(z), \tag{1.1}$$

onde $z \in \mathcal{M}$ e $f : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ é um campo vetorial C^∞.

Na maior parte deste trabalho serão considerados campos vetoriais C^r-suaves ($r > 3$) definidos em um aberto de $\mathbb{R}^4$.

Seja $\varphi(t, \zeta)$ uma solução de (1.1) satisfazendo $\varphi(0, \zeta) = \zeta$. Chamamos $\varphi(t, \zeta)$ a *solução geral* de (1.1) e escrevemos $\varphi_t(.) = \varphi(t, .)$. Vamos assumir, por simplicidade na nossa discussão, que

$\varphi(t,\zeta)$ é definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $\zeta \in \mathcal{M}$. Neste caso, dizemos que φ define um *fluxo sobre* $\mathcal{M}$, isto é, φ satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\varphi_t : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ é um difeomorfismo;

(ii) A aplicação $\varphi_0 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ é a aplicação identidade;

(iii) $\varphi_t \circ \varphi_\tau = \varphi_{t+\tau}$, isto é, $\varphi(t, \varphi(\tau,\zeta)) = \varphi(t+\tau,\zeta)$, para todo $t, \tau \in \mathbb{R}$ e todo $\zeta \in \mathcal{M}$.

Como vimos acima, a equação diferencial (1.1) define um fluxo e, reciprocamente, dado $\varphi(t,\zeta)$, a equação diferencial definida por φ é $\dfrac{dz}{dt}(t) = f(z)$, com $f(z) = \left.\dfrac{\partial\varphi(t,z)}{\partial t}\right|_{t=0}$.

Para o caso discreto os sistemas dinâmicos são tomados como sendo iterados de um difeomorfismo $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$.

Definição 1.1.1. *Dizemos que um difeomorfismo $R : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ de suavidade C^r $(r > 1)$ é uma involução se $R^2 = id$, ou seja, se a inversa de R é ela mesma.*

Denotaremos por $Fix\,(R)$ o conjunto $\{z \in \mathcal{M}/\ R(z) = z\}$.

Um exemplo de involução é $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $R(x,y) = (x,-y)$. Note que $Fix\,(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ R\,(x,y) = (x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ y = 0\}$ é o eixo-x cuja dimensão é 1, metade da dimensão do espaço de fase $\mathbb{R}^2$.

Vamos provar, a seguir, que na vizinhança de um ponto fixo de uma involução R, sempre podemos escolher as coordenadas de maneira que a involução fique na forma $R(x,y) = (x,-y)$, ou seja, R pode ser considerada linear em tal vizinhança. Para isto, enunciaremos abaixo o teorema de Montgomery-Bochner, cuja demonstração pode ser encontrada em ([13], p.206).

1.2 Teorema de Montgomery-Bochner

Teorema 1.2.1 (Montgomery-Bochner). *Seja G um grupo compacto de transformações de uma variedade $\mathcal{M}$ de suavidade C^k $(k \geq 1)$ ou analítica. Suponha que cada transformação de G é C^k-suave ou analítica. Então, em uma vizinhança de um ponto fixo estacionário (ponto fixo de todo elemento do grupo G), coordenadas admissíveis podem ser escolhidas tais que as transformações sejam lineares.*

Considerando $G = \{id, R\}$ no teorema de Montgomery-Bochner, onde R é uma involução, podemos então supor que

$$R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma involução linear numa vizinhança de um ponto fixo de R, sendo n um natural par.

Vamos supor que $Fix\,(R)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão[1] $\frac{n}{2}$. Logo,

$$\mathbb{R}^n = Fix(R) \oplus (Fix(R))^{\perp}.$$

Sejam $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n/2}\}$ uma base de $Fix(R)$ e $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n/2}\}$ uma base de $(Fix(R))^{\perp}$.

Defina $u_i = w_i - R(w_i)$ e note que $R(u_i) = -u_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n/2$.

Afirmação: O conjunto $\{v_1, \ldots, v_{n/2}, u_1, \ldots, u_{n/2}\}$ é base para $\mathbb{R}^n$.

Basta mostrarmos apenas que esse conjunto é linearmente independente.

De fato,

$$a_1v_1 + \ldots + a_{n/2}v_{n/2} + b_1u_1 + \ldots + b_{n/2}u_{n/2} = 0. \tag{1.2}$$

Aplicando R,

$$a_1v_1 + \ldots + a_{n/2}v_{n/2} - b_1u_1 - \ldots - b_{n/2}u_{n/2} = 0. \tag{1.3}$$

Somando (1.2) com (1.3) e dividindo por 2 obtemos

$$a_1v_1 + \ldots + a_{n/2}v_{n/2} = 0.$$

Como $\{v_1, \ldots, v_{n/2}\}$ é base de $Fix(R)$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n/2} = 0.$$

Logo, a equação (1.2) se reduz a

$$b_1u_1 + \ldots + b_{n/2}u_{n/2} = 0,$$

ou seja,

$$b_1(w_1 - R(w_1)) + \ldots + b_{n/2}(w_{n/2} - R(w_{n/2})) = 0.$$

Pela linearidade de R, segue que

$$(b_1w_1 + \ldots + b_{n/2}w_{n/2}) - R(b_1w_1 + \ldots + b_{n/2}w_{n/2}) = 0 \implies b_1w_1 + \ldots + b_{n/2}w_{n/2} \in Fix(R).$$

[1]Neste trabalho iremos considerar somente involuções $R : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tais que $dim\,(Fix\,(R)) = \frac{n}{2}$, ou seja, metade da dimensão de $\mathcal{M}$. Veremos na Observação (2.1.1) do Capítulo 2 porque é interessante assumir tal fato.

Como $Fix(R) \cap (Fix(R))^{\perp} = \{0\}$, obtemos que

$$b_1 w_1 + \cdots + b_{n/2} w_{n/2} = 0.$$

Lembrando que $\{w_1, \ldots, w_{n/2}\}$ é base de $(Fix(R))^{\perp}$,

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{n/2} = 0,$$

e assim concluímos a Afirmação.

$\square$

Portanto, se $(x, y) \in \mathbb{R}^{n/2} \times \mathbb{R}^{n/2}$ segue que

$$(x, y) = x_1 v_1 + \ldots + x_{n/2} v_{n/2} + y_1 u_1 + \ldots + y_{n/2} u_{n/2}$$

e daí,

$$R(x, y) = x_1 R(v_1) + \ldots + x_{n/2} R(v_{n/2}) + y_1 R(u_1) + \ldots + y_{n/2} R(u_{n/2}) =$$

$$= x_1 v_1 + \ldots + x_{n/2} v_{n/2} - y_1 u_1 - \ldots - y_{n/2} u_{n/2} = (x, -y).$$

Isto é, na vizinhança de um ponto fixo de uma involução R, tal que $dim(Fix(R)) = n/2$, as coordenadas podem ser escolhidas de maneira que $R(x, y) = (x, -y)$.

1.3 Sistemas Dinâmicos Reversíveis

Vamos definir agora o que é um sistema dinâmico reversível em relação a uma involução R. Geralmente chamamos tais sistemas de R-reversíveis.

Considere a equação

$$\frac{dz}{dt}(t) = f(z), \tag{1.4}$$

onde $z \in \mathcal{M}$, $f : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ é um campo vetorial C^r-suave ($r > 1$) e $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável n-dimensional.

Definição 1.3.1. *O campo f é reversível se existe uma involução $R : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que a equação (1.4) é invariante sob $t \longrightarrow -t$ e $z \longrightarrow R(z)$.*

Note que se $z(t)$ é solução de (1.4), então $z(-t)$ é solução de $\dfrac{dz}{dt}(t) = -f(z)$ e se (1.4) é invariante por $t \longrightarrow -t$ e $z \longrightarrow R(z)$ temos

$$\frac{d}{dt}\left(R\left(z\left(-t\right)\right)\right) = f\left(R\left(z\left(-t\right)\right)\right),$$

o que significa que

$$DR(z(-t)) \cdot \frac{d}{dt}(z(-t)) = f(R(z(-t)))$$

logo,

$$DR(z(-t)) \cdot (-f(z(-t))) = f(R(z(-t))),$$

ou seja,

$$DR(z) \cdot f(z) = -f(R(z)), \quad \forall z \in \mathcal{M}.$$

Portanto,

$$DR(f) = -f \circ R$$

e assim, podemos definir alternativamente:

Definição 1.3.2. *Um campo vetorial $f : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ é dito reversível, se existe uma involução $R : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que*

$$DR(f) = -f \circ R.$$

Nesse caso diremos que f é R-reversível.

Usaremos esta definição alternativa daqui em diante.

A proposição seguinte relaciona o fluxo de um sistema R-reversível com a involução R.

Proposição 1.3.3. *Seja $f : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ um campo vetorial R-reversível, R uma involução fixa e φ_t o fluxo associado a f. Então,*

$$R \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ R \tag{1.5}$$

Demonstração: Para $z_0 \in \mathcal{M}$ fixado temos que $z(t) = \varphi_t(z_0)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

De fato,

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(\varphi_t(z_0)) \\ z(0) = \varphi_0(z_0) = id(z_0) = z_0 \end{cases}$$

O "ponto sobre" em (1.6) siginifica $\dfrac{d}{dt}$.

Seja $w(t) = R \circ \varphi_{-t} \circ R(z_0)$, lembrando que $DR(f) = -f \circ R$ (pois f é R-reversível), segue que

$$\dot{w}(t) = DR(-f(\varphi_{-t}(R(z_0))) = -DR(f(\varphi_{-t}(R(z_0)))) = -(-f \circ R(\varphi_{-t}(R(z_0)))) = f(w(t))$$

e

$$w(0) = R \circ \varphi_0 \circ R(z_0) = R^2(z_0) = z_0.$$

Por unicidade de soluções segue que $\varphi_t(z_0) = R \circ \varphi_{-t} \circ R(z_0)$. Já que $z_0 \in \mathcal{M}$ foi escolhido arbitrariamente, temos

$$\varphi_t = R \circ \varphi_{-t} \circ R,$$

ou seja,

$$R \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ R,$$

como queríamos demonstrar.

□

A identidade (1.5) significa que a involução R aplica órbitas do fluxo φ_t em órbitas do mesmo fluxo invertendo a direção de percurso em relação ao tempo. O espaço de fase de um sistema R-reversível com tempo contínuo em relação à involução $R(x, y) = (x, -y)$ é mostrado na Figura 1.1.

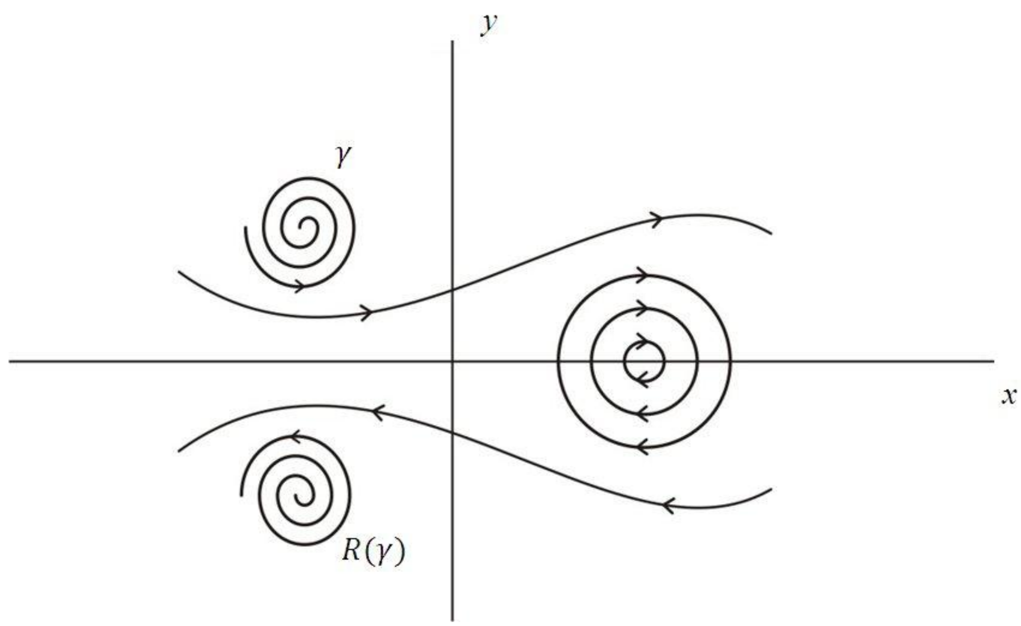

Figura 1.1: Espaço de fase de um sistema R-reversível

Definição 1.3.4. *Diremos que um difeomorfismo $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ é reversível em relação a uma involução $R : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ se $R \circ g = g^{-1} \circ R$.*

Vejamos agora alguns exemplos de sistemas reversíveis

Exemplo 1.3.5. *Todos os sistemas Hamiltonianos com Hamiltoniana $H(q,p)$ par no momento, isto é, $H(q,p) = H(q,-p)$ são R-reversíveis, onde $R(q,p) = (q,-p)$.*

De fato, o sistema dinâmico associado à função Hamiltoniana é dado por:

$$f : \begin{cases} \dot{q} &= \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \\ \dot{p} &= -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Logo,

$$DR(q,p) \cdot f(q,p) = -f(R(q,p)).$$

Exemplo 1.3.6. *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem de dimensão $n+m$*

$$\ddot{u} + g(u,\dot{u}) = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

com $g = g(u,p)$ par em p.

Fazendo $v = \dot{u}$, $z = (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $f(u,v) = (v, -g(u,v))$, o sistema (1.7) torna-se

$$\dot{z} = (\dot{u},\dot{v}) = (v,\dot{v}) = (v,-g(u,v)) = f(u,v) = f(z)$$

ou seja,

$$\dot{z} = f(z).$$

O sistema torna-se reversível sob a involução $R(u,v) = (u,-v)$, pois

$$DR\,(u,v) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

é tal que

$$DR\,(u,v) \circ f \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v \\ -g\,(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ g\,(u,v) \end{bmatrix}$$

e, por outro lado

$$-f \circ R \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -f \begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -v \\ -g\,(u,-v) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -v \\ -g\,(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ g\,(u,v) \end{bmatrix}.$$

Portanto $DR\,(f) = -f \circ R$. Logo, (1.7) é R-reversível.

Note que, em particular, o eixo-u está contido em $Fix(R)$ e o eixo-v ($v = \dot{u}$) está contido em $Fix(-R)$, onde $Fix(-R)$ representa o subespaço onde R age como $-id$, ou seja, $Fix(-R) = \{z \in \mathbb{R}^n /\ R(z) = -z\}$.

Exemplo 1.3.7 (Um exemplo não linear). *Obviamente uma involução não precisa ser necessariamente linear. Por exemplo, considere*

$$f : \begin{cases} \dot{x} &= xy - x^3 \\ \dot{y} &= x + y^2 - x^4 \end{cases}$$

A involução R é dada por

$$R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y + 2x^2 \end{bmatrix}$$

calculando a derivada de R no ponto (x, y), obtemos

$$DR\,(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4x & -1 \end{bmatrix}$$

logo,

$$DR\,(x, y) \circ f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4x & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} xy - x^3 \\ x + y^2 - x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy - x^3 \\ -x - y^2 + 4x^2y - 3x^4 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$-f \circ R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -f \begin{bmatrix} x \\ -y + 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy - x^3 \\ -x - y^2 + 4x^2y - 3x^4 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$DR\,(f) = -f \circ R$$

ou seja, f é R-reversível.

Exemplo 1.3.8 (Fenômeno Físico Modelado por um Sistema Reversível (veja [15])**).** *Um modelo para um oscildador harmônico imerso em um líquido com viscosidade dependendo da temperatura é dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - zy \\ \dot{z} &= \alpha\,(y^2 - kT) \end{cases}$$

onde kT é o produto da constante de Boltzmann pela temperatura e α é um parâmetro. Uma involução R nesse caso é

$$R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}.$$

Outros exemplos de fenômenos físicos modelados por sistemas reversíveis podem ser encontrados em [11].

Uma vez que a estrutura de reversibilidade no tempo não afeta órbitas que estão distantes do *eixo de simetria* $Fix(R)$, focaremos nossa atenção nos seguinte objetos:

(i) Equilíbrios Reversíveis;

(ii) Órbitas Periódicas Reversíveis;

(iii) Órbitas Homoclínicas Reversíveis,

os quais serão definidos a seguir.

Nota: Nas próximas seções, quando não houver confusão, por simplicidade, podemos nos referir a um ponto fixo de um difeomorfismo g ou a um ponto crítico de um campo vetorial f como sendo um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico (f ou g).

1.4 Órbitas e Pontos de Equilíbrio Reversíveis

Considere um campo vetorial f definido num espaço de fase $\mathcal{M}$ e um difeomorfismo $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ ambos R-reversíveis, onde R é uma involução.

Definição 1.4.1. *Um ponto $z_0 \in \mathcal{M}$ é dito um ponto de equilíbrio reversível se $f(z_0) = 0$ $(g(z_0) = z_0)$ e $z_0 \in Fix(R)$.*

Lembremos que, dado $z_0 \in \mathcal{M}$, uma *órbita através de z_0* é formada pelo conjunto de pontos do espaço de fase que estão sobre uma trajetória através de z_0. Mais precisamente, para o caso contínuo, a *órbita através de z_0* é dada por

$$z\,(t) = \{z \in \mathcal{M} \ / \ z = \varphi_t\,(z_0)\,; \quad t \in \mathbb{R}\},$$

onde φ_t é o fluxo associado ao campo f. Para o caso discreto, a *órbita através de z_0* é

$$z\,(i) = \{z_i = g^i(z_0); \quad i \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe que, no caso contínuo, as órbitas são curvas contínuas ou pontos isolados (caso z_0 seja um ponto crítico do campo f), e no caso discreto, elas são conjuntos discretos.

Definição 1.4.2. *Dizemos que uma órbita γ de um sistema dinâmico R-reversível é reversível em relação a R se R aplica a órbita γ nela mesma, isto é, se $R(\gamma) = \gamma$.*

Proposição 1.4.3. *Considere f um campo vetorial R-reversível definido em $\mathcal{M}$ e $z(t) = \varphi_t(z_0)$ a órbita através de $z_0 \in \mathcal{M}$. Então,*

i) A órbita $z(t)$ é reversível em relação a R se, e somente se, $z(t) \cap Fix(R) \neq \emptyset$, isto é, existe $z_1 \in z(t)$ tal que $R(z_1) = z_1$;

ii) Ainda mais, se $z(t)$ é periódica, então $z(t)$ tem período $T > 0$ se, e somente se, $z(t) \cap Fix(R)$ consiste exatamente de dois pontos, a saber, z_1 e $\varphi_{\frac{T}{2}}(z_1)$. Veja Figura 1.2.

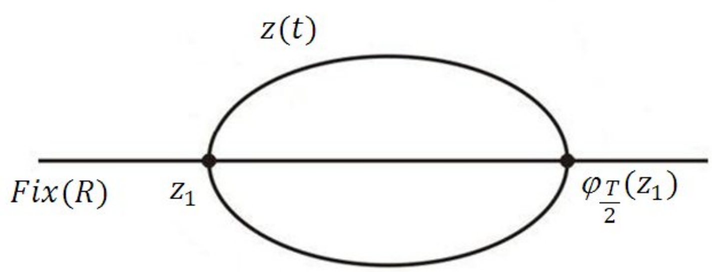

Figura 1.2: A órbita gasta um tempo igual a $T/2$ para ir de z_1 a $\varphi_{\frac{T}{2}}(z_1)$ ou vice-versa.

Demonstração: Isto é uma conseqüência da Proposição (1.3.3). De fato,

i) Para algum $\tau \in \mathbb{R}$, temos

$$R(z_0) = \varphi_\tau(z_0) \Longleftrightarrow \varphi_{-\frac{\tau}{2}} \circ R(z_0) = \varphi_{-\frac{\tau}{2}} \circ \varphi_\tau(z_0) \Longleftrightarrow R \circ \varphi_{\frac{\tau}{2}}(z_0) = \varphi_{-\frac{\tau}{2}+\tau}(z_0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow R \circ \varphi_{\frac{\tau}{2}}(z_0) = \varphi_{\frac{\tau}{2}}(z_0) \Longleftrightarrow z_1 := \varphi_{\frac{\tau}{2}}(z_0) \in Fix(R).$$

ii) Para $z_1 \in Fix(R)$, temos $\varphi_{\frac{T}{2}}(z_1) \in Fix(R)$. De fato,

$$R \circ \varphi_{\frac{T}{2}}(z_1) = \varphi_{-\frac{T}{2}} \circ R(z_1) = \varphi_{-\frac{T}{2}}(z_1) = \varphi_{-\frac{T}{2}+T}(z_1) = \varphi_{\frac{T}{2}}(z_1).$$

Por outro lado, se $\varphi_\tau(z_1) \in Fix(R)$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$, então

$$\varphi_\tau(z_1) = R(\varphi_\tau(z_1)) = \varphi_{-t} \circ R(z_1) = \varphi_{-\tau}(z_1) = \varphi_{(-\tau+T)}(z_1)$$

$$\Longrightarrow -\tau + T = \tau \Longrightarrow \tau = \frac{T}{2}.$$

Reciprocamente, provemos que se $z\,(t) \cap Fix(R) = \{z_1,\ \varphi_{\frac{T}{2}}\,(z_1)\}$, então $z\,(t)$ tem período T. Com efeito,

$$z_1 = R\,(z_1) = \varphi_{\frac{T}{2}} \circ R \circ \varphi_{\frac{T}{2}}\,(z_1) = \varphi_{\frac{T}{2}} \circ \varphi_{\frac{T}{2}}\,(z_1) = \varphi_T\,(z_1)$$

□

Observação 1.4.4. *Do que acabamos de mostrar concluímos que $z\,(t) \cap Fix(R)$ consiste de um único ponto ou de exatamente dois pontos: um ponto no caso em que a órbita $z\,(t)$ não é uma trajetória fechada e dois pontos no caso em que $z\,(t)$ é periódica. A órbita $z\,(t)$ não pode interceptar $Fix(R)$ mais que duas vezes.*

Em geral, cada órbita períodica reversível de período $T > 0$ corresponde a um ponto na interseção

$$Fix\,(R) \cap \varphi_{\frac{T}{2}}\,(Fix\,(R)) = \{z_0\}. \tag{1.8}$$

Por outro lado, localmente em z_0, a interseção genérica de duas variedades de dimensão $n/2$ em (1.8) é um ponto. Em particular, a interseção persistirá sob pequenas perturbações de T. Portanto, neste caso, órbitas periódicas reversíveis tipicamente surgem em famílias a 1-parâmetro.

Antes de provarmos um resultado análogo à Proposição (1.4.3) no caso em que o tempo é discreto, faremos algumas considerações.

Vamos definir $S_k := g^k \circ R$, onde k é um inteiro, $S := S_1 = g \circ R$ e $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ é um difeomorfismo R-reversível.

Afirmação: S_k é uma involução.

De fato, para $k = 0$, $(S_0)^2 = R \circ R = id$.

Para $k = 1$, segue que

$$S^2 = (g \circ R) \circ (g \circ R) = \left(R \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ R) = id.$$

Suponha que o resultado é válido para $k > 1$, ou seja, $(S_k)^2 = \left(g^k \circ R\right) \circ \left(g^k \circ R\right) = id.$. Assim, $\left(g^k \circ R\right) = \left(g^k \circ R\right)^{-1}$.

Para $k + 1$, temos

$$(S_{k+1})^2 = \left(g^{k+1} \circ R\right) \circ \left(g^{k+1} \circ R\right) = \left(g^{k+1} \circ R\right) \circ g \circ \left(g^k \circ R\right) =$$

$$= \left(g^{k+1} \circ R\right) \circ g \circ \left(g^{k} \circ R\right)^{-1} = \left(g^{k+1} \circ R\right) \circ g \circ \left(R \circ g^{-k}\right) =$$

$$= g^{k+1} \circ (R \circ g) \circ R \circ g^{-k} = g^{k+1} \circ g^{-1} \circ R \circ R \circ g^{-k} = id.$$

Logo, S_k é uma involução para todo k natural. Para $k < 0$, o raciocínio é análogo. E assim concluímos a Afirmação.

□

Lema 1.4.5. *Seja $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ um difeomorfismo reversível segundo uma involução R. Então,*

i) $Fix\,(S_{2k}) = g^{k}\,(Fix\,(R))\,;$

ii) $Fix\,(S_{2k+1}) = g^{k}\,(Fix\,(S)).$

Demonstração:

Provemos a parte *i)*.

Seja $z \in Fix\,(S_{2k})$, isto é,

$$z \in Fix\,(S_{2k}) \Longleftrightarrow z = \left(g^{2k} \circ R\right)(z) = g^{k}\left(g^{k} \circ R\,(z)\right)$$

Vamos mostrar que $g^{k} \circ R\,(z) \in Fix\,(R)$. Com efeito,

$$R\left(g^{k} \circ R\,(z)\right) = R \circ g^{k} \circ R\,(z) = R \circ g^{-k} \circ \left(g^{2k} \circ R\right)(z) = g^{k} \circ R \circ g^{2k} \circ R\,(z) = g^{k} \circ R\,(z)$$

$$\Longrightarrow Fix\,(S_{2k}) \subseteq g^{k}\,(Fix\,(R))\,.$$

Reciprocamente, se $z \in g^{k}\,(Fix\,(R))$, então $z = g^{k}\,(w)$, onde $w \in Fix\,(R)$. Queremos mostrar que $z \in Fix\,(S_{2k})$.

$$S_{2k}\,(z) = \left(g^{2k} \circ R\right)(z) = g^{k} \circ g^{k} \circ R\,(z) = g^{k} \circ g^{k} \circ R \circ g^{k}\,(w) = g^{k} \circ g^{k} \circ R \circ g^{k} \circ R\,(w) =$$

$$= g^{k} \circ R \circ g^{-k} \circ g^{k} \circ R(w) = g^{k}\,(w) = z$$

$$\Longrightarrow g^{k}\,(Fix\,(R)) = Fix\,(S_{2k})\,,$$

o que termina a primeira parte da demonstração.

Para a parte *ii)*, considere $z \in Fix\,(S_{2k+1})$. Logo,

$$z = S_{2k+1}\,(z) = g^{2k+1} \circ R\,(z) = g^{k}\left(g^{k+1} \circ R\,(z)\right).$$

Queremos provar que $g^{k+1} \circ R\,(z) \in Fix\,(S)$. Note que,

$$S\left(g^{k+1} \circ R\,(z)\right) = S \circ g^{k+1} \circ R \circ g^{2k+1} \circ R\,(z) = S \circ g^{k+1} \circ R \circ g^{k+1} \circ g^{k} \circ R\,(z) =$$

$$= S \circ R \circ g^{-(k+1)} \circ g^{k+1} \circ g^k \circ R(z) = S \circ R \circ g^k \circ R(z) =$$

$$= g \circ R \circ R \circ g^k \circ R(z) = g^{k+1} \circ R(z).$$

$$\Longrightarrow Fix(S_{2k+1}) \subseteq g^k(Fix(S))$$

Reciprocamente, dado $z \in g^k(Fix(S))$, então $z = g^k(w)$, onde w é tal que $S(w) = w$. Mostraremos que $z \in Fix(S_{2k+1})$. Observe que,

$$S_{2k+1}(z) = g^{2k+1} \circ R(z) = g^{2k+1} \circ R \circ g^k(w) = g^{2k+1} \circ R \circ g^k \circ S(w) =$$

$$= g^{k+1} \circ g^k \circ R \circ g^k \circ S(w) = g^{k+1} \circ R \circ g^{-k} \circ g^k \circ g \circ R(w) =$$

$$= g^{k+1} \circ R \circ R \circ g^{-1}(w) = g^{k+1} \circ g^{-1}(w) = g^k(w) = z$$

$$\Longrightarrow g^k(Fix(S)) = Fix(S_{2k+1}),$$

o que completa a demonstração.

□

Segue deste último Lema que $Fix(S_k)$ é uma subvariedade de dimensão $n/2$, já que estamos considerando que $Fix(R)$ e $Fix(S)$ também são subvariedades de dimensão $n/2$ e g^k é um difeomorfismo. O conjunto $Fix(S_k)$ é chamado de *k-ésima subvariedade de simetria de S.*

A Proposição que segue é o análogo à Proposição (1.4.3) no caso em que o tempo é discreto.

Proposição 1.4.6. *Considere $g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ um difeomorfismo R-reversível. Então, a órbita $z(i) = \{z_i = g^i(z_0);\ \ i \in \mathbb{Z}\}$ através de z_0 é reversível em relação a R se, e somente se, existe um ponto $z \in z(i)$ tal que $z \in Fix(R) \cup Fix(S)$. Mais ainda,*

i) se $z(i)$ tem período $2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ então $Fix(R) \cap g^k(Fix(S)) \neq \emptyset$;

ii) se $z(i)$ tem período $2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ então $Fix(R) \cap g^k(Fix(R)) \neq \emptyset$, ou $Fix(S) \cap g^k(Fix(S)) \neq \emptyset$.

Demonstração: Seja z_0 pertencente a uma órbita reversível $z(i)$, então existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $R(z_0) = g^j(z_0)$.

Se j é par, então

$$R(z_0) = g^j(z_0) \Longleftrightarrow g^{-\frac{j}{2}} \circ R(z_0) = g^{-\frac{j}{2}} \circ g^j(z_0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow R \circ g^{\frac{j}{2}}(z_0) = g^{\frac{j}{2}}(z_0) \Longleftrightarrow z := g^{\frac{j}{2}}(z_0) \in Fix(R)$$

Se j é ímpar, concluímos que

$$R(z_0) = g^j(z_0) \Longleftrightarrow g \circ R(z_0) = g^{j+1}(z_0) \Longleftrightarrow R \circ g^{-1}(z_0) = g^{j+1}(z_0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow g^{-\frac{j+1}{2}} \circ R \circ g^{-1}(z_0) = g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) \Longleftrightarrow R \circ g^{\frac{j+1}{2}} \circ g^{-1}(z_0) = g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow R \circ g^{-1} \circ g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) = g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) \Longleftrightarrow (g \circ R) \circ g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) = g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow S\left(g^{\frac{j+1}{2}}(z_0)\right) = g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) \Longleftrightarrow z := g^{\frac{j+1}{2}}(z_0) \in Fix(S)$$

Portanto, existe $z \in z(i)$ tal que $z \in Fix(R) \cup Fix(S)$.

Para provarmos *i)* e *ii)*, supomos inicialmente que $z \in Fix(R)$.

Se $z(i)$ é periódica de período $2k+1$, temos $z \in Fix(S_{2k+1})$, pois

$$S_{2k+1}(z) = g^{2k+1} \circ R(z) = g^{2k+1}(z) = z.$$

Logo, pelo Lema (1.4.5), $z \in g^k(Fix(S))$. Daí, $z \in Fix(R) \cap g^k(Fix(S))$.

Se $z(i)$ é periódica de período $2k$, temos $g^k(z) \in Fix(R)$, pois

$$R \circ g^k(z) = g^{-k} \circ R(z) = g^{-k}(z) = g^k(z).$$

Por outro lado, $g^k(z) \in g^k(Fix(R))$. Assim,

$$g^k(z) \in Fix(R) \cap g^k(Fix(R)).$$

Suponha agora que $z \in Fix(S)$.

Se $z(i)$ tem período $2k+1$, $g^k(z) \in Fix(R)$. De fato,

$$R \circ g^k(z) = g^{-k} \circ R(z) = g^{-k-1} \circ g \circ R(z) = g^{-k-1}(z) = g^k(z).$$

Também, $g^k(z) \in g^k(Fix(S))$. Logo,

$$z \in Fix(R) \cap g^k(Fix(S)).$$

Para finalizar, se $z(i)$ tem período $2k$, $g^k(z) \in Fix(S)$. De fato,

$$g \circ R \circ g^k(z) = g \circ g^{-k} \circ R(z) = g^{-k} \circ g \circ R(z) = g^{-k}(z) = g^k(z).$$

Como $g^k(z) \in g^k(Fix(S))$, temos

$$g^k(z) \in Fix(S) \cap g^k(Fix(S)).$$

e assim concluímos a Proposição.

□

Observação 1.4.7. *Uma conseqüência da demonstração da Proposição (1.4.6) é que a órbita* $z\,(i)$ *através de* $z_0 \in \mathcal{M}$ *pode ter somente um ou dois pontos em* $Fix\,(R) \cup Fix\,(S)$*: um ponto no caso em que* $z\,(i)$ *não é periódica e dois pontos no caso em que* $z\,(i)$ *é periódica. Mais precisamente, se o período é par, estes dois pontos estão em* $Fix\,(R)$ *ou os dois estão em* $Fix\,(S)$*. Se o período é ímpar, um ponto está em* $Fix\,(R)$ *e o outro em* $Fix\,(S)$*. Uma órbita não pode ter mais que dois pontos na união* $Fix\,(R) \cup Fix\,(S)$*.*

As Proposições (1.4.3) e (1.4.6) são devidas a De Vogelaere [5].

1.5 Órbitas Homoclínicas Reversíveis

Considere um campo vetorial f definido num espaço de fase $\mathcal{M}$ com fluxo associado φ_t e um difeomorfismo $g: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ ambos R-reversíveis, onde R é uma involução.

Definição 1.5.1. *Seja* $\theta \in \mathcal{M}$ *um ponto crítico de* f*. Definimos as variedades estáveis e instáveis de* θ*, respectivamente, por*

$$W^s\,(\theta) = \{z \in \mathcal{M} \;/\; \lim_{t\to\infty} \varphi_t\,(z) = \theta,\; t \in \mathbb{R}\},$$

$$W^u\,(\theta) = \{z \in \mathcal{M} \;/\; \lim_{t\to-\infty} \varphi_t\,(z) = \theta,\; t \in \mathbb{R}\}.$$

Para o caso discreto, se $\theta \in \mathcal{M}$ *é ponto fixo de* g*, definimos analogamente as variedades estáveis e instáveis de* θ*, respectivamente, por*

$$W^s\,(\theta) = \{z \in \mathcal{M} \;/\; \lim_{i\to\infty} g^i\,(z) = \theta,\; i \in \mathbb{Z}\},$$

$$W^u\,(\theta) = \{z \in \mathcal{M} \;/\; \lim_{i\to-\infty} g^i\,(z) = \theta,\; i \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 1.5.2. *Um ponto* $z_0 \in W^s\,(\theta) \cap W^u\,(\theta)$ *é dito um ponto homoclínico para* θ *e a órbita através de* z_0 *é chamada de órbita homoclínica.*

Seja $z_0 \in Fix\,(R)$ dado como na última definição, onde R é uma involução. Vamos provar que o equilíbrio θ é, na verdade, um equilíbrio reversível, ou seja, $\theta \in Fix\,(R)$. Quando $\theta \in Fix(R)$ a órbita homoclínica através de z_0 é chamada de *órbita homoclínica reversível em relação a R.* Para o caso contínuo, denotaremos esta órbita homoclínica reversível por $\Gamma = \{z\,(t)\,,\; t \in \mathbb{R}\}$, onde $z_0 = z\,(0) \in Fix\,(R)$ e θ é o equilíbrio do campo vetorial f para o qual Γ converge.

Provemos que $\theta \in Fix(R)$.

De fato,

$$\theta = \lim_{t\to\pm\infty} z(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \varphi_t(z_0) = \lim_{t\to\mp\infty} \varphi_{-t}(z_0) = \lim_{t\to\mp\infty} R\circ\varphi_t\circ R(z_0)$$

$$= R\lim_{t\to\mp\infty} \varphi_t(R(z_0)) = R\lim_{t\to\mp\infty} \varphi_t(z_0) = R\lim_{t\to\mp\infty} z(t) = R(\theta).$$

Portanto, $\theta \in Fix(R)$.

Observação 1.5.3. *Órbitas homoclínicas reversíveis Γ podem ser um caso limite de órbitas periódicas reversíveis $z(t)$ de período $T > 0$ se permitirmos que o ponto $\varphi_{\frac{T}{2}}(z_0)$ (onde $z(t)\cap Fix(R) = \{z_0,\ \varphi_{\frac{T}{2}}(z_0)\}$) tenda para um equilíbrio reversível $\theta \in Fix(R)$ ao longo de uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas reversíveis. Não é difícil ver que $T \longrightarrow +\infty$ neste limite.*

Proposição 1.5.4. *Considere um sistema dinâmico R-reversível (f ou g) possuindo um ponto de equilíbrio θ, onde R é uma involução. Então,*

$$R(W^s(\theta)) = W^u(\theta) \Longleftrightarrow \theta \in Fix(R) \Longleftrightarrow R(W^u(\theta)) = W^s(\theta) \tag{1.9}$$

Demonstração: Faremos a demonstração para o caso contínuo. O caso discreto segue de maneira inteiramente análoga. Para isto, vamos considerar um campo vetorial f R-reversível, definido num espaço de fase $\mathcal{M}$, com fluxo associado denotado por φ_t e tal que $\theta \in \mathcal{M}$ é ponto de equilíbrio de f.

Suponha inicialmente que $R(W^s(\theta)) = W^u(\theta)$. Queremos provar que $\theta \in Fix(R)$.

Note que,

$$z \in W^s(\theta) \Longrightarrow R(z) \in R(W^s(\theta)) = W^u(\theta) \Longrightarrow \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(R(z)) = \theta.$$

Como $R\circ\varphi_t = \varphi_{-t}\circ R$ (Proposição (1.3.3)), obtemos

$$\theta = \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(R(z)) = \lim_{t\to-\infty} R(\varphi_{-t}(z)) = R\left(\lim_{t\to\infty} \varphi_t(z)\right) = R(\theta).$$

ou seja, $\theta \in Fix(R)$.

Reciprocamente, se $\theta = R(\theta)$, então $R(W^s(\theta)) = W^u(\theta)$.

De fato, seja $z \in W^s(\theta)$ e observe que

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_t(R(z)) = \lim_{t\to-\infty} R(\varphi_{-t}(z)) = R\left(\lim_{t\to\infty} \varphi_t(z)\right) = R(\theta) = \theta.$$

Logo, $R(z) \in W^u(\theta)$. Assim,

$$R(W^s(\theta)) \subseteq W^u(\theta).$$

Por outro lado, seja $z \in W^u(\theta)$

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(R(z)) = \lim_{t\to\infty} R(\varphi_{-t}(z)) = R\left(\lim_{t\to-\infty} \varphi_t(z)\right) = R(\theta) = \theta,$$

isto é, $R(z) \in W^s(\theta)$. Portanto,

$$R(W^s(\theta)) = W^u(\theta)$$

e isso conclui a demonstração.

A demonstração da segunda implicação em (1.9) segue de maneira análoga.

□

Uma conseqüência da Proposição (1.5.4) é que as variedades $W^u(\theta)$ e $W^s(\theta)$ de θ têm a mesma dimensão, onde θ é um ponto de equilíbrio reversível do campo vetorial f. Se θ for um ponto de equilíbrio reversível hiperbólico de f, esta dimensão é igual a metade da dimensão do espaço de fase.

A proposição seguinte estabelece, em muitos casos, a persistência de órbitas homoclínicas que são reversíveis em relação a uma involução R.

Proposição 1.5.5. *Considere um sistema dinâmico R-reversível (f ou g) que possui um ponto de equilíbrio θ, então*

$$W^s(\theta) \cap Fix(R) \subset W^u(R(\theta)),$$

$$W^u(\theta) \cap Fix(R) \subset W^s(R(\theta)).$$

Demonstração: Seja f um campo vetorial R-reversível definido em $\mathcal{M}$ e $\theta \in \mathcal{M}$ ponto de equilíbrio de f.

Se $z \in W^s(\theta) \cap Fix(R)$, então $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(z) = \theta$ e $R(z) = z$.

Logo,

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_t(z) = \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(R(z)) = \lim_{t\to-\infty} R(\varphi_{-t}(z)) = R\left(\lim_{t\to\infty} \varphi_t(z)\right) = R(\theta).$$

Portanto, $z \in W^u(R(\theta))$, ou seja,

$$W^s(\theta) \cap Fix(R) \subset W^u(R(\theta)).$$

O caso $W^u(\theta) \cap Fix(R) \subset W^s(R(\theta))$ é análogo.

Também segue com o mesmo raciocínio a demonstração para sistemas dinâmicos discretos.

□

Observação 1.5.6. *Considere um sistema dinâmico R-reversível definido em $\mathcal{M}$, R uma involução e seja $z_0 \in W^{u(s)}(\theta) \cap Fix(R)$, onde $\theta \in \mathcal{M}$ é ponto de equilíbrio do campo vetorial f. Como $z_0 \in Fix(R)$ implica $\theta \in Fix(R)$ (já foi demonstrado anteriormente), segue da Proposição (1.5.5) que $z_0 \in W^{s(u)}(R(\theta)) = W^{s(u)}(\theta)$. Portanto, z_0 é um ponto homoclínico para θ e, assim, interseções de variedades instável (estável) com $Fix(R)$ implicam na existência de órbitas homoclínicas reversíveis em relação a R.*

Considere agora que $\theta \in \mathcal{M}$ é um equilíbrio hiperbólico de um campo vetorial f R-reversível definido em $\mathcal{M}$ e seja

$$z_0 \in Fix(R) \cap W^u(\theta). \tag{1.10}$$

Uma vez que podemos assumir que a interseção genérica de duas variedades de dimensão $n/2$ (onde $n = dim(\mathcal{M})$ é um natural par) em (1.10) é transversal, as órbitas homoclínicas reversíveis através de $z_0 \in Fix(R) \cap W^u(\theta)$ são "robustas" sob pequenas perturbações. Além disso, segue por ([4], p. 109) que qualquer tal *órbita homoclínica reversível transversal* através de z_0 é o limite de uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas reversíveis cujos períodos tendem para $+\infty$.

Em contraste, nosso objetivo principal neste trabalho será investigar uma interseção não transversal simples em (1.10), isto é, uma tangência quadrática entre $Fix(R)$ e $W^u(\theta)$.

CAPÍTULO 2

Campos Vetoriais Reversíveis

Neste capítulo faremos inicialmente algumas considerações e, em seguida, veremos como a reversibilidade restringe o possível espectro da matriz de linearização de f em equilíbrios reversíveis, sendo f um campo vetorial R-reversível definido em $\mathbb{R}^4$.

As referências utilizadas são [2], [3], [4], [6], [7] e [9].

2.1 Campos Reversíveis segundo uma Involução Linear

Vimos no Capítulo 1 que uma das conseqüências do Teorema de Montgomery-Bochner é que, numa vizinhança de um ponto fixo de uma involução R, sempre podemos escolher coordenadas de maneira que R possa ser considerada linear em tal vizinhança. Sem perda de generalidade, podemos supor que R é globalmente linear, uma vez que estaremos trabalhando em vizinhanças de equilíbrios reversíveis de agora em diante. Nesse contexto, um campo vetorial $f : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ é dito R-reversível se

$$R(f(z)) = -f(R(z)), \quad \forall z \in \mathcal{M}. \tag{2.1}$$

Note que esse é um caso particular dos campos R-reversíveis f dados pela Definição (1.3.2) do Capítulo 1, pois como R é linear, temos que $DR(z) \equiv R$, para todo $z \in \mathcal{M}$.

Observação 2.1.1. *Seja $\theta \in \mathcal{M}$ um equilíbrio reversível para um campo vetorial R-reversível f. Assumindo que a dimensão n de $\mathcal{M}$ é par e que $dim(Fix(R)) = n/2$ segue, genericamente,* *que θ é isolado. De fato, a reversibilidade (2.1) implica*

$$f : Fix(R) \longrightarrow Fix(-R)$$

pois,

$$\theta \in Fix(R) \Longrightarrow f(\theta) = f(R(\theta)) = -R(f(\theta)) \Longrightarrow f(\theta) \in Fix(-R),$$

lembrando que $Fix(-R)$ é o subespaço de $\mathcal{M}$ onde R atua como $-id$. Notemos agora que $dim(Fix(R)) = dim(Fix(-R)) = n/2$ e, assim, o Teorema da Função Inversa aplicado a f, garante a existência de uma vizinhança de θ que não contém outro zero de f.

2.2 Uma Equação de Ordem Quatro Canônica

A partir de agora vamos considerar $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ e f um campo vetorial R-reversível definido em $\mathbb{R}^4$, sendo R uma involução linear. Note que $dim(Fix(R)) = 2$.

Nesta seção veremos como a reversibilidade restringe o possível espectro, denotado por *spec*, em um equilíbrio reversível θ. Vamos verificar que, na verdade, *spec* é simétrico em relação à origem.

De fato, diferenciando (2.1), segue que

$$DR(f(z))Df(z) = -Df(R(z))DR(z), \ \forall z \in \mathcal{M}.$$

Lembrando que $DR(z) \equiv R$, para todo $z \in \mathcal{M}$ (pois R é involução linear) em $z = \theta \in Fix(R)$, temos que

$$RDf(\theta) = -Df(\theta)R.$$

Portanto,

$$RDf(\theta)R^{-1} = -Df(\theta).$$

Assim, podemos escrever as seguintes duas propriedades:

Proposição 2.2.1. *A linearização de f em θ denotada por $A := Df(\theta)$ satistaz:*

i) $AR = -RA$;

ii) γ *é um autovalor de* $A \Longleftrightarrow -\gamma$ *é um autovalor de* A.

Por $i)$ da última proposição, temos que a matriz A é R-reversível e seus autovalores são obtidos através de seu polinômio característico que é dado por

$$p(\gamma) = Det(A - \gamma I) = 0.$$

Como $p(\gamma) = p(-\gamma)$ por $ii)$ da Proposição (2.2.1), segue que o polinômio característico associado à matriz A toma a seguinte forma

$$\gamma^4 - b\gamma^2 + a = 0,$$

onde a e b são parâmetros reais.

Com o objetivo de analisar a estrutura das órbitas homoclínicas do campo f, vamos considerar sua linearização em $\theta \in Fix(R)$.

$$\dot{z} = Az, \tag{2.2}$$

onde $A = DR(\theta)$.

Os autovalores deste problema linearizado satisfazem a equação característica

$$\gamma^4 - b\gamma^2 + a = 0.$$

Daí, segue que γ é autovalor de A se, e somente se, $-\gamma$ é autovalor de A. Ainda mais, se γ é autovalor de A, então o conjugado complexo $\bar{\gamma}$ também o é, já que a e b são números reais. Portanto, o espectro *spec* é simétrico com relação aos eixos reais e imaginários. Logo, a linearização é como a descrita na Figura 2.1.

Da definição de reversibilidade podemos concluir que esta simetria ocorre para todo ponto de equilíbrio reversível do campo f. Assim, a classificação de tais campos de vetores irá depender apenas dos parâmetros reais a e b.

A partir dos parâmetros a e b do sistema linearizado (2.2) de f podemos distinguir na Figura 2.1 quatro regiões distintas denotadas por I, II, III e IV e quatro curvas particulares no plano (a, b) dos parâmetros do sistema mencionado que serão denotadas por C_0, C_1, C_2 e C_3. As quatro curvas constituem as fronteiras das quatro referidas regiões. Tais curvas e regiões correspondem a dinâmicas topologicamente distintas.

Observemos agora que as curvas C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ são dadas por:

- C_0 é dada por $a = 0$ e $b > 0$. Logo, o problema linearizado possui dois autovalores reais e simétricos em relação à origem e dois autovalores nulos

$$\gamma_{1,2} = 0, \;\; \gamma_{3,4} = \pm\sqrt{b}.$$

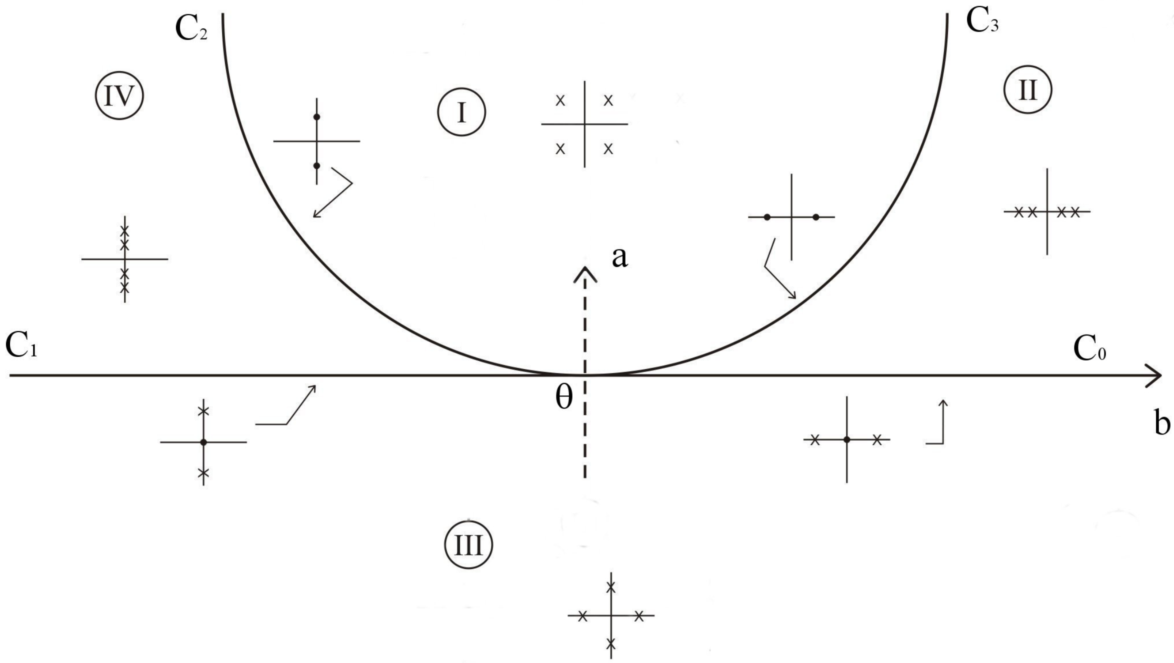

Figura 2.1: Linearização de f em θ.

- C_1 é dada por $a = 0$ e $b < 0$. Logo, o problema linearizado possui dois autovalores nulos e dois imaginários puros conjugados

$$\gamma_{1,2} = 0, \;\; \gamma_{3,4} = \pm i\sqrt{|b|}$$

- C_2 é dada por $b = -2\sqrt{a}$, onde exite um par de autovalores imaginários puros, duplos e conjugados

$$\gamma = \pm i\sqrt{\frac{|b|}{2}}$$

e por fim,

- C_3 que é dada por $b = 2\sqrt{a}$, onde existe dois autovalores reais, duplos e simétricos com relação à origem

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}.$$

As quatro curvas se encontram em um ponto de codimensão dois, $a = b = 0$, onde a linearização (2.2) de f tem quatro autovalores nulos com multiplicidade geométrica um.

Os dois principais resultados deste trabalho são relativos à Região II. A seguir faremos um breve comentário sobre estas regiões. Um estudo feito em torno das curvas C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ pode ser encontrado em ([2]) e suas referências.

Vamos supor inicialmente que o espectro $spec \subset \mathbb{C}$ de $A = DR(\theta)$ consiste de autovalores simples (isto é, todos os autovalores possuem multiplicidade algébrica um), logo teremos quatro possibilidades para $spec$ com grau de liberdade dois, ou seja, para $z \in \mathbb{R}^4$ teremos os seguintes casos:

2.2.1 O caso Sela

Corresponde à Região II na Figura 2.1, onde todos os autovalores são reais. Reescalonando o tempo, se necessário, de forma que o menor autovalor positivo seja normalizado a 1, segue que o $spec$ é dado por

$$spec = \{\pm 1,\ \pm\gamma\}, \tag{2.3}$$

para algum $\gamma > 1$. Note que 0 não pode ser autovalor, pois estamos em um espaço de fase de dimensão par ($\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$) e o autovalor 0 necessariamente possui multiplicidade algébrica par. Observe que neste caso θ é hiperbólico.

Quando $spec$ é da forma (2.3) o equilíbrio hiperbólico θ é chamado de *Sela*. No capítulo seguinte voltaremos a tratar deste caso.

2.2.2 O caso Sela-Foco

Corresponde à Região I na Figura 2.1, onde todos o autovalores são complexos. Logo, $spec$ pode ser denotado por

$$spec = \{\pm\alpha \pm i\beta\},$$

onde α e β são números reais não-nulos. Também aqui o equilíbrio reversível θ é hiperbólico e é chamado de *Sela-Foco*.

Se Γ denota uma órbita k-homoclínica reversível transversal primária, então, para todo $k \geq 2$, surgem próximas de Γ, órbitas k-homoclínicas reversíveis. Para mais detalhes veja [7] e [3]. Aqui *órbita k-homoclínica* significa que a órbita homoclínica secundária completa k ciclos em uma pequena vizinhança tubular de Γ, antes de se aproximar homoclinicamente de θ. Os efeitos de giro do campo vetorial próximo de θ são produzido por $\beta \neq 0$ em $spec$.

2.2.3 O caso Sela-Centro

Corresponde à Região III na Figura 2.1, onde dois autovalores são imaginários puros e dois são reais. Logo, *spec* pode ser denotado por

$$spec = \{\pm i,\ \pm\alpha\},$$

com $\alpha \neq 0$. Nesta região o equilíbrio θ não é hiperbólico devido ao par de autovalores imaginários puros. Uma análise completa da existência de órbitas homoclínicas neste caso não é conhecida mas, especificamente para o caso Hamiltoniano, o giro do campo vetorial em θ devido ao par de imaginários puros pode induzir mudanças dinâmicas próximo da órbita homoclínica reversível Γ. Como uma referência citamos [9].

2.2.4 O caso Elíptico

O quarto e último caso corresponde à Região IV na Figura 2.1, onde todos os autovalores são imaginários puros e *spec* é dado por

$$spec = \{\pm i,\ \pm iw\},$$

com $w > 1$ real. Também nesta região o equilíbrio θ não é hiperbólico. Neste caso, não é uma tarefa fácil detectar órbitas homoclínicas.

CAPÍTULO 3

Órbitas Homoclínicas em Sistemas Reversíveis

Neste capítulo fixaremos todas as hipóteses técnicas necessárias para exibir os resultados principais do trabalho: os Teoremas (A) e (B). O Teorema (A) detecta órbitas 1-periódicas reversíveis, denominadas órbitas principais, em uma pequena vizinhança tubular U de $\Gamma \cup \{\theta\}$. Aqui, θ é um equilíbrio reversível hiperbólico tipo Sela de um campo vetorial definido em $\mathbb{R}^4$, que possui uma órbita 1-homoclínica reversível Γ. Este teorema também estabelece a inexistência de órbitas k-homoclínicas em U, para $k \geq 2$. O Teorema (B) garante que uma "cunha" de órbitas periódicas reversíveis elípticas é gerada de Γ para $\mu \neq 0$ (μ parâmetro real). A principal ferramenta usada para se demonstrar tais teoremas é o Teorema de Ovsyannikov-Shilnikov sobre mudanças de coordenadas que também será discutido no presente capítulo.

As referências utilizadas são [1], [4], [6], [8], [14], [16], [17] e [18].

3.1 O Teorema de Ovsyannikov-Shilnikov

Nesta seção discutiremos o Teorema de Ovsyannikov-Shilnikov que será utilizado nas demonstrações dos Teoremas (A) e (B) dados na seção seguinte.

Vamos considerar aqui uma família f_μ de sistemas dinâmicos dependendo de um parâmetro real μ tal que f_μ é C^r-suave ($r \geq 2$) com respeito a todas as variáveis e parâmetro. Podemos escrever f_μ da seguinte forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A_1(\mu)x + g_1(x,y,u,v,\mu) \\ \dot{u} & = & A_2(\mu)u + g_2(x,y,u,v,\mu) \\ \dot{y} & = & B_1(\mu)y + f_1(x,y,u,v,\mu) \\ \dot{v} & = & B_2(\mu)v + f_2(x,y,u,v,\mu) \end{array}\right. , \tag{3.1}$$

onde os autovalores da matriz diagonal em blocos

$$A(0) \equiv \begin{bmatrix} A_1(0) & 0 \\ 0 & A_2(0) \end{bmatrix}$$

estão à esquerda do eixo imaginário no plano complexo e os autovalores da matriz diagonal em blocos

$$B(0) \equiv \begin{bmatrix} B_1(0) & 0 \\ 0 & B_2(0) \end{bmatrix}$$

estão à direita do eixo imaginário.

Assumiremos que as partes reais dos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$ da matriz $A_1(0)$ são iguais, isto é,

$$Re(\lambda_1) = \cdots = Re(\lambda_{m_1}) = \lambda < 0,$$

e que as partes reais dos autovalores $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_1}$ da matriz $B_1(0)$ também são iguais, ou seja,

$$Re(\gamma_1) = \cdots = Re(\gamma_{n_1}) = \gamma > 0.$$

Vamos assumir também que as partes reais dos autovalores das matrizes $A_2(0)$ e $B_2(0)$ são estritamente menores que λ e estritamente maiores que γ, respectivamente.

Teorema 3.1.1 (Ovsyannikov-Shilnikov). *Para todo μ suficientemente pequeno o Sistema (3.1) é localmente transformado em*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A_1(\mu)x + g_{11}(x,y,v,\mu)x + g_{12}(x,u,y,v,\mu)u \\ \dot{u} & = & A_2(\mu)u + g_{21}(x,y,v,\mu)x + g_{22}(x,u,y,v,\mu)u \\ \dot{y} & = & B_1(\mu)y + f_{11}(x,u,y,\mu)y + f_{12}(x,u,y,v,\mu)v \\ \dot{v} & = & B_2(\mu)v + f_{21}(x,u,y,\mu)y + f_{22}(x,u,y,v,\mu)v \end{array}\right. , \tag{3.2}$$

onde g_{ij} e f_{ij} são C^{r-1} com respeito a (x,u,y,v) e

$$\begin{array}{rcl} g_{ij}\,\big|_{(x,u,y,v)=0} & = & 0, \\ g_{1j}\,\big|_{(y,v)=0} & = & 0, \\ g_{i1}\,\big|_{x=0} & = & 0, \end{array} \tag{3.3}$$

$$
\begin{aligned}
f_{ij}\,\big|_{(x,u,y,v)=0} &= 0,\\
f_{1j}\,\big|_{(x,u)=0} &= 0, \qquad\qquad (3.4)\\
f_{i1}\,|_{y=0} &= 0,
\end{aligned}
$$

para todo $i, j = 1, 2$.

O último teorema é freqüentemente utilizado quando estudamos bifurcações homoclínicas e sua prova completa é dada no Teorema (3.1.2) seguinte. Utilizando a mesma notação do Teorema (3.1.1) enunciamos o

Teorema 3.1.2. *Existe uma transformação de coordenadas local de suavidade* C^{r-1} $(r \geq 2)$ *com respeito a* (x, u, y, v) *(e a primeira derivada da transformação com relação a* (x, u, y, v) *é* C^{r-2} *com respeito a* (x, u, y, v, μ)*)*[1] *que nos permite escrever o Sistema (3.1) na seguinte forma*

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_1(\mu)x + g_{11}(x,u,y,v,\mu)x + g_{12}(x,u,y,v,\mu)u\\
\dot{u} &= A_2(\mu)u + g_{21}(x,u,y,v,\mu)x + g_{22}(x,u,y,v,\mu)u\\
\dot{y} &= B_1(\mu)y + f_{11}(x,u,y,v,\mu)y + f_{12}(x,u,y,v,\mu)v\\
\dot{v} &= B_2(\mu)v + f_{21}(x,u,y,v,\mu)y + f_{22}(x,u,y,v,\mu)v
\end{aligned}
\right. , \qquad (3.5)
$$

onde g_{ij} *e* f_{ij} *são* C^{r-1} *com respeito a* (x, u, y, v) *e suas primeiras derivadas com relação a* (x, y, u, v) *são* C^{r-2} *com respeito a* (x, u, y, v, μ)*, e*

$$
\begin{aligned}
g_{ij}(0,0,0,0,\mu) &= 0,\\
g_{1j}(x,u,0,0,\mu) &\equiv 0, \qquad\qquad (3.6)\\
g_{i1}(0,0,y,v,\mu) &\equiv 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{ij}(0,0,0,0,\mu) &= 0,\\
f_{1j}(0,0,y,v,\mu) &\equiv 0, \qquad\qquad (3.7)\\
f_{i1}(x,u,0,0,\mu) &\equiv 0,
\end{aligned}
$$

para todo $i, j = 1, 2$.

Demonstração: O Sistema (3.1) pode ser reduzido à forma (3.5) por uma mudança de variáveis que tornam retas as variedades invariantes do ponto de equilíbrio do tipo Sela. Tal transformação

[1]Quando $r = \infty$, a transformação é C^∞ com respeito a (x, u, y, v), mas ela tem somente suavidade finita com respeito a μ.

tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= x - \phi_{1u}(y,v,\mu), \\ \widetilde{u} &= u - \phi_{2u}(y,v,\mu), \\ \widetilde{y} &= y - \psi_{1s}(x,u,\mu), \\ \widetilde{v} &= v - \psi_{2s}(x,u,\mu), \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\{x = \phi_{1u}(y,v,\mu), u = \phi_{2u}(y,v,\mu)\}$ e $\{y = \psi_{1s}(x,u,\mu), v = \psi_{2s}(x,u,\mu)\}$ são as equações das variedades instáveis e estáveis do ponto de equilíbrio Sela, respectivamente. Esta transformação não nos dá as identidades (3.6) e (3.7) diretamente; por agora, temos que as funções g_{ij} e f_{ij} em (3.5) são C^{r-1}-suaves e são nulas na origem.

Podemos também reescrever o Sistema (3.5) como

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= A_1(\mu)x + \underline{R_1(x,u,\mu)} + \underline{\phi_1(y,v,\mu)x} + \phi_2(y,v,\mu)u + \ldots, \\ \dot{u} &= A_2(\mu)u + R_2(x,u,\mu) + \underline{\phi_3(y,v,\mu)x} + \phi_4(y,v,\mu)u + \ldots, \\ \dot{y} &= B_1(\mu)y + \underline{P_1(y,v,\mu)} + \underline{\psi_1(x,u,\mu)y} + \psi_2(x,u,\mu)v + \ldots, \\ \dot{v} &= B_2(\mu)v + P_2(y,v,\mu) + \underline{\psi_3(x,u,\mu)y} + \psi_4(x,u,\mu)v + \ldots, \end{aligned} \right. \tag{3.9}$$

onde

$$\begin{aligned} R_i &= g_{i1}(x,u,0,0,\mu)x + g_{i2}(x,u,0,0,\mu)u, \\ P_i &= f_{i1}(0,0,y,v,\mu)x + f_{i2}(0,0,y,v,\mu)u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= g_{11}(0,0,y,v,\mu), & \phi_2 &= g_{12}(0,0,y,v,\mu), \\ \phi_3 &= g_{21}(0,0,y,v,\mu), & \phi_4 &= g_{22}(0,0,y,v,\mu), \\ \psi_1 &= f_{11}(x,u,0,0,\mu), & \psi_2 &= f_{12}(x,u,0,0,\mu), \\ \psi_3 &= f_{21}(x,u,0,0,\mu), & \psi_4 &= f_{22}(x,u,0,0,\mu), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_i(x,u,\mu) &= \widetilde{R}_{i1}(x,u,\mu)x + \widetilde{R}_{i2}(x,u,\mu)u, \\ P_i(y,v,\mu) &= \widetilde{P}_{i1}(y,v,\mu)y + \widetilde{P}_{i2}(y,v,\mu)v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{ij}(0,0,\mu) &\equiv 0, & \widetilde{P}_{ij}(0,0,\mu) &\equiv 0, \\ \phi_j(0,0,\mu) &\equiv 0, & \psi_j(0,0,\mu) &\equiv 0, \end{aligned}$$

e as reticências denotam termos que serão, de agora em diante, considerados desprezíveis. Nas duas primeiras equações em (3.9) estes termos são da forma $\widetilde{g}(x,u,y,v,\mu)x$ e $\widetilde{g}(x,u,y,v,\mu)u$ e são tais que

$$\widetilde{g}(0,0,y,v,\mu) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \widetilde{g}(x,u,0,0,\mu) \equiv 0,$$

e nas duas últimas equações eles são da forma $\widetilde{f}(x,u,y,v,\mu)y$ e $\widetilde{f}(x,u,y,v,\mu)v$ e são tais que

$$\widetilde{f}(0,0,y,v,\mu) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \widetilde{f}(x,u,0,0,\mu) \equiv 0.$$

A demonstração deste teorema consiste em eliminar os termos sublinhados em (3.9). Para isto faremos uma seqüência de mudança de variáveis

(1)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x + h_1(y,v,\mu)x, & \xi_2 &= u + h_2(y,v,\mu)x, \\ \eta_1 &= y, & \eta_2 &= v, \end{aligned}$$

onde $h_i(0,0,\mu) = 0$;

(2)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x, & \xi_2 &= u, \\ \eta_1 &= y + s_1(x,u,\mu)y, & \eta_2 &= v + s_2(x,u,\mu)y, \end{aligned}$$

onde $s_i(0,0,\mu) = 0$;

(3)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x + r_1(x,u,\mu)x + r_2(x,u,\mu)u, & \xi_2 &= u, \\ \eta_1 &= y, & \eta_2 &= v, \end{aligned}$$

onde $r_1(0,0,\mu) = 0$, $r_2(0,0,\mu) = 0$;

(4)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x, & \xi_2 &= u, \\ \eta_1 &= y + p_1(y,v,\mu)y + p_2(y,v,\mu)v, & \eta_2 &= v, \end{aligned}$$

onde $p_1(0,0,\mu) = 0$, $p_2(0,0,\mu) = 0$.

A mudança de variáveis **(1)** elimina os termos ϕ_1 e ϕ_3 no Sistema (3.9). Com a mudança de variáveis **(2)** eliminamos os termos ψ_1 e ψ_3 e, finalmente, com as mudanças de variáveis **(3)** e **(4)** eliminamos os termos R_1 e P_1, respectivamente. Assim, o sistema original toma a forma desejada.

Passo 1. Seja a mudança de coordenadas **(1)**. A primeira equação de (3.9) pode, então, ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \dot{x} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\dot{y}x + \frac{\partial h_1}{\partial v}\dot{v}x + h_1(y,v,\mu)\dot{x} = \\
&= A_1(\mu)x + R_1(x,u,\mu) + \phi_1(y,v,\mu)x + \phi_2(y,v,\mu)u + \\
&\quad + \frac{\partial h_1}{\partial y}\Big(B_1(\mu)y + P_1(y,v,\mu) + \underline{\psi_1(x,u,\mu)y} + \underline{\psi_2(x,u,\mu)v} \Big)x + \\
&\quad + \frac{\partial h_1}{\partial v}\Big(B_2(\mu)v + P_2(y,v,\mu) + \underline{\psi_3(x,u,\mu)y} + \underline{\psi_4(x,u,\mu)v} \Big)x + \\
&\quad + h_1(y,v,\mu)\Big(A_1(\mu)x + \underline{R_1(x,u,\mu)} + \phi_1(y,v,\mu)x + \phi_2(y,v,\mu)u \Big) + \dots
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Observe que os acréscimos sublinhados

$$
\frac{\partial h_1}{\partial y}\psi_1(x,u,\mu)yx, \quad \frac{\partial h_1}{\partial y}\psi_2(x,u,\mu)vx, \quad \frac{\partial h_1}{\partial v}\psi_3(x,u,\mu)yx,
$$

$$
\frac{\partial h_1}{\partial v}\psi_4(x,u,\mu)vx, \quad h_1(y,v,\mu)R_1(x,u,\mu)
$$

são desprezíveis (isto é, eles podem ser escritos como $\widetilde{g}_1(x,u,y,v,\mu)x + \widetilde{g}_2(x,u,y,v,\mu)u$, onde $\widetilde{g}_i(0,0,y,v,\mu) \equiv 0$ e $\widetilde{g}_i(x,u,0,0,\mu) \equiv 0$). Note também que

$$
R_1(x,u,\mu) = R(\xi_1,\xi_2,\mu) + \dots
$$

onde as reticências indicam, como acima, termos desprezíveis. Já que

$$
\begin{aligned}
x &= \xi_1 - h_1(y,v,\mu)x, \\
u &= \xi_2 - h_2(y,v,\mu)x,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= A_1(\mu)\xi_1 + R_1(\xi_1,\xi_2,\mu) + \phi_2(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \\
&\quad + \Big[-A_1(\mu)h_1(y,v,\mu) + \phi_1(y,v,\mu) - \phi_2(y,v,\mu)h_2(y,v,\mu) + \\
&\quad + \frac{\partial h_1}{\partial y}\Big(B_1(\mu)y + P_1(y,v,\mu) \Big) + \frac{\partial h_1}{\partial v}\Big(B_2(\mu)v + P_2(y,v,\mu) \Big) + \\
&\quad + h_1(y,v,\mu)A_1(\mu) + h_1(y,v,\mu)\phi_1(y,v,\mu) - \\
&\quad - h_1(y,v,\mu)\phi_2(y,v,\mu)h_2(y,v,\mu) \Big] x + h_1(\eta_1,\eta_2,\mu)\phi_2(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \dots
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Analogamente, para a segunda equação em (3.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_2 &= \dot{u} + \frac{\partial h_2}{\partial y}\dot{y}x + \frac{\partial h_2}{\partial v}\dot{v}x + h_2(y,v,\mu)\dot{x} = \\
&= A_2(\mu)u + R_2(x,u,\mu) + \phi_3(y,v,\mu) + \phi_4(y,v,\mu)u + \\
&\quad + \frac{\partial h_2}{\partial y}\Big(\; B_1(\mu)y + P_1(y,v,\mu) \; \Big)x + \frac{\partial h_2}{\partial v}\Big(\; B_2(\mu)v + P_2(y,v,\mu) \; \Big)x + \\
&\quad + h_2(y,v,\mu)\Big(\; A_1(\mu)x + \phi_1(y,v,\mu)x + \phi_2(y,v,\mu)u \; \Big) + \cdots = \\
&= A_2(\mu)\xi_2 + R_2(\xi_1,\xi_2,\mu) + \phi_4(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \\
&\quad + \Big[\; -A_2(\mu)h_2(y,v,\mu) + \phi_3(y,v,\mu) - \phi_4(y,v,\mu)h_2\,(y,v,\mu) + \\
&\quad + \frac{\partial h_2}{\partial y}\Big(\; B_1(\mu)y + P_1(y,v,\mu) \; \Big) + \frac{\partial h_2}{\partial v}\Big(\; B_2(\mu)v + P_2(y,v,\mu) \; \Big) + \\
&\quad + h_2(y,v,\mu)A_1(\mu) + h_2(y,v,\mu)\phi_1(y,v,\mu) - \\
&\quad - h_2(y,v,\mu)\phi_2(y,v,\mu)h_2(y,v,\mu) \quad \Big]x + \\
&\quad + h_2(\eta_1,\eta_2,\mu)\phi_2(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \ldots
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

As formas das terceira e quarta equações em (3.9) não são afetadas por tal mudança de variáveis.

Vamos supor que as funções $h_1(y,v,\mu)$ e $h_2(y,v,\mu)$ satisfazem as seguintes condições

$$
\begin{aligned}
A_1h_1 - h_1A_1 - \phi_1 + \phi_2h_2 - h_1\phi_1 + h_1\phi_2h_2 &= \frac{\partial h_1}{\partial y}(B_1y + P_1) + \frac{\partial h_1}{\partial v}(B_2v + P_2), \\
A_2h_2 - h_2A_2 - \phi_3 + \phi_4h_2 - h_2\phi_1 + h_2\phi_2h_2 &= \frac{\partial h_2}{\partial y}(B_1y + P_1) + \frac{\partial h_2}{\partial v}(B_2v + P_2).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Isto implica que a expressões entre colchetes em (3.12) e (3.13) se anulam. Vamos considerar, a seguir, o seguinte sistema de equações matriciais:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\dot{X} &=& A_1X - XA_1 - \phi_1 + \phi_2U - X\phi_1 + X\phi_2U \\
\dot{U} &=& A_2U - UA_1 - \phi_3 + \phi_4U - U\phi_1 + U\phi_2U \\
\dot{y} &=& B_1y + P_1 \\
\dot{v} &=& B_2v + P_2
\end{array}
\right. .
\tag{3.15}
$$

Aqui, $X \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ e $U \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_1}$ são matrizes, onde m_2 é o número de coordenadas do vetor u. O Sistema (3.15) possui um ponto de equilíbrio em $O_1(0,0,0,0)$ e a linearização de tal sistema neste ponto é dada por

$$\begin{cases} \dot{X} &= A_1X - XA_1 - \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y}(0,0,\mu)y - \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v}(0,0,\mu)v \\ \dot{U} &= A_2U - UA_1 - \dfrac{\partial \phi_3}{\partial y}(0,0,\mu)y - \dfrac{\partial \phi_3}{\partial v}(0,0,\mu)v \\ \dot{y} &= B_1y \\ \dot{v} &= B_2v \end{cases}.$$

O espectro dos expoentes característicos deste último sistema pode ser representado como uma união dos espectros dos seguintes operadores lineares associados

$$\begin{aligned} X &\longmapsto A_1X - XA_1, \\ U &\longmapsto A_2U - UA_1, \\ y &\longmapsto B_1y, \\ v &\longmapsto B_2v. \end{aligned}$$

Lembremos, da teoria de matrizes que, sendo A e B matrizes quadradas arbitrárias, o espectro do operador $Z \longmapsto AZ - ZB$ (onde Z é uma matriz retangular) está contido no conjunto dos números gerados a partir de todas as possíveis diferenças entre os autovalores das matrizes A e B.

Então, como as partes reais dos autovalores da matriz A_1 estão sobre a linha $Re\ \cdot = \lambda$ e as partes reais dos autovalores da matriz A_2 são estritamente menores que λ, segue que, quando $\mu = 0$, o ponto de equilíbrio do Sistema (3.15) possui m_1^2 expoentes característicos sobre o eixo imaginário, m_1m_2 expoentes característicos no semi-plano aberto esquerdo, e $n_1 + n_2 = n$ expoentes característicos no semi-plano aberto direito. Portanto, o ponto de equilíbrio do Sistema (3.15) possui uma variedade invariante n-dimensional instável forte $\widetilde{W}_1^{uu}$ definida pela equação $\{X = h_1(y,v,\mu), U = h_2(y,v,\mu)\}$. Além disso, as funções $h_1(y,v,0)$ e $h_2(y,v,0)$ satisfazem as condições (3.14), já que estas são apenas as condições da invariância da variedade $\{X = h_1, U = h_2\}$ com relação a (3.15).

A suavidade de h_1 e h_2 com respeito a (y,v) coincide com a suavidade do Sistema (3.15). Ela é igual a C^{r-1} pois, por construção, as funções ϕ_i e ψ_i são C^{r-1}. A suavidade com respeito a μ é igual a C^{r-2} e é finita mesmo quando $r = \infty$.

Assim, as funções suaves h_1, h_2 satisfazendo (3.14) existem devido ao teorema sobre variedade instável forte. Depois da mudança de variáveis **(1)**, nosso sistema toma a forma (3.9), com $\phi_1 \equiv 0$ e $\phi_3 \equiv 0$.

Passo 2. Fazendo a transformação **(2)**, obtemos

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= A_1(\mu)\xi_1 + R_1(\xi_1,\xi_2,\mu) + \phi_2(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \ldots,\\
\dot{\xi}_2 &= A_2(\mu)\xi_2 + R_2(\xi_1,\xi_2,\mu) + \phi_4(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \ldots,\\
\dot{\eta}_1 &= \dot{y} + \frac{\partial s_1}{\partial x}\dot{x}y + \frac{\partial s_1}{\partial u}\dot{u}y + s_1(x,u,\mu)\dot{y} =\\
&= B_1(\mu)y + P_1(y,v,\mu) + \psi_1(x,u,\mu)y + \psi_2(x,u,\mu)v +\\
&\quad + \frac{\partial s_1}{\partial x}\Big(A_1(\mu)x + R_1(x,u,\mu) \Big) y + \frac{\partial s_1}{\partial u}\Big(A_2(\mu)u + R_2(x,u,\mu) \Big) y +\\
&\quad + s_1(x,u,\mu)\Big(B_1(\mu)y + \psi_1(x,u,\mu)y + \psi_2(x,u,\mu)v \Big) + \cdots =\\
&\quad = B_1(\mu)\eta_1 + P_1(\eta_1,\eta_2,\mu) + \psi_2(\xi_1,\xi_2,\mu)\eta_2 +\\
&\quad + \Big[-B_1(\mu)s_1(x,u,\mu) + \psi_1(x,u,\mu) -\\
&\quad - \psi_2(x,u,\mu)s_2(x,u,\mu) + \frac{\partial s_1}{\partial x}\Big(A_1(\mu)x + R_1(x,u,\mu) \Big) +\\
&\quad + \frac{\partial s_1}{\partial u}\Big(A_2(\mu)u + R_2(x,u,\mu) \Big) + s_1(x,u,\mu)B_1(\mu) +\\
&\quad + s_1(x,u,\mu)\psi_1(x,u,\mu) - s_1(x,u,\mu)\psi_2(x,u,\mu)s_2(x,u,\mu) \Big] y +\\
&\quad + s_1(\xi_1,\xi_2,\mu)\psi_2(\xi_1,\xi_2,\mu)\eta_2 + \ldots,\\
\dot{\eta}_2 &= \dot{v} + \frac{\partial s_2}{\partial x}\dot{x}y + \frac{\partial s_2}{\partial u}\dot{u}y + s_2(x,u,\mu)\dot{y} =\\
&= B_2(\mu)v + P_2(y,v,\mu) + \psi_3(x,u,\mu)y + \psi_4(x,u,\mu)v +\\
&\quad + \frac{\partial s_2}{\partial x}\Big(A_1(\mu)x + R_1(x,u,\mu) \Big) y + \frac{\partial s_2}{\partial u}\Big(A_2(\mu)u + R_2(x,u,\mu) \Big) y +\\
&\quad + s_2(x,u,\mu)\Big(B_1(\mu)y + \psi_1(x,u,\mu)y + \psi_2(x,u,\mu)v \Big) + \cdots =\\
&= B_2(\mu)\eta_2 + P_2(\eta_1,\eta_2,\mu) + \psi_4(\xi_1,\xi_2,\mu)\eta_2 +\\
&\quad + \Big[-B_2(\mu)s_2(x,u,\mu) + \psi_3(x,u,\mu) - \psi_4(x,u,\mu)s_2(x,u,\mu) +\\
&\quad + \frac{\partial s_2}{\partial x}\Big(A_1(\mu)x + R_1(x,u,\mu) \Big) + \frac{\partial s_2}{\partial u}\Big(A_2(\mu)u + R_2(x,u,\mu) \Big) +\\
&\quad + s_2(x,u,\mu)B_1(\mu) + s_2(x,u,\mu)\psi_1(x,u,\mu) -\\
&\quad - s_2(x,u,\mu)\psi_2(x,u,\mu)s_2(x,u,\mu) \Big] y + s_2(\xi_1,\xi_2,\mu)\psi_2(\xi_1,\xi_2,\mu)\eta_2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Escolhemos as funções s_1 e s_2 de forma que a expressão entre colchetes torne-se identicamente nula, isto é,

$$\begin{aligned} B_1 s_1 - s_1 B_1 - \psi_1 + \psi_2 s_2 - s_1\psi_1 + s_1\psi_2 s_2 &= \frac{\partial s_1}{\partial x}\left(A_1 x + R_1\right) + \frac{\partial s_1}{\partial u}\left(A_2 u + R_2\right), \\ B_2 s_2 - s_2 B_2 - \psi_3 + \psi_4 s_2 - s_2\psi_1 + s_2\psi_2 s_2 &= \frac{\partial s_2}{\partial x}\left(A_1 x + R_1\right) + \frac{\partial s_2}{\partial u}\left(A_2 u + R_2\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para mostrar que s_1 e s_2 existem, considere o seguinte sistema matricial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& A_1 x + R_1 \\ \dot{u} &=& A_2 u + R_2 \\ \dot{Y} &=& B_1 Y - Y B_1 - \psi_1 + \psi_2 V - Y\psi_1 + Y\psi_2 V \\ \dot{V} &=& B_2 V - V B_1 - \psi_3 + \psi_4 V - V\psi_1 + V\psi_2 V \end{array} \right. , \tag{3.17}$$

onde $Y \in \mathbb{R}^{n_1^2}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_1 n_2}$. Para todo μ pequeno, o último sistema possui um equilíbrio em $O_2(0,0,0,0)$. A linearização do Sistema (3.17) em O_2 é dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& A_1 x \\ \dot{u} &=& A_2 u \\ \dot{Y} &=& B_1 Y - Y B_1 - \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}(0,0,\mu)x - \dfrac{\partial \psi_1}{\partial u}(0,0,\mu)u \\ \dot{V} &=& B_2 V - V B_1 - \dfrac{\partial \psi_3}{\partial x}(0,0,\mu)x - \dfrac{\partial \psi_3}{\partial u}(0,0,\mu)u \end{array} \right. .$$

Em $\mu = 0$ os expoentes característicos são ordenados como segue: n_1^2 autovalores estão sobre o eixo imaginário, $n_1 n_2$ estão à esquerda e $m_1 + m_2 = m$ autovalores estão à direita de tal eixo. Conseqüentemente, o Sistema (3.17) possui uma variedade invariante fortemente estável m-dimensional W_2^{ss} definida como $\{Y = s_1(x,u,\mu), V = s_2(x,u,\mu)\}$.

Encontramos as funções $s_1(x,u,\mu)$ e $s_2(x,u,\mu)$ que satisfazem as condições (3.16). Então, as mudanças de variáveis **(1)** e **(2)** implicam que $\phi_1 \equiv 0$, $\phi_3 \equiv 0$, $\psi_1 \equiv 0$ e $\psi_3 \equiv 0$ no Sistema (3.9).

Passo 3. Para fazer a mudança de variáveis **(3)**, vamos introduzir a notação

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix},$$

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} A_1(\mu) & 0 \\ 0 & A_2(\mu) \end{bmatrix}, \qquad B(\mu) = \begin{bmatrix} B_1(\mu) & 0 \\ 0 & B_2(\mu) \end{bmatrix},$$

$$r(\mathrm{x},\mu) = (r_1(\mathrm{x},\mu), r_2(\mathrm{x},\mu)) \ , \qquad R(\mathrm{x},\mu) = \begin{bmatrix} R_1(\mathrm{x},\mu) \\ R_2(\mathrm{x},\mu) \end{bmatrix},$$

$$p(y,\mu) = \ (r_1(y,\mu), r_2(y,\mu)) \ , \qquad P(y,\mu) = \begin{bmatrix} P_1(y,\mu) \\ P_2(y,\mu) \end{bmatrix}.$$

Em termos da nova notação dada acima, a mudança de variáveis **(3)** assume a seguinte forma

$$\xi_1 = x + R(\mathrm{x},\mu)\mathrm{x}, \qquad \xi_2 = u, \qquad \eta_1 = y, \qquad \eta_2 = v.$$

Seja $R(\mathrm{x},\mu) = \widetilde{R}(\mathrm{x},\mu)\mathrm{x}$, e, conseqüentemente, $R_1(\mathrm{x},\mu) = \widetilde{R}_1(\mathrm{x},\mu)\mathrm{x}$ e $R_2(\mathrm{x},\mu) = \widetilde{R}_2(\mathrm{x},\mu)\mathrm{x}$. Depois da mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \dot{x} + \frac{\partial r}{\partial \mathrm{x}}\dot{\mathrm{x}}\mathrm{x} + r(\mathrm{x},\mu)\dot{\mathrm{x}} = A_1(\mu)x + R_1(\mathrm{x},\mu) + \phi_2(y,\mu)u + \\
&\quad + \frac{\partial r}{\partial \mathrm{x}}\Big(\ A(\mu)\mathrm{x} + R(\mathrm{x},\mu) \ \Big)\mathrm{x} + r(\mathrm{x},\mu)\Big(\ A(\mu)\mathrm{x} + R(\mathrm{x},\mu) \ \Big) + \cdots = \\
&= A_1(\mu)\xi_1 + \phi_2(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \Big[\ -A_1(\mu)r(\mathrm{x},\mu) + \widetilde{R}_1(\mathrm{x},\mu) \\
&\quad + \frac{\partial r}{\partial \mathrm{x}}\Big(\ A(\mu)\mathrm{x} + \widetilde{R}(\mathrm{x},\mu)\mathrm{x} \ \Big) + r(\mathrm{x},\mu)A(\mu) + r(\mathrm{x},\mu)\widetilde{R}(\mathrm{x},\mu) \quad \Big]\mathrm{x} + \ldots, \\
\dot{\xi}_2 &= A_2(\mu)\xi_2 + \widehat{R}_2(\xi_1,\xi_2,\mu) + \phi_4(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \ldots, \\
\dot{\eta}_1 &= B_1(\mu)\eta_1 + P_1(\eta_1,\eta_2,\mu) + \widehat{\psi}_2(\xi_1,\xi_2,\mu)\eta_2 + \ldots, \\
\dot{\eta}_2 &= B_2(\mu)\eta_2 + P_2(\eta_1,\eta_2,\mu) + \widehat{\psi}_4(\xi_1,\xi_2,\mu)\eta_2 + \ldots,
\end{aligned}$$

onde

$$\widehat{R}_2(0,0,\mu) \equiv 0, \qquad \frac{\partial \widehat{R}_2}{\partial(\xi_1,\xi_2)}(0,0,\mu) \equiv 0,$$

$$\widehat{\psi}_2(0,0,\mu) \equiv 0, \qquad \widehat{\psi}_4(0,0,\mu) \equiv 0.$$

Assumimos que $r(\mathrm{x},\mu)$ é tal que a expressão entre colchetes torna-se identicamente nula, isto é, assumimos que as seguintes condições são válidas

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial \mathrm{x}}\Big(A(\mu)\mathrm{x} + \widetilde{R}(\mathrm{x},\mu)\mathrm{x}\Big) = \\
&= A_1(\mu)r(\mathrm{x},\mu) - r(\mathrm{x},\mu)A(\mu) - \widetilde{R}_1(\mathrm{x},\mu) - r(\mathrm{x},\mu)\widetilde{R}(\mathrm{x},\mu).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Vamos considerar um sistema matricial de equações diferenciais da forma

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu)\mathrm{x} + \widetilde{R}(\mathrm{x},\mu)\mathrm{x}, \\ \dot{Y} &= A_1(\mu)Y - YA(\mu) - \widetilde{R}_1(\mathrm{x},\mu) - Y\widetilde{R}(\mathrm{x},\mu), \end{aligned} \right. \tag{3.19}$$

onde $Y \in R^{m_1 m}$ e $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^m$. Para todo μ suficientemente pequeno, este sistema possui um equilíbrio em $O_3(0,0)$ cujos expoentes característicos incluem o espectro do operador linear

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &\longmapsto A(\mu)\mathrm{x}, \\ Y &\longmapsto A_1(\mu)Y - YA(\mu) - \frac{\partial \widetilde{R}_1}{\partial \mathrm{x}}(0,\mu)\mathrm{x}. \end{aligned}$$

Segue que, quando $\mu = 0$, o ponto O_3 tem m_1^2 autovalores sobre o eixo imaginário, $(mm_1 - m_1^2)$ e m autovalores dos lados esquerdo e direito do eixo imaginário, respectivamente. Logo, para μ suficientemente pequeno o Sistema (3.19) possui uma variedade invariante m-dimensional (estável forte) $Y = r(\mathrm{x},\mu)$. Isto garante a existência de uma função r que satisfaz a condição (3.18).

Da transformação **(3)**, com tal $r(\mathrm{x},\mu)$, resulta que $\phi_1 \equiv 0$, $\phi_3 \equiv 0$, $\psi_1 \equiv 0$, $\psi_3 \equiv 0$ e $R_1 \equiv 0$ em (3.9).

Passo 4. Fazendo a mudança de variáveis **(4)**, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= A_1(\mu)\xi_1 + R_1(\xi_1,\xi_2,\mu) + \widehat{\phi}_2(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \dots, \\ \dot{\xi}_2 &= A_2(\mu)\xi_2 + R_2(\xi_1,\xi_2,\mu) + \widehat{\phi}_4(\eta_1,\eta_2,\mu)\xi_2 + \dots, \\ \dot{\eta}_1 &= \dot{y} + \frac{\partial p}{\partial y}\dot{y}y + p(y,\mu)\dot{y} = B_1(\mu)y + P_1(y,\mu) + \psi_2(\mathrm{x},\mu)v + \\ &\quad + \frac{\partial p}{\partial y}\Big(B(\mu)y + P(y,\mu) \Big)y + p(y,\mu)\Big(B(\mu)y + P(y,\mu) \Big) + \dots = \\ &= B_1(\mu)\eta_1 + \psi_2(\xi_1,\xi_2,\mu)\eta_2 + \Big[-B_1(\mu)p(y,\mu) + \widetilde{P}_1(y,\mu) + \\ &\quad + \frac{\partial p}{\partial y}\Big(B(\mu)y + \widetilde{P}(y,\mu)y \Big) + p(y,\mu)B(\mu) + p(y,\mu)\widetilde{P}(y,\mu) \Big] y + \dots, \\ \dot{\eta}_2 &= B_2(\mu)\eta_2 + \widehat{P}_2(\eta_1,\eta_2,\mu) + \psi_4(\xi_1,\xi 2,\mu)\eta_2 + \dots, \end{aligned}$$

onde $P(y,\mu) = \widetilde{P}(y,\mu)y$.

Escolhemos a função p tal que a expressão entre colchetes seja identicamente nula, isto é,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial y}\Big(B(\mu)y + \widetilde{P}(y,\mu)y\Big) = \\ &= B_1(\mu)p(y,\mu) - p(y,\mu)B(\mu) - \widetilde{P}_1(y,\mu) - p(y,\mu)\widetilde{P}(y,\mu). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Logo, o Sistema (3.9) toma, finalmente, a forma desejada.

Para garantir a existência da função p, vamos considerar um sistema matricial de equações diferenciais da forma

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{X} & = & B_1(\mu)X - XB(\mu) - \widetilde{P}_1(y,\mu) - X\widetilde{P}(y,\mu),\\ \dot{y} & = & B(\mu)y + \widetilde{P}(y,\mu)y,\end{array}\right. \tag{3.21}$$

onde $X \in \mathbb{R}^{n_1 n}$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Para todo μ suficientemente pequeno, $O_4(0,0)$ é ponto de equilíbrio deste último sistema, cujos expoentes característicos incluem o espectro do operador linear

$$\begin{array}{rcl} X & \longmapsto & B_1(\mu)X - XB(\mu) - \dfrac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial y}(0,\mu)y,\\ y & \longmapsto & B_1(\mu)y.\end{array}$$

Quando $\mu = 0$ os expoentes característicos de O_4 são como segue: n_1^2 autovalores estão sobre o eixo imaginário, $(n_1 n - n_1^2)$ e n autovalores estão à esquerda e à direita do eixo imaginário, respectivamente. Portanto, para μ suficientemente pequeno o Sistema (3.21) possui uma variedade invariante n-dimensional (instável forte) W_4^{uu} da forma $X = p(\mathtt{y},\mu)$ onde a função p satisfaz a condição (3.20). Isto completa a demonstração.

□

3.2 Os Teoremas (A) e (B)

Considere o seguinte campo vetorial R-reversível

$$\dot{z} = f(z,\mu), \tag{3.22}$$

onde μ é um parâmetro real, $z \in \mathbb{R}^4$ e R é uma involução linear. Note que f é R-reversível, logo,

$$f(Rz,\mu) = -Rf(z,\mu).$$

Como vimos no final do Capítulo 1, uma vez que podemos assumir que a interseção genérica das variedades $Fix(R)$ e $W^u(\theta)$ é transversal (sendo θ um equilíbrio hiperbólico de f), dado z_0 nesta interseção, qualquer órbita homoclínica reversível através de z_0 é o limite de uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas reversíveis cujos períodos tendem para $+\infty$. Veremos abaixo que, em $\mu = 0$, podemos supor que tal órbita homoclínica reversível surge através de uma tangência quadrática de $W^u(\theta)$ e $Fix(R)$, ao invés de uma interseção transversal.

Vamos agora fixar todas as hipóteses técnicas para os dois principais resultados deste trabalho: os Teoremas (A) e (B) a seguir. Tais hipóteses são válidas para todo o restante deste capítulo.

Seja $\theta \in \mathbb{R}^4$ um equilíbrio reversível hiperbólico de f com autovalores (não nulos) reais e simples, como na Região II da Figura 2.1 no Capítulo 2. Vimos que tal equilíbrio é chamado de Sela e *spec*, nesse caso, é dado por

$$spec = \{\pm 1,\ \pm\gamma\},$$

com $\gamma > 1$. Também vimos na Proposição (1.5.4) que $R(W^u(\theta)) = W^s(\theta)$, logo $dim(W^u(\theta)) = dim(W^s(\theta)) = 2$ (isto é, metade da dimensão do espaço de fase $\mathbb{R}^4$).

Introduzimos coordenadas $z = (x, y, u, v)$ numa vizinhança de θ tal que o campo vetorial do sistema nesta vizinhança toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + \dots \\ \dot{y} &= y + \dots \\ \dot{u} &= -\gamma u + \dots \\ \dot{v} &= \gamma v + \dots \end{cases} \tag{3.23}$$

onde as reticências indicam termos não lineares.

Observemos que o estado de equilíbrio θ de (3.23) é a origem e a matriz de linearização do sistema em θ é dada por

$$A = Df(\theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Aqui, os eixos coordenados são as autodireções da matriz A. A variedade instável $W^u(\theta)$ é tangente ao plano $\{x = 0,\ u = 0\}$ e a variedade estável $W^s(\theta)$ é tangente ao plano $\{y = 0,\ v = 0\}$.

Segue da relação

$$RAR^{-1} = -A,$$

dada no Capítulo 2, que a involução R aplica eixos coordenados em eixos coordenados correspondentes aos autovalores de sinais opostos, ou seja, se denotarmos por e_1, e_2, e_3 e e_4 os eixos coordenados em $\mathbb{R}^4$, R é tal que $R(e_1) = e_2$, $R(e_2) = e_1$, $R(e_3) = e_4$ e $R(e_4) = e_3$, uma vez que $A(e_1) = -e_1$, $A(e_2) = e_2$, $A(e_3) = -\gamma e_3$ e $A(e_4) = \gamma e_4$.

Logo, a involução R é dada por

$$R(x,y,u,v) = (y,x,v,u) \tag{3.24}$$

em tais coordenadas.

Além disso, não é difícil ver que $Fix(R)$ é dado por

$$Fix(R) = \{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y, \ u = v\}.$$

Também não é difícil ver que cada plano da forma

$$\left\{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4; \quad \frac{x+y}{2} = x_0, \quad \frac{u+v}{2} = u_0\right\}$$

é invariante com respeito a R. Usaremos a notação R_M^- para esses planos, onde $M = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ é o ponto de interseção de tais planos com $Fix(R)$. Como $M \in Fix(R)$, podemos escrever $M = (x_0, x_0, u_0, u_0)$.

Afirmação: $R_M^- = \{M\} + Fix(-R)$.

De fato, seja dado $(x,y,u,v) \in R_M^-$ e note que

$$(x,y,u,v) = (x_0,x_0,u_0,u_0) + (x-x_0, y-x_0, u-u_0, v-u_0).$$

Agora, como $\dfrac{x+y}{2} = x_0$ e $\dfrac{u+v}{2} = v_0$, segue que

$$-R(x-x_0, y-x_0, u-u_0, v-u_0) = -(y-x_0, x-x_0, v-u_0, u-u_0) =$$

$$= -((2x_0-x)-x_0, (2x_0-y)-x_0, (2u_0-u)-u_0, (2u_0-v)-u_0) = (x-x_0, y-x_0, u-u_0, v-u_0),$$

ou seja,

$$(x-x_0, y-x_0, u-u_0, v-u_0) \in Fix(-R).$$

Reciprocamente, seja dado

$$(x_0,x_0,u_0,u_0) + (x,-x,u,-u) = (x_0+x, x_0-x, u_0+u, u_0-u) \in \{M\} + Fix(-R).$$

Como $x_0 + x + x_0 - x = 2x_0$ e $u_0 + u + u_0 - u = 2u_0$, temos

$$\{M\} + Fix(-R) \subseteq R_M^-,$$

e assim concluímos a Afirmação.

$\square$

Suponhamos que a variedade instável $W^u(\theta)$ de θ intercepta $Fix(R)$ em algum ponto M. Segue, por reversibilidade, que a variedade estável $W^s(\theta)$ de θ também intercepta $Fix(R)$ no mesmo ponto M. Portanto, a órbita Γ através de M é, de fato, uma órbita homoclínica reversível para θ. Veja Figura 3.1, onde S^{far} é uma seção transversal 3-dimensional que contém o ponto M e uma vizinhança local de M em $Fix(R)$.

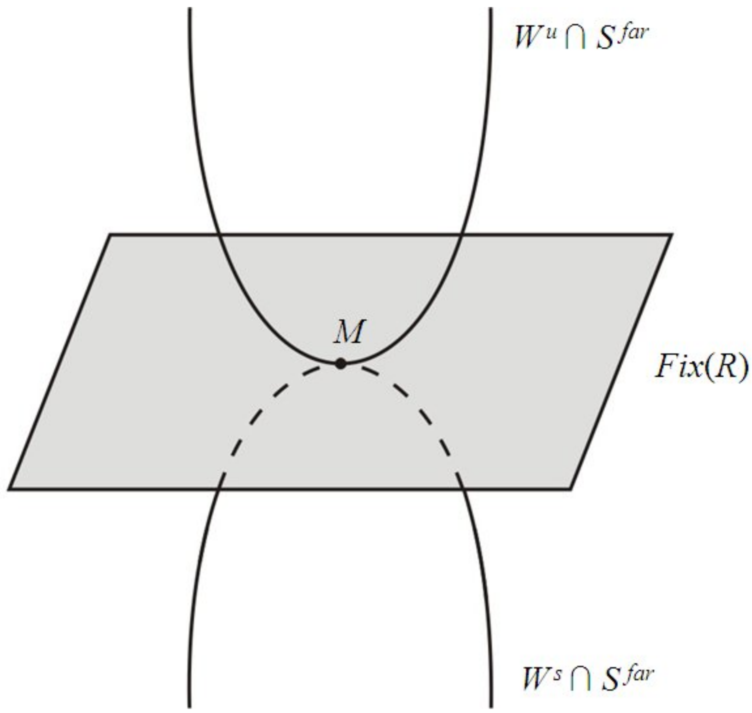

Figura 3.1: A variedade instável $W^u(\theta)$ de um equilíbrio reversível θ possui uma tangência com $Fix(R)$ em algum ponto M.

Faremos as seguintes hipótese:

H1) *$W^u(\theta)$ possui uma tangência com $Fix(R)$ no ponto M.*

H2) *A interseção de $Fix(R)$ com o plano tangente de $W^u(\theta)$ em M é 1-dimensional.*

H3) *A tangência de $Fix(R)$ e $W^u(\theta)$ em M é quadrática.*

As hipóteses H1), H2) e H3) significam que existem coordenadas $(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}) \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$W^u(\theta) = \begin{cases} \widehat{x} &= \phi_1(\widehat{y}, \widehat{v}) = \widehat{y}^2 + \epsilon \widehat{v}^2, \\ \widehat{u} &= \phi_2(\widehat{y}, \widehat{v}), \end{cases}$$

e ϕ_1 é múltiplo de ϕ_2, isto é, $\phi_1 = \lambda(\widehat{y}, \widehat{v})\,\phi_2$, onde $\{\widehat{x} = \phi_1(\widehat{y}, \widehat{v}),\ \widehat{u} = \phi_2(\widehat{y}, \widehat{v})\}$ são as equações da variedade instável de θ, $W^u(\theta)$, $\epsilon = \pm 1$ e $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva.

Incluímos nosso sistema em uma família a 1-parâmetro $f = f(z, \mu)$ dependendo suavemente de μ. Suavemente significa que o campo vetorial f é C^r-suave ($r \geq 2$) com respeito a (x, y, u, v, μ).

H4) *A interseção de* $W^u(\theta)$ *e* $Fix(R)$ *varia quando* μ *varia, sendo tangente para* $\mu = 0$.

Uma vez que a tangência de $W^u(\theta)$ e $Fix(R)$ é quadrática, o ponto de tangência M desaparece, digamos, para $\mu > 0$. Quando tal tangência é desfeita, tanto $W^u(\theta)$ quanto sua R-imagem $W^s(\theta)$ deixam de ser tangentes ao plano $Fix(R)$ simultaneamente. Por outro lado, para $\mu < 0$, dois pontos M_1 e M_2 surgem e, em cada um deles, $W^u(\theta)$ intercepta $Fix(R)$ tranversalmente. Os pontos M_1 e M_2 correspondem a um par de órbitas homoclínicas reversíveis transversais Γ_1 e Γ_2. Veja Figura 3.2.

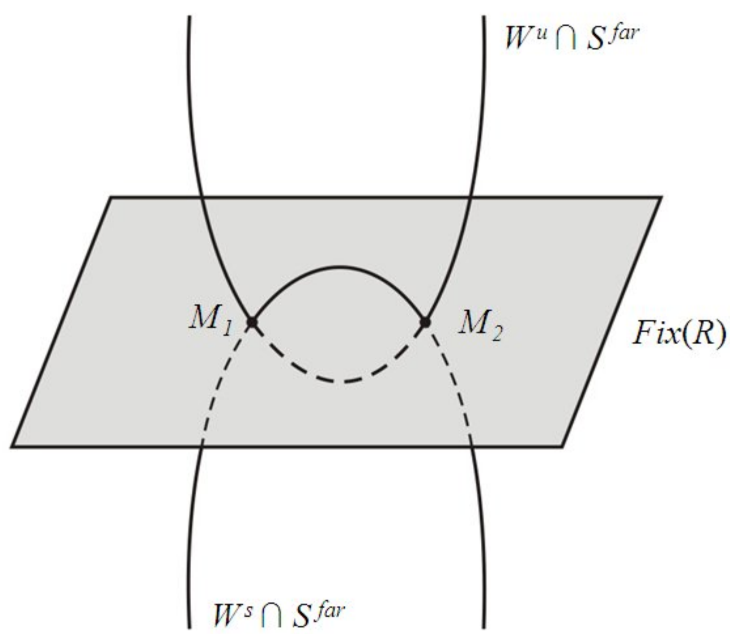

Figura 3.2: Para $\mu < 0$ dois pontos M_1 e M_2 surgem e, em cada um deles, $W^u(\theta)$ intercepta $Fix(R)$ transversalmente.

Ao longo desta seção iremos considerar adicionalmente algumas hipóteses de não-degenerescência.

H5) Γ *não pertence à variedade instável forte de* θ *denotada por* $W^{uu}(\theta)$.

A variedade instável forte $W^{uu}(\theta)$ corresponde à parte de $W^u(\theta)$ relacionada ao autovalor positivo de maior módulo. Logo, $W^{uu}(\theta)$ é uma variedade 1-dimensional tangente ao subespaço gerado pelo autovetor associado ao autovalor $\gamma > 1$, isto é, $W^{uu}(\theta)$ é a única variedade 1-dimensional que é tangente a $\{x = 0, y = 0, u = 0\}$ em θ.

A condição H5) significa que a órbita homoclínica reversível Γ deixa a origem θ numa direção bem determinada, neste caso, tangente ao eixo-y. Sem perda de generalidade, podemos supor que Γ deixa a origem na direção $y > 0$. Note que, devido à reversibilidade do sistema, a direção de retorno da órbita Γ à origem também está bem determinada: ao longo do eixo-x positivo. Esta situação está ilustrada na Figura 3.3.

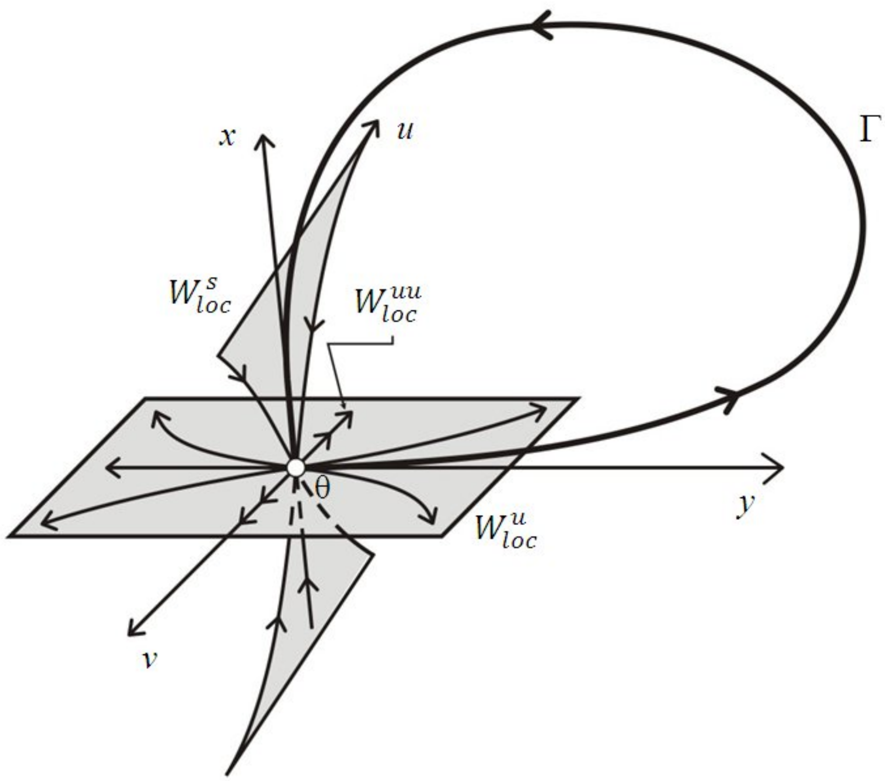

Figura 3.3: A hipótese $\Gamma \not\subset W^{uu}(\theta)$ significa que Γ deixa a origem θ numa direção bem determinada: tangente ao eixo-y, na direção $y > 0$. Devido à reversibilidade do sistema, a direção de retorno de Γ à origem também está bem determinada: ao longo do eixo-x positivo.

Para nossas hipóteses de não-degenerescência restantes, vamos considerar uma seção transversal da forma

$$S^{out} := \{y = \epsilon\}$$

em um ponto da órbita homoclínica reversível Γ, onde $\epsilon > 0$ é fixado e suficientemente pequeno. Fixemos também outra seção transversal 3-dimensional de Γ, S^{far}, a qual contém o ponto M e uma vizinhança local de M em $Fix(R)$. As seções transversais S^{out} e $S^{in} := R(S^{out})$ estão numa pequena vizinhança de θ e são tais que S^{out} intercepta $W^u_{loc}(\theta)$ e S^{in} intercepta $W^s_{loc}(\theta)$. Notemos que em uma pequena vizinhança do ponto $M^* := \Gamma \cap S^{out}$ temos um fluxo próximo de Γ definindo uma aplicação de Poincaré

$$\Pi_{out} : S^{out} \longrightarrow S^{far}.$$

Veja Figura 3.4.

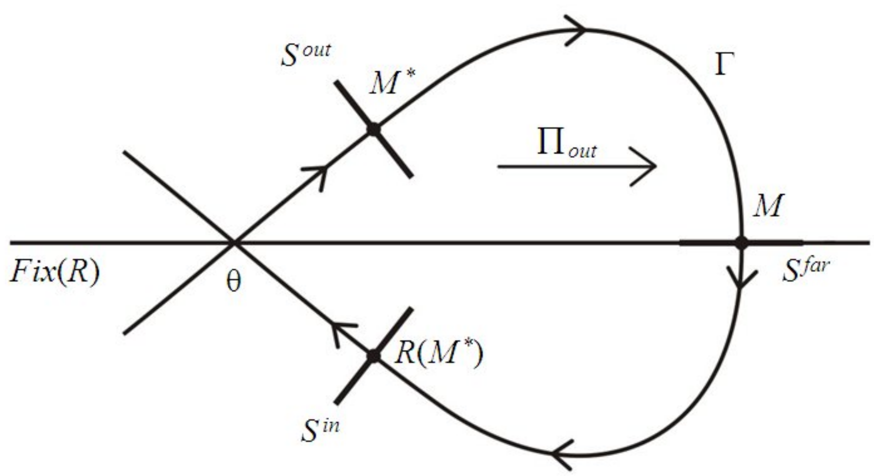

Figura 3.4: $\Pi_{out} : S^{out} \longrightarrow S^{far}$ denota a aplicação de Poincaré definida pelo fluxo próximo de Γ e S^{out}, S^{far} e S^{in} são três seções transversais de Γ.

Note que em uma pequena vizinhança de θ existe uma (não única) variedade invariante 3-dimensional, conhecida como *variedade instável local estendida*, que será denotada por $W^{ue}_{loc}(\theta)$, tal que $W^{ue}_{loc}(\theta)$ é C^1-suave, tangente ao hiperplano $\{u = 0\}$ e contém $W^u_{loc}(\theta)$.

Se denotarmos por $W^{ue}(\theta)$ os iterados positivos de W^{ue}_{loc} dentro de uma vizinhança de Γ e fora de uma pequena vizinhança de θ, então, assumiremos que

H6) *$W^{ue}(\theta)$ é transversal a $Fix(R)$ no ponto $M = \Gamma \cap Fix(R)$.*

H7) *$W^{ue}(\theta)$ também é transversal ao plano $R^-_M = \{M\} + Fix(-R)$ em M.*

Observe que $W^{ue}(\theta)$ não é unicamente definida, mas os espaços tangente de quaisquer duas tais variedades coincidem em todos os pontos de $W^u(\theta)$. Portanto, as condições de transversalidade H6) e H7) estão bem definidas.

Da hipótese H3), a de que $W^u(\theta)$ e $Fix(R)$ possuem uma tangência quadrática em M, segue que a pré-imagem $\Pi_{out}^{-1}(Fix(R))$ possui uma tangência quadrática com a curva

$$W_{loc}^u(\theta) \cap S^{out} = \{x = 0, u = 0, y = \epsilon\},$$

pois Π_{out}^{-1} é um difeomorfismo.

Também pelo fato de Π_{out}^{-1} ser um difeomorfismo e pela hipótese H6), segue que a superfície $W_{loc}^{ue}(\theta) \cap S^{out}$ é transversal a $\Pi_{out}^{-1}(Fix(R))$.

Por outro lado, como $W_{loc}^u(\theta) \subset W_{loc}^{ue}(\theta)$, a curva $W_{loc}^u(\theta) \cap S^{out} = \{x = 0, u = 0, y = \epsilon\}$ pertence à superfície $W_{loc}^{ue}(\theta) \cap S^{out}$ a qual, por sua vez, está próxima ao plano $\{u = 0, y = \epsilon\}$. Na verdade, para uma escolha adequada de coordenadas, esta superfície é tangente ao plano $\{u = 0, y = \epsilon\}$. (Veja a demonstração do Teorema (A)).

Assim, a interseção

$$l = \left(W_{loc}^{ue}(\theta) \cap S^{out}\right) \cap \Pi_{out}^{-1}\left(Fix\left(R\right)\right)$$

é uma curva l que possui uma tangência quadrática com a curva $\{x = 0, u = 0, y = \epsilon\}$.

Devemos, portanto, distinguir duas diferentes possibilidades geométricas de como $Fix(R)$ pode se posicionar em relação a $W^u(\theta)$: no *lado positivo* ou no *lado negativo*. Como os valores de x na curva l não são todos nulos, diremos que $Fix(R)$ se posiciona no *lado positivo* de $W^u(\theta)$ se a curva l pertence a parte de $W_{loc}^{ue}(\theta) \cap S^{out}$ que corresponde a valores positivos de x e $Fix(R)$ se posiciona no *lado negativo* de $W^u(\theta)$ se l pertence a parte de $W_{loc}^{ue}(\theta) \cap S^{out}$ que corresponde a valores negativos de x. Veja as Figuras 3.5 e 3.6. Relembremos que $x > 0$ dentro de $W_{loc}^s(\theta)$ é a direção positiva de retorno da órbita homoclínica original Γ para a origem θ.

Definição 3.2.1. *Seja U uma vizinhança tubular de $\Gamma \cup \{\theta\}$. Dizemos que uma órbita é 1-periódica quando ela é homotópica a $\Gamma \cup \{\theta\}$ em U.*

Seja U como na Definição (3.2.1). O Teorema seguinte detecta órbitas 1-periódicas reversíveis em U chamadas de *principais* e também estabelece a inexistência de órbitas k-homoclínicas em U, para $k \geq 2$. Lembrando que uma órbita é dita k-homoclínica se ela é homoclínica e intercepta uma seção transversal de Γ exatamente k vezes em U. Nesse contexto, a órbita homoclínica reversível Γ é 1-homoclínica.

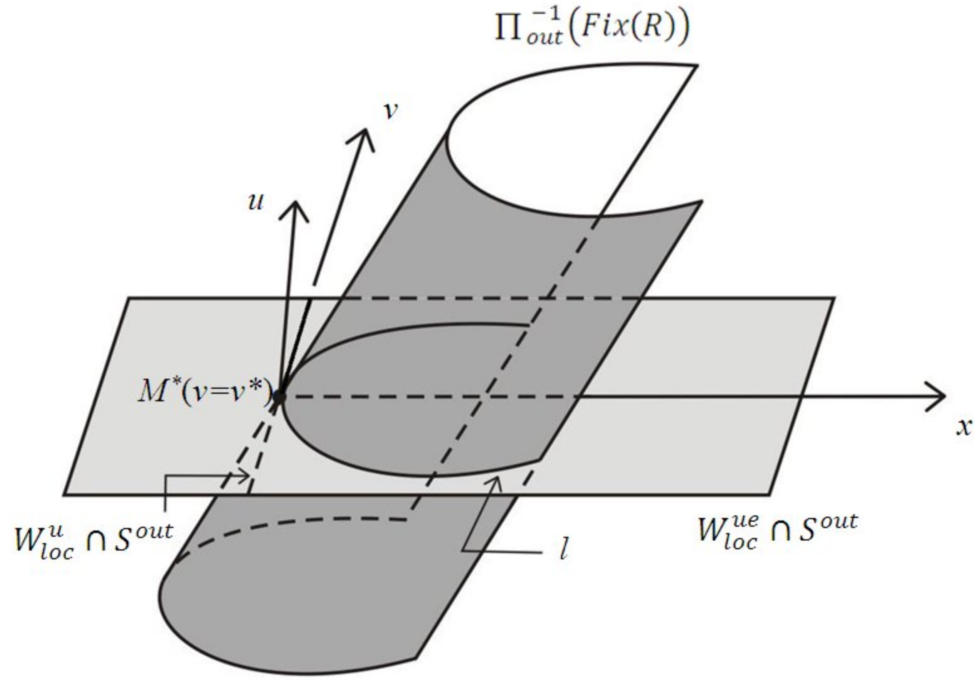

Figura 3.5: $Fix(R)$ se posiciona no lado positivo de $W^u(\theta)$.

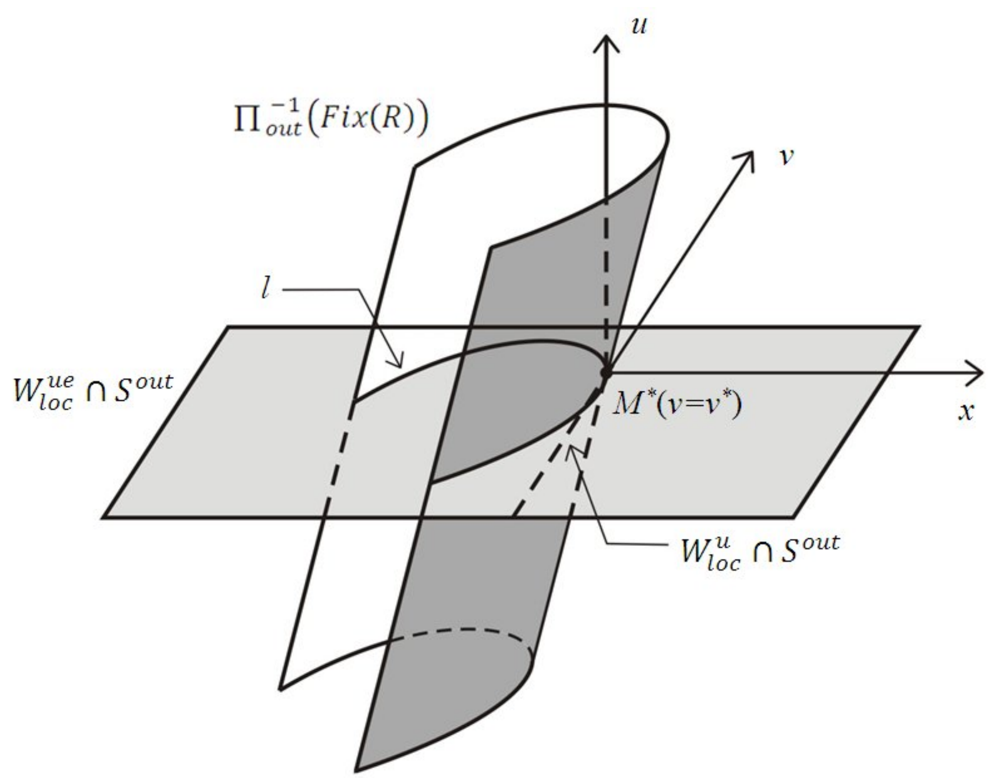

Figura 3.6: $Fix(R)$ se posiciona no lado negativo de $W^u(\theta)$.

Teorema A. *Seja θ um equilíbrio reversível hiperbólico, com autovalores reais e simples, de um campo vetorial reversível $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, C^r-suave, $r \geq 3$. Assuma que θ possui uma órbita homoclínica reversível Γ ao longo da qual as condições de tangência e não-degenerescência $H2) - H7)$ especificadas acima são satisfeitas. Então, numa vizinhança suficientemente pequena U da órbita 1-homoclínica reversível Γ e para μ pequeno, não exitem órbitas k-homoclínicas, para todo $k \geq 2$.*

Para as órbitas principais em U e para μ pequeno segue que:

Se $Fix(R)$ se posiciona no lado negativo de $W^u(\theta)$, então não existem órbitas principais para $\mu \geq 0$. Para $\mu < 0$ fixado existe uma família a 1-parâmetro de órbitas principais unindo as órbitas homoclínicas Γ_1 e Γ_2.

Se $Fix(R)$ se posiciona no lado positivo de $W^u(\theta)$, então existe uma família a 1-parâmetro de órbitas principais para $\mu > 0$. Essa família é dividida em dois caminhos contínuos pela órbita homoclínica Γ em $\mu = 0$. Os dois caminhos persistem, separadamente para $\mu < 0$, um limitado por Γ_1 e o outro por Γ_2. Veja Figura 3.7.

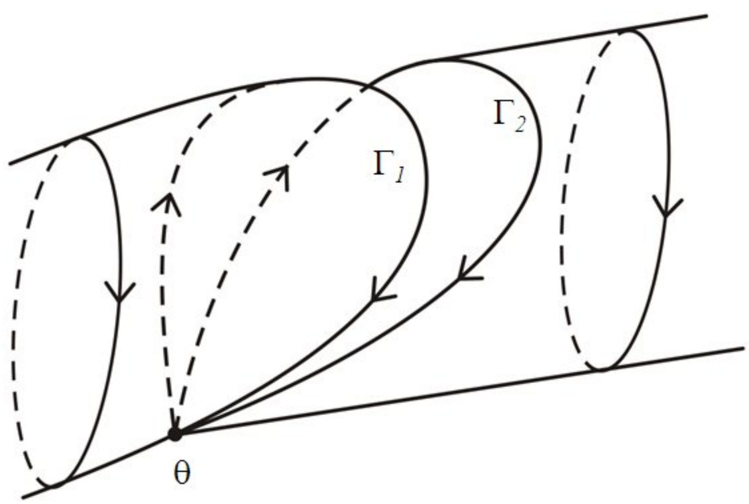

Figura 3.7: Superfície de órbitas principais no caso em que $Fix(R)$ se posiciona no lado positivo de $W^u(\theta)$, para $\mu < 0$. Ela consiste de duas partes, uma limitada por Γ_1 e a outra por Γ_2.

O Teorema (A) pode ser ilustrado pelos diagramas (a) e (b) mostrados na Figura 3.8.

As famílias de órbitas principais formam superfícies 2-dimensionais em $\mathbb{R}^4$. Veremos na demonstração do Teorema (A) que as órbitas principais podem ser parametrizadas pela v-coordenada do ponto de interseção de tais órbitas com a seção transversal S^{out} de Γ. Como estamos considerando uma pequena vizinhança de $\Gamma \cup \{\theta\}$, o valor de v está próximo de v^*, onde v^* é a v-coordenada do ponto $M^* = \Gamma \cap S^{out}$. As regiões hachuradas nas Figuras 3.8 e 3.9 estão relacionadas às órbitas principais; a saber, a interseção da região hachurada com a linha $\{\mu = cte\}$ é o conjunto de v-valores correspondendo à órbita principal que existe para μ dado. As curvas $v = v_1(\mu)$ e $v = v_2(\mu)$ que limitam as regiões hachuradas são tais que: v_1 é a v-coordenada do ponto $M_1^* = \Gamma_1 \cap S^{out}$ e v_2 é a v-coordenada do ponto $M_2^* = \Gamma_2 \cap S^{out}$, lembrando que Γ_1 e Γ_2 são as órbitas homoclínicas tranversais que surgem de Γ quando $\mu < 0$. Também veremos na demonstração do Teorema (A) que as funções v_1 e v_2 comportam-se como $v^* \pm \sqrt{|\mu|}$, localmente, para $\mu \leq 0$.

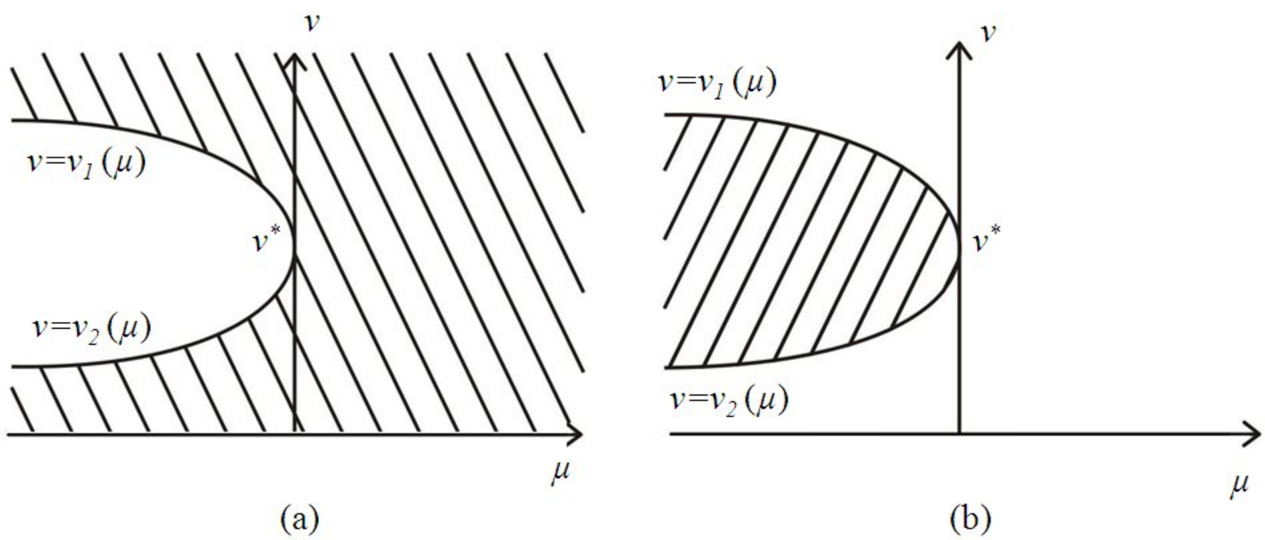

Figura 3.8: Ilustração do Teorema (A): (a) para o caso em que $Fix(R)$ se posiciona no lado positivo de $W^u(\theta)$ e (b) para o caso em que $Fix(R)$ se posiciona no lado negativo de $W^u(\theta)$.

Antes de enunciarmos o próximo teorema faremos algumas considerações:

Seja f um campo vetorial R-reversível definido em $\mathbb{R}^4$. Denotaremos por $floq$ o espectro do fluxo linearizado

$$D\varphi_T(z_0) = \frac{\partial \varphi_T}{\partial z}(z_0) \tag{3.25}$$

ao longo de uma órbita periódica reversível através de $z_0 \in Fix(R)$ de período mínimo $T > 0$. A matriz (3.25) é também conhecida como *matriz monodromia* e seus autovalores são chamados de multiplicadores característicos ou de Floquet.

Vamos mostrar que

$$s \in floq \Longleftrightarrow s^{-1} \in floq.$$

De fato, da Proposição (1.3.3) do Capítulo 1 segue que

$$R \circ \varphi_T(z) = \varphi_{-T} \circ R(z), \ \forall z \in \mathbb{R}^4 \tag{3.26}$$

Diferenciando (3.26), segue que

$$DR(\varphi_T(z))D\varphi_T(z) = D\varphi_{-T}(R(z))DR(z) = D\varphi_T^{-1}(R(z))DR(z), \ \forall z \in \mathbb{R}^4.$$

Como $DR(z) \equiv R$, para todo $z \in \mathbb{R}^4$ (pois R é involução linear) em $z = z_0 \in Fix(R)$, temos que

$$RD\varphi_T(z_0) = D\varphi_T^{-1}(z_0)R,$$

ou seja,

$$R^{-1}D\varphi_T(z_0)R = D\varphi_T^{-1}(z_0) = (D\varphi_T(z_0))^{-1}. \tag{3.27}$$

A última igualdade em (3.27) segue do Teorema da Função Inversa.

De $R^{-1}D\varphi_T(z_0)R = (D\varphi_T(z_0))^{-1}$ concluímos que $D\varphi_T(z_0)$ e $(D\varphi_T(z_0))^{-1}$ possuem os mesmos autovalores, pois são matrizes semelhantes. Portanto,

$$s \in floq \Longleftrightarrow s^{-1} \in floq. \tag{3.28}$$

Definição 3.2.2. *Uma órbita periódica elíptica é caracterizada por um multiplicador de Floquet* $s = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}, \ b \neq 0$ *tal que* $|s| = 1$.

Ao longo de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas reversíveis, notamos que $floq$ sempre contém um multiplicador de Floquet trivial $+1$ de multiplicidade algébrica dois. Portanto, a única combinação possível em $\mathbb{R}^4$ de multiplicadores de Floquet $s \in \mathbb{C}$ é dada por

$$floq = \{s, s^{-1}, 1, 1\} \tag{3.29}$$

O caso elíptico corresponde a $s^{-1} = \bar{s}$, onde $s = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}, \ b \neq 0$.

Se $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, chamamos tais órbitas periódicas reversíveis de *hiperbólicas* ou *selas*. Existem dois subcasos: órbitas de *Möbius*[2] e órbitas *não-Möbius* quando $s < 0$ e $s > 0$, respectivamente.

Veremos no próximo Teorema que mesmo um equilíbrio hiperbólico tipo Sela θ com órbita homoclínica reversível Γ é capaz de gerar órbitas periódicas elípticas logo que Γ perde sua transversalidade. Mais precisamente, sob certas condições de não-degenerescência (as quais são

[2] O nome é sugerido pelo seguinte fato: a variedade local estável forte de uma órbita de Möbius é uma faixa de Möbius e, portanto, não orientável. Devido a reversibilidade, o mesmo vale para a variedade local instável forte.

genéricas em famílias a 1-parâmetro) o teorema seguinte garante que uma "cunha" de órbitas periódicas reversíveis elípticas é gerada de Γ para $\mu > 0$ ou $\mu < 0$. Os efeitos de giros necessários são produzidos pela tangência de $Fix(R)$ e $W^u(\theta)$ ao invés de qualquer giro local próximo do equilíbrio reversível θ.

Teorema B. *Suponha que as hipóteses $H2) - H7)$ do Teorema (A) são satisfeitas. Então, existem duas funções suaves $v^+(\mu)$ e $v^-(\mu)$, definidas para $\mu > 0$ quando $Fix(R)$ se posiciona no lado positivo de $W^u(\theta)$ e para $\mu < 0$ quando $Fix(R)$ se posiciona no lado negativo de $W^u(\theta)$ com $v^\pm(\mu) \longrightarrow v^*$ e $\frac{d}{d\mu}(v^+(\mu) - v^-(\mu)) \longrightarrow 0$, para $\mu \longrightarrow 0$, tal que vale o seguinte:*

As órbitas principais são elípticas para $v^-(\mu) < v < v^+(\mu)$, selas não-Möbius para $v > v^+(\mu)$ e selas Möbius para $v < v^-(\mu)$. Ao longo das curvas $v = v^+(\mu)$ e $v = v^-(\mu)$, multiplicadores de Floquet $s = 1$ e $s = -1$, ambos de multiplicidade algébrica dois, ocorrem, respectivamente.

Os Teoremas (A) e (B) estão ilustrados pelos diagramas (a) e (b) mostrados na Figura 3.9. Na região (duplamente hachurada) limitada pelas curvas $v = v^+(\mu)$ e $v = v^-(\mu)$, as órbitas principais são elípticas. Para $v > v^+(\mu)$ são selas não-Möbius e para $v < v^+(\mu)$ selas Möbius.

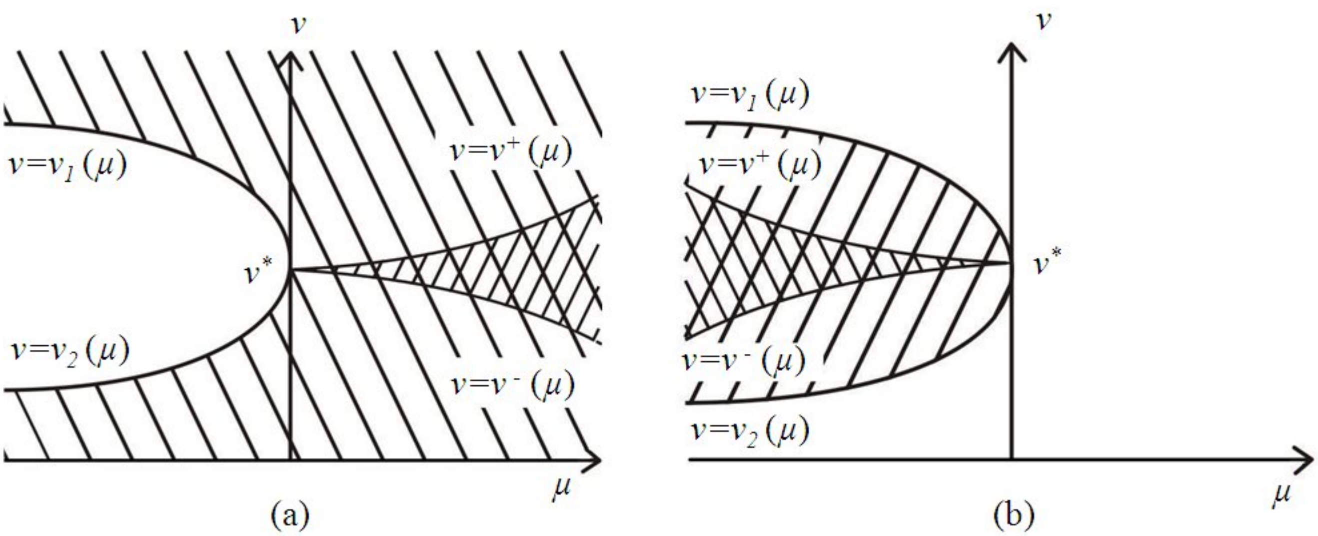

Figura 3.9: Ilustração dos Teoremas (A) e (B): (a) para caso em que $Fix(R)$ se posiciona no lado positivo de $W^u(\theta)$ e (b) para o caso negativo.

Antes de discutirmos as demonstrações dos Teoremas (A) e (B) recordemos a

Definição 3.2.3.

a) $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \longrightarrow 0$ se existe uma constante K tal que $|\delta_1(\epsilon)| \leq K|\delta_2(\epsilon)|$ para

$\epsilon \longrightarrow 0$;

b) $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$ *para* $\epsilon \longrightarrow 0$ *se* $\lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0$.

3.2.1 Demonstração do Teorema (A)

Seja Γ uma órbita 1-homoclínica reversível para θ como na hipótese do Teorema (A). Primeiramente vamos mostrar a afirmação sobre órbitas principais numa vizinhança suficientemente pequena U de $\Gamma \cup \{\theta\}$. A ausência de órbitas k-homoclínicas, $k \geq 2$ será feita no final da demonstração.

Notemos inicialmente, que o conjunto dos pontos onde as órbitas principais interceptam a seção transversal S^{out} em U, está sobre uma curva suave $\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-$. De fato, lembremos da Proposição (1.4.3) do Capítulo 1: uma órbita periódica reversível intercepta o plano $Fix(R)$ em exatamante dois pontos e, reciprocamente, toda órbita que intercepta $Fix(R)$ duas vezes é uma órbita periódica reversível. Como uma órbita principal em U é, por definição, 1-periódica, ela intercepta uma seção transversal em U precisamente uma vez. Logo, um dos pontos da interseção de tal órbita com $Fix(R)$ pertence a uma pequena vizinhança de θ e o outro a uma pequena vizinhança do ponto $M = \Gamma \cap Fix(R)$.

Vamos denotar por P o ponto de interseção de uma órbita principal com S^{out}. Veja Figura 3.10. Note que o ponto P está próximo de $M^* = \Gamma \cap S^{out}$. O conjunto de tais pontos P pertence a uma curva $\mathcal{L}$ que é a interseção de duas superfícies em S^{out}. A primeira superfície, chamada de *conjunto de saída*, é formada por iterados positivos de uma vizinhança de θ em $Fix(R)$ pelo fluxo que intercepta S^{out}. A segunda superfície é o conjunto $\Pi_{out}^{-1}(Fix(R))$: formada por iterados negativos de uma vizinhança de M em $Fix(R)$ pelo fluxo que intercepta S^{out}. Usaremos a notação $(Fix(R))^+$ e $(Fix(R))^-$ para tais superfícies, respectivamente. Assim,

$$\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-.$$

Observe que a órbita passando através de qualquer ponto da curva $\mathcal{L}$ é uma órbita principal, pois intercepta $Fix(R)$ duas vezes: próximo de θ e próximo de M. Assim, para descrever as órbitas principais dadas pelo teorema é suficiente descrever a curva $\mathcal{L}$, ou seja, as superfícies $(Fix(R))^+$ e $(Fix(R))^-$ próximas de θ.

Da hipótese H3), segue que $W^u(\theta)$ possui uma tangência quadrática com $Fix(R)$ em M para $\mu = 0$. Logo, para $\mu = 0$, $(Fix(R))^-$ possui uma tangência quadrática com

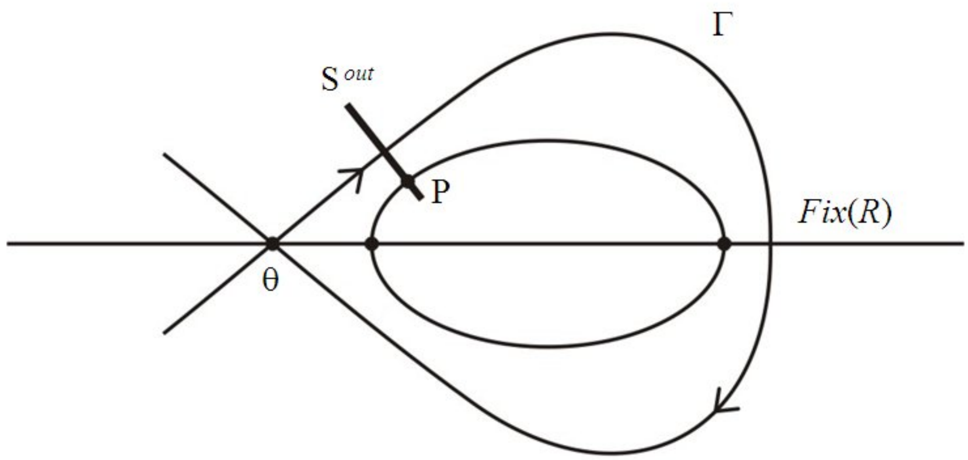

Figura 3.10: Uma órbita principal em U. Ela intercepta $Fix(R)$ exatamente duas vezes: em vizinhanças pequenas de θ e de $M = \Gamma \cap S^{out}$. O ponto P, próximo de M^*, é a interseção de tal órbita principal com S^{out}.

$\{x = 0, u = 0, y = \epsilon\} = W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out}$ no ponto $M^* = (x = 0, y = \epsilon, u = 0, v = v^*) = \Gamma \cap S^{out}$. Veja as Figuras 3.5 e 3.6. Portanto, para $\mu = 0$, $(Fix(R))^-$ é dada por

$$a_1 x + a_2 u = c^{'} (v - v^*)^2 + \dots, \tag{3.30}$$

onde os valores $c^{'}$ e $|a_1| + |a_2|$ são não nulos e as reticências indicam termos de ordem superior.

Vimos na hipótese H6) que a superfície $W^{ue}_{loc}(\theta) \cap S^{out}$ é transversal a $\Pi^{-1}_{out}(Fix(R)) = (Fix(R))^-$ e como vamos mostrar mais adiante, para uma escolha conveniente de coordenadas numa vizinhança de θ, $W^{ue}_{loc}(\theta) \cap S^{out}$ é tangente ao plano $\{y = \epsilon, u = 0\}$ em todos os pontos de $W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out}$. Logo, $(Fix(R))^-$ é transversal ao plano $\{y = \epsilon, u = 0\}$ e disso obtemos que a_1 em (3.30) é não nulo. Portanto, podemos reescrever (3.30) como

$$x = c\,(v - v^*)^2 + au + \dots, \tag{3.31}$$

onde o sinal do coeficiente c indica como $Fix(R)$ se posiciona em relação a $W^u(\theta)$ (positivamente para $c > 0$ ou negativamente para $c < 0$).

Para $\mu \neq 0$ temos uma perturbação de (3.31) para

$$x = c\left(\mu + (v - v^*)^2\right) + au + \dots, \tag{3.32}$$

onde as reticências indicam termo de ordem superior na expansão de Taylor em torno de $(\mu, v - v^*, u)$. Note que, μ, $(v - v^*)$ e u são pequenos numa vizinhança da tangência, logo, podemos assumir (reescalonando μ, se necessário) que os coeficientes de μ e $(v - v^*)$ são iguais a c.

Como $\mu \neq 0$, analisaremos dois casos: $\mu > 0$ e $\mu < 0$. Se $\mu > 0$, pela equação (3.32) segue que a superfície $(Fix(R))^-$ não intercepta $W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out} = \{x = 0, y = \epsilon, u = 0\}$. Por outro lado, para $\mu < 0$, existem dois pontos de interseção M_1^* e M_2^* com v-coordenadas

$$\begin{aligned} v_1 &= v^* + \sqrt{|\mu|} + o(\sqrt{|\mu|}) \\ v_2 &= v^* - \sqrt{|\mu|} + o(\sqrt{|\mu|}) \end{aligned} \tag{3.33}$$

através dos quais passam as órbitas homoclínicas transversais Γ_1 e Γ_2.

A seguir, passaremos a descrever $(Fix(R))^+$. Vamos provar que $(Fix(R))^+$ é uma superfície C^1-suave limitada por $W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out}$ como na Figura 3.11.

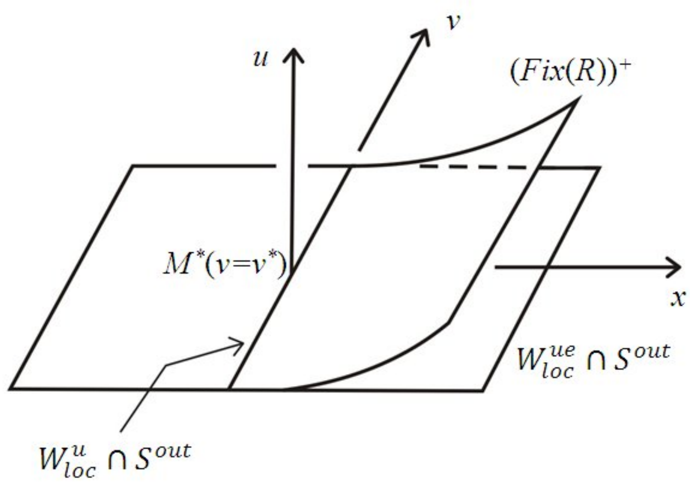

Figura 3.11: Superfície $(Fix(R))^+$ limitada por $W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out}$ e tangente a $W^{ue}_{loc}(\theta) \cap S^{out}$ nos pontos de $W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out}$.

Além disso, provaremos que para uma escolha conveniente de coordenadas (x, y, u, v), as coordenadas deste conjunto são (x, u, v) (lembrando que em S^{out}, $y = \epsilon$). Logo, $(Fix(R))^+$ é dado por uma equação da forma

$$u = \psi(x, v, \mu); \quad x > 0. \tag{3.34}$$

A função ψ é C^1-suave e, em $x = 0$, satistaz

$$\psi \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \equiv 0. \tag{3.35}$$

Em particular, $\psi = o(x)$. Provaremos também que

$$\frac{\partial \psi}{\partial(v,\mu)} = o(x). \tag{3.36}$$

Como $\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-$, comparando as equações (3.34) e (3.32) para $(Fix(R))^+$ e $(Fix(R))^-$, respectivamente, podemos ver que $\mathcal{L}$ é dada pelo sistema

$$\begin{cases} x &= c\left(\mu + (v-v^*)^2\right) + \varphi(\mu, v) \\ u &= \psi(x, v, \mu) \\ x &> 0 \end{cases}, \tag{3.37}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi &= o\left(|\mu| + (v-v^*)^2\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} &= o(1), \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= O(|\mu|) + o(|v-v^*|), \end{aligned} \tag{3.38}$$

para $\mu \longrightarrow 0$, $(v - v^*) \longrightarrow 0$.

De acordo com o Sistema (3.37) vemos que os pontos sobre a curva $\mathcal{L}$ são parametrizados por $(v-v^*)$. A primeira equação deste sistema nos dá a dependência de x em $(v-v^*)$. O gráfico desta dependência é uma curva suave do tipo parábola e, como precisamos selecionar os valores de $(v-v^*)$ para os quais $x > 0$ a fim de obter órbitas principais, segue que:

Para o caso negativo, isto é, para $c < 0$, temos

- Não existem órbitas principais para $\mu > 0$;
- Os v-valores das órbitas principais formam um intervalo $v_1(\mu) < v - v^* < v_2(\mu)$, para $\mu < 0$;
- Os extremos do intervalo $v_1(\mu) < v - v^* < v_2(\mu)$ correspondem a valores homoclínicos $x = 0$. De fato, a segunda equação de (3.37) e (3.35) implicam $\mu = 0$. Logo, estas são v-coordenadas dos pontos da interseção de $(Fix(R))^-$ com $W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out} = \{x = 0, y = \epsilon, u = 0\}$ dadas pelos pontos homoclínicos (3.33).

Para o caso positivo, isto é, para $c > 0$, temos

- Qualquer valor pequeno de $(v - v^*)$ é admissível para $\mu > 0$;

- Os v-valores das órbitas principais admissíveis são $v - v^* < v_1(\mu)$ e $v - v^* > v_2(\mu)$, para $\mu \leq 0$;

Note ainda que:

- $\mathcal{L}$ é vazio para $c < 0$, $\mu \geq 0$, veja Figura 3.12.

- $\mathcal{L}$ consiste de uma componente conexa para $c < 0$, $\mu < 0$ ou $c > 0$, $\mu > 0$, veja Figura 3.13.

- $\mathcal{L}$ consiste de duas componentes conexas para $c > 0$, $\mu \leq 0$, veja Figura 3.14.

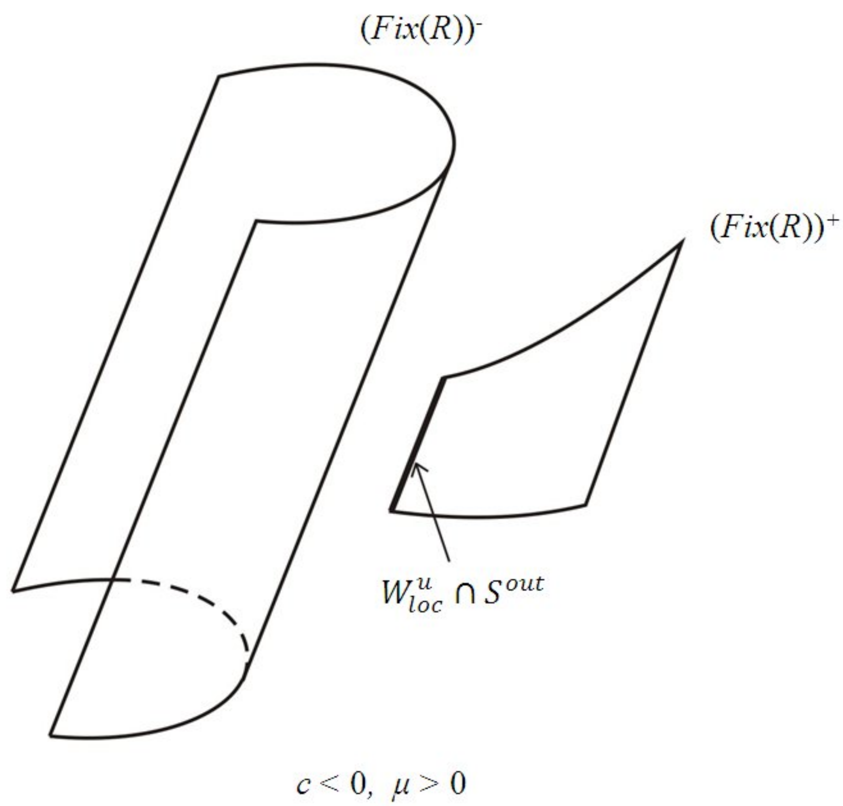

Figura 3.12: O conjunto $\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-$ é vazio para $c < 0$ e $\mu > 0$.

Para completar a demonstração do Teorema (A) resta provar as expansões (3.34)-(3.36) para o conjunto de saída $(Fix(R))^+$. Estudaremos este conjunto via o *método clássico de Shilnikov* que é uma ferramenta eficaz para o estudo do comportamento local. Resumiremos o *método de Shilnikov* (que pode ser encontrado em [11]) pertinente a nosso problema reversível. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e para quaisquer x_0, u_0, y_τ, v_τ tais que $\|x_0\| \leq \epsilon$,

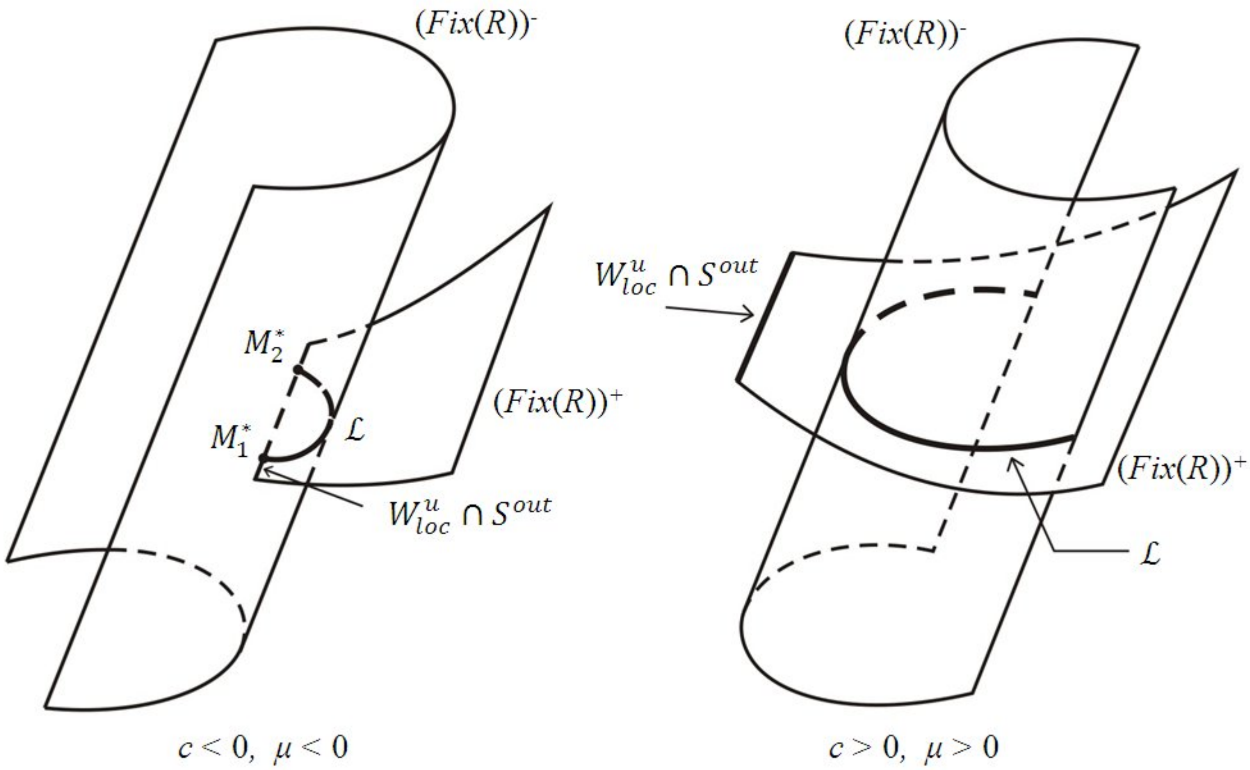

Figura 3.13: O conjunto $\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-$ consiste de uma componente conexa.

$\|u_0\| \leq \epsilon$, $\|y_\tau\| \leq \epsilon$, $\|v_\tau\| \leq \epsilon$, com $\tau \geq 0$ arbitrário, existe uma única solução do chamado *problema de Shilnikov*: encontrar uma órbita $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ do Sistema (3.23) que está inteiramente contida na ϵ-vizinhança de θ e que satisfaz as condições de contorno

$$\begin{array}{rclcrcl} x(0) & = & x_0 & , & u(0) & = & u_0, \\ y(\tau) & = & y_\tau & , & v(\tau) & = & v_\tau. \end{array} \tag{3.39}$$

Veja Figura 3.15.

Além disso, existem funções C^r-suaves (X, Y, U, V) tais que as órbitas do Sistema (3.23) que começam no ponto (x_0, y_0, u_0, v_0) numa pequena vizinhança de θ alcançam um ponto $(x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau)$ em $t = \tau$ se, e somente se,

$$\begin{array}{rcl} x_\tau & = & X(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \\ u_\tau & = & U(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \\ y_0 & = & Y(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \\ v_0 & = & V(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \end{array} \tag{3.40}$$

Devido à reversibilidade do nosso sistema, as relações em (3.40) devem ser simétricas com

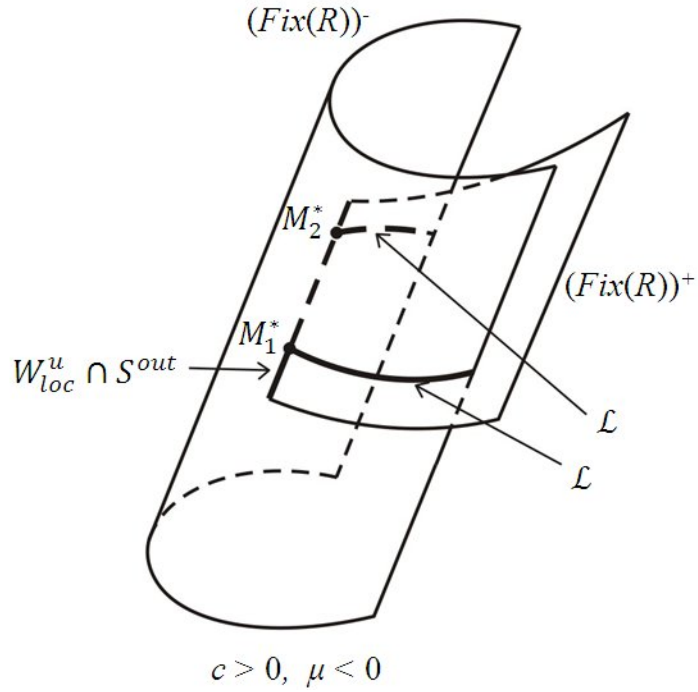

Figura 3.14: O conjunto $\mathcal{L} = (Fix(R))^+ \cap (Fix(R))^-$ consiste de duas componentes conexas.

respeito à transformação

$$(x_0, u_0, y_0, v_0) \longleftrightarrow (y_\tau, v_\tau, x_\tau, u_\tau).$$

Consideremos, por reversibilidade, que $S^{in} = R\,(S^{out}) := \{x = \epsilon\}$. Se $(x_0, y_0, u_0, v_0) \in S^{in}$, $(x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau) \in S^{out}$, segue que

$$R(x_0, y_0, u_0, v_0) = (x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau) \Longrightarrow y_0 = x_\tau,\ x_0 = y_\tau,\ v_0 = u_\tau,\ u_0 = v_\tau.$$

Daí,

$$\begin{aligned} Y(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) &\equiv X(y_\tau, v_\tau, x_0, u_0, \tau) \\ V(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) &\equiv U(y_\tau, v_\tau, x_0, u_0, \tau) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Omitindo o parâmetro μ, a fim de simplificar a notação, afirmamos que o conjunto $(Fix(R))^+ \subset S^{out} = \{y = \epsilon\}$ é dado, localmente, pelos pontos $P = (x_\tau, y_\tau = \epsilon, u_\tau, v_\tau)$ para os quais

$$\left\{ \begin{aligned} x_\tau &= X(\epsilon, v_\tau, \epsilon, v_\tau, \tau) \\ u_\tau &= U(\epsilon, v_\tau, \epsilon, v_\tau, \tau) \end{aligned} \right. , \tag{3.42}$$

onde v_τ pode ser tomado arbitrariamente com valores próximos de v^* e τ tão grande quanto necessário. Em outras palavras, o ponto P pertence a $(Fix(R))^+$ se, e somente se, a órbita

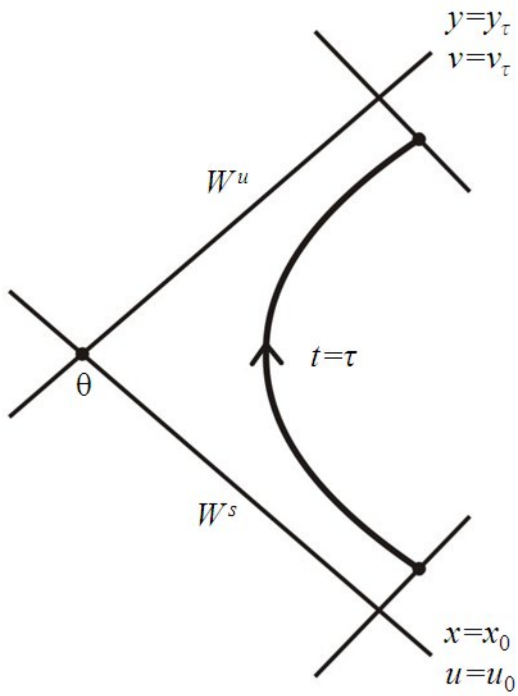

Figura 3.15: Solução do problema de Shilnikov contida na ϵ-vizinhança de θ satisfazendo as seguintes condições de contorno: $x(0) = x_0,\ u(0) = u_0,\ y(\tau) = y_\tau,\ v(\tau) = v_\tau$.

começando em $R(P) = (x_0 = \epsilon, y_0 = x_\tau, u_0 = v_\tau, v_0 = u_\tau)$ em $S^{in} = \{x = \epsilon\} = R\,(S^{out})$ alcança $P \in S^{out}$ após algum tempo $t = \tau$. De fato, considere a órbita para frente começando em algum ponto de $Fix(R)$ próximo do equilíbrio θ e interceptando S^{out} em P. Então, por reversibilidade, a órbita para trás intercepta a seção transversal $S^{in} = R\,(S^{out})$ no ponto $R(P)$, após o mesmo tempo. Veja Figura 3.16. Reciprocamente, qualquer órbita passando através de P e $R(P)$ intercepta $Fix(R)$ próximo de θ "na metade do caminho" entre P e $R(P)$.

Agora, introduzindo

$$(x_0, y_0, u_0, v_0) = R(P) = R(x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau) = (y_\tau, x_\tau, v_\tau, u_\tau) = (\epsilon, x_\tau, v_\tau, u_\tau)$$

em (3.40) obtemos (3.42). Com efeito,

$$x_\tau = y_0 = Y(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \equiv X(y_\tau, v_\tau, x_0, u_0, \tau) = X(\epsilon, v_\tau, \epsilon, v_\tau, \tau)$$

$$u_\tau = v_0 = V(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \equiv U(y_\tau, v_\tau, x_0, u_0, \tau) = U(\epsilon, v_\tau, \epsilon, v_\tau, \tau)$$

Precisamos agora estimar as funções X e U a fim de utilizar (3.42). Para isto, vamos colocar o Sistema (3.23) na forma de Ovsyannikov-Shilnikov (dada pelo Teorema (3.1.1)) próximo de

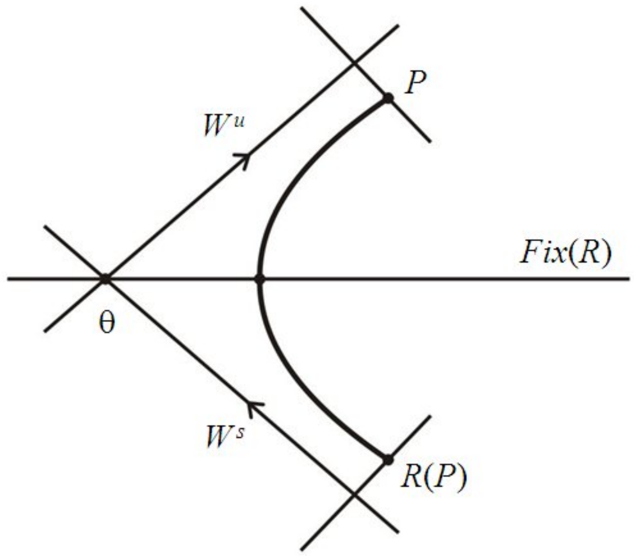

Figura 3.16: $P \in S^{out}$ está em $(Fix(R))^+$ se, e só se, a órbita começando em $R(P) \in S^{in}$ alcança P após algum tempo $t = \tau$: a órbita intercepta $Fix(R)$ próximo de θ "na metade do caminho" entre P e $R(P)$.

θ. Este teorema garante a existência de uma transformação de coordenadas local de suavidade C^{r-1} $(r \geq 2)$ próxima da identidade, tal que o sistema (3.23) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + g_{11}(x,y,v,\mu)x + g_{12}(x,y,u,v,\mu)u \\ \dot{u} &= -\gamma u + g_{21}(x,y,v,\mu)x + g_{22}(x,y,u,v,\mu)u \\ \dot{y} &= y + f_{11}(x,y,u,\mu)y + f_{12}(x,y,u,v,\mu)v \\ \dot{v} &= -\gamma v + f_{21}(x,y,u,\mu)y + f_{22}(x,y,u,v,\mu)v \end{cases}, \tag{3.43}$$

onde g_{ij} e f_{ij} são C^{r-1} com respeito a (x,y,u,v) e

$$\begin{aligned} g_{ij}\big|_{(x,y,u,v)=0} &= 0, \\ g_{1j}\big|_{(y,v)=0} &= 0, \\ g_{i1}\,|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} f_{ij}\big|_{(x,y,u,v)=0} &= 0, \\ f_{1j}\big|_{(x,u)=0} &= 0, \\ f_{i1}\,|_{y=0} &= 0, \end{aligned} \tag{3.45}$$

para todo $i,j = 1,2$.

A vantagem da redução do sistema próximo da Sela θ na forma de Ovsyannikov-Shilnikov é que (3.44) e (3.45) implicam na seguinte estimativa para as solução X, Y, U, V do problema de Shilnikov (3.40) (para confirmar veja [14]).

$$\begin{aligned} X &= e^{-\tau}x_0 + o(e^{-\tau}), \\ Y &= e^{-\tau}y_\tau + o(e^{-\tau}), \\ U &= o(e^{-\tau}), \\ V &= o(e^{-\tau}). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Mais um aspecto da forma de Ovsyannikov-Shilnikov é que a variedade $W^{ue}_{loc}(\theta)$ é tangente ao hiperplano $\{u = 0\}$ em todos os pontos de $W^u_{loc}(\theta)$ nas coordenadas (3.43)-(3.45). Este fato foi usado para as expansões (3.30)-(3.32) como foi comentado no início da demonstração. A fim de provar esta tangência, vamos considerar um órbita arbitrária $\{\widehat{x}(t) = 0,\ \widehat{y}(t),\ \widehat{u}(t) = 0,\ \widehat{v}(t)\}$ em $W^u_{loc}(\theta)$ junto com a linearização do Sistema (3.43) ao longo desta órbita. De (3.44) segue que $g_{ij}\,|_{\widehat{x}=0} \equiv 0$ e, daí, a equação para $\dot{u}$ na linearização toma a forma

$$\dot{u} = (-\gamma + g_{22}(\widehat{x} = 0,\ \widehat{y}(t),\ \widehat{u} = 0,\ \widehat{v}(t)))\, u. \tag{3.47}$$

Note que $u = 0$ é uma solução da Equação (3.47), ou seja, o hiperplano $\{u = 0\}$ ao longo de $W^u_{loc}(\theta)$ é invariante com respeito ao fluxo linearizado.

Podemos encontrar em [8] o seguinte fato: a família de hiperplanos tangentes à variedade $W^{ue}_{loc}(\theta)$ em todos os pontos de $W^u_{loc}(\theta)$ é uma família única, transversal à variedade $W^{ss}_{loc}\{x = 0, y = 0, v = 0\}$ em θ e invariante com relação ao fluxo linearizado. Logo, pela unicidade, o hiperplano $\{u = 0\}$ é tangente à variedade $W^{ue}_{loc}(\theta)$ em todos os pontos de $W^u_{loc}(\theta)$ de fato. Isto completa a prova de (3.31) e (3.32) a respeito da expansão para $(Fix(R))^-$.

As estimativas (3.46) são suficientes para provar as expansões (3.34)-(3.36) para $(Fix(R))^+$, no entanto, estas estimativas são provadas para uma situação geral, não-reversível. Especificamente, a transformação de coordenadas não necessariamente preserva a involução linear R, mas podemos considerá-la linear observando o seguinte: uma vez que a transformação de coordenadas está próxima da identidade, a involução $R = (R^x, R^y, R^u, R^v)$ dada por (3.24) pode ser escrita nas coordenadas transformadas como

$$R(x, y, u, v) = (y, x, v, u) + \ldots, \tag{3.48}$$

onde as reticências indicam termos de ordem superior. Agora, note que, $R(W^s_{loc}(\theta)) = = W^u_{loc}(\theta)$, ou seja, o plano $\{y = 0, v = 0\}$ é localmente aplicado no plano $\{R^x = 0, R^u = 0\}$ por

R. Isto significa que (R^x, R^u) anulam-se simultaneamente com (y, v). Usando (x, u, R^x, R^u) como novas coordenadas (x, u, y, v), R mantém sua forma linear. Observe também que as equações (3.43)-(3.45) preservam suas formas. De fato, como as novas coordenadas $(y, v) = (R^x, R^u)$ anulam-se simultaneamente com as coordenadas (y, v) anteriores, as equações para $\dot{x}$ e $\dot{u}$ preservam suas formas e as identidades em (3.44) persistem nestas coordenadas. Por outro lado, como o campo vetorial transformado desta forma é novamente reversível com respeito à involução linear (3.24), segue que as equações para $\dot{y}$ e $\dot{v}$ em (3.43) também preservam suas formas e as funções f_{ij} satisfazem as identidades

$$f_{ij}(x, y, u, v) = -g_{ij}(y, x, v, u) \tag{3.49}$$

Portanto (3.49) e (3.44) implicam (3.45) e, assim, as equações (3.43)-(3.45) preservam suas formas.

Como acabamos de ver, o sistema na forma de Ovsyannikov-Shilnikov (3.43)-(3.45) pode ser concluído sem destruir a linearidade da involução R. Agora estamos preparados para provar as fórmulas (3.34)-(3.36) para o conjunto de saída $(Fix(R))^+$.

Considerando as estimativas (3.46), podemos reescrever as Equações (3.42) para $(Fix(R))^+$ na forma

$$\begin{cases} x_\tau &= e^{-\tau}\epsilon + o\left(e^{-\tau}\right) \\ u_\tau &= o\left(e^{-\tau}\right) \end{cases} \tag{3.50}$$

Da primeira equação em (3.50), segue que

$$x > 0 \tag{3.51}$$

e

$$\tau = -ln\frac{x}{\epsilon} + o(1), \tag{3.52}$$

onde $o(1)$ é uma função de (x_τ, v_τ, μ) que tende a zero junto com sua primeira derivada para $x_\tau \longrightarrow 0^+$. Para obtermos as fórmulas (3.34)-(3.36) basta substituirmos (3.52) na segunda equação de (3.50). Isto completa a demonstração sobre as órbitas principais.

Falta demonstrar a afirmação sobre a ausência de órbitas k-homoclínicas, para $k \geq 2$. Para isto, considere o conjunto $W \subseteq S^{out}$ dado pelos pontos $z(\tau)$ em S^{out} que pertencem a órbitas por $z(0) \in S^{in}$ próximas de θ, numa vizinhança U da órbita homoclínica reversível primária Γ.

Considerando a imagem de W por Π_{out}, vamos mostrar que

$$z_1 - z_0 \in Fix(-R) \Longrightarrow z_1 = z_0, \tag{3.53}$$

para quaisquer dois pontos $z_1, z_0 \in \overline{\Pi_{out}(W)} \subseteq S^{far}$.

Primeiramente notemos que W é tangente a $W^{ue}_{loc}(\theta)$ ao longo de $W^u_{loc}(\theta)$ em S^{out}. Isto é uma conseqüência da expansão (3.46) de Ovsyannikov-Shilnikov para a mudança de coordenadas de Shilnikov (3.40) e (3.41), uma vez que W é dado pelas coordenadas livres u_0, v_τ, $e^{-\tau}$ e satisfaz

$$\begin{cases} x_\tau &= e^{-\tau}\epsilon + o\left(e^{-\tau}\right) \\ u_\tau &= o(e^{-\tau}) \end{cases} , \tag{3.54}$$

o que prova a tangência de W com $W^{ue}_{loc}(\theta) \cap S^{out} = \{y_\tau = \epsilon, u_\tau = 0\}$ ao longo de $W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out}$.

Agora observe que para pontos z_0 e z_1 tais que $z_0 - z_1 \in T_M W^{ue}(\theta)$ (espaço tangente à variedade $W^{ue}(\theta)$ em M) vale que $z_0 = z_1$. Isto é devido a hipótese H7), a de que $W^{ue}(\theta)$ é transversal ao plano $R^-_M = \{M\} + Fix(-R)$, ou seja, $W^{ue}(\theta)$ é transversal a $Fix(-R)$ na interseção $M = \Gamma \cap S^{far}$. Da tangência entre W e $W^{ue}(\theta)$, (3.53) estende-se a $z_0, z_1 \in \overline{\Pi_{out}(W)}$. Assim, concluímos a nossa afirmação.

Considere $z_0 \in S^{far} \cap W^s(\theta)$ pertencente a uma órbita k-homoclínica, $k \geq 2$ não necessariamente reversível. Como $z_0 \in W^s(\theta)$, a órbita por z_0 tende imediatamente para θ quando passa por z_0 e z_0 numa órbita k-homoclínica implica que sua órbita para trás também tende para θ, segue que $z_0 \in \Pi_{out}(W)$.

Seja $z_1 := R(z_0) \in S^{far} \cap W^u(\theta)$. Temos que

$$-R(z_1 - z_0) = -R(z_1) + R(z_0) = -R(R(z_0)) + z_1 = -z_0 + z_1 \Longrightarrow z_1 - z_0 \in Fix(-R),$$

e ainda, $z_1 \in \overline{\Pi_{out}(W)}$.

Portanto, (3.53) implica que $z_0 = z_1 = R(z_0) \in Fix(R)$. Em particular,

$$z_0 \in W^s(\theta) \cap Fix(R)$$

pertence a uma órbita 1-homoclínica reversível, ao invés de uma k-homoclínica com $k \geq 2$. Isto completa a prova do Teorema (A).

□

3.2.2 A Aplicação de Poincaré

Antes de demonstrarmos o Teorema (B) faremos algumas considerações sobre a geometria necessária.

Considere a aplicação de Poincaré Π_{loc} definida pelas órbitas que começam na seção transversal S^{in} próximas do ponto $R(M^*) = \Gamma \cap S^{in}$ e atingem a seção transversal S^{out} numa vizinhança do ponto $M^* = \Gamma \cap S^{out}$. O domínio de definição de Π_{loc} é $R(W)$, onde $R(W)$ é a R-imagem de W e $W \subseteq S^{out}$ é o conjunto dado pelos pontos $z(\tau)$ em S^{out} que pertencem a órbitas por $z(0) \in S^{in}$ próximas de θ, numa vizinhança U da órbita homoclínica reversível primária Γ, (W foi introduzido na segunda parte da demonstração do Teorema (A), a parte relativa a inexistência de órbitas k-homoclínicas, $k \geq 2$). Note que $R(W)$ é tangente ao plano $\{x = \epsilon, v = 0\}$ ao longo da linha $\{x = \epsilon, y = 0, v = 0\} = W^s_{loc}(\theta) \cap S^{in}$, pois, como já vimos, W é tangente a $W^{ue}_{loc}(\theta) = \{y = \epsilon, u = 0\}$ ao longo de $W^{ue}_{loc}(\theta) \cap S^{out}$. O conjunto W é a imagem da aplicação Π_{loc}. Logo,

$$\Pi_{loc} : R(W) \longrightarrow W.$$

Podemos concluir, usando a expressão de Ovsyannikov-Shilnikov (3.46), dada por

$$\begin{aligned} x_\tau &= X = e^{-\tau}x_0 + o(e^{-\tau}), \\ y_0 &= Y = e^{-\tau}y_\tau + o(e^{-\tau}), \\ u_\tau &= U = o(e^{-\tau}), \\ v_0 &= V = o(e^{-\tau}), \end{aligned}$$

que a aplicação Π_{loc} atua como uma contração forte ao longo do eixo-u e como uma expansão forte sobre o eixo-v. Existem também direções neutras: o eixo-y em S^{in} e o eixo-x em S^{out}. O fluxo ao longo da órbita Γ define, então, a chamada aplicação global

$$\Pi_{glo} : W \subseteq S^{out} \longrightarrow S^{in}.$$

Denotaremos por

$$\Pi := \Pi_{glo} \circ \Pi_{loc} : R(W) \subseteq S^{in} \longrightarrow S^{in}$$

a aplicação de Poincaré composição.

O fluxo ao longo da nossa órbita homoclínica reversível não transversal Γ deve aplicar $W \subseteq S^{out}$ em $\Pi_{glo}(W) \subseteq S^{in}$ da seguinte forma: se $Fix(R)$ se posiciona do lado negativo de $W^u(\theta)$, a imagem de $\Pi_{glo}(W)$ de W parece uma "ferradura". Para $\mu = 0$, a linha $\Pi_{glo}(W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out})$ é tangente a $W^s_{loc}(\theta) \cap S^{in}$ e o domínio $R(W)$ da aplicação de Poincaré Π não intercepta $\Pi_{glo}(W)$ (Figura 3.17-(a)). Para $\mu < 0$, as linhas $\Pi_{glo}(W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out})$ e $W^s_{loc}(\theta) \cap S^{in}$ interceptam-se em dois pontos, $R(M_1^*)$ e $R(M_2^*)$, os quais correspondem aos "loops" homoclínicos reversíveis transversais Γ_1 e Γ_2, respectivamente (Figura 3.17-(b)). De acordo com o Teorema (A), estes pontos são conectados pela linha de pontos fixos da aplicação de Poincaré Π que correspondem às órbitas principais. Tais linhas de pontos fixos estão no interior da interseção entre $R(W)$ e $\Pi_{glo}(W)$ (indicada pela região em preto na Figura 3.17-(b)). Por outro lado, como a linha $\Pi_{glo}(W^u_{loc}(\theta) \cap S^{out})$ está dobrada, a orientação em relação ao eixo-v muda quando nos movemos de $R(M_1^*)$ para $R(M_2^*)$, ou vice-versa. Assim, pontos fixos de Π são selas de Möbius próximos a um destes pontos ($R(M_1^*)$ ou $R(M_2^*)$) e eles são selas não-Möbius próximos do outro ponto.

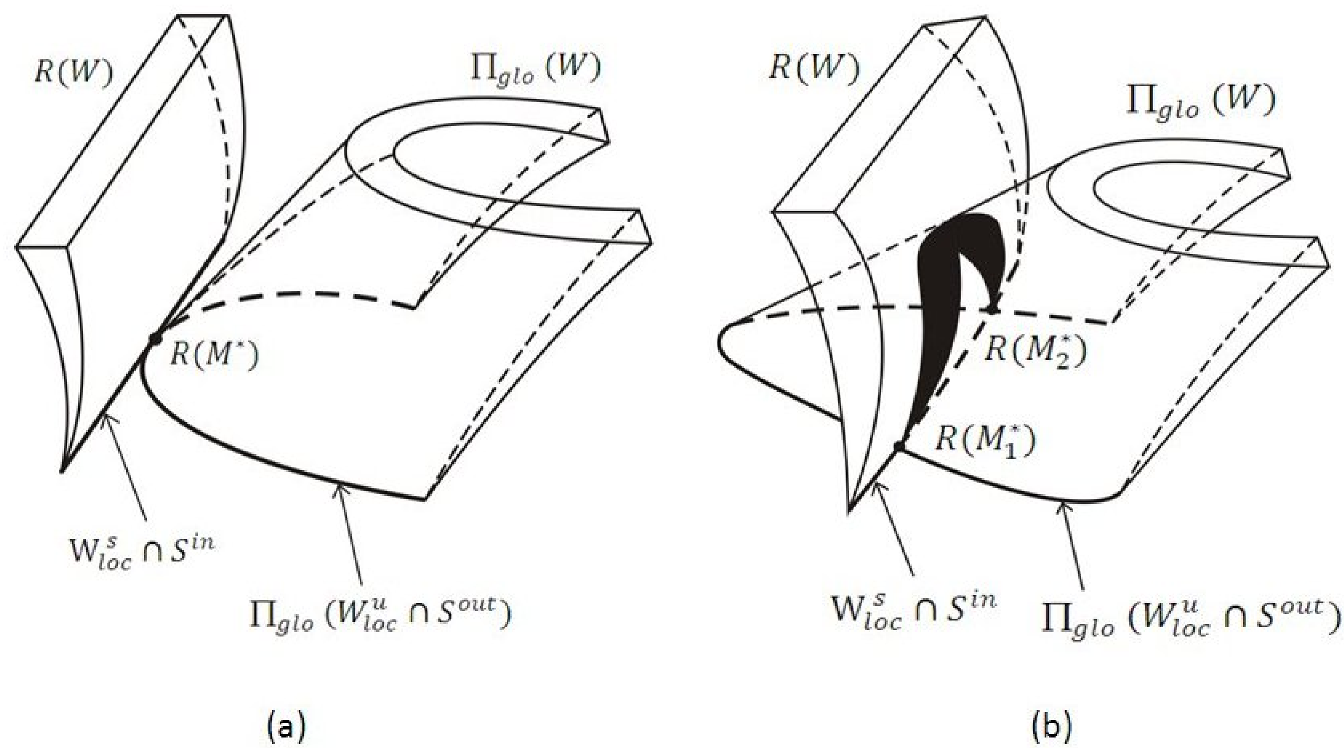

Figura 3.17: Para a órbita não transversal Γ a imagem $\Pi_{glo}(W)$ de W tem a forma de uma "ferradura". Se $Fix(R)$ se posiciona no lado negativo de $W^u(\theta)$ temos: (a) para $\mu = 0$, $\Pi_{glo}(W)$ não intercepta $R(W)$ e (b) para $\mu < 0$, a interseção entre $\Pi_{glo}(W)$ e $R(W)$ forma uma região (parte hachurada da figura) que consiste de pontos fixos da aplicação de Poincaré.

Observe que o multiplicador de Floquet não trivial s deve ser negativo próximo de uma das extremidades da curva de pontos fixos de Π, e positivo próximo da outra extremidade. Então, como $s \neq 0$, s deve deixar o eixo real e se tornar complexo em algum intervalo, o qual corresponde às órbitas periódicas elípticas dadas pelo Teorema (B). A seguir, provaremos algebricamente as afirmações do Teorema (B) sobre as órbitas periódicas elípticas.

3.2.3 Demonstração do Teorema (B)

Lembremos de (3.29) que o espectro de Floquet de uma órbita principal tem a forma $\{s, s^{-1}, 1, 1\}$. Daí, o multiplicador de Floquet não trivial s de uma órbita principal é determindado pela equação do traço

$$tr(C) := s + \frac{1}{s} + 2, \tag{3.55}$$

onde C é a matriz de linearização da aplicação de Poincaré Π ao longo de tal órbita principal. Tal matriz depende somente de v e μ, pois para μ fixado, as órbitas principais são parametrizadas pela v-coordenada do seu ponto de interseção com S^{out}.

Por (3.55), as equações

$$tr(C(v, \mu)) = 4 \tag{3.56}$$

e

$$tr(C(v, \mu)) = 0 \tag{3.57}$$

correspondem aos multiplicadores de Floquet $s = 1$ e $s = -1$, respectivamente. Para provar o Teorema (B) devemos resolver (3.56) para $v = v^+(\mu)$ e (3.57) para $v = v^-(\mu)$, com μ próximo de zero e v próximo de v^*.

Seja $P(x, y = \epsilon, u, v)$ o ponto de interseção de uma órbita principal com a seção transversal S^{out}. O ponto refletido $R(P) = (\epsilon, x, v, u)$ é o ponto de interseção desta órbita com $S^{in} = R(S^{out})$ próximo do equilíbrio Sela θ. As coordenadas x e u são expressas em termos de v e μ pelo sistema

$$\begin{cases} x &= c(\mu + (v - v^*)^2) + o(|\mu| + (v - v^*)^2) \\ u &= o(x) \end{cases} \tag{3.58}$$

para $x \longrightarrow 0$, $v - v^* \longrightarrow 0$ e $\mu \longrightarrow 0$. Para confirmar veja (3.34)-(3.38) na demonstração do Teorema (A). Usaremos também as expressões (3.50) e (3.52) do Teorema (A) dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} x &= e^{-\tau}\epsilon + o(e^{-\tau}) \\ u &= o(e^{-\tau}) \end{cases} \tag{3.59}$$

$$\tau = -ln\frac{x}{\epsilon} + o(1) \tag{3.60}$$

onde τ é o tempo gasto para ir de $R(P)$ ao ponto de saída P em S^{out} e $o(1)$ é função de (x_τ, v_τ, μ). Segue de (3.59) e (3.60) que $\tau \longrightarrow \infty$ para $v \longrightarrow v^*$ e $\mu \longrightarrow 0$.

A órbita de $R(P)$ a P, com tempo orbital τ, permanece dentro da ϵ-vizinhança de θ, enquanto que a órbita de P a $R(P)$ está fora de tal vizinhança. O tempo gasto para ir de P a $R(P)$ será denotado por T. Tal tempo é uniformemente limitado para todo $(\mu, v - v^*)$ pequenos e está próximo do tempo que a órbita homoclínica Γ gasta para ir de M^* a $R(M^*)$ quando $\mu = 0$.

A matriz Floquet C em (3.55)-(3.57) se decompõe no produto de duas matrizes da forma

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

onde A é a linearização em $R(P)$ da aplicação fluxo de tempo τ e B é a matriz de linearização em P da aplicação fluxo de tempo T sobre Γ. Note que as matrizes A e B em (3.61) também dependem de v e μ.

Abaixo estimaremos os elementos das matrizes A e B usando relações entre o tempo τ e T das aplicações fluxos, soluções do problema de Shilnikov, argumentos de reversibilidade e a hipótese $H7$).

Passo 1. Vamos começar avaliando os elementos da matriz A, a linearização em $R(P)$ da aplicação fluxo de tempo τ dada por

$$(x_0, y_0, u_0, v_0) \longmapsto (x_\tau, y_\tau, u_\tau, v_\tau).$$

Como vimos na demonstração do Teorema (A), esta aplicação é determinada pela solução do problema de Shilnikov (3.40) dada por

$$\begin{aligned} x_\tau &= X(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \\ u_\tau &= U(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \\ y_0 &= Y(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \\ v_0 &= V(x_0, u_0, y_\tau, v_\tau, \tau) \end{aligned}$$

Para linearizar a aplicação fluxo tempo τ, diferenciamos (3.40) em τ fixado como segue

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx_\tau \\ du_\tau \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_x & X_u \\ U_x & U_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_\tau \\ dv_\tau \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} dy_0 \\ dv_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_x & Y_u \\ V_x & V_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_u & V_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_\tau \\ dv_\tau \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

onde os símbolos subscritos x, y, u, v indicam derivadas parciais. Como estamos interessados na linearização em $R(P)$, as derivadas devem ser analisadas em $x_0 = \epsilon$, $y_\tau = \epsilon$, $u_0 = v_\tau = v$-coordenada de P, e em $\tau = -ln\dfrac{x}{\epsilon} + o(1)$ dado por (3.60), onde $x = x_\tau$ em (3.60) é dado por (3.58).

Por outro lado, pela definição da matriz A, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx_\tau \\ du_\tau \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_\tau \\ dv_\tau \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} dy_0 \\ dv_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_0 \\ dv_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

Substituindo (3.63) em (3.62), obtemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dy_0 \\ dv_0 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} Y_x & Y_u \\ V_x & V_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_0 \\ dv_0 \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_x & X_u \\ U_x & U_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_\tau \\ dv_\tau \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} X_x & X_u \\ U_x & U_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_0 \\ du_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_0 \\ dv_0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

$$\begin{bmatrix} Y_x & Y_u \\ V_x & V_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

$$\begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

$$\begin{bmatrix} X_x & X_u \\ U_x & U_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ u_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.67}$$

Por (3.64), a matriz $\begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix}$ é inversível , logo

$$det \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix} \neq 0. \tag{3.68}$$

Obtemos a matriz A facilmente de (3.64)-(3.67), como segue

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_x & X_u \\ U_x & U_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} X_x & X_u \\ U_x & U_u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_x & Y_u \\ V_x & V_u \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_y & X_v \\ U_y & U_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix}^{-1}, \\
\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_x & Y_u \\ V_x & V_u \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Sabemos da estimativa da solução do problema de Shilnikov (3.46), na demonstração do Teorema (A), que

$$\begin{aligned}
X &= e^{-\tau} x_0 + o(e^{-\tau}), \\
Y &= e^{-\tau} y_\tau + o(e^{-\tau}), \\
U &= o(e^{-\tau}), \\
V &= o(e^{-\tau}).
\end{aligned}$$

Logo, nas fórmulas (3.69),

$$\begin{aligned}
X_x &= e^{-\tau} + o(e^{-\tau}) > 0, \\
Y_y &= e^{-\tau} + o(e^{-\tau}) > 0,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

e todas as outras derivadas são de ordem $o(e^{-\tau})$.

Como $Y_y \neq 0$, podemos escrever

$$det \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix} = Y_y \Delta, \tag{3.71}$$

onde

$$\Delta = V_v - V_y Y_y^{-1} Y_v = o(e^{-\tau}). \tag{3.72}$$

Por (3.68) e (3.71) segue que $\Delta \neq 0$. Logo, existe Δ^{-1}.

De (3.69)-(3.72), verificamos facilmente que

$$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_y & Y_v \\ V_y & V_v \end{bmatrix}^{-1} = Y_y^{-1}\Delta^{-1} \begin{bmatrix} V_v & -Y_v \\ -V_y & Y_y \end{bmatrix}. \tag{3.73}$$

Lembremos τ é a função de v e de μ em (3.60), onde $x = x_\tau$ é dado por (3.58). Como vimos, todas as derivadas parciais das funções X, Y, U, V em relação a x, y, u e v, excetuando-se X_x e Y_y (dadas por (3.70)), são de ordem $o(e^{-\tau})$. Daí, podemos concluir que $Y_v Y_y^{-1} = o(1)$, $V_y Y_y^{-1} = o(1)$, $V_v Y_y^{-1} = o(1)$ e para $\tau \longrightarrow \infty$, temos

$$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o(\Delta^{-1}) & o(\Delta^{-1}) \\ o(\Delta^{-1}) & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

Substituindo (3.74) em (3.69), todos os outros elementos da matriz $A = (a_{jk})$ são de ordem

$$e^{-\tau} o(\Delta^{-1}) \tag{3.75}$$

para $\tau \longrightarrow \infty$.

Assim, obtemos as estimativas de todos elementos a_{jk} da matriz A.

Passo 2. As estimativas dos elementos da matriz A nos permitem reescrever a equação do traço (3.55) de outra forma (veja (3.78)).

Observando que

$$\begin{aligned} tr(AB) \;=\; & tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) + tr\left(\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}\right) + \\ & + tr\left(\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}\right) + tr\left(\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}\right), \end{aligned} \tag{3.76}$$

obtemos as seguintes estimativas para o traço da matriz de Floquet C

$$tr(C) = tr(AB) = \Delta^{-1}\left(b_{44} + b_{43}\chi_1 + b_{34}\chi_2 + b_{33}\chi_3 + o(e^{-\tau})\right). \tag{3.77}$$

Aqui, χ_1, χ_2, χ_3 são funções de (v, μ) que tendem a zero junto com suas primeiras derivadas para $\tau(v, \mu) \longrightarrow \infty$. Os valores b_{jk}, onde $B = (b_{jk})$ são uniformemente limitados para v próximo de v^* e μ próximo de zero, pela linearização de uma aplicação tempo T com T uniformemente limitado.

Substituindo (3.77) em (3.55), o multiplicador de Floquet não trivial s de uma órbita principal satisfaz:

$$b_{44} + (b_{43}\chi_1 + b_{34}\chi_2 + b_{33}\chi_3) = \Delta\left(s + \frac{1}{s} + 2\right) + o(e^{-\tau}), \tag{3.78}$$

com χ_1, χ_2, χ_3 são de ordem $o(1)$.

Seja (e_x, e_y, e_u, e_v) vetores unitários correspondentes aos eixos coordenados nos pontos P e $R(P)$ e denotemos por $(\cdot, \cdot)$ o produto escalar em $\mathbb{R}^4$. Os coeficientes b_{jk} podem ser calculados por

$$\begin{aligned} b_{44} &= (e_v, B(e_v)), \\ b_{34} &= (e_y, B(e_v)), \\ b_{43} &= (e_v, B(e_y)), \\ b_{33} &= (e_y, B(e_y)). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Passo 3. Calcularemos as expansões assintóticas para estes b_{jk}, para todo $j, k = 3, 4$, a fim de obter uma nova expressão para a equação traço (3.78).

Seja $B_{1/2}$ a linearização da aplicação fluxo tempo $T/2$ no ponto $P \in S^{out}$. Esta aplicação fluxo move o ponto P a algum ponto Q em $Fix(R)$, Q próximo de $M = \Gamma \cap Fix(R)$. Pela reversilidade, segue que

$$B = RB_{1/2}^{-1}RB_{1/2}. \tag{3.80}$$

A fim de facilitar o cálculo de $B_{1/2}$ introduziremos coordenadas adequadas $(\xi_1, \xi_2, \eta, \zeta)$ próximo do ponto M tal que o campo vetorial é paralelo ao eixo-ζ , o plano $Fix(R)$ é dado por $\{\eta = 0, \zeta = 0\}$ (ambos próximo de M), a seção transversal S^{far} é $\zeta = 0$ e o plano $R_M^- = \{M\} + Fix(-R)$ é $\{\xi_1 = 0, \xi_2 = 0\}$; (veja Figura 3.18). Nas novas coordenadas a involução R atua como

$$(\xi_1, \xi_2, \eta, \zeta) \longmapsto (\xi_1, \xi_2, -\eta, -\zeta). \tag{3.81}$$

O tempo pode ser reescalonado e, então, a seção transversal $S^{out} = \{y = \epsilon\}$ é aplicada na seção transversal $S^{far} = \{\zeta = 0\}$ por uma aplicação tempo Poincaré identicamente igual a $T/2$ e assim, a aplicação fluxo tempo $T/2$ restrita a S^{out} coincide com a aplicação de Poincaré Π_{loc}. Como o vetor $e_v \in S^{out}$, a imagem $B_{1/2}(e_v)$ pertence a S^{far}. Logo, podemos escrever

$$B_{1/2}(e_v) = \alpha e_\eta + \beta_1 e_{\xi_1} + \beta_2 e_{\xi_2}, \tag{3.82}$$

onde, α e $\beta_{1,2}$ são funções de μ e das coordenadas (x, u, v) de P. Aqui, os vetores $(e_{\xi_1}, e_{\xi_2}, e_\eta, e_\zeta)$ são unitários ao longo dos eixos coordenados correspondentes em Q.

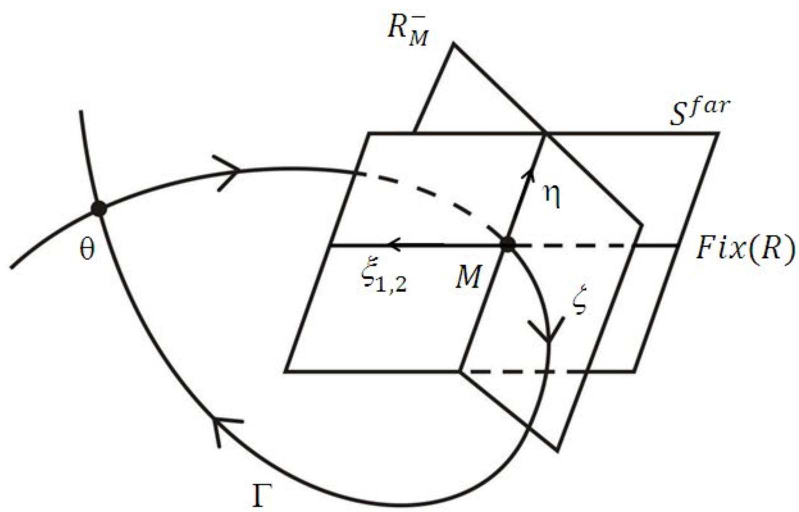

Figura 3.18: Novas coordenadas $(\xi_1, \xi_2, \eta, \zeta)$ introduzidas próximas de M.

Por (3.81) e (3.82), segue que

$$\begin{aligned} RB_{1/2}(e_v) &= R(\alpha e_\eta) + R(\beta_1 e_{\xi_1}) + R(\beta_2 e_{\xi_2}) = -\alpha e_\eta + \beta_1 e_{\xi_1} + \beta_2 e_{\xi_2} = \\ &= -\alpha e_\eta + B_{1/2}(e_v) - \alpha e_\eta = B_{1/2}(e_v) - 2\alpha e_\eta, \end{aligned} \tag{3.83}$$

e, assim,

$$B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_v) = e_v - 2\alpha B_{1/2}^{-1}(e_\eta). \tag{3.84}$$

Agora, obtemos de (3.79) e (3.80)

$$\begin{aligned} b_{44} &= (e_v, B(e_v)) = (R(e_v), RB(e_v)) = \left(R(e_v), B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_v)\right) = \\ &= \left(e_u, e_v - 2\alpha B_{1/2}^{-1}(e_\eta)\right) = -2\alpha \left(e_u, B_{1/2}^{-1}(e_\eta)\right). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Analogamente,

$$b_{34} = -2\alpha \left(e_x, B_{1/2}^{-1}(e_\eta)\right). \tag{3.86}$$

Observe que o fator $\left(e_u, B_{1/2}^{-1}(e_\eta)\right)$ é não nulo. De fato, se tal fator fosse zero, o vetor $B_{1/2}^{-1}(e_\eta)$ pertenceria ao hiperplano $\{u = 0\}$, sendo $\{u = 0\}$ tangente a $W^{ue}_{loc}(\theta)$ ao longo de $W^{u}_{loc}(\theta)$. Mas, como o vetor $B_{1/2}^{-1}(e_\eta)$ é tangente à linha $\Pi_{out}^{-1}(R_M^- \cap S^{far}) \subseteq S^{out}$, onde $R_M^- \cap S^{far} = \{\xi_{1,2} = 0, \zeta = 0\}$, teríamos uma contradição com a transversalidade de $W^{ue}(\theta)$ e R_M^- dada pela hipótese $H7$).

O objetivo agora é estimar os elementos b_{43} e b_{33} em (3.79). Vamos mostrar que eles são da forma

$$b_{43} = -\frac{\dot v}{\dot y} b_{44} + O(e^{-\tau}), \tag{3.87}$$

$$b_{33} = -\frac{\dot v}{\dot y} b_{34} + O(e^{-\tau}). \tag{3.88}$$

De fato, a linearização da aplicação fluxo $B_{1/2}$ move a derivada temporal em P para a derivada temporal em Q:

$$B_{1/2}\left(\dot x e_x + \dot y e_y + \dot u e_u + \dot v e_v\right) = e_\zeta, \tag{3.89}$$

onde $(\dot x, \dot y, \dot u, \dot v)$ em P são dados na forma de Ovsyannikov-Shilnikov (3.43) que segue

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot x &=& -x + g_{11}(x,y,v,\mu)x + g_{12}(x,y,u,v,\mu)u \\ \dot u &=& -\gamma u + g_{21}(x,y,v,\mu)x + g_{22}(x,y,u,v,\mu)u \\ \dot y &=& y + f_{11}(x,y,u,\mu)y + f_{12}(x,y,u,v,\mu)v \\ \dot v &=& -\gamma v + f_{21}(x,y,u,\mu)y + f_{22}(x,y,u,v,\mu)v \end{array}\right. ,$$

com (x,u) como em (3.58), (3.59) e com $y = \epsilon$. Observe que $\dot x$ e $\dot u$ são de ordem $O(e^{-\tau})$ e $\dot y$ não se anula.

Por (3.81), (3.89)

$$\begin{array}{rcl} B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}\left(\dot x e_x + \dot y e_y + \dot u e_u + \dot v e_v\right) &=& B_{1/2}^{-1} R(e_\zeta) \;= \\ &=& -B_{1/2}^{-1}(e_\zeta) - \left(\dot x e_x + \dot y e_y + \dot u e_u + \dot v e_v\right). \end{array} \tag{3.90}$$

Avaliando a componente de $e_u = R(e_v)$, temos

$$\begin{array}{l} \dot y\left(e_u, B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_y)\right) \;+\; \dot v\left(e_u, B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_v)\right) + \dot x\left(e_u, B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_x)\right) + \\ \qquad + \;\dot u\left(e_u, B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_u)\right) \;=\; -\dot u. \end{array} \tag{3.91}$$

Como $\dot x$ e $\dot u$ são de ordem $O(e^{-\tau})$ e $\dot y \neq 0$, obtemos

$$\left(e_u, B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_y)\right) = -\frac{\dot v}{\dot y}\left(e_u, B_{1/2}^{-1} R B_{1/2}(e_v)\right) + O(e^{-\tau}). \tag{3.92}$$

Vamos agora comparar (3.79) e (3.80) com (3.92) para obter a estimativa (3.87). De fato,

$$\left(e_u, B_{1/2}^{-1}RB_{1/2}(e_y)\right) = -\frac{\dot v}{\dot y}\left(e_u, B_{1/2}^{-1}RB_{1/2}(e_v)\right) + O(e^{-\tau}) \Longrightarrow \left(R(e_u), RB_{1/2}^{-1}RB_{1/2}(e_y)\right) =$$
$$= -\frac{\dot v}{\dot y}\left(R(e_u), RB_{1/2}^{-1}RB_{1/2}(e_v)\right) + O(e^{-\tau}) \Longrightarrow (e_v, B(e_y)) = -\frac{\dot v}{\dot y}(e_v, B(e_v)) + O(e^{-\tau}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b_{43} = -\frac{\dot v}{\dot y} b_{44} + O(e^{-\tau}).$$

Analogamente, a estimativa de (3.88) segue de (3.90) avaliando a componente de $e_x = R(e_y)$.

Passo 4. Tendo encontrado as estimativas dos elementos b_{jk}, para todo $j, k = 3, 4$ no Passo 3, podemos agora substituir as expressões (3.85)-(3.88) de b_{jk} na condição (3.78) que contém um multiplicador de Floquet não trivial s. Feito isso, podemos reescrever a equação do traço (3.78) na forma

$$\alpha(x, u, v, \mu) = o(e^{-\tau}), \tag{3.93}$$

para qualquer s finito dado.

Aqui, (x, u, v) são as coordenadas do ponto P, onde a órbita principal intercepta S^{out} (veja (3.58), (3.59)), o valor τ, que é o tempo gasto para ir de P a $R(P)$, é dado por (3.60) e a função α é a η-componente do vetor $B_{1/2}(e_v)$ (veja (3.82)). Note que s é absorvido pelo termo $o(e^{-\tau})$, com entrada s somente via

$$\Delta\left(s + \frac{1}{s}\right),$$

e $\Delta = o(e^{-\tau})$ por (3.72).

Vamos provar também que

$$\begin{aligned} \alpha\left(x = 0, u = 0, v = v^*, \mu = 0\right) &= 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(x = 0, u = 0, v = v^*, \mu = 0\right) &\neq 0. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Com efeito, o vetor $B_{1/2}(e_v)$ torna-se tangente a $\Pi_{out}\left(W^{ue}_{out}(\theta) \cap S^{out}\right)$ para P tendendo a M^*, isto é, para $\mu \longrightarrow 0$ e $v \longrightarrow v^*$. Como $W^u(\theta) \cap S^{far}$ é tangente ao plano $\{\eta = 0\}$ e tal tangência é quadrática, para $\mu = 0$, isto implica (3.94).

Por (3.94) podemos expandir a função α em torno da origem como segue

$$\alpha\left(x, u, v, \mu\right) = K_1\left(v - v^*\right) + K_2\mu + K_3 x + K_4 u + o\left(|v - v^*| + |\mu| + |x| + |u|\right), \tag{3.95}$$

onde $K_1 \neq 0$. Usando a expressão (3.59) para x e u, a qual é dada por

$$\begin{aligned} x &= e^{-\tau}\epsilon + o(e^{-\tau}) \\ u &= o(e^{-\tau}) \end{aligned}$$

podemos reescrever a expressão para α (3.95) na forma

$$\alpha\left(x,u,v,\mu\right)=K_1\left(v-v^*\right)+K_2\mu+K_3\epsilon e^{-\tau}+o\left(\left|v-v^*\right|+\left|\mu\right|+e^{-\tau}\right), \tag{3.96}$$

Assim, a Equação (3.93) é dada por

$$v-v^*=-\frac{K_2}{K_1}\mu-\frac{K_3}{K_1}e^{-\tau}\epsilon+o\left(e^{-\tau}+\left|\mu\right|\right). \tag{3.97}$$

Substituindo (3.97) nas expressões (3.58) e (3.59), obtemos

$$x\approx e^{-\tau}\epsilon\approx c\mu, \tag{3.98}$$

para $\mu\longrightarrow 0$.

Temos de (3.97) e (3.98) que, para $\mu\longrightarrow 0$, a condição da presença do multiplicador de Floquet não trivial s se reduz assintoticamente a

$$v-v^*=-\frac{K_2+K_3c}{K_1}\mu+o(\mu),\quad c\mu>0, \tag{3.99}$$

para qualquer s finito dado. Aqui, s também só entra no termo $o(\mu)$, como antes. Fazendo $s=\pm 1$, obtemos as curvas $v=v^{\pm}(\mu)$ que separam regiões selas e elípticas no diagrama bifurcação da Figura 3.9. Tais curvas limitam a região de elipticidade cuspidal e se bifurcam ao longo da mesma tangente. De fato, por (3.99), as curvas $v^{\pm}(\mu)$ são tangentes em $\mu=0$ e $v=v^*$.

Note que as curvas dadas por (3.99) não interceptam nenhuma outra para diferentes s, pois, uma órbita principal tem somente um par de multiplicadores de Floquet não trivial.

Além disso, para qualquer s finito e para qualquer μ pequeno, existe somente um v satisfazendo (3.99). Assim, a parte real de s, Re(s), depende monotonicamente de v para cada μ fixado. Logo, $|Re(s)|<1$ para $v\in(v^-(\mu),v^+(\mu))$, e $|Re(s)|>1$ para $v\notin(v^-(\mu),v^+(\mu))$. Portanto, a região $v\in(v^-(\mu),v^+(\mu))$ corresponde a órbitas periódicas elípticas e a região $v\notin(v^-(\mu),v^+(\mu))$ a órbitas periódicas selas. Isto completa a demonstração do Teorema (B).

□

Bibliografia

[1] Arrowsmith, D. K. & Place, C. M., *An introduction to Dynamical Systems*, Cambridge, University Press, 1990.

[2] Champneys, A. R., *Homoclinic Orbits in Reversible Systems and their Applications in Mechanics, Fluids and Optics*, Physica D, Vol. 112, (158 – 186), 1998.

[3] Champneys, A. R., *Subsidiary Homoclinic Orbits to a Saddle-Focus for Reversible Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 4, (1447 – 1482), 1994.

[4] Devaney, R.L., *Reversible Diffeomorphisms and Flows*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 218, (89 – 113), 1976.

[5] De Vogelaere, R., *On the Structure of Symmetric Periodic Solutions of Conservative Systems, with Aplications*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 4, Princeton University Press, 1958.

[6] Fiedler, B. & Turaev, D., *Coalescence of Reversible Homoclinic Orbits Causes Elliptic Resonance*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, (1007 – 1027), 1996.

[7] Härterich J., *Cascades of Reversible Homoclinic Orbits to a Saddle-Focus Equilibrium*, Physica D, Vol. 112, (187 – 200), 1998.

[8] Hirsch, M., Pugh, C. & Shub, M., *Invariant Manifolds*, Volume in Lecture Notes Mathematics, 583, Springer-Verlag, 1977.

[9] Holmes, P. J., Mielke, A. & O'Reilly, O., *Cascades of Homoclinic Orbits to, and Chaos Near, a Hamiltonian Saddle-Center*, J. Dyn. Diff., Vol. 4, (95 – 126), 1992.

[10] Lamb, J.S.W., *Reversing Symmetries in Dynamical Systems*, PhD Thesis, University of Amsterdam, 1994.

[11] Lamb, J.S.W. & Roberts J., *Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey*, Physica D, Vol 112, (1 – 39), 1988.

[12] Marchal, C., *The Three-Body Problem*, Elsevier, Amsterdam, 1970.

[13] Montgomery, D. & Zippin, L., *Topological Transformation Groups*, Interscience, New York, 1955.

[14] Ovsyannikov, I. M. & Shilnikov, L. P., *Systems with a Homoclinic Curve of a Multidimensional Saddle-Focus and Spiral Chaos*, Mathematics of the USSR Sbornik, Number 2, Vol. 73, (415 – 443), 1992.

[15] Quispel, G. R. W., *Chaos and Time Reversal Symmetry: an Introduction, in: Nonlinear Dynamics and Chaos*, Proc. Fourth Phisics Summer School, Singapore, (135 – 151), 1991.

[16] Shilnikov, L. P., *On a Poincaré-Birkhoff Problem*, Mathematics of the USSR Sbornik, Vol. 3, Number 3, (353 – 371), 1967.

[17] Shilnikov, L. P., Shilnikov A. L., Turaev, D. V., & Chua, L. O., *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics* , Part I, World Scientific, Series A, Vol. 4, 1998.

[18] Verhulst, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Second Edition, Springer, 1996.

[19] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 1990.