Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Equações Diferenciais, Separação de Variáveis e o Problema de Forças Centrais

Márcia Mayumi Nakamura

Fevereiro de 2011

Equações Diferenciais, Separação de Variáveis e o Problema de Forças Centrais

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por **Márcia Mayumi Nakamura**
e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de fevereiro de 2011.

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Prof. Dr. Márcio José Menon
Prof. Dr. Daniel Juliano Pamplona da Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação
Científica, UNICAMP, como requisito parcial
para obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Nakamura, Márcia Mayumi

N145e Equações diferenciais, separação de variáveis e o problema de forças centrais/Márcia Mayumi Nakamura-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Variáveis (Matemática). 2.Bessel, Funções de. 3.Equações diferenciais parciais. 4.Frobenius, Método de. I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Differential equations, separating variables and the central forces problem

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Variables (Mathematics). 2. Bessel functions. 3. Partial differential equations

Área de concentração: Equações diferenciais

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcio Jose Menon (IFGW - UNICAMP)
Prof. Dr. Daniel Juliano Pamplona da Silva (UNIFAL)

Data da defesa: 18/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 18 de fevereiro de 2011
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof. (a). Dr (a). MARCIO JOSE MENON

Prof. (a). Dr (a). DANIEL JULIANO PAMPLONA DA SILVA

Em memória daquele que me deixou os maiores ensinamentos: meu pai.

Agradecimentos

Não basta ensinar ao homem uma especialidade, porque se tornará assim uma máquina utilizável e não uma personalidade. É necessário que adquira um sentimento, senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo. - Albert Einstein.

Num mundo impessoal, como o que vivemos, arrisquei, nestes três anos, a me aperfeiçoar – como que artesanalmente – pelo mundo dos números. Não contava com tantas provações, mas o resultado aqui se encontra. Quero, aqui, registrar minha gratidão a todos que fazem parte deste momento.

Começo agradecendo àqueles que são minha referência, minha base de respeito, de carinho e de integridade, minha mãe Katia e meu pai Amaro.

Em seguida, à minha família que soube entender minha ausência e me apoiar mesmo de longe: Alessandra Nakamura, Ana, Leila, Sílvia, Paloma, Solange e Eduardo Taquecita, Franco, Vanessa, Angela e Kioshi Yamakawa, Eduardo, André, Ricardo, Eliza e Jorge Horai, Yomiko e Chuji Horai, Sato e Gisaburo Nakamura.

Ao meu querido orientador, Edmundo Capelas, com quem tive o privilégio de estudar. Sempre muito compreensivo, paciente e solícito.

A minha família de coração: Luiz Krempel, Teresinha Ronchetti, Bruno Giacomini e Bruno Honório por serem minha dose diária de companheirismo.

Ao Cláudio Mucelin, meu professor, amigo, padrinho, colega de trabalho e de mestrado. Responsável por grande parte das minhas conquistas.

Ao Ricardo Trotti, que me acolheu e recuperou a auto-estima de onde parecia não mais existir.

À Juliana Lopes, por sempre me ajudar com as palavras.

Ao João Pereira de Sá Neto, por ter participado ativamente nessa dissertação.

Ainda pude contar com o carinho de Ronaldo Luggli, Ricardo Orlando, Marina Piccolo, Luciana Galo, Daniel Perez, Marcelo Alves, Luiz Massoni, Celso Acciolli, Marcelo Jerry, Davi Rissetti, Marcelo Dias, Marli Curioni e Aldair Falavigna. Obrigada por fazerem meus dias mais divertidos e me provarem que ainda existe amizade na nossa área.

Agradeço ainda aos amigos: Giseli Mucelin, Michelle Kuroda, Heloísa Fascina, Daniela Martins, Pedro, Natália, Nancy e Vinícius Avanci, Ester Rosa, Roberto Limberger, Roberta Salomão, Daniel Moriente e Gustavo Martins. Vocês são especiais!

Aos meus alunos, coordenadores e diretores, que sempre me incentivaram.

Por fim, agradeço a Deus, a essência absoluta, por não ter me deixado faltar forças e discernimento em momento algum dessa caminhada!

Resumo

Efetuamos um estudo sistemático envolvendo o caso geral de uma equação diferencial parcial, linear, de segunda ordem, com n variáveis independentes. Particularizamos para o caso bidimensional, $n = 2$, duas variáveis independentes. Utilizamos o método de separação de variáveis para conduzir esta equação diferencial parcial a um conjunto de duas equações diferenciais ordinárias. Introduzimos o método de Frobenius a partir de uma particular equação diferencial ordinária, a chamada equação de Bessel. Como aplicação, apresentamos e discutimos o chamado problema de forças centrais, em particular, estudamos o problema de Kepler de onde emerge naturalmente o problema de classificação de uma cônica, onde a elipse merece tratamento destacado.

Abstract

We develop a systematic study involving the general case of a second order linear partial differential equation with n independent variables. We particularize to the bidimensional case, $n = 2$, involving two independent variables. In this case, we present the method of separating variables to develop the partial differential equation into a set of two differential ordinary equations. We introduce the Frobenius method using a particular ordinary differential equation, the so-called Bessel equation. As an application, we present and discuss the so-called central forces and as particular case, we study the Kepler problem from which naturally emerges the problem of the classification of a conic, where ellipse deserves special treatment.

Sumário

Introdução

É muito frequente, na tentativa de modelar um fenômeno ou um experimento qualquer, obter equações que envolvam *variações* das quantidades presentes. Assim, as leis que regem esses fenômenos são traduzidas por equações de variações. Quando essa variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas de *equações diferenciais*, por outro lado, se as variáveis envolvidas forem discretizadas, então temos as *equações de diferenças*.

Neste texto, nos focamos nas Equações Diferenciais (EDs), as quais têm extrema importância não só como teoria matemática, mas também como ferramenta de análise indispensável no exercício da atividade profissional e científica em diversas áreas, apenas para mencionar, dentre outras, Física, Química, Biologia, Economia e Tecnologia contemporânea.

Devido a esta vasta área de aplicação, o estudo de uma ED, em geral, passa por diversas divisões e/ou classificações no sentido de particularizar tal estudo. Primeiramente, divide-se este estudo em duas grandes classes: Equação Diferencial Ordinária (EDO), com apenas uma variável independente e Equação Diferencial Parcial (EDP), com mais de uma variável independente.

Ainda mais, estas duas classes, por sua vez, são subdivididas em duas outras envolvendo a linearidade, isto é, EDO e EDP lineares e não-lineares.

A origem, os objetivos e os métodos matemáticos envolvendo as equações diferenciais parciais (EDPs) estão ligados tradicionalmente aos problemas da Física-Matemática. Por exemplo, a elasticidade e a dinâmica dos fluidos, que tratam de fenômenos concretos, tiveram o seu desenvolvimento alavancado a partir da teoria matemática destas equações. Além disto, as mesmas equações que estudamos em elasticidade e dinâmica dos fluidos reaparecem seguidas vezes, nas mais variadas áreas da Física e da Matemática Aplicada, em geral, demonstrando, assim, o poder de síntese e a admirável eficiência da Matemática no estudo dos fenômenos da natureza. Com isso, diversos problemas matemáticos abstratos e de significado, às vezes, obscuro na sua concepção física original, adquirem uma interpretação concreta quando focados do ponto de vista da mecânica, por exemplo.

A fim de justificar a importância das EDs, mencionamos algumas destas equações. São três as clássicas EDPs lineares e de segunda ordem apresentadas, em geral, através de seus protótipos: equação de onda, equação de difusão e equação de Laplace. A equação de onda, equação do tipo hiperbólico, descreve movimentos oscilatórios dentre eles, oscilações de uma membrana circular e a chamada equação do telégrafo. A equação de difusão, dentre elas a equação do calor, equação do tipo parabólico, estuda, por exemplo, o fluxo magnetohidrodinâmico em um meio poroso. A equação de Laplace, equação do tipo elíptico, estuda, dentre outras, a determinação de distribuições estáveis de temperatura, isto é, fluxo estacionário de calor [8].

Como protótipo de EDPs lineares, de segunda ordem do tipo misto, mencionamos a equação de Tricomi, associada a problemas advindos da aerodinâmica e a equação de Laplace generalizada no universo de de Sitter [13].

Enfim, apenas para mencionar, destacamos a chamada equação de Riccati, uma ED não-linear de primeira ordem; a equação de Schrödinger, advinda da Mecânica Quântica, que contém um coeficiente não real; as equações de Maxwell, um conjunto de equações diferenciais lineares, dentre outras. Mais recente emergem as chamadas ED fracionárias onde é admitida a derivada de ordem não inteira e que descrevem, dentre outros, problemas envolvendo sub e super difusão.

O objetivo do presente trabalho é efetuar um estudo sistemático das EDPs lineares e de segunda ordem com n variáveis independentes, a fim de particularizarmos para o caso $n = 2$, isto é, duas variáveis independentes.

O presente trabalho está disposto na seguinte forma: No primeiro capítulo apresentam-se as EDPs lineares e de segunda ordem, com n variáveis independentes e a respectiva equação transformada, que permite a classificação quanto ao tipo, importante para discernirmos como afrontar corretamente um particular problema envolvendo condições sejam elas iniciais e/ou de contorno. No segundo capítulo, introduzimos as EDPs lineares de segunda ordem com duas variáveis independentes e a respectiva classificação quanto ao tipo. No capítulo três, discute-se o método de Fourier, consistindo da metodologia dos três passos, a saber: separação de variáveis, condições de contorno e solução da EDP de partida. Mais uma vez, aqui, discutimos o caso geral de uma EDP linear, homogênea, com duas variáveis independentes.

Agora, após a aplicação do método de separação de variáveis, conduzimos uma EDP linear de segunda ordem e com duas variáveis independentes a um conjunto de duas EDOs lineares de segunda ordem onde, no caso geral, os coeficientes podem depender da variável independente, isto é, coeficientes não constantes. Neste caso em que os coeficientes não são constantes apresentamos o método de Frobenius, que pode ser interpretado como uma generalização do método de Taylor, envolvendo uma série de potências. O método de Frobenius é bastante geral e potente pois fornece, em geral, pelo menos uma solução da EDO. O caso em que os coeficientes são constantes será importante para discutir a EDO que emerge quando do estudo das órbitas de uma cônica.

Como uma aplicação, dedicamos o capítulo cinco ao estudo das chamadas forças centrais onde discutimos, como caso particular, o chamado problema de Kepler, cujas órbitas elípticas emergem de forma natural. Este problema é abordado através das coordenadas polares no plano de onde se recuperam as três leis de Kepler, associadas ao movimento planetário, em particular a lei das áreas. A importância desta aplicação reside no fato de que necessitamos calcular a área de uma elipse. Este tópico, área da elipse, pode ser entendido como uma generalização da área de um círculo, esta apresentada de forma direta no Ensino Médio. Finalmente, apresentamos as conclusões. Um apêndice completa o trabalho, onde discutimos o problema da integração explícita da equação das órbitas bem como explicitamos o cálculo da área de uma elipse.

Capítulo 1

Equações diferenciais

Neste capítulo apresentamos um breve histórico das EDs enfatizando as EDPs para as quais apresentamos a equação transformada que permite discutir, de forma quase que imediata, o tipo da referida EDP.

1.1 Um breve histórico

O cálculo diferencial e integral e as EDs nasceram juntos e os dois teoremas básicos do cálculo (teorema fundamental do cálculo e o teorema do valor médio) estão intimamente relacionados à solução da ED mais simples e importante, a saber:

$$x'(t) = f(t).$$

Entretanto, não há dúvidas de que a inspiração inicial para o estudo das EDs veio da Mecânica. Diversos problemas como o movimento dos planetas, a catenária (formato de uma corda pendente presa nas extremidades) e os estudos da oscilação do pêndulo, por exemplo, já haviam sido estudados empiricamente por homens como J. Kepler (1571 - 1630), L. da Vinci (1452 - 1519), G. Galilei (1564 - 1642) e C. Huygens (1629 - 1695). Porém, faltava a estes, teoria matemática capaz de modelar os fenômenos.

Com o aparecimento do cálculo, no final do século XVII, por obra de I. Newton (1642 - 1727) e G. W. Leibniz (1646 - 1716), inúmeros problemas mecânicos, incluindo estes três, puderam ser, então, modelados matematicamente na forma de EDs.

Emerge a questão: como resolver tais problemas? Vários deles foram resolvidos explicitamente e de maneira elegante por matemáticos de extraordinária habilidade operacional, como Jacques Bernoulli (1655 - 1705), Jean Bernoulli (1667 - 1748), Nicholas Bernoulli (1695 - 1726), Daniel Bernoulli (1700 - 1782) e, principalmente, por um de seus alunos, o brilhante L. Euler (1707 - 1783) cuja obra (incompleta) preenche 74 grandes volumes [1].

Apesar disso, com o tempo descobriu-se que não seria possível obter métodos gerais de resolução explícita (em termos de funções elementares e suas integrais) para as EDs. A base rigorosa do cálculo ainda não havia sido lançada no século XVIII, mas os resultados surpreendentes até então não deixavam dúvidas de que esta teoria matemática estava no caminho correto. Por outro lado, não havia como esquecer a tradição matemática grega, tal como representada pelo padrão de perfeição e rigor dos *Elementos* de Euclides (300 a.C.). Essa tradição forçava uma comparação desfavorável à situação do cálculo que inquietava e desafiava uma boa parte dos matemáticos no final do século XVIII.

Essa inquietação aumentava à medida que alguns resultados contraditórios surgiam e as disputas escapavam invariavelmente para o campo metafísico, onde os critérios matemáticos perdem sua jurisdição. Era inevitável, portanto, que uma parte do esforço matemático fosse dedicado para esclarecer os fundamentos teóricos do cálculo e procurar outros métodos de estudo das EDs que não a sua solução explícita.

É neste período que se destaca A. L. Cauchy (1789 - 1925), o qual demonstrou rigorosamente, pela primeira vez, e por três métodos diferentes, a existência de soluções para uma vasta classe de EDs que inclui essencialmente todos os modelos conhecidos.

Após o início do século XIX os métodos gerais de resolução explícita das EDs perderam a sua proeminência e nenhum método de maior relevância foi desenvolvido até o aparecimento do cálculo operacional de O. Heaviside (1850 - 1925) e a transformada de Laplace no final do século XIX.

Iniciou-se assim a teoria qualitativa geométrica representada por H. Poincaré (1854 - 1912) e A. M. Liapunov (1857 - 1918), bem como a teoria de aproximação analítica (expansão em séries) e de aproximação numérica.

1.2 EDPs – definições e notações

Uma EDP é aquela que envolve derivadas parciais de uma função com, no mínimo, duas variáveis independentes.

A **ordem** de uma EDP é definida como a mais alta ordem da derivada que aparece na equação.

Uma EDP é dita **linear** se, apenas, é de primeiro grau na variável dependente, u, e em todas as suas derivadas. Caso contrário, ela é chamada de **não linear**.

Neste trabalho denotamos por $\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$ a derivada parcial da variável dependente u em relação à variável independente x. Da mesma forma, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv u_{xy}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}$.

1.3 Equação transformada

Nesta seção vamos apresentar o caso geral de uma EDP linear com n variáveis independentes. Então, uma EDP linear de segunda ordem com n variáveis independentes é dada por

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{kj}^{(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} B_j^{(x)} \frac{\partial u}{\partial x_j} + C^{(x)} u + G^{(x)} = 0 \qquad (1.1)$$

onde $B_j^{(x)}, C^{(x)}, G^{(x)}$ e u são funções de $x_1, ..., x_n$ e $A_{kj}^{(x)}$, é uma matriz real e simétrica (ou seja, $A^t = A$) em k, j.

Nota-se que a equação acima possui termos envolvendo derivadas mistas. Podemos, através de uma conveniente mudança de variável, escrever a mesma equação sem esses termos. Este procedimento será necessário quando estudarmos o método de separação de variáveis, que será apresentado no Capítulo 3.

Começamos por introduzir a seguinte transformação: $y_k = \sum_{l=1}^{n} R_{kl} x_l$, onde $k = 0, 1, 2, ..., n$ e R é, agora, uma matriz constante em relação a x_l.

Derivando a equação acima, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_l} = R_{kl} \\ \dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_m \partial x_l} = 0. \end{cases}$$

Definindo as matrizes:

$$U^{(x)}_{mn} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_n} \quad \text{e} \quad U^{(y)}_{kj} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} \tag{1.2}$$

e utilizando a regra da cadeia, podemos escrever

$$U^{(x)}_{mn} = U^{(y)}_{kj} \frac{\partial y_k}{\partial x_m} \frac{\partial y_j}{\partial x_n} = U^{(y)}_{kj} R_{km} R_{jn} = (\tilde{R} U^{(y)} R)_{mn} \tag{1.3}$$

onde $\tilde{R}$ é a matriz transposta associada à matriz R. Considerando somente o termo quadrático da equação (1.1), temos

$$Q = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A^{(x)}_{kj} U^{(x)}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (A^{(x)} U^{(x)})_{kk} = tr[A^{(x)} U^{(x)}] \tag{1.4}$$

onde $tr[A]$ denota o traço da matriz A. Podemos escrever a equação acima na seguinte forma

$$Q = tr[A^{(x)} \tilde{R} U^{(y)} R] = tr[R A^{(x)} \tilde{R} U^{(y)}]. \tag{1.5}$$

Note que, em um ponto fixo, $x_0 \equiv (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, a matriz $A^{(x)}$ tem números reais (e não funções) como elementos de matriz.

Se A é uma matriz real e simétrica, então ela pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal. Seja R, até então arbitrária, uma matriz ortogonal, isto é, $RA^{(x)}\tilde{R}$ é diagonal, ou ainda, a matriz dos autovalores. Logo:

$$[RA^{(x_0)}\tilde{R}]_{jk} \equiv b_j^{(x_0)}\delta_{jk} = a_j^{(y_0)}\delta_{jk} \tag{1.6}$$

onde x_0 foi substituído por y_0, usando a transformação previamente introduzida, isto é: $y_k = \sum_{l=1}^{n} R_{kl}x_l$ e b_j é o j-ésimo autovalor de A.

Então em um ponto x_0, equivalente a um ponto y_0, temos:

$$Q = tr[RA^{(x_0)}\tilde{R}U^{(y_0)}] = \sum_{j,k=1}^{n} [RA^{(x_0)}\tilde{R}]U_{kj} = \sum_{j,k=1}^{n} a_j^{(y_0)}\delta_{jk}U_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(y_0)}U_{jj}^{(y_0)} \tag{1.7}$$

ou ainda, na forma

$$Q = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(y_0)}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}. \tag{1.8}$$

Com isso, podemos transformar a equação (1.1), a qual contém o termo da derivada mista, na seguinte EDP sem o termo da derivada mista, a *equação transformada*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{(y_0)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}\right)_{y=y_0} + F\left[y_0, u, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_0}\right] = 0 \tag{1.9}$$

onde introduzimos a notação

$$y_0 = (y_{01}, y_{02}, y_{03}, ..., y_{0n}) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=y_0} \equiv \left[\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial y_n}\right]_{y=y_0}.$$

1.4 Classificação

A classificação quanto ao tipo de uma EDP depende apenas dos termos quadráticos. Assim, classificamos a equação (1.9) de acordo com os tipos listados a seguir em um domínio D, se em todos os pontos deste domínio os coeficientes $a_i^{(y_0)}$ satisfizerem as seguintes condições:

- Se todos os coeficientes $a_i^{(y_0)}$ forem não nulos e tiverem o mesmo sinal a EDP é do *tipo elíptico.*

- Se os coeficientes $a_i^{(y_0)}$ forem todos não nulos e não tiverem o mesmo sinal, a EDP é do *tipo ultra hiperbólico.*[1]

- Se pelo menos um dos coeficientes $a_i^{(y_0)}$ for nulo, a EDP é do *tipo parabólico.*

Observe que se os coeficientes $a_i^{(y_0)}$ de uma EDP forem todos constantes, ela será invariante quanto ao tipo. Neste caso dizemos que ela é do tipo elíptico, parabólico ou ultra hiperbólico em todo o seu domínio. Por outro lado, se os coeficientes tiverem dependência nas variáveis independentes, as equações poderão mudar de tipo de um ponto para outro, e são chamadas equações de *tipo misto.* Neste caso, podemos estender a classificação introduzindo os seguintes tipos:

- Se em todo seu domínio, os coeficientes $a_i^{(y_0)}$ tiverem apenas duas possibilidades: todos não nulos e de mesmo sinal ou pelo menos um deles seja nulo, sendo arbitrário o sinal dos demais, a EDP é do *tipo elíptico-parabólico.*

[1] O tipo hiperbólico é um caso específico no qual apenas um dos coeficientes tem sinal oposto dos demais, sendo todos não nulos.

• Se em todo o seu domínio, os coeficientes $a_i^{(y_0)}$ tiverem apenas duas possibilidades: todos não nulos, não sendo de mesmo sinal ou pelo menos um deles seja nulo sendo arbitrário o sinal dos demais, a EDP é do *tipo hiperbólico-parabólico.*

• Se em todo seu domínio, os coeficientes $a_i^{(y_0)}$ tiverem apenas duas possibilidades: todos não nulos e de mesmo sinal, ou todos não nulos, não sendo de mesmo sinal, a EDP é do *tipo elíptico-hiperbólico.*

Capítulo 2

EDPs com duas variáveis independentes

Neste capítulo discutimos, primeiramente, as EDPs, lineares, de segunda ordem, com duas variáveis independentes bem como sua classificação quanto ao tipo. Tais equações são estudadas com mais ênfase devido à sua grande importância em diversos problemas da Física, como por exemplo, problemas associados à equação de onda e calor, a equação de Laplace e a equação de Poisson, estas duas últimas usadas para determinar o potencial elétrico de uma configuração eletrostática.

Vamos começar discutindo a forma mais geral de uma EDP linear de segunda ordem com duas variáveis independentes:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \tag{2.1}$$

onde os coeficientes A, B, C, D, E, F e G são funções das variáveis independentes x e y, e $u = u(x, y)$ é a variável dependente. Suponha, que tanto $u(x, y)$ quanto os coeficientes presentes na equação acima são continuamente diferenciáveis e que os coeficientes A, B e C não são simultaneamente nulos.[1]

2.1 Classificação

A classificação de uma EDP de segunda ordem é baseada na redução da equação (2.1) para a forma canônica através de uma transformação de coordenadas conforme apresentado no Capítulo 1. Aqui, neste caso, esta classificação é análoga à classificação de uma quádrica.

O chamado discriminante associado a equação (2.1) é dado por

$$\Delta = B^2 - AC. \tag{2.2}$$

Note que se os coeficientes são constantes, Δ também será constante. Assim, a equação acima pode ser classificada como hiperbólica, parabólica ou elíptica em um domínio dado, se para todos os pontos deste domínio, seu discriminante for respectivamente positivo, nulo ou negativo. Ainda mais, se o mesmo depende das variáveis independentes x e y, dizemos que a equação é de tipo misto.

No caso específico de duas variáveis independentes, sempre há uma transformação de coordenadas que deixa a equação (2.1) invariante quanto a

[1] O número 2 na frente do termo de derivada mista está presente convenientemente para simplificar futuros resultados.

forma, desde que o jacobiano da transformação seja não nulo, ou seja, a transformação seja inversível. Vamos verificar este fato.

Primeiramente vamos considerar a forma canônica. Para transformar a equação (2.1) na forma canônica podemos usar uma transformação de coordenadas geral dada por:

$$\xi = \xi(x, y) \qquad \text{e} \qquad \eta = \eta(x, y), \tag{2.3}$$

onde ξ e η são, pelo menos duas vezes continuamente diferenciáveis e, além disso, admitimos que o Jacobiano (J) desta transformação seja diferente de zero, caso contrário não temos a respectiva inversa, no domínio considerado,

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y.$$

Introduzindo estas transformações na equação (2.1), obtemos uma nova equação dada por:

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \overline{D}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \overline{E}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \overline{F}u = \overline{G} \tag{2.4}$$

onde os coeficientes são tais que

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ \overline{B} &= A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

$$\overline{D} = A\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + D\frac{\partial\xi}{\partial x} + E\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

$$\overline{E} = A\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + D\frac{\partial\eta}{\partial x} + E\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$\overline{F} = F \quad \text{e} \quad \overline{G} = G$$

sendo $u = u(\xi, \eta)$.

Como o discriminante, equação (2.2), depende apenas dos coeficientes A, B e C, a classificação da EDP também depende somente destes coeficientes, logo podemos reescrever as equações (2.1) e (2.4), respectivamente, como:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = H \equiv H\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.6}$$

e

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \overline{H} \equiv \overline{H}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{2.7}$$

onde as funções H e $\overline{H}$ são, respectivamente, funções de x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ e ξ, η, u, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

2.2 A forma canônica

Suponha agora que os coeficientes A, B e C são não nulos. Podemos então escolher ξ e η de modo que os coeficientes $\overline{A}$ e $\overline{C}$ se anulem. Como as equações $\overline{A} = 0$ e $\overline{C} = 0$ são idênticas exceto pela troca de ξ por η:

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 \equiv 0,$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \equiv 0,$$

vamos estudar, então, a equação:

$$A\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial\tau}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{2.8}$$

onde τ ora é ξ, ora é η.

Dividindo a equação (2.8) por $\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2$, temos:

$$A\left(\frac{\partial\tau/\partial x}{\partial\tau/\partial y}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial\tau/\partial x}{\partial\tau/\partial y}\right) + C = 0. \tag{2.9}$$

Ao longo de uma curva característica [2] da equação (2.8), onde τ é constante, temos

$$d\tau = \frac{\partial\tau}{\partial x}dx + \frac{\partial\tau}{\partial y}dy = 0. \tag{2.10}$$

Rearranjando a equação anterior, podemos escrever

$$\left(\frac{\partial\tau/\partial x}{\partial\tau/\partial y}\right) = -\frac{dy}{dx}. \tag{2.11}$$

Substituindo a equação (2.11) na equação (2.8), obtemos:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0 \tag{2.12}$$

a qual é uma equação algébrica cujas raízes são dadas por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{A} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{A} \tag{2.13}$$

onde $\Delta = B^2 - AC$.

As equações (2.13), são chamadas de *equações características* e suas respectivas integrais de *curvas características*. Discutamos, separadamente, cada uma das três possibilidades do discriminante, a saber:

2.2.1 Tipo hiperbólico $\Delta > 0$

Se $\Delta > 0$ há duas equações características, logo temos duas famílias de curvas distintas.

A primeira forma canônica da equação hiperbólica é a equação original reduzida à:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = H_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{2.14}$$

onde $H_1 = \dfrac{\overline{H}}{\overline{B}}$, com $\overline{B} \neq 0$.

A segunda forma canônica, obtida através de uma mudança de variáveis independentes do tipo,

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta \end{cases}$$

é dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = H_2\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{2.15}$$

Este tipo de equação pode ser exemplificada por uma equação de propagação de onda, também chamada de equação de d'Alembert [3].

2.2.2 Tipo parabólico $\Delta = 0$

No caso em que Δ é nulo, as equações características são idênticas, logo, temos somente uma curva característica ξ constante (ou η constante) sendo a forma canônica dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = H_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

com η =constante, ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H_4\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

com ξ =constante.

As equações parabólicas podem ser exemplificadas por equações associadas aos problemas de difusão, também chamada de equação do calor [3].

2.2.3 Tipo elíptico $\Delta < 0$

Observe que quando Δ é negativo, as curvas características são complexas. Entretanto, se os coeficientes A, B e C são funções analíticas, teríamos a primeira forma canônica elíptica. Desde que ξ e η são complexos conjugados, podemos definir uma nova mudança de variáveis:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta)$$

o que nos conduz as variáveis independentes α e β reais. Efetuando as transformações, obtemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = H_5\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{2.16}$$

Este tipo de equação está associado aos problemas advindos da eletrostática, isto é, associados a um potencial. Quando $H_5 = 0$, temos a equação de Laplace. No caso em que H_5 é constante ou possui dependência apenas em ξ e η, temos a equação de Poisson [3].

2.3 EDP do tipo misto

Na seção anterior, tratamos da classificação de uma EDP de segunda ordem, dependendo do valor do Δ, onde o mesmo não muda seu sinal em um determinado domínio considerado. Agora, vamos trabalhar o caso em que este discriminante muda de sinal dependendo do domínio em consideração, ou ainda, quando uma EDP pode ser de diferentes tipos em diferentes domínios.

F. Tricomi (1897 - 1978) foi o primeiro a fazer um estudo completo sobre a classificação de uma EDP linear de segunda ordem. Tricomi mostrou que as chamadas partes principais (termos das derivadas de segunda ordem, somente) de todos os operadores associados com as EDPs do tipo misto, com coeficientes regulares, de segunda ordem com duas variáveis independentes podem ser reduzidas na forma canônica.

Existem seis possíveis tipos para uma EDP do tipo misto, são eles:

- EDPs Hiperbólico - Elíptico de primeiro e segundo tipos
- EDPs Hiperbólico - Parabólico de primeiro e segundo tipos
- EDPs Elíptico - Parabólico de primeiro e segundo tipos

As EDPs hiperbólico - elíptico do primeiro e segundo tipos são conhecidas hoje como equações de Tricomi [7]. No caso, a equação do primeiro tipo é importante no estudo das dinâmicas subatômicas e transônicas dos gases, já a equação do segundo tipo, cujas características envolvem as retas parabólicas aparecem, por exemplo, nos estudos da EDP de d'Alembert [4].

Capítulo 3

Separação de variáveis

Vamos, neste capítulo, apresentar o método de separação de variáveis associado a uma EDP linear de segunda ordem conduzindo-a a duas EDOs, bem como o chamado método de Fourier, que leva em conta as condições de contorno e/ou iniciais.

3.1 Método de Fourier

Este método é um dos mais utilizados para a resolução de um problema envolvendo uma EDP linear junto com condições iniciais e/ou condições de contorno por sua simplicidade. Para resolvermos um particular problema, usamos a chamada regra dos três passos, a saber:

(i) Aplicamos o método de separação de variáveis ou **método produto**, a fim de reduzirmos a EDP a duas EDOs.

(ii) Determinamos as soluções destas duas EDOs.

(iii) Estas soluções serão compostas (combinadas) de modo que o resultado satisfaça a EDP, assim como as condições dadas.

A sequência acima, constitui o chamado **método de Fourier**, para a resolução de uma EDP linear e homogênea.

3.2 Método de separação de variáveis

Para aplicarmos o método de separação de variáveis vamos supor primeiramente, que a equação esteja na forma canônica. Consideremos a seguinte EDP linear, de segunda ordem e homogênea, conforme[1] Capítulo 2

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D\frac{\partial u}{\partial \eta} + E\frac{\partial u}{\partial \xi} + Fu = 0 \tag{3.1}$$

onde os coeficientes A, B, C, D, E e F são funções das variáveis independentes ξ e η, assim como a variável dependente $u = u(\xi, \eta)$. Como já vimos, é sempre possível encontrar uma transformação de coordenadas do tipo $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$, com o jacobiano diferente de zero, capaz de reduzir esta equação à forma canônica do tipo:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u = 0 \tag{3.2}$$

onde $a = -c \neq 0$ para as **equações hiperbólicas**, $a = 0$ (ou $c = 0$) para as **equações parabólicas** e $a = c \neq 0$ no caso das **equações elípticas**.

[1] No caso de uma EDP com n variáveis independentes reduzimos, através deste método, a EDP a um conjunto de n EDOs.

Vamos, então, supor que a solução $u(x,y)$ da equação acima possa ser escrita na forma do produto

$$u(x,y) = R(x)T(y),$$

onde a função $R(x)$ depende somente da variável x e $T(y)$ depende somente da variável y. Substituindo a função $u(x,y)$ escrita dessa forma na equação (3.2), obtemos uma nova EDO envolvendo as funções R e T:

$$aT\frac{d^2R}{dx^2} + cR\frac{d^2T}{dy^2} + dT\frac{dR}{dx} + eR\frac{dT}{dy} + fRT = 0 \tag{3.3}$$

onde omitimos, dos coeficientes e das variáveis dependentes, a dependência funcional em x e y.

Suponhamos agora que seja possível encontrar uma função $p(x,y)$ tal que, ao dividirmos a equação (3.3) por esta função, obtenhamos uma expressão da forma:

$$Ta_1(x)\frac{d^2R}{dx^2} + Rb_1(y)\frac{d^2T}{dy^2} + Ta_2(x)\frac{dR}{dx} + Rb_2\frac{dT}{dy} + [a_3(x) + b_3(y)]RT = 0. \tag{3.4}$$

Dividindo esta equação por RT temos, então, já rearranjado:

$$\frac{a_1}{R}\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{a_2}{R}\frac{dR}{dx} + a_3 = -\left(\frac{b_1}{T}\frac{d^2T}{dy^2} + \frac{b_2}{T}\frac{dT}{dy} + b_3\right). \tag{3.5}$$

Observe aqui que, nesta igualdade, o lado esquerdo contém somente funções da variável x, enquanto que o lado direito envolve apenas a variável y. Assim, podemos diferenciar ambos os lados da equação em relação a x obtendo[2]:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a_1}{R}\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{a_2}{R}\frac{dR}{dx} + a_3\right) = 0. \tag{3.6}$$

[2] Chegaríamos ao mesmo resultado se diferenciássemos em relação a y.

Integrando esta expressão encontramos que:

$$\frac{a_1}{R}\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{a_2}{R}\frac{dR}{dx} + a_3 = \lambda. \tag{3.7}$$

onde a constante λ é chamada de **constante de separação**. Substituindo a equação (3.7) na equação (3.5) podemos, então, escrever:

$$a_1\frac{d^2R}{dx^2} + a_2\frac{dR}{dx} + (a_3 - \lambda)R = 0 \tag{3.8}$$

$$b_1\frac{d^2T}{dy^2} + b_2\frac{dT}{dy} + (b_3 + \lambda)T = 0 \tag{3.9}$$

que se constitui num sistema de duas EDOs, ambas dependendo de λ. Assim, $u(x, y)$ é solução da equação diferencial parcial se $R(x)$ e $T(y)$ são, respectivamente, soluções das equações (3.8) e (3.9).

Até agora, conduzimos a EDP, de segunda ordem, linear e homogênea, através do método de separação de variáveis, num conjunto de duas EDOs. Porém, note que as equações acima carregam, em suas soluções gerais, duas constantes de integração arbitrárias. Para determiná-las devemos recorrer ao segundo passo do método, a aplicação das condições.

3.3 Condições de contorno

Nosso problema agora, resume-se em determinar as soluções das duas EDOs, obtidas pela separação de variáveis, impondo-lhes que satisfaçam as condições de contorno do problema original. Vamos apresentar aqui apenas três tipos de condições de contorno, são elas:

(i) Condições de Dirichlet [1805 - Peter Gustav Lejeune Dirichlet - 1859], quando é especificado o valor da função para um certo $x = x_0$, ou seja, quando é dado:

$$u(x,y)|_{x=x_0} = \alpha(y),$$

onde α é conhecida.

(ii) Condições de Neumann [1832 - Carl Neumann - 1925], em que é dado o valor da derivada da função para um certo valor $x = x_0$, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)|_{x=x_0} = \beta(y),$$

onde β é dada.

(iii) Condições mistas, as quais fornecem o valor, para $h \neq 0$, de

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + hu(x,y)|_{x=x_0} = \gamma(y),$$

onde γ é conhecida.

Devemos notar que a escolha correta do sistema de coordenadas é de suma importância para que tenhamos condições separadas. Além disso, as condições de contorno dadas em $x = x_0$ devem conter somente derivadas de $u(x,y)$ em relação a x, e seus coeficientes devem depender apenas de x.

3.4 Solução do problema de partida

Finalmente, o terceiro passo do método de Fourier consiste em resolver o sistema de EDOs correspondentes e fazer com que as soluções satisfaçam as condições iniciais do problema específico.

Capítulo 4

Método de Frobenius

No Capítulo 3, introduzimos o método de separação de variáveis, o qual, consiste basicamente em resolver uma EDP, linear, de segunda ordem, transformando-a em um sistema de duas EDOs. Assim, precisamos então, estudar um método de como resolver essas EDOs. O método de Frobenius[1] consiste fundamentalmente em construir uma solução da EDO de segunda ordem, linear e homogênea, no caso de os coeficientes não serem constantes, na forma de série, em torno do ponto $x = x_0$, com um parâmetro livre, isto é, na seguinte forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+s} \tag{4.1}$$

[1] Ferdinand Georg Frobenius, nasceu no dia 26 de Outubro de 1846, em Charlottenburg, subúrbio de Berlim. Fez grandes contribuições para a teoria das Equações Diferenciais e a Teoria de Grupos. Estudou grande parte da sua vida em Berlim, mas trabalhou em Zürich entre 1875 e 1892. Morreu em 31 de Agosto de 1917, aos 67 anos.

onde $a_0 \neq 0$ e s é o parâmetro e, visto que, é sempre possível deslocar a singularidade sem mudar essencialmente a ED, é suficiente considerar que $x = x_0 + z$ e restringirmos, sem perda de generalidade, nosso estudo ao caso do ponto $z = 0$.

Então, vamos considerar somente a seguinte série, voltando em x,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

com $a_0 \neq 0$ e s o parâmetro.

Antes de continuar com o desenvolvimento do método de Frobenius, vamos introduzir o conceito de ponto singular regular.

Visto que se um ponto não é um ponto ordinário[2], associado a uma EDO, ele deve ser um ponto singular, vamos definir o conceito de ponto singular. E no caso em que temos um ponto singular devemos classificá-lo como sendo um ponto singular regular ou um ponto singular irregular.

4.1 Definição

Um ponto $x = x_0$ associado a EDO

$$p(x)\frac{d^2}{dx^2}y(x) + q(x)\frac{d}{dx}y(x) + r(x)y(x) = 0 \tag{4.2}$$

onde $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são funções polinomiais é dito ponto singular regular se os limites:

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{q(x)}{p(x)}$$

[2]No caso em que o ponto é um ponto ordinário, utilizamos a série de Taylor.

e

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{r(x)}{p(x)}$$

são finitos. Caso contrário o ponto é chamado ponto singular irregular [6].

4.2 O método de Frobenius

Por razões pedagógicas vamos introduzir o método de Frobenius considerando a EDO chamada equação de Bessel (1784 - 1846) de ordem μ, dada por:

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}y(x)+x\frac{d}{dx}y(x)+(x^2-\mu^2)y(x)=0 \tag{4.3}$$

onde μ é um parâmetro, em princípio arbitrário. O caso geral é discutido na referência [8].

Para obtermos uma solução válida em uma vizinhança da origem, consideramos uma série do seguinte tipo:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s},$$

com $a_0\neq 0$ e s um parâmetro, em princípio, arbitrário.

Calculando a primeira e segunda derivadas, temos, respectivamente,

$$\frac{d}{dx}y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}.$$

Substituindo as duas últimas expressões na equação de Bessel e rearranjando obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+s)(n+s-1)+(n+s)-\mu^2]a_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s+2}=0.$$

Podemos notar claramente, que existem duas diferenças fundamentais relativamente ao desenvolvimento em série de Taylor, a saber:

(i) Os índices do somatório da primeira derivada e da segunda derivada não mudaram;

(ii) somente se s é igual a zero obtemos exatamente a série de Maclaurin.

Mudando o índice do segundo somatório, $n=k-2$ podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+s)(k+s-1)+(k+s)-\mu^2]a_k x^{k+s}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+s}=0.$$

Para termos os índices de partida iguais devemos explicitar os dois primeiros termos no primeiro somatório, em separado, para que possamos rearranjar os demais em um único somatório, já efetuando a volta para o índice n:

$$[s(s-1)+s-\mu^2]a_0x^s+[s(s+1)+(s+1)-\mu^2]a_1x^{s+1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+s)^2-\mu^2]a_n+a_{n-2}\}x^{n+s}=0.$$

Desta igualdade, podemos escrever

$$s^2-\mu^2=0 \tag{4.4}$$
$$[(s+1)^2-\mu^2]a_1=0$$
$$[(n+s)^2-\mu^2]a_n+a_{n-2}=0, \qquad n\geq 2.$$

A primeira equação é chamada de **equação indicial** ou ainda equação auxiliar, enquanto que a terceira delas para um valor de s, é a chamada **fórmula de recorrência** que, neste caso, relaciona o enésimo termo com o termo de ordem $n-2$. A segunda das equações, aquela que envolve o coeficiente a_1 não tem um nome específico.

A partir da equação indicial, equação (4.4), podemos escrever

$$s = \pm\mu$$

isto é, os chamados expoentes.

Substituindo os valores de s na segunda equação, temos:

$$[(\pm\mu + 1)^2 - \mu^2]a_1 = 0.$$

Explicitando o trinômio quadrado perfeito temos:

$$(1 \pm 2\mu)a_1 = 0,$$

de onde podemos concluir que:

$$\mu = \mp\frac{1}{2} \Rightarrow \forall a_1 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \mu \neq \mp\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0.$$

Substituindo esses dois resultados na fórmula de recorrência, obtemos finalmente:

$$[(n \pm \mu)^2 - \mu^2]a_n + a_{n-2} = 0$$

ou ainda, na forma

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm 2\mu)},$$

com $n \geq 2$. Note que, se μ é um número inteiro ou um número semi-inteiro, o denominador pode tornar-se nulo.

Daqui em diante, é necessário fazer a escolha relativamente ao parâmetro μ, até então arbitrário. Escolhamos μ de maneira didática e conveniente:

(i) Para $\mu = \frac{1}{4}$, temos que as raízes da equação auxiliar são distintas, ou seja, $s_1 = \frac{1}{4}$ e $s_2 = -\frac{1}{4}$. E, visto que, $\mu \neq \pm\frac{1}{2}$, temos que $a_1 = 0$ e da relação de recorrência obtemos $a_n = 0$ para n ímpar. Por isso podemos escrever:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm \frac{1}{2})}$$

com $n = 2, 4, 6, \ldots$ Para n ímpar temos:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{n(4n \pm 1)}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$

Com isso, obtemos duas soluções linearmente independentes da equação diferencial, uma associada à raiz $s_1 = \frac{1}{4}$ e outra associada à raiz $s_2 = -\frac{1}{4}$.

(ii) Consideremos agora, $\mu = 0$. A equação indicial admite raiz dupla, isto é, $s = 0$. Mais uma vez $\mu \neq \pm\frac{1}{2}$ e então $a_1 = 0$ bem como os demais ímpares. A relação de recorrência agora nos fornecerá:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n^2}$$

com $n = 1, 2, 3,$...

De onde obtemos uma única solução da equação diferencial. Uma outra solução linearmente independente pode ser procurada através do método de redução de ordem, por exemplo [6].

(iii) Consideremos agora $\mu = \frac{1}{2}$. As raízes da equação indicial são $s_1 = \frac{1}{2}$ e $s_2 = -\frac{1}{2}$. No caso em que $s_1 = \frac{1}{2}$ temos $a_1 = 0$ o que implica em todos os termos de índices ímpares serem nulos, e da relação de recorrência temos:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}$$

com $n = 2, 3, 4, ...$

Aqui obtemos somente uma solução. Em relação ao caso em que $s = -\frac{1}{2}$ temos a_1 arbitrário e a fórmula de recorrência é dada por:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$$

com $n = 2, 3, 4, ...$

Visto que temos duas constantes arbitrárias a_0 e a_1, ambas diferentes de zero, esta raiz, a menor raiz, nos fornece uma solução geral da ED ou ainda duas soluções linearmente independentes obtidas com o desenvolvimento em série. Pode-se ainda mostrar que a solução obtida com a maior raiz, é um caso particular daquela obtida com a menor raiz.

(iv) Consideremos $\mu = 1$. As raízes da equação indicial são $s_1 = 1$ e $s_2 = -1$. No caso em que $s = 1$ temos $a_1 = a_3 = \cdots = 0$ logo da fórmula de recorrência temos:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)}$$

com $n = 2, 3, 4, \ldots$

Aqui, também, obtemos somente uma solução. Por outro lado, relativamente ao caso em que $s = -1$ temos ainda $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ e da fórmula de recorrência temos:

$$n(n-2)a_n = -a_{n-2}$$

que para $n = 2$ implica em $a_0 = 0$, contrariando a hipótese $a_0 \neq 0$ e assim, tal expoente não fornece uma solução.

Como já foi mencionado no começo deste trabalho, há muitos problemas físicos que podem ser discutidos através de uma EDO, linear e de segunda ordem. Em relação às equações com coeficientes constantes, temos como exemplos, o estudo de vibrações mecânicas, o sistema massa-mola, o circuito elétrico RLC, dentre outros.

Por outro lado, quando tratamos de coeficientes não constantes, surge uma outra classe de funções, as chamadas **Funções Especiais**, dentre as quais podemos citar as funções cilíndricas, mais especificamente, as funções de Bessel, que aparecem em problemas que apresentam simetria cilíndrica, por exemplo, condução de corrente num fio, bem como as funções esféricas, mais especificamente as funções de Legendre, que se apresentam em problemas com simetria esférica como por exemplo, o estudo do potencial em torno de uma superfície esférica [5, 9, 10].

As funções de Bessel representam um caso particular da chamada equação hipergeométrica confluente enquanto que as funções de Legendre se constituem num caso particular da chamada equação hipergeométrica, uma EDO, linear, de segunda ordem e coeficientes variáveis. A equação hipergeométrica pode ser considerada o caso geral de uma equação diferencial de segunda ordem com três pontos singulares regulares e três parâmetros, incluindo um ponto singular no infinito, enquanto que da confluência de dois destes pontos, obtemos a equação hipergeométrica confluente, com dois parâmetros [9, 10].

Capítulo 5

O problema de forças centrais

Este capítulo tem como objetivo recuperar as leis de Kepler[1], associadas ao movimento planetário, em particular, obter a lei das áreas e discutir também as possíveis órbitas.

O movimento de um sistema com dois corpos sofrendo uma força direcionada sobre uma reta contendo os centros desses dois corpos, isto é, a

[1]Johannes Kepler (Figura 5.1), nascido no dia 27 de Dezembro de 1571, em Weil der Stadt, perto de Stuttgart, Alemanha, foi um astrônomo, matemático e astrólogo alemão. Uma das suas maiores contribuições são as três leis fundamentais da mecânica celeste - Leis de Kepler. Kepler viveu numa época onde não havia nenhuma distinção entre astrologia e astronomia, mas havia uma forte distinção entre astronomia e a física. Seus estudos iniciais tinham como objetivo seguir a carreira teológica, porém, por ser protestante, sofreu pressões da igreja católica e acabou sendo exilado. Foi então para Praga onde trabalhou como astrônomo junto com Tycho Brahe, e incorporou argumentos religiosos e o raciocínio em seu trabalho, motivado pela convicção religiosa de que Deus havia criado o mundo de acordo com um plano inteligível, que é acessível através da luz natural da razão. Morreu aos 58 anos, no dia 15 de Novembro de 1630.

Figura 5.1: Johannes Kepler.

força central é um problema físico extremamente importante. O problema de Kepler apresenta-se em muitos contextos, entre eles, desempenha um papel importante no campo da mecânica celeste. Como exemplos temos um satélite que move-se sobre um planeta, um planeta sobre seu sol, ou duas estrelas binárias sobre si. O problema de Kepler é também importante no movimento de duas partículas carregadas, ou ainda, o átomo de hidrogêneo, o qual pode ser descrito em termos da clássica força central entre dois corpos.

O problema de Kepler e o problema do oscilador harmônico simples são os dois problemas fundamentais dentro do mecanismo clássico. O problema de Kepler é usado frequentemente para desenvolver métodos novos nessa área, como lagrangeanos, hamiltonianos e equação de Hamilton-Jacobi. O problema de Kepler conserva também o vetor de Laplace-Runge-Lenz, que tem sido generalizado para incluir outras interações [11, 12]. A solução do problema de Kepler permitiu que os cientistas mostrassem que o movimento planetário poderia ser explicado inteiramente por mecanismos clássicos e pela lei da gravitação de Newton.

Em astronomia, o matemático e astrônomo alemão, Johannes Kepler estudou as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe. Por volta de 1605, Kepler descobriu que as observações de Brahe seguiam três leis matemáticas relativamente simples. As leis de Kepler do movimento planetário são as três leis matemáticas que descrevem o movimento dos planetas no sistema solar.

As leis de Kepler desafiaram a Astronomia e a Física de Aristóteles e de Ptolomeu. Sua primeira afirmação de que a Terra se movia, em órbitas elípticas e sua prova de que as velocidades dos planetas variavam, mudaram a Astronomia e Física. Não obstante, a explanação física do comportamento dos planetas veio quase um século mais tarde, quando Isaac Newton deduziu as leis de Kepler a partir das próprias leis da gravitação universal, usando a geometria Euclideana clássica.

5.1 Equações diferenciais e suas integrais

Nesta seção vamos utilizar o formalismo lagrangeano a fim de estudar o problema de forças centrais. Vamos nos limitar ao problema onde a energia potencial depende apenas da distância radial, r, o que implica que a força tem a direção do vetor $\vec{r}$. Visto que este sistema possui simetria esférica, temos a conservação do vetor momento angular total, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, conforme a

Mecânica Vetorial, o que implica que $\vec{r}$ é sempre perpendicular à direção fixa de $\vec{L}$ no espaço, isto é, $\vec{r}$ pertence a um plano cuja normal é sempre paralela a $\vec{L}$.

O movimento de uma partícula no espaço pode ser descrito por três coordenadas, por exemplo, neste caso, as coordenadas polares esféricas são as mais convenientes. Sejam r, a distância radial; θ, o ângulo azimutal e Ψ, o ângulo zenital. Por simetria tomamos o eixo polar na direção de $\vec{L}$ a fim de que o movimento ocorra no plano perpendicular ao eixo polar. Com esta imposição a coordenada Ψ é constante e igual a $\pi/2$ o que nos permite eliminá-la.

Diante do acima exposto, a lagrangeana, denotada por $\mathfrak{L}$, escrita em termos das coordenadas polares, é dada por

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= T - V \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)\end{aligned}$$

onde m é a massa e $V(r)$ é a energia potencial, dependendo apenas da distância radial.[2]

Sabemos que a coordenada θ é cíclica (ou ignorável) uma vez que não aparece explicitamente na lagrangeana, de onde concluímos que o correspondente momento canônico é o momento angular do sistema

$$p_\theta = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

[2]Acompanhamos a notação empregada, em geral, pelos físicos, isto é, $\dot{r}$ denota a derivada temporal de r. Note que estas são todas variáveis escalares, advindas da Mecânica Analítica, em contraste com a Mecânica Vetorial.

Então, uma das equações de movimento é

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

cuja integração fornece (integral primeira) a conservação do momento

$$mr^2\dot{\theta} = \ell \tag{5.1}$$

onde ℓ é o módulo (constante) do momento angular.

Ainda mais, a partir desta equação de movimento podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

ou seja, $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ é a chamada *velocidade areolar*, isto é, a área varrida pelo raio vetor na unidade de tempo. Então, a conservação do momento angular implica na constância da velocidade areolar e vice-versa. Como caso particular de forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância, esta é uma prova da segunda lei de Kepler, a saber:

$$\boxed{\text{O raio vetor varre áreas iguais em tempos iguais}}$$

Enfim, a outra equação de Lagrange (uma para cada coordenada) associada à coordenada radial, r, é

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

ou ainda, após a derivada ser efetuada, na forma

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \tag{5.2}$$

onde introduzimos a força, ao longo de $\vec{r}$, por $f(r) = -\partial V/\partial r$.

Note que, a partir da equação (5.1) podemos isolar $\dot{\theta}$ e substituir na equação (5.2) a fim de eliminar $\dot{\theta}$ de onde obtemos uma EDO, linear e de segunda ordem envolvendo apenas a coordenada radial, isto é,

$$m\ddot{r} - \ell^2/mr^3 = f(r). \tag{5.3}$$

Por outro lado, como as forças são conservativas, a outra integral primeira envolve a energia total do sistema, isto é,

$$T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$$

onde E é uma constante de movimento. Desta equação pode ser demonstrada a igualdade

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} + V(r) = \text{constante} \tag{5.4}$$

o que expressa a conservação da energia total, uma vez que $\ell = mr^2\dot{\theta}$, de onde podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2.$$

As duas primeiras integrações reduziram as equações de Lagrange a outras duas EDOs de primeira ordem, a saber as equações (5.1) e (5.4). Devemos agora resolver duas equações de primeira ordem. Comecemos com a equação (5.4). Esta é uma EDO de primeira ordem separável de onde podemos escrever

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{E - V - \ell^2/2mr^2}.$$

Vamos admitir que no instante inicial, $t = 0$, tenhamos $r = r_0$ de onde segue-se

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{d\xi}{E - V(\xi) - \ell^2/2m\xi^2} \tag{5.5}$$

que nos fornece diretamente t como função de r e das constantes de integração E, ℓ e r_0, isto é, conhecida a energia potencial, pelo menos formalmente, basta efetuar uma integração.

Por outro lado, uma vez conhecida a expressão de r, a partir da equação (5.1) e impondo que θ_0 é o valor inicial de θ, obtemos

$$\theta = \frac{\ell}{m}\int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)} + \theta_0.$$

Convém ressaltar que, neste tipo de problema unidimensional, poderíamos tratá-lo a partir de uma outra metodologia, por exemplo, sem obter as soluções explícitas das EDOs, isto é, através das equações de movimento e os teoremas de conservação [11, 12].

5.1.1 Equação da órbita

Passemos a discutir as órbitas, isto é, como varia r em função de θ, ou seja, eliminando t das equações (5.1) e (5.4) a fim de obter uma EDO para a órbita. Note que ainda estamos tratando o caso geral, não explicitando a forma de um particular potencial.

A partir da equação $mr^2\dot{\theta} = \ell$ obtemos a relação envolvendo os operadores de derivada primeira

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$$

enquanto que, para os operadores de derivada segunda,

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\ell}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\right)$$

de onde podemos escrever a equação de Lagrange para r, equação (5.3), na forma

$$\frac{\ell}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3} = f(r)$$

ou ainda na seguinte forma

$$-\frac{\ell}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\ell}{m}\frac{d(1/r)}{d\theta}\right] - \frac{\ell^2}{mr^3} = f(r).$$

Introduzindo a mudança de variável $\xi = 1/r$ na equação anterior temos

$$\frac{\ell^2\xi^2}{m}\left(\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi\right) = -f\left(\frac{1}{\xi}\right) \tag{5.6}$$

que representa a ED da órbita, uma vez conhecida a lei de forças, f, e, inversamente, conhecida a relação funcional de r em função de θ, podemos obter a lei de forças, $f(r)$.

Ainda mais, no caso geral, a equação das órbitas, equação (5.6), é uma EDO não linear. A discussão geral pode ser encontrada na referência [12].

5.2 O problema de Kepler

Passemos, a partir de agora, explicitar o problema, isto é, fornecendo um potencial. O chamado problema de Kepler[3] ou ainda a lei de proporcionalidade do inverso do quadrado da distância, requer um tratamento diferenciado uma vez que, neste caso, a equação das órbitas é uma EDO linear de segunda ordem.

[3]Tratamento análogo recebem o campo de gravitacional newtoniano e o campo eletrostático coulombiano; o primeiro é um campo atrativo enquanto que o segundo tanto pode ser um campo atrativo, quanto um campo repulsivo.

Então, sendo a força dada por $f(r) = -k/r^2$, com k uma constante, temos para a energia potencial, $V(r) = -k/r$. Em nossa notação podemos escrever $f(1/\xi) = -k\xi^2$ que substituído na equação da órbita, equação (5.6), fornece

$$\frac{\ell^2\xi^2}{m}\left(\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi\right) = k\xi^2$$

ou ainda na seguinte forma

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{mk}{\ell^2}$$

que é uma EDO linear de segunda ordem e não homogênea.[4]

Esta é uma EDO linear de segunda ordem e não-homogênea. Começamos por integrar a respectiva EDO homogênea, isto é,

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\xi_H(\theta) + \xi_H(\theta) = 0.$$

Visto que os coeficientes são constantes, a solução geral desta equação pode ser escrita na forma

$$\xi_H(\theta) = A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta$$

com A e B constantes arbitrárias. Uma solução particular, $\xi_P(\theta)$, da respectiva EDO não-homogênea é

$$\xi_P(\theta) = \frac{mk}{\ell^2}$$

de onde segue-se que a solução da EDO não-homogênea é

$$\xi(\theta) = \frac{mk}{\ell^2} + A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

[4]Uma outra maneira de obter a equação da órbita é através de uma integração diretamente da equação (5.5) onde a constante de integração emerge naturalmente como uma função da energia, E, e do momento angular do sistema, ℓ.

Esta solução pode ser colocada na forma:

$$\xi(\theta) = \frac{mk}{\ell^2} + A\left(\cos\theta + \tan\theta' \operatorname{sen}\theta\right)$$

onde $\tan\theta' = B/A =$ constante, ou ainda,

$$\xi(\theta) = \frac{mk}{\ell^2} + \frac{A}{\cos\theta'}\cos(\theta - \theta').$$

Voltando na variável original, $r(\theta)$, obtemos

$$\frac{\ell^2/mk}{r(\theta)} = 1 + \epsilon\cos(\theta - \theta')$$

onde $\epsilon = A\ell^2/(mk\cos\theta')$, uma outra constante.

A equação precedente é a equação de uma seção cônica que tem foco na origem das coordenadas com excentricidade da órbita, ϵ, e parâmetro, $p = \ell^2/mk$.

5.2.1 A terceira lei de Kepler

A outra maneira de estudarmos o problema das órbitas é através do seguinte procedimento. Primeiramente, note que para um campo (energia potencial) $V(r) = -k/r$ com $k > 0$ temos atração, isto é, o campo é atrativo. Agora, introduzimos a chamada *energia potencial efetiva*

$$V_{\mathrm{e}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

cuja representação gráfica é como na figura a seguir:

Note que, a partir da Figura 5.2, nos limites $r \to 0$, a energia tende a $+\infty$ enquanto que $r \to \infty$ a energia tende a zero por valores negativos, isto é, deve

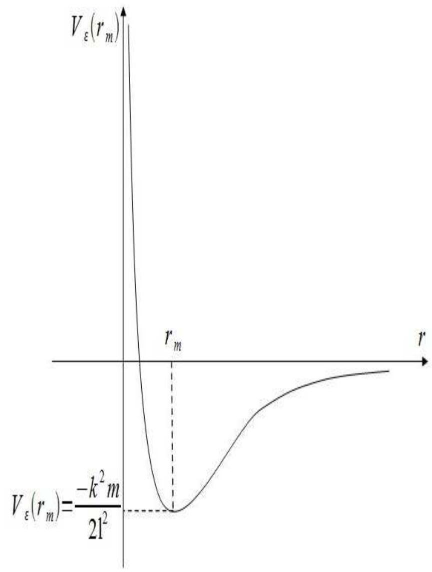

Figura 5.2: Representação gráfica da energia potencial efetiva.

passar por um ponto de mínimo ($\partial V_{\rm e}/\partial r = 0$) quando $r = \ell^2/mk$. Ainda mais, desta figura conclui-se que, para $E > 0$ o movimento da partícula será infinito enquanto que finito para $E < 0$.

A fórmula que fornece a órbita é dada pela expressão[5]

$$\theta = \int^r \frac{\ell/\xi^2\, d\xi}{\{2m[E - V(\xi)] - \ell^2/\xi^2\}^{1/2}}$$

que, no caso em que $V(r) = -k/r$ fornece

$$\frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos\theta$$

que reproduz a equação de uma elipse no caso em que $E < 0$.

[5]Ver Apêndice.

Em geral, a natureza da órbita depende da excentricidade, conforme tabela a seguir:

Excentricidade	Energia	Curva	Órbita
$\epsilon > 1$	$E > 0$	hipérbole	aberta
$\epsilon = 1$	$E = 0$	parábola	aberta
$\epsilon < 1$	$E < 0$	elipse	fechada
$\epsilon = 0$	$E = -mk^2/2\ell^2$	circunferência	fechada

Tabela 1. Possibilidades de uma cônica.

Passemos, a partir de agora, a discutir apenas as órbitas elípticas.[6] De acordo com fórmulas da geometria analítica, o semieixo maior e o semieixo menor da elipse são, respectivamente[7]

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{k}{2|E|} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{5.7}$$

[6]O caso degenerado da elipse é a circunferência. Neste caso, a força de atração é equilibrada pela força centrífuga.

[7]Ver Figura 5.3.

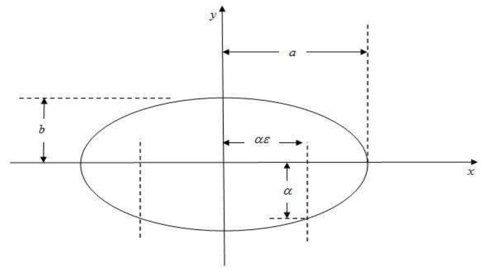

Figura 5.3: Elipse com foco em F.

As distâncias máxima e mínima ao foco da elipse (centro do campo) são, respectivamente

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1+\epsilon} = a(1-\epsilon) \qquad \text{e} \qquad r_{\text{max}} = \frac{p}{1-\epsilon} = a(1+\epsilon) \tag{5.8}$$

as quais podem, também, ser determinadas como as raízes da equação algébrica de segundo grau na variável r

$$2mEr^2 + 2mkr - \ell^2 = 0,$$

com $E < 0$.

Vamos agora, determinar o período do movimento da órbita elíptica. A partir da conservação do momento angular, concluímos que a velocidade aerolar, $\mathcal{A}$, é constante, isto é,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{5.9}$$

cuja integração fornece:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = C$$

onde C é uma constante. Lembrando que $r^2\dot{\theta} = \ell/m$ obtemos para a constante

$$C = \frac{\ell}{2m}.$$

Integrando a equação (5.9), para um período completo, T, temos

$$\mathcal{A} = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\ell}{2m}\right)dt = \frac{\ell T}{2m} = \pi ab$$

onde a última igualdade é devida a área de uma elipse de semieixos maior, a, e menor, b.

Utilizando as equações (5.7) e (5.8) podemos escrever para o período[8]

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi m}{\ell}a^2\sqrt{1-\epsilon^2} \\ &= \frac{2\pi m}{\ell}a^2\frac{p^{1/2}}{a^{1/2}} = \frac{2\pi m}{\ell}a^{3/2}p^{1/2} \\ &= \frac{2\pi m}{\ell}a^{3/2}\frac{\ell}{\sqrt{mk}} = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Elevando-se ao quadrado a equação (5.10) podemos escrever

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}a^3 = \mathcal{K}\, a^3$$

onde $\mathcal{K} = 4\pi^2 m/k$ =constante. Esta é a segunda lei de Kepler, a saber[9]:

O quadrado do período é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.

[8]Podemos mostrar que o período do movimento depende apenas da energia da partícula e é dado por $T = \pi k(m/2|E|^3)^{1/2}$.

[9]Esta lei está associada, assim como a primeira lei, às forças proporcionais ao quadrado da distância radial. A segunda lei é um teorema geral associado às forças centrais.

Apêndice

Neste apêndice vamos utilizar os teoremas da conservação da energia e da conservação do momento para obter a expressão, de forma explícita, que fornece a órbita, isto é, expressar θ como função de r, bem como obter a área delimitada por uma elipse.

Equação de uma cônica

Consideremos o teorema da conservação da energia, que nos permite escrever

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \tag{A.1}$$

onde E é uma constante, a energia total do sistema. Por outro lado, da conservação do momento, equação (5.1), $mr^2\dot{\theta} = \ell$, onde ℓ é uma constante, obtemos $r^2\dot{\theta}^2 = \ell^2/m^2r^2$ que quando substituído na expressão (A.1) fornece, já explicitando $\dot{r}$,

$$\dot{r} = \left\{ \frac{2}{m}\left[E - V(r)\right] - \frac{\ell^2}{mr^2} \right\}^{1/2}$$

ou ainda na seguinte forma

$$dt = \frac{dr}{\left\{\frac{2}{m}\left[E - V(r)\right] - \frac{\ell^2}{mr^2}\right\}^{1/2}}.$$

Ora, lembrando que $dt = (mr^2/\ell)d\theta$ obtemos

$$d\theta = \frac{\ell/r^2\, dr}{\left\{2m[E - V(r)] - \frac{\ell^2}{r^2}\right\}^{1/2}}$$

que, após a integração, fornece a equação da órbita, isto é,

$$\theta = \int^r \frac{\ell/\xi^2\, d\xi}{\left\{2m[E - V(\xi)] - \frac{\ell^2}{\xi^2}\right\}^{1/2}} + A$$

onde A é uma constante de integração.

No particular problema de Kepler temos $V(r) = -k/r^2$, logo devemos calcular explicitamente a integral

$$\theta = \int^r \frac{\ell/\xi^2\, d\xi}{\left\{2m\left(E + \frac{k}{\xi^2}\right) - \frac{\ell^2}{\xi^2}\right\}^{1/2}} + A.$$

A fim de resolver esta integral, primeiramente introduzimos a mudança de variável $1/\xi = u$ de onde segue-se

$$\theta = -\ell \int^{1/r} \frac{du}{\left\{2m\left(E + ku^2\right) - \ell^2 u^2\right\}^{1/2}} + A$$

ou ainda, com A uma constante, finalmente, na forma

$$\theta = \arccos\left\{\frac{\frac{\ell}{r} - \frac{mk}{\ell}}{(2mE + m^2k^2/\ell^2)^{1/2}}\right\} + A.$$

Escolhamos a origem dos ângulos θ de tal modo que a constante $A = 0$ logo[10]

$$\frac{\ell}{r} - \frac{mk}{\ell} = (2mE + m^2k^2/\ell^2)^{1/2} \cos\theta.$$

Introduzindo a notação

$$p = \frac{\ell^2}{mk} \qquad \text{e} \qquad \epsilon = \left(1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}\right)^{1/2} \tag{A.2}$$

obtemos a equação

$$\frac{p}{r} = 1 + \epsilon \cos\theta.$$

Esta é a equação de uma cônica com foco na origem das coordenadas sendo p o parâmetro da órbita e ϵ a respectiva excentricidade.

Área delimitada pela elipse

Aqui, vamos demonstrar que a área delimitada por uma elipse é igual a π multiplicado pelo produto dos semieixos maior e menor.

Lembrando que a equação da elipse é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

podemos escrever para a área delimitada pela elipse:

$$A_{\text{e}} = 4 \int_0^b \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy$$

[10] Esta escolha da origem de θ foi feita de modo tal que o ponto para o qual $\theta = 0$ está o mais próximo possível do centro, o chamado *periélio* da órbita.

ou ainda, após a integração na variável x,

$$A_{\mathrm{e}} = 4\int_0^b a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy.$$

Usando a substituição trigonométrica $y = b\,\mathrm{sen}\theta$, podemos escrever

$$A_{\mathrm{e}} = 4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}\cos\theta d\theta$$

cuja integração fornece

$$\boxed{A_{\mathrm{e}} = \pi ab}$$

Note que se $a = b = R$ temos então, a fórmula da área do círculo de raio R.

Conclusão

As EDs são de fundamental importância na modelagem de diversos problemas da natureza, nas mais variadas áreas de aplicação. Portanto, conhecer e saber aplicar corretamente os métodos para resolução destes tipos de equações, é essencial.

Neste trabalho, no Capítulo 1, estudou-se, em particular, a classificação de uma EDP, linear, de segunda ordem com n variáveis independentes. No Capítulo 2 discutimos o caso geral quando $n = 2$, isto é, obtivemos um conjunto de duas EDOs, lineares e de segunda ordem. Para discutir tais equações, no Capítulo 3, apresentamos o método de Fourier onde a separação de variáveis desempenha papel importante. A solução desta EDO foi apresentada no Capítulo 4, através do método de Frobenius, utilizando por motivos pedagógicos a equação de Bessel. Como aplicação, no Capítulo 5, discutimos o problema de forças centrais, em particular, o problema de Kepler onde focamos as segunda e terceira leis de Kepler.

Há ainda a questão da interdisciplinaridade no sentido de que utiliza-se uma metodologia advinda da Matemática na discussão e resolução de um problema, aqui, advindo da Física, questão essa muito comum no cotidiano escolar atual e nos processos seletivos de Universidades. Assim, a metodologia apresentada pode contribuir para o gradual crescente do professor do Ensino Médio, a procura de novidades e reciclagens.

O tema ED é bastante amplo, podendo ser afrontado com muito mais profundidade, ou ainda, podendo ser estudado em outros ramos da ciência que produzem o mesmo tipo de problema, isto é, conduzem à mesma ED.

Enfim, este trabalho tentou trazer as EDPs para uma realidade mais próxima dos alunos, motivando-os, através de um exemplo prático, especificamente o problema das órbitas, que é discutido no Ensino Médio sem a devida prova e sem o rigor matemático. E essa foi, para mim, a parte mais interessante. Como professora do Ensino Fundamental e Médio, percebo a distância que existe entre os conteúdos do segundo e o terceiro graus! Ter a oportunidade de trabalhar com algum tema mais próximo do terceiro grau no universo do Ensino Médio, evitando as *decorebas* é extremamente interessante sob o ponto de vista pedagógico!

Uma continuação natural deste trabalho é efetuar um estudo similar ao aqui apresentado, no Capítulo 5, para os outros tipos de órbitas bem como o estudo da difusão de Rutherford [14].

Referências Bibliográficas

[1] EULER, Leonhard, *Foundations of differential calculus*, Springer, New York, (2000).

[2] EVANS, Lawrence C., *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, (1998).

[3] GREENSPAN, Donald, *Introduction to partial differential equations*, McGraw-Hill, Toronto, (1961).

[4] SNEDDON, Ian Naismith, *Elements of partial equations*, McGraw-Hill, New York, (1957).

[5] SOMMERFELD, Arnold, *Partial differential equation in physics*, Academic Press, London, (1949).

[6] CAPELAS DE OLIVEIRA, E., CHIACCHIO, A. O. e VAZ Jr., J., *Equações diferenciais: métodos analíticos e aplicações*, IMECC, São Paulo, (2008).

[7] PAMPLONA DA SILVA, D. J., *Sobre um tipo de equação diferencial parcial*, Relatório de Pesquisa, IMECC-Unicamp, Campinas, (2001).

[8] CAPELAS DE OLIVEIRA E. e TYGEL, M., *Métodos matemáticos para a engenharia*, Segunda Edição SBM, Rio de Janeiro, (2010).

[9] CAPELAS DE OLIVEIRA, E. MAIORINO, J. E., *Métodos de matemática aplicada*, Terceira Edição, Editora da Unicamp, Campinas, (2010).

[10] CAPELAS DE OLIVEIRA, E., *Funções especiais com aplicações*, Editora da Física, São Paulo, (2005).

[11] MARION, Jerry B. and THORNTON, Stephen T., *Classical dynamics of particles and systems*, Saunders, Philadelphia, (1995).

[12] GOLDSTEIN, H., *Mecanica clasica*, Aguilar, Madrid, (1977).

[13] HUMBERT, S. and CAPELAS DE OLIVEIRA, E., *On the classification of second order partial differential equation in two independent variables revisited*, Relatório de Pesquisa 45/03, Imecc-Unicamp, (2003).

[14] WHITTAKER, E. T., *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Dover Publications, New York, (1944).