

Princípios, Teoremas e Limites
Assintóticos no Estudo de Interações
Hadrônicas a Altas Energias

Regina Fonseca Ávila

Prof. Dr.: Márcio José Menon
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

IMECC - UNICAMP

Março de 2003

Princípios, Teoremas e Limites

Assintóticos no Estudo de Interações

Hadrônicas a Altas Energias

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Regina Fonseca Ávila e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de Abril de 2003

Prof. Dr.: Márcio José Menon
Orientador

Banca Examinadora

1. Prof. Dr.: Márcio José Menon
2. Prof. Dr.: Adolfo Maia Jr.
3. Prof. Dr.: Bruto Max Pimentel Escobar

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Ávila, Regina Fonseca

Av55p Princípios, teoremas e limites assintóticos no estudo de interações
hadrônicas a altas energias / Regina Fonseca Ávila – Campinas, [S.P.
:s.n.], 2003.

Orientador: Márcio José Menon

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Relações de dispersão. 2. Interações hadrônicas. 3.
Espalhamento elástico. I. Menon, Márcio José. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Aos meus pais, Francisco e Virgínia,
e irmãos Carlos e Fernando.

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãos pelo apoio e incentivo em todos os momentos.

Ao Prof. Márcio José Menon, pela orientação, confiança, dedicação, paciência, estímulo e por tudo que tenho aprendido nestes anos de convivência.

Aos professores Adolfo Maia Jr. e Edmundo Capelas de Oliveira pelas críticas e sugestões que contribuíram muito para a realização deste trabalho.

Aos colegas de grupo Álvaro, Emerson e Montanha.

À todos os amigos que de alguma maneira ou outra estiveram ao meu lado nesta caminhada.

E finalmente agradeço à FAPESP, pelo suporte financeiro.

Resumo

Apresenta-se um estudo sobre Princípios, Teoremas e Limites Assintóticos (Teoria Quântica de Campos), relacionados com Modelos Analíticos para o espalhamento hádron-hádron em altas energias. Estes modelos, baseados nos Princípios Gerais e suas conseqüências, são caracterizados por parametrizações analíticas para a amplitude de espalhamento frontal e o uso de técnicas de relações de dispersão para se estudar as conexões entre seção de choque total, σ_{tot} (parte imaginária da amplitude) e o parâmetro ρ (razão entre as partes real e imaginária da amplitude), em função da energia. Neste trabalho, através de ajustes e análises de dados experimentais de espalhamento elástico próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$) realiza-se um estudo detalhado de vários aspectos da abordagem analítica. Em particular investiga-se: 1) a obtenção, a partir das relações de dispersão integrais, das relações de dispersão derivativas (expansão em série de operadores), no limite de altas energias; 2) as contribuições dos termos individuais da expansão em série; 3) o efeito do limite inferior da relação integral; 4) o efeito de parametrizações com diferentes limites assintóticos; 5) o efeito de diferentes estimativas para σ_{tot} na região de energia de raios cósmicos; 6) as diferenças entre ajustes individuais e simultâneos de σ_{tot} e ρ ; 7) o efeito da constante de subtração em todos os casos investigados. Os principais resultados e conclusões são os seguintes: 1) diferentemente da dedução original, mostra-se que a relação de dispersão derivativa não depende de nenhum parâmetro livre; 2) a única aproximação na obtenção da relação derivativa a partir da integral diz respeito ao limite inferior da forma integral (condição de altas energias); 3) a constante de subtração como parâmetro livre de ajuste influencia os resultados tanto nas energias mais baixas como nas mais altas e neste caso o primeiro termo da expansão derivativa é uma boa aproximação para a forma integral; 4) ajustes simultâneos de σ_{tot} e ρ restringem o crescimento de σ_{tot} em função da energia; 5) diferentes estimativas para σ_{tot} de experimentos de raios cósmicos indicam diferentes cenários para o crescimento de σ_{tot} no caso em que somente o espalhamento pp é analisado, mas não no caso de ajustes simultâneos de dados de pp e $\bar{p}p$.

Abstract

A study on Principles, Theorems and Asymptotic Bounds (Quantum Field Theory), related with the Analytic Models for high energy hadron-hadron scattering, is presented. These models, based on the General Principles and its consequences, are characterized by analytic parametrizations for the forward scattering amplitude and the use of dispersion relation techniques to study the connections between total cross section, σ_{tot} (imaginary part of the amplitude), and the ρ parameter (ratio between real and imaginary parts of the amplitude) as a function of the energy. In this work, by means of fits and analyses of the experimental data on pp and $\bar{p}p$ elastic scattering, a detailed study on several aspects of the analytic approach is developed. In particular it is investigated: 1) the replacement of integral dispersion relations by derivative forms (a series expansion of operators) in the high energy limit; 2) the contributions of the individual terms in the series expansion; 3) the effect of the lower limit in the integral form; 4) the effect of parametrizations with different asymptotic behaviours; 5) the effect of selecting different cosmic-ray estimations for σ_{tot} and ρ ; 6) differences between individual and simultaneous fits to σ_{tot} and ρ ; 7) the effect of the subtraction constant in all the cases investigated. The main results and conclusions are the following: 1) differently from the original formulation, it is shown that the derivative form does not depend on any free parameter; 2) the only approximation in the replacement of the integral by the derivative form concerns the lower limit in the integral form (high energy condition); 3) the subtraction constant as free parameter affects the fit results at both lower and higher energies and in this case the first term in the expansion is a good approximation for the integral form; 4) simultaneous fits to σ_{tot} and ρ constraint the rise of σ_{tot} as function of the energy; 5) different estimations for σ_{tot} from cosmic-ray experiments indicate different scenarios for the rise of σ_{tot} if only pp scattering is analyzed but not in the case of simultaneous fits to pp and $\bar{p}p$.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Espalhamento elástico: Quantidades físicas e dados experimentais	7
2.1	Quantidades físicas	7
2.2	Seção de choque e amplitude de espalhamento elástica	8
2.3	Conexão entre seção de choque diferencial elástica e amplitude de espalhamento	9
2.4	Ondas parciais e o Teorema Óptico	12
2.5	Cinemática do espalhamento	13
2.5.1	Variáveis independentes e o processo de espalhamento	14
2.5.2	Sistemas de Lorentz para a descrição do processo de espalhamento .	16
2.5.3	As variáveis s , t e u	17
2.5.4	Seção de choque total e parâmetro ρ	19
2.6	Dados experimentais	19
2.6.1	Dados de aceleradores	20
2.6.2	Dados de raios cósmicos	20
3	Princípios, teoremas e limites assintóticos	27
3.1	Princípios gerais	27
3.1.1	Invariância de Lorentz	27
3.1.2	Unitaridade	28
3.1.3	Analiticidade	29
3.1.4	Cruzamento	30
3.2	Teoremas	34
3.2.1	Limite polinomial	35
3.2.2	O limite de Froissart-Martin	35
3.2.3	O teorema de Pomeranchuk original	35

3.2.4	Teorema de Pomeranchuk revisado	36
4	Relações de dispersão	37
4.1	Transformada de Hilbert	37
4.2	Relações de Kramers-Kronig	40
4.3	Relação de dispersão na forma integral	44
4.3.1	Singularidades da amplitude de espalhamento elástica	44
4.3.2	Relação de dispersão na forma integral para a amplitude de espalhamento elástica	46
4.4	Relações de analiticidade derivativas	51
4.4.1	Relação de analiticidade derivativa	52
4.4.2	Somabilidade da série de tangentes $\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right)$	54
5	Aplicações	57
5.1	Fórmulas básicas e estratégias	58
5.1.1	Parametrizações típicas para a seção de choque total	58
5.1.2	Relações de dispersão e subtrações	60
5.1.3	Estratégias de análise	61
5.2	Expansão da série de tangentes e constante de subtração (DL)	62
5.2.1	Resultados analíticos	62
5.2.2	Ajustes e conclusões	64
5.3	Análise global das relações de analiticidade derivativas (DL e KN)	66
5.3.1	Dados experimentais	66
5.3.2	Modelos analíticos e limites assintóticos	67
5.3.3	Ajustes de dados e resultados	68
5.3.4	Conclusões	68
5.4	Limite inferior da relação integral e constante de subtração (DL)	74
5.4.1	Resultados analíticos	74
5.4.2	Resultados e conclusões	75
6	Conclusões, comentários e perspectivas	79
A	Matriz S e teorema óptico	85
A.1	Relação de unitaridade	86
A.2	Seção de choque total e matriz T	87
A.3	O teorema óptico	88

B Prova do teorema 1	89
C Cálculo de algumas integrais utilizadas no trabalho	91
C.1 Cálculo das integrais $P \int_{s_0}^{\infty} \frac{x^\gamma}{x^2 - a^2} dx$ e $P \int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{x^2 - a^2} dx$	91
C.2 Cálculo da integral $\int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds'$	95
C.3 Cálculo da integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx$	98
D Espalhamento próton-próton: testes assintóticos	101
D.1 Informação experimental	101
D.2 Relação de analiticidade derivativa e o parâmetro ρ	102
D.2.1 Ajustes e resultados	102
D.2.2 Ajustes para a seção de choque total	102
D.2.3 Previsões para o parâmetro ρ	104
D.3 Conclusões	105
E Espalhamento próton-próton: expansão da série tangente	109
E.1 Relação de dispersão na forma integral e na forma derivativa	109
E.2 Resultados	110

Lista de Figuras

1.1	Espalhamento clássico de partícula por um alvo fixo.	2
2.1	Diagrama de um experimento de colisão envolvendo partículas de um feixe incidente e partículas alvo.	7
2.2	Função de onda assintótica.	10
2.3	Espalhamento de duas partículas representado pelos quadrimomentos. . .	14
2.4	Processo de espalhamento $a + b \rightarrow c + d$ visto do (a) sistema do laboratório e (b) do centro de momento.	17
2.5	Seção de choque total para os espalhamentos próton-próton σ_{tot}^{pp} e antipróton-próton $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ em função da energia no centro de massa - dados obtidos em aceleradores [4].	21
2.6	Parâmetro ρ para os espalhamentos próton-próton ρ^{pp} e antipróton-próton $\rho^{\bar{p}p}$ em função da energia no centro de massa - dados de aceleradores [4]. . .	22
2.7	Seção de choque total: dados de aceleradores e de raios cósmicos	22
3.1	Espalhamento de partículas no canal s	31
3.2	Espalhamento de partículas no canal t	32
3.3	Representação gráfica das regiões físicas dos canais s , t , u	34
4.1	Contorno utilizado para obter a equação (4.13).	38
4.2	Contorno utilizado na derivação das relações de dispersão na forma integral para a amplitude de espalhamento elástica.	47
5.1	Parâmetro ρ das equações (5.13) e (5.14) com $K = 0$ para pp e $\bar{p}p$. RAD, (5.14) somente o primeiro termo da série, os dois primeiros e os três primeiros. . .	63
5.2	Parâmetro ρ para o espalhamento pp das equações (5.13a) e (5.14a). Mesma legenda da figura 5.1.	64
5.3	Parâmetro ρ para o espalhamento $\bar{p}p$ das equações (5.13b) e (5.14b) . Mesma legenda da figura 5.1.	65

5.4	Resultados para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ (Figuras 5.2 e 5.3).	66
5.5	Ajustes para dados de seção de choque total pp e $\bar{p}p$ do conjunto I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e tracejada-pontilhada para $\bar{p}p$), para da parametrização DL (esquerda) e as correspondentes previsões para $\rho(s)$ com $K = 0$ (centro) e K como parâmetro de ajuste (direita).	69
5.6	Ajustes simultâneos para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização DL com $K = 0$ e conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e tracejada-pontilhada para $\bar{p}p$).	70
5.7	Ajustes simultâneos para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização DL com K como parâmetro livre e conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e tracejada-pontilhada para $\bar{p}p$).	70
5.8	Ajustes para dados de seção de choque total pp e $\bar{p}p$ dos conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) II (curva sólida para pp e pontilhada-tracejada para $\bar{p}p$), para a parametrização KN (esquerda) e a as correspondentes previsões para $\rho(s)$ com $K = 0$ (centro) e K como parâmetro de ajuste (direita).	72
5.9	Ajuste simultâneo para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização KN com $K = 0$ e conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e pontilhada-tracejada para $\bar{p}p$).	72
5.10	Ajustes simultâneos para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização KN com K como parâmetro livre e conjuntos I (curvas pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curvas sólidas para pp e pontilhada-tracejada para $\bar{p}p$).	73
5.11	Previsões para o parâmetro ρ para a parametrização DL através de RAD (traços) e RDI (sólido) com $s_0 = 0$ (esquerda), onde os dois resultados são iguais, e $s_0 = 2m^2$ (direita). Em ambos os casos consideramos a constante de subtração igual a zero.	75
5.12	Ajuste simultâneo de σ_{tot} e ρ com $K = 0$: extremo inferior $s_0 = 2m^2$ (sólida) e $s_0 = 0$ (tracejada).	77
5.13	Ajuste simultâneo de σ_{tot} e ρ com K como parâmetro livre: extremo inferior $s_0 = 2m^2$ (sólida) e $s_0 = 0$ (tracejada).	77
C.1	Parâmetro ρ pp e $\bar{p}p$ calculado para a parametrização (C.22) através de RDI.	94
C.2	Parâmetro ρ pp e $\bar{p}p$ calculado para a parametrização (C.23) através de RDI.	95
C.3	Contorno utilizado no cálculo da integral (C.40)	98

D.1	Informação experimental sobre σ_{tot}^{pp} : dados de aceleradores $13.8 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV e raios cósmicos no intervalo $6.3 \leq \sqrt{s} \leq 40$ TeV.	102
D.2	Ajustes para a seção de choque total pp para os dados do conjunto A através das equações (D.2)-(D.5) - Ajuste 1 (sólida), 2 (pontilhada), 3 (pontilhada-tracejada) e 4 (tracejada).	104
D.3	Ajustes para seção de choque total pp para os dados do conjunto B. Mesma legenda da figura D.2.	105
D.4	Resultados para o parâmetro $\rho(s)$ pp , usando o ajuste 4 para os dados do conjunto A (tracejada) e B (sólida) usando RAD e $K = 0$ na equação (D.1) e dados experimentais	106
D.5	Resultados para $\rho(s)$, para a RAD convencional, (D.1), ajustes para σ_{tot} do conjunto A junto com os dados experimentais. Mesma legenda da figura D.2.	107
D.6	Resultados para $\rho(s)$, para a RAD convencional, (D.1), ajustes para σ_{tot} do conjunto B, junto com os dados experimentais. Mesma legenda da figura D.2.	107
E.1	Resultados para $\rho(s)$ com a forma integral, equação (E.7), e a forma derivativa, equação (E.8), mostrando as contribuições dos três primeiros termos. .	111

Lista de Tabelas

2.1	Dados experimentais de aceleradores da seção de choque total próton-próton σ_{tot}^{pp} para $\sqrt{s} > 10$ GeV [4]	23
2.2	Dados experimentais de aceleradores da seção de choque total antipróton-próton $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ para $\sqrt{s} > 10$ [4]	24
2.3	Dados de aceleradores do parâmetro ρ para o espalhamento próton-próton ρ^{pp} para $\sqrt{s} > 10$ GeV [4]	25
2.4	Dados de aceleradores do parâmetro ρ para o espalhamento antipróton-próton $\rho^{\bar{p}p}$ para $\sqrt{s} > 10$ GeV [4]	25
2.5	Estimativas para seção de choque total σ_{tot}^{pp} (em mb) de dados de raios cósmicos	26
5.1	Valores para a constante de subtração com as fórmulas integral (5.13) e derivativa (5.14) e informações estatísticas. Ajuste para $\sqrt{s} \geq 10$ GeV - 62 graus de liberdade (gdl).	64
5.2	Resultados com o modelo Donnachie-Landshoff - Ajuste individual	68
5.3	Resultados com o modelo Donnachie-Landshoff - Ajuste simultâneo	69
5.4	Resultados com a parametrização Kang-Nicolescu - Ajuste individual	71
5.5	Resultados com a parametrização Kang-Nicolescu - Ajuste simultâneo	71
5.6	Ajustes simultâneos de σ_{tot} e ρ para a parametrização <i>DL</i> (154 pontos) com K como parâmetro livre e $K = 0$. Relação de dispersão com extremo inferior $s_0 = 2m^2$ e $s_0 = 0$	76
D.1	Valores dos parâmetros nas equações (D.2)-(D.5) e o χ^2 por grau de liberdade para cada ajuste para o conjunto A.	103
D.2	Valores dos parâmetros nas equações (D.2)-(D.5) e o χ^2 por grau de liberdade para cada ajuste para o conjunto B.	103

D.3	Valores da constante de subtração dos ajuste para os dados de $\rho(s)$ e χ^2 por 6 graus de liberdade. Cálculo feito através da equação (D.1) usando os quatro ajustes para os conjuntos A e B.	106
-----	---	-----

Capítulo 1

Introdução

São denominados hádrons as partículas sensíveis à interação forte (ou nuclear), também denominada hadrônica, responsável pela ligação de nêutrons e prótons no núcleo. De acordo com a Cromodinâmica Quântica (CQ), a teoria quântica de campos da interação forte, os hádrons são compostos de partículas mais elementares, os quarks, antiquarks e glúons e dividem-se em bárions (férmions) e mésons (bósons). Todo bárion é composto de três quarks (todo antibárion é composto de três antiquarks) e todo méson é composto de um quark e um antiquark. O glúon é a partícula mediadora da força forte, ou seja, a partícula responsável pela transmissão da força forte entre os quarks. Quarks e glúons carregam a carga da força forte, a carga de cor. Como carga de cor não se manifesta no mundo físico, todos os hádrons têm que ser estados neutros de cor de quarks e glúons [1, 2].

Uma colisão hádron-hádron é um processo complicado envolvendo interações dos componentes de ambas as partículas. Genericamente estas colisões podem ser classificadas em *suaves* (soft) e *duras* (hard). Uma primeira idéia sobre estes tipos de colisões pode ser encontrada no espalhamento elástico clássico de uma partícula carregada com momento inicial e final $\vec{k}$ e $\vec{k}'$, respectivamente, por uma partícula fixa com carga de mesmo sinal (repulsão) e parâmetro de impacto $\vec{b}$. Se $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ é o momento transferido, $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$ (espalhamento elástico), $|\vec{q}|^2 = 2|\vec{k}|^2(1 - \cos \theta)$, onde θ é o ângulo de espalhamento, então é intuitivo que para $|\vec{b}|$ grande (distâncias grandes) temos θ pequeno, o que implica $|\vec{q}|$ pequeno, e temos um espalhamento *suave*. Por outro lado, $|\vec{b}|$ pequeno (distâncias pequenas) correspondem a grande θ ou grande $|\vec{q}|$ e temos um processo *duro*. Entretanto, como os processos nos quais estamos interessados são relativísticos, quânticos e hadrônicos, vejamos como os dois casos acima são tratados na CQ [3].

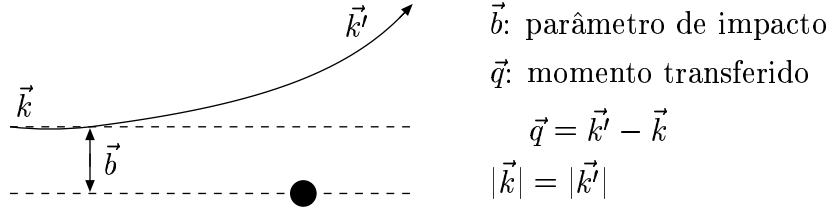


Figura 1.1: Espalhamento clássico de partícula por um alvo fixo.

A Lagrangeana descrevendo as interações de quarks e glúons é [4]

$$\mathcal{L}_{CQ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(a)}F^{(a)\mu\nu} + i \sum_q \bar{\psi}_q^i \gamma^\mu (D_\mu)_{ij} \psi_q^j - \sum_q m_q \bar{\psi}_q^i \psi_{qi}, \quad (1.1a)$$

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.1b)$$

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu + i g_s \sum_a \frac{\lambda_{ij}^a}{2} A_\mu^a, \quad (1.1c)$$

onde g_s é a constante de acoplamento da CQ, e os f_{abc} são as constantes de estrutura da álgebra SU(3). Os ψ_q^i são os spinores de Dirac de 4 componentes associados com cada campo de quark de cor i e sabor q , e os $A_\mu^a(x)$ são os (8) campos de Yang-Mills. As matrizes γ e λ e os valores de f_{abc} podem ser encontrados na referência [1].

É a constante de acoplamento da CQ, escrita na forma

$$g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s} \quad (1.2)$$

que dá a intensidade da força forte. Por exemplo, para $q \gg \Lambda^2$ [1]:

$$\begin{aligned} \alpha_s(q^2) &= \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(11n - 2f) \ln(q^2/\mu^2)} \\ &= \frac{12\pi}{(11n - 2f) \ln(q^2/\Lambda^2)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde q^2 é o quadrimomento transferido ao quadrado, μ é tal que $\alpha_s(\mu^2) < 1$, n é o número de cores dos quarks (3), f o número de sabores (6) e $\Lambda^2 = \mu^2 \exp[-11/B\alpha_s(\mu^2)]$, sendo $B = (11n - 2f)/12\pi$.

Em qualquer teoria onde $11n > 2f$, a constante de acoplamento decresce quando q^2 cresce, de modo que a pequenas distâncias a força forte torna-se menos intensa. Isto é a base do regime da liberdade assintótica, que permite tratar os pártons (quarks e glúons)

como partículas livres e a CQ Perturbativa (CQP), baseada nas expansões em α_s , pode ser usada com sucesso. Por outro lado, para pequenos valores do momento transferido (grandes distâncias), a constante de acoplamento cresce, a interação entre quarks e glúons fica mais intensa, levando ao regime de confinamento [1].

A barreira de confinamento, onde $\alpha_s \sim 1$ é típica de distâncias da ordem de 1 fm; distâncias desta ordem e momentos transferidos pequenos são características dos processos *suaves*. Neste regime a CQP não pode ser usada e o tratamento é exclusivamente não perturbativo [3].

É possível resumir as idéias acima da seguinte forma: Processos duros são caracterizados por grande momento transferido e pequenas distâncias, o regime é o de liberdade assintótica e a abordagem teórica é a Cromodinâmica Quântica Perturbativa. Processos suaves são associados com grandes distâncias e pequeno momento transferido, o regime é o de confinamento e o tratamento teórico é feito pela Cromodinâmica Quântica não Perturbativa.

Apesar do sucesso da CQP na investigação dos processos duros, ainda não existe uma descrição teórica dos processos suaves exclusivamente através da CQ não perturbativa e este fato é a principal motivação deste trabalho. Uma das dificuldades já foi citada acima: devido ao crescimento da constante de acoplamento não é possível usar a CQP. Outra é que, nas abordagens não perturbativas, como nas teorias de calibre na rede, as dificuldades estão no tamanho (dimensões) da rede, uma vez que todas as configurações possíveis devem ser testadas e o problema, em última instância, passa a ser estatístico, envolvendo simulações de Monte Carlo. Isto leva a necessidade de se encontrar esquemas analíticos adequados de cálculo. Entretanto, no momento, somente propriedades estáticas (estados ligados) têm sido investigadas, não havendo nenhum resultado para as propriedades dinâmicas (estados de espalhamento) proveniente exclusivamente da CQ não Perturbativa [5].

Por causa destas dificuldades, uma estratégia utilizada atualmente no estudo dos processos *suaves* é a fenomenologia, isto é, o desenvolvimento de um modelo que descreve eficientemente os dados, primeiro focalizando conjuntos particulares de dados experimentais e *construído com bases sólidas em princípios e teoremas bem estabelecidos na teoria*. Quando se atinge uma descrição mais ampla dos dados busca-se contribuições ao desenvolvimento da teoria em termos de esquemas adequados de cálculos e/ou reformulações [3].

Os processos suaves são classificados em elásticos e dissociativos [3] e neste trabalho nosso interesse é o caso elástico, o processo suave mais simples. No caso do espalhamento

elástico hadrônico, o ponto principal é a obtenção da amplitude de espalhamento elástico F , que é a função que descreve este processo em termos da energia e do ângulo de espalhamento. A partir desta amplitude pode-se obter as quantidades físicas que caracterizam o espalhamento, tais como (Cap. 2) seção de choque total

$$\sigma_{tot} = \frac{\text{Im } F(s, t = 0)}{s}, \quad (1.4)$$

parâmetro ρ

$$\rho = \frac{\text{Re } F(t = 0, s)}{\text{Im } F(t = 0, s)} \quad (1.5)$$

e outras [5]. Nestas equações, s e t são variáveis de Mandelstam: s relacionada com a energia no centro de massa e t ao ângulo de espalhamento (Cap. 2).

Do ponto de vista teórico, busca-se construir a amplitude de espalhamento com base no menor número de princípios da teoria de campos. Os princípios usados neste contexto (Cap. 3) são, além da invariância de Lorentz,

1. *Analiticidade*, que é consequência do princípio de causalidade. Estabelece que a amplitude de espalhamento quando expressa como função das variáveis cinemáticas apropriadas pode ser continuada analiticamente para o domínio complexo e a função analítica resultante tem uma estrutura de singularidades simples, consistente com os outros princípios.
2. *Unitariedade* da matriz S (matriz que transforma um estado inicial i em um estado final f num processo de espalhamento) que é uma consequência da conservação da probabilidade.
3. *Simetria de cruzamento* que estabelece que amplitudes invariantes que descrevem o espalhamento elástico nos canais s , t e u , que a priori são como independentes, são de fato obtidas de uma única função analítica $F(s, t, u)$.

Muitos teoremas em colisões de altas energias foram derivados usando os princípios acima. Estes teoremas são geralmente expressos na forma de desigualdades matemáticas que devem ser satisfeitas pela amplitude de espalhamento.

Consequências muito importantes e diretas da analiticidade são as relações de dispersão que relacionam as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento. Numa forma simples e útil, uma relação de dispersão permite escrever a parte real em $t = 0$ como uma integral da energia envolvendo a seção de choque total (parte imaginária) [5, 6]. Com isso

pode-se investigar simultaneamente as grandezas físicas σ_{tot} e ρ , equações (1.4) e (1.5) respectivamente e, principalmente seus comportamentos assintóticos ($s \rightarrow \infty$).

Embora relações de dispersão integrais sejam muito usadas, em geral, integrações numéricas e/ou analíticas são difíceis de ser calculadas. A conexão entre as duas quantidades é não-local, pois a parte real depende em princípio do comportamento de σ_{tot} em todas as energias. Entretanto, para energias suficientemente altas, o crescimento suave da seção de choque (Cap. 2) permite conectar a forma integral a uma forma derivativa que é mais fácil de ser manipulada, além de ser uma relação “quasi-local”. Estas relações foram chamadas de relações de analiticidade derivativas e a forma padrão foi introduzida nos anos 70 por Bronzan, Kane e Sukhatme [7]; estudos críticos a respeito de sua validade vêm sendo feitos, por exemplo por Kolář e Fischer, Dronkers, e outros (Cap. 4).

Nosso objetivo neste trabalho é fazer um estudo sobre os teoremas e limites assintóticos relacionados com o espalhamento elástico frontal de hádrons a altas energias. Em particular, queremos fazer testes críticos das relações de dispersão (integrais e diferenciais) utilizando dados experimentais de espalhamento elástico próton-próton e antipróton-próton (pp e $\bar{p}p$) nas mais altas energias.

Com esta finalidade o trabalho é organizado como segue. No capítulo 2 são introduzidos os conceitos gerais associados com o espalhamento elástico frontal e as quantidades físicas importantes na sua descrição. Também são apresentados em detalhe os dados experimentais que serão analisados. O capítulo 3 é dedicado ao estudo dos princípios gerais e teoremas sobre o espalhamento elástico que serão utilizados neste trabalho. No capítulo 4 são estudadas as relações de dispersão; é feita a dedução detalhada da relação na forma integral e da passagem desta para a forma diferencial. Também são apresentados alguns teoremas sobre a somabilidade do operador diferencial obtido. No capítulo 5 são utilizadas algumas parametrizações para a seção de choque total e determinamos previsões para ρ . Em especial, utilizamos a parametrização do modelo de Donnachie-Landshoff com a qual fizemos vários estudos utilizando tanto relações integrais como derivativas e comparamos os resultados. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e perspectivas de continuidade desta pesquisa.

Capítulo 2

Espalhamento elástico: Quantidades físicas e dados experimentais

Neste capítulo são introduzidas quantidades físicas que caracterizam o espalhamento elástico frontal, e que são de interesse neste trabalho: seção de choque total e parâmetro ρ . Também são apresentados e discutidos os dados experimentais disponíveis para o espalhamento elástico próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$), nos quais estão focalizadas nossas aplicações.

2.1 Quantidades físicas

Muitos experimentos em física de partículas, especialmente em física de altas energias, consistem em direcionar um feixe de partículas (em um acelerador) a um alvo composto de partículas, e estudar o resultado das colisões: as partículas que constituem o estado final são detectadas e suas características (direção de emissão, energia, etc.) são medidas. As colisões são os processos mais importantes usados para estudar a estrutura de partículas subatômicas.

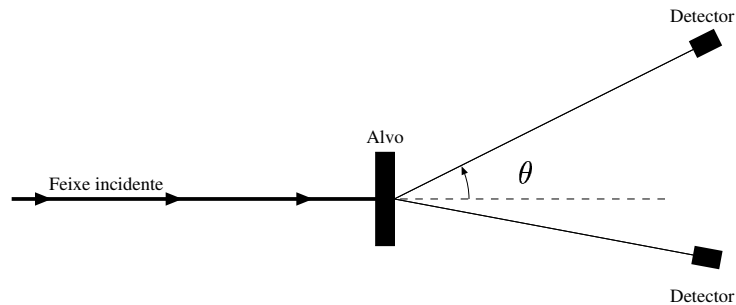


Figura 2.1: Diagrama de um experimento de colisão envolvendo partículas de um feixe incidente e partículas alvo.

Os fenômenos observados são algumas vezes muito complexos. Por exemplo, se as partículas envolvidas são formadas por componentes mais elementares, estas podem, durante a colisão, se distribuir em duas ou mais partículas compostas no estado final que são diferentes daquelas do estado inicial; são as colisões de rearranjo. Além disso, na região de altas energias, a possibilidade de “materialização” de parte da energia aparece: novas partículas são criadas e o estado final pode incluir um grande número delas. Entre todas as reações possíveis, as reações de espalhamento são aquelas em que o estado inicial e final são compostos das mesmas partículas, além disso, um espalhamento é elástico quando nenhum dos estados internos da partícula muda durante a colisão [8, 9], sendo este nosso interesse.

2.2 Seção de choque e amplitude de espalhamento elástica

O comportamento de uma colisão é geralmente expresso em termos de uma seção de choque. Vamos defini-la [8, 9]. Considere que um feixe de partículas monoenergético atinge um alvo. Denotaremos por $\mathcal{F}_i$ o fluxo de partículas no feixe incidente, isto é, o número de partículas por unidade de tempo que atravessa uma unidade de superfície perpendicular ao feixe. Se o feixe é uniforme e contém n_i partículas por unidade de volume, movendo-se com velocidade v , o fluxo é dado por

$$\mathcal{F}_i = n_i v. \quad (2.1)$$

Um detector mede o número de partículas espalhadas por unidade de tempo em um ângulo sólido $d\Omega$ na direção definida pelos ângulos polares θ e ϕ . O número dn de partículas é proporcional a $\mathcal{F}_i$ e a $d\Omega$

$$dn = \mathcal{F}_i \sigma(\theta, \phi) d\Omega, \quad (2.2)$$

onde a constante de proporcionalidade, denotada por $\sigma(\theta, \phi)$ ou $d\sigma/d\Omega$, é chamada seção de choque de espalhamento diferencial na direção (θ, ϕ) . As dimensões de dn e $\mathcal{F}_i$ são T^{-1} e $(L^2 T)^{-1}$ respectivamente, logo $\sigma(\theta, \phi) d\Omega$ tem dimensão de área e é freqüentemente medida em barns ou submúltiplos de barns, onde

$$1\text{ b} = 10^{-24}\text{ cm}^2 = 100\text{ fm}^2, \quad 1\text{ mb} = 10^{-3}\text{ b}.$$

A definição (2.2) pode ser interpretada da seguinte forma: o número de partículas por unidade de tempo que atinge o detector é igual ao número de partículas que atravessaria uma superfície $\sigma(\theta, \phi) d\Omega$ colocada na direção perpendicular ao feixe incidente.

A seção de choque elástica total é dada pela integral

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.3)$$

Vamos discutir o caso de um espalhamento não relativístico por um potencial $V(\vec{r})$ e aproximaremos a partícula incidente por uma onda plana movendo-se ao longo do eixo z , $\Psi = \exp(ikz)$. A solução do problema de espalhamento é a solução da equação de Schrödinger independente do tempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (2.4)$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) \quad (2.5)$$

onde o número de onda k está relacionado à energia E por

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu E}, \quad (2.6)$$

μ é a massa reduzida e $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π .

Assume-se que o potencial $V(\vec{r})$ decresce mais rápido que $1/r$ quando r vai ao infinito. Como já foi dito anteriormente, antes de atingir a região de influência do potencial a partícula incidente será representada por uma onda plana $\psi = e^{ikz}$, onde k é a constante que aparece na equação (2.6). Quando a onda atinge a região de influência do potencial V sua estrutura é profundamente modificada, a sua evolução torna-se complicada. Entretanto, longe da região de influência do potencial, a onda assume uma forma simples novamente. Ela se divide em onda plana transmitida, que continua a se propagar na direção z e onda espalhada, que é esférica. Conseqüentemente, a função de onda assintótica, veja a figura 2.2, será uma superposição das ondas transmitida e espalhada e terá a forma

$$\Psi = e^{ikz} + F_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.7)$$

Nesta expressão, somente a função $F_k(\theta, \phi)$ depende do potencial; ela é chamada amplitude de espalhamento elástica e descreve a dependência angular da onda esférica [8, 9].

2.3 Conexão entre seção de choque diferencial elástica e amplitude de espalhamento

Nesta seção mostramos que a conexão entre a seção de choque diferencial elástica e a amplitude de espalhamento é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta, \phi) = |F_k(\theta, \phi)|^2. \quad (2.8)$$

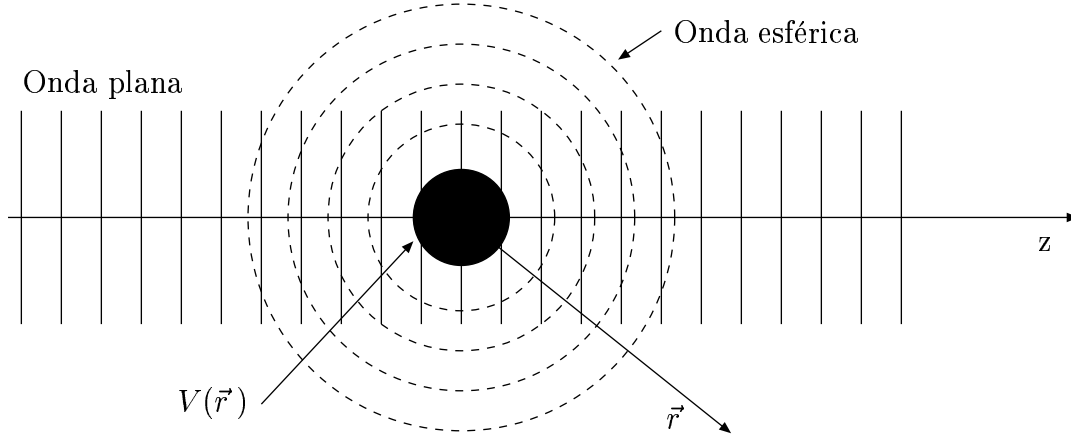


Figura 2.2: Função de onda assintótica.

De fato, a equação (2.2) fornece

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(dn/d\Omega)}{\mathcal{F}_i}. \quad (2.9)$$

O fluxo espalhado $\mathcal{F}_e$, ou seja, o número de partículas que atravessa uma unidade de área a , na distância r por unidade de tempo, está relacionado à $dn/d\Omega$ por

$$\mathcal{F}_e = \frac{dn}{da} = \frac{dn}{r^2 d\Omega}, \quad (2.10)$$

logo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \frac{\mathcal{F}_e}{\mathcal{F}_i}. \quad (2.11)$$

O fluxo é dado pela densidade de corrente de probabilidade $J(\vec{r})$ [8]. A expressão para a corrente $J(\vec{r})$ associada à função de onda $\Psi(\vec{r})$ é

$$J(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \text{Re} \left[\Psi^*(\vec{r}) \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi(\vec{r}) \right]. \quad (2.12)$$

Para a onda incidente, $\Psi = e^{ikz}$, $\mathcal{F}_i$ está na direção z e é dado por

$$\mathcal{F}_i = \frac{\hbar k}{\mu}. \quad (2.13)$$

Já a onda espalhada é expressa em coordenadas polares, equação (2.7). Então vamos calcular os componentes do fluxo espalhado $\mathcal{F}_e$ ao longo dos eixos definidos por este sistema de coordenadas. Lembremos que as componentes do operador ∇ em coordenadas

esféricas são:

$$\begin{aligned}(\nabla)_r &= \frac{\partial}{\partial r} \\(\nabla)_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\(\nabla)_\phi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Substituindo $\Psi(\vec{r})$ na equação (2.12) pela função $F_k(\theta, \phi)e^{ikr}/r$ podemos obter facilmente o fluxo espalhado $\mathcal{F}_e$ na região assintótica

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_e)_r &= \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left[F_k^*(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r} \left(F_k(\theta, \phi) \frac{e^{+ikr}}{r} \right) \right] \\&= \frac{\hbar k}{\mu} \frac{1}{r^2} |F_k(\theta, \phi)|^2,\end{aligned}\tag{2.15a}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_e)_\theta &= \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left[F_k^*(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(F_k(\theta, \phi) \frac{e^{+ikr}}{r} \right) \right] \\&= \frac{\hbar}{\mu} \frac{1}{r^3} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} F_k^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} F_k(\theta, \phi) \right],\end{aligned}\tag{2.15b}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_e)_\phi &= \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} \left[F_k^*(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\hbar}{i} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(F_k(\theta, \phi) \frac{e^{+ikr}}{r} \right) \right] \\&= \frac{\hbar}{\mu} \frac{1}{r^3 \sin \theta} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} F_k^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} F_k(\theta, \phi) \right].\end{aligned}\tag{2.15c}$$

Como r é grande, $(\mathcal{F}_e)_\theta$ e $(\mathcal{F}_e)_\phi$ podem ser desprezados quando comparados a $(\mathcal{F}_e)_r$, e o fluxo espalhado pode ser considerado radial. Substituindo $\mathcal{F}_i$ (2.13) e $\mathcal{F}_e$ (2.15a) na equação (2.11) o resultado desejado é obtido

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = |F_k(\theta, \phi)|^2.\tag{2.16}$$

Observação

Até agora não citamos a interferência entre a onda plana e a onda espalhada na região assintótica, interferência esta que não pode ser desprezada. Na realidade, o que se faz é colocar o detector fora da região frontal, ou seja, na região onde $\theta, \phi \neq 0$. Falaremos novamente desta região, quando introduzirmos o teorema óptico [8, 9].

2.4 Ondas parciais e o Teorema Óptico

Na mecânica quântica não relativística, os estados de espalhamento são caracterizados pelas soluções da equação de Schrödinger independente do tempo [3, 8],

$$\left(\nabla^2 + k^2 - U(\vec{r})\right) \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.17)$$

com a condição assintótica

$$e^{ikz} + F_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikz}}{r} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.18)$$

onde $k^2 = 2\mu E$, $U(\vec{r}) = 2\mu V(\vec{r})$, E é a energia total, V o potencial, μ a massa reduzida e $F_k(\theta, \phi)$ a amplitude de espalhamento.

Para o espalhamento elástico, com absorção e simetria azimutal, a amplitude de espalhamento pode ser escrita como uma soma de ondas parciais [8]:

$$F(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta), \quad (2.19)$$

onde P_l são os polinômios de Legendre,

$$f_l(k) = \frac{\eta_l - 1}{2i} \quad (2.20)$$

são as ondas parciais e η_l é expressa em termos da fase (complexa) δ_l (que representa o efeito do potencial) por

$$\eta_l = e^{2i\delta_l}. \quad (2.21)$$

Com isso,

$$F(k, \theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{2i\delta_l}) P_l(\cos \theta), \quad (2.22)$$

e as correspondentes seções de choque elástica e inelástica são escritas da seguinte forma [8]

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2, \quad (2.23)$$

$$\sigma_{inel} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - |\eta_l|^2]. \quad (2.24)$$

Como $\sigma_{el} + \sigma_{inel} = \sigma_{tot}$ obtemos

$$\sigma_{tot} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \text{Re } \eta_l]. \quad (2.25)$$

Das equações (2.21) e (2.22), para $\theta = 0$ (espalhamento na direção frontal) a parte imaginária da amplitude é dada por

$$\text{Im } F(k, 0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \text{Re } \eta_l]. \quad (2.26)$$

Comparando a equação acima com a equação (2.25) temos o conhecido *Teorema Óptico*

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im } F(k, 0) \quad (2.27)$$

no sistema do centro de momento. No sistema do laboratório o Teorema Óptico é dado por [10]

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{p} \text{Im } f(\theta_L = 0), \quad (2.28)$$

onde θ_L é o ângulo de espalhamento no laboratório e p é o momento da partícula incidente. Outra dedução do Teorema Óptico no contexto da matriz S é apresentada no Apêndice A.

2.5 Cinemática do espalhamento

Nesta seção, discutimos as variáveis usadas na descrição do espalhamento elástico. Antes de iniciar, vamos introduzir algumas notações, utilizando a convenção usual em física de altas energias: $\hbar = c = 1$.

O quadri-vetor energia momento é definido por

$$q = (E, \vec{p}), \quad (2.29)$$

onde E é a energia e $\vec{p}$ é o momento tridimensional. O produto interno de dois quadri-vetores $q_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ e $q_2 = (E_2, \vec{p}_2)$ é dado por

$$q_1 q_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2, \quad (2.30)$$

onde $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$; trata-se de um invariante de Lorentz, ou seja, o mesmo valor em qualquer sistema inercial. Logo $qq = q^2$ é um invariante e seu valor é

$$q^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (2.31)$$

onde m é a massa.

2.5.1 Variáveis independentes e o processo de espalhamento

Consideremos o evento de colisão de duas partículas $a + b \rightarrow c + d$ e denotemos por q_a , q_b , q_c e q_d os quadrimomentos correspondentes (figura. 2.3).

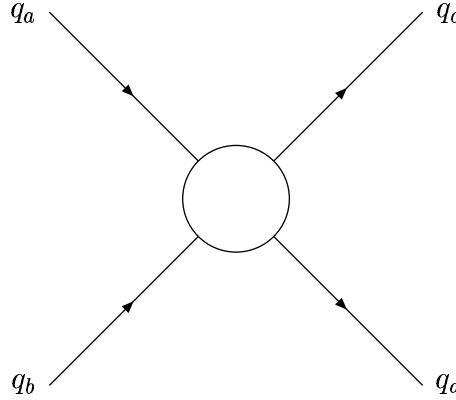


Figura 2.3: Espalhamento de duas partículas representado pelos quadrimomentos.

Desconsiderando os efeitos de spin, os dois pares de quadrimomentos q_a, q_b e q_c, q_d determinam completamente os estados inicial e final, respectivamente. A amplitude que descreve o processo pode depender somente destes quadrimomentos, isto é, em princípio, de 16 variáveis. Entretanto, vamos mostrar que ela depende apenas de duas.

A amplitude F deve ser um invariante de Lorentz, então deve depender dos invariantes que podem ser construídos a partir dos quadri-momentos envolvidos

$$q_a^2, q_b^2, q_c^2, q_d^2, q_a q_b, q_a q_c, q_a q_d, q_b q_c, q_b q_d, q_c q_d. \quad (2.32)$$

Os invariantes ((2.32) e (2.31))

$$q_a^2 = m_a^2, q_b^2 = m_b^2, q_c^2 = m_c^2, q_d^2 = m_d^2 \quad (2.33)$$

são parâmetros fixos, não constituindo variáveis. As seis grandezas restantes, são de fato variáveis e podem ser usadas para descrever o processo de espalhamento. Entretanto, elas não são todas independentes, pois da conservação do quadrimomento temos

$$q_a + q_b = q_c + q_d. \quad (2.34)$$

Esta equação de quadrivetores é equivalente a quatro equações simples, de modo que o número de variáveis independentes se reduz a (seis menos quatro) duas variáveis.

É importante ressaltar que a escolha de quais variáveis usar não é arbitrária. Se fossem escolhidos, por exemplo $q_a q_d$ e $q_c q_b$ a escolha seria impossível. De fato, multiplicando a

equação (2.34) por q_a , q_b , q_c e q_d , respectivamente e usando (2.31) são obtidas as quatro equações

$$q_a(q_c + q_d) = m_a^2 + q_a q_b \quad (2.35a)$$

$$q_b(q_c + q_d) = m_b^2 + q_a q_b \quad (2.35b)$$

$$q_c(q_a + q_b) = m_c^2 + q_c q_d \quad (2.35c)$$

$$q_d(q_a + q_b) = m_d^2 + q_c q_d. \quad (2.35d)$$

Das duas primeiras obtemos

$$(q_a - q_b)(q_c + q_d) = 0 \quad (2.36)$$

e das duas últimas

$$(q_c - q_d)(q_a + q_b) = 0. \quad (2.37)$$

Adicionando e subtraindo as equações (2.36) e (2.37) obtemos

$$q_a q_c = q_b q_d \quad (2.38a)$$

e

$$q_a q_d = q_b q_c. \quad (2.38b)$$

Então se $q_a q_d$ é uma variável, $q_b q_c$ não serve como segunda variável. Da mesma forma $q_a q_c$ ou $q_b q_d$ podem ser usados como variáveis do processo, mas não ambos ao mesmo tempo.

Pode-se verificar explicitamente que existem apenas duas variáveis independentes e são seis os invariantes que podem ser usados.

$$q_a q_b, \quad q_c q_d, \quad q_a q_c, \quad q_b q_d, \quad q_a q_d, \quad q_b q_c. \quad (2.39)$$

Podemos escolher quaisquer dois invariantes independentes e em geral são escolhidas duas combinações lineares independentes dos invariantes (2.39).

2.5.2 Sistemas de Lorentz para a descrição do processo de espalhamento

O uso de um referencial pode tornar-se mais conveniente que outro se as variáveis expressas nele tomam formas mais simples. Dois destes referenciais são o sistema do laboratório e o sistema do centro de momento.

O sistema do laboratório

É o sistema onde uma das partículas do estado inicial, antes da colisão, está em repouso. Por exemplo, a partícula b . Então usamos a notação

$$\begin{aligned} q_a &= (E_a, \vec{p}_a) \\ q_b &= (m_b, 0) \\ q_c &= (E_c, \vec{p}_c) \\ q_d &= (E_d, \vec{p}_d). \end{aligned} \tag{2.40}$$

As variáveis mais convenientes são as energias E_a , E_c , E_d e $\cos \theta_L$, onde θ_L é o ângulo entre a direção da partícula incidente e da partícula espalhada. Estas variáveis podem ser facilmente escritas em função de invariantes. Se $m_a = m_c$ e $m_b = m_d$

$$E_a = \frac{1}{m_b}(q_a q_b) \tag{2.41}$$

é a energia no laboratório da partícula incidente,

$$E_c = \frac{1}{m_b}(q_b q_c) \tag{2.42}$$

é a energia no laboratório da partícula espalhada e

$$E_d = \frac{1}{m_b}(q_b q_d) \tag{2.43}$$

é a energia no laboratório da partícula alvo após o espalhamento.

O ângulo de espalhamento vem do produto escalar entre q_a e q_c

$$q_a q_c = E_a E_c - |\vec{p}_a| |\vec{p}_c| \cos \theta_L. \tag{2.44}$$

O sistema do centro de momento

O sistema do centro de momento (CM) é definido por

$$\vec{q}_a + \vec{q}_b = \vec{q}_c + \vec{q}_d = 0. \tag{2.45}$$

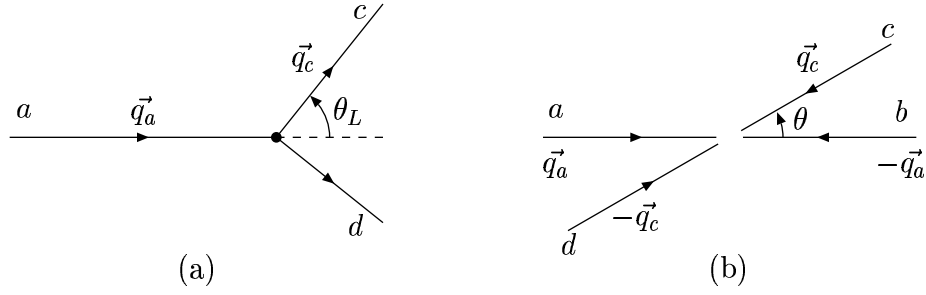


Figura 2.4: Processo de espalhamento $a + b \rightarrow c + d$ visto do (a) sistema do laboratório e (b) do centro de momento.

Então

$$|\vec{q}_a| = |\vec{q}_b|, \quad |\vec{q}_c| = |\vec{q}_d|. \quad (2.46)$$

Usamos a seguinte notação

$$\begin{aligned} q_a &= (E_a, \vec{k}_a) \\ q_b &= (E_b, -\vec{k}_a) \\ q_c &= (E_c, \vec{k}_c) \\ q_d &= (E_d, -\vec{k}_c). \end{aligned} \quad (2.47)$$

A energia no centro de momento é dada por

$$E_{CM}^2 = (q_a + q_b)^2 = (q_c + q_d)^2. \quad (2.48)$$

Calculada neste sistema

$$E_{CM}^2 = (E_a + E_b)^2 = (E_c + E_d)^2. \quad (2.49)$$

2.5.3 As variáveis s , t e u

As variáveis s , t e u são invariantes de Lorentz introduzidas por Mandelstam em 1958 [11]. São denominadas *variáveis de Mandelstam* e definidas por

$$s = (q_a + q_b)^2 \quad (2.50a)$$

$$t = (q_a - q_c)^2 \quad (2.50b)$$

$$u = (q_a - q_d)^2. \quad (2.50c)$$

Estas equações não são independentes, pois somando-as,

$$s + t + u = q_a^2 + q_b^2 + q_c^2 + q_d^2 + 2q_a(q_a + q_b - q_c - q_d) \quad (2.51)$$

e usando (2.31) e (2.34) obtemos

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2. \quad (2.52)$$

O significado físico pode ser interpretado de duas formas. Uma é que s é o quadrado da energia no centro de momento (s é invariante) e t e u são o quadrado do quadrimomento transferido entre as partículas a e c e a e d , respectivamente. A outra forma é que s é o quadrado da energia no centro de momento se a e b ou c e d são as partículas no estado inicial, t é o quadrado da energia no centro de momento se b e d ou a e c são as partículas no estado inicial e u é o quadrado da energia no centro de momento se b e c ou a e d são as partículas no estado inicial. Nesta interpretação cada variável é descrita por um processo diferente. O processo no qual s é a energia no centro de momento é chamado canal s , o processo no qual t é a energia no centro de momento é chamado de canal t , o mesmo ocorre para u .

Vamos discutir agora o caso de nosso interesse, o espalhamento elástico de partículas com massas iguais. Denotando por m a massa, $k = |\vec{k}|$ e θ o módulo do momento e o ângulo de espalhamento no centro de massa, as fórmulas (2.50) são expressas por

$$s = 4(k^2 + m^2) \quad (2.53a)$$

$$t = -2k^2(1 - \cos \theta) \quad (2.53b)$$

$$u = -2k^2(1 + \cos \theta). \quad (2.53c)$$

E a relação (2.52) tem a forma

$$s + t + u = 4m^2. \quad (2.54)$$

Como $k \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, a região cinemática, ou física, para o espalhamento elástico de massas iguais é dada por

$$s \geq 4m^2, \quad -4k^2 \leq t \leq 0, \quad -4k^2 \leq u \leq 0. \quad (2.55)$$

Outra forma de se escrever s é em termos da energia E da partícula incidente no sistema do laboratório [3, 12]

$$s = 2(m^2 + mE). \quad (2.56)$$

2.5.4 Seção de choque total e parâmetro ρ

A seção de choque total é uma das principais grandezas físicas que caracterizam um processo de espalhamento. Através do Teorema Óptico, deduzido na seção 2.4 e Apêndice A, ela é expressa em termos da parte imaginária da amplitude de espalhamento elástica frontal. Em termos da amplitude invariante o Teorema Óptico tem a forma (Apêndice A)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \text{Im } F(s, t=0). \quad (2.57)$$

Neste trabalho estamos interessados na região de altas energias, caracterizada por

$$\sqrt{s} > 10 \text{ GeV}$$

e no estudo do espalhamento pp e $\bar{p}p$, para os quais, $m \sim 0.938 \text{ GeV}$. Neste caso, $4m^2 \sim 3.5 \text{ GeV}$ e de (2.53a), podemos aproximar $s = 4k^2 + 4m^2 \sim 4k^2$. Com isso, o Teorema Óptico é dado por

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{\text{Im } F(s, t=0)}{s}. \quad (2.58)$$

Outra grandeza importante na caracterização do espalhamento é associada à fase e à parte real da amplitude de espalhamento elástica frontal. Expressando,

$$F(s, t=0) = \text{Re } F(s, t=0) + i \text{Im } F(s, t=0) = |F(s, t=0)| e^{i\phi(s, t=0)}, \quad (2.59)$$

o chamado *parâmetro ρ* é dado em termos da fase ϕ por

$$\rho(s) = \frac{1}{\tan \phi(s, t=0)} \quad (2.60)$$

e deste modo,

$$\rho(s) = \frac{\text{Re } F(s, t=0)}{\text{Im } F(s, t=0)}. \quad (2.61)$$

Sendo $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ conectados através das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento é natural pensar em Relações de Dispersão como um formalismo analítico de estudo e, de fato, este é o objetivo deste trabalho.

Na próxima seção discutimos e apresentamos os dados experimentais de σ_{tot} e ρ que serão utilizados em nossa análise.

2.6 Dados experimentais

Neste trabalho utilizamos somente dados de espalhamentos próton-próton (pp) e anti-próton-próton ($\bar{p}p$), uma vez que tratam-se dos espalhamentos com dados experimentais na faixa mais alta de energia investigada até o momento. Faremos uso de σ_{tot} e ρ obtidos com aceleradores e de σ_{tot} obtidos de experiências com raios cósmicos.

2.6.1 Dados de aceleradores

No caso de experimento de aceleradores, dados sobre seção de choque total σ_{tot} para o espalhamento pp e $\bar{p}p$ e valores para o parâmetro ρ foram acumulados por muito tempo. Atualmente as informações experimentais vão até $\sqrt{s}$ igual 62.5 GeV e 1.8 TeV para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$, respectivamente. A base de dados analisada e compilada pelo Particle Data Group (PDG) tornou-se uma referência padrão e os arquivos de dados estão disponíveis em [4]. Como análises recentes mostraram que estes dados são estáveis para $\sqrt{s} \geq 9$ GeV [13], utilizamos conjuntos de dados para energias maiores ou iguais a 10 GeV; os erros estatístico e sistemático são somados em quadratura. Os dados para σ_{tot} próton-próton σ_{tot}^{pp} e antipróton-próton $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ para $\sqrt{s} \geq 10$ GeV são mostrados nas tabelas 2.1 e 2.2 e na figura 2.5. Já os dados para o parâmetro ρ próton-próton ρ^{pp} e antipróton-próton $\rho^{\bar{p}p}$ são mostrados nas tabelas 2.3 e 2.4 e na figura 2.6. Gostaríamos de ressaltar que estes dados correspondem a versão de 2002 do PDG.

Em geral, são feitos ajustes simultâneos de dados experimentais de σ_{tot} e ρ . Embora alguns autores digam corretamente que este procedimento maximiza o número de dados, deve-se lembrar que resultados importantes foram obtidos através de ajustes de dados somente para a seção de choque.

Neste ponto, lembramos rapidamente algumas diferenças na determinação de σ_{tot} e ρ . A seção de choque total é uma quantidade experimental, determinada basicamente pela contagem do número de eventos elásticos e inelásticos no processo de espalhamento. Por outro lado, ρ é um parâmetro de ajuste de dados para a seção de choque diferencial na região de interferência Coulomb-Nuclear. Então os valores extraídos para ρ dos experimentos são dependentes de modelo [14, 15]. Isto coloca alguns limites na interpretação de σ_{tot} e ρ como quantidades físicas com o mesmo status.

Estas observações sugerem a investigação do efeito de ajustes simultâneos e individuais para σ_{tot} e ρ , o que será feito no capítulo 5.

2.6.2 Dados de raios cósmicos

Para colisões pp a seção de choque total σ_{tot} também pode ser obtida de experimentos de raios cósmicos. Entretanto, estes resultados são dependentes de modelo, já que são obtidos da seção de choque de produção próton-ar σ_{p-ar}^{prod} . Nas energias de raios cósmicos ($\sqrt{s} \sim 6 - 40$ TeV) podemos identificar dois conjuntos distintos de estimativas, um representado pelos resultados da colaboração Fly's Eye [16] junto com os da colaboração Akeno [17], e o outro por dados de Gaisser, Sukhatme, Yodh (GSY) [18] com os de Nikolaev [19]. Todos

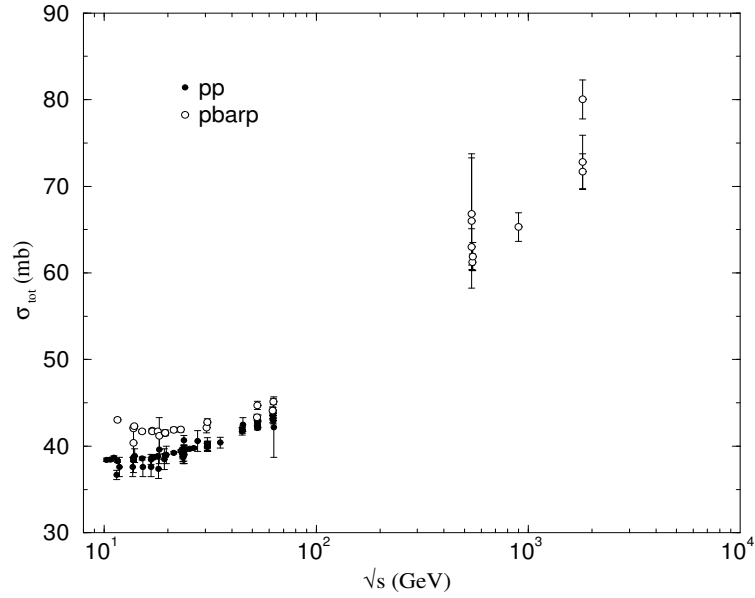


Figura 2.5: Seção de choque total para os espalhamentos próton-próton σ_{tot}^{pp} e antipróton-próton $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ em função da energia no centro de massa - dados obtidos em aceleradores [4].

estes dados são mostrados na figura 2.7, junto com os dados de aceleradores, e na tabela 2.5. As discrepâncias entre estes dois conjuntos vêm das incertezas na determinação da seção de choque σ_{p-ar}^{prod} , e das incertezas na conexão entre σ_{p-ar}^{prod} e a seção de choque total pp , como discutido em detalhes por Engel, Gaisser, Lipari e Stanev [20]. Por esta razão também investigaremos dois conjuntos diferentes de informações experimentais:

- Conjunto I: Dados de acelerador $\bar{p}p$ e pp + Akeno + Fly's Eye
- Conjunto II: Dados de acelerador $\bar{p}p$ e pp + Nikolaev + GSY, [15].

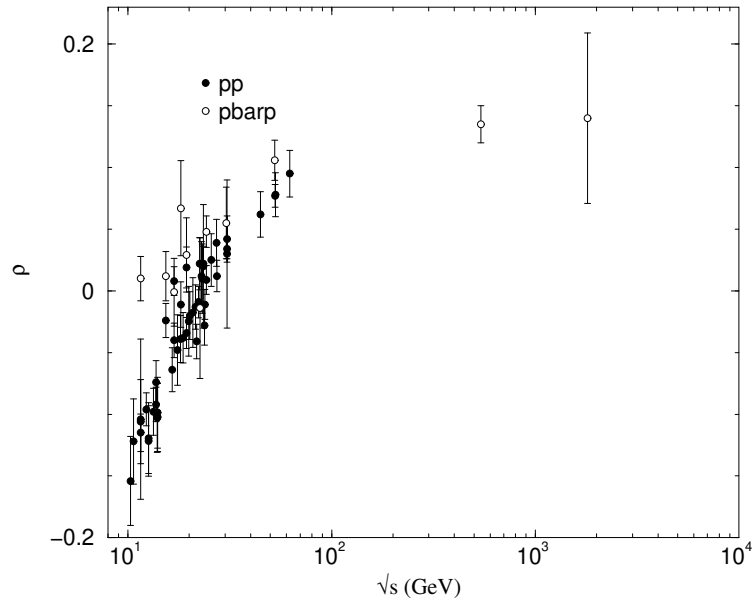


Figura 2.6: Parâmetro ρ para os espalhamentos próton-próton ρ^{pp} e antipróton-próton $\rho^{\bar{p}p}$ em função da energia no centro de massa - dados de aceleradores [4].

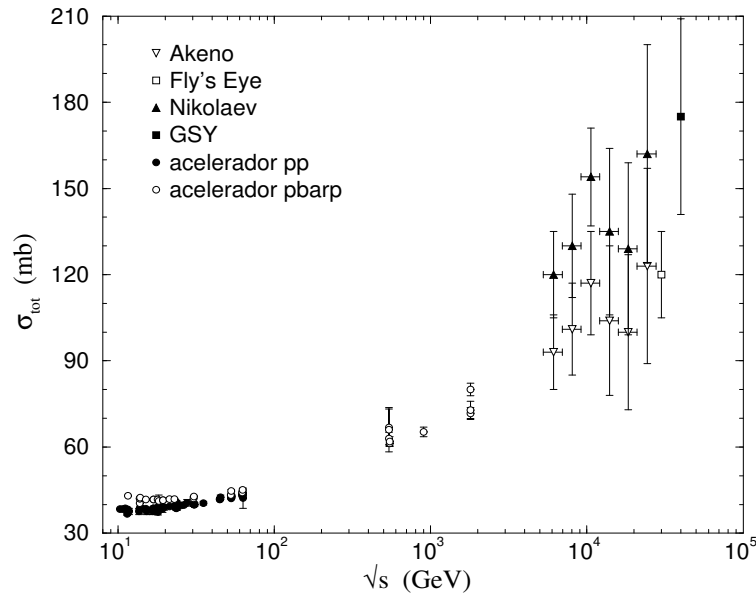


Figura 2.7: Seção de choque total: dados de aceleradores e de raios cósmicos

Tabela 2.1: Dados experimentais de aceleradores da seção de choque total próton-próton σ_{tot}^{pp} para $\sqrt{s} > 10$ GeV [4]

$\sqrt{s}$ (GeV)	σ_{tot}^{pp} (mb)	$\sqrt{s}$ (GeV)	σ_{tot}^{pp} (mb)
10.246	38.430 ± 0.270	23.764	40.680 ± 0.550
10.694	38.440 ± 0.270	23.882	39.000 ± 1.000
11.124	38.650 ± 0.300	24.152	39.590 ± 0.220
11.457	36.680 ± 0.530	25.294	39.690 ± 0.230
11.538	38.280 ± 0.190	26.383	39.770 ± 0.220
11.779	37.600 ± 1.290	27.600	40.600 ± 1.200
13.626	37.600 ± 1.290	30.600	40.100 ± 0.400
13.763	38.700 ± 2.460	30.600	40.220 ± 0.300
13.763	38.460 ± 0.190	30.600	40.110 ± 0.250
13.763	38.390 ± 0.250	30.600	39.910 ± 0.570
13.899	38.900 ± 0.800	30.600	40.070 ± 0.240
15.065	38.580 ± 0.190	30.600	40.200 ± 0.800
15.189	37.000 ± 1.290	30.700	40.100 ± 0.200
16.662	37.600 ± 1.290	30.800	40.000 ± 0.600
16.662	38.470 ± 0.580	35.200	40.420 ± 0.870
16.830	38.690 ± 0.200	44.699	41.700 ± 0.400
16.830	38.620 ± 0.250	44.700	41.900 ± 0.240
17.910	38.830 ± 0.200	44.900	41.890 ± 0.570
18.015	37.400 ± 1.290	45.200	42.500 ± 0.800
18.170	39.600 ± 2.290	52.800	43.010 ± 0.370
19.224	38.500 ± 1.390	52.800	42.380 ± 0.240
19.418	38.980 ± 0.200	52.800	42.100 ± 0.200
19.418	38.900 ± 0.260	52.800	42.850 ± 0.590
19.659	39.000 ± 1.000	52.800	42.710 ± 0.350
21.264	39.240 ± 0.200	52.900	42.400 ± 0.400
22.961	39.420 ± 0.200	53.200	42.900 ± 0.700
23.500	39.650 ± 0.300	62.300	43.550 ± 0.400
23.500	39.400 ± 0.300	62.401	43.100 ± 0.400
23.500	39.130 ± 0.560	62.500	44.000 ± 0.620
23.500	38.800 ± 0.250	62.700	42.960 ± 0.380
23.500	38.900 ± 0.700	62.700	43.820 ± 0.450
23.600	38.700 ± 0.700	62.800	44.100 ± 0.900
23.764	39.210 ± 0.920	63.000	42.200 ± 3.500

Tabela 2.2: Dados experimentais de aceleradores da seção de choque total antipróton-próton $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ para $\sqrt{s} > 10$ [4]

$\sqrt{s}$ (GeV)	$\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ (mb)	$\sqrt{s}$ (GeV)	$\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ (mb)
11.538	43.050 ± 0.182	30.600	42.800 ± 0.354
13.763	40.400 ± 1.706	52.600	43.320 ± 0.343
13.763	42.120 ± 0.186	52.800	44.710 ± 0.456
13.763	42.040 ± 0.227	62.300	44.120 ± 0.400
13.865	42.330 ± 0.140	62.700	45.140 ± 0.367
15.065	41.700 ± 0.224	540.000	66.800 ± 6.477
16.830	41.790 ± 0.238	540.000	66.000 ± 7.739
16.830	41.720 ± 0.276	541.005	63.000 ± 2.100
17.910	41.690 ± 0.224	545.994	61.260 ± 0.930
18.170	41.200 ± 2.102	547.007	61.900 ± 1.623
19.418	41.510 ± 0.224	899.996	65.300 ± 1.657
19.418	41.540 ± 0.358	1800.012	71.710 ± 2.020
21.263	41.900 ± 0.261	1800.012	80.030 ± 2.240
22.961	41.910 ± 0.269	1800.012	72.800 ± 3.100
30.400	42.130 ± 0.576		

Tabela 2.3: Dados de aceleradores do parâmetro ρ para o espalhamento próton-próton ρ^{pp} para $\sqrt{s} > 10$ GeV [4]

$\sqrt{s}$ (GeV)	ρ^{pp}	$\sqrt{s}$ (GeV)	ρ^{pp}
10.281	-0.154 ± 0.036	19.848	-0.025 ± 0.028
10.642	-0.122 ± 0.034	20.125	-0.020 ± 0.019
11.525	-0.106 ± 0.034	20.818	-0.018 ± 0.028
11.538	-0.115 ± 0.015	21.424	-0.013 ± 0.018
11.538	-0.104 ± 0.065	21.700	-0.041 ± 0.014
12.324	-0.096 ± 0.013	22.171	-0.009 ± 0.013
12.625	-0.122 ± 0.028	22.494	0.022 ± 0.021
12.625	-0.119 ± 0.029	23.002	0.012 ± 0.028
13.342	-0.098 ± 0.019	23.205	0.010 ± 0.028
13.763	-0.092 ± 0.014	23.500	0.022 ± 0.014
13.763	-0.074 ± 0.017	23.500	0.020 ± 0.050
13.899	-0.103 ± 0.028	23.764	-0.028 ± 0.016
13.966	-0.099 ± 0.029	23.882	-0.011 ± 0.012
13.966	-0.102 ± 0.028	24.300	0.009 ± 0.012
15.373	-0.024 ± 0.014	25.612	0.025 ± 0.021
16.523	-0.064 ± 0.018	27.185	0.039 ± 0.019
16.830	-0.040 ± 0.014	27.361	0.012 ± 0.013
16.830	0.008 ± 0.012	30.600	0.030 ± 0.060
17.540	-0.048 ± 0.029	30.600	0.034 ± 0.008
18.138	-0.039 ± 0.019	30.600	0.042 ± 0.019
18.170	-0.011 ± 0.018	44.700	0.062 ± 0.018
18.682	-0.038 ± 0.020	52.800	0.077 ± 0.009
19.370	-0.034 ± 0.013	52.900	0.078 ± 0.018
19.418	0.019 ± 0.017	62.400	0.095 ± 0.019

Tabela 2.4: Dados de aceleradores do parâmetro ρ para o espalhamento antipróton-próton $\rho^{\bar{p}p}$ para $\sqrt{s} > 10$ GeV [4]

$\sqrt{s}(GeV)$	$\rho^{\bar{p}p}$	$\sqrt{s}(GeV)$	$\rho^{\bar{p}p}$
11.538	0.010 ± 0.023	24.300	0.045 ± 0.013
15.373	0.012 ± 0.025	30.400	0.055 ± 0.029
16.830	-0.001 ± 0.032	52.600	0.106 ± 0.019
18.170	0.067 ± 0.045	541.005	0.135 ± 0.015
19.418	0.029 ± 0.039	1800.012	0.140 ± 0.069
22.632	-0.014 ± 0.077		

Tabela 2.5: Estimativas para seção de choque total σ_{tot}^{pp} (em mb) de dados de raios cósmicos

$\sqrt{s}$ (TeV)	Akeno [17]	Fly's Eye [16]	Nikolaev [19]	GSY [18]
6.2	93 ± 14	-	120 ± 15	-
8.1	101 ± 16	-	130 ± 18	-
10.6	117 ± 18	-	154 ± 17	-
14.0	104 ± 26	-	135 ± 29	-
18.4	100 ± 27	-	129 ± 30	-
24.3	124 ± 34	-	162 ± 38	-
30.0	-	120 ± 15	-	-
40.0	-	-	-	175 ± 34

Capítulo 3

Princípios, teoremas e limites assintóticos

Esforços para descrever o espalhamento de hádrons usando alguns princípios da Teoria Quântica de Campos têm sido feitos pois, como discutido, atualmente ainda não existe um tratamento para os processos que envolvem pequeno momento transferido, com base puramente na Cromodinâmica Quântica (CQ) [3, 5]. Neste capítulo são discutidos quatro dos princípios gerais mais importantes e três teoremas associados ao crescimento da seção de choque σ_{tot} .

3.1 Princípios gerais

O formalismo está baseado nas propriedades da matriz S , a matriz que conecta os estados inicial $|i\rangle$ e o estado final $|f\rangle$ em um processo de espalhamento

$$|f\rangle = S|i\rangle \tag{3.1}$$

e suas conseqüências para a amplitude de espalhamento. Em geral, o formalismo está baseado em somente quatro princípios gerais: Invariância de Lorentz, Unitaridade, Analiticidade e Cruzamento.

3.1.1 Invariância de Lorentz

Assume-se que a matriz S é um invariante de Lorentz, o que implica que a amplitude de espalhamento pode ser expressa em termos de invariantes de Lorentz, em geral representados pelas variáveis de Mandelstam s, t, u [3].

3.1.2 Unitaridade

Nesta seção trabalharemos com a matriz S para estados discretos [3, 21, 22]. O tratamento para estados contínuos é feito no apêndice A.

O símbolo $|\alpha\rangle$ representa o estado de um conjunto de partículas especificado por um conjunto de números quânticos discretos representado por α . Suponhamos que estes estados sejam ortonormais,

$$\langle\alpha'|\alpha\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}. \quad (3.2)$$

Aqui, se α representa os parâmetros $l, m, n, \dots$, $\delta_{\alpha'\alpha} = \delta_{l'l}\delta_{m'm}\delta_{n'n}\dots$, onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker. O conjunto de estados é completo, ou seja, qualquer estado $|\phi\rangle$ pode ser escrito como

$$|\phi\rangle = \sum_{\alpha} C_{\alpha}|\alpha\rangle, \quad C_{\alpha} = \langle\alpha|\phi\rangle. \quad (3.3)$$

Suponhamos que temos um sistema que interage por um período finito de tempo entre t_1 e t_2 . Antes do tempo t_1 o estado inicial é o estado $|i\rangle$; depois do tempo t_2 o estado é $|f\rangle$. O operador ou matriz de espalhamento S é definido como o operador que fornece a amplitude da probabilidade de transição do estado inicial $|i\rangle$ para o estado final $|f\rangle$. O símbolo S também é usado para designar a matriz cujos elementos são as amplitudes da probabilidade de transição

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle. \quad (3.4)$$

A probabilidade de passar do estado inicial $|i\rangle$ para o estado final $|f\rangle$ é o quadrado da amplitude de probabilidade S_{fi} . Denotando a probabilidade por P_{fi} temos

$$P_{fi} = |S_{fi}|^2 = \langle f|S|i\rangle^* \langle f|S|i\rangle = \langle i|S^{\dagger}|f\rangle \langle f|S|i\rangle = S_{if}^{\dagger} S_{fi}, \quad (3.5)$$

onde $S^{\dagger}$ é a adjunta de S .

Incluindo o estado inicial $|i\rangle$ entre os estados finais (nada acontece), a conservação da probabilidade implica que a probabilidade total é um

$$P_{tot} = \sum_f P_{fi} = \sum_f \langle i|S^{\dagger}|f\rangle \langle f|S|i\rangle = 1 \quad (3.6)$$

e usando o projetor $\sum_f |f\rangle\langle f|$,

$$P_{tot} = \langle i|S^{\dagger}S|i\rangle = 1. \quad (3.7)$$

Agora podemos derivar a propriedade de unitariedade de S . Considere um estado $|j\rangle$ que é superposição de estados ortonormais $|n\rangle$

$$|j\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad \sum |a_n|^2 = 1. \quad (3.8)$$

Substituindo $|j\rangle$ na equação (3.7), obtemos

$$\langle j|S^\dagger S|j\rangle = \sum_{n,n'} a_n^* a_n \langle n'|S^\dagger S|n\rangle = 1. \quad (3.9)$$

Para que a equação acima seja válida para qualquer escolha dos a_n , é necessário que

$$\langle n'|S^\dagger S|n\rangle = \delta_{n'n} \quad (3.10)$$

ou

$$S^\dagger S = I, \quad (3.11)$$

onde I é a matriz identidade. Então, S é uma matriz unitária.

A matriz S inclui a probabilidade de que não ocorra interação. Para eliminar esta propriedade de S define-se a matriz T

$$S = I + 2iT, \quad T = \frac{S - I}{2i}. \quad (3.12)$$

Substituindo T na equação (3.11) obtemos

$$I = S^\dagger S = (I - 2iT^\dagger)(I + 2iT) = I + 2i(T - T^\dagger) + 4T^\dagger T \quad (3.13)$$

e daí

$$i[T^\dagger - T] = 2T^\dagger T \quad (3.14)$$

que é a condição de unitariedade para a matriz T [3, 21, 22].

3.1.3 Analiticidade

Para um sistema físico, causalidade significa que uma entrada num tempo t_0 não pode originar uma resposta num tempo anterior a t_0 . Em um processo de espalhamento a entrada e a resposta estão associadas às ondas incidente e espalhada, respectivamente. É possível provar que causalidade implica em analiticidade da amplitude de espalhamento ([23, 24] e seção 4.2) e isto significa que a amplitude física (como função da variável s) é o limite de uma função mais geral das variáveis de Mandelstam complexas, analiticamente

definida no plano complexo s , com exceção de singularidades impostas para que ela seja consistente com os outros princípios [3].

A idéia de que amplitudes, ou funções resposta de algum tipo, podem permitir continuação analítica para fora de seu domínio de definição física não é nova. As chamadas relações de Kramers-Kronig (a serem estudadas no próximo capítulo), que são baseadas nas propriedades analíticas do índice de refração para a passagem da radiação eletromagnética através da matéria como uma função da frequência, são de 1926 [25]. De fato, é possível mostrar que para qualquer sistema linear fisicamente permitido de acordo com o princípio da causalidade a Transformada de Fourier da função resposta possui propriedades analíticas similares. Nesse sentido analiticidade é consequência da causalidade [26].

Considere o espalhamento elástico $a + b \rightarrow a + b$ de partículas de mesma massa. Para as variáveis complexas s e t , a amplitude física, $s \geq 4m^2$, $t_0 \leq t \leq 0$ é o limite de uma função analítica mais geral quando s tende ao eixo real por valores positivos da parte imaginária

$$F(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(s + i\epsilon, t = 0). \quad (3.15)$$

$\mathcal{F}$ é analítica real,

$$\mathcal{F}(s, t) = \mathcal{F}^*(s^*, t), \quad (3.16)$$

regular no plano s exceto por pólos e cortes de ramo ao longo do eixo real. Na região onde $u \geq 4m^2$ ($s + t + u = 4m^2$), o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(s - i\epsilon, t = 0) \quad (3.17)$$

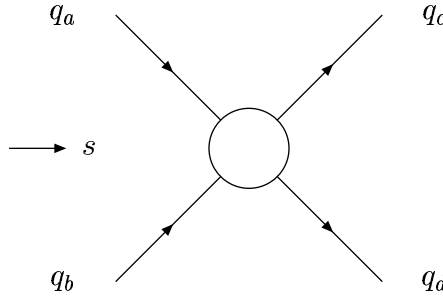
é a amplitude de espalhamento para o processo $a + \bar{b} \rightarrow a + \bar{b}$, onde $\bar{b}$ é a antipartícula de b [3, 27]. Falaremos mais desta propriedade na próxima seção e na seção 4.3.

3.1.4 Cruzamento

Em termos gerais, simetria de cruzamento é a relação que conecta a amplitude da interação partícula-partícula à amplitude da interação partícula-antipartícula. Para tornar isto mais claro, vamos recordar algumas notações introduzidas no capítulo 2.

Consideremos o processo de espalhamento

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (3.18)$$

Figura 3.1: Espalhamento de partículas no canal s .

como ilustrado na figura 3.1.

A amplitude que descreve este processo é F , por conveniência usaremos aqui F como função de todos os quadrimomentos $F = F(q_a, q_b, q_c, q_d)$. Entretanto lembramos que a amplitude é função de duas variáveis invariantes de Lorentz

$$s = (q_a + q_b)^2 = (q_c + q_d)^2 \quad (3.19)$$

$$t = (q_a - q_c)^2 = (q_b - q_d)^2 \quad (3.20)$$

de modo que $F = F(s, t)$.

Também definimos a variável u

$$u = (q_a - q_d)^2. \quad (3.21)$$

Para o espalhamento de partículas de massas iguais m , a região física para este processo é (2.55)

$$s \geq 4m^2, \quad t \leq 0, \quad u \leq 0. \quad (3.22)$$

O invariante s é a energia no centro de massa para o processo (3.18) que é chamado de canal s .

Consideremos agora o processo

$$a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d, \quad (3.23)$$

onde $\bar{b}$ e $\bar{c}$ são as antipartículas de b e c , respectivamente. Este processo é ilustrado na figura 3.2.

A amplitude que descreve este processo é $F' = F'(q'_a, q'_c, q'_b, q'_d)$. Em função das variáveis de Mandelstam

$$s' = (q'_a + q'_c)^2 \quad (3.24)$$

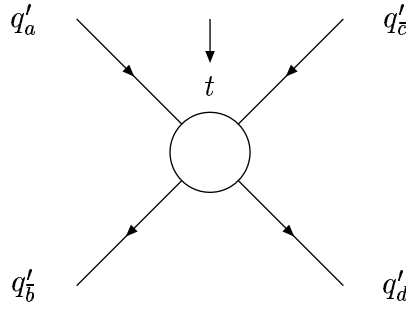


Figura 3.2: Espalhamento de partículas no canal t .

$$t' = (q'_a - q'_b)^2 \quad (3.25)$$

temos $F' = F'(s', t')$. Neste caso $u' = (q'_a - q'_d)^2$.

A região física para este processo é

$$s' \geq 4m^2, \quad t' \leq 0, \quad u' \leq 0, \quad (3.26)$$

e o processo (3.23) é chamado de canal t .

Consideremos também o processo

$$a + \bar{d} \rightarrow \bar{b} + c. \quad (3.27)$$

A região física para este processo é

$$s'' \geq 4m^2, \quad t'' \leq 0, \quad u'' \leq 0, \quad (3.28)$$

e, é descrito por $F''(s'', t'')$ ou $F'' = F''(q''_a, q''_d, q''_b, q''_c)$ e recebe o nome de canal u .

A priori, não há conexão entre as amplitudes F dos canais s , t e u dos processos (3.18), (3.23) e (3.27). Entretanto, o princípio de Simetria de Cruzamento diz que elas são de fato conectadas [28]. Este princípio pode ser formulado na equação

$$F'(q'_a, q'_c, q'_b, q'_d) = F(q_a = q'_a, q_b = -q'_b, q_c = -q'_c, q_d = q'_d). \quad (3.29)$$

Isto significa que, se a amplitude para o canal s é conhecida, a amplitude para a segunda reação é obtida da primeira somente trocando o sinal do quadrimomento da antipartícula e deixando o da partícula inalterado. Esta relação é algumas vezes chamada de regra de substituição.

É mais fácil entender a relação de cruzamento em termos dos quadrimomentos, entretanto, na maior parte das aplicações é mais interessante expressarmos estas relações em termos das variáveis de Mandelstam. Da regra de substituição

$$F'(s', t') = F(s = (q'_a - q'_b)^2 = t', t = (q'_a + q'_c)^2 = s'). \quad (3.30)$$

Vale lembrar que $u = u'$.

A mesma regra também é usada para relacionar o canal s ao canal u ou o canal u ao canal t .

Usando a regra de substituição, a região física para os canais s , t , u pode ser escrita da seguinte forma, quando temos partículas de massas iguais

Canal s ($a + b \rightarrow c + d$): $s \geq 4m^2$, $t \leq 0$, $u \leq 0$;

Canal t ($a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d$): $s' = t$, $t' = s$, $u' = u$, $t \geq 4m^2$, $s \leq 0$, $u \leq 0$;

Canal u ($a + \bar{d} \rightarrow \bar{b} + c$): $s'' = u$, $t'' = t$, $u'' = s$, $u \geq 4m^2$, $s \leq 0$, $t \leq 0$

[3, 21, 28].

As regiões físicas para os canais s , t e u podem ser representadas graficamente. Para isto usamos um teorema da geometria euclidiana. Se g_a , g_b e g_c são as distâncias perpendiculares de um ponto P aos lados do triângulo ABC e h_a , h_b , h_c são as alturas relativas aos lados a , b , c respectivamente, então

$$ag_a + bg_b + cg_c = ah_a = bh_b = ch_c = 2A, \quad (3.31)$$

onde A é a área do triângulo ABC .

Dividindo a equação acima por c temos

$$\frac{a}{c}g_a + \frac{b}{c}g_b + g_c = h_c. \quad (3.32)$$

Comparando com (2.54)

$$s + t + u = 4m^2 \quad (3.33)$$

vemos que somente é necessário identificar

$$\frac{a}{c}g_a = u \quad \frac{b}{c}g_b = s \quad g_c = t \quad h_c = 4m^2 \quad (3.34)$$

e temos uma relação entre s , t e u . Então quaisquer três eixos coordenados que se interceptam formando um triângulo com $h_c = 4m^2$ serve para representar s , t e u em um plano. Uma escolha pode ser $a = b = c$ e $h_c = 4m^2$, ela é mostrada na figura 3.3 [12].

Como comentado antes, nosso principal interesse está no espalhamento pp e $\bar{p}p$ que são reações cruzadas com partículas de massas iguais:

$$p + p \rightarrow p + p \quad \bar{p} + p \rightarrow \bar{p} + p.$$

Neste caso para o canal s

$$F_{pp} = F_{pp}(s, t)$$

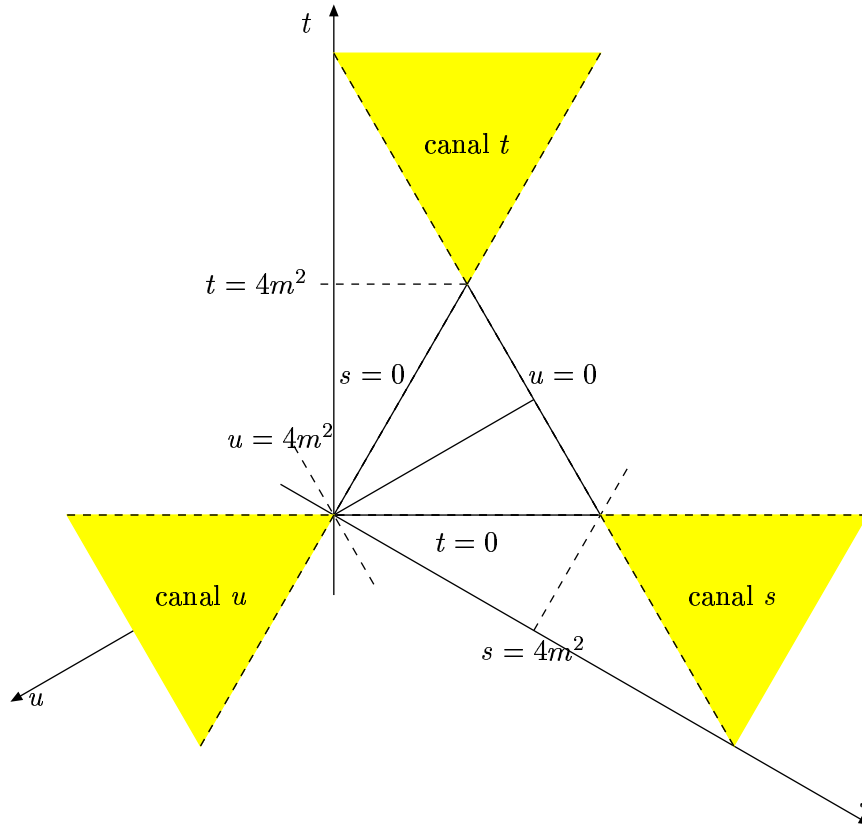


Figura 3.3: Representação gráfica das regiões físicas dos canais s , t , u .

e para o canal u

$$F_{\bar{p}p} = F_{\bar{p}p}(s', t') = F_{pp}(s = u, t)$$

(A variável t mantém o seu significado nos dois canais).

3.2 Teoremas

Os teoremas de altas energias podem ser classificados em dois tipos principais: aqueles derivados da Teoria Quântica de Campos Axiomática e aqueles derivados da Teoria Quântica de Campos Axiomática junto com algumas hipóteses adicionais, por exemplo de alguma condição vinda de resultados experimentais. Propriedades como unitaridade, analiticidade e limite polinomial, que são deduzidas de princípios gerais da teoria de campos, são essenciais na derivação dos teoremas e limites. Nesta seção falaremos somente em três teoremas fundamentais sobre o comportamento da seção de choque total e sobre a diferença entre as seções de choque partícula-partícula e partícula-antipartícula nas

regiões assintóticas [3, 27].

Para entendermos melhor o significado dos teoremas e limites nos quais estamos interessados é importante lembrar sobre o contexto histórico em que eles foram desenvolvidos. No fim dos anos 60 acreditava-se que a seção de choque total seria assintoticamente uma constante, e como consequência das relações de dispersão, o parâmetro ρ iria a zero através de valores negativos. Entretanto, no meio dos anos 70 descobriu-se, através de novos dados experimentais, que a seção de choque cresce com a energia e o parâmetro ρ toma valores positivos. Como consequência uma série de diferentes teoremas foi deduzida nestas duas décadas [3, 10].

3.2.1 Limite polinomial

Esta propriedade da amplitude de espalhamento $F(s, t)$ tem um papel essencial na dedução das relações de dispersão e na derivação dos teoremas e limites de altas energias.

O limite polinomial foi derivado da teoria de Araki-Haag da Teoria quântica de campos por Epstein, Glaser e Martin em 1969 [29], e seu resultado é

$$|F(s, t)| < |s|^N, \quad s > s_0 \quad t_0 < t \leq 0 \quad (3.35)$$

para algum N , onde N é um número natural.

3.2.2 O limite de Froissart-Martin

Este resultado importante foi primeiro derivado por Froissart [30] através da representação de Mandelstam em 1961 e mais tarde provado diretamente da Teoria Quântica de Campos Local e consequências do Princípio de Unitaridade por Martin [31].

O limite de Froissart-Martin estabelece que para $s \rightarrow \infty$

$$\sigma_{tot} \leq C \log^2 \frac{s}{s_0} \quad (3.36)$$

para algum s_0 . Sob hipóteses adicionais pode-se inferir [76] $C = \pi/m_\pi^2 \sim 60$ mb, onde m_π é a massa do pion. A expressão é um limite no crescimento da seção de choque total [3].

3.2.3 O teorema de Pomeranchuk original

Quando este teorema foi deduzido acreditava-se que a seção de choque assintoticamente seria uma constante. Demonstrado por Pomeranchuk em 1958 [32], estabelece que se as seções de choque partícula-partícula e antipartícula-partícula tornam-se constantes assintoticamente e se a razão entre a parte real e a parte imaginária da amplitude de

espalhamento para $t = 0$ cresce mais devagar que $\ln s$, as duas seções de choque tornam-se assintoticamente iguais, ou seja, se

$$\sigma_{tot}^{ab} \rightarrow C_1, \quad \sigma_{tot}^{\bar{a}b} \rightarrow C_2 \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{Re} F(s, t=0)}{\operatorname{Im} F(s, t=0) \ln s} \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow \infty$$

então

$$\sigma_{tot}^{ab} = \sigma_{tot}^{\bar{a}b} \quad \text{quando } s \rightarrow \infty \quad (3.37)$$

[10, 27].

3.2.4 Teorema de Pomeranchuk revisado

Em 1973, baseado na hipótese de que as seções de choque total podem divergir assintoticamente e usando analiticidade e unitariedade Grumberg e Truong mostraram que [33]

$$\frac{\sigma_{tot}^{ab} - \sigma_{tot}^{\bar{a}b}}{\sigma_{tot}^{ab} + \sigma_{tot}^{\bar{a}b}} \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_{tot}^{ab}}{\sigma_{tot}^{\bar{a}b}} \rightarrow 1 \quad \text{quando } s \rightarrow \infty.$$

É importante notar que isto não implica no teorema de Pomeranchuk original pois $\sigma_{tot} \rightarrow \infty$. Supondo que as seções de choque σ_{tot}^{ab} e $\sigma_{tot}^{\bar{a}b}$ crescem com $(\ln s)^\gamma$, é possível mostrar que a diferença entre as seções de choque não pode crescer mais rápido que $(\ln s)^{\gamma/2}$ [10]

$$\Delta\sigma = |\sigma_{tot}^{ab} - \sigma_{tot}^{\bar{a}b}| < (\ln s)^{\gamma/2}.$$

Pelo teorema de Froissart-Martin $\sigma_{tot} \leq C \ln^2 s$, logo a diferença entre as seções de choque é limitada por

$$\Delta\sigma \leq \ln s.$$

Baseado no fato que experimentalmente $\sigma_{tot} \rightarrow \infty$ e princípios gerais é possível concluir que a diferença entre as seções de choque pp e $\bar{p}p$ é limitada por $\ln s$ e então pode divergir assintoticamente .

Capítulo 4

Relações de dispersão

Neste capítulo estudamos as relações de dispersão. Primeiro discutimos as transformadas de Hilbert e as relações de Kramers-Kronig, que são baseadas nas propriedades analíticas do índice de refração para a passagem de uma onda eletromagnética através da matéria em função da frequência [23]. Depois é feita a dedução da relação de dispersão na forma integral para a amplitude de espalhamento elástico próton-próton e antipróton-próton [10, 34, 35]. No limite de altas energias, a relação integral pode ser transformada numa forma diferencial, que é chamada de relação de analiticidade derivativa. Esta transformação também é apresentada em detalhes. Além disto, discutimos alguns teoremas sobre a somabilidade do operador diferencial obtido [36, 37, 38].

4.1 Transformada de Hilbert

Começamos considerando uma função $f(z)$ analítica no semiplano superior, tal que $|f(z)| \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$.

Consideremos a integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz, \quad (4.1)$$

onde C é o contorno mostrado na figura 4.1 e α é real. Por hipótese, $f(z)$ é analítica no interior e sobre C ; o mesmo ocorre com $1/(z - \alpha)$. Então, pelo Teorema de Cauchy-Goursat [39]

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 0 \quad (4.2)$$

e podemos escrever

$$\int_{-R}^{\alpha-r} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz + \int_{\alpha+r}^R \frac{f(x)}{x - \alpha} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 0, \quad (4.3)$$

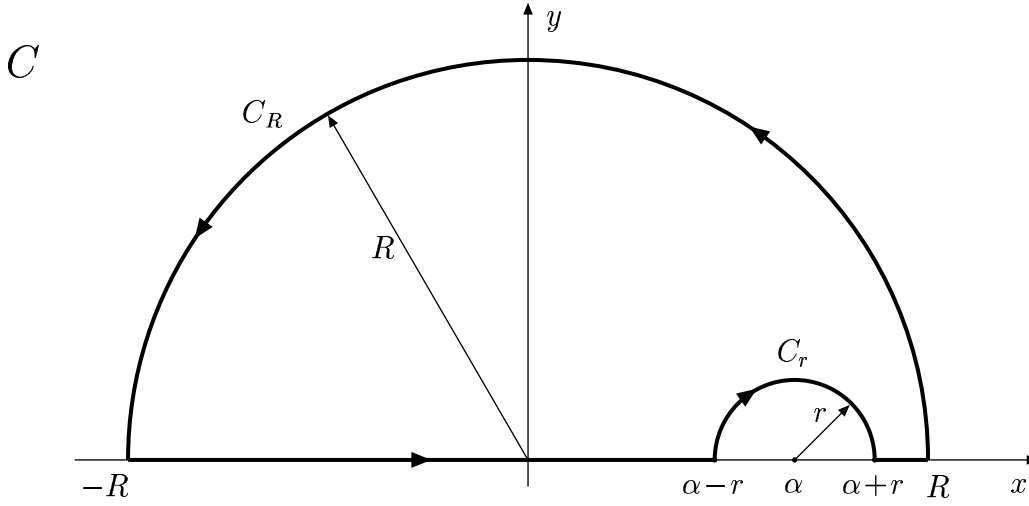


Figura 4.1: Contorno utilizado para obter a equação (4.13).

onde r é o raio da semicircunferência pequena centrada em $x = \alpha$ e R é o raio da semicircunferência grande centrada na origem. O raio r pode ser escolhido arbitrariamente pequeno e R pode ser escolhido arbitrariamente grande. Então, vejamos como cada termo da equação acima comporta-se nos limites $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$.

Sobre a semicircunferência C_R , $z = Re^{i\theta}$, então

$$\int_{C_R} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = iR \int_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - \alpha} e^{i\theta} d\theta \quad (4.4)$$

e daí, usando

$$\begin{aligned} |Re^{i\theta} - \alpha| &= ((R \cos \theta - \alpha)^2 + (R \sin \theta)^2)^{1/2} = (R^2 + \alpha^2 - 2R\alpha \cos \theta)^{1/2} \geq \\ &\geq (R^2 + \alpha^2 - 2R\alpha)^{1/2} = |R - \alpha|, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \right| \leq \frac{R}{|R - \alpha|} \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| d\theta. \quad (4.5)$$

Quando $R \rightarrow \infty$, $|f(z)| \rightarrow 0$ e $R/|R - \alpha| \rightarrow 1$, logo

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \right| \rightarrow 0 \text{ quando } R \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

O limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{\alpha-r} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx + \int_{\alpha+r}^R \frac{f(x)}{x - \alpha} dx \right] \quad (4.7)$$

é chamado valor principal da integral $f(x)/(x - \alpha)$ e é denotado por

$$P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x - \alpha} dx. \quad (4.8)$$

A integral sobre C_r pode ser reescrita da seguinte forma

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - \alpha} = f(\alpha) \int_{C_r} \frac{1}{z - \alpha} + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}. \quad (4.9)$$

Sobre C_r , $z = \alpha + re^{i\theta}$ e $dz = ire^{i\theta} d\theta$, de modo que

$$\int_{C_r} \frac{1}{z - \alpha} = i \int_{\pi}^0 d\theta = -i\pi \text{ para } r > 0. \quad (4.10)$$

Como f é contínua em α , para qualquer $\epsilon > 0$, existe δ tal que

$$|f(z) - f(\alpha)| < \epsilon \text{ para } |z - \alpha| \leq \delta.$$

Escolhendo $r = \delta$ temos

$$\left| \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \right| < \frac{\epsilon}{r} \quad (4.11)$$

para todo ponto de C_r . O comprimento de C_r é πr , logo

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \right| < \left(\frac{\epsilon}{r} \right) \pi r = \pi \epsilon. \quad (4.12)$$

Como ϵ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno segue que a integral sobre C_r é nula.

Então, tomando o limite $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$ na integral (4.3), podemos escrever

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \alpha} dx = i\pi f(\alpha), \quad (4.13)$$

onde, f é uma função complexa de variável real. Escrevendo f da seguinte forma

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x), \quad (4.14)$$

substituindo na equação (4.13),

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)}{x - \alpha} dx = i\pi (\operatorname{Re} f(\alpha) + i \operatorname{Im} f(\alpha)) \quad (4.15)$$

e igualando as partes reais e as partes imaginárias dos dois membros

$$\operatorname{Re} f(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - \alpha} dx, \quad (4.16a)$$

$$\operatorname{Im} f(\alpha) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - \alpha} dx. \quad (4.16b)$$

O par de equações acima é chamado Transformada de Hilbert [23].

4.2 Relações de Kramers-Kronig

Mostraremos agora que as equações (4.16) encontradas na seção anterior podem ser aplicadas às funções que descrevem quantidades físicas. Focalizaremos nossa aplicação no eletromagnetismo, mas os resultados podem ser bem mais gerais.

Consideremos um sistema físico para o qual uma entrada $I(t)$ está relacionada a uma resposta $R(t)$, de forma linear

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')I(t')dt' \quad (4.17)$$

Por exemplo, $I(t')$ pode ser o campo elétrico no tempo t' , e $R(t)$ a polarização no tempo t . Assumimos que G depende apenas de $t-t'$ porque queremos que o sistema responda a um impulso em t_0 , $I(t') = I_0\delta(t'-t_0)$, da mesma forma que responde a um impulso em $t_0 + \tau$, num tempo τ mais tarde. Para o primeiro caso,

$$R_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')I_0\delta(t'-t_0)dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0G(t-t_0). \quad (4.18)$$

Para o segundo caso

$$R_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')I_0\delta(t'-t_0-\tau)dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0G(t-t_0-\tau), \quad (4.19)$$

ou de outra forma,

$$R_2(t+\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0\delta(t-t_0) = R_1. \quad (4.20)$$

Também faremos algumas hipóteses sobre G com motivações físicas. Primeiro, de acordo com o princípio da causalidade, uma entrada em t não pode originar uma resposta num tempo anterior a t , ou seja, $G(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, então

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t G(t-t')I(t')dt', \quad (4.21)$$

que mostra que a resposta em t é a superposição de todas as entradas antes de t . A possibilidade de $G(\tau)$ ser singular para qualquer τ é excluída já que a resposta a um impulso $I(t') = I_0\delta(t'-t_0)$ é

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0G(t-t_0), \quad t > t_0 \quad (4.22)$$

e por razões físicas exigimos que a resposta seja sempre finita. Ainda faremos outra hipótese, um impulso num passado muito distante não influencia o presente. Isto pode ser escrito assim, $G(\tau) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

Consideremos agora a Transformada de Fourier da equação (4.17). Usando o teorema da convolução, vemos que

$$r(\omega) = g(\omega)i(\omega), \quad (4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} r(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{i\omega t} dt \\ g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{i\omega t} dt \\ i(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I(t)e^{i\omega t} dt. \end{aligned}$$

No eletromagnetismo, onde I é o campo elétrico E aplicado e R é a polarização P , geralmente denota-se $g(\omega)$ por $\chi(\omega)$, que se refere à susceptibilidade elétrica. Então

$$P(\omega) = \chi(\omega)E(\omega). \quad (4.24)$$

Assumindo que $G(\tau)$ satisfaz

$$\int_0^{\infty} |G(\tau)|^2 d\tau < \infty, \quad (4.25)$$

garantimos a existência de $g(\omega)$ limitada para todo ω .

Agora podemos mostrar que $g(\omega)$ pode ser estendida para o plano complexo z de forma que $g(z)$ satisfaça as condições sob as quais a transformada de Hilbert (4.16) é válida.

Primeiro $G(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, então

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t)e^{i\omega t} dt. \quad (4.26)$$

Estendemos esta relação para o plano complexo usando a definição

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t)e^{izt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t)e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt, \quad (4.27)$$

onde $z = \omega + i\omega'$.

Para $\omega' > 0$, o termo $e^{-\omega' t}$ é uma exponencial decrescente ($t > 0$). Para $0 < \theta < \pi$, temos

$$|g(z)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M_G \int_0^{\infty} e^{-[|z| \sin \theta] t} dt, \quad (4.28)$$

onde M_G é uma constante e $M_G \geq |G(t)|$ para $t > 0$. Então

$$|g(z)| \leq \frac{M_G}{\sqrt{2\pi}|z| \sin \theta}, \quad (4.29)$$

cujo limite é zero quando $|z| \rightarrow \infty$. Para $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$,

$$g(\omega, \omega' = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.30)$$

Como $G(t)$ é quadrado integrável, $g(\omega, \omega' = 0)$ também é (veja [24]). Então em qualquer direção do semiplano superior $|g(z)| \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Vamos mostrar que $g(z)$ é analítica no semiplano superior. Usando

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G(t) e^{izt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G(t) e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt \quad (4.31)$$

vemos que para $\omega' > 0$

$$\frac{d^n}{dz^n} g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G(t) \frac{d^n}{dz^n} e^{izt} dt = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^n G(t) e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt, \quad (4.32)$$

pois as integrais nas duas equações acima são uniformemente convergentes devido ao termo $e^{-\omega' t}$ ($\omega' > 0$ e $t > 0$). Daí $g(z)$ é analítica para $\omega' > 0$. Entretanto, as hipóteses feitas sobre $G(t)$ não nos permitem estender o domínio de analiticidade a $\omega' \geq 0$. Podemos dizer que $g(z)$ é limitada no eixo real. Assumimos então que G também tem um decaimento exponencial, o que implica que as integrais em (4.31) e (4.32) são uniformemente convergentes também para $\omega' = 0$ e g é analítica em $\omega' \geq 0$.

Então se $G(t)$ satisfaz as condições descritas acima, g , a Transformada de Fourier de G satisfaz as Transformadas de Hilbert (4.16)

$$\operatorname{Re} g(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{Im} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \quad (4.33a)$$

$$\operatorname{Im} g(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{Re} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (4.33b)$$

Nas integrais em (4.33) $\bar{\omega}$ é tal que $(-\infty < \bar{\omega} < \infty)$. Em geral $g(\omega)$ está definida somente para valores positivos de ω ($g(\omega)$ para $\omega < 0$ é a extensão de $g(\omega)$), mas estas integrais podem ser escritas de outra forma. $G(t)$ é real, então

$$g^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G^*(t) e^{-iz^* t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G(t) e^{-iz^* t} dt = g(-z^*). \quad (4.34)$$

Se z é real ($z = \omega$)

$$\operatorname{Re} g(\omega) - i \operatorname{Im} g(\omega) = \operatorname{Re} g(-\omega) + i \operatorname{Im} g(-\omega) \quad (4.35)$$

ou

$$\operatorname{Re} g(\omega) = \operatorname{Re} g(-\omega), \quad (4.36a)$$

$$\operatorname{Im} g(\omega) = -\operatorname{Im} g(-\omega), \quad (4.36b)$$

isto é, $\operatorname{Re} g(\omega)$ é uma função par e $\operatorname{Im} g(\omega)$ é uma função ímpar.

Reescrevemos (4.33a)

$$\operatorname{Re} g(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (4.37)$$

Na primeira integral, trocando $\bar{\omega} \rightarrow -\bar{\omega}$:

$$\operatorname{Re} g(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(-\bar{\omega})}{\bar{\omega} + \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (4.38)$$

Usando (4.36), obtemos

$$\operatorname{Re} g(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} \operatorname{Im} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (4.39)$$

Da mesma forma, reescrevendo (4.33b)

$$\operatorname{Im} g(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Re} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} - \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \quad (4.40)$$

fazendo $\bar{\omega} \rightarrow -\bar{\omega}$ na primeira integral

$$\operatorname{Im} g(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} g(-\bar{\omega})}{\bar{\omega} + \omega} d\bar{\omega} - \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \quad (4.41)$$

e usando (4.36), obtemos

$$\operatorname{Im} g(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} g(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (4.42)$$

Para a susceptibilidade elétrica χ , por exemplo, temos

$$\operatorname{Re} \chi(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} \operatorname{Im} \chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}, \quad (4.43a)$$

$$\operatorname{Im} \chi(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (4.43b)$$

As duas equações acima foram derivadas por Kramers e Kronig e são chamadas relações de Kramers-Kronig [23].

4.3 Relação de dispersão na forma integral

4.3.1 Singularidades da amplitude de espalhamento elástica

Estamos interessados no espalhamento elástico próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$) e, como vimos, no caso do espalhamento pp a amplitude física está definida para $s \geq 4m^2$ e $t \leq 0$. Também, como foi comentado (seção 3.1.3), é possível mostrar que $F_{pp}(s, t)$ é o limite de uma função mais geral, com s e t podendo tomar valores complexos [10, 27, 40, 41]. Em particular, se tomarmos $t = 0$, então $F_{pp}(s, t = 0)$ é o limite de uma função analítica $\mathcal{F}$ [10, 27]

$$F_{pp}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(s + i\epsilon, t = 0). \quad (4.44)$$

A amplitude para o espalhamento $\bar{p}p$ na direção frontal é outro limite da função $\mathcal{F}$. O Princípio de Cruzamento (seção 3.1.4) estabelece que para ir da amplitude pp para a amplitude $\bar{p}p$ basta trocar s por u . A amplitude para $\bar{p}p$ é então obtida de $\mathcal{F}$ por [10, 27]

$$F_{\bar{p}p}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(u + i\epsilon, t = 0). \quad (4.45)$$

Lembrando que $u = 4m^2 - s - t$ (equação (2.54)), para $t = 0$, podemos escrever

$$F_{\bar{p}p}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(-s + 4m^2 - i\epsilon, t = 0). \quad (4.46)$$

A simetria torna-se clara, se introduzirmos uma nova variável [10]. Como a passagem da amplitude pp para a amplitude $\bar{p}p$ corresponde à troca $s \leftrightarrow u$, definimos

$$w = s - u. \quad (4.47)$$

A troca $s \leftrightarrow u$ corresponde à troca do sinal de w

$$u - s = -(s - u) = -w. \quad (4.48)$$

Como em $t = 0$, $u = -s + 4m^2$

$$w = s - u = s - (-s + 4m^2) = 2s - 4m^2 \quad (4.49)$$

e de (2.56), $s = 2m^2 + 2mE$

$$w = 4m^2 + 4mE - 4m^2 = 4mE \quad (4.50)$$

ou

$$E = \frac{w}{4m} = \frac{s - u}{4m}. \quad (4.51)$$

Sendo E a energia no laboratório para a reação pp , a amplitude para a reação $\bar{p}p$ é obtida trocando-se E por $-E$. Em função da variável E escrevemos de forma simétrica,

$$G_{pp}(E, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(E + i\epsilon, t = 0) \quad (4.52a)$$

$$G_{\bar{p}p}(E, t = 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(-E - i\epsilon, t = 0), \quad (4.52b)$$

onde $\mathcal{G}(E, t = 0) = \mathcal{F}(2mE + 2m^2, t = 0)$.

A teoria e os argumentos necessários para descrição da estrutura das singularidades da amplitude de espalhamento $\mathcal{F}$ são muito complicados e ultrapassam os objetivos deste trabalho. Por isto, aqui vamos descrever esta estrutura sem fornecer as demonstrações que levam a ela. Este assunto é tratado de forma detalhada em [21, 22, 42].

A estrutura de cortes da amplitude de espalhamento elástica na direção frontal é como segue [10]. Temos um pólo em $u = m_\pi^2$, onde m_π é a massa do pión, um corte que começa em $u = 4m_\pi^2$ e vai até $u = +\infty$ e dois cortes de $s = -\infty$ até $s = 0$ e $s = 4m^2$ até $s = +\infty$. Já na variável E , o corte do lado direito começa em $E = m$ e o corte da esquerda começa em $E = -m$. O pólo ocorre em $E = m - m_\pi^2/(2m)$ e o corte de $u = 4m_\pi^2$ começa em $E = m - 2m_\pi^2$. Entre os cortes do lado direito e do lado esquerdo, exceto pelo pólo do pión, a amplitude é real no eixo real.

Do princípio de reflexão de Schwarz [39], se Γ é um segmento finito do eixo real, D um domínio do plano complexo z e a intersecção de D com o eixo real é Γ então qualquer função $f(z)$ tal que 1) $f(z)$ é analítica em D ; 2) $Imf(z) = 0$ sobre Γ deve satisfazer a equação

$$f(z^*) = [f(z)]^* \text{ para } z, z^* \in D. \quad (4.53)$$

A função $f(z)$ é chamada analítica real em D . Segue deste resultado que se $\mathcal{F}(s, t)$ é analítica num domínio que se estende dos dois lados do eixo real s , incluindo o segmento do eixo real no qual $Im\mathcal{F}(s, t) = 0$, então $\mathcal{F}(s, t)$ deve satisfazer

$$\mathcal{F}(s^*, t) = \mathcal{F}^*(s, t) \quad (4.54)$$

para s e s^* no domínio de analiticidade em s . Só para lembrar, assumimos t real. A mesma propriedade também vale para $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}(E^*, t = 0) = \mathcal{G}^*(E, t = 0). \quad (4.55)$$

Então se $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{G}$) tem um corte no eixo real, sua parte imaginária muda de sinal quando vamos de um lado para outro do eixo real, mas a parte real é a mesma em ambos

os lados. Em outras palavras a descontinuidade através do corte é imaginária [10, 40]

$$\mathcal{F}(s + i\epsilon) - \mathcal{F}(s - i\epsilon) = \mathcal{F}(s + i\epsilon) - \mathcal{F}^*(s + i\epsilon) = 2i \operatorname{Im} \mathcal{F}(s + i\epsilon). \quad (4.56)$$

Nos nossos cálculos desprezaremos a contribuição do pólo em $u = m_\pi^2$ e do corte que começa em $u = 4m_\pi^2$, pois estamos interessados no limite de altas energias e eles terão uma influência pequena em nossas respostas [10].

4.3.2 Relação de dispersão na forma integral para a amplitude de espalhamento elástica

Na seção anterior falamos sobre as singularidades da amplitude de espalhamento e agora que conhecemos a estrutura de singularidades de $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{G}$) podemos escolher um contorno adequado para usar o teorema de Cauchy.

Vamos introduzir duas amplitudes que são combinações lineares das amplitudes pp e $\bar{p}p$

$$\mathcal{G}_\pm = \frac{\mathcal{G}_{pp} \pm \mathcal{G}_{\bar{p}p}}{2}, \quad (4.57)$$

sendo a amplitude $\mathcal{G}_+$ par e a amplitude $\mathcal{G}_-$ ímpar sob cruzamento.

Usando o teorema de Cauchy [39], podemos escrever para qualquer ponto E_0 não pertencente aos cortes de $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}(E_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E}, \quad (4.58)$$

onde C é o contorno mostrado na figura 4.2, e escrevemos $\mathcal{G}(E) = \mathcal{G}(E, t = 0)$ para simplificar a notação. Então em termos das partes individuais do contorno C temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(E_0) = & \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_0} \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E} + \int_{C_1} \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E} + \int_{C_2} \frac{\mathcal{G}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} d\bar{E} + \int_m^R \frac{\mathcal{G}(E' + i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \right. \\ & \left. + \int_R^m \frac{\mathcal{G}(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_{-m}^{-R} \frac{\mathcal{G}(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_{-R}^{-m} \frac{\mathcal{G}(E' + i\epsilon)}{E' - E_0} dE' \right], \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde $E' = \operatorname{Re} \bar{E}$, C_0 é a circunferência grande de raio R centrada na origem e C_1 e C_2 as circunferências de raio ϵ centradas em $E' = -m$ e $E' = m$, respectivamente. Assumimos que ϵ é pequeno o suficiente para que possa ser desprezado nos denominadores.

Consideremos agora só as integrais sobre as semiretas, elas podem ser escritas da seguinte maneira

$$\int_m^R \frac{\mathcal{G}(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_m^R \frac{\mathcal{G}(-E' - i\epsilon) - \mathcal{G}(-E' + i\epsilon)}{E' + E_0} dE'. \quad (4.60)$$

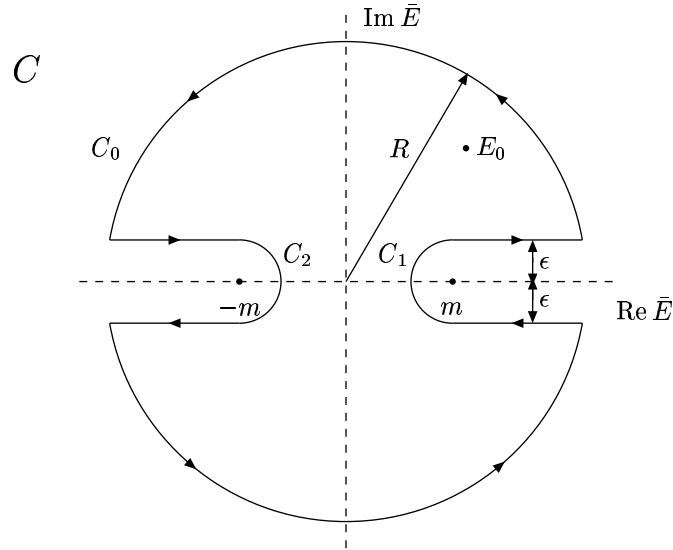


Figura 4.2: Contorno utilizado na derivação das relações de dispersão na forma integral para a amplitude de espalhamento elástica.

Se $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+$ é par, então $\mathcal{G}(E' + i\epsilon) = \mathcal{G}(-E' - i\epsilon)$ e

$$\int_m^R \frac{\mathcal{G}_+(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}_+(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' + \int_m^R \frac{\mathcal{G}_+(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}_+(E' - i\epsilon)}{E' + E_0} dE' \quad (4.61a)$$

Por outro lado, se $\mathcal{G} = \mathcal{G}_-$ é ímpar $\mathcal{G}(E' + i\epsilon) = -\mathcal{G}(-E' - i\epsilon)$ e

$$\int_m^R \frac{\mathcal{G}_-(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}_-(E' - i\epsilon)}{E' - E_0} dE' - \int_m^R \frac{\mathcal{G}_-(E' - i\epsilon) - \mathcal{G}_-(E' + i\epsilon)}{E' + E_0} dE'. \quad (4.61b)$$

Da analiticidade real (4.55) $\mathcal{G}^*(E) = \mathcal{G}(E^*)$,

$$\mathcal{G}(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}(E' - i\epsilon) = \mathcal{G}(E' + i\epsilon) - \mathcal{G}^*(E' + i\epsilon) = 2i \operatorname{Im} \mathcal{G}(E' + i\epsilon), \quad (4.62)$$

e daí, podemos escrever (4.61)

$$2i \int_m^R \operatorname{Im} \mathcal{G}_+(E' + i\epsilon) \left[\frac{1}{E' - E_0} + \frac{1}{E' + E_0} \right] dE' \quad (4.63a)$$

$$2i \int_m^R \operatorname{Im} \mathcal{G}_-(E' + i\epsilon) \left[\frac{1}{E' - E_0} - \frac{1}{E' + E_0} \right] dE'. \quad (4.63b)$$

Assumindo que quando $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$, as integrais sobre C_0 , C_1 e C_2 tendem a zero, podemos escrever usando (4.59) e (4.63)

$$\mathcal{G}_+(E_0) = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \operatorname{Im} \mathcal{G}_+(E') \left[\frac{1}{E' - E_0} + \frac{1}{E' + E_0} \right] dE', \quad (4.64a)$$

$$\mathcal{G}_-(E_0) = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \text{Im } G_-(E') \left[\frac{1}{E' - E_0} - \frac{1}{E' + E_0} \right] dE', \quad (4.64b)$$

onde $G_\pm(E') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_\pm(E' + i\epsilon)$.

Queremos as expressões acima para E_0 na região física do canal s , ou seja E_0 real e maior que m . Escrevemos $E_0 = E + i\eta$ e fazemos E_0 tender ao eixo real por valores positivos da parte imaginária, isto é

$$\mathcal{G}_\pm(E + i\eta) = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \text{Im } G_\pm(E') \left[\frac{1}{E' - E - i\eta} \pm \frac{1}{E' + E + i\eta} \right] dE' \quad (4.65)$$

no limite $\eta \rightarrow 0^+$.

Usando a relação [35, 43]

$$\frac{1}{E' - E \pm i\eta} = P \frac{1}{E' - E} \mp i\pi \delta(E' - E) \quad \eta \rightarrow 0, \quad (4.66)$$

a equação (4.65) vai a

$$\begin{aligned} G_\pm(E) &= \frac{1}{\pi} \left[P \int_m^\infty \text{Im } G_\pm(E') \left[\frac{1}{E' - E} \pm \frac{1}{E' + E} \right] dE' + i\pi \int_m^\infty \text{Im } G_\pm(E') \delta(E' - E) dE' \mp \right. \\ &\quad \left. \mp i\pi \int_m^\infty \text{Im } G_\pm(E') \delta(E' + E) dE' \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

ou, usando as propriedades da função delta

$$G_\pm(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \text{Im } G_\pm(E') \left[\frac{1}{E' - E} \pm \frac{1}{E' + E} \right] dE' + i \text{Im } G_\pm(E) \quad (4.68)$$

igualando as partes reais

$$\begin{aligned} \text{Re } G_+(E) &= \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \text{Im } G_+(E') \left[\frac{1}{E' - E} + \frac{1}{E' + E} \right] dE' \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E' \text{Im } G_+(E')}{E'^2 - E^2} dE', \end{aligned} \quad (4.69a)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } G_-(E) &= \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \text{Im } G_-(E') \left[\frac{1}{E' - E} - \frac{1}{E' + E} \right] dE' \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E \text{Im } G_-(E')}{E'^2 - E^2} dE'. \end{aligned} \quad (4.69b)$$

Relações da forma (4.69) são chamadas de *Relações de Dispersão*. Este nome é utilizado por razões históricas, como já dissemos este tipo de relação foi derivada primeiro por Kramers e Kronig.

Se a integral em (4.69a) não converge por causa do comportamento assintótico de $\mathcal{G}_+$ quando $E \rightarrow \infty$, ou por causa da contribuição das semicircunferências no infinito devemos modificar a aproximação feita.

Consideremos a função ímpar

$$\mathcal{H}_- = \mathcal{G}_+/E. \quad (4.70)$$

Utilizando o contorno C da figura 4.2 e lembrando que temos um pólo em $E' = 0$, nos limites $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$ temos

$$\frac{\mathcal{G}_+(E_0)}{E_0} = \frac{\text{Re } \mathcal{G}_+(0)}{E_0} + \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \frac{\text{Im } G_+(E')}{E'} \left[\frac{1}{E' - E_0} - \frac{1}{E' + E_0} \right] dE'. \quad (4.71)$$

Escrevendo $E_0 = E + i\eta$ e tomando o limite $\eta \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\text{Re } G_+(E) = \text{Re } \mathcal{G}_+(0) + \frac{E}{\pi} P \int_m^\infty \frac{\text{Im } G_+(E')}{E'} \left[\frac{1}{E' - E} - \frac{1}{E' + E} \right] dE' \quad (4.72)$$

(o pólo é real pois $\text{Im } \mathcal{G}(E') = 0$ entre os dois cortes). A equação acima é chamada *Relação de Dispersão com uma Subtração* e o primeiro termo do lado direito é chamado *constante de subtração*. É claro que a relação de dispersão com subtração tem propriedade de convergência melhor do que a relação sem subtração. Por outro lado há uma constante adicional a ser determinada. Se tentarmos o mesmo truque para a amplitude

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{G}_-/E \quad (4.73)$$

reproduziremos a relação (4.69b). De fato da mesma forma que para $\mathcal{H}_-$, podemos escrever

$$\frac{\text{Re } \mathcal{G}_-(E_0)}{E_0} = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \frac{\text{Im } G_-(E')}{E'} \left[\frac{1}{E' - E} + \frac{1}{E' + E} \right] dE', \quad (4.74)$$

o resíduo $-\mathcal{G}(0)/E$ no pólo em $E' = 0$ é zero pois $\mathcal{G}_-$ é ímpar, contínua e real em $E' = 0$. Escrevendo $E_0 = E + i\eta$, tomando o limite $\eta \rightarrow 0^+$ e igualando as partes reais, obtemos

$$\text{Re } G_-(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E \text{Im } G_-(E')}{E'^2 - E^2} dE', \quad (4.75)$$

que é a equação (4.69b).

Então tentamos

$$\mathcal{H}_- = \frac{\mathcal{G}_-}{E^2}, \quad (4.76)$$

e usamos o contorno C da figura 4.2. Agora temos um pólo de ordem dois em $E' = 0$ e o resíduo em $E' = 0$ é

$$\lim_{E' \rightarrow 0} \frac{d}{dE'} \left(\frac{\mathcal{G}_-(E')}{E' - E_0} \right) = -\frac{\mathcal{G}'_-(0)}{E_0} - \frac{\mathcal{G}_-(0)}{E_0^2}, \quad (4.77)$$

onde $\mathcal{G}'_-(0)$ é a derivada de $\mathcal{G}$ em $E' = 0$, $\mathcal{G}'_-(0) = \text{Re } \mathcal{G}'_-(0)$ e $\mathcal{G}_-(0) = 0$. Com os mesmos procedimentos usados anteriormente obtemos

$$\begin{aligned} \text{Re } G_-(E) &= \text{Re } \mathcal{G}'_-(0)E + \frac{1}{\pi}P \int_m^\infty \frac{E^2 \text{Im } G_-(E')}{E'^2} \left[\frac{1}{E' - E} - \frac{1}{E' + E} \right] dE' \\ &= \text{Re } \mathcal{G}'_-(0)E + \frac{1}{\pi}P \int_m^\infty \frac{2E^3 \text{Im } G_-(E')}{E'^2(E'^2 - E^2)} dE' \end{aligned} \quad (4.78)$$

Aqui a subtração resulta num termo linear em E e a relação acima é chamada de relação de dispersão com duas subtrações [10, 44, 43].

As relações de dispersão integrais podem ser obtidas para um número arbitrário k de subtrações. O procedimento é análogo ao utilizado para obter as relações com uma e duas subtrações. Então para um número k de subtrações [45]

$$\begin{aligned} \frac{\text{Re } G_\pm(E)}{E^k} &= -\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dE'^{(k-1)}} \left[\frac{\mathcal{G}_\pm(E')}{E' - E} \right]_{E'=0} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \frac{\text{Im } G_\pm(E')}{E'^k} \left[\frac{1}{E' - E} \pm \frac{(-1)^k}{E' + E} \right] dE'. \end{aligned} \quad (4.79)$$

No limite de altas energias ($E \gg m$) podemos escrever as relações de dispersão encontradas acima em termos da variável s . Da equação (2.56)

$$s = 2m(E + m) \approx 2mE \quad \text{para} \quad E \gg m. \quad (4.80)$$

Fazendo a mudança de variável $s = 2mE$ nas equações (4.69), $m \rightarrow 2m^2 = s_0$, $G_\pm(E) \rightarrow F_\pm(s)$, temos

$$\text{Re } F_\pm(s) = \frac{1}{\pi}P \int_{s_0}^\infty \text{Im } F_\pm(s') \left[\frac{1}{\frac{1}{2m}(s' - s)} \pm \frac{1}{\frac{1}{2m}(s' + s)} \right] \frac{ds'}{2m} \quad (4.81)$$

ou

$$\text{Re } F_\pm(s) = \frac{1}{\pi}P \int_{s_0}^\infty \text{Im } F_\pm(s') \left[\frac{1}{s' - s} \pm \frac{1}{s' + s} \right] ds'. \quad (4.82)$$

Da mesma forma para a relação par com uma subtração (4.72) e ímpar com duas subtrações (4.78)

$$\text{Re } F_+(s) = K_1 + \frac{s}{\pi}P \int_{s_0}^\infty \frac{\text{Im } F_+(s')}{s'} \left[\frac{1}{s' - s} - \frac{1}{s' + s} \right] ds', \quad (4.83)$$

$$\text{Re } F_-(s) = K_2s + \frac{s^2}{\pi}P \int_{s_0}^\infty \frac{\text{Im } F_-(s')}{s'^2} \left[\frac{1}{s' - s} - \frac{1}{s' + s} \right] ds', \quad (4.84)$$

onde K_1 e K_2 são constantes.

Para k subtrações

$$\begin{aligned} \frac{\text{Re } F_{\pm}(s)}{s^k} &= -\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dE'^{(k-1)}} \left[\frac{\mathcal{G}_{\pm}(E')}{E' - E} \right]_{E'=0} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_m^{\infty} \frac{\text{Im } F_{\pm}(s')}{s'^k} \left[\frac{1}{s' - s} \pm \frac{(-1)^k}{s' - s} \right] ds'. \end{aligned} \quad (4.85)$$

As amplitudes pares e ímpares acima podem ser combinadas para obtermos as relações para pp e $\bar{p}p$. Usando também o teorema óptico e a definição de ρ , temos para uma subtração

$$\sigma_{tot}^{pp}(s) \rho^{pp}(s) = \frac{K}{s} + \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\sigma_{tot}^{pp} + \sigma_{tot}^{\bar{p}p}}{s'^2 - s^2} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{s'(\sigma_{tot}^{pp} - \sigma_{tot}^{\bar{p}p})}{s'^2 - s^2} ds' \quad (4.86a)$$

$$\sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) \rho^{\bar{p}p}(s) = \frac{K}{s} + \frac{s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\sigma_{tot}^{pp} + \sigma_{tot}^{\bar{p}p}}{s'^2 - s^2} ds' - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{s'(\sigma_{tot}^{pp} - \sigma_{tot}^{\bar{p}p})}{s'^2 - s^2} ds', \quad (4.86b)$$

onde K é a constante de subtração.

4.4 Relações de analiticidade derivativas

Como já dissemos neste trabalho estamos interessados no espalhamento pp e $\bar{p}p$. Na região de altas energias para estes processos, dados experimentais indicam um crescimento suave da seção de choque total, aproximadamente com $(\ln s)^2$ e $\sigma_{tot}^{\bar{p}p} - \sigma_{tot}^{pp} \sim 0$ quando $s \rightarrow 0$. Estas condições permitem o uso de relações de dispersão com uma subtração [15]. Da seção anterior

$$\text{Re } F_+(s) = K + \frac{2s^2}{\pi} P \int_{s_0}^{+\infty} \frac{\text{Im } F_+(s')}{s'(s'^2 - s^2)} ds', \quad (4.87a)$$

$$\text{Re } F_-(s) = \frac{2s}{\pi} P \int_{s_0}^{+\infty} \frac{\text{Im } F_-(s')}{s'^2 - s^2} ds', \quad (4.87b)$$

onde K é a constante de subtração e para o espalhamento pp , $\bar{p}p$, $s_0 = 2m^2 \sim 1.8 \text{ GeV}^2$.

Nas relações de dispersão na forma integral (4.87) a parte real da amplitude é obtida como uma integral sobre a parte imaginária (ou seção de choque total). Então a conexão entre as duas quantidades é não local: a parte real depende do comportamento de σ_{tot} em todas as energias e o cálculo destas integrais, numérico ou analítico, em geral, é difícil. Experimentalmente, no limite de altas energias, as seções de choque são suaves e as relações na forma integral podem ser trocadas por relações quasi-locais chamadas relações de analiticidade derivativas [10, 34, 46]. Os primeiros trabalhos sobre este assunto foram

feitos por Gribov e Migdal [47, 48], Bronzan [49], Jackson [41], Bronzan, Kane e Sukhatme [7]. A forma deduzida pelos últimos autores é dada por

$$\operatorname{Re} F_+(s) = K + s^\alpha \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha - 1 + \frac{d}{d \ln s} \right) \right] \frac{\operatorname{Im} F_+(s)}{s^\alpha}, \quad (4.88a)$$

$$\operatorname{Re} F_-(s) = s^\alpha \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{d}{d \ln s} \right) \right] \frac{\operatorname{Im} F_-(s)}{s^\alpha}, \quad (4.88b)$$

onde α é um parâmetro real. Em geral é usado apenas o primeiro termo da expansão da tangente e $\alpha = 1$. Estas relações foram analisadas e discutidas por vários autores [36, 37, 38, 50, 51, 52, 53, 54]. Em particular, Heidrich e Kazes [51] e posteriormente Menon et al. [54] indicaram a condição de que α deve estar no intervalo $(0, 2)$ e por outro lado, Eichmann e Dronkers [50] obtiveram um resultado independente de parâmetro. Mostramos a seguir que, de fato o resultado é independente de parâmetro [34].

4.4.1 Relação de analiticidade derivativa

Vamos considerar a amplitude par na equação (4.87) e negligenciaremos no momento a constante de subtração. Definindo $s' = e^{\xi'}$, $s = e^\xi$ e $g(\xi') = \operatorname{Im} F_+(e^{\xi'})/e^{\xi'}$ podemos escrever

$$\operatorname{Re} F_+(e^\xi) = \frac{2e^{2\xi}}{\pi} P \int_{\ln s_0}^{+\infty} \frac{g(\xi') e^{\xi'}}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} d\xi' = \frac{e^\xi}{\pi} P \int_{\ln s_0}^{+\infty} \frac{g(\xi')}{\sinh(\xi' - \xi)} d\xi'. \quad (4.89)$$

Assumindo que g é uma função analítica do seu argumento (como é em nosso caso de interesse), fazemos a expansão

$$g(\xi') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{d\xi'^n} g(\xi') \Big|_{\xi'=\xi} \frac{(\xi' - \xi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} (\xi' - \xi)^n \quad (4.90)$$

e então, integramos termo a termo a equação (4.89). No limite de altas energias consideramos a aproximação $s_0 \rightarrow 0$, então $\ln s_0 \rightarrow -\infty$. Com estas condições, obtemos

$$\operatorname{Re} F_+(e^\xi) = \frac{e^\xi}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi' - \xi)^n}{\sinh(\xi' - \xi)} d\xi'. \quad (4.91)$$

Agora, definindo $y = \xi' - \xi$, a fórmula acima pode ser colocada na forma

$$\operatorname{Re} F_+(e^\xi) = e^\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} I_n \quad \text{onde,} \quad I_n = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^n}{\sinh y} dy. \quad (4.92)$$

Para n par, $I_n = 0$ e para n ímpar, consideramos a integral (C.51)

$$J(a) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ay}}{\sinh y} dy = \tan \left(\frac{a\pi}{2} \right), \quad (4.93)$$

e observamos que,

$$I_n = \frac{d^n}{da^n} J(a) \Big|_{a=0} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ay} y^n}{\sinh y} dy \Big|_{a=0}. \quad (4.94)$$

Com isto, a equação (4.92) torna-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_+(e^\xi) &= e^\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{da^n} \tan\left(\frac{\pi a}{2}\right) \Big|_{a=0} \frac{d^n}{d\xi^n} g(\xi') \Big|_{\xi'=\xi} \frac{1}{n!} \\ &= e^\xi \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d\xi}\right) g(\xi), \end{aligned} \quad (4.95)$$

onde a expansão em série está implícita no operador tangente. Lembrando que $s = e^\xi$ e $g(e^\xi) = \operatorname{Im} F_+(e^\xi)/e^\xi$ e da constante de subtração

$$\operatorname{Re} F_+(s) = K + s \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right) \frac{\operatorname{Im} F_+(s)}{s}. \quad (4.96)$$

No caso da amplitude ímpar o procedimento é análogo. Consideremos a equação (4.87b). Definindo $s' = e^{\xi'}$, $s = e^\xi$ e $g(\xi') = \operatorname{Im} F_-(e^{\xi'})$ podemos escrever

$$\operatorname{Re} F_-(e^\xi) = \frac{2e^\xi}{\pi} P \int_{\ln s_0}^{+\infty} \frac{g(\xi') e^{\xi'}}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} d\xi' = \frac{1}{\pi} P \int_{\ln s_0}^{+\infty} \frac{g(\xi')}{\sinh(\xi' - \xi)} d\xi'. \quad (4.97)$$

Assumindo que g é uma função analítica do seu argumento, fazemos a expansão

$$g(\xi') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{d\xi'^n} g(\xi') \Big|_{\xi'=\xi} \frac{(\xi' - \xi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} (\xi' - \xi)^n \quad (4.98)$$

e então, integramos termo a termo a equação acima. No limite de altas energias consideramos a aproximação $s_0 \rightarrow 0$, então $\ln s_0 \rightarrow -\infty$. Com estas condições, obtemos

$$\operatorname{Re} F_-(e^\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi' - \xi)^n}{\sinh(\xi' - \xi)} d\xi', \quad (4.99)$$

e daí

$$\operatorname{Re} F_-(e^\xi) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d\xi}\right) g(\xi). \quad (4.100)$$

Lembrando que $s = e^\xi$ e $g(e^\xi) = \operatorname{Im} F_-(e^\xi)$, obtemos

$$\operatorname{Re} F_-(s) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right) \operatorname{Im} F_-(s). \quad (4.101)$$

Concluimos que os resultados são independentes do parâmetro real α e que a única aproximação efetiva envolvida é referente ao limite inferior da RDI, isto é $s_0 = 2m^2 \rightarrow 0$.

Número arbitrário de subtrações

As relações derivativas acima podem ser generalizadas para um número arbitrário k de subtrações [45, 54]. Para fazer isto, começamos com a relação integral para um número arbitrário de subtrações. Da equação (4.85), para $k = 2n$ e $k = 2n - 1$ temos para as amplitudes pares

$$\operatorname{Re} F_+ = \frac{s^{2n-1}}{\pi} P \int_{s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_+(s')}{s'^{2n-1}} \frac{2s}{s'^2 - s^2} ds' \quad k = 2n \text{ e } k = 2n - 1. \quad (4.102)$$

Analogamente para $k = 2n$ e $k = 2n + 1$ a relação para a amplitude ímpar é

$$\operatorname{Re} F_- = \frac{s^{2n-1}}{\pi} P \int_{s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_-(s')}{s'^{2n-1}} \frac{2s^2}{s'(s'^2 - s^2)} ds' \quad k = 2n \text{ e } k = 2n + 1. \quad (4.103)$$

Definindo

$$g_+(s') = \frac{F_+(s')}{s'^{2(n-1)}} \quad (4.104)$$

e de (4.85) com $k = 1$ e (4.101), segue que g_+ satisfaz a relação de dispersão com duas subtrações para uma função par. Se assumimos que g_+ verifica todas as condições necessárias para (4.96), então

$$\operatorname{Re} F_+(s) = s^{2n+1} \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{ds} \right) \frac{\operatorname{Im} F_+(s)}{s^{2n+1}} \quad k = 2n \text{ e } k = 2n - 1. \quad (4.105)$$

Analogamente, definindo

$$g_+(s') = \frac{F_-(s')}{s'^{2n-1}} \quad (4.106)$$

os mesmos argumentos levam a

$$\operatorname{Re} F_-(s) = s^{2n} \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{ds} \right) \frac{\operatorname{Im} F_-(s)}{s^{2n}} \quad k = 2n \text{ e } k = 2n + 1. \quad (4.107)$$

4.4.2 Somabilidade da série de tangentes $\tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)$

Se a contante de subtração não é considerada, a relação de analiticidade derivativa para a amplitude par F_+ é dada por (4.96).

$$\operatorname{Re} F_+(e^\xi) = s \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right) \frac{\operatorname{Im} F_+(s)}{s}, \quad (4.108)$$

Para simplificar, escrevemos

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx} \right) f(x), \quad (4.109)$$

onde x representa $\ln s$ e $f(x)$ representa $\operatorname{Im} F_+(s)/s$.

Abaixo apresentamos alguns resultados em forma de teoremas sobre as condições para a convergência da série (4.109). Os autores Kolář e Fischer fizeram vários estudos a este respeito [36, 37, 38, 52, 53].

O primeiro teorema fornece condições suficientes e necessárias para a convergência da série (4.109).

Teorema 1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A série $\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x)$ é convergente se e somente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n+1)}(x)$ é convergente.

A prova para este teorema é simples e se baseia no teste de Abel, ela é apresentada no apêndice B. Este teorema permite investigar a convergência da série (4.109) através das propriedades de $f(x)$.

Outro teorema que fornece características importantes sobre f é:

Teorema 2 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^\infty(I)$. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n+1)}(x)$ converge para todo $x \in I \subset \mathbb{R}$ então existe uma função inteira que assume os valores de f em I .

O teorema segue da referência [55] onde sua generalização é demonstrada.

A conexão com as relações de dispersão na forma integral vem através dos dois teoremas abaixo.

Teorema 3 Seja $f(z)$ uma função inteira. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n+1)}(x)$ converge para algum $x \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n+1)}(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} (f(x+t) - f(x-t)) dt. \quad (4.110)$$

Prova:

$f(z)$ é uma função inteira, então podemos escrever

$$f(x+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n. \quad (4.111)$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(x+t) - f(x-t)] &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} t^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!} t^{2n+1}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

De acordo com o teorema de Hardy [74] podemos multiplicar esta série por e^{-t} e integrá-la termo a termo no intervalo $(0, \infty)$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} [f(x+t) - f(x-t)] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n+1} dt. \quad (4.113)$$

A integral do lado direito pode ser facilmente calculada e seu resultado é $(2n+1)!$, logo

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} [f(x+t) - f(x-t)] dt = \sum_{n=0}^\infty f^{(2n+1)}(x) \quad (4.114)$$

que é o resultado desejado.

Um teorema similar se aplica a série (4.109).

Teorema 4 Seja $f(z)$ uma função inteira. Se a série $\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x)$ converge para algum $x \in \mathbb{R}$, então

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x) = \int_0^\infty a(t) e^{-t} (f(x+t) - f(x-t)) dt,$$

onde

$$a(t) = \frac{2}{\pi(1 - e^{-2t})}.$$

A prova é análoga à do teorema anterior.

O interesse no último teorema é devido ao fato dele estabelecer uma conexão entre a série $\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x)$ e a relação de dispersão integral.

A integral no teorema 4 pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x) &= \int_0^\infty a(t) e^{-t} (f(x+t) - f(x-t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{\sinh t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x+t)}{\sinh t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x-t)}{\sinh t} dt. \end{aligned}$$

Agora tomamos $t \rightarrow t - x$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{\sinh(t-x)} dt. \quad (4.115)$$

Fazendo a mudança de variável $e^t = s'$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x) = \frac{2e^x}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(\ln s')}{s'^2 - e^{2x}} ds', \quad (4.116)$$

que lembra a relação integral. Finalmente tomando $x = \ln s$ e $f(\ln s) = \text{Im } F_+(s)/s$ obtemos

$$s \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s}\right) \frac{\text{Im } F_+(s)}{s} = \frac{2s^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im } F_+(s')}{s'(s'^2 - s^2)} ds' \quad (4.117)$$

enquanto a relação de dispersão integral para a amplitude par é dada por

$$\text{Re } F_+(s) = K + \frac{2s^2}{\pi} \int_{s_0}^{+\infty} \frac{\text{Im } F_+(s')}{s'(s'^2 - s^2)} ds'. \quad (4.118)$$

Uma das diferenças entre as relações (4.117) e (4.118) é o limite inferior das integrais, outra, mais profunda, é o domínio de validade das duas [36].

Capítulo 5

Aplicações

O estudo simultâneo das grandezas $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$, baseado nas consequências dos Princípios de Unitaridade (estrutura de corte de ramos no plano complexo de E ou s), Analiticidade (Relações de Dispersão) e Cruzamento (espalhamento partícula e antipartícula) é denominado *Abordagem Analítica* do espalhamento frontal. A característica básica desta abordagem é a introdução de modelos de parametrizações para os dados experimentais de $\sigma_{tot}(s)$ e a determinação *analítica* (não numérica) de $\rho(s)$, através das relações de dispersão e cruzamento.

Sendo os ajustes de dados experimentais feitos em regiões finitas de energia (dados disponíveis) a abordagem analítica possibilita extrapolações para energias ainda não alcançadas. Com isto pode-se estudar os limites assintóticos decorrentes dos diferentes modelos de parametrizações, junto com sua adequação, ou não, na descrição dos dados experimentais.

Neste trabalho, através de análises de dados experimentais de σ_{tot} e ρ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ para $\sqrt{s} > 10$ GeV, realizamos um estudo detalhado de diversos aspectos relacionados à abordagem analítica. Resumidamente, as seguintes influências ou efeitos são investigados:

1. diferentes parametrizações para σ_{tot} com diferentes comportamentos assintóticos;
2. diferenças entre Relação de Analiticidade Derivativa (RAD) e Relação de Dispersão Integral (RDI);
3. contribuições dos termos de expansão na série de tangente das RAD;
4. seleção de diferentes conjuntos de estimativas de σ_{tot} de experimentos com raios cósmicos (mais altas energias);

5. influência do limite inferior na RDI ($s_0 = 2m^2$ ou $s_0 = 0$);
6. diferenças entre ajustes individuais e simultâneos para σ_{tot} e ρ ;
7. papel da constante de subtração em todos os casos analisados.

Quanto aos dados experimentais, gostaríamos de salientar que não foram utilizados os mesmos dados em todas as análises. Um dos objetivos deste trabalho foi compilar os dados existentes para seção de choque total e parâmetro ρ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$. No primeiro trabalho realizado, utilizamos um conjunto reduzido de dados e depois passamos a utilizar os dados da versão 2000 do Particle Data Group (PDG) com erros sistemático e estatístico somados linearmente. No ano de 2002 foi disponibilizada uma nova versão dos dados pelo PDG e então passamos a utilizá-la, mas com os erros estatístico e sistemático somados em quadratura, pois é desta forma que geralmente são utilizados na literatura. No capítulo 2 é mostrada a versão 2002 dos dados do PDG. Apesar destas diferenças os resultados qualitativos obtidos não são afetados. Em cada estudo feito deixamos claro o conjunto de dados utilizado.

Todos os ajustes de dados experimentais foram feitos com o programa CERN-MINUIT [56], através das subrotinas MIGRAD e MINIMIZE. O programa fornece os valores numéricos dos parâmetros de ajuste, a matriz de erros (covariância e contravariância) e o valor de χ^2 . Calculando em cada caso o número de graus de liberdade (número de dados - número de parâmetros) obtemos o resultado estatístico expresso pelo χ^2 por grau de liberdade (χ^2/gdl).

5.1 Fórmulas básicas e estratégias

Nesta seção apresentamos as parametrizações básicas, as relações de dispersão (integrais e derivativas) que serão utilizadas e resumimos as aplicações que serão feitas nas próximas 3 seções.

5.1.1 Parametrizações típicas para a seção de choque total

As principais dependências analíticas utilizadas podem ser resumidas em funções potência em s

$$s^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

e potências logarítmicas

$$\ln^\gamma s. \quad (5.2)$$

Fisicamente, as potências em s são características de modelos de Regge, estando associadas à troca de trajetórias mesônicas e/ou de Pomerons. As potências logarítmicas são típicas de modelos geométricos/ópticos/eiconais e servem como testes do limite de Froissart-Martin (caso de $\gamma = 2$) [3].

Os diversos modelos analíticos utilizam principalmente, combinações lineares das funções acima. No que segue não discutiremos em detalhe a Física associada, mas nos concentraremos nos aspectos analíticos e algébricos das aplicações das relações de dispersão.

Neste trabalho, a principal parametrização utilizada é a introduzida por Donnachie-Landshoff (DL), característica do Modelo do Pomeron [57]:

$$\sigma_{tot}^{pp}(s) = X s^\epsilon + Y s^{-\eta}, \quad (5.3a)$$

$$\sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) = X s^\epsilon + Z s^{-\eta}. \quad (5.3b)$$

No tratamento original dos autores os valores dos parâmetros são os seguintes: $X = 21.7$ mb, $Y = 56.08$ mb, $Z = 98.39$ mb, $\epsilon = 0.0808$, $\eta = 0.4525$.

Observamos que este modelo prevê que a diferença entre as duas seções de choque é dada por

$$\Delta\sigma = \sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) - \sigma_{tot}^{pp}(s) = (Z - Y)s^{-\eta} \rightarrow 0 \quad (\text{assintoticamente}).$$

Em particular, na seção 5.3 estudamos também outra parametrização que se distingue da de DL, principalmente, nas regiões assintóticas devido à possibilidade, de predominância da amplitude ímpar (Odderon). Para tanto escolhemos a parametrização utilizada por Kang e Nicolescu (KN) [58]

$$\sigma_{tot}^{pp}(s) = A_1 + B_1 \ln s + k \ln^2 s \quad (5.4a)$$

$$\sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) = A_2 + B_2 \ln s + k \ln^2 s + 2Rs^{-1/2}. \quad (5.4b)$$

Ao contrário do caso anterior, este modelo prevê que a diferença entre as seções de choque é dada por

$$\Delta\sigma = \sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) - \sigma_{tot}^{pp}(s) = (A_2 - A_1) + (B_2 - B_1) \ln s + 2Rs^{-1/2} \rightarrow \Delta A + \Delta B \ln s,$$

assintoticamente, então, se $\Delta A \neq 0$ e/ou $\Delta B \neq 0$ a diferença entre as seções de choque total pode crescer e σ_{tot}^{pp} pode tornar-se maior que $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$, dependendo dos valores e sinais de ΔA e ΔB , o que está de acordo com os teoremas da seção 3.2.

5.1.2 Relações de dispersão e subtrações

No capítulo 4 encontramos relações de dispersão para amplitudes pares e ímpares e falamos que elas podem ser combinadas de forma a fornecer o parâmetro ρ próton-próton e antipróton-próton em função de σ_{tot}^{pp} e $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ quando utilizamos o teorema óptico. Podemos expressar a conexão entre ρ e σ_{tot} através de duas fórmulas compactas

$$\rho^{pp}\sigma_{tot}^{pp}(s) = E(\sigma_+) + O(\sigma_-) \quad (5.5a)$$

$$\rho^{\bar{p}p}\sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) = E(\sigma_+) - O(\sigma_-), \quad (5.5b)$$

onde

$$\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_{tot}^{pp} \pm \sigma_{tot}^{\bar{p}p}}{2}, \quad (5.6)$$

e E e O são relações analíticas que conectam as partes real e imaginária das amplitudes par e ímpar, respectivamente.

Antes de selecionar explicitamente estas relações, vamos discutir o número de subtrações.

No caso de saturação do limite de Froissart-Martin, a condição polinomial de convergência na aplicação do Teorema de Cauchy é

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|F(s, t=0)|}{s^2} = 0, \quad (5.7)$$

o que exige 2 subtrações nas relações de dispersão, como demonstrado por Jin e Martin [59].

Na prática, acredita-se que nas regiões assintóticas há predomínio da parte imaginária da amplitude par (Pomeron) e não da ímpar (5.1.1). Neste caso as 2 subtrações estariam associadas somente à amplitude par.

Como vimos no capítulo 4, no caso de amplitude par as relações de dispersão (derivativas ou integrais) com uma ou duas subtrações são iguais e no caso ímpar são iguais as relações sem subtração e com uma subtração.

A escolha padrão na literatura é de amplitude par com uma subtração (igual a duas subtrações) e amplitude ímpar sem subtração (igual a uma subtração). Neste trabalho assumiremos a hipótese padrão, de modo que, na forma integral, as relações analíticas E e O acima referidas são dadas por (4.83) e (4.82)

$$E_{int}(\sigma_+) \equiv \frac{K}{s} + \frac{2s}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\sigma_+(s')}{s'^2 - s^2} ds' = \frac{\text{Re } F_+(s)}{s}, \quad (5.8a)$$

$$O_{int}(\sigma_-) \equiv \frac{2}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{s' \sigma_-(s')}{s'^2 - s^2} ds' = \frac{\text{Re } F_-(s)}{s}, \quad (5.8b)$$

onde K é a constante de subtração. Já na forma derivativa (4.96) e (4.101)

$$E_{der}(\sigma_+) \equiv \frac{K}{s} + \tan \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right] \sigma_+(s) = \frac{\text{Re } F_+(s)}{s}, \quad (5.9a)$$

$$O_{der}(\sigma_-) \equiv \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{d}{d \ln s} \right) \right] \sigma_-(s) = \frac{\text{Re } F_-(s)}{s}. \quad (5.9b)$$

Algumas vezes é mais fácil utilizar as expressões acima na forma

$$E_{der}(\sigma_+) - \frac{K}{s} = \left[\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^5 + \dots \right] \sigma_+(s), \quad (5.10a)$$

$$\begin{aligned} O_{der}(\sigma_-) &= -\frac{2}{\pi} \int \left\{ \frac{d}{d \ln s} \left[\cot \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right) \right] \sigma_-(s) \right\} d \ln s \\ &= -\frac{2}{\pi} \int \left\{ \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^2 - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right)^4 - \dots \right] \sigma_-(s) \right\} d \ln s. \end{aligned} \quad (5.10b)$$

Lembrando que o teorema óptico é expresso por (2.58)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{\text{Im } F(s, t=0)}{s}, \quad (5.11)$$

as fórmulas acima permitem, em princípio determinar $\rho(s)$ por meio das relações de dispersão na forma integral (5.8) ou através das relações analíticas derivativas (5.9).

5.1.3 Estratégias de análise

Este trabalho foi realizado em diversas etapas. Inicialmente estudamos alguns tópicos referidos na seção 5.1.1 tratando, como primeiro passo, somente o espalhamento pp . Estes estudos iniciais são apresentados e comentados nos apêndices D (influência de diferentes parametrizações para σ_{tot} e diferentes conjuntos de dados de raios cósmicos) e E (influência dos 3 primeiros termos da série tangente no caso da parametrização DL).

Com base nestes estudos iniciais, passamos a investigar simultaneamente os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ através do Princípio de Cruzamento e este estudo constitui a essência deste capítulo.

Como demonstrado na seção 4.4 as RAD são obtidas das RDI no limite de altas energias, especificamente, considerando o extremo inferior da integral $s_0 = 2m^2 \rightarrow 0$. Nas

aplicações que serão feitas a seguir, consideramos inicialmente resultados com $s_0 = 0$ na RDI. Neste caso, na seção 5.2 estudamos as contribuições dos 3 primeiros termos da série de tangente junto com o efeito da constante de subtração, utilizando a parametrização DL e somente dados de aceleradores. Na seção 5.3 estudamos duas parametrizações (DL e KN), as influências de diferentes dados na região de raios cósmicos, os efeitos de ajustes individuais e simultâneos de σ_{tot} e ρ e o papel da constante de subtração. Por último, na seção 5.4 investigamos o efeito do limite inferior finito ($s_0 = 2m^2$) e da constante de subtração no caso de dados de aceleradores e parametrização de DL.

Em cada caso apresentamos discussões e conclusões parciais.

5.2 Expansão da série de tangentes e constante de subtração (DL)

Usando a parametrização de Donnachie-Landshoff (DL) para σ_{tot}^{pp} e $\sigma_{tot}^{\bar{p}p}$ determinamos o parâmetro ρ através da relação de analiticidade derivativa tomando apenas os primeiros termos da série de tangentes e utilizando a relação de dispersão na forma integral com a aproximação $s_0 \rightarrow 0$ para o limite inferior da integral e comparamos os resultados [60, 61]. Para esta parametrização, a aproximação $s_0 \rightarrow 0$ na integral corresponde a relação de analiticidade derivativa quando tomamos todas as ordens do operador tangente.

5.2.1 Resultados analíticos

A parametrização DL é escrita em termos de potências de s (5.3), a integral na RDI no plano complexo no limite de altas energias ($s_0 \rightarrow 0$) tem como resultado

$$I = P \int_0^{+\infty} \frac{s'^\gamma}{(s'^2 - s^2)} ds' = \frac{\pi}{2} s^{\gamma-1} \tan\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \quad (5.12)$$

para γ real, $-1 < \gamma < 1$. Das equações (5.5)-(5.6), (5.8) e (5.12) os resultados para a parametrização DL são

$$\begin{aligned} \rho_{pp}^{int} = & \frac{1}{Xs^\epsilon + Ys^{-\eta}} \left[\frac{K}{s} + \frac{(Y-Z)}{2} s^{-\eta} \cot\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + Xs^\epsilon \tan\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{(Y+Z)}{2} s^{-\eta} \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.13a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{p}p}^{int} = & \frac{1}{Xs^\epsilon + Zs^{-\eta}} \left[\frac{K}{s} - \frac{(Y-Z)}{2} s^{-\eta} \cot\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + Xs^\epsilon \tan\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{(Y+Z)}{2} s^{-\eta} \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.13b)$$

onde K é a constante de subtração.

No caso das relações derivativas calculamos a expansão do operador tangente até o terceiro termo usando (5.5)-(5.6) e (5.9) e os resultados são

$$\begin{aligned} \rho_{pp}^{der} &\sim \frac{1}{Xs^\epsilon + Zs^{-\eta}} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{\pi}{4} [2X\epsilon s^\epsilon + [-\eta(Y+Z) + (1-\eta)(Y-Z)]s^{-\eta}] + \right. \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 [2X\epsilon^3 s^\epsilon + [-\eta^3(Y+Z) + (1-\eta)^3(Y-Z)]s^{-\eta}] + \\ &+ \left. \frac{1}{15} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 [2X\epsilon^5 s^\epsilon + [-\eta^5(Y+Z) + (1-\eta)^5(Y-Z)]s^{-\eta}] \right\} \end{aligned} \quad (5.14a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{p}p}^{der} &\sim \frac{1}{Xs^\epsilon + Zs^{-\eta}} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{\pi}{4} [2X\epsilon s^\epsilon - [\eta(Y+Z) + (1-\eta)(Y-Z)]s^{-\eta}] + \right. \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 [2X\epsilon^3 s^\epsilon - [\eta^3(Y+Z) + (1-\eta)^3(Y-Z)]s^{-\eta}] + \\ &+ \left. \frac{1}{15} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 [2X\epsilon^5 s^\epsilon - [\eta^5(Y+Z) + (1-\eta)^5(Y-Z)]s^{-\eta}] \right\}. \end{aligned} \quad (5.14b)$$

Somando-se as séries acima obtém-se (5.13a) e (5.13b).

Na figura 5.1 estão os gráficos das equações (5.13) e (5.14) para $K = 0$, ela mostra os resultados para a forma integral e para a derivativa o efeito da adição de cada termo da série de tangentes.

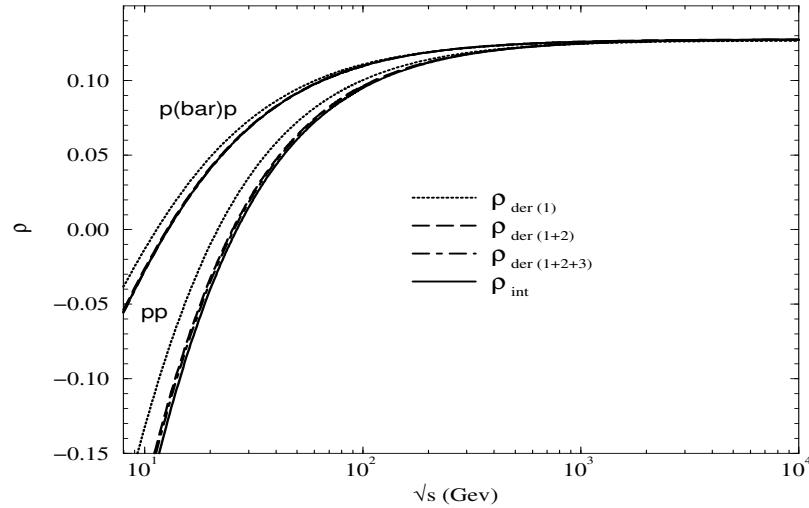


Figura 5.1: Parâmetro ρ das equações (5.13) e (5.14) com $K = 0$ para pp e $\bar{p}p$. RAD, (5.14) somente o primeiro termo da série, os dois primeiros e os três primeiros.

Tabela 5.1: Valores para a constante de subtração com as fórmulas integral (5.13) e derivativa (5.14) e informações estatísticas. Ajuste para $\sqrt{s} \geq 10$ GeV - 62 graus de liberdade (gdl).

Relação	K	χ^2	χ^2/gdl
der (1)	-187 ± 82	47	0.54
der (1+2)	429 ± 82	53	0.76
der (1+2+3)	573 ± 82	57	0.85
integral	621 ± 82	59	0.95

5.2.2 Ajustes e conclusões

Para comparar ρ com os dados experimentais para pp e $\bar{p}p$ consideramos a constante de subtração K das formulas (5.13) e (5.14) como um parâmetro livre e fazemos ajustes aos dados experimentais para ρ utilizando o programa CERN-MINUIT [56].

Os dados experimentais utilizados são os da versão 2000 do Particle Data Group com $\sqrt{s} \geq 10$ GeV e erros estatístico e sistemático somados linearmente.

Os resultados dos ajustes são mostrados na tabela 5.1 e nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4.

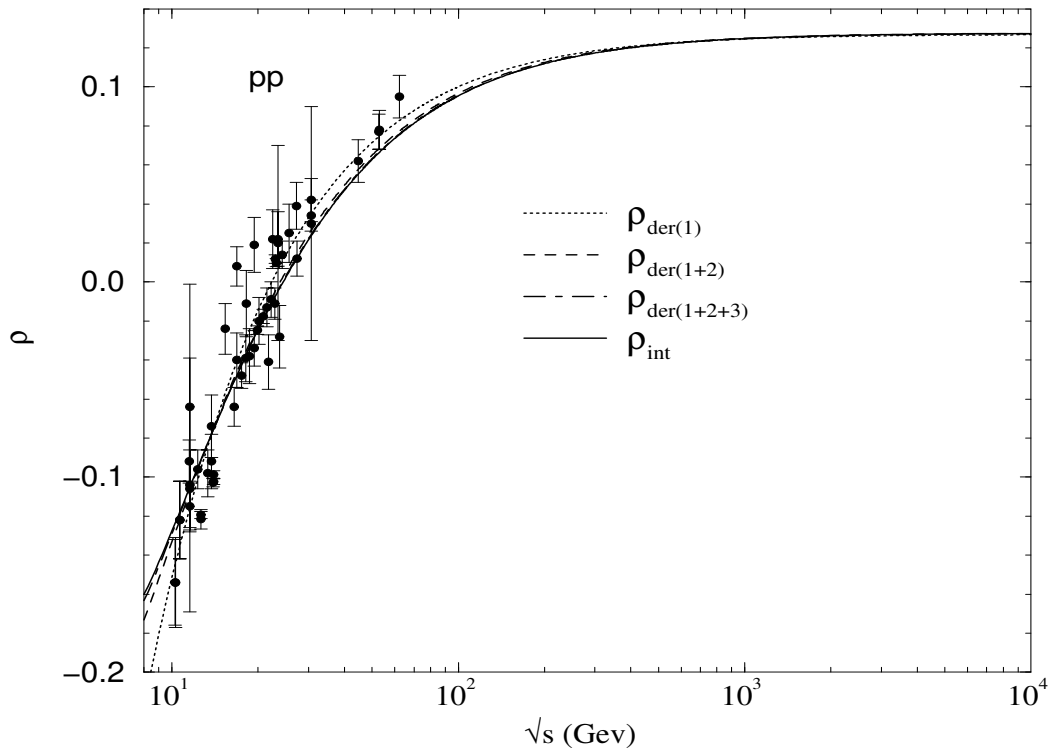


Figura 5.2: Parâmetro ρ para o espalhamento pp das equações (5.13a) e (5.14a). Mesma legenda da figura 5.1.

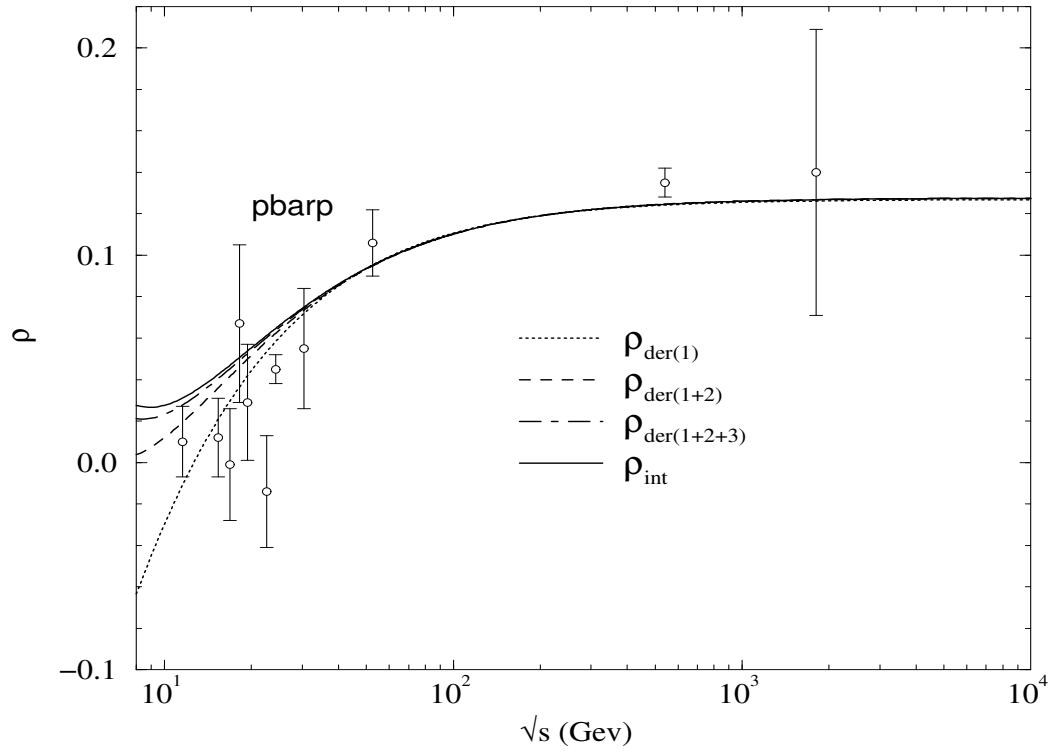


Figura 5.3: Parâmetro ρ para o espalhamento $\bar{p}p$ das equações (5.13b) e (5.14b) . Mesma legenda da figura 5.1.

Como discutido em detalhes nas referências [60, 61] e no capítulo 4, as relações derivativas são uma boa aproximação para as relações integrais a energias suficientemente altas. Isto é claro na figura 5.1. O resultado para primeira ordem das relações derivativas é praticamente igual ao resultado para relações integrais para energias acima de ~ 100 GeV e a expansão até o terceiro termo pode ser considerada uma boa aproximação para a integral a partir de energias próximas a 10 GeV.

Se consideramos a constante K como parâmetro livre no processo de ajuste, mesmo a aproximação de primeira ordem mostra boa concordância com o resultado integral para energias acima de 10 GeV, como pode ser visto nas figuras 5.2 e 5.3. Na tabela 5.1, vemos que os valores do parâmetro K tendem para o valor obtido com a relação integral.

Nossa principal conclusão é que acima de 10 GeV a primeira ordem da expansão da relação derivativa é uma boa aproximação para a forma integral, desde que a constante de subtração K seja tratada como parâmetro livre.

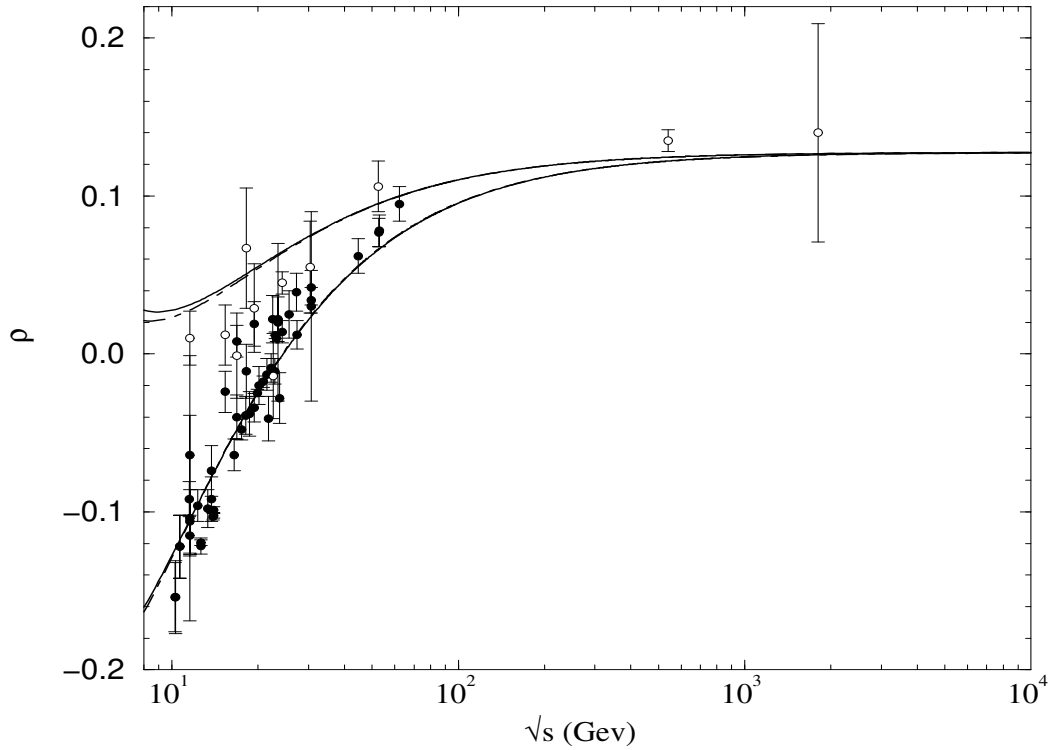


Figura 5.4: Resultados para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ (Figuras 5.2 e 5.3).

5.3 Análise global das relações de analiticidade derivativas (DL e KN)

Investigamos simultaneamente quatro aspectos relacionados à aplicação de modelos analíticos para o espalhamento pp e $\bar{p}p$: a) efeito de estimativas diferentes de experimentos de raios cósmicos; b) diferença entre ajuste individual e conjunto (simultâneo) para σ_{tot} e parâmetro ρ ; c) o papel da constante de subtração nas relações de dispersão; d) o efeito de diferentes parametrizações para a seção de choque total. Para isto, utilizamos as relações analíticas derivativas [14, 15, 62].

As motivações para utilizarmos dois conjuntos de dados e estudarmos ajuste individual e simultâneo são descritas na seção 2.6.

5.3.1 Dados experimentais

Vamos utilizar dois conjuntos de dados diferentes (Veja a seção 2.6.2)

- Conjunto I: Dados de acelerador $\bar{p}p$ e pp + Akeno + Fly's Eye
- Conjunto II: Dados de acelerador $\bar{p}p$ e pp + Nikolaev + GSY

para os dados de acelerador estamos usando a versão 2000 do Particle Data Group e os dados de raios cósmicos Akeno, Fly's Eye, Nikolaev e GSY as referências estão no capítulo 2.

5.3.2 Modelos analíticos e limites assintóticos

Consideramos duas parametrizações diferentes para a seção de choque total, sendo a principal diferença entre elas o limite assintótico $s \rightarrow \infty$.

Donnachie-Landshoff

Lembramos que (seção 5.1.1)

$$\Delta\sigma = \sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) - \sigma_{tot}^{pp}(s) = (Z - Y)s^{-\eta} \rightarrow 0 \quad (\text{assintoticamente}).$$

Como neste modelo $\Delta\sigma \rightarrow 0$ assintoticamente, para $\sigma_{tot}^{\bar{p}p} = \sigma_{tot}^{pp} \equiv \sigma_{tot}$, temos

$$\Delta\rho = \rho^{\bar{p}p} - \rho^{pp} \sim \frac{1}{\sigma_{tot}(s)}(Z - Y) \cot\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)s^{-\eta} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad s \rightarrow \infty.$$

Das equações (5.5), (5.6) e (5.9) obtemos ρ^{pp} (5.13a) e $\rho^{\bar{p}p}$ (5.13b).

Kang-Niculescu

Para esta parametrização, a diferença entre as seções de choque é dada por (seção 5.1.1)

$$\Delta\sigma = \sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) - \sigma_{tot}^{pp}(s) = (A_2 - A_1) + (B_2 - B_1) \ln s + 2Rs^{-1/2} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \Delta A + \Delta B \ln s.$$

Utilizando as equações (5.10a) e (5.10b) obtemos o parâmetro ρ

$$\begin{aligned} \rho^{pp} = & \frac{1}{\sigma_{tot}^{pp}} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{B_1 + B_2}{2} \right) + \left(\pi k + \frac{A_2 - A_1}{\pi} \right) \ln s + \right. \\ & \left. + \left(\frac{B_2 - B_1}{2\pi} \right) \ln^2 s - 2Rs^{-1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.15a)$$

$$\rho^{\bar{p}p} = \frac{1}{\sigma_{tot}^{\bar{p}p}} \left\{ \frac{K}{s} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{B_1 + B_2}{2} \right) + \left(\pi k - \frac{A_2 - A_1}{\pi} \right) \ln s - \left(\frac{B_2 - B_1}{2\pi} \right) \ln^2 s \right\}. \quad (5.15b)$$

Neste caso, se ΔA e ΔB são suficientemente pequenos, de forma que podemos trocar $\sigma_{tot}^{\bar{p}p} \approx \sigma_{tot}^{pp} \equiv \sigma_{tot}(s)$, então, assintoticamente,

$$\Delta\rho = \rho^{\bar{p}p} - \rho^{pp} \sim -\frac{1}{\pi\sigma_{tot}(s)} \left\{ \Delta A \ln s + \Delta B \ln^2 s \right\}. \quad (5.16)$$

Isto significa que, dependendo dos resultados de ajuste, pode ocorrer mudança de sinal em $\Delta\rho$, com ρ^{pp} tornando-se maior que $\rho^{\bar{p}p}$ numa energia finita.

Tabela 5.2: Resultados com o modelo Donnachie-Landshoff - Ajuste individual

Quantidade:	σ_{tot}		ρ	
Conjunto:	I	II	I	II
N. pontos	102	102	63	63
χ^2/gdl	0.76	0.96	1.55	1.84
X (mb)	20.0 ± 0.7	19.3 ± 0.7	-	-
Y (mb)	48 ± 5	46 ± 5	-	-
Z (mb)	74 ± 10	70 ± 9	-	-
η	0.37 ± 0.03	0.35 ± 0.03	-	-
ϵ	0.088 ± 0.003	0.091 ± 0.003	-	-
K	-	-	604 ± 82	629 ± 82
Figura	5.5.a e 5.5.b		5.5.a e 5.5.c	

5.3.3 Ajustes de dados e resultados

Para investigar todos os pontos citados logo no início desta seção, fizemos 16 ajustes diferentes. Nestes ajustes usamos os conjuntos I e II definidos em 5.3.1 e os dois modelos descritos em 5.3.2. Para cada uma destas quatro possibilidades fizemos ajuste individual e simultâneo para σ_{tot} e ρ e, em cada caso, consideramos a constante de subtração K como parâmetro livre ou assumimos $K = 0$.

Na aproximação individual primeiro ajustamos somente dados para seção de choque total e então extraímos os valores de ρ correspondentes no caso $K = 0$, ou, com os resultados para σ_{tot} , ajustamos somente os dados para ρ com K como parâmetro livre.

Os resultados numéricos dos ajustes e as informações estatísticas são mostrados nas tabelas 5.2 e 5.3 para o modelo DL e 5.4 e 5.5 para o KN. As curvas correspondentes juntas com os dados experimentais são mostradas nas figuras 5.5, 5.6 e 5.7 para o modelo DL e 5.8, 5.9 e 5.10 para o KN.

5.3.4 Conclusões

Apresentamos as conclusões em alguns tópicos principais:

- Conjuntos I e II. As figuras correspondentes aos ajustes dos dados de seção de choque mostram que, em geral, os resultados com os conjuntos I e II não diferem substancialmente, exceto no caso individual do ajuste para o modelo KN (figura 5.8). As informações sobre raios cósmicos no conjunto II (Nikolaev e GSY) não são descritas em todos os casos. Isto é uma consequência do pequeno número de pontos

Tabela 5.3: Resultados com o modelo Donnachie-Landshoff - Ajuste simultâneo

Quantidade:	σ_{tot} e ρ		σ_{tot} e ρ	
Conjunto:	I	II	I	II
N. pontos	165	165	165	165
χ^2/gdl	1.09	1.24	0.84	0.98
X (mb)	21.6 ± 0.4	21.2 ± 0.4	21.4 ± 0.4	21.1 ± 0.4
Y (mb)	51 ± 3	51 ± 3	67 ± 6	67 ± 5
Z (mb)	85 ± 5	84 ± 5	114 ± 11	112 ± 11
η	0.43 ± 0.02	0.42 ± 0.02	0.48 ± 0.02	0.47 ± 0.02
ϵ	0.081 ± 0.002	0.083 ± 0.002	0.083 ± 0.002	0.084 ± 0.002
K	0	0	786 ± 139	788 ± 134
Figura	5.6		5.7	

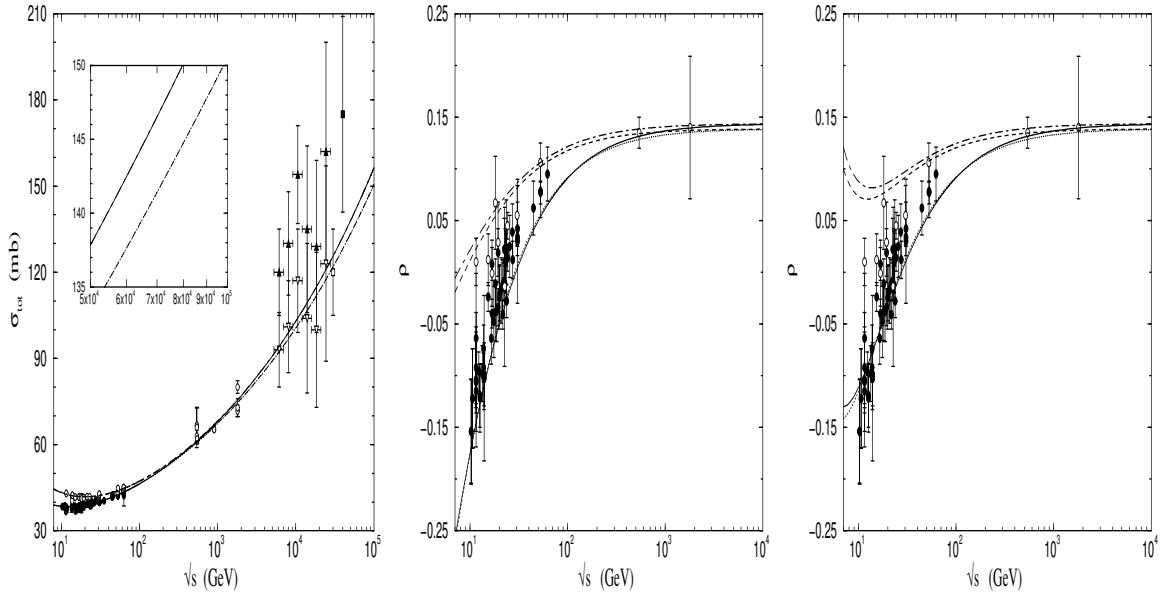


Figura 5.5: Ajustes para dados de seção de choque total pp e $\bar{p}p$ do conjunto I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e tracejada-pontilhada para $\bar{p}p$), para da parametrização DL (esquerda) e as correspondentes previsões para $\rho(s)$ com $K = 0$ (centro) e K como parâmetro de ajuste (direita).

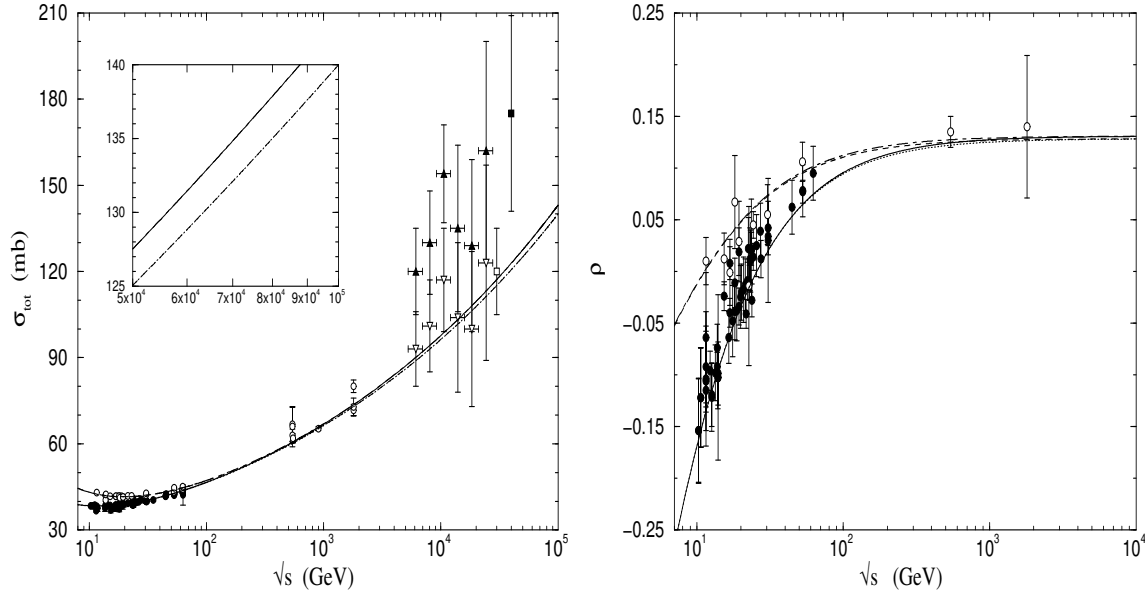


Figura 5.6: Ajustes simultâneos para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização DL com $K = 0$ e conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e tracejada-pontilhada para $\bar{p}p$).

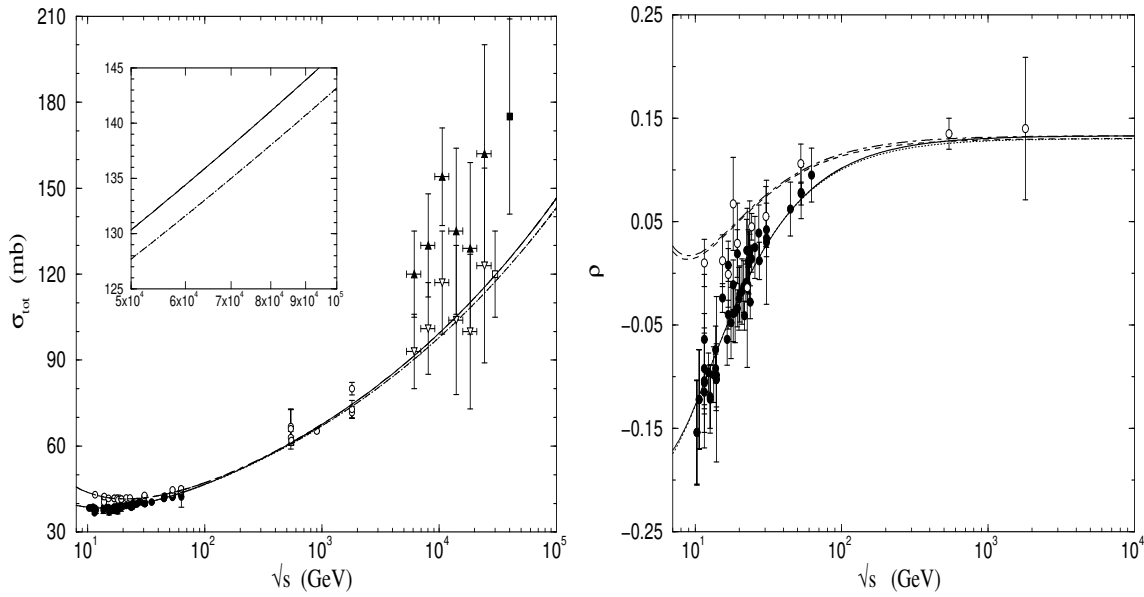


Figura 5.7: Ajustes simultâneos para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização DL com K como parâmetro livre e conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e tracejada-pontilhada para $\bar{p}p$).

Tabela 5.4: Resultados com a parametrização Kang-Nicolescu - Ajuste individual

Quantidade:	σ_{tot}		ρ	
Conjunto:	I	II	I	II
N. pontos	102	102	63	63
χ^2/gdl	0.78	0.91	1.05	35.2
A_1 (mb)	44 ± 1	47 ± 1	-	-
A_2 (mb)	45 ± 3	52 ± 3	-	-
B_1 (mb)	-2.9 ± 0.3	-3.6 ± 0.4	-	-
B_2 (mb)	-2.9 ± 0.6	-4.2 ± 0.6	-	-
k (mb)	0.33 ± 0.03	0.39 ± 0.03	-	-
R (mb)	24 ± 7	12 ± 7	-	-
K	-	-	-508 ± 82	-3515 ± 82
Figura	5.8.a e 5.8.b		5.8.a e 5.8.c	

Tabela 5.5: Resultados com a parametrização Kang-Nicolescu - Ajuste simultâneo

Quantidade:	σ_{tot} e ρ		σ_{tot} e ρ	
Conjunto:	I	II	I	II
N. pontos	165	165	165	165
χ^2/gdl	0.78	0.87	0.77	0.86
A_1 (mb)	44.7 ± 0.6	45.2 ± 0.6	44.4 ± 0.6	45.0 ± 0.7
A_2 (mb)	44.7 ± 0.7	45.2 ± 0.7	44.5 ± 0.7	45.1 ± 0.7
B_1 (mb)	-3.0 ± 0.2	-3.1 ± 0.2	-2.9 ± 0.2	-3.1 ± 0.2
B_2 (mb)	-2.9 ± 0.2	-3.1 ± 0.2	-2.9 ± 0.2	-3.1 ± 0.2
k (mb)	0.34 ± 0.01	0.35 ± 0.01	0.33 ± 0.01	0.35 ± 0.01
R (mb)	25.9 ± 0.8	25.9 ± 0.8	25.3 ± 0.9	25.4 ± 0.9
K	0	0	-185 ± 118	-162 ± 118
Figura	5.9		5.10	

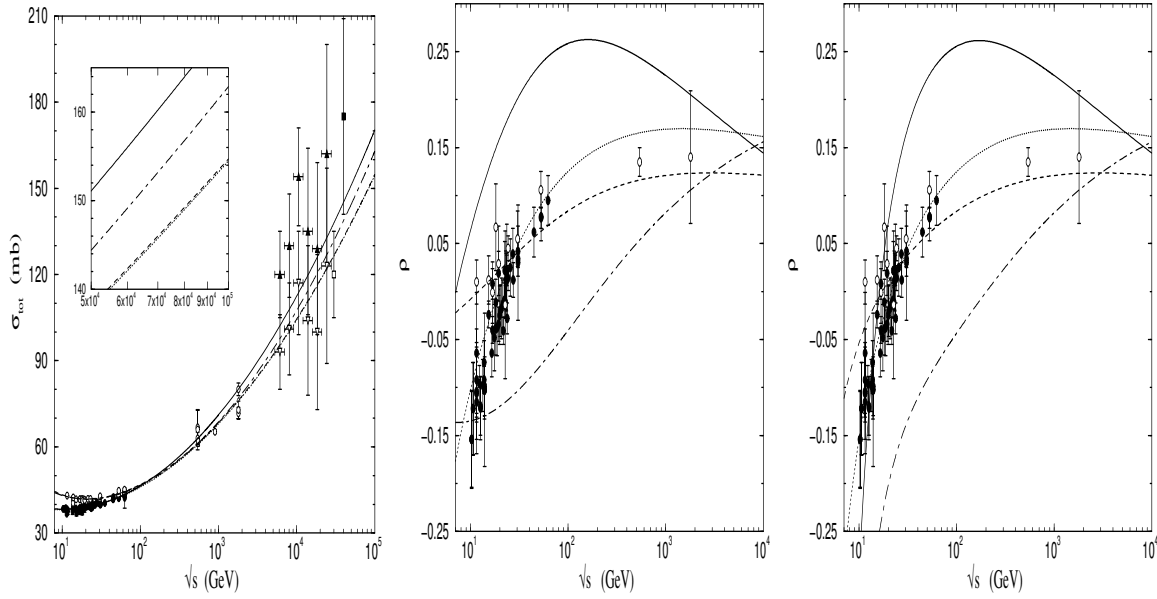


Figura 5.8: Ajustes para dados de seção de choque total pp e $\bar{p}p$ dos conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) II (curva sólida para pp e pontilhada-tracejada para $\bar{p}p$), para a parametrização KN (esquerda) e a as correspondentes previsões para $\rho(s)$ com $K = 0$ (centro) e K como parâmetro de ajuste (direita).

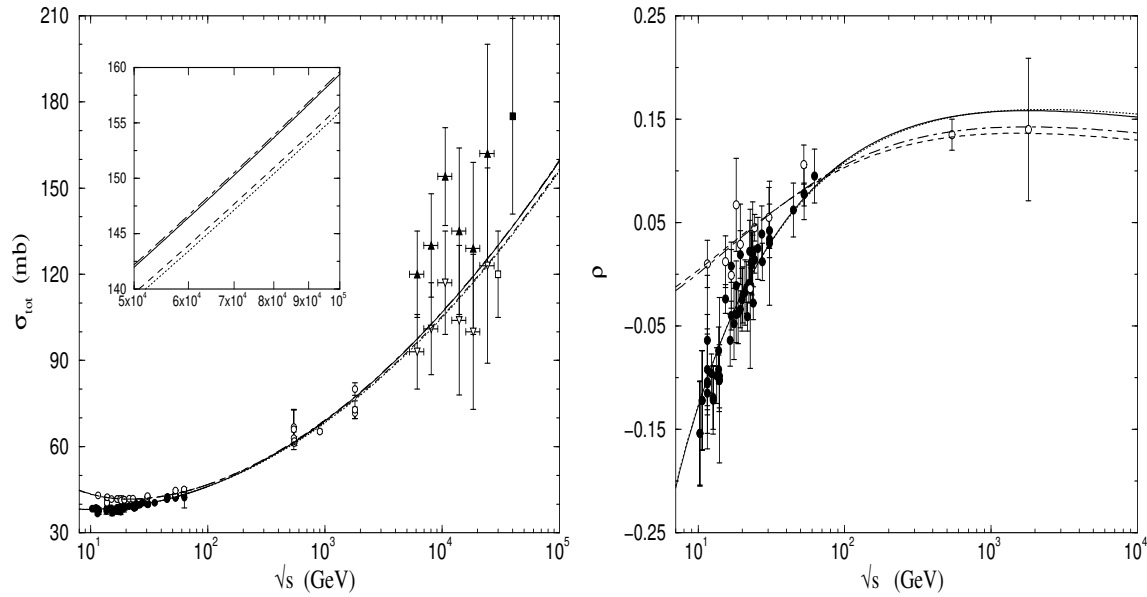


Figura 5.9: Ajuste simultâneo para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização KN com $K = 0$ e conjuntos I (curva pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curva sólida para pp e pontilhada-tracejada para $\bar{p}p$).

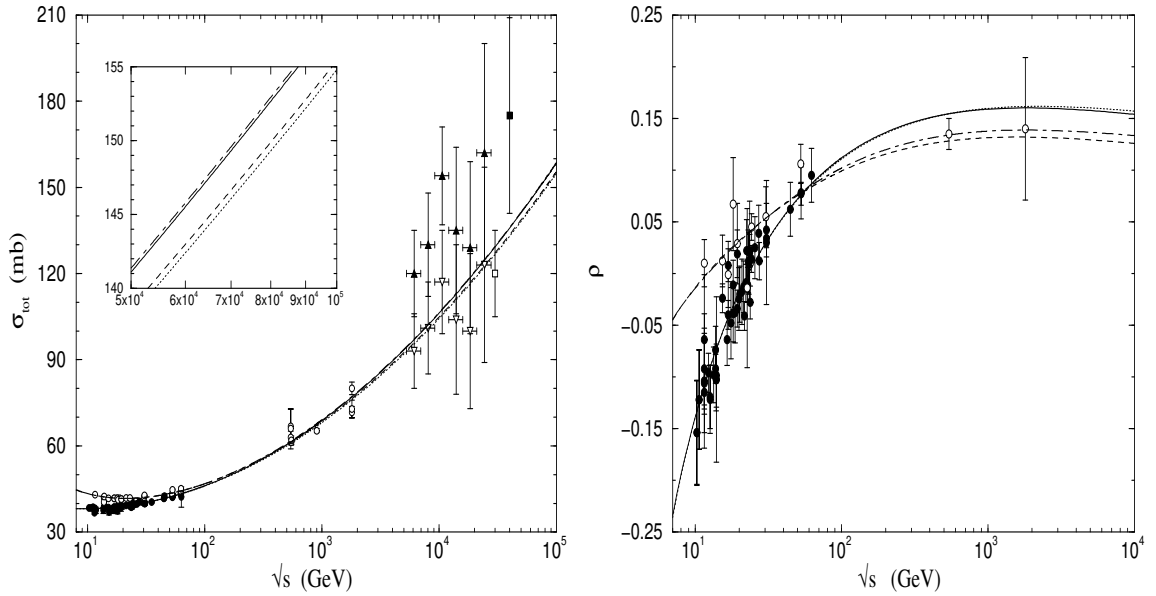


Figura 5.10: Ajustes simultâneos para $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ para a parametrização KN com K como parâmetro livre e conjuntos I (curvas pontilhada para pp e tracejada para $\bar{p}p$) e II (curvas sólidas para pp e pontilhada-tracejada para $\bar{p}p$).

e das grandes barras de erros em comparação com os dados de acelerador bem como das parametrizações (ou modelos) utilizados.

No que segue, consideramos os resultados para os dois conjuntos de dados. Também destacamos que algumas conclusões são independentes do conjunto de dados utilizado, como aquelas sobre ajuste individual ou simultâneo e o papel da constante de subtração.

- Valores limites para ϵ (o expoente positivo no modelo DL). Das tabelas 5.2 e 5.3, o maior (menor) valor de ϵ foi obtido com o conjunto II (I), no caso de ajuste individual para σ_{tot} (simultâneo para σ_{tot} e ρ), $\epsilon_{superior} = 0.094$ ($\epsilon_{inferior} = 0.079$).
- Ajustes simultâneos e individuais. Das tabelas 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, com exceção dos ajuste individual para o conjunto II com o modelo KN e K como parâmetro livre, as informações estatísticas não indicam preferência entre ajuste individual ou simultâneo.

Por outro lado, o ajuste simultâneo claramente restringe o crescimento da seção de choque total.

- Constante de subtração. Discutiremos este resultado através dos ajustes individual e simultâneo.

No caso dos ajustes individuais com o modelo DL, a figura 5.5 mostra que os resultados para $\rho(s)$ com $K = 0$ e K livre são próximos acima de $\sqrt{s} \approx 40$ GeV e abaixo desta energia são bem diferentes. Não discutiremos os resultados correspondentes para o modelo KN porque os dados experimentais não são descritos (figura 5.8).

No caso dos ajustes simultâneos com o modelo DL, além das diferenças em $\rho(s)$, aqui abaixo de $\sqrt{s} \approx 40$ GeV, o comportamento assintótico de $\sigma_{tot}(s)$ é diferente. Por outro lado, para ajustes simultâneos, o modelo KN não é sensível à influência da constante de subtração para ρ acima de $\sqrt{s} \approx 20$ GeV, como mostram as figuras 5.9 e 5.10. Então, em geral, a constante de subtração afeta os resultados a energias baixas e altas. Como ela é matematicamente justificável para o controle da convergência da relação de dispersão integral (ou derivativa), entendemos que a constante de subtração deve ser usada.

5.4 Limite inferior da relação integral e constante de subtração (DL)

Utilizando apenas dados de experimentos de aceleradores para pp e $\bar{p}p$ investigamos o efeito da aproximação $s_0 \rightarrow 0$ no limite inferior da relação de dispersão na forma integral. Neste caso, também utilizamos a parametrização de Donacchie-Landshoff [34, 63, 64].

5.4.1 Resultados analíticos

A parametrização de DL é escrita em termos de potências de s e a integral pode ser analiticamente calculada no caso de γ real e $-1 < \gamma < 1$. Para $s_0 = 0$ obtemos (5.12) e para s_0 fixado uma mudança de variáveis leva ao resultado (C.3)

$$P \int_{s_0}^{\infty} \frac{s'^{\gamma}}{s'^2 - s^2} ds' = -\frac{s_0^{\gamma}}{2\gamma s} {}_2F_1(1, \gamma; 1 + \gamma; -s_0/s) + \frac{\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(\gamma)}{2} s^{\gamma-1} - \frac{\pi}{2} \cot(\gamma\pi) s^{\gamma-1} + \frac{s_0^{\gamma}}{2\gamma s} {}_2F_1(1, \gamma; 1 + \gamma; s_0/s). \quad (5.17)$$

Com as equações (5.5), (5.6) e (5.8), $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ são conectados analiticamente por (5.13) para $s_0 = 0$ e

$$\begin{aligned} \rho(s)\sigma_{tot}(s) - \frac{K}{s} = & \pm \frac{(Y - Z)}{2\pi} \left[(\Gamma(\eta) \Gamma(1 - \eta) - \pi \cot((1 - \eta)\pi)) s^{-\eta} \right. \\ & \left. + \frac{s_0^{1-\eta}}{(1 - \eta)s} ({}_2F_1(1, 1 - \eta; 2 - \eta; s_0/s) - {}_2F_1(1, 1 - \eta; 2 - \eta; -s_0/s)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{X}{\pi} \left[(\Gamma(1-\epsilon) \Gamma(\epsilon) - \pi \cot(\epsilon\pi)) s^\epsilon \right. \\
& + \frac{s_0^\epsilon}{\epsilon} ({}_2F_1(1, \epsilon; 1+\epsilon; s_0/s) - {}_2F_1(1, \epsilon; 1+\epsilon; -s_0/s)) \left. \right] \\
& + \frac{(Y+Z)}{2\pi} \left[(\Gamma(1+\eta) \Gamma(-\eta) + \pi \cot(\eta\pi)) s^{-\eta} \right. \\
& - \frac{s_0^{-\eta}}{\eta} ({}_2F_1(1, \epsilon; 1-\eta; s_0/s) - {}_2F_1(1, -\eta; 1-\eta; -s_0/s)) \left. \right] \quad (5.18)
\end{aligned}$$

para s_0 fixo. Nas fórmulas acima $+$ e $-$ no primeiro termo do lado direito são referentes a pp e $\bar{p}p$, respectivamente.

Tomando $K = 0$ nas fórmulas acima, as previsões para o parâmetro ρ da parametrização DL originalmente obtida através de RAD e RDI (nos casos $s_0 = 0$ e $s_0 = 2m^2$) são mostradas na figura 5.11. A figura mostra claramente que, para $K = 0$ as diferenças entre RAD e RDI estão na região de baixas energias.

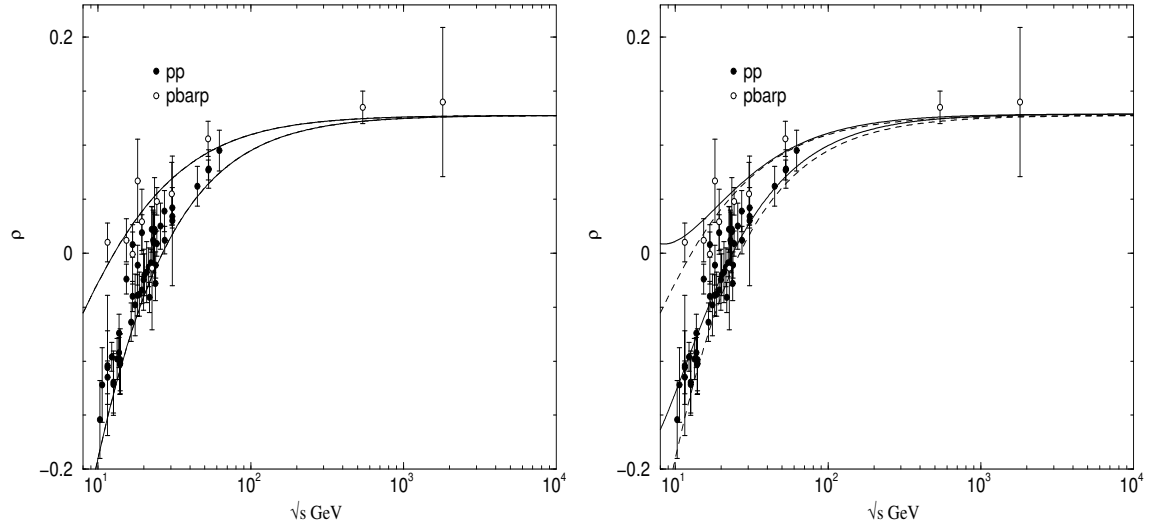


Figura 5.11: Previsões para o parâmetro ρ para a parametrização DL através de RAD (traços) e RDI (sólido) com $s_0 = 0$ (esquerda), onde os dois resultados são iguais, e $s_0 = 2m^2$ (direita). Em ambos os casos consideramos a constante de subtração igual a zero.

5.4.2 Resultados e conclusões

Utilizamos dados para σ_{tot} e ρ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ compilados pelo Particle Data Group, versão 2002, com erros estatístico e sistemático somados em quadratura com $\sqrt{s} \geq 10$ GeV.

Para estudar o efeito do limite inferior da integral em ajustes simultâneos para σ_{tot} e ρ , fizemos ajustes de ambas as quantidades através do programa CERN-MINUIT [56]. Testamos também o efeito da constante de subtração, tomando $K = 0$ e K como parâmetro livre. Os resultados são mostrados nas figuras 5.12 e 5.13, respectivamente e as informações estatísticas para cada caso são mostradas na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Ajustes simultâneos de σ_{tot} e ρ para a parametrização DL (154 pontos) com K como parâmetro livre e $K = 0$. Relação de dispersão com extremo inferior $s_0 = 2m^2$ e $s_0 = 0$.

	$s_0 = 2m^2$		$s_0 = 0$	
	K livre	$K = 0$	K livre	$K = 0$
X	21.62 ± 0.38	21.78 ± 0.37	21.62 ± 0.38	21.83 ± 0.38
Y	65.7 ± 4.5	59.5 ± 3.2	65.7 ± 4.5	50.6 ± 2.2
Z	113.4 ± 9.4	102.5 ± 7.0	113.4 ± 9.4	85.7 ± 4.4
ϵ	0.0816 ± 0.0018	0.0806 ± 0.0018	0.0816 ± 0.0018	0.0800 ± 0.0018
η	0.482 ± 0.019	0.467 ± 0.017	0.482 ± 0.019	0.435 ± 0.014
K	298 ± 92	0	737 ± 113	0
χ^2/gdl	1.17	1.24	1.17	1.50

Da figura 5.12 ($K = 0$), vemos que o limite inferior afeta os resultados na região de energias baixas e altas. O crescimento da seção de choque total é mais rápido no caso de $s_0 = 2m^2$. Em particular obtemos $\epsilon \sim 0.0806$ para $s_0 = 2m^2$ e $\epsilon \sim 0.0800$ para $s_0 = 0$. Da figura 5.13 (K como parâmetro de ajuste), concluímos que o efeito da constante de subtração é compensar a diferença nos dois casos corrigir $s_0 = 0$ e $s_0 = 2m^2$, levando ao melhor resultado estatístico: $\chi^2/gdl = 1.17$ e $\epsilon = 0.0816 \pm 0.0018$ em ambos os casos.

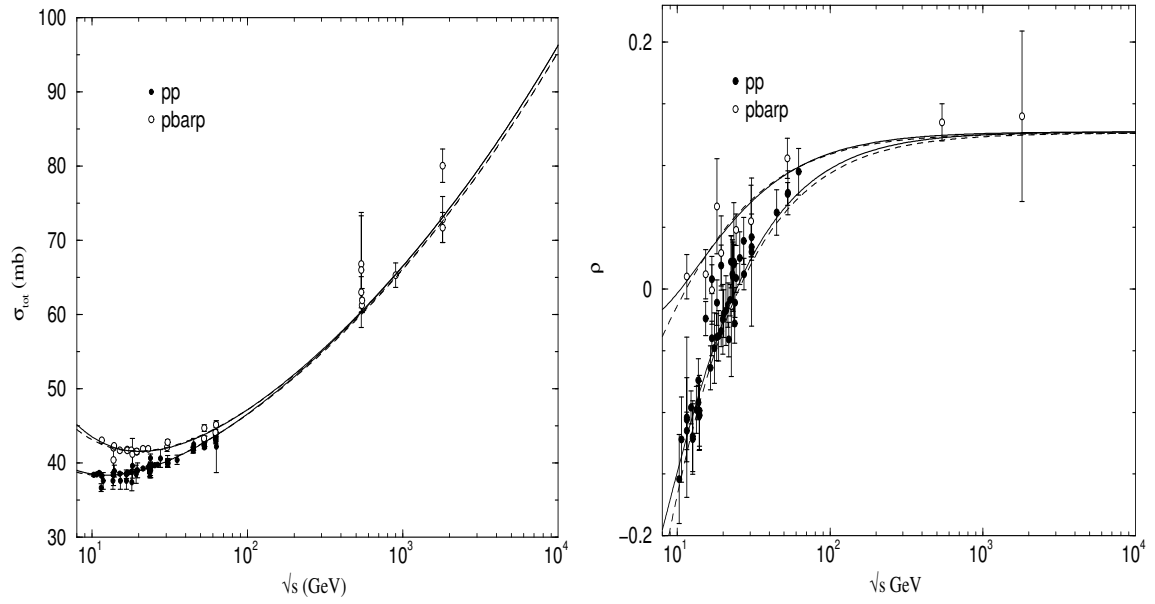


Figura 5.12: Ajuste simultâneo de σ_{tot} e ρ com $K = 0$: extremo inferior $s_0 = 2m^2$ (sólida) e $s_0 = 0$ (tracejada).

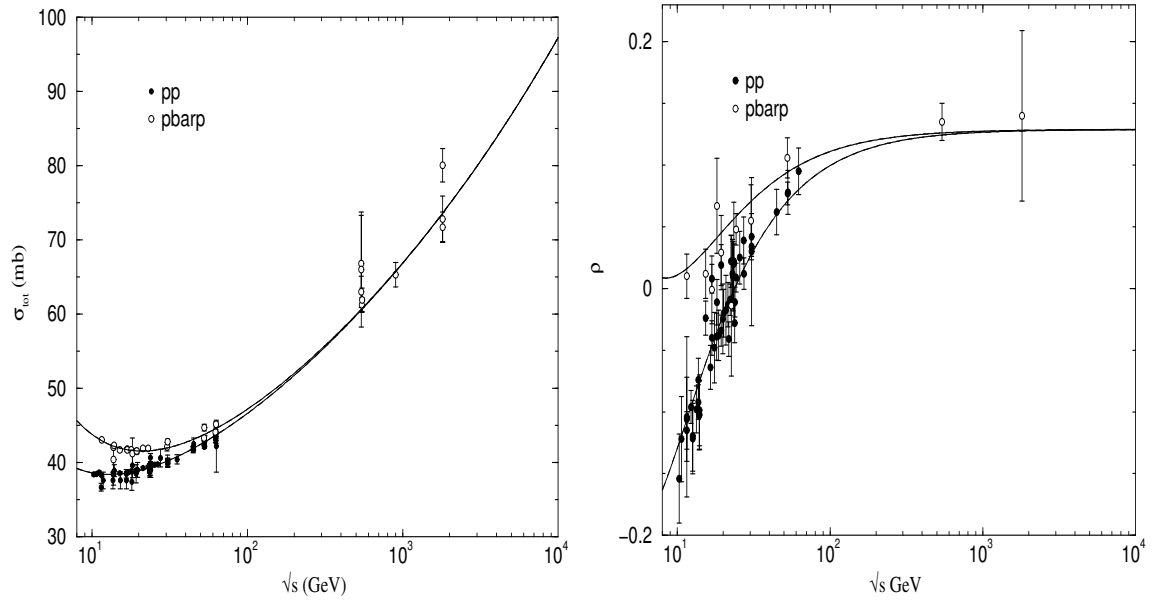


Figura 5.13: Ajuste simultâneo de σ_{tot} e ρ com K como parâmetro livre: extremo inferior $s_0 = 2m^2$ (sólida) e $s_0 = 0$ (tracejada).

Capítulo 6

Conclusões, comentários e perspectivas

Neste trabalho investigamos o espalhamento elástico próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$) utilizando a seção de choque total (σ_{tot}) e o parâmetro ρ , que são quantidades físicas expressas em termos da amplitude de espalhamento:

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{\text{Im } F(s, t=0)}{s}, \quad \rho(s) = \frac{\text{Re } F(s, t=0)}{\text{Im } F(s, t)}.$$

Com essa finalidade estudamos (Cap. 3) princípios vindos da teoria quântica de campos e teoremas que fornecem características importantes da amplitude F , como por exemplo, o teorema de Froissart-Martin que estabelece um limite no crescimento da seção de choque total com a energia e o princípio de analiticidade que tem como uma das principais consequências as relações de dispersão. Essas relações conectam a parte real e imaginária da amplitude de espalhamento através de uma integral da seção de choque total ou através de um operador diferencial.

A dedução da relação de dispersão integral (RDI) foi estudada com detalhes (Cap. 4). Mostramos que dependendo do comportamento assintótico da seção de choque total surge a necessidade de introduzir subtrações. Os resultados obtidos foram

$$\begin{aligned} \frac{\text{Re } F_{\pm}(s)}{s^k} &= -\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dE'^{(k-1)}} \left[\frac{\mathcal{G}_{\pm}(E')}{E' - E} \right]_{E'=0} \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_m^{\infty} \frac{\text{Im } F_{\pm}(s')}{s'^k} \left[\frac{1}{s' - s} \pm \frac{(-1)^k}{s' + s} \right] ds', \end{aligned}$$

onde k é o número de subtrações e os índices $+$ e $-$ referem-se às amplitudes pares e ímpares. Em particular, o resultado para F ímpar, sem subtração e uma subtração é

$$\text{Re } F_{-}(s) = \frac{1}{\pi} P \int_{s_0}^{\infty} \text{Im } F_{-}(s') \left[\frac{1}{s' - s} - \frac{1}{s' + s} \right] ds',$$

e para F par, com uma e duas subtrações

$$\operatorname{Re} F_+(s) = K_1 + \frac{s}{\pi} P \int_{s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_+(s')}{s'} \left[\frac{1}{s' - s} - \frac{1}{s' + s} \right] ds',$$

onde K_1 é a constante de subtração.

Continuando o estudo das relações de dispersão, mostramos que na região de altas energias a RDI pode ser transformada numa forma diferencial, chamada Relação de Analiticidade Derivativa (RAD) e os resultados obtidos foram:

$$\operatorname{Re} F_+(s) = s^{2n+1} \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{ds} \right) \frac{\operatorname{Im} F_+(s)}{s^{2n+1}} \quad k = 2n \text{ e } k = 2n - 1 \quad (6.1)$$

para F par e

$$\operatorname{Re} F_-(s) = s^{2n} \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{ds} \right) \frac{\operatorname{Im} F_-(s)}{s^{2n}} \quad k = 2n \text{ e } k = 2n + 1 \quad (6.2)$$

para F ímpar. Em particular para F ímpar, sem subtração e uma subtração o resultado é

$$\operatorname{Re} F_-(s) = \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right) \operatorname{Im} F_-(s)$$

e para F par, uma e duas subtrações

$$\operatorname{Re} F_+(s) = K_1 + s \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right) \frac{\operatorname{Im} F_+(s)}{s},$$

onde K_1 é a constante de subtração.

Um dos pontos importantes aqui é termos mostrado que a RAD é independente de qualquer parâmetro real e que, obedecidas as condições de convergência, a única aproximação envolvida é tomar o limite $s_0 \rightarrow 0$ no extremo inferior da integral. A independência do parâmetro real foi mostrada por Eichmann e Dronkers em 1974 [50], logo após a publicação de Bronzan, Kane e Sukhatme [7].

É importante ressaltar que mesmo trabalhos recentes consideram a presença do parâmetro real α na RAD [45, 54, 65, 66], inclusive Kolář e Fischer em artigo de revisão de 2002 [67] e nós mesmos, em trabalho anterior [68].

No capítulo 4, também estudamos alguns teoremas que fornecem características importantes para que a amplitude F satisfaça a série de tangentes, como por exemplo o teorema 1 que estabelece um critério prático para verificar se a série de tangente da RAD é ou não convergente em termos das derivadas da F .

Depois de obtidas as relações de dispersão, passamos para as aplicações (Cap. 5). Estudamos simultaneamente as grandezas $\sigma_{tot}(s)$ e $\rho(s)$ baseados nas conseqüências do

Princípio de Unitaridade e Cruzamento, o que caracteriza Abordagem Analítica do espalhamento frontal. Utilizamos dois modelos para a parametrização dos dados de σ_{tot} e determinamos ρ através das relações de dispersão. Os ajustes permitiram obter previsões para σ_{tot} e ρ para energias ainda não alcançadas e estudar os limites assintóticos decorrentes dos diferentes modelos de parametrizações junto com sua adequação, ou não, na descrição dos dados experimentais.

Na seção 5.2 utilizamos a parametrização de Donnachie-Landshoff para determinar o parâmetro ρ através da RAD tomando apenas os primeiros termos da série de tangentes e comparamos com os resultados obtidos quando utilizamos a série toda, que é equivalente a tomar o limite $s_0 \rightarrow 0$ na relação integral. Concluimos que os primeiros termos da série de tangentes fornecem uma boa aproximação para a integral com o limite $s_0 \rightarrow 0$. Quando tomamos a constante de subtração igual a zero, o resultado de primeira ordem é uma boa aproximação para energias no centro de massa acima de 100 GeV; se somarmos até o terceiro termo temos uma boa aproximação para energias próximas a 10 GeV. Estes resultados concordam com aqueles obtidos no apêndice E, onde consideramos apenas a amplitude par para o caso do espalhamento próton-próton. No caso de considerarmos a constante de subtração como um parâmetro livre, mesmo a aproximação de primeira ordem mostra boa concordância com os resultados para a integral para energias acima de 10 GeV e concluimos que a primeira ordem, comumente utilizada na literatura, é uma boa aproximação para a integral ($s_0 \rightarrow 0$), desde que K , a constante de subtração, seja utilizada como um parâmetro livre.

Na seção 5.3, utilizamos a RAD para estudarmos os seguintes aspectos relacionados à modelos para o espalhamento pp e $\bar{p}p$: a) o efeito de estimativas diferentes para a seção de choque total pp de experimentos de raios cósmicos utilizando dois conjuntos de dados diferentes; b) a diferença entre ajuste individual e simultâneo para σ_{tot} e ρ ; c) o papel da constante de subtração nas relações de dispersão; d) o efeito de parametrizações diferentes para σ_{tot} (Donnachie-Landshoff e Kang-Nicolescu). Chegamos às seguintes conclusões: 1) Os resultados de ajustes obtidos com os dois conjuntos de dados não diferem substancialmente, exceto no caso do ajuste individual para o modelo Kang-Nicolescu. 2) Os valores máximo e mínimo obtidos para a potência positiva na parametrização DL foram $\epsilon = 0.094$ para ajuste individual e dados do conjunto II e $\epsilon = 0.079$ para ajuste simultâneo de σ_{tot} e ρ e dados do conjunto I. 3) Nos ajustes simultâneos e individuais, com exceção do ajuste individual, tendo K como parâmetro livre, para um dos conjuntos de dados, com o Modelo Kang-Nicolescu, as informações estatísticas não indicam preferência entre ajuste individual ou conjunto. Por outro lado o ajuste simultâneo restringe o crescimento

da seção de choque total. Para o caso da parametrização DL e $K = 0$, obtivemos:

$$\begin{aligned} \text{i)} \epsilon_{\text{indi}}^{\text{I}} &\approx 0.088 \quad \rightarrow \quad \epsilon_{\text{simul}}^{\text{I}} \approx 0.081 \text{ (redução } \approx 9\%) \\ \text{ii)} \epsilon_{\text{indi}}^{\text{II}} &\approx 0.091 \quad \rightarrow \quad \epsilon_{\text{simul}}^{\text{II}} \approx 0.083 \text{ (redução } \approx 10\%). \end{aligned}$$

4) Em geral o uso da constante de subtração afeta os resultados em baixas e altas energias.

Na seção 5.4, investigamos o efeito da aproximação $s_0 \rightarrow 0$ no extremo inferior da integral junto com o uso da constante de subtração utilizando a parametrização Donnachie-Landshoff e ajuste simultâneo para σ_{tot} e ρ . Para a constante de subtração $K = 0$, vimos que o limite inferior afeta os resultados na região de altas e baixas energias. O crescimento da seção de choque é mais rápido no caso $s_0 = 2m^2$ do que no caso $s_0 = 0$, como mostram os resultados $\epsilon \sim 0.081$ para $s_0 = 0$ e $\epsilon \sim 0.080$ para $s_0 = 2m^2$. Também concluímos que o efeito da constante de subtração é compensar a diferença nos casos $s_0 = 2m^2$ e $s_0 = 0$ levando aos melhores resultados estatísticos.

Considerando os resultados do parágrafo anterior e da seção 5.2 podemos concluir que os primeiros termos da série de tangente fornecem uma boa aproximação para a relação de dispersão integral (extremo inferior $s_0 = 2m^2$) se a constante de subtração é utilizada como parâmetro livre.

Outra conclusão a respeito dos resultados obtidos na seção 5.2 e no apêndice E é que o limite assintótico nas previsões de ρ são iguais independente do número de termos utilizados na série da RAD. Isto sugere que a série de tangente é assintótica à relação integral. Este assunto foi estudado por Kolář e Fischer em [52, 53]. Eles mostraram que sob um determinado conjunto de hipóteses, algumas utilizadas na teoria da Matriz S , o primeiro termo da DAR é assintótico à $ReF(s)/s$, ou seja, à RDI com ou sem a constante de subtração.

Quanto aos dados de raios cósmicos, os estudos feitos com espalhamento pp e $\bar{p}p$ não fornecem preferência por nenhum dos dois conjuntos investigados, mas o estudo do espalhamento pp indica dois cenários diferentes para o crescimento de σ_{tot} . Isto decorre do pequeno número de estimativas de raios cósmicos e das grandes barras de erro, comparados com os dados de aceleradores. Resultados vindos de experimentos de aceleradores, que serão disponibilizados em breve, poderão esclarecer qual das duas estimativas é a correta.

Em todos os casos investigados, vimos que a constante de subtração afeta os resultados. Como ela é matematicamente justificável para o controle da convergência das relações de dispersão integrais, entendemos que ela deve ser utilizada como parâmetro livre de ajuste.

Uma possibilidade de continuar e estender este estudo a respeito de processos difrativos, espalhamentos próton-próton e antipróton-próton, no contexto formal, é através desenvolvimento simultâneo de pesquisas na área da Abordagem Analítica e da Representação

Eiconal (Princípio de Unitaridade). Na abordagem analítica, pode ser aprofundado o estudo de princípios, teoremas e relações de dispersão, também no caso de duas subtrações, bem como reformulações que possam ser exigidas pelos novos dados experimentais. Através da Abordagem Eiconal (também utilizada como técnica de unitarização) pode-se estender os estudos à região não frontal (dependência com o momento transferido) e buscar conexões com a Cromodinâmica Quântica não perturbativa via métodos funcionais [69].

Apêndice A

Matriz S e teorema óptico

Os estados para uma única partícula são especificados pelo momento $\vec{p}$ que é uma variável contínua, e pelo índice discreto α que representa o spin [21]. Para duas ou mais partículas

$$|\vec{p}_1\alpha_1\rangle|\vec{p}_2\alpha_2\rangle\ldots=|\vec{p}_1\alpha_1,\vec{p}_2\alpha_2,\ldots\rangle \quad (\text{A.1})$$

e a propriedade de normalização é

$$\langle\vec{p}'_1\alpha'_1,\vec{p}'_2\alpha'_2,\ldots|\vec{p}_1\alpha_1,\vec{p}_2\alpha_2,\ldots\rangle=(2\pi)^32E_1\delta^3(\vec{p}'_1-\vec{p}_1)(2\pi)^32E_2\delta^3(\vec{p}'_2-\vec{p}_2)\ldots\delta_{\alpha'_1\alpha_1}\delta_{\alpha'_2\alpha_2}\ldots(\text{A.2})$$

com densidade de estado dada por $\frac{1}{(2\pi)^3E_1}\frac{1}{(2\pi)^3E_2}\ldots$

Os estados $|i\rangle$ e $|f\rangle$ representam estados da forma (A.1). Como na seção 3.1.2, vamos definir o operador S , onde $S_{fi}=\langle f|S|i\rangle$. A soma sobre todos os estados da quantidade $(S_{if}^\dagger S_{fi})$ é dada por

$$\sum_{f\alpha}\int\prod_{n=1}^{N_f}\frac{d^3p_n}{(2\pi)^32E_n}(S_{if}^\dagger S_{fi}). \quad (\text{A.3})$$

Há N_f partículas no estado final. A soma consiste da integral sobre o momento de todas as partículas e a soma de todos os estados α do estado final. Os fatores $1/(2\pi)^32E_n$ são as densidades de estado. Também há a soma sobre todos os estados finais diferentes. A relação de unitariedade equivalente a (3.11) é

$$\sum_{f\alpha}\int\prod_{n=1}^{N_f}\frac{d^3p_n}{(2\pi)^32E_n}S_{if}^\dagger S_{fi}=\delta_{ij}\delta_{\alpha_j\alpha_i}\prod_{n=1}^{N_i}[(2\pi)^32E_n\delta^3(\vec{p}_{j,n}-\vec{p}_{i,n})] \quad (\text{A.4})$$

Nesta equação as duas δ 's de Kronecker indicam que a expressão é zero a não ser que $|j\rangle$ e $|i\rangle$ tenham as mesmas partículas com os mesmos números quânticos internos. Isto assegura que para cada partícula no estado $|i\rangle$ há uma correspondente no estado $|j\rangle$.

Então o produto de funções delta de Dirac faz sentido, cada função se refere a um par de partículas nos estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$. Temos então

$$P_{tot} = \sum_{fs} \inf \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} S_{if}^\dagger S_{fi} \right] = \prod_{n=1}^{N_i} \left[(2\pi)^3 2E_n \delta^3(0) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Podemos continuar as manipulações formais para estas quantidades. Definimos

$$\hat{I}_{ji} = \delta_{ji} \delta_{\alpha_j \alpha_i} \prod_{n=1}^{N_i} \left[(2\pi)^3 2E_n \delta^3(\delta^3(p_{j,n} - p_{i,n})) \right] \quad (\text{A.6})$$

Também notamos que

$$\sum_{f\alpha} \int \prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \hat{I}_{if} \hat{I}_{ji} = \hat{I}_{ji}. \quad (\text{A.7})$$

Então a forma convencional da propriedade de unitaridade da matriz S

$$S^\dagger S = \hat{I} \quad (\text{A.8})$$

é simbólica. O operador $\hat{I}$ é um operador complicado.

A.1 Relação de unitaridade

A parte interessante da matriz S é aquela que leva a estados diferentes do estado inicial. Isolamos esta parte definindo a matriz T através da equação

$$S_{fi} = \hat{I}_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{fi}, \quad (\text{A.9})$$

onde P_f e P_i são o quadrimomento total final e inicial, respectivamente. A função delta de Dirac expressa a conservação do quadrimomento. O operador $\hat{I}_{fi}$ foi definido na seção anterior.

Para derivar a relação de unitaridade, trocamos a matriz S na equação (A.4) pelo lado direito da equação (A.9). Cancelando $\hat{I}_{ji}$ em ambos os lados, encontramos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{f\alpha} \int \left\{ \prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \left[i \hat{I}_{if} T_{fi} \delta^4(P_f - P_i) \right] + \right. \\ &\quad \left. + [T_{if}^\dagger T_{fi}] (2\pi)^4 [\delta^4(P_f - P_i) \delta^4(P_f - P_j)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Depois do cancelamento das funções δ , a equação acima se reduz a

$$i[T_{ji}^\dagger - T_{ji}] = (2\pi)^4 \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} T_{if}^\dagger T_{fi} \delta^4(P_f - P_i) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Esta é a relação de unitaridade geral.

A.2 Seção de choque total e matriz T

O próximo passo é conectar a matriz T a seção de choque total, quantidade que é experimentalmente determinada.

A probabilidade de se passar de um estado $|i\rangle$ para um estado final $|f\rangle$ diferente do estado $|i\rangle$ é

$$\sum_f P_{fi} = \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (S_{if}^\dagger S_{fi}) \right] \quad f \neq i \quad (\text{A.12})$$

que se reduz a

$$\sum_f P_{fi} = \sum_{f\alpha} \int \prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} [|T_{if}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)]. \quad (\text{A.13})$$

O produto de funções δ leva a infinitos na equação (A.13). Para contornar este problema, o caminho convencional é interpretar $\delta^3(0)$ como $V/(2\pi)^3$, onde $V = L^3$ é o volume infinito onde a reação ocorre. Da mesma forma, interpretamos

$$\delta(P_f^0 - P_i^0) \stackrel{P_f^0 \rightarrow P_i^0}{=} \delta(0) = \frac{T}{2\pi}, \quad (\text{A.14})$$

onde T é o tempo total (que também é infinito). Mas a probabilidade total por unidade de volume por unidade de tempo é uma quantidade finita. Então dividindo (A.13) por VT obtemos

$$\begin{aligned} \sum_f (\text{Probabilidade por unidade de volume por unidade de tempo})_{fi} &= \\ &= (2\pi)^4 \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Temos agora duas partículas no estado inicial designadas pelos índices i_1 e i_2 com densidade de partícula $\rho(i_1) = 2E_{i_1}$ e $\rho(i_2) = 2E_{i_2}$.

Neste ponto é mais fácil trabalhar no sistema do laboratório, tomando a partícula 2 como a partícula alvo. Dividindo ambos os lados da equação (A.15) por $2E_{i_2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \sum_f (\text{Probabilidade por partícula alvo por unidade de tempo})_{fi} &= \\ &= \frac{(2\pi)^4}{2E_{i_2}} \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Para remover o fator tempo e obter a seção de choque total dividimos a última expressão pelo fluxo de partículas incidentes, que no sistema do laboratório é

$$(\text{densidade da partícula 1})(\text{velocidade da partícula 1 no laboratório}) = 2E_{i_1} v_{i_1}. \quad (\text{A.17})$$

Esta divisão fornece

$$\sigma_{tot} = \frac{(2\pi)^4}{4E_{i1}E_{i2}v_{i1,lab}} \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \right]. \quad (A.18)$$

Ainda é possível escrever o denominador da fração acima na forma invariante, logo

$$\sigma_{tot} = \frac{(2\pi)^4}{4[(P_{i1}P_{i2})^2 - m_{i1}^2 m_{i2}^2]^{1/2}} \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \right]. \quad (A.19)$$

A.3 O teorema óptico

O teorema óptico é derivado diretamente da relação de unitariedade geral. Consideramos o caso especial em que o estado final j é idêntico ao estado inicial i contendo duas partículas, e fazemos as hipóteses:

1. j tem as mesmas duas partículas que i ;
2. o momento $\vec{p}$ das partículas não muda quando passamos de i para j ;
3. o estado de spin das partículas não muda quando passamos de i para j .

Estas especificações definem espalhamento elástico na direção frontal sem mudança no estado de spin de nenhuma das partículas.

Como o estado j é o mesmo que i , temos

$$i[T_{ji}^\dagger - T_{ji}] = i[T_{ii}^* - T_{ii}] = 2 \operatorname{Im} T_{ii}. \quad (A.20)$$

Então sob as condições dadas no parágrafo acima, a equação (A.11) toma a forma

$$2 \operatorname{Im} T_{el,i}(0) = (2\pi)^4 \sum_{f\alpha} \int \left[\prod_{n=1}^{N_f} \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} |T_{fi}|^2 \delta^4(P_f - P_i) \right], \quad (A.21)$$

onde inserimos o índice el, i para indicar que é a amplitude de espalhamento elástico vinda do estado i . Agora usando (A.19), podemos trocar o lado direito da equação acima por

$$\sigma_{tot,i} 4[(P_{i1}P_{i2})^2 - m_{i1}^2 m_{i2}^2]^{1/2} \quad (A.22)$$

para obter

$$\operatorname{Im} T_{el,i}(0) = 2[(P_{i1}P_{i2})^2 - m_{i1}^2 m_{i2}^2]^{1/2} \sigma_{tot,i} \quad (A.23)$$

que é uma expressão do teorema óptico. No sistema do centro de momento temos

$$\operatorname{Im} T_{el,i}(0) = 2k\sqrt{s}\sigma_{tot,i}. \quad (A.24)$$

Na notação usada neste trabalho temos $T = F(s, t)$ e portanto, omitindo o índice i , obtemos

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{\operatorname{Im} F(s, t=0)}{2k\sqrt{s}}. \quad (A.25)$$

Apêndice B

Prova do teorema 1

Teorema 1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. A série $\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x)$ é convergente se e somente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n+1)}(x)$ é convergente.

Podemos escrever [70]

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{dx}\right) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f^{(2n-1)}(x), \quad (\text{B.1})$$

onde

$$a_n = \frac{2\pi^{2n-1}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}, \quad (\text{B.2})$$

e B_n são os números de Bernoulli.

Utilizando a seguinte relação [70]

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}|B_{2n}|}{(2n)!} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.3})$$

entre os números de Bernoulli B_n e a função zeta de Riemann ζ , reescrevemos a_n

$$a_n = \frac{4}{\pi}(1-2^{-2n})\zeta(2n). \quad (\text{B.4})$$

A função ζ satisfaz a seguinte desigualdade

$$1 \leq \zeta(2n) \leq \frac{\pi^2}{6} \quad n \geq 1. \quad (\text{B.5})$$

De fato, usando a definição da função zeta [70]

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-x} \quad (\text{B.6})$$

para $x = 2n$ obtemos

$$\zeta(2n) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2n}. \quad (\text{B.7})$$

Para $n = 1$ temos a série [70]

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{B.8})$$

Como $j^{-2n} \leq j^{-2}$ para $n \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2n} \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{B.9})$$

que é a segunda desigualdade. A primeira é trivial, basta notar que

$$\zeta(2n) = 1 + 2^{-2n} + 3^{-2n} + 4^{-2n} + \dots \geq 1. \quad (\text{B.10})$$

Agora utilizamos esta desigualdade para mostrar que (a_n) é uma sequência limitada.

$$|a_n| = \left| \frac{4}{\pi} (1 - 2^{-2n}) \zeta(2n) \right| \leq \frac{4}{\pi} (1 - 2^{-2n}) \frac{\pi^2}{6} \leq \frac{2\pi}{3} \quad (\text{B.11})$$

Não é difícil mostrar que (a_n) é decrescente. Para isso usamos novamente a definição da função ζ

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi} (1 - 2^{-2n}) \zeta(2n) \\ &= \frac{4}{\pi} (1 - 2^{-2n}) (1 + 2^{-2n} + 3^{-2n} + 4^{-2n} + 5^{-2n} + \dots) \\ &= \frac{4}{\pi} (1 + 3^{-2n} + 5^{-2n} + 7^{-2n} + \dots). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Logo $m \geq n$ implica em $a_m \leq a_n$. O teorema segue do teste de Abel [71].

Apêndice C

Cálculo de algumas integrais utilizadas no trabalho

C.1 Cálculo das integrais $P \int_{s_0}^{\infty} \frac{x^\gamma}{x^2 - a^2} dx$ e $P \int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{x^2 - a^2} dx$

O cálculo da integral

$$I = P \int_{s_0}^{+\infty} \frac{s'^\epsilon}{s'^2 - s^2} ds', \quad (\text{C.1})$$

onde $s > s_0$, $\epsilon < 1$, permite obtermos o parâmetro ρ quando temos parametrizações para a seção de choque contendo s^ϵ e $\ln s$.

Seguindo a abordagem geral da referência [72], introduzimos a mudança de variável $s' = y + s_0$, de modo que I pode ser escrita da seguinte forma:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(y + s_0)^{\epsilon-1}}{y + s + s_0} dy + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(y + s_0)^{\epsilon-1}}{y - s + s_0} dy. \quad (\text{C.2})$$

Para facilitar definimos I_1 e I_2 como a primeira e a segunda integrais acima respectivamente:

$$I = I_1 + I_2 \quad (\text{C.3})$$

Usando a tabela de integrais [70] obtemos:

$$I_1 = \frac{1}{2} s_0^{\epsilon-1} B(1, 1 - \epsilon) {}_2F_1(1, 1 - \epsilon; 2 - \epsilon; -s/s_0) \quad (\text{C.4})$$

$$I_2 = -\frac{\pi}{2} \cot(\epsilon\pi) s^{\epsilon-1} + \frac{s_0^\epsilon}{2\epsilon s} {}_2F_1(1, \epsilon; 1 + \epsilon; s_0/s) \quad (\text{C.5})$$

onde $B(x, y)$ é a função beta e ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ é uma função hipergeométrica.

Devido a dificuldade de calcularmos a função hipergeométrica para $|z| \gg 1$, usamos a relação [73]:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, 1-c+a; 1-b+a; z) \\ &+ \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, 1-c+b; 1-a+b; z) \end{aligned}$$

para reescrever I_1 :

$$I_1 = -\frac{s_0^\epsilon}{2\epsilon s} {}_2F_1(1, \epsilon; 1+\epsilon; -s_0/s) + \frac{\Gamma(1-\epsilon) \Gamma(\epsilon)}{2} s^{\epsilon-1}. \quad (C.6)$$

Para as integrais contendo $\ln s$, definimos

$$I_n = P \int_{s_0}^{+\infty} \frac{(\ln s')^n}{s'^2 - s^2} ds' \quad n \text{ natural} \quad (C.7)$$

que é obtida pela fórmula:

$$I_n = \left. \frac{d^n}{d\epsilon^n} I \right|_{\epsilon=0} \quad (C.8)$$

Antes de calcularmos a derivada de I vamos escrever esta relação em termos de potências de ϵ . Com a ajuda de:

$$s^\epsilon = \exp(\epsilon \ln s) = 1 + \epsilon \ln s + O(\epsilon^2) \quad (C.9)$$

$$\frac{\Gamma(1-\epsilon) \Gamma(\epsilon)}{\pi} = \csc(\pi\epsilon) = \frac{1}{\pi\epsilon} + \frac{\pi\epsilon}{6} + O(\epsilon^3) \quad (C.10)$$

$$\cot(\pi\epsilon) = \frac{1}{\pi\epsilon} + \frac{\pi\epsilon}{3} + O(\epsilon^3) \quad (C.11)$$

Temos:

$$[\Gamma(1-\epsilon) \Gamma(\epsilon) - \pi \cot(\pi\epsilon)] s^\epsilon = \frac{1}{s} \left[\frac{\pi^2}{2} \epsilon + \frac{\pi^2 \ln s}{2} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right]. \quad (C.12)$$

Lembrando que a série hipergeométrica é dada por:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots + \\ &\frac{a(a+1) \dots (a+j-1)b(b+1) \dots (b+j-1)}{c(c+1) \dots (c+j-1)} \frac{z^j}{j!} + \dots \end{aligned} \quad (C.13)$$

para $|z| < 1$.

Temos:

$${}_2F_1(1, \epsilon; 1 + \epsilon; z) = \epsilon \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{z}{1 + \epsilon} + \frac{z^2}{2 + \epsilon} + \dots \right] \quad (C.14)$$

e daí:

$${}_2F_1(1, \epsilon; 1 + \epsilon; z) - {}_2F_1(1, \epsilon; 1 + \epsilon; -z) = 2\epsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{2j + 1 + \epsilon}. \quad (C.15)$$

Para escrever $1/(2j + 1 + \epsilon)$ em termos de potências de ϵ utilizamos:

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1 \quad (C.16)$$

$$\frac{1}{2j + 1 + \epsilon} = \frac{1}{2j + 1} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2j+1}} = \frac{1}{2j + 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\epsilon^n}{(2j + 1)^n}. \quad (C.17)$$

Finalmente conseguimos escrever $I(\epsilon)$ em termos de potências de ϵ :

$$\begin{aligned} I(\epsilon) &= \frac{1}{2s} \left[\frac{\pi^2}{2} \epsilon + \frac{\pi^2 \ln s}{2} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right] + \frac{1}{s} \left(1 + \epsilon \ln s_0 + \frac{\ln^2 s_0}{2!} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right) \times \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j + 1} \left[1 - \frac{\epsilon}{2j + 1} + \frac{\epsilon^2}{(2j + 1)^2} - \dots \right] \end{aligned} \quad (C.18)$$

com $x = s_0/s$ e obtemos facilmente:

$$I(0) = \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j + 1} \left(\frac{s_0}{s} \right)^{2j+1} = \frac{1}{2s} \ln \left(\frac{s + s_0}{s - s_0} \right), \quad (C.19)$$

$$I'(0) = \frac{\pi^2}{4s} + \frac{2}{s} \ln s_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j + 1} \left(\frac{s_0}{s} \right)^{2j+1} - \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j + 1)^2} \left(\frac{s_0}{s} \right)^{2j+1} \quad (C.20)$$

e

$$\begin{aligned} I''(0) &= \frac{\pi^2}{2s} \ln s + \frac{\ln^2 s_0}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j + 1} \left(\frac{s_0}{s} \right)^{2j+1} - \frac{2 \ln s_0}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j + 1)^2} \left(\frac{s_0}{s} \right)^{2j+1} \\ &+ \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{(2j + 1)^3} \left(\frac{s_0}{s} \right)^{2j+1}. \end{aligned} \quad (C.21)$$

• Exemplo

Mostramos o parâmetro ρ calculado para duas parametrizações da seção de choque total. Utilizamos relação de dispersão integral e por simplicidade tomamos a constante de subtração $K = 0$. Não entramos nos detalhes dos cálculos, queremos apenas mostrar que o parâmetro ρ , calculado através das relações de dispersão concorda com os dados e como é mostrado no capítulo 5, a descrição dos dados melhora quando utilizamos a constante de subtração como um parâmetro de ajuste.

Começamos com a parametrização de Donnachie-Landshoff (DL) [57]

$$\sigma_{tot}^{pp}(s) = X s^\epsilon + Y s^{-\eta} \quad (C.22a)$$

$$\sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) = X s^\epsilon + Z s^{-\eta}, \quad (C.22b)$$

onde $X = 21.7$ mb, $Z = 56.08$ mb, $Z = 98.39$ mb, $\epsilon = 0.0808$ e $\eta = 0.4525$.

Utilizando as equações (5.5), (5.6), (5.8) e (C.3) obtemos o resultado que é mostrado na figura C.1.

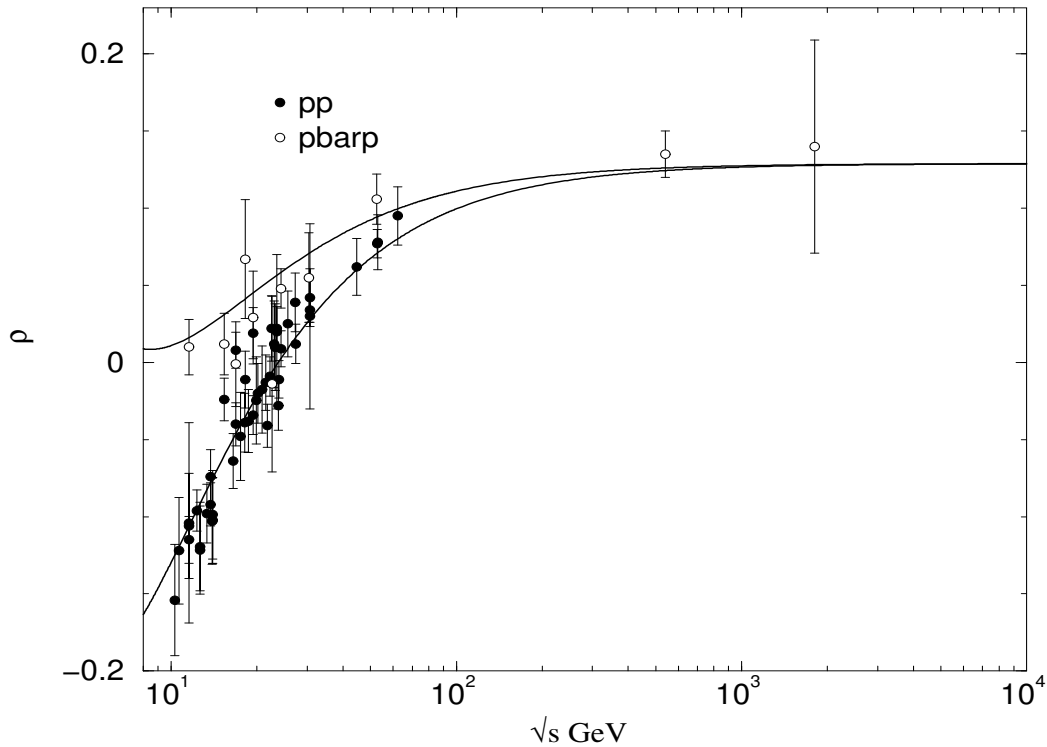


Figura C.1: Parâmetro ρ pp e $\bar{p}p$ calculado para a parametrização (C.22) através de RDI.

Agora vamos calcular ρ para uma seção de choque da forma Block et al. [10]

$$\sigma_{tot}^{pp}(s) = A + \beta \left[\ln^2 \left(\frac{s}{s_0} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right] + C \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\nu-1} \sin \left(\frac{\pi\nu}{2} \right) + D \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha-1} \sin \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (C.23a)$$

$$\sigma_{tot}^{\bar{p}p}(s) = A + \beta \left[\ln^2 \left(\frac{s}{s_0} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right] + C \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\nu-1} \sin \left(\frac{\pi\nu}{2} \right) - D \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha-1} \sin \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (C.23b)$$

onde $C = 77.43$ mb, $D = -34.42$ mb, $s_0 = 2.18$ GeV², $A = 19.39$ mb, $\beta = 3.67$ mb, $\nu = 0.6$ e $\alpha = 0.386$ são os parâmetro de ajustes encontrados por [72].

Utilizando as equações (5.5), (5.6), (5.8), (C.3) e (C.19)-(C.21) obtemos o resultado que é mostrado na figura C.2.

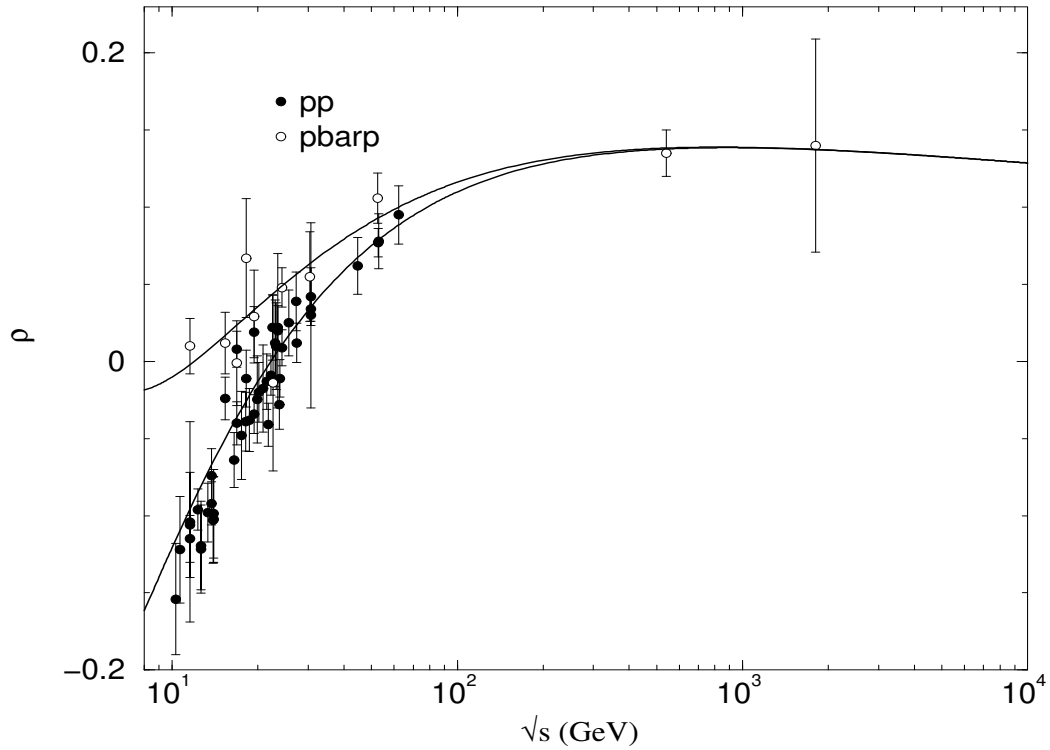


Figura C.2: Parâmetro ρ pp e $\bar{p}p$ calculado para a parametrização (C.23) através de RDI.

C.2 Cálculo da integral $\int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds'$

Na seção C.1 foi apresentado o cálculo para obter as integrais $\int_{s_0}^{\infty} \frac{s'^{\epsilon}}{s'(s'^2 - s^2)} ds'$ para $\epsilon < 1$, $\int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds'$ e $\int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln^2 s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds'$.

Porém se quisermos calcular a integral $\int_{s_0}^{\infty} \frac{\ln s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds'$, não podemos obtê-la da mesma maneira que as integrais anteriores, apenas trocando ϵ por $\epsilon - 1$ e calculando a derivada.

Abaixo apresentamos o cálculo desta integral que é utilizada na determinação do parâmetro ρ em função da energia via relação de dispersão integral, quando a diferença entre as seções de choque total pp e $\bar{p}p$ é proporcional a $\ln s$ assintoticamente.

Seja $J(\epsilon)$ definida por

$$J(\epsilon) = \int_{s_0}^{\infty} \frac{s'^{\epsilon}}{s'(s'^2 - s^2)} ds'. \quad (\text{C.24})$$

Introduzindo a mudança de variável $s'^2 = t$, obtemos

$$J(\epsilon) = \frac{1}{2} P \int_{s_0^2}^{+\infty} \frac{t^{\frac{\epsilon}{2}-1}}{(t - s^2)} dt. \quad (\text{C.25})$$

Introduzimos outra mudança de variável $t = y + s_0^2$, de modo que J pode ser escrita da seguinte forma:

$$J(\epsilon) = \frac{1}{2} P \int_0^{+\infty} \frac{(y + s_0^2)^{\frac{\epsilon}{2}-1}}{(y + s_0^2 - s^2)} dy. \quad (\text{C.26})$$

Usando a tabela de integrais [70] obtemos:

$$J(\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\pi (s^2)^{\frac{\epsilon}{2}-1} \cot \left(\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \pi \right) - \frac{(s_0^2)^{\frac{\epsilon}{2}}}{s^2} B(-\epsilon/2, 1) {}_2F_1(1, \epsilon/2; 1 + \epsilon/2; s_0^2/s^2) \right] \quad (\text{C.27})$$

onde $B(x, y)$ é função beta e ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ é a função hipergeométrica.

Usando a relação entre a função beta e a função gama,

$$B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y), \quad (\text{C.28})$$

obtemos

$$J(\epsilon) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{s^2} \right)^{1-\frac{\epsilon}{2}} \cot \left(\frac{\epsilon\pi}{2} \right) + \frac{s_0^{\epsilon}}{\epsilon s^2} {}_2F_1(1, \epsilon/2; 1 + \epsilon/2; s_0^2/s^2). \quad (\text{C.29})$$

A integral

$$\int_{s_0}^{+\infty} \frac{\ln s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds' \quad (\text{C.30})$$

é obtida derivando-se a equação (C.29) em relação a ϵ em $\epsilon = 0$, ou seja,

$$\int_{s_0}^{+\infty} \frac{\ln s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds' = \left. \frac{d^n}{d\epsilon^n} J(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \quad (\text{C.31})$$

Antes de calcularmos a derivada de J vamos escrever esta relação em termos de potências de ϵ . Lembrando que a série hipergeométrica é dada por:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots + \\ &\quad \frac{a(a+1) \dots (a+j-1)b(b+1) \dots (b+j-1)}{c(c+1) \dots (c+j-1)} \frac{z^j}{j!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

para $|z| < 1$, temos

$${}_2F_1(1, \epsilon/2; 1 + \epsilon/2; s_0^2/s^2) = 1 + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n} \frac{1}{1 + \epsilon/2n} \quad (C.33)$$

onde $x = s_0^2/s^2$.

Para escrever $1/(1 + \epsilon/2n)$ em termos de potências de ϵ utilizamos:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1, \quad (C.34)$$

de onde

$$\frac{1}{1 + \epsilon/2n} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\epsilon}{2n}\right)^j. \quad (C.35)$$

Expandindo $s_0^\epsilon/\epsilon s^2$ na equação (C.29) e multiplicando por ${}_2F_1(1, \epsilon/2; 1 + \epsilon/2; s_0^2/s^2)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{s_0^\epsilon}{\epsilon s^2} {}_2F_1(1, \epsilon/2; 1 + \epsilon/2; s_0^2/s^2) &= \frac{1}{s^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln s_0 + \ln^2 s_0 \frac{\epsilon}{2} + \ln^3 s_0 \frac{\epsilon^2}{6} + \dots \right] + \\ &+ \frac{1}{2s^2} \left[1 + \epsilon \ln s_0 + \ln^2 s_0 \frac{\epsilon^2}{2} + \ln^3 s_0 \frac{\epsilon^3}{6} + \dots \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \left(1 - \frac{\epsilon}{2n} + \frac{\epsilon^2}{4n^2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (C.36)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{s^2}\right)^{1-\frac{\epsilon}{2}} \cot\left(\frac{\epsilon\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} s^{\epsilon-2} \cot\left(\frac{\epsilon\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2s^2} [1 + \epsilon \ln s_0 + \\ &+ \ln^2 s_0 \frac{\epsilon^2}{2} + \ln^3 s_0 \frac{\epsilon^3}{6} + \dots] \times \left[\frac{2}{\pi\epsilon} - \frac{\pi\epsilon}{6} - \frac{\pi^3\epsilon^3}{2^3 \cdot 45} - \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{\epsilon s^2} - \frac{\ln s}{s^2} + \frac{1}{2s^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \ln^2 s\right) \epsilon + \frac{1}{2s^2} \left(\frac{\pi^2 \ln s}{6} - \frac{\ln^3 s}{3}\right) \epsilon^2 + \dots. \end{aligned} \quad (C.37)$$

Finalmente somando as equações (C.36) e (C.37) obtemos $J(\epsilon)$ em termos de potências de ϵ :

$$\begin{aligned} J(\epsilon) &= \frac{1}{s^2} \left[\ln s_0 + \ln^2 s_0 \frac{\epsilon}{2} + \ln^3 s_0 \frac{\epsilon^3}{6} + \dots \right] + \\ &+ \frac{1}{2s^2} \left[1 + \epsilon \ln s_0 + \ln^2 s_0 \frac{\epsilon^2}{2} + \ln^3 s_0 \frac{\epsilon^3}{6} + \dots \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \left(1 - \frac{\epsilon}{2n} + \frac{\epsilon^2}{4n^2} - \dots \right) - \\ &- \frac{\ln s}{s^2} + \frac{1}{2s^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \ln^2 s\right) \epsilon + \frac{1}{2s^2} \left(\frac{\pi^2 \ln s}{6} - \frac{\ln^3 s}{3}\right) \epsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (C.38)$$

com $x = s_0/s$ e obtemos facilmente:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{+\infty} \frac{\ln s'}{s'(s'^2 - s^2)} ds' &= \frac{d^n}{d\epsilon^n} J(\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\ln^2 s_0}{2s^2} - \frac{\ln^2 s}{2s^2} + \frac{\pi^2}{12s^2} - \\ &- \frac{\ln s_0}{2s^2} \ln \left(1 - \frac{s_0^2}{s^2} \right) - \frac{1}{4s^2} \sum x^n n^2. \end{aligned} \quad (C.39)$$

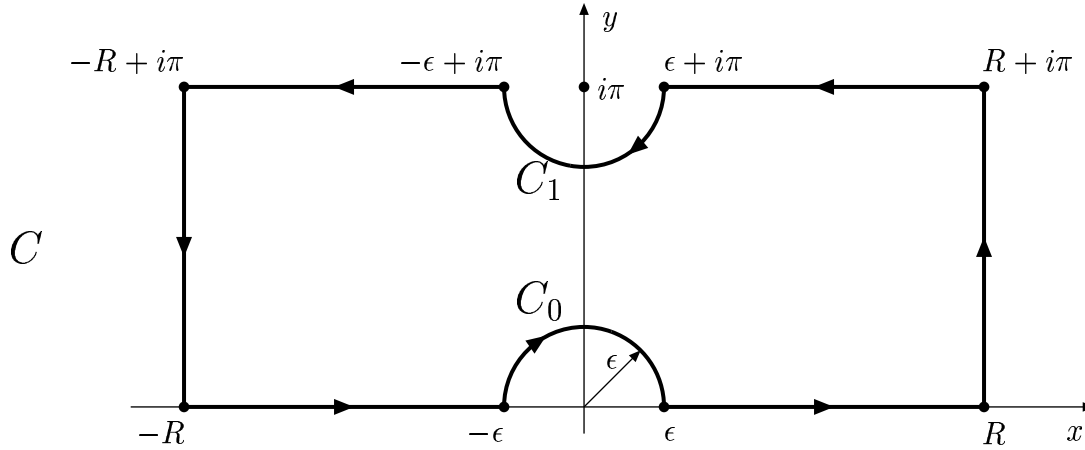


Figura C.3: Contorno utilizado no cálculo da integral (C.40)

C.3 Cálculo da integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx$

Esta integral aparece na dedução da relação de analiticidade derivativa. O cálculo detalhado não é apresentado aqui, mas mostramos o contorno utilizado no plano complexo e as principais passagens.

Queremos calcular

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx \quad (\text{C.40})$$

e para isso utilizamos a seguinte integral no plano complexo

$$\oint_C \frac{e^{\gamma z}}{\sinh z} dz, \quad (\text{C.41})$$

onde C é o contorno na figura C.3 e $z = x + iy$.

Os pólos do integrando estão nos pontos onde o denominador se anula, ou seja,

$$\sinh z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = n\pi i, \quad (\text{C.42})$$

logo não há nenhuma singularidade dentro do contorno C . Utilizando o teorema de Cauchy [39] podemos escrever

$$\oint_C \frac{e^{\gamma z}}{\sinh z} dz = 0, \quad (\text{C.43})$$

ou

$$\oint_C \frac{e^{\gamma z}}{\sinh z} dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx + \int_{C_0} \frac{e^{\gamma z}}{\sinh z} dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\pi \frac{e^{\gamma(R+iy)}}{\sinh(R+iy)} i dy + \int_R^\epsilon \frac{e^{\gamma(x+i\pi)}}{\sinh(x+i\pi)} dx + \int_{C_1} \frac{e^{\gamma z}}{\sinh z} dz + \\
& + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{\gamma(x+i\pi)}}{\sinh(x+i\pi)} dx + \int_\pi^0 \frac{e^{\gamma(-R+iy)}}{\sinh(-R+iy)} i dy = 0.
\end{aligned} \tag{C.44}$$

A quinta e a sétima integrais na equação acima podem ser escritas da seguinte forma

$$\int_R^\epsilon \frac{e^{\gamma(x+i\pi)}}{\sinh(x+i\pi)} dx = -e^{\gamma\pi i} \int_R^\epsilon \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx \tag{C.45}$$

e

$$\int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{\gamma(x+i\pi)}}{\sinh(x+i\pi)} dx = -e^{\gamma\pi i} \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx \tag{C.46}$$

respectivamente.

Sobre C_0 , $z = \epsilon e^{i\theta}$ e daí

$$\int_{C_0} \frac{e^{\gamma z}}{\sinh z} dz = \int_\pi^0 \frac{e^{\gamma \epsilon e^{i\theta}}}{\sinh(\epsilon e^{i\theta})} i \epsilon e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -i\pi. \tag{C.47}$$

De forma análoga, sobre C_1 , $z - i\pi = \epsilon e^{i\theta}$ e

$$\int_{C_1} \frac{e^{\gamma z}}{\sinh z} dz = -e^{i\gamma\pi} \int_{2\pi}^\pi \frac{e^{\gamma \epsilon e^{i\theta}}}{\sinh(\epsilon e^{i\theta})} i \epsilon e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} i e^{i\gamma\pi} \pi. \tag{C.48}$$

É fácil mostrar que as integrais sobre os segmentos de reta $(-R, -R+i\pi)$ e $(R, R+i\pi)$ vão a zero quando $R \rightarrow \infty$. Então no limite $\epsilon \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ a equação (C.44) torna-se

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx - i\pi + i e^{\gamma i\pi} \pi - e^{\gamma\pi i} P \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx = 0. \tag{C.49}$$

ou

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx = \frac{i\pi(1 - e^{\gamma\pi i})}{1 + e^{\gamma\pi i}}. \tag{C.50}$$

Mais algumas manipulações levam a

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{\sinh x} dx = \tan\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right). \tag{C.51}$$

Apêndice D

Espalhamento próton-próton: testes assintóticos

Estudamos dois conjuntos de dados de resultados distintos para a seção de choque total próton-próton (σ_{tot}^{pp}), nas energias de raios cósmicos, levando em conta também dados de aceleradores de partículas. Ajustamos a cada conjunto de dado quatro funções analíticas diferentes. Estamos interessados apenas no espalhamento pp , e consideramos que a amplitude de espalhamento pp satisfaz a relação de analiticidade derivativa (DAR) par (equação (4.96)). Então utilizamos o primeiro termo da RAD para obter parametrizações para o parâmetro ρ em função da energia, para os dois conjuntos de dados e todas as parametrizações [68].

D.1 Informação experimental

No caso de dados de aceleradores, consideramos dados sobre σ_{tot}^{pp} de três experimentos no CERN, Intersection Storage Ring (ISR), entre 23.5 GeV e 62.3 GeV, que foram compilados e criticamente analisados por Amaldi e Schubert [68] e utilizamos aqui os valores médios de sua análise. Também incluímos os resultados para $\sqrt{s}$ igual 13.8 GeV e 19.4 GeV, obtidos no Fermilab [68].

No caso dos dados de raios cósmicos, as motivações para distinguirmos entre os conjuntos A e B são discutidas no capítulo 2. Os dois conjuntos são divididos como segue:

- Conjunto A: Dados de acelerador pp + Akeno + Fly's Eye
- Conjunto B: Dados de acelerador pp + Nikolaev + GSY.

As informações experimentais são mostradas na figura D.1

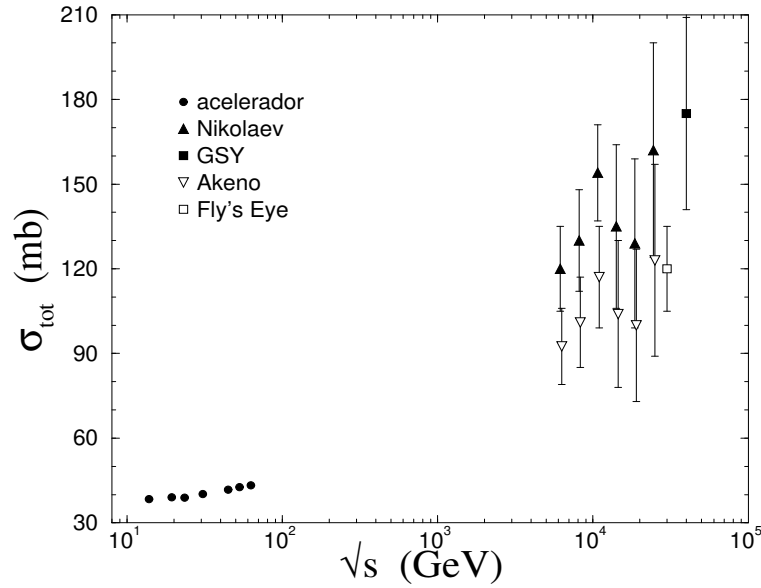


Figura D.1: Informação experimental sobre σ_{tot}^{pp} : dados de aceleradores $13.8 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV e raios cósmicos no intervalo $6.3 \leq \sqrt{s} \leq 40$ TeV.

D.2 Relação de analiticidade derivativa e o parâmetro ρ

Utilizamos o primeiro termo da relação de analiticidade derivativa (5.10a)

$$\rho(s) = \frac{K}{s\sigma_{tot}(s)} + \frac{1}{\sigma_{tot}(s)} \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \sigma_{tot}(s) \quad (D.1)$$

para calcular o parâmetro ρ . Esta relação é conhecida como forma convencional da RAD.

D.2.1 Ajustes e resultados

Aqui apresentamos os ajustes para a seção de choque total para os dois conjuntos de dados e obtemos as previsões para ρ utilizando a RAD convencional (D.1).

D.2.2 Ajustes para a seção de choque total

Para cada conjunto de dados definido na seção D.1, ajustamos os dados com as seguintes parametrizações para a seção de choque:

$$\text{Ajuste 1 :} \quad \sigma_{tot} = A + B \ln s + C(\ln s)^2 \quad (D.2)$$

$$\text{Ajuste 2 :} \quad \sigma_{tot} = A + B \ln s + C(\ln s)^D \quad (D.3)$$

$$\text{Ajuste 3 :} \quad \sigma_{tot} = A + B \ln s + C(\ln s)^2 + Rs^{-1/2} \quad (\text{D.4})$$

$$\text{Ajuste 4 :} \quad \sigma_{tot} = A + B \ln s + C(\ln s)^D + Rs^{-1/2} \quad (\text{D.5})$$

onde A , B , C , D e R são parâmetros livres.

Tabela D.1: Valores dos parâmetros nas equações (D.2)-(D.5) e o χ^2 por grau de liberdade para cada ajuste para o conjunto A.

Ajuste:	1	2	3	4
A	45.78	42.64	38.74	33.67
B	-3.315	-1.875	-1.868	-0.3201
C	0.3654	0.1220	0.2894	0.09465
D	2 (fixado)	2.312	2 (fixado)	2.288
R	-	-	21.52	31.40
χ^2	11.7	15.4	9.8	9.9
gdl	11	10	10	9
χ^2/gdl	1.06	1.54	0.98	1.10

Tabela D.2: Valores dos parâmetros nas equações (D.2)-(D.5) e o χ^2 por grau de liberdade para cada ajuste para o conjunto B.

Ajuste:	1	2	3	4
A	49.27	43.54	62.48	38.34
B	-4.435	-1.846	-7.221	-0.8162
C	0.4534	0.05958	0.6050	0.03461
D	2 (fixado)	2.624	2 (fixado)	2.755
R	-	-	-38.40	14.80
χ^2	15.0	10.7	10.4	11.4
gdl	11	10	10	9
χ^2/gdl	1.36	1.07	1.04	1.27

A escolha destas parametrizações foi baseada nas seguintes considerações: Primeiro, como na figura D.1 temos um gráfico log-linear, vemos que a altas energias os dados sugerem um crescimento da seção de choque σ_{tot}^{pp} como um polinômio em $\ln s$. O teorema de Froissart-Martin estabelece que o crescimento mais rápido permitido para σ_{tot}^{pp} é $(\ln s)^2$. Entretanto foi mostrado pela colaboração UA4/2 que ajustes para pp e $\bar{p}p$ indicam a potência $2.25^{+0.35}_{-0.31}$, este resultado é chamado de “saturação qualitativa do limite de Froissart”. Por esta razão, consideramos duas possibilidades para a potência: o valor 2, de acordo com o limite assintótico, e um parâmetro a ser determinado por ajuste. Finalmente, a potência em s , equações (D.4) e (D.5), representa a forma usual para levar

em conta dados com valores da energia pequenos ($5 \sim 20$ GeV) e pode ser associada a fenomenologia de Regge.

Os ajustes são mostrados nas figuras D.2 e D.3 para os conjuntos A e B, respectivamente. Os valores correspondentes para os parâmetros livres e o χ^2 por grau de liberdade são mostrados nas tabelas D.1 e D.2 para os conjuntos A e B, respectivamente.

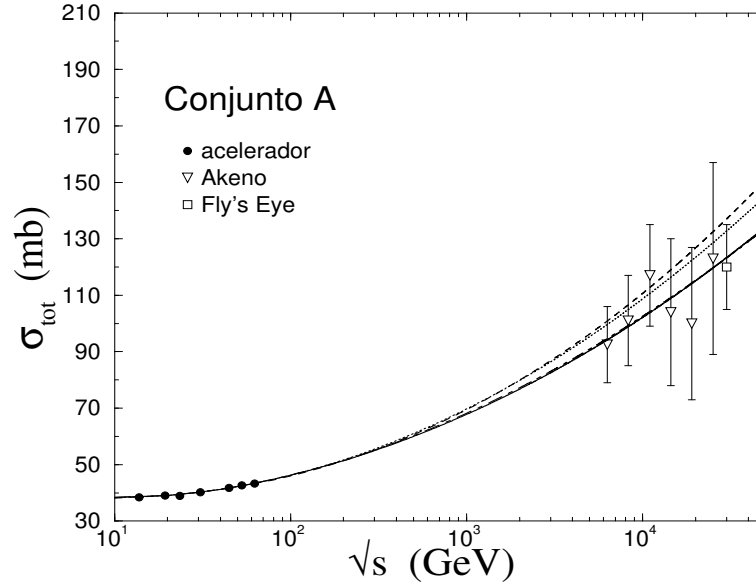


Figura D.2: Ajustes para a seção de choque total pp para os dados do conjunto A através das equações (D.2)-(D.5) - Ajuste 1 (sólida), 2 (pontilhada), 3 (pontilhada-tracejada) e 4 (tracejada).

D.2.3 Previsões para o parâmetro ρ

Nesta seção determinamos $\rho(s)$ usando a RAD convencional (D.1) para todas as parametrizações do item anterior. A RAD tem um parâmetro livre K , a constante de subtração.

Primeiro calculamos ρ para a parametrização (D.5) para os conjuntos A e B sem usar a constante de subtração, ou seja $K = 0$ na equação (D.1). O resultado é mostrado na figura D.4. Vemos que, embora as previsões sejam muito próximas na região do ISR, ambas discordam dos dados experimentais.

Com as parametrizações (D.2)-(D.5) para σ_{tot}^{pp} obtemos as expressões analíticas para $\rho(s)$ usando a DAR convencional (D.1). Para cada parametrização a constante de subtração é um parâmetro livre determinado por ajuste.

Os resultados para todas as parametrizações e os dois conjuntos de dados são mostrados nas figuras D.5 e D.6 e na tabela D.3.

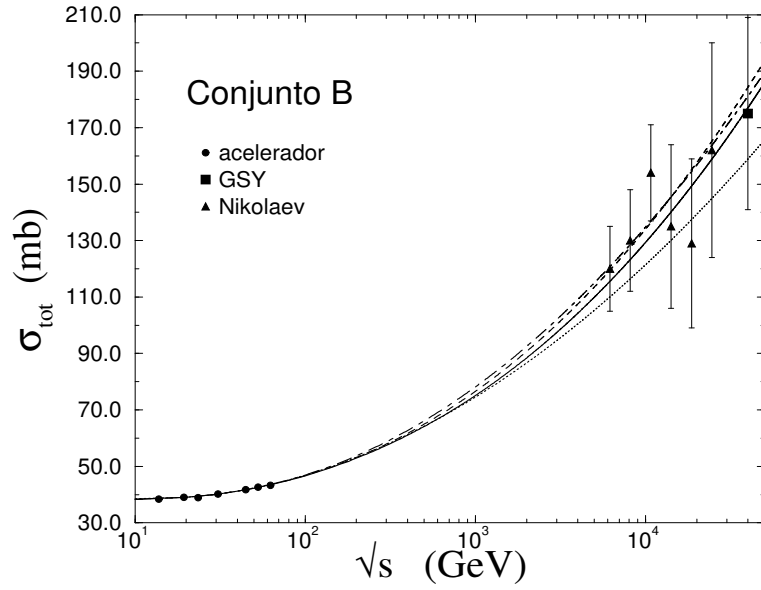


Figura D.3: Ajustes para seção de choque total pp para os dados do conjunto B. Mesma legenda da figura D.2.

D.3 Conclusões

Investigamos dois conjuntos de dados experimentais para a seção de choque total e quatro parametrizações diferentes para ajustar os dados, como função da energia. Em cada caso foram obtidas previsões para $\rho(s)$ usando a RAD convencional.

A primeira conclusão é que as informações experimentais indicam a possibilidade de dois cenários diferentes para as interações hadrônicas a altas energias.

Mostramos a aplicabilidade prática da RAD convencional a energias suficientemente altas. Tomando a constante de subtração como parâmetro livre a descrição dos dados experimentais é boa.

Tabela D.3: Valores da constante de subtração dos ajuste para os dados de $\rho(s)$ e χ^2 por 6 graus de liberdade. Cálculo feito através da equação (D.1) usando os quatro ajustes para os conjuntos A e B.

Conjunto A:	1	2	3	4
K	-1684	-1704	-1637	-1629
χ^2/gdl	0.82	0.63	0.97	0.63
Conjunto B:	1	2	3	4
K	-1634	-1689	-1723	-1659
χ^2/gdl	2.0	1.48	1.85	1.44

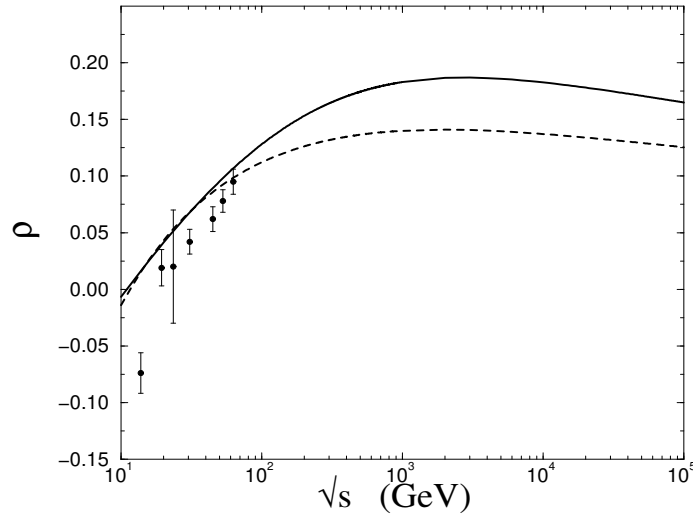


Figura D.4: Resultados para o parâmetro $\rho(s)$ pp , usando o ajuste 4 para os dados do conjunto A (tracejada) e B (sólida) usando RAD e $K = 0$ na equação (D.1) e dados experimentais

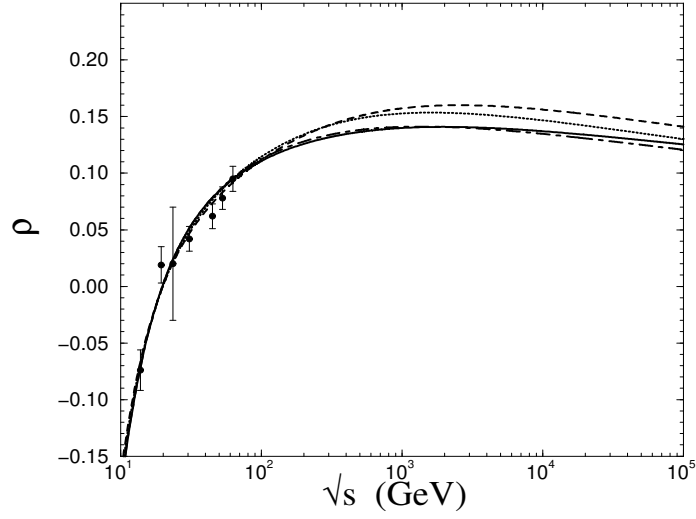


Figura D.5: Resultados para $\rho(s)$, para a RAD convencional, (D.1), ajustes para σ_{tot} do conjunto A junto com os dados experimentais. Mesma legenda da figura D.2.

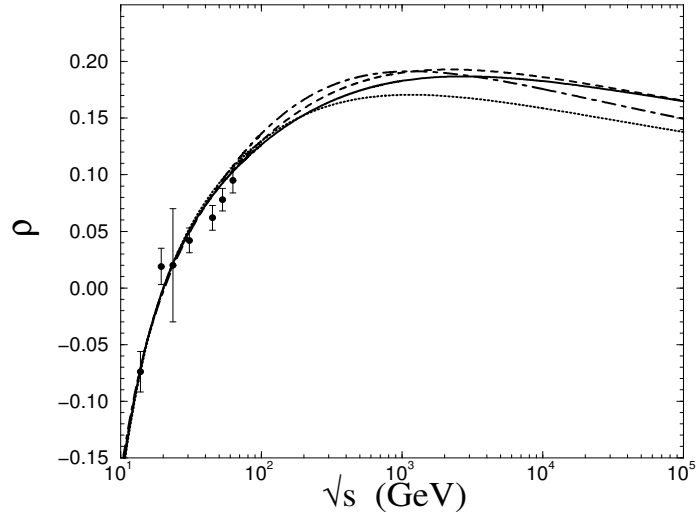


Figura D.6: Resultados para $\rho(s)$, para a RAD convencional, (D.1), ajustes para σ_{tot} do conjunto B, junto com os dados experimentais. Mesma legenda da figura D.2.

Apêndice E

Espalhamento próton-próton: expansão da série tangente

Neste apêndice é apresentado um primeiro estudo sobre o uso da série de tangentes. Utilizando a parametrização de Donnachie-Landshoff para a seção de choque total pp determinamos o parâmetro $\rho(s)$ através das relações de analiticidade derivativa e da relação de dispersão integral e comparamos os resultados.

E.1 Relação de dispersão na forma integral e na forma derivativa

Queremos estudar o efeito de somar cada termo da série de tangentes e comparar com a integral no limite de altas energias $s_0 \rightarrow 0$. Para isto, é suficiente considerar somente a relação par, integral (4.83) e derivativa (4.96), negligenciando a constante de subtração. Consideraremos o limite de altas energias, $s_0 = 2m^2 \rightarrow 0$ no caso integral. Neste caso a forma integral e a diferencial são

$$\operatorname{Re} F(s, t=0) = \frac{2s^2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(s', t=0)}{s'(s'^2 - s^2)} ds' \quad (\text{E.1})$$

e

$$\operatorname{Re} F(s, t=0) = s \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right) \frac{\operatorname{Im} F(s, t=0)}{s}, \quad (\text{E.2})$$

respectivamente.

Utilizando a definição do parâmetro ρ , $\rho(s) = \frac{\operatorname{Re} F(s, t=0)}{\operatorname{Im} F(s, t=0)}$ e o teorema óptico $\sigma_{tot}(s) = \frac{\operatorname{Im} F(s, t=0)}{s}$

$$\rho_{int}(s) = \frac{2s}{\pi \sigma_{tot}(s)} P \int_0^{+\infty} \frac{\sigma_{tot}(s')}{s'^2 - s^2} ds', \quad (\text{E.3})$$

$$\rho_{der}(s) = \frac{1}{\sigma_{tot}(s)} \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right) \sigma_{tot}(s). \quad (\text{E.4})$$

Consideramos a parametrização de Donnachie-Landshoff para a seção de choque total pp e investigamos os resultados para o parâmetro ρ . A parametrização de Donnachie-Landshoff é dada por [57]

$$\sigma_{tot}(s) = X s^\epsilon + Y s^{-\eta}. \quad (\text{E.5})$$

Para o espalhamento pp os valores dos parâmetros são: $\epsilon = 0.0808$, $\eta = 0.4525$, $X = 21.70$ mb. $Y = 56.08$ mb.

No caso da integral, temos

$$I = P \int_0^{+\infty} \frac{s'^\gamma}{s'^2 - s^2} ds' = \frac{\pi}{2} s^{\gamma-1} \tan\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right), \quad (\text{E.6})$$

para γ real e $-1 < \gamma < 1$. Com isto, o resultado para a parametrização (DL) é:

$$\rho_{int}(s) = \frac{1}{X s^\epsilon + Y s^{-\eta}} \left[X \tan\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) s^\epsilon - Y \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) s^{-\eta} \right]. \quad (\text{E.7})$$

A forma derivativa apresenta o operador tangente e na literatura somente o primeiro termo da expansão é utilizado. Aqui consideraremos até o terceiro termo. Neste caso, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{der}(s) \sim & \frac{1}{X s^\epsilon + Y s^{-\eta}} \left\{ \frac{\pi}{2} [X \epsilon s^\epsilon - Y \eta s^{-\eta}] + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 [X \epsilon^3 s^\epsilon - Y \eta^3 s^{-\eta}] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 [X \epsilon^5 s^\epsilon - Y \eta^5 s^{-\eta}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

E.2 Resultados

Comparamos os resultados para $\rho_{int}(s)$ e $\rho_{der}(s)$ equações (E.7) e (E.8), respectivamente. A figura E.1 mostra estes resultados e também o efeito de adicionar cada um dos três termos no caso derivativo. A aproximação de terceira ordem reproduz muito bem o resultado integral, mesmo na região de baixas energias. Na região assintótica temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_{int}(s) = 0.1276063, \quad (\text{E.9})$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_{der}(s) = 0.1276062. \quad (\text{E.10})$$

Algumas limitações em nossa abordagem devem ser destacadas. A aproximação de altas energias foi usada na forma integral, e como vimos na seção 5.4 para a parametrização DL a forma integral corresponde à forma derivativa quando somamos todos os termos da série. Estudamos apenas o espalhamento pp e para estudar simultaneamente o espalhamento pp e $\bar{p}p$ devemos levar em conta a propriedade de cruzamento e amplitudes

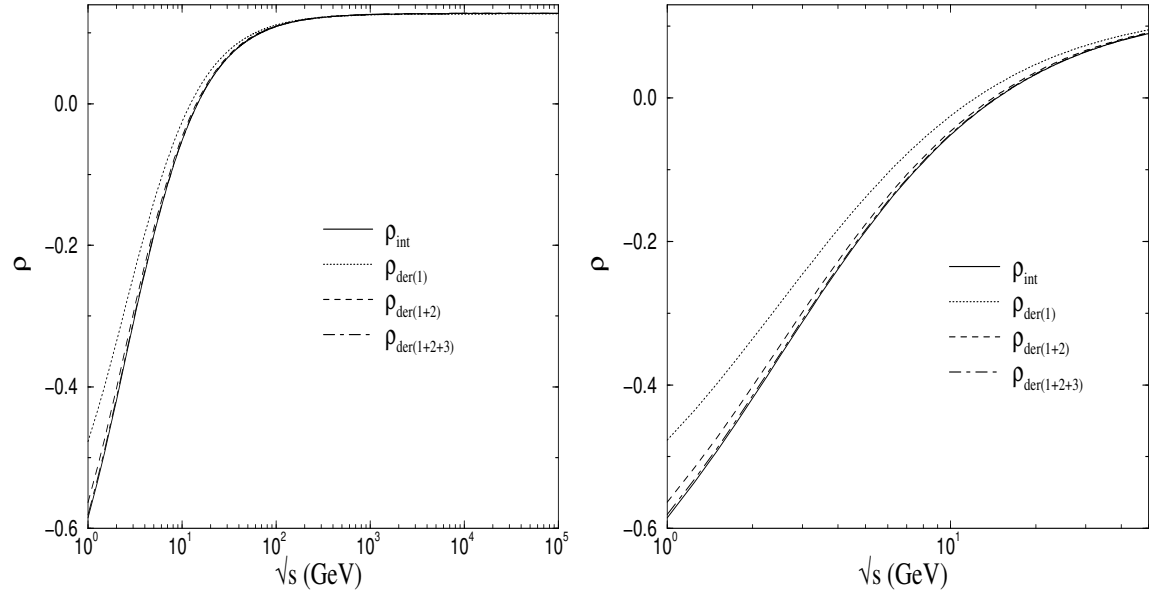


Figura E.1: Resultados para $\rho(s)$ com a forma integral, equação (E.7), e a forma derivativa, equação (E.8), mostrando as contribuições dos três primeiros termos.

pares e ímpares. Além disto, ajustes para dados experimentais (seção de choque total e ρ) envolvem a determinação da constante de subtração. Estes tópicos foram estudados e são apresentados no capítulo 5.

Bibliografia

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley, New York, 1987).
- [2] F. Halzen e A. D. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (John Wiley & Sons, New York 1984); J. Montanha Neto, *Physicae*, (IFGW, UNICAMP, 2003).
- [3] M.J. Menon, “Introduction to Soft Diffraction: Some Results and Open Problems”, curso ministrado na LISHEP 2002 - Session B - Advanced School on High Energy Physics, UERJ, Rio de Janeiro, 28 Janeiro - 1 Fevereiro, 2002, www.lishep.uerj.br (manuscrito a ser disponibilizado em hep/ph).
- [4] K. Hagiwara et al., *The Review of Particles Physics*, Physical Review D**66**, 010001-1 (2002). Disponível em <<http://pdg.lbl.gov/>>. Acesso em 27 dez. 2002.
- [5] G. Matthiae, Rep. Prog. Phys. **57**, 573 (1994).
- [6] P. Söding, Phys. Lett. **8**, 285 (1964).
- [7] J. B. Bronzan, G. L. Kane e U. P. Sukhatme, Phys. Lett. **B49**, 272 (1974).
- [8] C. Tanoudji e B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, (Hermann, Paris, 1977).
- [9] H. Frauenfelder e E. M. Henley, *Subatomic Physics*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991).
- [10] M. M. Block e R. N. Cahn, Rev. Mod. Phys., **57**, 563 (1985).
- [11] S. Mandelstam, Phys. Rev. **112**, 1344 (1958).
- [12] R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics* (Benjamin, New York, 1963).
- [13] J. R. Cudell, K. Kang e S. K. Kim, Phys. Lett. **B395**, 311 (1997); J. R. Cudell, V. V. Ezhela, K. Kang, S. B. Lugovsky e N. P. Tkachenko, in *Proceedings of VIIIth Blois*

- Workshop - International Conference on Elastic and Diffractive Scattering, Protvino, 1999*, editado por V. A. Petrov e A. V. Prukudin (World Scientific, Singapura, 2000) p.251; Phys. Rev. D **61**, 034019 (2000); **63**, 059901 (2001) (erratum).
- [14] R. F. Ávila, E. G. S. Luna e M.J. Menon, *Analyticity relations at high energies and forward scattering*, LISHEP 2002, Session C, Workshop on Diffractive Physics, Rio de Janeiro (2002), hep-ph/0206028.
- [15] R. F. Ávila, E. G. S. Luna e M. J. Menon, *Analytic models and forward scattering from accelerator to cosmic-ray energies*, Phys. Rev. D **67**, 054020 (2003); hep-ph/0212234.
- [16] R. M. Baltrusaitis et al., Phys. Rev. Lett. **52**, 1380 (1984).
- [17] H. Honda et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 525 (1993).
- [18] T. K. Gaisser, U. P. Sukhatme e G. B. Yodh, Phys. Rev. D **36**, 1350 (1987).
- [19] N. N. Nikolaev, Phys. Rev. D **48**, R1904 (1993).
- [20] R. Engel, T. K. Gaisser, P. Lipari, e T. Stanev, Phys. Rev. D **58**, 014019 (1998).
- [21] M. L. Perl, *High Energy Hadron Physics* (John Wiley, New York, 1974).
- [22] R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive e J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, (Cambridge Uni., Cambridge, 1966).
- [23] F. W. Byron e R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, (Dover, New York, 1992).
- [24] H. M. Nussenzveig, *Causality and Dispersion Relations*, (Academic Press, New York, 1972).
- [25] R. Kronig, J. Opt. Soc. Am. **12**, 547 (1926).
- [26] A. D. Martin e T. D. Spearman, *Elementary Particle Theory*, (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [27] R. J. Eden, Rev. Mod. Phys. **43**, 15 (1971).
- [28] B. E. Y. Svensson, Proceedings of 1967 CERN School of Physics Volume II - High Energy Phenomenology and Regge Poles, Rättvik, May 21 - June 3, (1967).

-
- [29] H. Epstein, V. Glaser e A. Martin, Commun. Math. Phys. **13**, 257 (1969).
- [30] M. Froissart, Phys. Rev. **123**, 1053 (1961).
- [31] A. Martin, Phys. Rev. **129**, 1432 (1963); Nuovo Cim. **42**, 930 (1966).
- [32] I. Ya. Pomeranchuk, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 25 (1958) [Sov. Phys. JETP **7** 499 (1958)].
- [33] G. Grunberg e T. N. Truong, Phys. Rev. Lett. **31**, 63 (1973).
- [34] R. F. Ávila, M. J. Menon, *Connections between integral and derivative dispersion relations at high energies*, Relatório da 14a. Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas, CBPF, Rio de Janeiro (IFUSP, 2002) p. 90-95.
- [35] H. Burkhardt, *Dispersion Relation Dynamics*, (North-Holland, Amsterdam, 1969).
- [36] P. Kolář e J. Fischer, J. Math. Phys. **25**, 2538 (1984).
- [37] J. Fischer e P. Kolář, Czech. J. Phys. B **37**, 297 (1987).
- [38] P. Kolář e J. Fischer, hep-th/0110233 (2001).
- [39] R. V. Churchill, *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, (McGraw-Hill, São Paulo, 1975).
- [40] R. J. Eden *High Energy Collisions of Elementary Particles*, (Cambridge Uni., Cambridge, 1967).
- [41] J. D. Jackson, in “1973 Scottish Summer School”, LBL-2079, 39 (1973).
- [42] A. Martin, F. Cheung, *Analytic Properties and Bounds of Scattering Amplitudes* (Gordon and Breach, New York, 1970).
- [43] M. J. Menon, R. P. B. Santos, Revista Brasileira de Ensino de Física **20**, 38 (1998).
- [44] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Variáveis Complexas*, (Universidade Estadual de Campinas, 1999).
- [45] M. J. Menon, A. E. Motter, B. M. Pimentel, in: O. J. P. Éboli et al. (Eds.), 1997 XVIII Brazilian National Meeting on Particles and Fields, Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1998, p. 548.

-
- [46] A. Bujak e O. Dumbrajs, J. Phys.: G **2** L129 (1976)
- [47] N. V. Gribov e A. A. Migdal, Yad. Fiz. **8** (1968) 1002 [Sov. J. Nucl. Phys. **8**, 583 (1969)].
- [48] N. V. Gribov e A. A. Migdal, Yad. Fiz. **8** (1968) 1213 [Sov. J. Nucl. Phys. **8**, 703 (1969)].
- [49] J. B. Bronzan, in “Argonne Symposium on the Pomeron”, ANL/HEP-7327, 33 (1973).
- [50] G. K. Eichmann e J. Dronkers, Phys. Lett. B **52**, 428 (1974).
- [51] J. Heidrich e E. Kazes, Lettere al Nuovo Cimento **12**, 365 (1975).
- [52] J. Fischer e P. Kolář, Phys. Lett. B **64**, 45 (1976).
- [53] J. Fischer e P. Kolář, Phys. Rev. D **17**, 2168 (1978).
- [54] M.J. Menon, A.E. Motter, B.M. Pimentel, Phys. Lett. B **451**, 207 (1999).
- [55] I. Vrkoč, Cze. Math. J. **35**, 59 (1985).
- [56] F. James *MINUIT - Function Minimization and Error Analysis*, (CERN, 2002).
- [57] A. Donnachie e P. V. Landshoff, Z. Phys. C **2**, 55 (1979); Phys. Lett. B **387**, 637 (1996).
- [58] K. Kang e B. Nicolescu, Phys. Rev. D **11**, 2461 (1975).
- [59] Y. S. Jin e A. Martin, Phys. Rev. **135B**, 1375 (1964).
- [60] R. F. Ávila e M. J. Menon, *Analyticity relations at high energies and the Donnachie-Landshoff parametrization*, Relatório da 13a. Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas, USP, São Paulo (IFUSP, 2001) p. 35-40.
- [61] R. F. Ávila e M. J. Menon, *Derivative analyticity relations: Subtractions and the tangent series expansion*, Proceedings XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, São Lourenço (2001),
www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxii/procs/trab0113.pdf.

-
- [62] R. F. Ávila, E. G. S. Luna e M. J. Menon, *in* Hadron Physics 2002 - Topics on the Structure and Interactions of Hadronic Systems, April 14-19, Bento Gonçalves, Brasil (a ser publicado).
- [63] R. F. Ávila e M. J. Menon, *On the lower limit in integral dispersion relations at high energies*, in Proceedings XXIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Águas de Lindóia (2002), www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxiii/procs/RES28.pdf.
- [64] R.F. Ávila e M.J. Menon, *Integral and derivative dispersion relations at high energies* (em fase de redação) (2003).
- [65] O. V. Selyugin, hep-ph/0212308 (2002).
- [66] A. F. Martini, M. J. Menon, J. T. S. Paes e M. J. S. Neto, Phys. Rev. D **59**, 116006 (1999).
- [67] P. Kolář e J. Fischer, “Proc. Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering”, edited by V. Kundrat and P. Zavada (IOP, Prague, 2002) p.305-212; hep-th 0110233.
- [68] R. F. Ávila, E. G. S. Luna e M. J. Menon, *High-energy proton-proton forward scattering and derivative analyticity relations*, Braz. J. Phys. **31**, 567 (2001).
- [69] H. M. Fried, *Basics of Functional Methods and Eiconal Models* (Editions Frontières, 1990); Found Phys. **30**, 529 (2000).
- [70] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, (Academic Press Inc., San Diego, 1980).
- [71] E. L. Lima, *Curso de Análise* vol.1, (Impa, Rio de Janeiro, 1999).
- [72] M. Bertini, M. Giffon, L. Jenkovsky e G. F. Paccanoni, Il Nuovo Cimento **109** 257 (1996).
- [73] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function*, (Dover, New York, 1964).
- [74] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions* (Oxford, Londres, 1939).
- [75] L. Lukaszuk e B. Nicolescu, Nuovo Cimento Lett. **8**, 405 (1973).
- [76] L. Lukaszuk e A. Martin, Nuovo Cimento A **52**, 122 (1967).