



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

Equações de onda associadas ao espaço-tempo de Robertson-Walker

Denilson Gomes

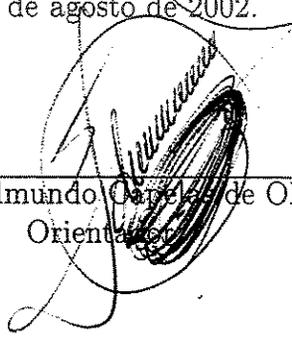
Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Equações de onda associadas ao espaço-tempo de Robertson-Walker

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Denilson Gomes e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 de agosto de 2002.

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Orientador



Banca Examinadora

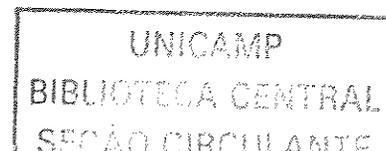
Prof. Dr. Bruto M. Pimentel Escobar
IFT-UNESP

Prof. Dr. Eduardo Notte Cuello
Universidade de Antofagasta-Chile

Prof. Dr. Márcio José Menon
IFGW-UNICAMP

Prof. Dr. Waldir A. Rodrigues Júnior
Imecc-UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.



82-921/12001

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Gomes, Denilson.

G585e Equações de onda associadas ao espaço-tempo de Robertson-Walker/Denilson Gomes -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

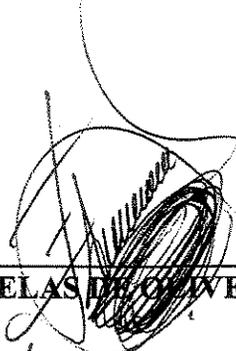
Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira .

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equação de onda. 2. Dirac, Equações de. 3. Klein-Gordon, Equação de. 4. Grupos de rotação. . I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 07 de agosto de 2002

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA



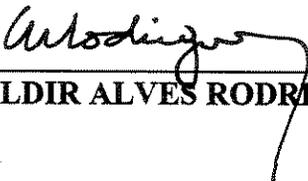
Prof (a). Dr (a). BRUTO MÁX PIMENTEL ESCOBAR



Prof (a). Dr (a). EDUARDO ALFONSO NOTTE CUELLO



Prof (a). Dr (a). MÁRCIO JOSÉ MENON



Prof (a). Dr (a). WALDIR ALVES RODRIGUES JÚNIOR

*Dedico este trabalho à
minha esposa Claudia e aos
meus pais.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira a competência e dedicação na orientação deste trabalho e o grande incentivo.

Agradeço à CAPES a concessão da bolsa PICDT durante o meu afastamento da UFSM.

Agradeço ao Departamento de Matemática Aplicada do IMECC-Unicamp o amparo e suporte e ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) a concessão do meu afastamento.

Agradeço à Valéria ter apontado os meus descuidos no Abstract deste trabalho.

Agradeço aos grupos responsáveis pelos projetos \LaTeX e \MiKTeX terem disponibilizado gratuitamente os softwares que garantiram a qualidade gráfica deste texto.

Finalmente, agradeço à minha família e a todos os meus amigos o apoio e incentivo.

Resumo

Neste trabalho são apresentadas e discutidas as chamadas equações de Klein-Gordon e Dirac generalizadas, associadas ao grupo de Fantappiè-de Sitter — isometrias do espaço-tempo de Robertson-Walker.

A equação de Klein-Gordon generalizada é obtida a partir do operador de Casimir de segunda ordem associada ao grupo de Fantappiè-de Sitter. Por sua vez, a equação de Dirac generalizada é obtida fatorando o operador de Casimir de segunda ordem num produto de dois operadores de primeira ordem. A solução destas duas equações é obtida por separação de variáveis.

Também é discutida a imersão do espaço-tempo de Robertson-Walker, desprovido de matéria e radiação, num espaço pseudo-euclidiano, tanto no caso de curvatura positiva como no caso de curvatura negativa. Apresentam-se ainda, os geradores da álgebra de Lie do grupo de Fantappiè-de Sitter e seus respectivos operadores diferenciais.

Abstract

We consider and discuss the so-called Klein-Gordon and Dirac generalized wave equations, related to Fantappié-de Sitter group — Robertson-Walker space-time isometries.

The generalized Klein-Gordon wave equation is obtained by means of the second order Casimir invariant operator related to the Fantappié-de Sitter group. The generalized Dirac wave equation is obtained by writing the second order Casimir invariant operator as the product of two first order operators. The solution of these equations is obtained by variable separation.

We also discuss the Robertson-Walker space-time, without matter and radiation, embedded in a pseudo-euclidian space in both cases: positive and negative curvatures. We present the Lie algebra generator related to the Fantappié-de Sitter group and its differential operators.

Sumário

Introdução	1
1 Geometria e cosmologia	5
Introdução	5
1.1 Derivada covariante	5
1.2 Variedades riemannianas	11
1.3 A métrica de Robertson-Walker	14
2 Coordenadas	21
Introdução	21
2.1 Coordenadas estereográficas	21
2.2 Coordenadas projetivas	22
3 O grupo de Fantappié-de Sitter	25
Introdução	25
3.1 O grupo $O(r, s)$	26
3.2 O grupo de Fantappié-de Sitter	29
3.3 Operadores de Casimir \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_4	32
3.4 Operadores diferenciais	33
3.5 O caso limite $k \rightarrow 0$	36
4 A equação de Klein-Gordon generalizada	39
Introdução	39
4.1 A equação de Klein-Gordon generalizada	40
4.2 A equação radial	44
4.2.1 Caso $k > 0$	45
4.2.2 Caso $k < 0$	46
4.3 A equação temporal	48
4.3.1 Caso $k > 0$	48
4.3.2 Caso $k < 0$	51
4.4 Solução geral	53
4.5 Invariância conforme	53

5	Espinores e as matrizes da álgebra de Clifford	55
	Introdução	55
5.1	A álgebra de Clifford e as matrizes Γ	55
5.2	Representação espinorial de $SO(3)$	57
	5.2.1 Representação geométrica dos espinores	60
	5.2.2 Espinores na esfera	62
5.3	Harmônicos esféricos com peso de espin	64
6	A equação de Dirac generalizada	69
	Introdução	69
6.1	A fatoração de \mathcal{E}_2	69
6.2	A equação de Dirac generalizada em coordenadas estereográficas . . .	74
	6.2.1 A equação de Dirac generalizada em componentes	77
	6.2.2 Separação das partes temporal e espacial	83
6.3	Solução da equação na variável espacial	86
	6.3.1 O caso $k > 0$	86
	6.3.2 O caso $k < 0$	87
6.4	Solução da equação na variável temporal	88
	6.4.1 O caso $k > 0$	88
	6.4.2 O caso $k < 0$	89
	Conclusões	91
	A Cosmologia de Robertson-Walker	93
	B Funções especiais	97
	B.1 Função hipergeométrica	97
	B.2 Polinômios de Jacobi	98
	B.3 Polinômios de Gegenbauer	98
	B.4 Funções de Legendre	98
	Referências Bibliográficas	99

Lista de Figuras

1.1	Seqüência de transformações do espaço-tempo de de Sitter $k = 1$ para o espaço-tempo anti-de Sitter $k = -1$	18
2.1	Coordenadas estereográficas.	22
2.2	Coordenadas estereográficas $k > 0$ e $k < 0$	23
2.3	Coordenadas projetivas.	23
2.4	Coordenadas projetivas $k > 0$ e $k < 0$	24
5.1	A representação de vetores por um espinor.	62
5.2	Ângulos de Euler.	63
6.1	Coordenadas temporal e radial para a equação de Dirac generalizada.	78

Introdução

A construção de uma teoria quântica da gravidade está longe de ser totalmente concluída, apesar dos vários esforços e dos recentes progressos nesse sentido. Por outro lado, um tratamento semi-clássico, no qual o campo gravitacional é mantido classicamente enquanto os demais campos são quantizados de maneira usual, tem se mostrado viável. Assim sendo, adotando o campo gravitacional dado pela teoria da relatividade geral de Einstein, tem-se o que se convencionou chamar de teoria quântica de campos em espaços curvos. A teoria da relatividade geral é uma teoria geométrica da gravidade, nela o universo físico é descrito por uma variedade (pseudo) riemanniana 4-dimensional chamada de espaço-tempo; esta mesma denominação será empregada para todos os modelos cosmológicos referidos no texto.

Dentre os espaços-tempos, os únicos que possuem simetria máxima são os espaços-tempos de de Sitter, anti-de Sitter e o de Minkowski. Isto se reflete na existência de grupos de isometrias bem definidos, o que faz destes espaços-tempos os mais estudados pela teoria quântica de campos [6]. Por sua vez estes três espaços-tempos são casos particulares do chamado espaço-tempo de Robertson-Walker [9].

Alternativamente, conforme proposta original de Fantappiè e posteriormente aperfeiçoado por Arcidiacono, o tratamento semi-clássico da teoria de campos pode ser implementado via teoria de grupos. Nesta teoria a cada grupo corresponde um modelo de universo cujas leis físicas estão sujeitas a atuação do grupo. Em particular, considerando o grupo de rotações n -dimensional temos os universos hiperesféricos, os quais podem ser interpretados como sucessivos aperfeiçoamentos da Física. Temos ainda, para $n = 5$, o chamado grupo de Fantappiè-de Sitter que corresponde ao grupo das isometrias dos espaços-tempos de de Sitter e anti-de Sitter [2, 1].

A teoria quântica de campos em espaços curvos, nas suas versões geométrica e da teoria de grupos, conduz às chamadas equações de onda que são a generalização da equação de Klein-Gordon, para o campo escalar, e da equação de Dirac, para o campo com spin.

Vários trabalhos têm tratado das equações de onda no espaço-tempo de Robertson-Walker, ou mais particularmente nos espaços-tempos de de Sitter e anti-de Sitter.

Bros et al [8] apresentaram o estudo do campo escalar quantizado no espaço-tempo de de Sitter baseado na analiticidade de variedades riemannianas complexificadas.

Mais recentemente Gazeau et al. [16] discutiram, via teoria de grupos, o campo sem massa com acoplamento mínimo no espaço-tempo de de Sitter. Numa outra abordagem, Wyrozumski [45] e Redmount e Takagi [40] discutiram a equação para o campo escalar no espaço-tempo de de Sitter 4-dimensional via redução dimensional de um espaço-tempo de Minkowski 5-dimensional, obtendo o mesmo resultado de Tagirov e Chernikov [10, 42].

A equação de onda para espin $1/2$ foi discutida por Takook [43] na mesma linha de [8]. Montaldi e Zecca [34] discutiram a equação de Dirac no espaço-tempo de Robertson-Walker com o termo de massa nulo. Posteriormente, Zecca [46] considerou a mesma equação, porém agora, com o termo de massa não nulo. Nestes dois trabalhos foi empregado o formalismo dos coeficientes de espin, introduzido por Newman e Penrose [35], resultando na separação das chamadas partes radial e temporal da equação de Dirac.

Seguindo a teoria dos universos hiperesféricos, Notte Cuello e Capelas de Oliveira discutiram a equação de Klein-Gordon e a equação de Dirac a partir do operador de Casimir associado ao grupo de isometrias do espaço-tempo de de Sitter [37, 36]. A equação de Dirac mostrou-se não ser completamente separável no sistema de coordenadas adotado, particularmente foi estudado o caso estacionário e a solução da equação foi dada em termos dos polinômios introduzidos por Gomes e Capelas de Oliveira [19, 18].

Outros trabalhos têm tratado da aplicação da teoria de grupos à Física e estão diretamente associados às equações de onda no espaço-tempo de Robertson-Walker [5, 27, 30].

No presente trabalho são consideradas as equações de onda associadas ao espaço-tempo de Robertson-Walker. Mais especificamente é considerada a equação do campo escalar denominada equação de Klein-Gordon generalizada e a equação para o campo com espin $1/2$, denominada equação de Dirac generalizada. Estas equações constituem o objeto central da tese e foram parcialmente consideradas em outros trabalhos anteriores [25, 24, 20, 21].

O tratamento dado às equações de onda neste trabalho está baseado na versão da teoria de grupos. Isto é, tanto no caso do campo escalar quanto do campo com espin $1/2$, as equações são obtidas a partir do operador de Casimir de segunda ordem associado ao chamado grupo de Fantappiè-de Sitter — isometrias do espaço-tempo de Robertson-Walker. Como o grupo de Fantappiè-de Sitter depende de um parâmetro associado à curvatura do espaço-tempo de Robertson-Walker, o mesmo acontece com as equações de onda.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 1 apresentamos uma breve revisão da geometria riemanniana, em seguida discute-se o espaço-tempo de Robertson-Walker e sua imersão como um hiperbolóide num espaço (pseudo) euclidiano para os casos de curvatura positiva e negativa. A discussão do espaço-tempo de Robertson-Walker é concluída no Apêndice A.

No capítulo 2 apresentamos outros dois sistemas de coordenadas para o espaço-tempo de Robertson-Walker; as coordenadas estereográficas e as coordenadas projetivas.

No capítulo 3 estudamos o grupo de Lie das isometrias do espaço-tempo de Robertson-Walker, chamado grupo de Fantappiè-de Sitter. Este capítulo é iniciado de forma geral com os grupos $O(r, s)$, $r + s = n$, e depois particularizado para o grupo de Fantappiè-de Sitter, isto é, $n = 5$. São ainda apresentados os operadores diferenciais associados ao grupo de Fantappiè-de Sitter tanto em coordenadas esféricas como em coordenadas estereográficas, e também os dois operadores de Casimir, de segunda e quarta ordens, associados ao grupo.

No capítulo 4 é discutida a equação de Klein-Gordon generalizada. Esta equação é obtida a partir do operador de Casimir de segunda ordem associada ao grupo de Fantappiè-de Sitter e estendida para o espaço-tempo de Robertson-Walker $(n + 1)$ -dimensional. Sua solução é obtida por separação de variáveis, considerando separadamente os casos de curvatura positiva e negativa.

No capítulo 5 são dadas a representação matricial da álgebra de Clifford associada ao grupo de Fantappiè-de Sitter e apresentados os chamados harmônicos esféricos com peso de spin. Estes serão empregados no capítulo 6 para fatorar o operador de Casimir de segunda ordem num produto de dois operadores de primeira ordem. A equação de Dirac generalizada é dada a partir destes operadores, e é explicitada em coordenadas estereográficas. A solução da equação é obtida por separação de variáveis, sendo que para separar a parte angular das partes radial e temporal são empregados os harmônicos esféricos com peso de spin.

Finalmente apresentamos as nossas conclusões e algumas perspectivas futuras em relação a este trabalho. Cabe ainda ressaltar que foi incluído um Apêndice onde constam as funções especiais citadas no texto e as respectivas equações diferenciais. Nas referências bibliográficas incluímos os resumos traduzidos de vários artigos citados no texto.

Capítulo 1

Geometria e cosmologia

Introdução

Neste capítulo, à guisa de revisão bem como apresentação da notação a ser utilizada no decorrer do trabalho, apresentamos e discutimos os conceitos de conexão e derivação covariante, além de introduzirmos as variedades riemannianas. Na seqüência, apresentamos a métrica e o espaço-tempo de Robertson-Walker na ausência de matéria e radiação, bem como sua imersão em um espaço (pseudo)euclidiano, e discutimos os chamados espaço-tempo de de Sitter e o espaço-tempo anti-de Sitter.

1.1 Derivada covariante

Consideremos \mathcal{M} uma variedade diferenciável n -dimensional. Indicamos por $\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ o conjunto das funções diferenciáveis $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, onde \mathcal{U} é um aberto de \mathcal{M} tal que $p \in \mathcal{M}$. Os elementos de $\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ também são denominados escalares. O espaço tangente de \mathcal{M} no ponto p , denotado por $T_p(\mathcal{M})$, é definido como o conjunto das derivações em $\mathcal{F}_p(\mathcal{M})$, isto é, o conjunto dos operadores $\mathbf{X} : \mathcal{F}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$, os quais satisfazem as seguintes condições:

1. Linearidade, $\mathbf{X}(af + bg) = a\mathbf{X}(f) + b\mathbf{X}(g)$
2. Regra de Leibniz, $\mathbf{X}(fg) = f(p)\mathbf{X}(g) + g(p)\mathbf{X}(f)$
3. $T_p(\mathcal{M})$ é um espaço vetorial, $(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y})(f) = a\mathbf{X}(f) + b\mathbf{Y}(f)$

para todos $f, g \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_p(\mathcal{M})$.

O seguinte resultado [31] caracteriza o espaço tangente de \mathcal{M} . O espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$ é um espaço vetorial n -dimensional que, relativo a um sistema de coordenadas

$x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ em torno do ponto p , é escrito de maneira única como

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{onde} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

com $X^i \in \mathbb{R}$. Os operadores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ constituem uma base do espaço tangente, chamada base coordenada. Os elementos pertencentes ao espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$ são chamados de vetores tangentes ou vetores contravariantes.

Associado ao espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$ temos o seu espaço dual¹ denotado por $T_p^*(\mathcal{M})$. O espaço dual $T_p^*(\mathcal{M})$ é também um espaço vetorial n -dimensional. Agora, definindo a atuação de \mathbf{X} em ω por $\omega(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(\omega)$ para todo $\mathbf{X} \in T_p(\mathcal{M})$ e todo $\omega \in T_p^*(\mathcal{M})$, podemos identificar o espaço dual de $T_p(\mathcal{M})$, também chamado de bidual, com o próprio espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$. O espaço dual do espaço tangente é chamado de espaço cotangente, e seus elementos de covetores, ou vetores covariantes, ou ainda, de 1-formas.

Convencionamos que, dada uma base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ de $T_p(\mathcal{M})$, a base dual de $T_p^*(\mathcal{M})$ será indicada por $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^n$, de tal forma que, $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j(\mathbf{e}^i) = \delta_j^i$. Com isso, para $\mathbf{X} \in T_p(\mathcal{M})$ e $\omega \in T_p^*(\mathcal{M})$ escrevemos

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X^i \mathbf{e}_i, \quad \text{sendo } X^i = \mathbf{e}^i(\mathbf{X}), \text{ as componentes de } \mathbf{X}$$

e

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{e}^i, \quad \text{sendo } \omega_i = \mathbf{e}_i(\omega), \text{ as componentes de } \omega,$$

ou seja, indicamos com índices superiores as componentes dos vetores tangentes e com índices inferiores as componentes dos covetores.

Podemos caracterizar o espaço cotangente da seguinte forma. Considere $f \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$. Define-se df como $df(\mathbf{V}) = \mathbf{V}(f)$ para todo $\mathbf{V} \in T_p(\mathcal{M})$, verifica-se que df é um elemento de $T_p^*(\mathcal{M})$. Em particular, tomando $f = x^i$ e $\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x^j}$ temos $dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$, logo, dx^1, dx^2, \dots, dx^n é a base dual da base coordenada $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Consideremos agora $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ um outro sistema de coordenadas em torno do ponto p , de tal modo que $x = x(y)$. Escrevemos $\mathbf{V} \in T_p(\mathcal{M})$ e $\omega \in T_p^*(\mathcal{M})$ na base coordenada $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, isto é, $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \hat{V}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ e $\omega = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i dy^i$, respectivamente. Visto que $\sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \hat{V}^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, podemos fazer atuar os dois lados

¹O dual \mathcal{V}^* do espaço vetorial \mathcal{V} é o espaço vetorial constituído dos funcionais lineares $\omega : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$.

desta igualdade na coordenada x^j , donde resulta

$$V^j = \sum_{i=1}^n \hat{V}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}. \quad (1.1)$$

Em particular, temos $\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Por outro lado,

$$\hat{\omega}_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \omega_j,$$

ou ainda,

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \hat{\omega}_j. \quad (1.2)$$

As fórmulas dadas pelas eq.(1.1) e eq.(1.2) são, respectivamente, as mesmas da definição clássica de vetores contravariantes e vetores covariantes.

A noção de espaço tangente é pontual, isto é, o espaço tangente está definido em cada ponto de \mathcal{M} . Considerando a correspondência que a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ associa diferenciavelmente um único vetor de $T_p\mathcal{M}$ obtemos um campo de vetores em \mathcal{M} . Em termos de um sistema de coordenadas $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ em torno do ponto p o campo \mathbf{X} é dado por $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X^i(x) \mathbf{e}_i$, onde $X^i(x)$ são escalares e \mathbf{e}_i é uma base local de $T_p(\mathcal{M})$. Indicamos o conjunto dos campos de vetores tangentes de \mathcal{M} por $\mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Analogamente se define campo de covetores em \mathcal{M} . O conjunto dos campos de covetores de \mathcal{M} será denotado por $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$. Um campo ω é dado localmente como $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) \mathbf{e}^i$, onde $\omega_i(x)$ são escalares.

Considere um par de campos $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Para cada ponto $p \in \mathcal{M}$ e todo par $a, b \in \mathbb{R}$, $a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}$ satisfaz as condições que definem o espaço tangente, portanto $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ é um espaço vetorial². Considerando agora a atuação de um desses campos no outro, para todo par $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{Y}(fg)) &= \mathbf{X}(f\mathbf{Y}(g) + g\mathbf{Y}(f)) \\ &= f\mathbf{X}\mathbf{Y}(g) + \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}(g) + g\mathbf{X}\mathbf{Y}(f) + \mathbf{X}(g)\mathbf{Y}(f); \end{aligned}$$

a presença do segundo e do quarto termos na última expressão, mostra que não é válida a regra de Leibniz para $\mathbf{X}\mathbf{Y}$. Porém, estes termos são simétricos em \mathbf{X} e \mathbf{Y} , logo eles se cancelam em $\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$. Escrevemos

²Espaço vetorial de dimensão infinita.

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X},$$

assim, temos $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. A aplicação $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ é o chamado colchete de Lie dos campos \mathbf{X}, \mathbf{Y} .

A partir da noção de campos em \mathcal{M} definem-se tensores da seguinte forma. Um tensor \mathbf{T} de tipo $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ é uma aplicação multilinear

$$\mathbf{T} : \underbrace{\mathcal{X}^*(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathcal{X}^*(\mathcal{M})}_{r \text{ cópias}} \times \underbrace{\mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathcal{X}(\mathcal{M})}_{s \text{ cópias}} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

Evidentemente $\omega \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ é um tensor de tipo $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e como o dual de $\mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ é identificado com o próprio $\mathcal{X}(\mathcal{M})$, temos que $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ é um tensor de tipo $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por definição, os escalares $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ são tensores de tipo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dada uma base local \mathbf{e}_i para o espaço tangente em torno do ponto $p \in \mathcal{M}$ e sendo \mathbf{e}^j sua base dual, escrevemos

$$\mathbf{T} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s=1}}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s},$$

onde $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \mathbf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}) \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ são as componentes de \mathbf{T} e por definição

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_s}(\omega, \dots, \kappa, \mathbf{X}, \dots, \mathbf{W},) = \\ & \mathbf{e}_{i_1}(\omega) \dots \mathbf{e}_{i_r}(\kappa) \mathbf{e}^{j_1}(\mathbf{X}) \dots \mathbf{e}^{j_s}(\mathbf{W}) = \omega_{i_1} \dots \kappa_{i_r} X^{j_1} \dots W^{j_s}. \end{aligned}$$

Portanto, em relação à base local \mathbf{e}_i do espaço tangente e da base dual \mathbf{e}^i , temos

$$\mathbf{T}(\omega \dots \kappa, \mathbf{X}, \dots, \mathbf{W}) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s=1}}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \omega_{i_1} \dots \kappa_{i_r} X^{j_1} \dots W^{j_s}.$$

A noção de campos por si só não é suficiente para permitir a comparação entre vetores tangentes em pontos distintos da variedade \mathcal{M} . Para isso necessitamos de uma outra estrutura em \mathcal{M} , chamada de conexão.

Uma conexão em \mathcal{M} é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ indicada por $\nabla(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rightarrow \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ que, para todos $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, todos $f, g \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ e todos $a, b \in \mathbb{R}$, satisfaz as seguintes condições:

1. Linear no primeiro argumento,

$$\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}\mathbf{Z} = f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + g\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}.$$

2. Linear no segundo argumento em relação a \mathbb{R} ,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) = a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}.$$

3. Compatibilidade com a regra de Leibniz,

$$\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}(f))\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}.$$

Fixemos uma base local \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, para o espaço tangente em torno do ponto p . Desde que $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_i$ é linear em \mathbf{X} e $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_i \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, temos definidos n^2 covetores $\omega_i^j \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ tais que

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j(\mathbf{X})\mathbf{e}_j,$$

os quais são escritos na base dual \mathbf{e}^i , $i = 1, 2, \dots, n$, como $\omega_i^j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i^j k} \mathbf{e}^k$, com $\Gamma_{i^j k} \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$. Logo, a conexão é uma estrutura do espaço tangente definida localmente por n^3 escalares.

Para uma dada conexão ∇ na variedade \mathcal{M} , a torção \mathbf{T} é definida como uma aplicação $\mathbf{T} : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$ tal que, para todo par $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$,

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]. \quad (1.3)$$

Embora a conexão não seja linear, verifica-se que a torção é uma aplicação linear nos seus dois argumentos e anti-simétrica. Assim, podemos escrever em relação a uma base local \mathbf{e}_i do espaço tangente

$$\mathbf{T}(X, Y) = \sum_{i,j,k=1}^n T^i_{jk} X^j Y^k \mathbf{e}_i$$

onde $T^i_{jk} = -T^i_{kj} \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ são as componentes de \mathbf{T} , dadas por

$$T^i_{jk} = \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{e}_k - \nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_j - [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k], \quad (1.4)$$

X^i e Y^i são as componentes de \mathbf{X} e \mathbf{Y} , respectivamente.

Com relação a uma dada conexão ∇ , a curvatura \mathbf{R} é definida como uma aplicação $\mathbf{R} : \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \times \mathcal{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{M})$, dada por

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = (\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]})\mathbf{Z} \quad (1.5)$$

para campos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Também verifica-se que a curvatura R é linear em cada um de seus argumentos. Logo, em relação a uma base local e_i do espaço tangente, podemos escrever

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^n R^i_{jkl} X^k Y^l Z^j e_i$$

onde $R^i_{jkl} \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M})$ são as componentes de R , dadas por

$$\sum_{i=1}^n R^i_{jkl} e_i = \nabla_{e_k} \nabla_{e_l} e_j - \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j - \nabla_{[e_k, e_l]} e_j \quad (1.6)$$

e X^i, Y^i e Z^i as componentes de X, Y e Z , respectivamente.

A conexão ∇ define ainda a chamada derivada covariante dos tensores em \mathcal{M} . Seja T um tensor de tipo $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$. A derivada covariante de T é um tensor de tipo $\begin{bmatrix} r \\ s+1 \end{bmatrix}$ indicado por ∇T tal que

$$\begin{aligned} \nabla T(\omega, \dots, \kappa, V, \dots, W, Z) &= Z(T(\omega, \dots, \kappa, V, \dots, W)) - \\ T(\nabla_Z \omega, \dots, \kappa, V, \dots, W) &- \dots - T(\omega, \dots, \nabla_Z \kappa, V, \dots, W) - \\ T(\omega, \dots, \kappa, \nabla_Z V, \dots, W) &- \dots - T(\omega, \dots, \kappa, V, \dots, \nabla_Z W) \end{aligned} \quad (1.7)$$

para todos $\omega, \dots, \kappa \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$ e $V, \dots, W, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.

Verifica-se que a derivada covariante de um tensor é linear em todos os seus argumentos. Assim, por exemplo, denotando $\nabla_i f$, as componentes de ∇f em relação à base coordenada $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, temos

$$\nabla_i f = \nabla f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Leftrightarrow \nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Por sua vez, para $\theta \in \mathcal{X}^*(\mathcal{M})$, ou seja um tensor de tipo $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, denotamos $\nabla_i \theta_j = \nabla \theta(e_j, e_i)$, as componentes de $\nabla \theta$. Temos então

$$\nabla_i \theta_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k{}_i \theta_k,$$

pois $\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k{}_i e_k$, logo

$$\nabla \theta = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k{}_i \theta_k \right) dx^j \otimes dx^i.$$

De um modo geral as componentes $\nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ da derivada covariante de um tensor \mathbf{T} de tipo $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$, são dadas, na base coordenada $\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, pela seguinte fórmula

$$\begin{aligned} \nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial}{\partial x^k} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{l=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{l \dots i_r} \Gamma_l^{i_1 k} + \dots + \sum_{l=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots l} \Gamma_l^{i_r k} \\ &\quad - \sum_{l=1}^n T_{l \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{j_1}^l k - \dots - \sum_{l=1}^n T_{j_1 \dots l}^{i_1 \dots i_r} \Gamma_{j_s}^l k. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2 Variedades riemannianas

Uma variedade riemanniana é uma variedade dotada de um tensor \mathbf{g} de tipo $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, também denotado por ds^2 , chamado de métrica, satisfazendo as seguintes condições:

1. \mathbf{g} é simétrica, isto é, $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, para todo par $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$.
2. \mathbf{g} é não singular, isto é, se $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ para todo $\mathbf{Y} \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ então $\mathbf{X} = 0$.

A métrica define um produto interno³ no espaço tangente. Consideremos uma base local \mathbf{e}_i para o espaço tangente em torno de $p \in \mathcal{M}$, devido à simetria de \mathbf{g} podemos omitir o símbolo \otimes de produto tensorial quando esta é expressa em componentes, ou seja, escrevemos simplesmente $\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$. Assim, escrevemos de forma equivalente

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= \mathbf{g} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \\ ds^2 &= \mathbf{g} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \end{aligned} \right\} \text{onde } g_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ji} \in \mathcal{F}_p(\mathcal{M}).$$

Pensando g_{ij} como os elementos de uma matriz quadrada g , a primeira condição que define a métrica, implica que a matriz g é simétrica, logo seus autovalores são todos reais. Já a segunda condição implica que $\det(g) \neq 0$, isto garante que nenhum dos autovalores associados à matriz g seja nulo. Temos também que os elementos g_{ij} da matriz g são funções contínuas (em um aberto em torno de um ponto p), logo os autovalores de g também são funções contínuas e portanto não podem mudar de sinal. Assim a quantidade dos autovalores positivos e dos autovalores negativos, levando em conta as suas multiplicidades, não pode se alterar com o ponto. As quantidades de autovalores positivos e de autovalores negativos da matriz associada à métrica é a sua assinatura. Mais precisamente, uma métrica tem assinatura (r, s) quando a matriz

³Não necessariamente positivo definido.

a ela associada tem r -autovalores positivos e s -autovalores negativos, evidentemente $n = r + s$.

Além da métrica, uma variedade riemanniana satisfaz duas outras condições suplementares:

1. Torção nula, isto é, $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, pela eq.(1.3).
2. Derivada covariante da métrica é identicamente nula, isto é, $\nabla\mathbf{g} = 0$.

A condição de torção nula também é conhecida como conexão simétrica. Estas duas condições determinam a conexão em função da métrica. Para ver isto, consideremos um sistema de coordenadas $x = (x^1, \dots, x^n)$ em torno do ponto p , junto com a respectiva base coordenada $\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ do espaço tangente e $\mathbf{e}^i = dx^i$ a sua base dual; escrevemos a conexão nesta base como $\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k{}_i \mathbf{e}_k$. Temos ainda $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, assim a condição de torção nula implica que

$$\Gamma_j^k{}_i - \Gamma_i^k{}_j = 0, \quad (1.9)$$

ou seja, $\Gamma_j^k{}_i$ é simétrico nos índices inferiores, isto justifica o nome dado de conexão simétrica. Entretanto, esta simetria só é válida na base coordenada.

Por sua vez, a condição da métrica ter derivada covariante identicamente nula, junto com a fórmula dada pela eq.(1.8), implica que

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \sum_{l=1}^n g_{lj} \Gamma_i^l{}_k - \sum_{l=1}^n g_{il} \Gamma_j^l{}_k = 0.$$

Permutando ciclicamente os índices (i, j, k) obtemos as seguintes equações:

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = \sum_{l=1}^n g_{lj} \Gamma_i^l{}_k + \sum_{l=1}^n g_{il} \Gamma_j^l{}_k,$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = \sum_{l=1}^n g_{lk} \Gamma_j^l{}_i + \sum_{l=1}^n g_{jl} \Gamma_k^l{}_i,$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} = \sum_{l=1}^n g_{li} \Gamma_k^l{}_j + \sum_{l=1}^n g_{kl} \Gamma_i^l{}_j.$$

Combinando estas equações da seguinte forma, (a)–(b)+(c), e valendo-se da simetria quanto aos índices inferiores de $\Gamma_j^k{}_i$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} = 2 \sum_{l=1}^n g_{il} \Gamma_j^l{}_k.$$

Como a matriz g_{il} admite inversa, denotada por g^{mi} , de tal forma que $\sum_{i=1}^n g^{mi}g_{il} = \delta_l^m$, resulta que

$$\Gamma_j^i{}_k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{kl} \right). \quad (1.10)$$

Escrita nesta forma, $\Gamma_j^i{}_k$ também é conhecido como símbolos de Christoffel de segunda espécie. Os símbolos de Christoffel de primeira espécie Γ_{jik} são dados por

$$\Gamma_{jik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} \right).$$

As componentes da curvatura, dadas pela eq.(1.6), são expressas em termos dos símbolos de Christoffel como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R^i{}_{jkl} \mathbf{e}_i &= \nabla_{\mathbf{e}_k} \nabla_{\mathbf{e}_l} \mathbf{e}_j - \nabla_{\mathbf{e}_l} \nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_j = \nabla_{\mathbf{e}_k} \sum_{m=1}^n \Gamma_j^m{}_l \mathbf{e}_m - \nabla_{\mathbf{e}_l} \sum_{m=1}^n \Gamma_j^m{}_k \mathbf{e}_m \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_j^i{}_l + \sum_{m=1}^n \Gamma_j^m{}_l \Gamma_m^i{}_k - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_j^i{}_k - \sum_{m=1}^n \Gamma_j^m{}_k \Gamma_m^i{}_l \right) \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

ou, ainda

$$R^i{}_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_j^i{}_l - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_j^i{}_k + \sum_{m=1}^n (\Gamma_j^m{}_l \Gamma_m^i{}_k - \Gamma_j^m{}_k \Gamma_m^i{}_l). \quad (1.11)$$

Introduzimos agora dois outros objetos dependentes diretamente da curvatura. Estes objetos são o tensor e o escalar de Ricci; os quais podem ser definidos sem referência à base ou ao sistema de coordenada, veja [13]. Entretanto, aqui são apresentadas somente as expressões que os definem em relação a uma base do espaço tangente. As componentes R_{ij} do tensor de Ricci são dadas pelo traço da curvatura, isto é,

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k{}_{ikj} \quad (1.12)$$

onde $R^k{}_{ij}$ são as componentes da curvatura.

Já o escalar de Ricci, denotado por R , é dado por

$$R = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij} \quad (1.13)$$

onde R_{ij} são as componentes do tensor de Ricci e g^{ij} são as componentes da matriz inversa da matriz g_{ij} associada à métrica. O escalar de Ricci também é chamado de escalar de curvatura.

1.3 A métrica de Robertson-Walker

Na teoria da relatividade geral de Einstein⁴, o universo físico é descrito como uma variedade riemanniana 4-dimensional com assinatura (1, 3) (ou (3, 1)), chamada de espaço-tempo. Considere um espaço-tempo \mathcal{M} com métrica g ; os vetores $V \in T_p$ estão divididos em três categorias distintas quando ao valor assumido por $g(V, V)$. Dizemos que V é

tipo-tempo se $g(V, V) > 0$,

tipo-luz se $g(V, V) = 0$,

tipo-espaço se $g(V, V) < 0$.

Os vetores tipo-tempo são aqueles que podem ocorrer como vetores tangentes de trajetórias de partículas com massa, em particular, as curvas coordenadas temporal têm vetor tangente tipo-tempo.

Os vetores tipo-luz são aqueles que ocorrem como vetores tangentes de trajetórias de fótons e determinam o chamado cone de luz de \mathcal{M} no ponto p .

Já os vetores tipo-espaço não podem ocorrer como vetores tangentes de trajetórias de partículas com massa ou de fótons. Os vetores tangentes das curvas coordenadas que estão relacionados à chamada parte espacial de \mathcal{M} são vetores tipo espaço, logo a parte espacial é 3-dimensional.

Na teoria da relatividade geral, a geometria do espaço-tempo \mathcal{M} , ou, o que é equivalente, sua métrica g é determinada pela distribuição de matéria e energia no universo, e são relacionados entre si pelas equações,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} - \lambda g_{ij} = 8\pi GT_{ij}, \quad (1.14)$$

conhecidas como equações de campo de Einstein [14], onde R_{ij} são as componentes do tensor de Ricci, R o escalar de Ricci, g_{ij} as componentes da métrica, T_{ij} são as componentes do tensor de energia-momento, λ é a chamada constante cosmológica⁵ e G é a constante de gravitação⁶.

Apresentamos a seguir duas soluções das equações de campo eq.(1.14), para o espaço-tempo desprovido de matéria e radiação, isto é $T_{ij} = 0$. Estas soluções, conhecidas como espaço-tempo de de Sitter e espaço-tempo anti-de Sitter, constituem a base do restante deste trabalho.

⁴Publicada na sua forma final em 1916.

⁵Considerações astronômicas sugerem que $\lambda < 10^{-56}\text{cm}^{-2}$.

⁶ $G = 6.67 \times 10^{-8}\text{cm}^3\text{g}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Para $T_{ij} = 0$ temos

$$\sum_{i,j=0}^3 g^{ij} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} - \lambda g_{ij} \right) = 0 \Leftrightarrow R = -4\lambda,$$

assim a eq.(1.14) se escreve como

$$R_{ij} + \lambda g_{ij} = 0. \quad (1.15)$$

O espaço-tempo de de Sitter é dado por um hiperbolóide de raio r imerso no espaço euclidiano pentadimensional $\mathbb{R}_{(1,4)}$. De forma mais precisa, tomando $\mathbb{R}_{(1,4)}$ com coordenadas cartesianas $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ temos para sua métrica

$$ds^2 = +(d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 - (d\xi^4)^2.$$

A métrica induzida por $\mathbb{R}_{(1,4)}$ no hiperbolóide

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2 = -r^2, \quad (1.16)$$

é solução da eq.(1.15) com $\lambda = \frac{3}{r^2}$. De fato, podemos cobrir o hiperbolóide eq.(1.16) com as coordenadas $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$,

$$\begin{cases} \xi^0 = r \sinh \tau \\ \xi^1 = r \cosh \tau \sin \chi \cos \varphi \sin \theta \\ \xi^2 = r \cosh \tau \sin \chi \sin \varphi \sin \theta \\ \xi^3 = r \cosh \tau \sin \chi \cos \theta \\ \xi^4 = r \cosh \tau \cos \chi \end{cases} \quad (1.17)$$

onde $-\infty < \tau < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta, \chi \leq \pi$. A métrica do espaço-tempo de de Sitter é induzida pela métrica de $\mathbb{R}_{(1,4)}$ e é dada por

$$ds^2 = r^2 d\tau^2 - r^2 \cosh^2 \tau [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (1.18)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{\tau\tau} &= -3 \\ R_{\chi\chi} &= 3 \cosh^2 \tau \\ R_{\theta\theta} &= 3 \cosh^2 \tau \sin^2 \chi \\ R_{\varphi\varphi} &= 3 \cosh^2 \tau \sin^2 \chi \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Comparando as componentes da métrica, e do tensor de Ricci, dados, respectivamente, pelas eq.(1.18) e eq.(1.19), com eq.(1.15), temos $\lambda = \frac{3}{r^2}$.

O espaço-tempo anti-de Sitter é dado pelo hiperbolóide de raio r imerso no espaço euclidiano $\mathbb{R}_{(2,3)}$. Novamente, tomando as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}_{(2,3)}$ como $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ temos para sua métrica

$$ds^2 = +(d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2 - (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 + (d\xi^4)^2.$$

A métrica induzida por $\mathbb{R}_{(2,3)}$ no hiperbolóide

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2 = r^2 \quad (1.20)$$

é solução da eq.(1.15) com $\lambda = -\frac{3}{r^2}$. Para ver isto procedemos do mesmo modo que para o espaço-tempo de de Sitter. As coordenadas $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$,

$$\begin{cases} \xi^0 = r \sen \tau \\ \xi^1 = r \cos \tau \sinh \chi \cos \varphi \sen \theta \\ \xi^2 = r \cos \tau \sinh \chi \sen \varphi \sen \theta \\ \xi^3 = r \cos \tau \sinh \chi \cos \theta \\ \xi^4 = r \cos \tau \cosh \chi, \end{cases} \quad (1.21)$$

onde $-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 < \chi < \infty$ cobrem a região do hiperbolóide dado pela eq.(1.20), tal que $\xi^4 \geq \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}$. A métrica do espaço-tempo anti-de Sitter é induzida pela métrica de $\mathbb{R}_{(2,3)}$ e é dada por

$$ds^2 = r^2 d\tau^2 - r^2 \cos^2 \tau [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sen^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (1.22)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{\tau\tau} &= 3 \\ R_{\chi\chi} &= -3 \cos^2 \tau \\ R_{\theta\theta} &= -3 \cos^2 \tau \sinh^2 \chi \\ R_{\varphi\varphi} &= -3 \cos^2 \tau \sinh^2 \chi \sen^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Novamente, comparando as componentes da métrica e do tensor de Ricci, dados, respectivamente, pelas eq.(1.22) e eq.(1.23), com a eq.(1.15), temos $\lambda = -\frac{3}{r^2}$.

Alternativamente, podemos cobrir todo o hiperbolóide eq.(1.20) com o seguinte sistema de coordenadas

$$\begin{cases} \xi^0 = r \sen \tau \cosh \chi \\ \xi^1 = r \sinh \chi \cos \varphi \sen \theta \\ \xi^2 = r \sinh \chi \sen \varphi \sen \theta \\ \xi^3 = r \sinh \chi \cos \theta \\ \xi^4 = r \cos \tau \cosh \chi, \end{cases} \quad (1.24)$$

onde $0 \leq \tau \leq 2\pi$, $-\infty < \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Neste sistema de coordenadas a métrica do espaço-tempo anti-de Sitter induzida por $\mathbb{R}_{(2,3)}$ é dada por

$$ds^2 = r^2 \cosh^2 \chi d\tau^2 - r^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

É fácil ver que as curvas coordenadas temporais são fechadas no espaço-tempo anti-de Sitter. O que não é aceito para um espaço-tempo real. Este problema é contornado tomando o espaço-tempo anti-de Sitter como sendo o espaço de recobrimento universal do hiperbolóide dado pela eq.(1.20). Entretanto, localmente este problema não existe e podemos considerar o espaço-tempo anti-de Sitter como apresentado anteriormente pelas eq.(1.21).

Podemos unificar o tratamento do espaço-tempo de de Sitter e do espaço-tempo anti-de Sitter introduzindo a forma quadrática em $\mathbb{R}_{(1,4)}$ dependente de um parâmetro k

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - \frac{(\xi^4)^2}{k} = -\frac{1}{k} \quad (1.25)$$

onde $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ são as coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}_{(1,4)}$ e fizemos

$$\xi^i \rightarrow r\xi^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

nas eq.(1.16) e eq.(1.20), temos ainda $-(1 + \delta) < k < 1 + \delta$, $\delta > 0$. Nota-se que para $k = 1$ obtemos o espaço-tempo de de Sitter e para $k = -1$ obtemos o espaço-tempo anti-de Sitter.

Um sistema de coordenadas admitido pela eq.(1.25) é

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^0 = \frac{\sinh(\sqrt{k}\tau)}{\sqrt{k}} \\ \xi^1 = \frac{\cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \cos \varphi \sin \theta}{\sqrt{k}} \\ \xi^2 = \frac{\cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \sin \varphi \sin \theta}{\sqrt{k}} \\ \xi^3 = \frac{\cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \cos \theta}{\sqrt{k}} \\ \xi^4 = \cosh(\sqrt{k}\tau) \cos(\sqrt{k}\chi) \end{array} \right. \quad (1.26)$$

e cuja métrica induzida por $\mathbb{R}_{(1,4)}$ é

$$ds^2 = d\tau^2 - \cosh^2(\sqrt{k}\tau) \left[d\chi^2 + \frac{\sin^2(\sqrt{k}\chi)}{k} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (1.27)$$

É interessante observar que no limite $k \rightarrow 0$ obtemos a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas. Assim, esta parametrização contempla o espaço-tempo de de

Sitter, o espaço-tempo anti-de Sitter, bem como o espaço-tempo de Minkowski como um caso limite. Uma seqüência mostrando a transformação do espaço-tempo de de Sitter para anti-de Sitter é mostrada na Fig.(1.1). Outras parametrizações da forma quadrática eq.(1.25) que também incluem o espaço-tempo de Minkowski como um caso limite serão apresentadas no próximo capítulo.

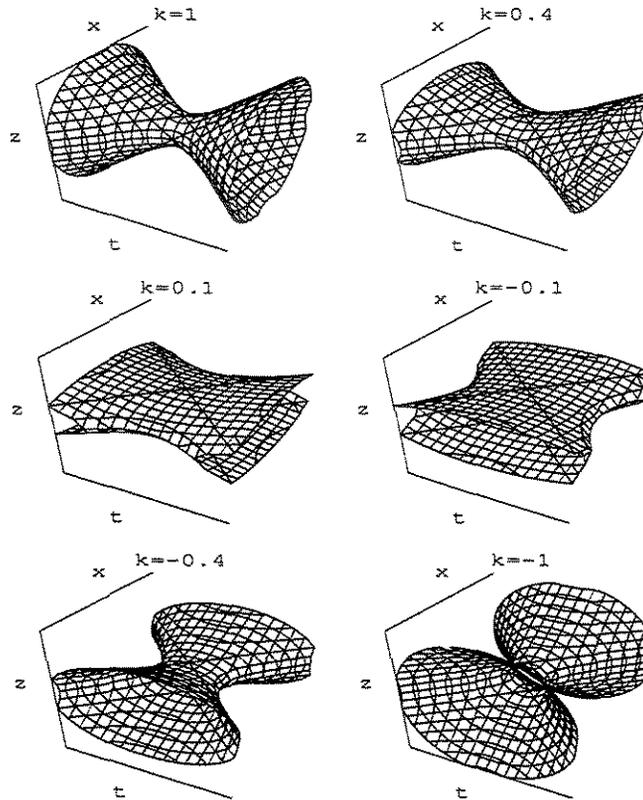


Figura 1.1: Seqüência de transformações do espaço-tempo de de Sitter $k = 1$ para o espaço-tempo anti-de Sitter $k = -1$.

O espaço-tempo de de Sitter, assim como o espaço-tempo anti-de Sitter e o espaço-tempo de Minkowski podem ser obtidos alternativamente a partir da cosmologia de Robertson-Walker, com o tensor de energia-momento identicamente nulo ($T_{ij} = 0$). Conforme mostrado no apêndice A o espaço-tempo de de Sitter dado pelo hiperbolóide eq.(1.16) é a única solução global da cosmologia de Robertson-Walker para o caso $\lambda > 0$, assim como o espaço-tempo de Minkowski é a única solução global para o caso $\lambda = 0$. Já o espaço-tempo anti-de Sitter dado pelo hiperbolóide eq.(1.20) parametrizado pela eq.(1.21) coincide com a solução de Robertson-Walker para o caso $\lambda < 0$, embora esta não seja uma solução global. Destas observações segue que

não há nenhuma restrição em denominar a forma quadrática dada pela eq.(1.25) de espaço-tempo de Robertson-Walker, bem como sua métrica induzida por $\mathbb{R}_{(1,4)}$ de métrica de Robertson-Walker, que no caso da parametrização dada pela eq.(1.26) é a eq.(1.27).

Capítulo 2

Coordenadas

Introdução

Neste capítulo apresentamos dois outros sistemas de coordenadas associados à forma quadrática dada pela eq.(1.25); a saber, as coordenadas estereográficas e as coordenadas projetivas. Estas, junto com as coordenadas esféricas, dadas pelas eqs.(1.26), serão as utilizadas no restante do trabalho.

Nestes dois sistemas de coordenadas, no caso limite $k \rightarrow 0$, recupera-se a métrica de Minkowski da métrica de Robertson-Walker, tal como nas coordenadas esféricas.

2.1 Coordenadas estereográficas

Introduzimos coordenadas estereográficas no espaço-tempo de Robertson-Walker projetando seus pontos através do ponto $s = (0, 0, 0, 0, -1)$ no hiperplano perpendicular ao eixo ξ^4 passando pelo ponto $n = (0, 0, 0, 0, 1)$, conforme mostrado na Fig.(2.1) para o caso $k = 1$. Evidentemente esta parametrização cobre todo o espaço-tempo de Robertson-Walker exceto o ponto s . Indicamos por p os pontos do espaço-tempo de Robertson-Walker, p' suas imagens projetadas e x^i , $i = 0, 1, 2, 3$ as coordenadas cartesianas do hiperplano, cujos eixos são paralelos aos respectivos eixos de ξ^i , $i = 0, 1, 2, 3$.

Com isso temos as seguintes relações

$$\frac{\xi^i}{x^i} = \frac{\xi^4 + 1}{2}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

as quais, substituindo na eq.(1.25) e escrevendo

$$\Phi = 1 - k \frac{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}{4}, \quad (2.2)$$

resulta na equação

$$(\xi^4)^2 \Phi + 2\xi^4(\Phi - 1) + (\Phi - 2) = 0$$

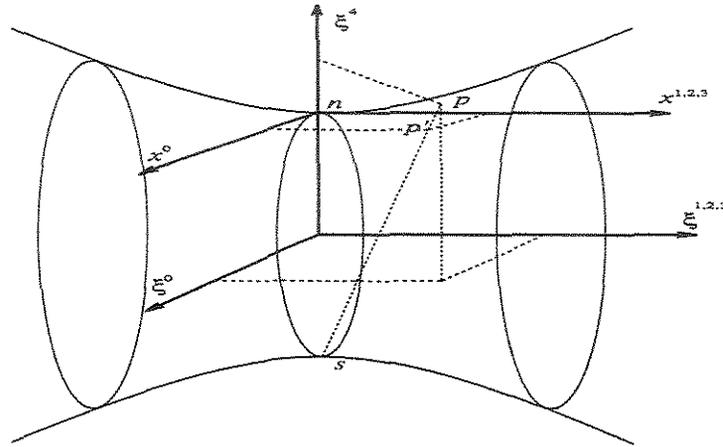


Figura 2.1: Coordenadas estereográficas.

que resolvendo para ξ^4 e valendo-se das eq.(2.1) obtém-se

$$\begin{cases} \xi^i = \frac{x^i}{\Phi}, & i = 0, 1, 2, 3, \\ \xi^4 = \frac{2 - \Phi}{\Phi}, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\Phi > 0$, isto é,

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 < \frac{4}{k}.$$

Logo, para $k > 0$ a coordenada temporal x^0 é limitada enquanto as coordenadas espaciais x^1, x^2, x^3 são ilimitadas, já para $k < 0$ temos as coordenadas espaciais x^1, x^2, x^3 limitadas enquanto a coordenada temporal é ilimitada, veja Fig.(2.2).

Agora, a métrica do espaço-tempo de Robertson-Walker em coordenadas estereográficas é dada por

$$ds^2 = \frac{1}{\Phi^2} [(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2]. \quad (2.4)$$

É interessante observar que no limite $k \rightarrow 0$, temos $\Phi \rightarrow 1$ e, portanto, recuperamos a métrica de Minkowski.

2.2 Coordenadas projetivas

Podemos introduzir coordenadas projetivas na forma quadrática eq.(1.25) de forma similar às coordenadas estereográficas, porém, projetando seus pontos através da

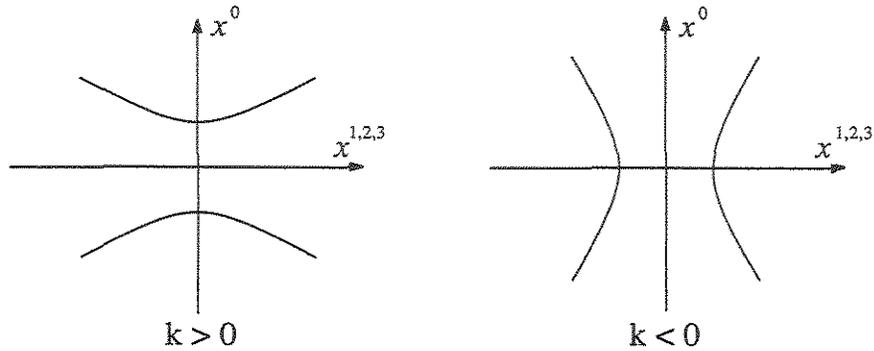


Figura 2.2: Coordenadas estereográficas $k > 0$ e $k < 0$.

origem, isto é, com $s = (0, 0, 0, 0, 0)$, veja Fig.(2.3). Isto é equivalente a identificar o espaço ambiente $\mathbb{R}_{(1,4)}$ com o espaço projetivo $\mathbb{RP}(5)$. É evidente que as coordenadas projetivas cobrem somente a metade $\xi^4 > 0$ do espaço-tempo de Robertson-Walker.

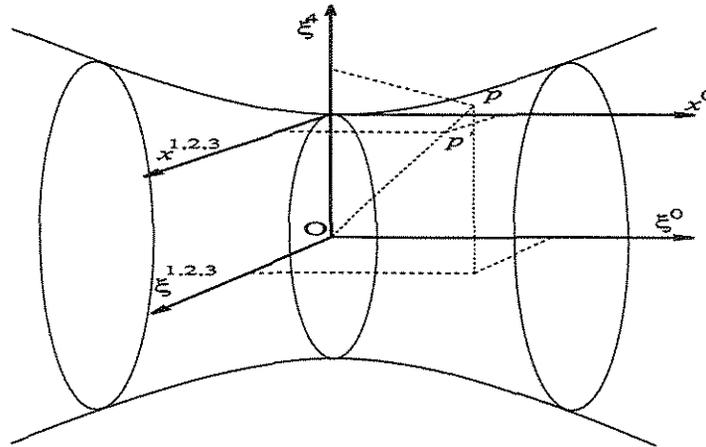


Figura 2.3: Coordenadas projetivas.

Sejam $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ as coordenadas homogêneas de $\mathbb{RP}(5)$ e (x^0, x^1, x^2, x^3) as coordenadas não-homogêneas do hiperplano passando por $\xi^4 = 1$. Temos, então, as seguintes relações

$$x^i = \frac{\xi^i}{\xi^4}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

das quais, substituindo na forma quadrática eq.(1.25) e denotando

$$A = \sqrt{1 - k((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2)} \tag{2.6}$$

obtemos

$$\begin{cases} \xi^i = \frac{x^i}{A}, & i = 0, 1, 2, 3, \\ \xi^4 = \frac{1}{A}, \end{cases} \quad (2.7)$$

onde x^i , $i = 0, 1, 2, 3$ são tais que $A^2 \geq 0$, isto é,

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \leq \frac{1}{k}.$$

Logo, para $k > 0$ temos a coordenada temporal x^0 limitada, enquanto as coordenadas espaciais x^1, x^2, x^3 são ilimitadas, e para $k < 0$ ocorre o inverso, isto é, x^1, x^2, x^3 são limitadas e x^0 é ilimitada, conforme Fig.(2.4).

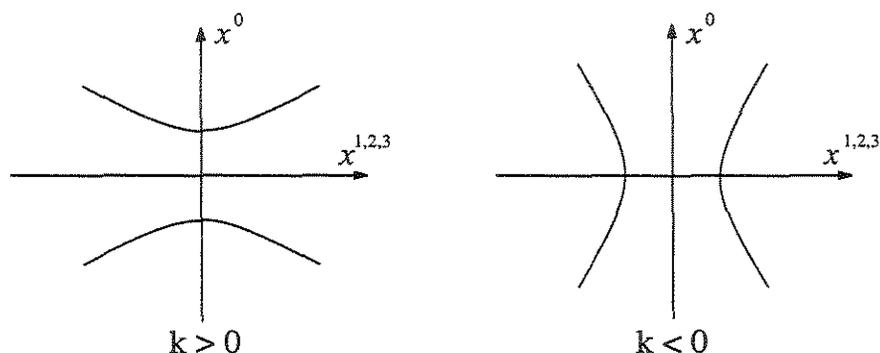


Figura 2.4: Coordenadas projetivas $k > 0$ e $k < 0$.

Os coeficientes g_{ij} , $i, j = 0, 1, 2, 3$, da métrica do espaço-tempo de Robertson-Walker em coordenadas projetivas são dados por

$$A^4 g_{ij} = \begin{bmatrix} A^2 + k(x^0)^2 & -kx^0x^1 & -kx^0x^2 & -kx^0x^3 \\ -kx^1x^0 & -A^2 + k(x^1)^2 & kx^1x^2 & kx^1x^3 \\ -kx^2x^0 & kx^2x^1 & -A^2 + k(x^2)^2 & kx^2x^3 \\ -kx^3x^0 & kx^3x^1 & kx^3x^2 & -A^2 + k(x^3)^2 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Nesta forma, a métrica de Robertson-Walker coincide com a métrica de Beltrami, [2, 1]. No limite $k \rightarrow 0$, temos $A \rightarrow 1$ e assim recupera-se novamente a métrica de Minkowski.

Capítulo 3

O grupo de Fantappié-de Sitter

Introdução

Vimos no capítulo 1 que o espaço-tempo de Robertson-Walker pode ser visualizado como um hiperbolóide imerso em $\mathbb{R}_{(1,4)}$ para o caso $k > 0$, ou imerso em $\mathbb{R}_{(2,3)}$ para o caso $k < 0$. Esta forma é particularmente interessante pois torna evidente que o grupo de isometrias do espaço-tempo de Robertson-Walker é dado pelo grupo $SO(1, 4)$ para o caso $k > 0$ e pelo grupo $SO(2, 3)$ para o caso $k < 0$. E ainda, para os sistemas de coordenadas do espaço-tempo de Robertson-Walker que reduzem sua métrica, como um caso limite, na métrica do espaço-tempo de Minkowski, estes dois grupos devem conter o grupo de Poincaré também como um caso limite.

Por sua vez, a importância do grupo de isometrias do espaço-tempo de Robertson-Walker, também chamado de grupo de Fantappié-de Sitter, está na sua ligação direta com as equações de onda associadas ao espaço-tempo de Robertson-Walker, pois, é a partir do operador de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappié-de Sitter que tais equações são obtidas.

Neste capítulo consideramos inicialmente os grupos $O(r, s)$, $r + s = n$, isto é, os grupos que preservam a métrica de um espaço vetorial euclidiano n -dimensional, com assinatura (r, s) , explicitaremos os geradores e também a álgebra de Lie associada a estes grupos. Em seguida estes resultados são particularizados para o grupo de Fantappié-de Sitter, incluindo o caso limite que contém o grupo de Poincaré.

De posse da álgebra de Lie do grupo de Fantappié-de Sitter, consideramos os operadores de Casimir associados a este grupo. E, finalmente, determinamos explicitamente os geradores do grupo de Fantappié-de Sitter nas coordenadas esféricas e nas coordenadas estereográficas, dadas respectivamente pelas eq.(1.26) e eq.(2.3).

3.1 O grupo $O(r, s)$

Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}_{(r,s)}$, com $r + s = n$, munido do seguinte produto interno

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \underbrace{X^1 Y^1 + \dots + X^r Y^r}_{r\text{-vezes}} - \underbrace{X^{r+1} Y^{r+1} - \dots - X^n Y^n}_{s\text{-vezes}} \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X^i \mathbf{e}_i$, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}_{(r,s)}$ e X^i , $i = 1, 2, \dots, n$ as componentes de $\mathbf{X} \in \mathbb{R}_{(r,s)}$.

Considere as aplicações lineares $A : \mathbb{R}_{(r,s)} \rightarrow \mathbb{R}_{(r,s)}$ que preservam a forma bilinear dada pela eq.(3.1). Estas aplicações constituem um grupo denotado por $O(r, s)$ e denominado grupo ortogonal quando $r = 0$ (ou $s = 0$), ou pseudo-ortogonal quando r e s não são nulos. O grupo $O(r, s)$ são as únicas aplicações de $\mathbb{R}_{(r,s)}$ em $\mathbb{R}_{(r,s)}$ que preservam a eq.(3.1).

Alternativamente, podemos escrever a eq.(3.1) em forma matricial como

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}^\top G \mathbf{Y} \quad (3.2)$$

onde denotamos

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{bmatrix}, \quad G = \text{diag}(\underbrace{+1, \dots, +1}_{r\text{-vezes}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s\text{-vezes}})$$

e o sobrescrito \top indica a transposta da matriz.

Neste contexto, $A \in O(r, s)$ pode ser visto como uma matriz $n \times n$. Decorre diretamente da eq.(3.2) que

$$A \in O(r, s) \iff A^\top G A = G,$$

que por sua vez implica que $(\det A)^2 = 1$ e, portanto $\det A = \pm 1$. Evidentemente as matrizes $A \in O(r, s)$ tais que $\det A = 1$ formam um subgrupo de $O(r, s)$, denotado por $SO(r, s)$.

Consideremos agora as componentes conexas dos grupos $O(r, s)$. De um modo geral, dado um grupo topológico G , um caminho em G é uma aplicação contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$. Um subconjunto $\mathcal{G} \subset G$ é conexo quando existe um caminho em \mathcal{G} ligando quaisquer dois de seus pontos, ou seja, para todo par $g_0, g_1 \in \mathcal{G}$, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\gamma(0) = g_0$ e $\gamma(1) = g_1$. Uma componente conexa de um grupo G , é um subconjunto conexo de G que não está propriamente contido em nenhum outro subconjunto conexo de G .

$$\epsilon_j a_k^j + \epsilon_k a_j^k = 0. \quad (3.4)$$

Convencionamos escrever o seguinte

$$\epsilon^i = 1/\epsilon_i, \quad a_{ij} = \epsilon_j a_i^j, \quad a^{ij} = \epsilon^i a_i^j \quad (3.5)$$

e relações semelhantes para as demais quantidades que tenham índices. Esta convenção é semelhante a elevação e abaixamento dos índices das componentes dos tensores através da métrica. Porém, aqui estão adaptadas às circunstâncias e consideradas puramente formais.

Com isso a eq.(3.4) se reescreve como

$$a_{kj} + a_{jk} = 0,$$

ou seja, a_{jk} são anti-simétricos, logo a quantidade de a_{jk} linearmente independentes é $n(n-1)/2$. Evidentemente, esta também é a quantidade de a_j^k linearmente independentes em $Z = \sum_{i,j=1}^n a_j^i \mathbf{E}_i^j$ e, portanto, podemos tomar como base para $\mathfrak{so}(r, s)$ as matrizes

$$\mathcal{E}_i^j = \mathbf{E}_i^j - \epsilon_i \epsilon^j \mathbf{E}_j^i, \quad i < j. \quad (3.6)$$

Podemos ainda escrever os geradores de $\mathfrak{so}(r, s)$ como

$$\mathcal{E}^{ij} = \epsilon^i \mathcal{E}_i^j = \epsilon^i (\mathbf{E}_i^j - \epsilon_i \epsilon^j \mathbf{E}_j^i) = \mathbf{E}^{ij} - \mathbf{E}^{ji},$$

e de maneira similar temos também $\mathcal{E}_{ij} = \mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ji}$.

Decorre da eq.(3.6) que:

- \mathcal{E}_i^j são matrizes anti-simétricas para $1 \leq i, j \leq r$ e $r+1 \leq i, j \leq n$.
- \mathcal{E}_i^j são matrizes simétricas para $1 \leq r$ e $r+1 \leq j \leq n$.

Agora, observando a regra de comutação das matrizes

$$[\mathbf{E}_i^j, \mathbf{E}_k^l] = \mathbf{E}_i^j \mathbf{E}_k^l - \mathbf{E}_k^l \mathbf{E}_i^j = \delta_{kj} \mathbf{E}_i^l - \delta_{il} \mathbf{E}_k^j,$$

obtemos a regra de comutação de $\mathfrak{so}(r, s)$

$$[\mathcal{E}^{ij}, \mathcal{E}^{kl}] = \epsilon^j \delta_{jk} \mathcal{E}^{il} - \epsilon^j \delta_{jl} \mathcal{E}^{ik} + \epsilon^i \delta_{il} \mathcal{E}^{jk} - \epsilon^i \delta_{ik} \mathcal{E}^{jl}, \quad (3.7)$$

ou ainda, de forma equivalente

$$[\mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_{kl}] = \epsilon_j \delta_{jk} \mathcal{E}_{il} - \epsilon_j \delta_{jl} \mathcal{E}_{ik} + \epsilon_i \delta_{il} \mathcal{E}_{jk} - \epsilon_i \delta_{ik} \mathcal{E}_{jl}. \quad (3.8)$$

Esta regra de comuta o mostra que $\mathfrak{so}_{(r,s)}$   uma  lgebra semi-simples, isto  , não possui nenhum ideal² abeliano não trivial.

3.2 O grupo de Fantappi -de Sitter

Consideremos o espaço-tempo de Robertson-Walker dado através da eq.(1.25) e denotemos por \mathcal{M} o espaço em que está imerso.

Introduzimos um sistema de coordenadas ortonormal em \mathcal{M} , através da mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} X^0 &= \xi^0, \\ X^1 &= \xi^1, \\ X^2 &= \xi^2, \\ X^3 &= \xi^3, \\ X^4 &= \frac{1}{\sqrt{k}}\xi^4, \end{aligned} \tag{3.9}$$

deste modo, o espaço-tempo de Robertson-Walker   descrito em forma matricial como

$$\mathbf{X}^\top G \mathbf{X} = -\frac{1}{k} \tag{3.10}$$

onde $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$   uma matriz 5×5 .   interessante notar que para $k < 0$ a coordenada X^4 de \mathcal{M}   imaginário puro³.

Associado a eq.(3.10) temos a forma bilinear

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}^\top G \mathbf{Y}. \tag{3.11}$$

O grupo de Fantappi -de Sitter, denotado por G_{FS} ,   a componente conexa da identidade do grupo das transforma es lineares $A : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, que preservam a forma bilinear dada pela eq.(3.11). Evidentemente G_{FS} preserva também a métrica do espaço-tempo de Robertson-Walker.

Observamos que G_{FS} depende do parâmetro k e não está definido para $k = 0$, em particular, para $k > 0$ e $k < 0$ temos, respectivamente, os grupos $SO_+(1, 4)$ e $SO_+(2, 3)$.

Denotamos por \mathfrak{g}_{FS} a  lgebra de Lie associada a G_{FS} . Como G_{FS}   caso particular de $SO_+(r, s)$, com $n = 5$, temos que \mathfrak{g}_{FS}   gerada por 10 matrizes dadas pela eq.(3.6), assim como sua regra de comuta o   dada pela eq.(3.7), ou eq.(3.8), com $i, j =$

² \mathfrak{g}_1   ideal de \mathfrak{g} , quando $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$.

³Este tipo de mudança de coordenada   chamado de truque de Weyl.

0, 1, 2, 3, 4 e, em relação às coordenadas X^0, \dots, X^4 de \mathcal{M} , temos $\epsilon_0 = 1$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = -1$.

Tomamos os parâmetros de $Z = \sum_{i,j=0}^4 a_j^i E_i^j \in \mathfrak{g}_{\text{FS}}$ da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \text{Translação temporal} & & a_4^0 &= t^0, \\ \text{Translações espaciais} & a_4^1 = t^1, & a_4^2 = t^2, & a_4^3 = t^3, \\ \text{Movimento inercial} & a_0^1 = v^1, & a_0^2 = v^2, & a_0^3 = v^3, \\ \text{Rotações} & a_1^2 = r^3, & a_3^1 = r^2, & a_2^3 = r^1, \end{aligned}$$

assim, levando em conta a eq.(3.4), temos que $Z \in \mathfrak{g}_{\text{FS}}$ é dado por

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & v^1 & v^2 & v^3 & t^0 \\ v^1 & 0 & -r^3 & r^2 & t^1 \\ v^2 & r^3 & 0 & -r^1 & t^2 \\ v^3 & -r^2 & r^1 & 0 & t^3 \\ t^0 & -t^1 & -t^2 & -t^3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Adotamos os mesmos nomes para os geradores associados a estes parâmetros, assim \mathcal{E}_i^4 , $i = 0, 1, 2, 3$ serão também chamados geradores de translação, assim como \mathcal{E}_0^a , $a = 1, 2, 3$ geradores de movimento inercial e \mathcal{E}_a^b , $a, b = 1, 2, 3$, $a < b$ geradores de rotação.

Podemos escrever as matrizes geradoras de \mathfrak{g}_{FS} em relação às coordenadas $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)^\top$, elas são dadas por

$$\mathcal{E}_i^j \rightarrow P^{-1} \mathcal{E}_i^j P$$

onde $P = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1/\sqrt{k})$ é a matriz de mudança de base das coordenadas \mathbf{X} e ξ , isto é, $\mathbf{X} = P\xi$. Evidentemente vale a mesma regra de comutação para os geradores \mathcal{E}_i^j tanto em relação às coordenadas \mathbf{X} , quanto em relação às coordenadas ξ . Temos ainda, em relação às coordenadas ξ os geradores das rotações e movimentos inerciais permanecem inalterados, enquanto os geradores das translações espaciais e temporal assumem a seguinte forma

$$\mathcal{E}_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_1^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{k} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{E}_2^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{k} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_3^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{k} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{k} & 0 \end{bmatrix}.$$

  conveniente também considerar os seguintes geradores de \mathfrak{g}_{FS}

$$\widehat{\mathcal{E}}_a^b = \mathcal{E}_a^b \quad a, b = 0, 1, 2, 3, \quad a < b$$

e

$$\widehat{\mathcal{E}}_a^4 = \sqrt{k}\mathcal{E}_a^4 \quad a = 0, 1, 2, 3.$$

Para estes geradores de \mathfrak{g}_{FS} , temos, separando os geradores com $j = 4$ dos demais, as seguintes regras de comuta o

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathcal{E}}^{ab}, \widehat{\mathcal{E}}^{cd}] &= \epsilon^b \delta_{bc} \widehat{\mathcal{E}}^{ad} - \epsilon^b \delta_{bd} \widehat{\mathcal{E}}^{ac} + \epsilon^a \delta_{ad} \widehat{\mathcal{E}}^{bc} - \epsilon a \delta_{ac} \widehat{\mathcal{E}}^{bd} \\ [\widehat{\mathcal{E}}^{a4}, \widehat{\mathcal{E}}^{cd}] &= \epsilon^a \delta_{ad} \widehat{\mathcal{E}}^{bc} - \epsilon a \delta_{ac} \widehat{\mathcal{E}}^{bd} \\ [\widehat{\mathcal{E}}^{a4}, \widehat{\mathcal{E}}^{c4}] &= -k \widehat{\mathcal{E}}^{ac} \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $a, b, c, d = 0, 1, 2, 3, a < b$ e $c < d$.

No caso limite $k \rightarrow 0$, $[\widehat{\mathcal{E}}^{a4}, \widehat{\mathcal{E}}^{c4}] = 0$ e \mathfrak{g}_{FS} deixa de ser semi-simples. As regras de comuta o dadas pela eq.(3.13) coincidem com as regras de comuta o do grupo de Poincaré [27], com os geradores $\widehat{\mathcal{E}}_a^4$ cumprindo o papel das transla es no espaço-tempo. Isto também pode ser visto a partir dos geradores $\widehat{\mathcal{E}}_a^4$ expressos na base associada   coordenada ξ . Neste caso temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{E}}_0^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathcal{E}}_1^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathcal{E}}_2^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathcal{E}}_3^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

que, no limite $k \rightarrow 0$, correspondem à representação de translações num espaço euclidiano 4-dimensional. Cabe enfim ressaltar que esta propriedade dos $\widehat{\mathcal{E}}_a^4$, junto com o fato dos geradores dos movimentos inerciais(boost) do grupo de Poincaré serem dados por matrizes simétricas, enquanto os geradores das rotações, por matrizes anti-simétricas, justifica a denominação que foi dada aos parâmetros e aos geradores de \mathfrak{g}_{FS} .

3.3 Operadores de Casimir \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_4

Os chamados operadores de Casimir associados à álgebra de Lie \mathfrak{g} são polinômios, construídos a partir dos geradores de \mathfrak{g} , que comutam com todos os elementos de \mathfrak{g} , ou seja, se \mathcal{C} é um operador de Casimir de \mathfrak{g} então $[X, \mathcal{C}] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. O método geral de construção dos operadores de Casimir de uma álgebra de Lie semi-simples \mathfrak{g} parte de uma representação ρ de \mathfrak{g} por transformações lineares em um espaço vetorial V de dimensão n . Então, para $X \in \mathfrak{g}$, o polinômio característico

$$p(\lambda) = \det [\rho(X) - \lambda I]$$

é um polinômio de grau n , e pode ser escrito como

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_1(X)\lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}(X)\lambda + b_n(X).$$

Os coeficientes $b_n(X), \dots, b_1(X)$ determinam funções polinomiais nas coordenadas de X . Os operadores de Casimir são obtidos de $b_n(X), \dots, b_1(X)$ com cada coordenada de X repassada pelo respectivo gerador [29].

Com base neste resultado, tomamos a representação de \mathfrak{g}_{FS} no espaço de sua definição \mathcal{M} . Assim podemos escrever $Z \in \mathfrak{g}_{\text{FS}}$ como na eq.(3.12) e o polinômio característico de \mathfrak{g}_{FS} , $p(\lambda) = \det(\rho(Z) - \lambda I)$ é dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & v^1 & v^2 & v^3 & t^0 \\ v^1 & -\lambda & -r^3 & r^2 & t^1 \\ v^2 & r^3 & -\lambda & -r^1 & t^2 \\ v^3 & -r^2 & r^1 & -\lambda & t^3 \\ t^0 & -t^1 & -t^2 & -t^3 & -\lambda \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Explicitamente, temos

$$p(\lambda) = -\lambda^5 - b_2\lambda^3 - b_4\lambda$$

onde

$$b_2 = -(t^0)^2 + (t^1)^2 + (t^2)^2 + (t^3)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 + (l^1)^2 + (l^2)^2 + (l^3)^2 \quad (3.15)$$

e

$$\begin{aligned}
b_4 = & - (v^1 l^1 + v^2 l^2 + v^3 l^3)^2 + (l^1 t^1 + l^2 t^2 + l^3 t^3)^2 \\
& - (t^0 l^1 + v^2 t^3 - v^3 t^2)^2 - (t^0 l^2 + v^3 t^1 - v^1 t^3)^2 \\
& - (t^0 l^3 + v^1 t^2 - v^2 t^1)^2,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

os quais, ainda podem ser escritos em termos de vetores do espaço euclidiano 3-dimensional ordinário como

$$b_2 = -(t^0)^2 + \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} \tag{3.17}$$

e

$$b_4 = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{l})^2 + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{t})^2 - (t^0 \mathbf{l} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{t}) \cdot (t^0 \mathbf{l} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{t}). \tag{3.18}$$

Repassando cada coordenada de $Z \in \mathfrak{g}_{\text{FS}}$ pelo respectivo gerador obtemos os dois operadores de Casimir de \mathfrak{g}_{FS} . O operador \mathcal{C}_2 associado à b_2 envolve termos de segunda ordem, é o chamado de operador de segunda ordem. O operador \mathcal{C}_4 , associado à b_4 , envolve termos de quarta ordem, é o chamado operador de quarta ordem.

Não explicitaremos os dois operadores de Casimir aqui, pois nosso objetivo é estudar as equações tipo onda associadas ao grupo de Fantappiè-de Sitter, as quais são obtidas do operador de segunda ordem \mathcal{C}_2 . No próximo capítulo determinaremos explicitamente \mathcal{C}_2 em termos dos chamados operadores diferenciais associados às matrizes \mathcal{E}_i^j .

3.4 Operadores diferenciais

A cada gerador \mathcal{E}_i^j de \mathfrak{g}_{FS} temos associado um operador diferencial J_i^j , que atuando em funções é definido como segue abaixo.

Considere $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável, então para $p \in \mathcal{M}$ definimos

$$J_i^j f(p) = \left. \frac{d}{dt} f((I + t\mathcal{E}_i^j)p) \right|_{t=0}.$$

Explicitamente, em relação às coordenadas \mathbf{X} de \mathcal{M} e escrevendo $p = \mathbf{X}$, os operadores J_i^j são dados por

$$J_i^j f(\mathbf{X}) = X^j \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X^i} - \epsilon_i^j X^i \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X^j}, \tag{3.19}$$

ou ainda, escrevendo $J^{ij} = \epsilon^i J_i^j$ temos, de forma compacta,

$$J^{ij}(f) = \left(\epsilon^i X^j \frac{\partial}{\partial X^i} - \epsilon^j X^i \frac{\partial}{\partial X^j} \right) (f). \quad (3.20)$$

É bem conhecido o fato dos operadores diferenciais J_i^j satisfazerem as mesmas relações de comutação dos geradores de \mathfrak{g}_{FS} [17]. Assim, os operadores J_i^j tal como as matrizes \mathcal{E}_i^j formam uma representação de \mathfrak{g}_{FS} .

A seguir apresentamos explicitamente os operadores J_i^j nas coordenadas esféricas e nas coordenadas estereográficas.

Levando em conta a eq.(3.9), os operadores J_i^j são expressos nas coordenadas esféricas, dadas pelas eqs.(1.26), como:

- Operadores de movimento inercial

$$J_0^1 = \frac{\text{sen}(\sqrt{k}\chi) \cos \varphi \text{sen} \theta}{\sqrt{k}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\text{senh}(\sqrt{k}\tau)}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \left(\frac{\cos(\sqrt{k}\chi) \cos \varphi \text{sen} \theta}{\sqrt{k}} \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\Omega^1}{\text{sen}(\sqrt{k}\chi)} \right), \quad (3.21)$$

$$J_0^2 = \frac{\text{sen}(\sqrt{k}\chi) \text{sen} \varphi \text{sen} \theta}{\sqrt{k}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\text{senh}(\sqrt{k}\tau)}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \left(\frac{\cos(\sqrt{k}\chi) \text{sen} \varphi \text{sen} \theta}{\sqrt{k}} \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\Omega^2}{\text{sen}(\sqrt{k}\chi)} \right), \quad (3.22)$$

$$J_0^3 = \frac{\text{sen}(\sqrt{k}\chi) \cos \theta}{\sqrt{k}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\text{senh}(\sqrt{k}\tau)}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \left(\frac{\cos(\sqrt{k}\chi) \cos \theta}{\sqrt{k}} \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\Omega^3}{\text{sen}(\sqrt{k}\chi)} \right), \quad (3.23)$$

- Operadores de translação temporal e translação espacial

$$J_0^4 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\cos(\sqrt{k}\chi) \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\sinh(\sqrt{k}\tau)}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \sin(\sqrt{k}\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} \right), \quad (3.24)$$

$$J_1^4 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\sqrt{k} \cos(\sqrt{k}\chi)}{\sin(\sqrt{k}\chi)} \Omega^1 \right), \quad (3.25)$$

$$J_2^4 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\sqrt{k} \cos(\sqrt{k}\chi)}{\sin(\sqrt{k}\chi)} \Omega^2 \right), \quad (3.26)$$

$$J_3^4 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{\sqrt{k} \cos(\sqrt{k}\chi)}{\sin(\sqrt{k}\chi)} \Omega^3 \right), \quad (3.27)$$

onde denotamos

$$\Omega^1 = \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\Omega^2 = \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\Omega^3 = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

• Operadores de rotação

$$J_2^3 = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.28)$$

$$J_1^3 = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.29)$$

$$J_1^2 = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.30)$$

Em relação as coordenadas estereográficas, dadas através das eqs.(2.3) obtemos para os operadores diferenciais J_i^j :

• Operadores de movimento inercial

$$J_0^a = x^a \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.31)$$

- Operadores de translação temporal e translação espacial

$$J_0^4 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left[(2 - \Phi) \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{kx^0}{2} \sum_{i=0}^3 x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right], \quad (3.32)$$

$$J_a^4 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left[(2 - \Phi) \frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{kx^a}{2} \sum_{i=0}^3 x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right], \quad a = 1, 2, 3. \quad (3.33)$$

- Operadores de rotação

$$J_a^b = x^b \frac{\partial}{\partial x^a} - x^a \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad a < b. \quad (3.34)$$

Denotamos \widehat{J}_i^j os operadores diferenciais associados às matrizes $\widehat{\mathcal{E}}_i^j$. Estes operadores estão relacionados com os operadores diferenciais J_i^j do mesmo modo que as matrizes \mathcal{E}_i^j e $\widehat{\mathcal{E}}_i^j$ se relacionam, isto é,

$$\widehat{J}_a^b = J_a^b, \quad a, b = 0, 1, 2, 3, \quad a < b$$

e

$$\widehat{J}_a^4 = \sqrt{k} J_a^4.$$

3.5 O caso limite $k \rightarrow 0$

Para os operadores diferenciais obtidos na seção anterior, tanto nas coordenadas esféricas, quanto nas coordenadas estereográficas, temos no limite $k \rightarrow 0$

$$\widehat{J}_0^a \rightarrow x^a \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^a}$$

$$\widehat{J}_a^b \rightarrow x^b \frac{\partial}{\partial x^a} - x^a \frac{\partial}{\partial x^b}$$

$$\widehat{J}_0^4 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^0}$$

$$\widehat{J}_a^4 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^a}$$

onde $a, b = 1, 2, 3$, e tomamos $x^0 = \tau$, $x^1 = \chi \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $x^2 = \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ e $x^3 = \chi \cos \theta$ nas eq.(3.21),..., eq.(3.30).

Estes são exatamente os operadores diferenciais associados ao grupo de Poincaré, do mesmo modo que as matrizes \hat{E}_i^j coincidem com os geradores do grupo de Poincaré no caso limite $k \rightarrow 0$, como já havíamos observado.

Capítulo 4

A equação de Klein-Gordon generalizada

Introdução

As representações irredutíveis de dimensão finita e não unitárias do grupo de Fantappiè-de Sitter são determinadas pelos autovalores dos dois operadores de Casimir \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_4 associados à sua álgebra de Lie [29], isto é, se $\psi \in \rho(\mathfrak{g}_{\text{FS}})$, onde $\rho(\mathfrak{g}_{\text{FS}})$ é uma representação irredutível de \mathfrak{g}_{FS} tem-se

$$\mathcal{C}_2\psi = \lambda_1\psi, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{C}_4\psi = \lambda_2\psi, \quad (4.2)$$

com os autovalores λ_1 e λ_2 caracterizando a representação ρ .

Para o caso $k = 1$, os autovalores λ_1 e λ_2 são discutidos em [30], e de forma similar pode ser implementado para o caso geral do grupo de Fantappiè-de Sitter, com $k \neq 0$.

A representação irredutível de \mathfrak{g}_{FS} no espaço de funções $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathcal{M} é o espaço-tempo de Robertson-Walker, é dada por, [42, 7],

$$\mathcal{C}_2\psi = \lambda\psi \quad (4.3)$$

$$\mathcal{C}_4 = 0, \quad (4.4)$$

onde, evidentemente, os geradores de \mathfrak{g}_{FS} são os geradores diferenciais J_i^j . Logo, $\mathcal{C}_2\psi = \lambda\psi$ está associada a uma equação diferencial parcial de segunda ordem,

denominada equação de Klein-Gordon generalizada no espaço-tempo de Robertson-Walker.

Neste capítulo, obtemos explicitamente a equação de Klein-Gordon generalizada nas coordenadas esféricas dadas pela eq.(1.26), através do operador de Casimir de segunda ordem \mathcal{E}_2 . Neste sistema de coordenadas quando $k \rightarrow 0$, tal como a métrica se reduz à métrica do espaço-tempo de Minkowski, a equação de Klein-Gordon generalizada se reduz à sua versão clássica.

Dados que o espaço-tempo de Robertson-Walker bem como o operador de Casimir \mathcal{E}_2 possuem uma parte esférica, podemos imediatamente generalizar estes dois objetos para um espaço-tempo $(n+1)$ -dimensional, simplesmente tomando sua parte esférica como sendo $(n-1)$ -dimensional. É nesta forma mais geral que consideramos a equação de Klein-Gordon generalizada e obtemos sua solução por separação de variáveis, considerando as chamadas equação radial e equação temporal separadamente nos casos $k > 0$ e $k < 0$.

Finalmente, mostramos a equivalência da equação de Klein-Gordon generalizada obtida aqui, com aquela dada pelo método intrínseco da geometria riemanniana e analisamos a chamada invariância conforme.

4.1 A equação de Klein-Gordon generalizada

A equação de Klein-Gordon generalizada no espaço-tempo de Robertson-Walker é dada pela eq.(4.3), cujo operador de Casimir é construído a partir dos operadores diferenciais J_i^j , mais explicitamente, o operador de Casimir \mathcal{E}_2 é dado por

$$\mathcal{E}_2\psi = \left[-(J_0^4)^2 + (J_1^4)^2 + (J_2^4)^2 + (J_3^4)^2 - (J_0^1)^2 - (J_0^2)^2 - (J_0^3)^2 + (J_2^3)^2 + (J_1^3)^2 + (J_1^2)^2 \right] \psi. \quad (4.5)$$

Em termos das coordenadas dadas pela eq.(1.26), os operadores J_i^j são dados pelas eq.(3.21) ... eq.(3.30). Introduzimos¹ $\lambda = \left(\frac{m_0}{\hbar\sqrt{k}} \right)^2$, assim a equação de Klein-Gordon generalizada é escrita como

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - 3\sqrt{k} \frac{\sinh(\sqrt{k}\tau)}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{k}\tau)} \left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} + 2\sqrt{k} \frac{\cos(\sqrt{k}\chi)}{\sin(\sqrt{k}\chi)} \frac{\partial}{\partial\chi} \right) + \frac{k}{\cosh^2(\sqrt{k}\tau) \sin^2(\sqrt{k}\chi)} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \right\} \psi = \left(\frac{m_0}{\hbar} \right)^2 \psi \quad (4.6)$$

¹O autovalor λ é tomado desta forma em analogia com a equação clássica de Klein-Gordon. Observamos, ainda, que as coordenadas são tomadas de modo que tenhamos $c = 1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo.

onde $\psi = \psi(\tau, \chi, \theta, \varphi) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função diferenciável, m_0 é a massa de repouso e $2\pi\hbar$ é a constante de Planck.

É interessante observar que no limite $k \rightarrow 0$ temos

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{2}{\chi} \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{1}{\chi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \psi = \left(\frac{m_0}{\hbar} \right)^2 \psi$$

que é a equação clássica de Klein-Gordon em coordenadas esféricas.

A eq.(4.6) pode ser imediatamente estendida para um espaço-tempo de Robertson-Walker $(n+1)$ -dimensional tomando a parte esférica como sendo $(n-1)$ -dimensional, no caso $n = 3, 4, 5, \dots$ é a dimensão da parte espacial. Deste modo, o espaço-tempo de Robertson-Walker $(n+1)$ -dimensional é escrito em coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}\tau) \\ \xi^1 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ \xi^2 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ \xi^3 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ \xi^4 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \cos \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ \xi^{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \cos \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \\ \xi^n &= \frac{1}{\sqrt{k}} \cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi) \cos \theta_{n-2} \\ \xi^{n+1} &= \cosh(\sqrt{k}\tau) \cos(\sqrt{k}\chi) \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, para $i = 1, 2, \dots, n-2$; $0 \leq \chi \leq \sqrt{k}\pi$ e $-\infty < \tau < \infty$ para o caso $k > 0$; $0 \leq \chi \leq \infty$ e $-\sqrt{-k}\pi/2 < \tau < \sqrt{-k}\pi/2$ para o caso $k < 0$. Em ambos os casos a coordenada τ é a coordenada temporal enquanto as demais são coordenadas espaciais.

Nestas coordenadas a métrica do espaço-tempo de Robertson-Walker é dada por

$$ds^2 = (d\tau)^2 - \cosh^2(\sqrt{k}\tau) \left[(d\chi)^2 + \frac{\sin^2(\sqrt{k}\chi)}{k} \left((d\theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_2)^2 + \cdots + \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{n-2} (d\varphi)^2 \right) \right], \tag{4.8}$$

que, a menos dos termos adicionais em θ , é a mesma expressão dada pela eq.(1.27).

Denotamos por $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ a parte angular do laplaciano n -dimensional, obtemos para a forma explícita

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-2}^2} + (n-2)\frac{\cos\theta_{n-2}}{\sin\theta_{n-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-3}^2} + (n-3)\frac{\cos\theta_{n-3}}{\sin\theta_{n-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-3}} \right) + \dots + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-2} \cdots \sin^2\theta_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \right\} \psi.$$

Introduzimos, para simplificar a escrita das futuras expressões, a notação

$$t = \tau\sqrt{k}, \quad x = \chi\sqrt{k} \quad \text{e} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{k}\hbar}, \quad (4.9)$$

assim as expressões dadas a seguir corresponderão formalmente ao caso $k > 0$, as correspondentes expressões para o caso $k < 0$ serão obtidas das anteriores através da mudança

$$t \rightarrow it \quad \text{e} \quad x \rightarrow ix. \quad (4.10)$$

Com isso, temos que a equação de Klein-Gordon generalizada no espaço-tempo de Robertson-Walker $(n+1)$ -dimensional² é dada por

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - n\frac{\sinh t}{\cosh t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\cosh^2 t} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (n-1)\frac{\cos x}{\sin x}\frac{\partial}{\partial x} \right] + \frac{1}{\cosh^2 t \sin^2 x} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} \right\} \psi = m^2\psi, \quad (4.11)$$

com $\psi = \psi(t, x, \theta_i, \varphi)$.

As soluções da eq.(4.11) que procuraremos estabelecer são, de acordo com [6], aquelas que formam um conjunto ortogonal em relação ao produto interno

²A quantidade dos operadores de Casimir associados ao grupo de Fantappiè-de Sitter depende da dimensão do espaço-tempo de Robertson-Walker. De um modo geral, para um espaço-tempo n -dimensional temos $[(n-1)/2]$ operadores de Casimir, onde $[l]$ é a parte inteira de l . Entretanto, um operador de segunda ordem formado pelo quadrado dos operadores J_i^j , tal como o operador dado pela eq.(4.5), sempre ocorre.

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\Omega} \psi_1(0, x, \theta, \varphi) \overline{\psi_2(0, x, \theta, \varphi)} \sqrt{|h|} dx d\theta d\varphi, \quad (4.12)$$

onde Ω é a superfície tipo-espaço do espaço-tempo de Robertson-Walker dada por $t = 0$, mais precisamente temos $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$, e para o caso $k > 0$ temos, $0 \leq x \leq \pi$, enquanto para o caso $k < 0$, temos $0 \leq x < \infty$,

$$h = \det g_{ab}|_{t=0} = (-1)^n (\sen x)^{2(n-1)} (\sen \theta_1)^{2(n-2)} \dots (\sen \theta_{n-2})^2$$

é o elemento de volume desta superfície induzido pela métrica dada pela eq.(4.8) e $d\theta = d\theta_1 \dots d\theta_{n-2}$.

Evidentemente, a eq.(4.11) é uma equação diferencial parcial separável. Assim, escrevendo

$$\psi = T(t)R(x)S(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi),$$

separamos as partes angular, radial e temporal, isto é,

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} S = \lambda_1 S, \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) + (n-1) \frac{\cos x}{\sen x} \frac{d}{dx} R(x) + \frac{\lambda_1}{\sen^2 x} R(x) = \lambda_2 R(x), \quad (4.14)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) + n \frac{\sinh t}{\cosh t} \frac{d}{dt} T(t) - \frac{\lambda_2}{\cosh^2 t} T(t) + m^2 T(t) = 0, \quad (4.15)$$

onde λ_1 e λ_2 são as constantes de separação. E ainda, a condição de ortogonalidade em relação ao produto interno, dado pela eq.(4.12), é equivalente à ortogonalidade em relação ao produto interno

$$\langle S_1, S_2 \rangle = \int S_1(\theta, \varphi) \overline{S_2(\theta, \varphi)} (\sen \theta_1)^{n-2} \dots (\sen \theta_{n-2})^2 d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\varphi \quad (4.16)$$

para a parte angular e ao produto interno

$$\langle R_1, R_2 \rangle = \int R_1(x) \overline{R_2(x)} \sen^{n-1} x dx \quad (4.17)$$

para a parte radial.

As soluções ortogonais da parte angular são bem conhecidas [15], elas existem somente para $\lambda_1 = -l(l+n-2)$ e podem ser tomadas como combinação linear do par

$$S_{\pm}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) \propto e^{\pm i l_0 \varphi} \prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{l_k-1} C_{l_k-l_{k-1}}^{\frac{2l_{k-1}+k}{2}}(\cos \theta_k) \quad (4.18)$$

onde, $n = 3, 4, 5, \dots$ é a dimensão da parte espacial do espaço-tempo de Robertson-Walker, $l_k = 0, 1, 2, \dots$, são tais que $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_{n-2}$, $C_{\nu}^{\mu}(x)$ são os polinômios de Gegenbauer, isto é, são soluções da eq.(B.3), e denotamos $l_{n-2} = l$.

Nas duas próximas seções consideraremos a solução das equações radial e temporal, isto é, eq.(4.14) e eq.(4.15), respectivamente.

4.2 A equação radial

Uma vez determinada a constante de separação $\lambda_1 = -l(l+n-2)$, passamos a considerar a parte radial da equação de Klein-Gordon generalizada, eq.(4.14). Impomos a condição que estas soluções sejam ortogonais em relação ao produto interno dado pela eq.(4.17), isto é, se

$$\frac{d^2}{dx^2} R_1(x) + (n-1) \frac{\cos x}{\text{sen } x} \frac{d}{dx} R_1(x) + \frac{\lambda_1}{\text{sen}^2 x} R_1(x) = \Lambda_1 R_1,$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2} R_2(x) + (n-1) \frac{\cos x}{\text{sen } x} \frac{d}{dx} R_2(x) + \frac{\lambda_1}{\text{sen}^2 x} R_2(x) = \Lambda_2 R_2$$

com $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ devemos ter

$$\int R_1(x) \overline{R_2(x)} (\text{sen } x)^{n-1} dx = 0.$$

Supondo $\Lambda_1 \neq 0$, podemos escrever a equação acima como

$$\int \left(\frac{d^2}{dx^2} R_1(x) + (n-1) \frac{\cos x}{\text{sen } x} \frac{d}{dx} R_1(x) + \frac{\lambda_1}{\text{sen}^2 x} R_1(x) \right) \overline{R_2(x)} (\text{sen } x)^{n-1} dx = 0.$$

Valendo-se da equação para $R_2(x)$ e da condição de ortogonalidade obtemos

$$\int \left[\frac{d}{dx} \left((\text{sen } x)^{n-1} \frac{d}{dx} R_1(x) \right) \overline{R_2(x)} - \frac{d}{dx} \left((\text{sen } x)^{n-1} \frac{d}{dx} \overline{R_2(x)} \right) R_1(x) \right] dx = 0$$

da qual, integrando por partes, obtemos para o caso $k > 0$

$$(\text{sen } x)^{n-1} \left(\frac{d}{dx} R_1(x) \overline{R_2(x)} - R_1(x) \frac{d}{dx} \overline{R_2(x)} \right) \Big|_0^{\pi} = 0 \quad (4.19)$$

que é satisfeita exigindo-se regularidade da solução radial em $x = 0$ e $x = \pi$. No caso $k < 0$, temos a seguinte condição

$$(\sinh x)^{n-1} \left(\frac{d}{dx} R_1(x) \overline{R_2(x)} - R_1(x) \frac{d}{dx} \overline{R_2(x)} \right) \Big|_0^\infty = 0. \quad (4.20)$$

Consideremos agora as soluções da equação radial eq.(4.14) para os casos $k > 0$ e $k < 0$.

4.2.1 Caso $k > 0$

Escrevemos novamente a equação radial abaixo

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) + (n-1) \frac{\cos x}{\sin x} \frac{d}{dx} R(x) - \frac{l(l+n-2)}{\sin^2 x} R(x) - \lambda_2 R(x) = 0. \quad (4.14)$$

Introduzimos a mudança de variável independente

$$y = \cos x, \quad (4.21)$$

e a mudança de variável dependente

$$R(y) = (1-y^2)^l U(y), \quad (4.22)$$

obtemos a seguinte equação

$$(1-y^2) \frac{d^2}{dy^2} U(y) - (2l+n)y \frac{d}{dy} U(y) - [l(l+n-1) + \lambda_2] U(y) = 0. \quad (4.23)$$

Esta equação pode ser identificada com a equação de Gegenbauer, isto é, a eq.(B.3). Logo, escrevendo

$$\lambda_2 = -s(s+n-1), \quad (4.24)$$

a solução regular em $-1 \leq y \leq 1$ é dada por

$$U(y) = C_{s-l}^{\frac{2l+n-1}{2}}(y)$$

com $s = 0, 1, 2, \dots$ e $l \leq s$.

Finalmente, observando as mudanças de variáveis introduzidas pelas eq.(4.21) e eq.(4.22) obtemos, a solução regular da chamada equação radial, isto é, eq.(4.14), para $k > 0$

$$R(x) = (\sin x)^l C_{s-l}^{\frac{2l+n-1}{2}}(\sin x) \quad (4.25)$$

e

$$\lambda_2 = -s(s + n - 1), \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots \quad l \leq s. \quad (4.26)$$

Vale ainda mencionar que tomando $\rho = \tan x$ e $n = 3$ na equação radial, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{d\rho^2} R(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} R(\rho) - \left[\frac{l(l+1)}{\rho^2(1+\rho^2)} + \frac{\lambda_2}{(1+\rho^2)^2} \right] R(\rho) = 0, \quad (4.27)$$

com $\lambda_2 \rightarrow \lambda(\lambda + 2)$ é a equação, a partir da qual foram introduzidos os polinômios $E_n^l(\rho)$ e $G_n^l(\rho)$ no estudo do potencial generalizado no espaço-tempo de de Sitter [19, 18].

4.2.2 Caso $k < 0$

Consideremos a equação radial para este caso

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) + (n-1) \frac{\cosh x}{\sinh x} \frac{d}{dx} R(x) - \frac{l(l+n-2)}{\sinh^2 x} R + \lambda_2 R(x) = 0. \quad (4.14)$$

Escrevemos, por conveniência, a constante de separação como

$$4\lambda_2 = \zeta^2 + (n-1)^2 \quad (4.28)$$

onde $n = 3, 4, \dots$ é a dimensão da parte espacial do espaço-tempo de Robertson-Walker e $\zeta \in \mathbb{C}$ é uma constante a determinar.

Introduzimos a seguinte mudança de variável dependente

$$R(x) = (\sinh x)^{\frac{2-n}{2}} S(x), \quad (4.29)$$

obtemos equação

$$\frac{d^2}{dx^2} S(x) + \frac{\cosh x}{\sinh x} \frac{d}{dx} S(x) - \frac{\mu^2}{\sinh^2 x} S(x) + \frac{\zeta^2 + 1}{4} S(x) = 0 \quad (4.30)$$

onde definimos

$$\mu = \frac{2l + n - 2}{2}. \quad (4.31)$$

Agora, introduzimos a mudança de variável independente

$$y = \cosh x, \quad (4.32)$$

obtemos a equação

$$(1 - y^2) \frac{d^2}{dy^2} S(y) - 2y \frac{d}{dy} S(y) - \frac{\mu^2}{1 - y^2} S(y) - \frac{\zeta^2 + 1}{4} S(y) = 0 \quad (4.33)$$

com $1 \leq y < \infty$.

Esta equação pode ser identificada com a equação de Legendre, eq.(B.4). Assim, a sua solução geral pode ser dada como

$$S_\sigma(y) = A \mathfrak{P}_\sigma^{-\mu}(y) + B \Omega_\sigma^{-\mu}(y) \quad (4.34)$$

onde A, B são constantes e denotamos

$$\sigma = \frac{i\zeta - 1}{2}. \quad (4.35)$$

Observamos ainda que, como $y \in \mathbb{R}$, as soluções da equação radial podem ser tomadas reais.

Consideramos agora a condição de contorno dada pela eq.(4.20), a qual se escreve, levando em conta a eq.(4.32) e a eq.(4.29), como

$$(1 - y^2) \left[\frac{d}{dy} S_{\sigma_1}(y) S_{\sigma_2}(y) - S_{\sigma_1}(y) \frac{d}{dy} S_{\sigma_2}(y) \right] \Big|_1^\infty = 0. \quad (4.36)$$

Agora, por [15] podemos escrever esta expressão como

$$y(\sigma_1 - \sigma_2) S_{\sigma_1}(y) S_{\sigma_2}(y) + (\sigma_2 + \mu) S_{\sigma_1}(y) S_{\sigma_2-1}(y) + (\sigma_1 + \mu) S_{\sigma_1-1}(y) S_{\sigma_2}(y) \Big|_1^\infty = 0. \quad (4.37)$$

Logo, somente o comportamento das funções de Legendre é o que importa para as condições de contorno. Por outro lado, as funções de Legendre podem ser escritas em termos das funções hipergeométricas como [32]:

$$\mathfrak{P}_\sigma^{-\mu}(y) = \frac{(y^2 - 1)^{\mu/2} y^{\sigma - \mu}}{2^\mu \Gamma(1 + \mu)} {}_2F_1 \left(\frac{\mu - \sigma}{2}, \frac{1 - \sigma + \mu}{2}; 1 + \mu; 1 - \frac{1}{y^2} \right), \quad (4.38)$$

$$\Omega_\sigma^{-\mu}(y) = \alpha (y^2 - 1)^{-\mu/2} y^{-1 - \sigma + \mu} {}_2F_1 \left(1 + \frac{\sigma - \mu}{2}, \frac{1 + \sigma - \mu}{2}; \frac{2\sigma + 3}{2}; \frac{1}{y^2} \right),$$

onde $\alpha = \frac{e^{-i\mu\pi} \sqrt{\pi} \Gamma(1 + \sigma - \mu)}{2^{1+\sigma} \Gamma(\sigma + 3/2)}$.

Isto mostra que

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} \mathfrak{P}_\sigma^{-\mu}(y) = 0$$

e

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} \Omega_\sigma^{-\mu}(y) = \infty,$$

logo, para que tenhamos satisfeita a condição de contorno, eq.(4.36), para $y \rightarrow 1^+$ devemos excluir as funções de Legendre de segunda espécie da solução da equação radial.

Resta ainda verificar a condição em $y \rightarrow \infty$, isto nos dará os valores possíveis do parâmetro σ .

Sabemos que a série hipergeométrica ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z)$ converge (condicionalmente) sobre toda a circunferência $z\bar{z} = 1$, desde que $\Re(\alpha + \beta - \gamma) > 1$. Aplicando eq.(4.38), segue que as funções hipergeométricas que comparecem na eq.(4.37) convergem em $1 \leq y < \infty$, desde que $\Re(\sigma) > -1/2$. Temos ainda, aplicando o critério de Raabe³, que estas funções hipergeométricas convergem quando $\Re(\sigma) = 1/2$, ou seja, as funções hipergeométricas que comparecem na eq.(4.37) são limitadas para $y \rightarrow \infty$ desde que $\Re(\sigma) \geq 1/2$. Por outro lado, estas funções hipergeométricas possuem como fatores

$$f_\pm(y) = (y^2 - 1)^\mu y^{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\mu \pm 1},$$

logo para que $f_\pm(y) \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$, devemos ter $\Re(\sigma) \leq -1/2$. Assim a condição em $y \rightarrow \infty$ é satisfeita somente quando $\Re(\sigma) = -1/2$. Portanto, pela eq.(4.35), $\zeta \in \mathbb{R}$, o que implica que

$$\lambda_2 \geq \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \quad (4.39)$$

e assim podemos escrever

$$R(x) = (\sinh x)^{\frac{2-n}{2}} \mathfrak{P}_{i\zeta-1/2}^{-\mu}(\cosh x). \quad (4.40)$$

para a solução procurada da eq.(4.14).

4.3 A equação temporal

4.3.1 Caso $k > 0$

Já que a constante de separação está determinada, isto é, $\lambda_2 = -s(s+n-1)$ para o caso $k > 0$, consideramos agora a eq.(4.15), a qual escrevemos novamente abaixo,

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) + n \frac{\sinh t}{\cosh t} \frac{d}{dt} T(t) + \frac{s(s+n-1)}{\cosh^2 t} T(t) + m^2 T(t) = 0. \quad (4.41)$$

³Dada a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, considere $\lim_{k \rightarrow \infty} k \left\{ \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| - 1 \right\} = q$, se $q > 1$ a série converge absolutamente, se $q < 1$ a série diverge.

Introduzimos a mudança de variável dependente

$$T(t) = (\cosh t)^{\frac{1-n}{2}} U(t), \quad (4.42)$$

obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} U(t) + \frac{\sinh t}{\cosh t} \frac{d}{dt} U(t) + \frac{\mu^2}{\cosh^2 t} U(t) + \frac{1-\nu^2}{4} U(t) = 0. \quad (4.43)$$

onde definimos

$$\mu = \frac{2s + n - 1}{2} \quad \text{e} \quad \nu = \sqrt{n^2 - 4m^2}. \quad (4.44)$$

Introduzindo, agora, a mudança de variável independente

$$u = \sinh t, \quad (4.45)$$

obtemos

$$(1 + u^2) \frac{d^2}{du^2} U(u) + 2u \frac{d}{du} U(u) + \frac{\mu^2}{1 + u^2} U(u) + \frac{1-\nu^2}{4} U(u) = 0. \quad (4.46)$$

Introduzimos mais uma mudança de variável dependente

$$U(u) = \left(\frac{u+i}{u-i} \right)^{\frac{\mu}{2}} V(u) \quad (4.47)$$

obtemos

$$(1 + u^2) \frac{d^2}{du^2} V(u) + 2(u - i\mu) \frac{d}{du} V(u) + \frac{1-\nu^2}{4} V(u) = 0. \quad (4.48)$$

e finalmente considerando

$$z = \frac{1 - iu}{2} \quad (4.49)$$

obtemos a seguinte equação diferencial

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} V(z) + (1 + \mu - 2z) \frac{d}{dz} V(z) - \frac{1-\nu^2}{4} V(z) = 0, \quad (4.50)$$

que pode ser identificada com a equação hipergeométrica, isto é, a eq.(B.1). Portanto, uma solução pode ser dada em termos da função hipergeométrica na seguinte forma

$$V(z) = {}_2F_1 \left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1+\mu; z \right). \quad (4.51)$$

Levando em conta as mudanças de variáveis, isto é, eq.(4.47) e eq.(4.49) temos que

$$U_+(u) = \left(\frac{u+i}{u-i} \right)^{\mu/2} {}_2F_1 \left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1+\mu; \frac{1-iu}{2} \right) \quad (4.52)$$

é uma solução da equação diferencial eq.(4.46). A partir da relação

$$\frac{u+i}{u-i} = e^{2i \arctan u}$$

e observando que a eq.(4.46) é invariante por conjugação complexa, segue que

$$U_-(u) = \overline{U_+(u)}$$

é também sua solução. Assim, temos que o par

$$U_{\pm}(u) = e^{\pm i \mu \arctan u} {}_2F_1 \left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1+\mu; \frac{1 \pm iu}{2} \right) \quad (4.53)$$

é base para solução geral da equação temporal. Estas soluções foram as mesmas obtidas em [10], e conforme observado, são análogas às soluções de frequência positiva(U_+) e de frequência negativa(U_-) para a equação clássica de Klein-Gordon.

Observando agora as mudanças de variáveis, eq.(4.42) e eq.(4.45), temos que uma base para a solução geral da chamada equação temporal, eq.(4.41), é dada por

$$T_{\pm}(t) = (\cosh t)^{\frac{1-n}{4}} U_{\pm}(\sinh t). \quad (4.54)$$

Alternativamente, podemos expressar a solução da equação temporal em termos das funções de Legendre. Para isso introduzimos a seguinte mudança de variável

$$\sinh t = \tan \eta \quad (4.55)$$

na eq.(4.41) e obtemos

$$\frac{d^2}{d\eta^2} T(\eta) + (n-1) \frac{\sen \eta}{\cos \eta} \frac{d}{d\eta} T(\eta) + \frac{m^2}{\cos^2 \eta} T(\eta) + s(s+n-1) T(\eta) = 0. \quad (4.56)$$

Introduzimos a mudança de variável dependente

$$T(\eta) = \cos^{n/2} \eta U(\eta), \quad (4.57)$$

obtemos a equação

$$\frac{d^2}{d\eta^2} U(\eta) - \frac{\sen \eta}{\cos \eta} U(\eta) - \frac{\nu^2}{4 \cos^2 \eta} U(\eta) + \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) U(\eta) = 0 \quad (4.58)$$

onde ν e μ são dados na eq.(4.44). Introduzimos, finalmente, a mudança de variável independente

$$z = \text{sen } \eta \quad (4.59)$$

e obtemos a seguinte equação diferencial

$$(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} U(z) - 2z \frac{d}{dz} U(z) - \frac{\nu^2}{4(1 - z^2)} U(z) + \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) U(z) = 0. \quad (4.60)$$

Esta equação pode ser diretamente indentificada com a equação de Legendre, isto é, a eq.(B.4). Levando-se em conta as mudanças de variáveis, eq.(4.57) e eq.(4.59), temos que a solução geral da eq.(4.56) é dada como combinação linear do par

$$U_1(z) = P_{\nu/2}^{\mu-1/2}(z),$$

$$U_2(z) = Q_{\nu/2}^{\mu-1/2}(z).$$

Podemos ainda tomar o par de soluções linearmente independente da eq.(4.60) como

$$U_{\pm}(z) = U_1(z) \pm \frac{2i}{\pi} U_2(z). \quad (4.61)$$

Assim, o par

$$T_{\pm}(\eta) = \cos^{n/2} \eta \left[P_{\nu/2}^{\mu-1}(\text{sen } \eta) \pm \frac{2i}{\pi} Q_{\nu/2}^{\mu-1}(\text{sen } \eta) \right] \quad (4.62)$$

é base para a solução geral da eq.(4.56). Estas são as soluções apresentadas para o caso particular de $n = 3$ por [42] e mais recentemente por [3, 16].

4.3.2 Caso $k < 0$

A equação temporal para o caso $k < 0$ é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t) - n \frac{\text{sen } t}{\cos \tau} \frac{d}{dt} T(t) - \frac{\zeta^2 + (n-1)^2}{4 \cos^2 t} T(t) - m^2 T(t) = 0. \quad (4.63)$$

Esta equação é obtida formalmente da equação temporal para o caso $k > 0$ mediante a identificação

$$t \rightarrow it \quad \text{e} \quad s \rightarrow \frac{1 - n + 2i\zeta}{2}, \quad (4.64)$$

logo, a solução da equação temporal no caso $k < 0$ pode ser dada através da solução da equação temporal no caso $k > 0$ com as identificações acima, ou seja,

$$T_{\pm}(t) = (\cos t)^{\frac{1-n}{4}} U_{\pm}(i \operatorname{sen} t) \quad (4.65)$$

é base para a solução de eq.(4.63), onde as funções U_{\pm} são dadas pela eq.(4.53).

Podemos ainda obter a solução da equação temporal de uma outra forma. Para isto introduzimos, a seguinte mudança de variável

$$u = \operatorname{sen} t \quad (4.66)$$

na eq.(4.63) e obtemos

$$(1 - u^2) \frac{d^2}{du^2} T(u) - (n - 1) \frac{d}{du} T(u) + \frac{\zeta^2 + (n - 1)^2}{4(1 - u^2)} T(u) - m^2 T(u) = 0. \quad (4.67)$$

Introduzimos agora a mudança de variável dependente

$$T(u) = (1 - u^2)^{\frac{1-n}{4}} U(u) \quad (4.68)$$

e obtemos

$$(1 - u^2) \frac{d^2}{du^2} U(u) - 2 \frac{d}{du} U(u) + \frac{\zeta^2}{1 - u^2} U(u) + \frac{n^2 - 1 - m^2}{4} U(u) = 0. \quad (4.69)$$

Esta equação pode ser identificada com a equação de Legendre, eq.(B.4). Assim, levando em conta as mudanças de variáveis, eq.(4.66) e eq.(4.68), a solução geral da eq.(4.63), pode ser dada como combinação linear do par

$$\begin{aligned} T_1(t) &= (\cos t)^{\frac{n-1}{2}} P_{(\nu-1)/2}^{i\zeta}(\operatorname{sen} t) \\ T_2(t) &= (\cos t)^{\frac{n-1}{2}} Q_{(\nu-1)/2}^{i\zeta}(\operatorname{sen} t). \end{aligned} \quad (4.70)$$

O par de soluções linearmente independentes da eq.(4.69) pode ser tomado como na eq.(4.61), e assim, finalmente, obtemos o par

$$T_{\pm}(t) = (\cos t)^{\frac{n-1}{2}} \left[P_{(\nu-1)/2}^{i\zeta}(\operatorname{sen} t) \pm \frac{2i}{\pi} Q_{(\nu-1)/2}^{i\zeta}(\operatorname{sen} t) \right] \quad (4.71)$$

para a solução da equação temporal no caso $k < 0$.

4.4 Solução geral

Com isto, temos obtido as soluções da equação de Klein-Gordon generalizada no espaço-tempo de Robertson-Walker. Conforme havíamos imposto no início, estas soluções constituem um conjunto ortogonal em relação ao produto interno dado pela eq.(4.12). Mostramos que no caso $k > 0$, estas soluções constituem um conjunto discreto, enquanto no caso $k < 0$ um conjunto contínuo. Mais precisamente, as soluções ψ da equação de Klein-Gordon generalizada são dadas, no caso $k > 0$, por

$$\psi \propto T(t) (\text{sen } x)^l C_{s-l}^{(2l+n-1)/2} (\text{sen } x) \left(\prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{l_{k-1}} C_{l_k-l_{k-1}}^{\frac{2l_{k-1}+k}{2}} (\cos \theta_k) \right) e^{\pm i l_0 \varphi}$$

sendo $l_0, \dots, l_{n-3}, l, s = 0, 1, 2, 3 \dots$ e $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_{n-3} \leq l \leq s$.

Enquanto que, no caso $k < 0$, são dadas por

$$\psi \propto T(t) (\text{senh } x)^{\frac{2-n}{2}} \mathfrak{P}_{i\zeta-1/2}^{-(2l+n-1)/2} (\cosh x) \left(\prod_{k=1}^{n-2} (\text{sen } \theta_k)^{l_{k-1}} C_{l_k-l_{k-1}}^{\frac{2l_{k-1}+k}{2}} (\cos \theta_k) \right) e^{\pm i l_0 \varphi}$$

sendo $l_0, \dots, l_{n-3}, l = 0, 1, 2, 3 \dots$, $\zeta \in \mathbb{R}$ e $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_{n-3} \leq l$ e, em ambos os casos, $T(t)$ são combinações lineares do par de soluções da respectiva equação temporal.

4.5 Invariância conforme

Uma outra forma de generalizar a equação de Klein-Gordon a um espaço-tempo $(n+1)$ -dimensional é dado pelo método intrínseco da geometria riemanniana. Apesar deste método ser mais geral que o da teoria de grupos, este último tem a vantagem de tornar explícito o grupo das isometrias do espaço-tempo, em questão. Nesta seção apresentamos a equação de Klein-Gordon dada via geometria riemanniana, onde tomamos como referências [6, 44], e como veremos adiante os dois métodos se equivalem para o espaço-tempo de Robertson-Walker.

Considere \mathcal{M} um espaço-tempo $(n+1)$ -dimensional e métrica

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^n g_{ab}(x) dx^a dx^b$$

com assinatura $(1, n)$.

A equação de Klein-Gordon generalizada em \mathcal{M} é dada por

$$\sum_{a,b=0}^n g^{ab}(x) \nabla_a \nabla_b \psi(x) + [m^2 + \xi R(x)] \psi(x) = 0 \quad (4.72)$$

onde $m = m_0/\hbar$, $R(x)$ é o escalar de Ricci e $\xi \in \mathbb{R}$ é o fator que faz acoplamento do campo escalar $\psi(x)$ com o campo gravitacional. Em termos das componentes da métrica temos

$$\sum_{a,b=0}^n g^{ab}(x) \nabla_a \nabla_b \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{a,b=0}^n \frac{\partial}{\partial x^a} \sqrt{g(x)} g^{ab}(x) \frac{\partial}{\partial x^b} \psi(x),$$

onde denotamos $g(x) = |\det g_{ab}(x)|$. Existem dois valores de interesse para ξ . O caso $\xi = 0$, chamado de acoplamento mínimo e o caso chamado de acoplamento conforme, em que $\xi = -\frac{n-1}{4n}$.

A seguir definimos o conceito de invariância conforme. Seja \mathcal{M} uma variedade com métrica g_{ab} . Se $\Omega : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, e $\Omega(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{M}$, então a métrica $\tilde{g}_{ab}(x) = (\Omega(x))^2 g_{ab}(x)$ é dita ser uma transformação conforme da métrica g_{ab} . Em geral uma transformação conforme não está associada às mudanças de coordenadas de \mathcal{M} .

Uma equação para o campo $\psi(x)$ em \mathcal{M} é dita ser invariante conforme se existir $\alpha \in \mathbb{R}$, chamado o peso conforme de $\psi(x)$, tal que se $\psi(x)$ é solução da equação com a métrica g_{ab} então $\tilde{\psi}(x) = \Omega(x)^\alpha \psi(x)$ é solução da mesma equação com a métrica $\tilde{g}_{ab}(x) = (\Omega(x))^2 g_{ab}(x)$.

O caso de acoplamento conforme para a eq.(4.72), é particularmente interessante, pois a equação é invariante conforme para $m = 0$ e $\psi(x)$ tem peso conforme $\alpha = -(n+1)/2$.

Para a métrica de Robertson-Walker dada pela eq.(4.8), temos que $\sum_{a,b=0}^n g^{ab}(x) \nabla_a \nabla_b$ coincide com \mathcal{E}_2 , dado pelo lado esquerdo da eq.(4.11), logo tanto o método intrínseco quanto o método grupal são equivalentes no caso de acoplamento mínimo. Temos ainda, para o escalar de Ricci, $R = -n(n+1)k$, assim tomando $m^2 \rightarrow m^2 + \frac{n^2-1}{4}k$, a equação de Klein-Gordon generalizada, dada pela eq.(4.11) também é invariante conforme, para $m = 0$.

Capítulo 5

Espinores e as matrizes da álgebra de Clifford

Introdução

Neste capítulo apresentamos uma introdução aos espinores e as matrizes associadas às chamadas álgebras de Clifford, particularmente aquelas associadas aos espaços vetoriais $\mathbb{R}_{(3,0)}$, $\mathbb{R}_{(1,3)}$ e $\mathbb{R}_{(1,4)}$.

5.1 A álgebra de Clifford e as matrizes Γ

Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}_{(r,s)}$ com $r + s = n$. Consideremos ainda n matrizes complexas $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, de ordem $N \times N$, que satisfazem a seguinte equação, chamada equação de Clifford-Dirac,

$$\Gamma_a \Gamma_b + \Gamma_b \Gamma_a = 2\epsilon_a \delta_{ab} \mathbf{1} \quad (5.1)$$

onde $a, b = 1, 2, \dots, n$, $\epsilon_a \delta_{ab}$ é a métrica de $\mathbb{R}_{(r,s)}$, ou seja, $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_r = 1$ e $\epsilon_{r+1} = \dots = \epsilon_n = -1$ e $\mathbf{1}$ é a matriz identidade.

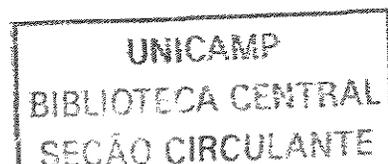
As matrizes Γ_a de ordem $N \times N$, onde

$$N = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{se } n \text{ é par,} \\ 2^{(n-1)/2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

são as matrizes de menor ordem que satisfazem a eq.(5.1), [33].

A álgebra associativa gerada pelas matrizes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ é chamada a álgebra de Clifford associada a $\mathbb{R}_{(r,s)}$.

As matrizes Γ também carregam uma representação de $\mathfrak{so}(r, s)$. Para ver isto, tomemos



$$\Sigma_{ab} = \frac{1}{4}[\Gamma_a, \Gamma_b],$$

valendo-se da eq.(5.1), temos

$$[\Sigma_{ab}, \Gamma_c] = \epsilon_b \delta_{bc} \Gamma_a - \epsilon_a \delta_{ac} \Gamma_b. \quad (5.2)$$

Pela indentidade de Jacobi temos

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \frac{1}{4}[\Sigma_{ab}, [\Gamma_c, \Gamma_d]] = \frac{1}{4}([\Sigma_{ab}, \Gamma_c], \Gamma_d] + [\Gamma_c, [\Sigma_{ab}, \Gamma_d]] \quad (5.3)$$

da qual resulta, aplicando a eq.(5.2),

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \epsilon_b \delta_{bc} \Sigma_{ad} - \epsilon_a \delta_{ac} \Sigma_{bd} + \epsilon_a \delta_{ad} \Sigma_{bc} - \epsilon_b \delta_{bd} \Sigma_{ac}$$

que é a mesma que a eq.(3.8).

Para finalizar esta seção apresentamos as matrizes associadas as álgebras de Clifford para os casos de interesse no que segue.

1- Grupo $\text{SO}(3)$

As matrizes que satisfazem eq.(5.1) para $\epsilon_i = 1$, $i = 1, 2, 3$ podem ser tomadas como

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

estas são as chamadas matrizes de Pauli.

2- Grupo $\text{SO}_+(1, 3)$

As matrizes que satisfazem a eq.(5.1) para $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_j = -1$, $j = 1, 2, 3$ podem ser tomadas como

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } j = 1, 2, 3. \quad (5.5)$$

Estas representam a forma usual das chamadas matrizes de Dirac, [14].

3- Grupo $\text{SO}_+(1, 4)$

As matrizes que satisfazem a eq.(5.1) com $\epsilon_0 = +1$, $\epsilon_4 = \epsilon_j = -1$, $j = 1, 2, 3$, podem ser tomadas como

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= \begin{bmatrix} 0 & i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \\
 \Gamma_j &= \begin{bmatrix} -i\sigma_j & 0 \\ 0 & i\sigma_j \end{bmatrix} \quad \text{onde } j = 1, 2, 3, \\
 \Gamma_4 &= \begin{bmatrix} 0 & i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Em relação as matrizes de Dirac dadas acima temos as seguintes relações

$$\Gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \Gamma_4\Gamma_0 = \gamma_0, \quad \Gamma_4\Gamma_j = -\gamma_j. \tag{5.7}$$

5.2 Representação espinorial de $SO(3)$

Nesta seção estabeleceremos a representação espinorial do grupo $SO(3)$ através do grupo $SU(2)$. Lembramos que $SO(3)$ é formado pelas matrizes reais A de ordem 3×3 , que preservam a forma quadrática em $\mathbb{R}_{(3,0)}$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2,$$

tal que $\det A = 1$.

Conforme visto na eq.(3.6), $\mathfrak{so}(3)$ é gerada por 3 matrizes anti-simétricas, as quais podem ser tomadas como

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esta base de $\mathfrak{so}(3)$ é compatível com a parte espacial do grupo de Fantappiè- de Sitter, e temos a seguinte regra de comutação

$$[R_i, R_j] = \varepsilon_{ijk}R_k,$$

onde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (ijk) \text{ é uma permutação par de } (123) \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ é uma permutação ímpar de } (123) \\ 0 & \text{se } (ijk) \text{ não são todos distintos.} \end{cases}$$

Já o grupo $SU(2)$ é formado pelas matrizes complexas B de ordem 2×2 que preservam a forma quadrática em \mathbb{C}^2 ,

$$\overline{z^1}z^1 + \overline{z^2}z^2,$$

tal que $\det B = 1$. A álgebra de Lie de $SU(2)$ é denotada por $\mathfrak{su}(2)$. Verifica-se que $M \in \mathfrak{su}(2)$ se $M^\dagger = -M$ e $\text{tr}(M) = 0$, onde $M^\dagger = \overline{M}^{top}$. O conjunto das matrizes

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i/2 \\ -i/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

é uma base para $\mathfrak{su}(2)$. Nesta base a regra de comutação de $\mathfrak{su}(2)$ é a mesma que $\mathfrak{so}(3)$, isto é,

$$[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k.$$

De um modo geral, temos o seguinte resultado [17]. Seja G um grupo de Lie com grupo de homotopia H e álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então existe exatamente um grupo de Lie simplesmente conexo \widehat{G} com a mesma álgebra de Lie \mathfrak{g} , e G é uma imagem homomorfa de \widehat{G} . Em verdade temos $G \cong \widehat{G}/D$ onde D é um dos subgrupos discretos invariante de \widehat{G} e \cong denota isomorfismo (local), e mais, $H \cong D$.

Sabemos que o grupo $SU(2)$ é simplesmente conexo e tem como subgrupo discreto invariante $D = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$. Por sua vez, o grupo $SO(3)$ tem $H \cong \mathbb{Z}_2$ como grupo de homotopia, logo $SO(3) \cong SU(2)/D$. Este isomorfismo é chamado de representação espinorial de $SO(3)$ em $SU(2)$. O grupo $SU(2)$ atua num espaço vetorial complexo 2-dimensional denotado por \mathfrak{S} e cujos elementos são os chamados espinores.

A seguir, estabeleceremos explicitamente o isomorfismo $SO(3) \cong SU(2)/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ para os geradores de $SO(3)$.

Consideremos inicialmente as matrizes de Pauli, dadas pela eq.(5.4). É interessante observar que $S_i = (-i/2)\sigma_i$, e portanto,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (5.9)$$

Temos também que

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{1}. \quad (5.10)$$

Seja $\Lambda = \lambda_j^i \in SO(3)$, escrevemos $\sigma'_j = \sum_{i=1}^3 \lambda_j^i \sigma_i$. Estas matrizes também satisfazem as eqs.(5.9) e (5.10). De fato, para a última equação temos

$$\sigma'_i\sigma'_j + \sigma'_j\sigma'_i = \sum_{k,l=1}^3 \lambda_i^k \lambda_j^l (\sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k) = 2\mathbb{1} \sum_{k,l=1}^3 \lambda_i^k \lambda_j^l \delta_{kl} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}.$$

Para mostrar que as matrizes σ' satisfazem a eq.(5.9), observamos inicialmente que é lícito escrever

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_k = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\sigma_k,$$

assim temos

$$[\sigma'_i, \sigma'_j] = \sum_{k,l=1}^3 \lambda_i^k \lambda_j^l [\sigma_k, \sigma_l] = \sum_{k,l,m=1}^3 \lambda_i^k \lambda_j^l \varepsilon_{klm} \sigma_m,$$

que pode ser escrita como

$$[\sigma'_i, \sigma'_j] = \sum_{k,l,m=1}^3 \sum_{n,p=1}^3 \lambda_i^k \lambda_j^l \lambda_p^m \lambda_p^n \varepsilon_{klm} \sigma_m = \sum_{k,l,n,p=1}^3 \lambda_i^k \lambda_j^l \lambda_p^n \varepsilon_{klm} \sigma'_p$$

pois $\sum_{p=1}^n \lambda_p^m \lambda_p^n = \delta_{mn}$.

Para toda matriz $\Lambda = \lambda_i^j$ de ordem 3×3 , é válida a seguinte identidade

$$\varepsilon_{ijk} \det \Lambda = \sum_{l,m,n=1}^3 \varepsilon_{lmn} \lambda_i^l \lambda_j^m \lambda_k^n,$$

de modo que para $\Lambda \in SO(3)$, temos

$$\varepsilon_{ijp} = \sum_{k,l,n=1}^3 \varepsilon_{klm} \lambda_i^k \lambda_j^l \lambda_p^n,$$

e portanto,

$$[\sigma'_i, \sigma'_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma'_k.$$

Como as matrizes $S_i = (-1/2)\sigma_i$ formam uma base de $\mathfrak{su}(2)$, segue que as matrizes σ'_i estão relacionadas com as matrizes de Pauli por uma transformação de semelhança, isto é, temos para cada $\Lambda = \lambda_j^i \in SO(3)$ uma matriz, em geral complexa, $S = S(\Lambda)$ de ordem 2×2 , tal que

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_j^i \sigma_i = S \sigma_j S^{-1}, \quad (5.11)$$

onde sem perda de generalidade podemos considerar $\det S = 1$.

Para explicitar estas matrizes, consideremos inicialmente uma rotação infinitesimal no plano (x^1, x^2) . Nesta situação temos

$$\Lambda = \mathbb{1} + \delta\varphi R_3.$$

Podemos tomar

$$S(\Lambda) = \mathbb{1} + \delta S_3, \quad \delta S_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

de onde temos ainda $S(\Lambda)^{-1} = \mathbb{1} - \delta S_3$. Assim, resulta da eq.(5.11) que

$$\begin{cases} 2ia & = & \delta\varphi \\ b - c & = & 0 \\ b + c & = & 0, \end{cases}$$

logo $\delta S_3 = -i(\delta\varphi/2)\sigma_3$.

Para uma rotação finita de um ângulo φ no plano (x^1, x^2) temos

$$S_3(\varphi) = e^{-i(\delta\varphi/2)\sigma_3} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Da mesma forma, para uma rotação infinitesimal $\delta\vartheta$ do plano (x^1, x^3) temos $\delta S_2 = -i(\delta\vartheta/2)\sigma_2$. Portanto, uma rotação finita de um ângulo ϑ corresponde a

$$S_2(\vartheta) = e^{-i(\delta\vartheta/2)\sigma_2} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta/2 & -\text{sen } \vartheta/2 \\ \text{sen } \vartheta/2 & \cos \vartheta/2 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Para uma rotação infinitesimal $\delta\theta$ do plano (x^2, x^3) temos $\delta S_1 = -i(\delta\theta/2)\sigma_1$. Portanto, uma rotação finita de um ângulo θ corresponde a

$$S_1(\theta) = e^{-i(\delta\theta/2)\sigma_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta/2 & -i \text{sen } \theta/2 \\ -i \text{sen } \theta/2 & \cos \theta/2 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Finalmente, está claro que as matrizes $S_1, S_2, S_3 \in \text{SU}(2)$.

5.2.1 Representação geométrica dos espinores

Do mesmo jeito que podemos representar $\text{SO}(3)$ em $\text{SU}(2)$, os vetores de \mathbb{R}^3 podem ser representados em \mathfrak{S} . Para ver isto, consideremos $\kappa \in \mathfrak{S}$ e definimos

$$r_i = \kappa^\dagger \sigma_i \kappa, \quad (5.15)$$

para $\kappa' = S\kappa$, onde $S \in \text{SU}(2)$ temos

$$r'_i = (\kappa')^\dagger \sigma_i \kappa' = \kappa^\dagger S^\dagger \sigma_i S \kappa = \kappa^\dagger S^{-1} \sigma_i S \kappa$$

pela eq.(5.11) e escrevendo $\hat{\lambda}_i^j = \Lambda(S^{-1})$, temos

$$r'_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\lambda}_i^j \kappa^\dagger \sigma_j \kappa, \quad r'_i = \sum_{j=1}^3 \hat{\lambda}_i^j r_j$$

logo $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ transforma-se como $\mathbf{r}' = \mathbf{r}\Lambda(S^{-1})$, mas $\Lambda(S^{-1}) = (\Lambda(S))^\top$, de onde segue que $\mathbf{R}^\top = (r_1, r_2, r_3)$ se transforma como um vetor, ou seja, $\mathbf{R}' = \Lambda(S)\mathbf{R}$.

A eq.(5.15) mostra que \mathbf{R} é invariante por

$$\kappa \rightarrow e^{i\theta} \kappa. \quad (5.16)$$

Para reduzir esta ambiguidade introduzimos

$$m_i = \kappa^\top \epsilon \sigma_i \kappa, \quad \text{onde} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que, para $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ com $\det A \neq 0$ tem-se $\epsilon A^\top \epsilon / \det A = -A^{-1}$, e que $\epsilon \epsilon = -\mathbf{1}$. De forma análoga a \mathbf{R} , verifica-se que \mathbf{M} , dado por $\mathbf{M}^\top = (m_1, m_2, m_3)$, também se transforma como um vetor; evidentemente o mesmo é válido para $\mathbf{K} = \Re(\mathbf{M})$ e $\mathbf{L} = \Im(\mathbf{M})$, onde $\Re(\mathbf{M})$ e $\Im(\mathbf{M})$ indicam a parte real e a parte imaginária de \mathbf{M} .

Em termos das componentes de $\kappa \in \mathfrak{S}$, $\kappa^\top = (\xi, \eta)$ temos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}\eta + \xi\bar{\eta} \\ -i(\bar{\xi}\eta - \xi\bar{\eta}) \\ \bar{\xi}\xi - \bar{\eta}\eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \xi^2 - \eta^2 \\ i(\xi^2 + \eta^2) \\ -2\xi\eta \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Destas expressões obtemos

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = (\bar{\xi}\xi + \bar{\eta}\eta)^2,$$

e

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{L} = 0.$$

Logo, $\kappa \neq 0$ define uma terna de vetores $(\mathbf{R}, \mathbf{K}, \mathbf{L})$ dois a dois ortogonais e de mesmo comprimento.

Mediante a multiplicação de κ por um fator de fase dado pela eq.(5.16), temos $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}' = e^{2i\theta} \mathbf{M}$. Escrevendo $\mathbf{M}' = \mathbf{K}' + i\mathbf{L}'$ segue então,

$$\mathbf{K}' = \cos 2\theta \mathbf{K} - \text{sen } 2\theta \mathbf{L}. \quad (5.18)$$

Assim podemos pensar em \mathbf{K}' como um vetor rodado de um ângulo -2θ em relação a \mathbf{K} no plano determinado por \mathbf{K} e \mathbf{L} , conforme fig.(5.1). Logo \mathbf{K}' retorna ao vetor

de partida \mathbf{K} quando $\theta = \pi$, e assim $\kappa \rightarrow -\kappa$ determina a mesma terna de vetores que κ . O par de vetores ortogonais (\mathbf{R}, \mathbf{K}) é comumente denominado de bandeira. Pelo que foi mostrado anteriormente cada bandeira é determinada por um único par de espinores $\pm\kappa$.

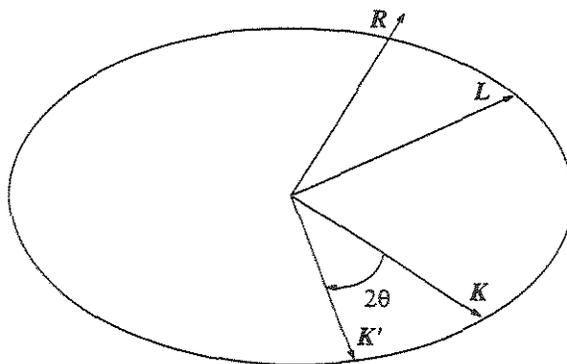


Figura 5.1: A representação de vetores por um espinor.

5.2.2 Espinores na esfera

Denotamos a base canônica de \mathfrak{S} por $\{\hat{o}, \hat{i}\}$. É interessante observar que

$$\sigma_3 \hat{o} = \hat{o} \quad \text{e} \quad \sigma_3 \hat{i} = -\hat{i}$$

e que esses espinores determinam, pela eq.(5.17), os vetores \mathbf{e}_3 e $-\mathbf{e}_3$. Por outro lado, as eq.(5.11) e eq.(5.12), mostram que uma rotação no plano (x^1, x^2) , deixa a matriz σ_3 invariante.

Isto indica que, girando a base de \mathbb{R}^3 de tal modo que o eixo \mathbf{e}_3 coincida com o vetor $\mathbf{e}_r = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$ a correspondente transformação irá gerar um campo de espinores na esfera. Uma forma de obter a rotação desejada é através dos ângulos de Euler.

Consideremos Π e Π' dois sistemas de coordenadas ortogonais de \mathbb{R}^3 com mesma origem e orientação, denotamos respectivamente seus eixos por (x, y, z) e (x', y', z') e indicamos por MN interseção dos planos (x, y) e (x', y') , esta é a chamada linha nodal. Para levar Π em Π' tomamos a seguinte seqüência de rotações, conforme a Fig.(5.2)

- $R_3(\chi)$ — Rotação no plano (x, y) de um ângulo χ .
- $R_2(\theta)$ — Rotação no plano (x, z) de um ângulo θ .

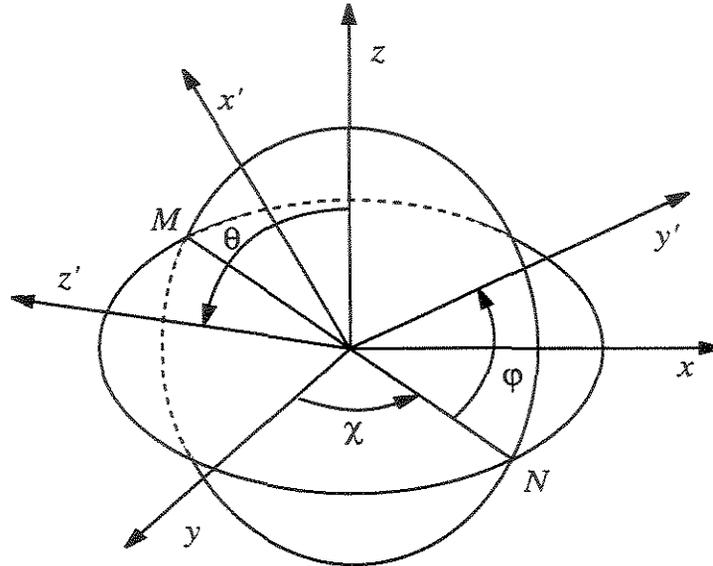


Figura 5.2: Ângulos de Euler.

- $R_3(\varphi)$ — Rotação no plano (x, y) de um ângulo φ .

Assim temos a seguinte rotação que leva Π em Π'

$$R = R_3(\varphi)R_2(\theta)R_3(\chi).$$

A esta rotação corresponde, a menos de um sinal, a transformação de $SU(2)$ dada por

$$S = S_3(\varphi)S_2(\theta)S_3(\chi);$$

e, das eq.(5.12), eq.(5.13) e eq.(5.14), obtemos

$$S = \begin{bmatrix} e^{-i(\chi+\varphi)/2} \cos \theta/2 & e^{i(\chi-\varphi)/2} \sen \theta/2 \\ e^{-i(\chi-\varphi)/2} \sen \theta/2 & e^{i(\chi+\varphi)/2} \cos \theta/2 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Escrevendo $\mathbf{o} = S\hat{\mathbf{o}}$ e $\mathbf{\iota} = S\hat{\mathbf{\iota}}$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= e^{-i\chi/2} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sen \theta/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{\iota} &= e^{i\chi/2} \begin{bmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sen \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \cos \theta/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O ângulo nodal χ comparece como um fator de fase em \mathbf{o} e $\mathbf{\iota}$, logo seu efeito é apenas girar as bandeiras determinadas por estes espinores. Sem perda de generalidade podemos tomar $\chi = 0$ e então temos

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{\iota} = \begin{bmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \cos \theta/2 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Observamos que para $\theta \rightarrow \theta + \pi$ temos $\mathbf{o} \rightarrow \mathbf{\iota}$ e $\mathbf{\iota} \rightarrow -\mathbf{o}$, e que $\{\mathbf{o}, \mathbf{\iota}\}$ é um conjunto linearmente independente e portanto é uma base para \mathfrak{S} na esfera. Temos ainda que \mathbf{o} determina os vetores

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta - i \sin \varphi \\ \sin \varphi \cos \theta + i \cos \varphi \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

ou seja, $\mathbf{R} = \mathbf{e}_r = \partial/\partial r$ e $\mathbf{M} = \mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi = 1/r(\partial/\partial\theta + i/\sin\theta\partial/\partial\varphi)$. Para $\mathbf{\iota}$ basta que tomemos $\theta \rightarrow \theta + \pi$, logo temos $\mathbf{R} = -\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{M} = -\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\varphi$.

5.3 Harmônicos esféricos com peso de espin

Lembramos que a mudança $\kappa' = e^{i\alpha}\kappa$, com $\kappa \in \mathfrak{S}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, induz uma rotação de um ângulo -2α no plano determinado por $(\Re(\mathbf{M}), \Im(\mathbf{M}))$, onde \mathbf{M} é dado pela eq.(5.17). Isto motiva a seguinte definição, [11].

Uma quantidade¹ η tem peso de espin s quando, para a mudança

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= e^{i\alpha/2}\mathbf{o} \\ \mathbf{\iota}' &= e^{-i\alpha/2}\mathbf{\iota} \end{aligned} \quad (5.23)$$

se transforma

$$\eta' = e^{is\alpha}\eta.$$

Decorre da definição que \mathbf{o} , $\mathbf{\iota}$, \mathbf{R} e \mathbf{M} têm pesos de espin $s = 1/2$, $s = -1/2$, $s = 0$ e $s = 1$, respectivamente. Já \mathbf{K} e \mathbf{L} não possuem peso de espin, pois com a mudança dada pela eq.(5.23), eles não obtemos estas quantidades multiplicada por um fator de fase $e^{is\alpha}$.

¹Escalar, vetor, espinor, etc.

Seguindo [11], um harmônico esférico de ordem j e peso de espin s é, por definição, uma função $\eta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\eta = \sum_{A \dots F} d_{AB \dots CDE \dots F} \underbrace{\mathfrak{o}^A \mathfrak{o}^B \dots \mathfrak{o}^C}_{j+s} \underbrace{\mathfrak{l}^D \mathfrak{l}^E \dots \mathfrak{l}^F}_{j-s} \quad (5.24)$$

onde $d_{AB \dots CDE \dots F}$ é totalmente simétrico em todos os seus $2j$ índices, os quais tomam os valores 0 e 1, e os espinores \mathfrak{o} e \mathfrak{l} estão definidos na esfera \mathbb{S}^2 e são dados pelas eq.(5.20) e eq.(5.21). Decorre da definição que o índice j pode ser um inteiro, ou semi-inteiro não negativo, ou seja, $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$, enquanto $s = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$. Indicamos por ${}_s P_j$ o conjunto dos harmônicos esféricos de ordem j e peso de espin s .

Para a transformação dada pela eq.(5.23), temos que $\eta \in {}_s P_j$ se transforma como

$$\eta' = e^{is\alpha} \eta,$$

ou seja, $\eta \in {}_s P_j$, de fato, tem peso de espin s .

Dado $\eta \in {}_s P_j$ podemos escrever de maneira única

$$\eta = \sum_{m=-j}^j d_{j,m} ({}_s Z_{j,m}),$$

onde $d_{j,m} = d_{\underbrace{00 \dots 0}_{j+m} \underbrace{11 \dots 1}_{j-m}} \in \mathbb{C}$, $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ e

$${}_s Z_{j,m} = \sum_u \binom{j+s}{u} \binom{j-s}{u+m-s} \alpha^{j+s-u} \beta^u \gamma^{u-s+m} \delta^{j-m-u} \quad (5.25)$$

onde $\max\{0, s - m\} \leq u \leq \min\{j + s, j - m\}$ e escrevemos as componente dos espinores $\mathfrak{o} = (\alpha, \beta)$ e $\mathfrak{l} = (\gamma, \delta)$.

Está claro que ${}_s Z_{j,m}$ também tem peso de espin s e forma uma base para ${}_s P_j$, o qual, portanto, é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} de dimensão $2j + 1$.

Introduzindo explicitamente as componentes \mathfrak{o} e \mathfrak{l} em ${}_s Z_{j,m}$, obtemos

$${}_s Z_{j,m} = (-1)^{m-s} e^{-im\varphi} (\cos \theta/2)^{2j} \sum_u (-1)^u \binom{j+s}{u} \binom{j-s}{u+m-s} (\tan \theta/2)^{m-s+2u}. \quad (5.26)$$

Evidentemente podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} ({}_s Z_{j,m}) = -im ({}_s Z_{j,m}). \quad (5.27)$$

Introduzimos agora os seguintes operadores $\tilde{\mathfrak{d}}$ e $\bar{\tilde{\mathfrak{d}}}$ definidos para $\eta \in {}_s P_j$, por

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\eta &= \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - s \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \eta, \\ \bar{\bar{\partial}}\eta &= \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + s \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \eta.\end{aligned}\quad (5.28)$$

A atuação em $\kappa \in \mathfrak{G}$ é definida componente por componente, em particular temos

$$\bar{\partial}\mathbf{o} = 0, \quad \bar{\partial}\boldsymbol{\iota} = -\mathbf{o}, \quad \bar{\bar{\partial}}\mathbf{o} = \boldsymbol{\iota}, \quad \bar{\bar{\partial}}\boldsymbol{\iota} = 0. \quad (5.29)$$

Decorre destas últimas equações que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}({}_s Z_{j,m}) &= (s-j)({}_{s+1} Z_{j,m}), \\ \bar{\bar{\partial}}({}_s Z_{j,m}) &= (s+j)({}_{s-1} Z_{j,m}),\end{aligned}\quad (5.30)$$

em particular, $\bar{\partial}({}_j Z_{j,m}) = 0$ e $\bar{\bar{\partial}}(-{}_j Z_{j,m}) = 0$.

Os operadores $\bar{\partial}$ e $\bar{\bar{\partial}}$ são operadores covariantes em \mathbb{S}^2 , [38]. São chamados de operadores de levantamento e abaixamento de espin, respectivamente.

Das eq.(5.30) segue imediatamente

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\partial}}\bar{\partial}({}_s Z_{j,m}) &= [-j(j+1) + s(s-1)]({}_s Z_{j,m}) \\ \bar{\partial}\bar{\bar{\partial}}({}_s Z_{j,m}) &= [-j(j+1) + s(s+1)]({}_s Z_{j,m})\end{aligned}\quad (5.31)$$

de onde resulta

$$(\bar{\partial}\bar{\bar{\partial}} - \bar{\bar{\partial}}\bar{\partial}){}_s Z_{j,m} = 2s({}_s Z_{j,m}). \quad (5.32)$$

Estas equações junto com a eq.(5.27) mostram que ${}_s Z_{j,m}$ é autofunção dos operadores $\mathcal{L}_s = \bar{\partial}\bar{\bar{\partial}}$ e $R_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ com autovalores $-(j-s)(j+s+1)$ e im , respectivamente.

Explicitamente, usando as expressões de $\bar{\partial}$ e $\bar{\bar{\partial}}$ em coordenadas esféricas, isto é, a eq.(5.28), temos, para $\eta \in {}_s P_j$,

$$\mathcal{L}_s \eta = \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + 2is \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{s^2}{\sin\theta} - s(s+1) \right] \eta$$

que, para $s = 0$ coincide com a parte angular do laplaciano. Logo $({}_0 Z_{j,m})$ são proporcionais aos harmônicos esféricos ordinários $Y_{j,m}(\theta, \varphi)$.

Tomamos

$${}_s Y_{j,m} = \sqrt{\frac{(2j+1)!(j+m)!(j-m)!}{4\pi(2j)!(j+s)!(j-s)!}} {}_s Z_{j,m} \quad (5.33)$$

exceto pelo sinal de φ temos os chamados harmônicos esféricos com peso de espin básicos definidos em [38]. Logo vale a igualdade

$$4\pi \langle {}_s Y_{j_1, m_1}, {}_s Y_{j_2, m_2} \rangle = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (5.34)$$

onde

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{f(\theta, \varphi)} g(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

ou seja, para cada valor de s dado, ${}_s Y_{j,m}$ forma um conjunto ortonormal de funções em \mathbb{S}^2 . Tem-se ainda que ${}_s Y_{j,m}$ é um conjunto completo.

Finalmente, observamos que das eq.(5.30) e eq.(5.33) seguem as equações

$$\begin{aligned} \partial({}_s Y_{j,m}) &= -\sqrt{(j+s+1)(j-s)} ({}_{s+1} Y_{j,m}) \\ \bar{\partial}({}_s Y_{j,m}) &= \sqrt{(j-s+1)(j+s)} ({}_{s-1} Y_{j,m}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Capítulo 6

A equação de Dirac generalizada

Introdução

Neste capítulo obtemos e discutimos a chamada equação de Dirac generalizada no espaço-tempo de Robertson-Walker, que, tal como a equação de Dirac clássica, é uma equação diferencial parcial de primeira ordem com quatro componentes. A equação de Dirac generalizada é obtida fatorando o operador de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappiè-de Sitter num produto de dois operadores de primeira ordem. Para isso empregamos as matrizes da álgebra de Clifford associadas ao grupo $SO_+(1, 4)$ dadas no capítulo anterior.

A equação de Dirac generalizada é escrita explicitamente em coordenadas estereográficas. Valendo-se dos harmônicos esféricos com peso de espin $s = \pm 1/2$, a parte angular é separada das partes radial e temporal. Escrevendo a equação resultante, um par de equações de primeira ordem nas variáveis radial e temporal, nas coordenadas esféricas dadas pela eq.(1.26), obtemos uma equação de segunda ordem separável equivalente ao sistema original.

As soluções das partes radial e temporal são consideradas separadamente para os caso $k > 0$ e $k < 0$.

6.1 A fatoração de \mathcal{L}_2

Consideremos \mathcal{M} o espaço de imersão do espaço-tempo de Robertson-Walker como dado no §3.2, isto é, com coordenadas $(X^0, X^1, X^2, X^3, X^4)$ e métrica $\epsilon_a \delta_{ab}$, onde $\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = -1$.

Introduzimos a seguinte notação

$$P^a = \epsilon^a \frac{\partial}{\partial X^a},$$

onde $\epsilon^a = 1/\epsilon_a$. Com isso os operadores diferenciais associados ao grupo de Fantappié-de Sitter, dados pela eq.(3.20), são escritos como

$$J^{ab} = X^a P^b - X^b P^a. \quad (3.20)$$

Observamos ainda que o operador de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappié-de Sitter, dado pela eq.(4.5), pode ser escrito da seguinte forma

$$2\mathcal{C}_2 = \sum_{a,b,c,d=0}^4 \epsilon_a \delta_{ac} \epsilon_b \delta_{bd} J^{ab} J^{cd}. \quad (4.5)$$

Assim temos

$$2\mathcal{C}_2 = \sum_{a,b,c,d=0}^4 \epsilon_a \delta_{ac} \epsilon_b \delta_{bd} (X^a P^b X^c P^d - X^a P^b X^d P^c + X^b P^a X^d P^c - X^b P^c X^c P^d).$$

Podemos considerar X^a e P^a como operadores atuando em funções, assim temos as seguintes regras de comutação

$$[X^a, X^b] = 0, \quad [P^a, P^b] = 0, \quad [X^a, P^b] = -\epsilon^a \delta^{ab}. \quad (6.1)$$

Aplicamos estas regras de comutação a cada um dos termos de \mathcal{C}_2 obtido anteriormente:

• Para $X^a P^b X^c P^d$.

Observamos que

$$\sum_{a,b,c,d=0}^4 \epsilon_a \delta_{ac} \epsilon_b \delta_{bd} \epsilon^b \delta^{bc} X^a P^d = \sum_{a,d=0}^4 \epsilon_a \delta_{ad} X^a P^d. \quad (6.2)$$

• Para $X^a P^b X^d P^c$.

Observamos que

$$\sum_{a,b,c,d=0}^4 \epsilon_a \delta_{ac} \epsilon_b \delta_{bd} \epsilon^b \delta^{bd} X^a P^c = 5 \sum_{a,c=0}^4 \epsilon_a \delta_{ac} X^a P^c. \quad (6.3)$$

A eq.(6.3) também se aplica ao terceiro termo bem como a eq.(6.2) se aplica ao último termo. Logo, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a X^b \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} P^a P^b - 4 \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b - \\ & \sum_{a,b,c,d=0}^4 \epsilon_a \delta_{ac} \epsilon_b \delta_{bd} X^a X^d P^c P^d. \end{aligned}$$

Aplicando, novamente, as regras de comutação dos operadores X^a e P^a ao último termo deste operador, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a X^b \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} P^a P^b + \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b \sum_{c,d=0}^4 \epsilon_c \delta_{cd} X^c P^d - \\ & 3 \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b, \end{aligned} \quad (6.4)$$

o qual, pode ainda ser escrito na seguinte forma

$$\mathcal{C}_2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle + \langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle^2 - 3 \langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle. \quad (6.4)'$$

Consideremos agora \mathfrak{S}^4 o campo diferenciável dos 4-espinores definidos em \mathcal{M} . Apesar de \mathfrak{S}^4 ter uma regra de transformação definida pela atuação do grupo de Fantappiè-de Sitter, esta não será considerada em nenhum momento no decorrer do trabalho, portanto podemos pensar em $\Psi \in \mathfrak{S}^4$ como simplesmente uma aplicação $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^4$, onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{bmatrix}, \quad \psi^i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ diferenciável.}$$

Definimos o operador $\mathcal{D} : \mathfrak{S}^4 \rightarrow \mathfrak{S}^4$ por

$$2\mathcal{D} = \sum_{a,b=0}^4 \Gamma_a \Gamma_b J^{ab} \quad (6.5)$$

onde Γ_a são as matrizes 4×4 dadas pela eq.(5.6), e portanto satisfazem a equação

$$\Gamma_a \Gamma_b + \Gamma_b \Gamma_a = 2\epsilon_a \delta_{ab} \mathbf{1}.$$

Desta equação e da eq.(3.20) resulta na seguinte expressão

$$\mathcal{D} = \sum_{a,b=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b - \mathbb{1} \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b. \quad (6.6)$$

Com isso temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 = & \sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b \Gamma_c X^c \Gamma_d P^d - \sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b g_{cd} X^c P^d - \\ & \sum_{a,b,c,d=0}^4 g_{ab} X^a P^b \Gamma_c X^c \Gamma_d P^d + \mathbb{1} \sum_{a,b=0}^4 g_{ab}. \end{aligned}$$

Consideremos separadamente cada termo do lado direito da equação acima:

- Para $\sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b \Gamma_c X^c \Gamma_d P^d$.

Observando a regra de comutação $[X^c, P^b] = -\epsilon^b \delta^{bc}$ bem como $\sum_{b,c=0}^4 \Gamma_b \Gamma_c \epsilon^b \delta^{bc} = 5\mathbb{1}$, temos

$$5 \sum_{a,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_d P^d + \sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b \Gamma_c X^c P^b \Gamma_d P^d,$$

introduzindo $\Gamma_b \Gamma_c = 2\epsilon_b \delta_{bc} \mathbb{1} - \Gamma_c \Gamma_b$ no último termo da expressão anterior obtemos

$$5 \sum_{a,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_d P^d + 2 \sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \epsilon_a \delta_{cb} X^c P^b \Gamma_d P^d - \sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_c X^c \Gamma_b P^b \Gamma_d P^d.$$

Para o último termo que comparece nesta expressão observamos que

$$\sum_{a,c=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_c X^c = \mathbb{1} \sum_{a,c} \epsilon_a \delta_{ac} X^a X^c, \quad \sum_{b,d=0}^4 \Gamma_b P^b \Gamma_d P^d = \mathbb{1} \sum_{b,d} \epsilon_b \delta_{bd} P^b P^d.$$

- Para $\sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b \epsilon_c \delta_{cd} X^c P^d$.

Valendo-se novamente da regra de comutação $[X^c, P^b] = -\epsilon^b \delta^{bc}$ e observando que $\sum_{c=0}^4 \epsilon_c \delta_{cd} \epsilon^b \delta^{bc} = \delta_{bd}$, obtemos

$$\sum_{a,b=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b + \sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_a X^a \epsilon_c \delta_{cd} X^c P^d \Gamma_b P^b.$$

- Para $\sum_{a,b,c,d=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b \Gamma_c X^c \Gamma_d P^d$.

De forma semelhante ao item anterior obtemos

$$\sum_{a,d=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_d P^d + \sum_{a,b,c,d=0}^4 \Gamma_c X^c \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b \Gamma_d P^d.$$

Com estes resultados podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= 3 \sum_{a,b=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b - \mathbb{1} \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a X^b \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} P^a P^b \\ &\quad - \mathbb{1} \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b, \end{aligned} \quad (6.7)$$

este, pode ainda, ser escrito na forma compacta,

$$\mathcal{D}^2 = 3 \sum_{a,b=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b - \mathbb{1} \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle - \mathbb{1} \langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle^2. \quad (6.7)'$$

Agora, comparando as eq.(6.7) e eq.(6.4), segue

$$\mathbb{1} \mathcal{C}_2 = -\mathcal{D}^2 + 3 \left(\sum_{a,b=0}^4 \Gamma_a X^a \Gamma_b P^b - \mathbb{1} \sum_{a,b=0}^4 \epsilon_a \delta_{ab} X^a P^b \right)$$

de onde, pela eq.(6.6), resulta na seguinte expressão para \mathcal{C}^2 em termos de \mathcal{D} ,

$$\mathbb{1} \mathcal{C}^2 = -\mathcal{D}^2 + 3\mathcal{D}. \quad (6.8)$$

Finalmente, observamos que pela eq.(4.3) temos $\mathbb{1} \mathcal{C}_2 \Psi = \lambda \Psi$. Tomamos

$$\lambda = \left(\frac{m_0}{\hbar \sqrt{k}} \right)^2 + i3 \frac{m_0}{\hbar \sqrt{k}}.$$

Denotando, tal como no Capítulo 4, $m = m_0 / \hbar \sqrt{k}$, temos, então

$$(\mathcal{D}^2 - 3\mathcal{D} + m^2 + i3m) \Psi = 0,$$

que, ainda pode ser escrita como

$$(\mathcal{D} + im - 3)(\mathcal{D} - im)\Psi = 0.$$

A equação

$$(\mathcal{D} - im)\Psi = 0 \tag{6.9}$$

é a chamada equação de Dirac generalizada no universo de Robertson-Walker. Vale ressaltar que esta foi a equação proposta originalmente por Dirac [12, 28] para a função de onda do elétron no espaço-tempo de de Sitter. Aqui este tipo de equação é também estendida para o espaço-tempo anti-de Sitter¹.

6.2 A equação de Dirac generalizada em coordenadas estereográficas

Nesta seção consideramos a equação de Dirac generalizada obtida anteriormente nas coordenadas estereográficas. Seguindo a notação do parágrafo anterior denotamos

$$p^\mu = \epsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{6.10}$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$, $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$, $\epsilon^\mu = 1/\epsilon_\mu$ e x^μ são as coordenadas estereográficas dadas pela eq.(2.3), escrevemos ainda

$$\Phi = 1 - k \sum_{\mu=0}^3 \frac{\epsilon_\mu (x^\mu)^2}{4}. \tag{6.11}$$

Assim, os operadores diferenciais dados pelas eq.(3.31), eq.(3.32), eq.(3.33) e eq.(3.34) são escritos como

$$J^{\mu\nu} = x^\nu p^\mu - x^\mu p^\nu \tag{6.12}$$

$$J^{\mu 4} = \frac{(2 - \Phi)}{\sqrt{k}} p^\mu - \sqrt{k} \frac{x^\mu}{2} \sum_{\nu=0}^3 \epsilon_\nu x^\nu p^\nu. \tag{6.13}$$

Introduzimos estes operadores na eq.(6.5) e valendo-se da eq.(6.11) obtemos

¹Poderíamos ter tomado $(\mathcal{D} + im - 3)\Psi = 0$ para a equação de Dirac generalizada, porém esta pode ser obtida da eq.(6.9) fazendo $m \rightarrow m + 3i$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\mu=0}^3 \Gamma_{\mu} \Gamma_4 p^{\mu} + \frac{\sqrt{k}}{4} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \epsilon_{\nu} (x^{\nu})^2 \Gamma_{\mu} \Gamma_4 p^{\mu} - \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Gamma_{\mu} \Gamma_4 x^{\mu} \epsilon_{\nu} x^{\nu} p^{\nu} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} x^{\mu} p^{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} x^{\nu} p^{\mu}. \end{aligned}$$

Observamos que

$$2 \sum_{\nu=0}^3 \epsilon_{\nu} x^{\nu} p^{\nu} = \sum_{\nu, \sigma=0}^3 (\Gamma_{\nu} \Gamma_{\sigma} + \Gamma_{\sigma} \Gamma_{\nu}) x^{\nu} p^{\sigma}$$

e que $\Gamma_4 \Gamma_{\mu} = -\Gamma_{\mu} \Gamma_4$, logo podemos escrever para o terceiro termo do lado direito da equação anterior

$$2 \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Gamma_{\mu} \Gamma_4 x^{\mu} \epsilon_{\nu} x^{\nu} p^{\nu} = - \sum_{\nu, \sigma=0}^3 \epsilon_{\nu} (x^{\nu})^2 \Gamma_{\sigma} \Gamma_4 p^{\sigma} + \Gamma_4 \sum_{\mu, \nu, \sigma=0}^3 \Gamma_{\mu} \Gamma_{\sigma} \Gamma_{\nu} x^{\mu} x^{\nu} p^{\sigma}$$

de onde segue

$$\mathcal{D} = \sum_{\mu=0}^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{k}} \Gamma_4 \Gamma_{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 (\Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu}) x^{\nu} + \frac{\sqrt{k}}{4} \sum_{\nu, \sigma=0}^3 \Gamma_{\nu} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\sigma} x^{\nu} x^{\sigma} \right) p^{\mu}.$$

Por sua vez, podemos escrever a expressão acima como

$$\mathcal{D} = \sum_{\mu=0}^3 \left[-\frac{1}{\sqrt{k}} \left(\mathbf{1} + \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\nu} \Gamma_4 \Gamma_{\nu} x^{\nu} \right) \Gamma_4 \Gamma_{\mu} \left(\mathbf{1} - \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\nu} \Gamma_4 \Gamma_{\nu} x^{\nu} \right) \right] p^{\mu}.$$

Introduzindo agora a matriz

$$V = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\nu} \Gamma_4 \Gamma_{\nu} x^{\nu}, \quad (6.14)$$

é fácil verificar que

$$V^{-1} = \frac{1}{\Phi} \left(\mathbf{1} - \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\nu} \Gamma_4 \Gamma_{\nu} x^{\nu} \right). \quad (6.15)$$

Assim, podemos escrever

$$\mathcal{D} = -\frac{\Phi}{\sqrt{k}} \sum_{\mu=0}^3 V \Gamma_4 \Gamma_\mu V^{-1} p^\mu. \quad (6.16)$$

Para simplificar esta expressão de \mathcal{D} , escrevemos

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\mu=0}^3 \Phi^2 \left(\mathbf{1} + \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\nu} \Gamma_4 \Gamma_\nu x^\nu \right) \Gamma_4 \Gamma_\mu \frac{1}{\Phi^2} \left(\mathbf{1} - \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\nu} \Gamma_4 \Gamma_\nu x^\nu \right) p^\mu.$$

Podemos considerar x^μ e p^μ como operadores atuando em Ψ , componente por componente. Assim, temos a regra de comutação $[x^\mu, p^\nu] = -\epsilon^{\mu\nu} \delta^{\mu\nu}$, da qual resulta

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\mu=0}^3 \Phi^2 V \Gamma_4 \Gamma_\mu \frac{1}{\Phi^2} p^\mu \frac{1}{\Phi} V^{-1} - 2 \left(\mathbf{1} + \frac{\sqrt{k}}{2} \sum_{\nu} \Gamma_4 \Gamma_\nu x^\nu \right).$$

Temos ainda $[\frac{1}{\Phi^2}, p^\mu] = -\frac{k}{\Phi^3} x^\mu$. Um cálculo direto mostra que

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\mu=0}^3 V \Gamma_4 \Gamma_\mu x^\mu \frac{1}{\Phi} V^{-1} = \frac{\sqrt{k}}{\Phi} \left(\sum_{\mu=0}^3 \Gamma_4 \Gamma_\mu x^\mu - \frac{k}{4} \sum_{\mu, \nu, \sigma=0}^3 \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_4 \Gamma_\sigma x^\mu x^\nu x^\sigma \right),$$

mas $\sum_{\mu, \nu=0}^3 \Gamma_\mu \Gamma_\nu x^\mu x^\nu = 4 \frac{1-\Phi}{k}$ e portanto o lado direito da equação acima se resume a $\sqrt{k} \sum_{\mu=0}^3 \Gamma_4 \Gamma_\mu x^\mu$.

Observamos agora que $\Phi^2 V = \Phi \left(\frac{1}{\Phi} V^{-1} \right)^{-1}$, logo podemos escrever

$$\mathcal{D} = -2\mathbf{1} - \frac{\Phi}{\sqrt{k}} \sum_{\mu=0}^3 \left(\frac{1}{\Phi} V^{-1} \right)^{-1} \Gamma_4 \Gamma_\mu p^\mu \left(\frac{1}{\Phi} V^{-1} \right). \quad (6.17)$$

Desta expressão e introduzindo a mudança de variável dependente

$$\Upsilon = \frac{1}{\Phi} V^{-1} \Psi \quad (6.18)$$

segue que a equação de Dirac generalizada, dada pela eq.(6.9), é escrita como

$$\Gamma_4 \sum_{\mu=0}^3 \Gamma_\mu p^\mu \Upsilon + i \frac{\sqrt{k}}{\Phi} (m + 2i) \Upsilon = 0. \quad (6.19)$$

Finalmente, tomamos as matrizes Γ como na eq.(5.6), assim da eq.(5.7) e observando que $p^0 = \frac{\partial}{\partial x^0}$, $p^j = -\frac{\partial}{\partial x^j}$, $j = 1, 2, 3$ temos a seguinte expressão para a equação de Dirac generalizada

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Upsilon + i \frac{\sqrt{k}}{\Phi} (m + 2i) \Upsilon = 0 \quad (6.20)$$

É interessante observar que no limite $k \rightarrow 0$, temos $\frac{\sqrt{k}}{\Phi} (m + 2i) \rightarrow \frac{m_0}{\hbar}$, assim obtemos a equação clássica de Dirac na versão de [14].

6.2.1 A equação de Dirac generalizada em componentes

Podemos escrever o 4-espinor $\Upsilon^{\top} = (v^1, v^2, v^3, v^4)$ como

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \Upsilon^1 \\ \Upsilon^2 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

onde $\Upsilon^{1\top} = (v^1, v^2)$ e $\Upsilon^{2\top} = (v^3, v^4)$. Denotamos também,

$$\mathfrak{m} = \sqrt{k}(m + 2i) = \frac{m_0}{\hbar} + 2i\sqrt{k}. \quad (6.22)$$

Temos, então, que a eq.(6.20), é escrita como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^0} \Upsilon^1 + \sum_{j=1}^3 \sigma_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Upsilon^2 + \frac{i\mathfrak{m}}{\Phi} \Upsilon^1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^0} \Upsilon^2 + \sum_{j=1}^3 \sigma_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Upsilon^1 - \frac{i\mathfrak{m}}{\Phi} \Upsilon^2 = 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Introduzimos a mudança de variável dependente

$$\sqrt{2}\Upsilon^1 = \eta + \xi, \quad \text{e} \quad \sqrt{2}\Upsilon^2 = \eta - \xi, \quad (6.24)$$

onde $\eta = \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix}$ e $\xi = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{bmatrix}$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^0} \eta + \sum_{j=1}^3 \sigma_j \frac{\partial}{\partial x^j} \eta + \frac{i\mathfrak{m}}{\Phi} \xi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^0} \xi - \sum_{j=1}^3 \sigma_j \frac{\partial}{\partial x^j} \xi + \frac{i\mathfrak{m}}{\Phi} \eta = 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

Introduzimos agora coordenadas esféricas na parte espacial desta equação

$$\begin{aligned}
 x^0 &= t \\
 x^1 &= r \cos \varphi \sin \theta \\
 x^2 &= r \cos \varphi \cos \theta \\
 x^3 &= r \sin \varphi
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

onde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq r$. Temos ainda $\Phi = 1 - k \frac{t^2 - r^2}{4} > 0$, o que determina o domínio das variáveis t e r , conforme Fig.(6.1).

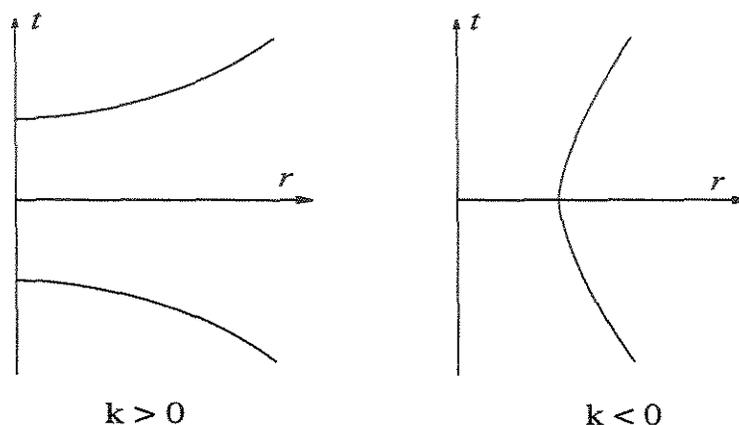


Figura 6.1: Coordenadas temporal e radial para a equação de Dirac generalizada.

Introduzimos as seguintes matrizes²

$$\sigma_r = \begin{bmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{-i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix},
 \tag{6.27}$$

²As matrizes dadas pelas eq.(6.27), eq.(6.28) e eq.(6.29) também podem ser descritas como as projeções do vetor com entradas matriciais

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

sobre os vetores euclidianos ordinários

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta, -\sin \theta),$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Isto é, $\sigma_r = \mathbf{e}_r \cdot \sigma$, $\sigma_\theta = \mathbf{e}_\theta \cdot \sigma$ e $\sigma_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \sigma$.

$$\sigma_\theta = \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta & e^{-i\varphi} \cos \theta \\ e^{-i\varphi} \cos \theta & \text{sen } \theta \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

$$\sigma_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{-i\varphi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

A equação de Dirac generalizada é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \eta + \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} \eta + \frac{1}{r} \sigma_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \eta + \frac{1}{r \text{sen } \varphi} \sigma_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \eta + \frac{im}{\Phi} \xi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi - \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} \xi - \frac{1}{r} \sigma_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \xi - \frac{1}{r \text{sen } \varphi} \sigma_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \xi + \frac{im}{\Phi} \eta = 0. \end{cases} \quad (6.30)$$

Tomamos agora, $\eta = \eta^0 \mathbf{o} + \eta^1 \mathbf{l}$ e $\xi = \xi^0 \mathbf{o} + \xi^1 \mathbf{l}$, onde $\eta^A = \eta^A(t, r, \theta, \varphi)$, $\xi^A = \xi^A(t, r, \theta, \varphi)$, $A = 0, 1$ e $\{\mathbf{o}, \mathbf{l}\}$ é a base dos espinores na esfera, dados pelas eq.(5.20) e eq.(5.21).

Verificam-se as seguintes equações

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{o} = -\frac{i}{2} \sigma_3 \mathbf{o}, \quad \sigma_\varphi \sigma_3 \mathbf{o} = i \text{sen } \theta \mathbf{o} - i \cos \theta \mathbf{l}, \quad \sigma_\varphi \mathbf{o} = -i \mathbf{l} \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{l} = -\frac{i}{2} \sigma_3 \mathbf{l}, \quad \sigma_\varphi \sigma_3 \mathbf{l} = -i \cos \theta \mathbf{o} - i \text{sen } \theta \mathbf{l}, \quad \sigma_\varphi \mathbf{l} = i \mathbf{o}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{o} = -\frac{1}{2} \mathbf{l}, \quad \sigma_\theta \mathbf{o} = -\mathbf{l}, \quad \sigma_r \mathbf{o} = \mathbf{o}, \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{l} = \frac{1}{2} \mathbf{o}, \quad \sigma_\theta \mathbf{l} = \mathbf{o}, \quad \sigma_r \mathbf{l} = -\mathbf{l}.$$

Com isto a eq(6.30) é escrita como

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \eta^0 - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{2} \right) \eta^1 + i \frac{m}{\Phi} \xi^0 \right] \mathbf{o} + \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \eta^1 - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{2} \right) \eta^0 + i \frac{m}{\Phi} \xi^1 \right] \mathbf{l} = 0 \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \xi^0 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{2} \right) \xi^1 + i \frac{m}{\Phi} \eta^0 \right] \mathbf{o} + \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \xi^1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{2} \right) \xi^0 + i \frac{m}{\Phi} \eta^1 \right] \mathbf{l} = 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Observemos inicialmente que a parte angular que comparece nesta equação recai nos operadores $\bar{\partial}$ e $\bar{\delta}$ de levantamento e abaixamento de espin definidos anteriormente, e dados pela eq.(5.28), desde que tomemos a parte angular de ξ^0 e η^0 proporcionais a ${}_{+1/2}Y_{j,m}(\theta, \varphi)$ e a parte angular de ξ^1 e η^1 proporcionais a ${}_{-1/2}Y_{j,m}(\theta, \varphi)$. Assim, tomamos

$$\begin{aligned}\xi^0(t, r, \theta, \varphi) &= \Phi^{-3/2} f_0(r, t) {}_{+1/2}Y_{j,m}(\theta, \varphi) \\ \xi^1(t, r, \theta, \varphi) &= \Phi^{-3/2} f_1(r, t) {}_{-1/2}Y_{j,m}(\theta, \varphi) \\ \eta^0(t, r, \theta, \varphi) &= \Phi^{-3/2} g_0(r, t) {}_{+1/2}Y_{j,m}(\theta, \varphi) \\ \eta^1(t, r, \theta, \varphi) &= \Phi^{-3/2} g_1(r, t) {}_{-1/2}Y_{j,m}(\theta, \varphi),\end{aligned}\tag{6.34}$$

onde $j = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ e $m = -j, -j + 1, \dots, j$. Nestas condições ${}_{\pm 1/2}Y_{j,m}(\theta, \varphi)$ forma um conjunto completo de funções na esfera \mathbb{S}^2 , conforme observado no §5.3; temos ainda, pela eq.(5.35),

$$\begin{aligned}\bar{\partial} ({}_{-1/2}Y_{j,m}) &= -(j + 1/2) ({}_{1/2}Y_{j,m}), \\ \bar{\delta} ({}_{1/2}Y_{j,m}) &= (j + 1/2) ({}_{-1/2}Y_{j,m}),\end{aligned}\tag{6.35}$$

com isso a parte angular da eq.(6.33) é separada. Por outro lado $\{\mathbf{o}, \mathbf{u}\}$ é uma base de \mathfrak{S} , de onde resulta no seguinte sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3kt - r}{4\Phi} + \frac{1}{r} \right) f_1 + \frac{j + 1/2}{r} f_0 + \frac{im}{\Phi} g_1 &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3kt + r}{4\Phi} - \frac{1}{r} \right) f_0 - \frac{j + 1/2}{r} f_1 + \frac{im}{\Phi} g_0 &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3kt - r}{4\Phi} + \frac{1}{r} \right) g_0 + \frac{j + 1/2}{r} g_1 + \frac{im}{\Phi} f_0 &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} + \frac{3kt + r}{4\Phi} - \frac{1}{r} \right) g_1 - \frac{j + 1/2}{r} g_0 + \frac{im}{\Phi} f_1 &= 0. \end{aligned} \right.\tag{6.36}$$

Nosso próximo passo é reduzir este sistema com 4 equações a um outro equivalente com 2 equações também de primeira ordem. Para isso, da comparação das eq.(1.26), eq.(2.3) e eq.(6.26), obtemos as seguintes relações entre as coordenadas estereográficas (t, r) e as coordenadas esféricas (τ, χ) do espaço-tempo de Robertson-Walker,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{2}{1 + \cos(\sqrt{k}\chi) \cosh(\sqrt{k}\tau)} \\
 r &= \Phi \frac{\cosh(\sqrt{k}\tau) \sin(\sqrt{k}\chi)}{\sqrt{k}} \\
 t &= \Phi \frac{\sinh \tau}{\sqrt{k}}
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

bem como as seguintes relações inversas

$$\begin{aligned}
 \tan(\sqrt{k}\chi) &= \frac{\sqrt{k}r}{2 - \Phi} \\
 \tanh(\sqrt{k}\tau) &= \frac{\sqrt{kt}}{\sqrt{kt^2 + \Phi^2}}.
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Vale ressaltar que no caso $k > 0$, os dois sistemas de coordenadas (t, r) e (τ, χ) cobrem todo o hiperbolóide que define o espaço-tempo de Robertson-Walker (de Sitter), e portanto as eq.(6.37) e eq.(6.38) definem uma transformação bijetora. Já para o caso $k < 0$, as coordenadas (t, r) cobrem todo o hiperbolóide que define o espaço-tempo de Robertson-Walker (anti-de Sitter), porém, o mesmo não ocorre para as coordenadas (τ, χ) , logo as equações obtidas nas coordenadas (τ, χ) , para o caso $k < 0$ são uma restrição da equação de Dirac generalizada dadas em coordenadas estereográficas.

Isso posto, temos as seguintes relações entre as derivadas parciais

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{2\Phi + kt^2}{2\Phi\sqrt{kt^2 + \Phi^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{krt}{2(kt^2 + \Phi^2)} \frac{\partial}{\partial \chi} \\
 \frac{\partial}{\partial r} &= -\frac{krt}{2\Phi^2\sqrt{kt^2 + \Phi^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{2\Phi - kt^2}{2(kt^2 + \Phi^2)} \frac{\partial}{\partial \chi}.
 \end{aligned}$$

Definimos os seguintes pares de funções:

$$\begin{aligned}
 \beta_{\pm} = \beta_{\pm}(\chi, \tau) &= \frac{\cos(\sqrt{k}\chi) + \cosh(\sqrt{k}\tau) \pm \sin(\sqrt{k}\chi) \sinh(\sqrt{k}\tau)}{1 + \cos(\sqrt{k}\chi) \cosh(\sqrt{k}\tau)}, \\
 \gamma_{\pm} = \gamma_{\pm}(\chi, \tau) &= \frac{3\sqrt{k} \sinh(\sqrt{k}\tau) \pm \sin(\sqrt{k}\chi) \cosh(\sqrt{k}\tau)}{2 \frac{1 + \cos(\sqrt{k}\chi) \cosh(\sqrt{k}\tau)}{\sqrt{k}}} \mp \\
 &\quad \frac{\sin(\sqrt{k}\chi) \cosh(\sqrt{k}\tau)}{\sqrt{k}}, \\
 \delta_{\pm} = \delta_{\pm}(\chi, \tau) &= \sqrt{k} \frac{3 \sinh \tau \sin \chi \pm 2 \cos \chi}{2 \cosh \tau \sin \chi}.
 \end{aligned}$$

Definimos, também, o par de operadores diferenciais

$$\mathcal{D}_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{1}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \frac{\partial}{\partial \chi},$$

e a função

$$\zeta = \zeta(\chi, \tau) = \sqrt{k} \frac{j + 1/2}{\text{sen}(\sqrt{k}\chi) \cosh(\sqrt{k}\tau)}.$$

Observamos ainda, as seguintes igualdades

$$\beta_+ \beta_- = 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_{\pm} \sqrt{\beta_{\pm}} + \gamma_{\mp} \sqrt{\beta_{\pm}} = \delta_{\pm} \sqrt{\beta_{\mp}}. \quad (6.39)$$

Com esta notação, a equação de Dirac generalizada no espaço-tempo de Robertson-Walker, dada pela eq.(6.36), é escrita nas coordenadas (τ, χ) como

$$\begin{cases} \beta_- \mathcal{D}_+ f_1 + \gamma_- f_1 + \zeta f_0 + im g_1 = 0 \\ \beta_+ \mathcal{D}_- f_0 + \gamma_+ f_0 - \zeta f_1 + im g_0 = 0 \\ \beta_- \mathcal{D}_+ g_0 + \gamma_- g_0 + \zeta g_1 + im f_0 = 0 \\ \beta_+ \mathcal{D}_- g_1 + \gamma_+ g_1 - \zeta g_0 + im f_1 = 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

Agora, introduzimos a mudança de variável dependente

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{\beta_+} F_1 \\ f_0 &= \sqrt{\beta_-} F_0 \\ g_1 &= \sqrt{\beta_-} G_1 \\ g_0 &= \sqrt{\beta_+} G_0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Logo, observando a eq.(6.39), temos que a eq.(6.40) é escrita da seguinte forma

$$\begin{cases} (\mathcal{D}_+ + \delta_+) F_1 + \zeta F_0 + im G_1 = 0 \\ (\mathcal{D}_- + \delta_-) F_0 - \zeta F_1 + im G_0 = 0 \\ (\mathcal{D}_+ + \delta_+) G_0 + \zeta G_1 + im F_0 = 0 \\ (\mathcal{D}_- + \delta_-) G_1 - \zeta G_0 + im F_1 = 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Introduzimos uma outra mudança de variável dependente

$$A_{\pm} = F_1 \pm G_0, \quad \text{e} \quad B_{\pm} = F_0 \pm G_1, \quad (6.43)$$

na eq.(6.42) e obtemos

$$\begin{cases} (\mathcal{D}_+ + \delta_+) A_+ + \zeta B_+ + im B_+ = 0 \\ (\mathcal{D}_- + \delta_-) B_+ - \zeta A_+ + im A_+ = 0 \\ (\mathcal{D}_+ + \delta_+) A_- + \zeta B_- - im B_- = 0 \\ (\mathcal{D}_- + \delta_-) B_- - \zeta A_- - im A_- = 0. \end{cases} \quad (6.44)$$

Observemos que a menos do sinal em m o par de equações em A_+ e B_+ é idêntico ao par de equações em A_- e B_- , isto permite reduzir o problema a um sistema com apenas duas equações. De fato, se o par de funções

$$A_+ = A(\chi, \tau, m) \quad \text{e} \quad B_+ = B(\chi, \tau, m),$$

satisfaz o primeiro par de equações em eq.(6.44) então, o par de funções dado por

$$A_- = A(\chi, \tau, -m) \quad \text{e} \quad B_- = B(\chi, \tau, -m),$$

satisfaz o segundo par de equações do mesmo sistema. Assim podemos considerar somente o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} (\mathcal{D}_+ + \delta_+) A + \zeta B + imB = 0 \\ (\mathcal{D}_- + \delta_-) B - \zeta A + imA = 0. \end{cases} \quad (6.45)$$

A separação das parte espacial e temporal da equação de Dirac generalizada será considerada na próxima seção.

6.2.2 Separação das partes temporal e espacial

Para separar as partes espacial e temporal da eq.(6.45), tomamos inicialmente a mudança de variável dependente

$$\begin{aligned} A &\rightarrow (\text{sen}(\sqrt{k}\chi))^{-1}(\text{cosh}(\sqrt{k}\tau))^{-3/2} A \\ B &\rightarrow (\text{sen}(\sqrt{k}\chi))^{-1}(\text{cosh}(\sqrt{k}\tau))^{-3/2} B. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Os termos δ_{\pm} na equação são cancelados, isto é, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \mathcal{D}_+ A + \zeta B + imB = 0 \\ \mathcal{D}_- B - \zeta A + imA = 0. \end{cases} \quad (6.47)$$

Agora, introduzindo uma outra mudança de variável dependente

$$\begin{aligned} A &\rightarrow e^{-im\tau} \left(\tan(\sqrt{k}\chi/2) \right)^{-(j+1/2)} A \\ B &\rightarrow e^{-im\tau} \left(\tan(\sqrt{k}\chi/2) \right)^{-(j+1/2)} B \end{aligned} \quad (6.48)$$

podemos escrever

$$\begin{cases} \mathcal{D}_+ A - \zeta(A - B) + im(B - A) = 0 \\ \mathcal{D}_- B - \zeta(A - B) + im(A - B) = 0. \end{cases} \quad (6.49)$$

Finalmente, escrevendo

$$X = A + B \quad \text{e} \quad Y = A - B \quad (6.50)$$

obtemos explicitamente o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} X + \frac{1}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \frac{\partial}{\partial \chi} Y - \sqrt{k} \frac{2j+1}{\sin(\sqrt{k}\chi) \cosh(\sqrt{k}\tau)} Y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} Y + \frac{1}{\cosh(\sqrt{k}\tau)} \frac{\partial}{\partial \chi} X - 2imY = 0. \end{cases} \quad (6.51)$$

Introduzimos, agora, a mudança de variável independente

$$u(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{\cosh(\sqrt{k}s)} ds, \quad (6.52)$$

o que resulta em $\tan(\sqrt{k}u) = \sinh(\sqrt{k}\tau)$. Disto obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} X + \frac{\partial}{\partial \chi} Y - \sqrt{k} \frac{2j+1}{\sin(\sqrt{k}\chi)} Y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} Y + \frac{\partial}{\partial \chi} X - \frac{2im}{\cos(\sqrt{k}u)} Y = 0. \end{cases} \quad (6.53)$$

Introduzimos agora, tal como no Capítulo 4, a seguinte notação

$$x = \sqrt{k}\chi \quad \text{e} \quad t = \sqrt{k}u. \quad (6.54)$$

Assim temos, para $k > 0$, $0 \leq x \leq \pi$ e $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, e para $k < 0$, $0 \leq x < \infty$ e $-\infty < t < \infty$. As equações que se seguirão correspondem formalmente ao caso $k > 0$, as equações correspondentes para $k < 0$, serão obtidas das anteriores através da mudança

$$x \rightarrow ix \quad \text{e} \quad t \rightarrow it. \quad (6.55)$$

Com isso a eq.(6.53) é escrita como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X + \frac{\partial}{\partial x} Y - \frac{2j+1}{\sin x} Y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} Y + \frac{\partial}{\partial x} X - \frac{2i\sqrt{km}}{\cos t} Y = 0. \end{cases} \quad (6.56)$$

Para separar as partes espacial e temporal destas equações derivamos a primeira e a segunda das equações de eq.(6.56) em relação a variável x e em relação a variável t , respectivamente. Obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} X = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} Y + \frac{2j+1}{\sin x} \frac{\partial}{\partial x} Y - (2j+1) \frac{\cos x}{\sin^2 x} Y \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} X = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} Y + \frac{2i\sqrt{km}}{\cos t} \frac{\partial}{\partial t} Y + 2i\sqrt{km} \frac{\sin t}{\cos^2 t} Y.$$

Igualando os termos da derivada mista de X das duas equações acima obtemos a equação diferencial parcial de segunda ordem

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y - \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y - \frac{2j+1}{\sin x} \frac{\partial}{\partial x} Y + \frac{2i\sqrt{km}}{\cos t} \frac{\partial}{\partial t} Y + \\ & (2j+1) \frac{\cos x}{\sin^2 x} Y + 2i\sqrt{km} \frac{\sin t}{\cos^2 t} Y = 0. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Vê-se de imediato que esta equação é separável. Então escrevendo

$$Y(x, u) = R(x)U(u)$$

e separando-se os casos $k > 0$ e $k < 0$, obtemos os seguintes pares de equações diferenciais ordinárias:

- Caso $k > 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) - \frac{2j+1}{\sin x} \frac{d}{dx} R(x) + \left[(2j+1) \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \lambda^2 \right] R(x) = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} U(t) - \frac{2i\sqrt{km}}{\cos t} \frac{d}{dt} U(t) - \left(2i\sqrt{km} \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \lambda^2 \right) U(t) = 0 \quad (6.60)$$

- Caso $k < 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) - \frac{2j+1}{\sinh x} \frac{d}{dx} R(x) + \left[(2j+1) \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \lambda^2 \right] R(x) = 0 \quad (6.61)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} U(t) + \frac{2\sqrt{km}}{\cosh t} \frac{d}{dt} U(t) - \left(2\sqrt{km} \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} + \lambda^2 \right) U(t) = 0 \quad (6.62)$$

onde, nos dois casos, λ^2 é a constante de separação.

As soluções destes dois pares de equações serão consideradas nas próximas seções. Para finalizar, observamos que, uma vez determinado $Y(x, t) = R(x)U(t)$, a função $X(x, t)$ que completa a solução da eq.(6.56) é obtida por integração direta de $Y(x, t)$ e das condições iniciais que se impõem a eq.(6.56).

6.3 Solução da equação na variável espacial

6.3.1 O caso $k > 0$

A equação radial associada à equação de Dirac generalizada é dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x) - \frac{2j+1}{\sin x} \frac{d}{dx}R(x) + \left[(2j+1) \frac{\cos x}{(\sin^2 x)} + \lambda^2 \right] R(x) = 0. \quad (6.59)$$

Introduzimos a mudança de variável independente

$$y = \cos x \quad (6.63)$$

e obtemos a equação

$$(1-y^2) \frac{d^2}{dy^2}R(y) - (y-2j-1) \frac{d}{dy}R(y) + \left((2j+1) \frac{y}{1-y^2} + \lambda^2 \right) R(y) = 0. \quad (6.64)$$

Introduzindo a mudança de variável dependente

$$R(y) = (1-y)^{j+1/2} (1+y)^{1/2} S(y) \quad (6.65)$$

podemos escrever

$$(1-y^2) \frac{d^2}{dy^2}S(y) + [1-y(2j+3)] \frac{d}{dy}S(y) + [\lambda^2 - (j+1)^2]S(y) = 0. \quad (6.66)$$

As soluções da parte radial da equação de Dirac generalizada que procuramos estabelecer, são aquelas regulares em $x = 0$ e $x = \pi$. Por sua vez, isto corresponde, observando as mudanças nas variáveis dependentes e independentes introduzidas pelas eq.(6.46), eq.(6.48), eq.(6.50), eq.(6.65) e eq.(6.63), à regularidade em $y = \pm 1$ de

$$R(y) = (1+y)^{\frac{j+1/2}{2}} (1-y)^{\frac{j-1/2}{2}} S(y)$$

onde $S(y)$ satisfaz a eq.(6.66). Logo, desde que $S(y)$ seja regular em $y = \pm 1$ temos $R(y)$ também regular nestes pontos.

Por outro lado, a eq.(6.66) pode ser identificada com a equação de Jacobi, eq.(B.2). Portanto a sua solução regular em $y = \pm 1$ é dada pelos polinômios de Jacobi, desde que

$$\lambda^2 = (n + j)^2, \quad \text{onde} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (6.67)$$

tomamos $\lambda = n + j$ e assim temos

$$S(y) = P_n^{(j, j+1)}(y). \quad (6.68)$$

6.3.2 O caso $k < 0$

A equação radial associada à equação de Dirac generalizada é dada por

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) - \frac{2j+1}{\sinh x} \frac{d}{dx} R(x) + \left[(2j+1) \frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \lambda^2 \right] R(x) = 0 \quad (6.61)$$

Introduzimos a mudança de variável dependente

$$R(x) = \sinh x S(x) \quad (6.69)$$

e obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2}{dx^2} S(x) + \frac{2 \cosh x - 2j - 1}{\sinh x} \frac{d}{dx} S(x) + (1 - \lambda^2) S(x) = 0. \quad (6.70)$$

Introduzindo agora a mudança de variável independente

$$y = \frac{1 + \cosh x}{2} \quad (6.71)$$

podemos escrever a equação

$$y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} S(y) - (3y-j-2) \frac{d}{dy} S(y) - (1-\lambda^2) S(y) = 0 \quad (6.72)$$

que pode ser identificada com a equação hipergeométrica dada pela eq.(B.1).

Procuramos estabelecer a solução da parte radial da equação de Dirac generalizada que seja regular em $x \rightarrow 0^+$. Observando as mudanças nas variáveis dependente e independente introduzidas pelas eq.(6.46), eq.(6.48), eq.(6.50), eq.(6.69) e eq.(6.71), respectivamente, temos então que tomar

$$R(y) = \left(\frac{y}{y-1} \right)^{\frac{2j+1}{4}} S(y)$$

regular em $y \rightarrow 1^+$. Por sua vez, considerando as soluções da eq.(6.72) em $|y-1| < 1$, para que $R(y)$ seja regular em $y \rightarrow 1^+$ devemos tomar

$$S(y) = (1-y)^j {}_2F_1(1+j+\lambda, 1+j-\lambda; 1+j; 1-y). \quad (6.73)$$

Valendo-se da seguinte fórmula de transformação das funções hipergeométricas [32],

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z)$$

temos

$$S(y) = \frac{(1-y)^j}{y^{j+1}} {}_2F_1(-\lambda, +\lambda; 1+j; 1-y). \quad (6.74)$$

É interessante escrever $S(x)$ nesta forma pois assim, a série hipergeométrica converge em $y = 2$. Portanto, $S(y)$ pode ser prolongada analiticamente para $2 \leq y < \infty$ e esta constitui a solução regular em $y = 1$ da eq.(6.72) para $1 \leq y < \infty$.

6.4 Solução da equação na variável temporal

6.4.1 O caso $k > 0$

A equação temporal da equação de Dirac generalizada, no caso $k > 0$, é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} U(t) - \frac{2i\sqrt{km}}{\cos t} \frac{d}{dt} U(t) - \left(2i\sqrt{km} \frac{\sen t}{\cos^2 t} - \lambda^2 \right) U(t) = 0. \quad (6.60)$$

Introduzimos a mudança de variável dependente

$$U(t) = \cos t V(t) \quad (6.75)$$

e obtemos a equação

$$\frac{d^2}{dt^2} V(t) - 2 \frac{i\sqrt{km} + \sen t}{\cos t} \frac{d}{dt} V(t) + (\lambda^2 - 1)V(t) = 0. \quad (6.76)$$

Seja agora a mudança de variável independente

$$u = \frac{1 + \sen t}{2} \quad (6.77)$$

de onde obtemos a seguinte equação

$$u(1-u) \frac{d^2}{du^2} V(u) + \left(\frac{3 - 2i\sqrt{km}}{2} - 3u \right) \frac{d}{du} V(u) - (1 - \lambda^2)V(u) = 0, \quad (6.78)$$

que pode ser identificada com a equação hipergeométrica, eq.(B.1). Assim temos que

$$V(u) = AV_1(u) + BV_2(u) \quad (6.79)$$

onde A, B são constantes e, denotando $\varsigma = 1/2 - i\sqrt{k}m$

$$\begin{aligned} V_1(u) &= {}_2F_1(1 + \lambda, 1 - \lambda; 1 + \varsigma; u) \\ V_2(u) &= \frac{1}{u^\varsigma} {}_2F_1(2 + \lambda - \varsigma, 2 - \lambda - \varsigma; 2 - \varsigma; u). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Observando as mudanças nas variáveis dependentes e independentes, introduzidas pelas eq.(6.75) e eq.(6.77), temos finalmente que a solução geral da eq.(6.60) é dada por

$$U(t) = \cos t V\left(\frac{1 + \operatorname{sen} t}{2}\right). \quad (6.81)$$

6.4.2 O caso $k < 0$

A parte temporal da equação de Dirac generalizada é dada, no caso $k < 0$, por

$$\frac{d^2}{dt^2}U(t) + \frac{2\sqrt{k}m}{\cosh t} \frac{d}{dt}U(t) - \left(2\sqrt{k}m \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh^2 t} + \lambda^2\right) U(t) = 0. \quad (6.62)$$

Conforme havíamos observado anteriormente esta equação é obtida da eq.(6.60), através de $t \rightarrow it$, logo a solução geral da eq.(6.62) é dada por

$$U(t) = \cosh t V\left(\frac{1 + i \operatorname{senh} t}{2}\right) \quad (6.82)$$

onde $V(u)$ é dada pela eq.(6.79).

Observamos ainda que, valendo-se da fórmula de transformação da função hipergeométrica

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma; z)$$

podemos escrever para a eq.(6.80)

$$\begin{aligned} V_1(u) &= (1 - u)^{\varsigma - 1} {}_2F_1(\varsigma - \lambda, \varsigma - \lambda; 1 + \varsigma; u) \\ V_2(u) &= \frac{u^{\varsigma - 2}}{u^\varsigma} {}_2F_1(-\lambda, \lambda; 2 - \varsigma; u) \end{aligned} \quad (6.83)$$

com a seguinte vantagem, nesta forma, as funções hipergeométricas convergem na circunferência $u\bar{u} = 1$, e como $u = \frac{1 + i \sinh t}{2}$, estas podem ser prolongadas analiticamente para $-\infty < t < \infty$ e formam a solução da eq.(6.62) neste intervalo.

Finalmente, observamos que as funções dadas pelas eq.(6.80) eq.(6.83), estão definidas para $m \rightarrow -m$ e portanto são as funções que compareceram na solução A_- e B_- da eq.(6.44), logo a solução da equação de Dirac generalizada esta estabelecida.

Conclusões

Neste trabalho foram consideradas, a partir do operador de Casimir de segunda ordem, as equações de onda associadas ao grupo de Fantappiè-de Sitter para o campo escalar e para o campo com espin $1/2$, as chamadas equação de Klein-Gordon e equação de Dirac generalizadas, respectivamente.

As equações de Klein-Gordon e Dirac generalizadas dependem de um parâmetro k associado à curvatura do espaço-tempo de Robertson-Walker. Consideramos o espaço-tempo de Robertson-Walker descrito em coordenadas esféricas, estereográficas e projetivas, dadas respectivamente pelas eq.(1.26), eq.(2.3) e eq.(2.7). Estas coordenadas são interessantes pois no limite $k \rightarrow 0$ obtém-se o espaço-tempo de Minkowski. Do mesmo modo, as equações de Klein-Gordon e de Dirac generalizadas recaem em suas respectivas versões clássicas.

A equação de Klein-Gordon generalizada [22] foi considerada num espaço-tempo de Robertson-Walker $(n + 1)$ -dimensional, e sua solução foi obtida por separação de variáveis. Para o caso $k > 0$ a solução concorda com a de outros trabalhos que tratam deste tema [10], muito embora o tratamento que demos seja diferente. Já no caso $k < 0$ obtivemos a solução da parte radial em termos das funções de Legendre, quando em outros trabalhos [6, 4], a solução da parte radial da equação de Klein-Gordon generalizada é dada em termos das derivadas sucessivas de certas funções que dependem da paridade da dimensão do espaço-tempo de Robertson-Walker. Foi mostrado ainda, que as soluções da equação de Klein-Gordon generalizada formam um conjunto discreto no caso $k > 0$, e um conjunto contínuo no caso $k < 0$.

O estudo da equação de Dirac generalizada [26] partiu da sua formulação em coordenadas estereográficas, porém sua separação só foi alcançada quando, depois da separação da parte angular, a equação foi escrita em coordenadas esféricas. No caso $k < 0$, isto torna a solução obtida uma restrição da solução da equação original, pois a mudança das coordenadas estereográficas para as coordenadas esféricas não é bijetora. A solução da parte radial da equação de Dirac, no caso $k > 0$ foi dada em termos dos polinômios de Jacobi. Para o caso $k < 0$, foi dada em termos da função hipergeométrica.

Para o caso $k > 0$, a solução da parte temporal foi obtida em termos da função hipergeométrica. A solução da parte temporal, no caso $k < 0$, é obtida do caso $k > 0$

com a identificação $t \rightarrow it$. Foi mostrado ainda que no caso $k > 0$, a solução regular da parte radial da equação de Dirac generalizada forma um conjunto discreto. Já para o caso $k < 0$ impusemos somente a restrição de regularidade na origem, o que mostrou-se ser insuficiente para determinar o espectro da parte radial da equação.

O estudo das condições de contorno para a equação de Dirac generalizada no caso $k < 0$ é deixado como uma perspectiva para um futuro trabalho [23]. Uma outra possibilidade é estender este trabalho para englobar o grupo $SO(6)$, isomorfo ao chamado grupo conforme, a fim de introduzir os movimentos acelerados. Estudos nessa direção já foram iniciados.

Apêndice A

Cosmologia de Robertson-Walker

A fim de discutir a cosmologia de Robertson-Walker, começamos observando que pelo menos localmente sempre podemos tomar a coordenada temporal de um espaço-tempo \mathcal{M} ortogonal à sua parte espacial. Por outro lado, observações astronômicas indicam que a parte espacial de \mathcal{M} está em expansão, isto quer dizer que ela depende de uma função do tempo chamada de fator de escala. Assim, indicando a coordenada temporal por τ , as coordenadas espaciais por u_i , $a(\tau)$ o fator de escala e distinguindo os objetos da parte espacial de \mathcal{M} através de letras San Serif, podemos escrever a métrica de \mathcal{M} como

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du^i du^j. \quad (\text{A.1})$$

Além disso, admite-se que em escala cosmológica a parte espacial de \mathcal{M} seja equivalente em todos os seus pontos e em todas as direções; estas duas exigências são, respectivamente, chamadas de homogeneidade e isotropia, e conhecidas como princípios de Copérnico. Juntas elas garantem que a parte espacial de \mathcal{M} tem simetria máxima e, portanto, o tensor de Ricci é proporcional à métrica, isto é,

$$R_{ij} = 2\kappa g_{ij} \quad (\text{A.2})$$

onde $\kappa \in \mathbb{R}$.

Podemos escrever a métrica da parte espacial como [9]

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du^i du^j = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (\text{A.3})$$

É interessante observar, exceto pelo fator $e^{2\beta(r)}$, a semelhança com a métrica euclidiana ordinária em coordenadas esféricas. Com esta métrica as componentes não nulas

do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \beta(r) \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta(r)} \left(r \frac{d}{dr} \beta(r) - 1 \right) + 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= \left\{ e^{-2\beta(r)} \left[r \frac{d}{dr} \beta(r) - 1 \right] + 1 \right\} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Comparando as componentes do tensor de Ricci com as eq.(A.3) e eq.(A.2) temos

$$2\kappa e^{2\beta(r)} = \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \beta(r) \quad \text{e} \quad 2\kappa r^2 = e^{-2\beta(r)} \left(r \frac{d}{dr} \beta(r) - 1 \right) + 1,$$

donde resulta,

$$\beta(r) = -\frac{1}{2} \ln(1 - \kappa r^2).$$

Por fim, temos a seguinte expressão para a métrica

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) \left(\frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right) \quad (\text{A.5})$$

que é a chamada métrica de Robertson-Walker. Observamos que mediante as transformações

$$a(t) \rightarrow \frac{a(t)}{\sqrt{|\kappa|}}, \quad r \rightarrow \sqrt{|\kappa|} r, \quad \kappa \rightarrow \frac{\kappa}{|\kappa|}$$

a métrica eq.(A.5) permanece invariante, logo é necessário considerar somente os casos $\kappa = \pm 1$ e $\kappa = 0$.

Para $\kappa = 1$, fazendo $r = \sin \chi$ temos

$$ds^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

que é a métrica da esfera \mathbb{S}^3 imersa em \mathbb{R}^4 , por isso o caso $\kappa = 1$ é chamado modelo fechado ou esférico.

Para $\kappa = -1$, fazendo $r = \sinh \chi$ temos

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

que é a métrica do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , e como o espaço hiperbólico não é compacto, o caso $\kappa = -1$ é chamado de modelo aberto ou hiperbólico.

Para $\kappa = 0$ temos

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

que é a métrica em coordenadas esféricas do espaço euclidiano ordinário \mathbb{R}^3 .

Para o espaço-tempo livre de matéria e radiação, $T_{ij} = 0$, as equações de campo de Einstein podem ser escritas como na eq.(1.15), isto é,

$$R_{ij} + \lambda g_{ij} = 0. \quad (\text{A.6})$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci associado à métrica de Robertson-Walker são

$$\begin{aligned} R_{\tau\tau} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} \\ R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \\ R_{\varphi\varphi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2\theta \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde $\dot{a} = \frac{d}{d\tau}a(\tau)$.

Tomando $(ij) = (\tau\tau)$ na eq.(A.6) temos a seguinte equação

$$3\frac{\ddot{a}}{a} - \lambda = 0. \quad (\text{A.8})$$

Por outro lado, para $(ij) = (rr), (\theta\theta), (\varphi\varphi)$ temos

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa - \lambda a^2 = 0. \quad (\text{A.9})$$

Esta simetria nas equações é resultado da isotropia do espaço.

Resolvendo o par eq.(A.8) e eq.(A.9) temos as seguintes possibilidades:

1. Para $\lambda = 0$:

- (a) $\kappa = 0$ temos $a = 1$. Esta é a métrica de Minkowski.
- (b) $\kappa = 1$ não pode ocorrer.
- (c) $\kappa = -1$ temos $a \propto \tau$. Esta é a métrica de Milne [41] e pode ser obtida fazendo $r \rightarrow \tau r$ e $\tau \rightarrow \tau\sqrt{1+r^2}$ na métrica de Minkowski em (a)..

Assim, para $\lambda = 0$, temos, a menos de diferentes parametrizações, o espaço-tempo de Minkowski.

2. Para $\lambda < 0$, fazendo $\alpha = \sqrt{\frac{-\lambda}{3}}$:

- (a) $\kappa = 0$ não pode ocorrer.
- (b) $\kappa = 1$ não pode ocorrer.
- (c) $\kappa = -1$ temos $a = \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha\tau)$, que corresponde ao espaço-tempo anti-de Sitter. Veja eq.(1.22).

3. Para $\lambda > 0$, fazendo $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$:

(a) $\kappa = 0$ temos $a \propto e^{\alpha\tau}$, esta métrica pode ser obtida do espaço-tempo de de Sitter, eq.(1.16), tomando a seguinte parametrização, [6]

$$\begin{aligned}\xi^0 &= \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) + \frac{\alpha}{2} e^{\alpha\tau} (x^2 + y^2 + z^2) \\ \xi^1 &= e^{\alpha\tau} x \\ \xi^2 &= e^{\alpha\tau} y \\ \xi_3 &= e^{\alpha\tau} z \\ \xi^4 &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau) - \frac{\alpha}{2} e^{\alpha\tau} (x^2 + y^2 + z^2).\end{aligned}$$

(b) $\kappa = 1$ temos $a = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau)$. Esta métrica corresponde à métrica do espaço-tempo de de Sitter obtida anteriormente, veja eq.(1.18).

(c) $\kappa = -1$ temos $a = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau)$. Esta métrica pode ser obtida do espaço-tempo de de Sitter, eq.(1.16), tomando a seguinte parametrização, [41],

$$\begin{aligned}\xi^0 &= \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \cosh(\chi) \\ \xi^1 &= \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \sinh(\chi) \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \xi^2 &= \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \sinh(\chi) \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \xi^3 &= \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \sinh(\chi) \cos(\theta) \\ \xi^4 &= \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau).\end{aligned}$$

Logo, para $\lambda > 0$ temos, a menos de diferentes parametrizações, o espaço-tempo de Sitter.

Apêndice B

Funções especiais

Neste apêndice incluímos as funções especiais citadas no texto, bem como as equações diferenciais por elas satisfeitas.

B.1 Função hipergeométrica

A função hipergeométrica é definida pela série

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{z^k}{k!},$$

a série converge para $z\bar{z} < 1$, desde que $\gamma \neq -1, -2, -3, \dots$; na circunferência $z\bar{z} = 1$ tem-se:

- $0 > \Re(\alpha + \beta - \gamma)$, a série é absolutamente convergente em toda a circunferência.
- $1 > \Re(\alpha + \beta - \gamma) \geq 0$, a série converge em toda a circunferência exceto $z = 1$.
- $1 \geq \Re(\alpha + \beta - \gamma)$, a série diverge em toda a circunferência.

A seguinte equação diferencial, chamada equação hipergeométrica,

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} w(z) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{d}{dz} w(z) - \alpha\beta w(z) = 0. \quad (\text{B.1})$$

é satisfeita pela função hipergeométrica.

B.2 Polinômios de Jacobi

A equação de Jacobi é dada por

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}w(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\frac{d}{dx}w(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)w(x) = 0. \quad (\text{B.2})$$

A solução regular para $-1 \leq x \leq +1$ existe quando $n = 0, 1, 2, \dots$, são denotadas $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e são chamadas polinômios de Jacobi. Temos

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^\beta \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

B.3 Polinômios de Gegenbauer

A equação de Gegenbauer é dada por

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}w(x) - (2\mu + 1)\frac{d}{dx}w(x) + n(n + 2\mu)w(x) = 0. \quad (\text{B.3})$$

A solução regular para $-1 \leq x \leq +1$ existe quando $n = 0, 1, 2, \dots$, é denotada por $C_n^\mu(x)$ e denominada polinômio de Gegenbauer, ou ultraesférico. Temos

$$C_n^\mu(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(2\mu + n) \Gamma(\mu + 1/2)}{2^n \Gamma(2\mu) \Gamma(\mu + n + 1/2)} \frac{(1-x^2)^{-\mu+1/2}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{\mu+n-1/2}.$$

B.4 Funções de Legendre

A equação de Legendre é dada por

$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}w(z) - 2z\frac{d}{dz}w(z) + \left(\beta(\beta + 1) - \frac{\alpha^2}{1-z^2} \right) w(z) = 0. \quad (\text{B.4})$$

O par de soluções linearmente independente é denotado por:

$$P_\beta^\alpha(z) \text{ e } Q_\beta^\alpha(z), \quad \text{para } z \in \mathbb{R}, -1 < z < +1,$$

$$\mathfrak{P}_\beta^\alpha(z) \text{ e } \mathfrak{Q}_\beta^\alpha(z), \quad \text{para } z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 1.$$

As funções $P_\beta^\alpha(z)$ e $\mathfrak{P}_\beta^\alpha(z)$ são denominadas funções de Legendre de primeira espécie, enquanto que as funções $Q_\beta^\alpha(z)$ e $\mathfrak{Q}_\beta^\alpha(z)$ são denominadas funções de Legendre de segunda espécie.

Referências Bibliográficas

- [1] G. ARCIDIACONO, *Projective Relativity, Cosmology and Gravitation*, Hadronic Press Inc., Massachusetts, 1986.
- [2] —, *La teoria degli universi*, vol. I, II, Di Renzo Editore, Roma, 2000.
- [3] G. ARCIDIACONO, E. CAPELAS DE OLIVEIRA, AND E. A. NOTTE CUELLO, *The generalized Klein-Gordon equation*, Hadronic Journal Supplement, 13 (1998), pp. 249–256.
- [4] M. BANDER AND C. ITZYKSON, *Group theory and the hydrogen atom(II)*, Reviews of Modern Physics, 38 (1966), pp. 346–358.

Um trabalho anterior considerando os estados limitados no potencial de Coulomb é estendido para o caso de estados de espalhamento. A simetria do problema sobre o grupo de Lorentz $O(1,3)$ é usada para construir funções de onda. Análise harmônica em dimensão arbitrária num hiperbolóide de duas folhas é brevemente discutida. O conjunto dos estados de espalhamento para ambos, um potencial atrativo e um potencial repulsivo, é mostrado ser uma representação unitária do grupo $O(1,4)$.

- [5] A. O. BARUT, *Introduction to de Sitter and conformal groups and their physical applications*, in Symposium on de Sitter and conformal groups and their applications, A. O. Barut and W. E. Brittin, eds., Colorado, 1970.
- [6] N. D. BIRREL AND P. C. W. DAVIES, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [7] G. BÖRNER AND H. P. DÜRR, *Classical and quantum fields in de Sitter space*, Il Nuovo Cimento, LXIV (1969), pp. 669–712.

No espaço de de Sitter $(1+4)$ as equações para o campo livre com spin 0, spin $1/2$ e spin 1 são derivadas como equações a autovalores dos operadores de Casimir. Relações de completude para as soluções são dadas nos casos de spin 0 e spin $1/2$ e com estas, as respectivas funções de Green e relações de comutação são obtidas. Com isso é possível construir relações de comutação causal somente para uma certa parte do espectro. Isto permite impor condições para o espectro, pela

qual, a solução que satisfaz a equação invariante conforme para espin 0 é excluída do espaço dos estados físicos. Todas funções são mostradas permitir expansão em potências da curvatura $1/R$ do espaço de de Sitter, onde o primeiro termo em cada caso corresponde a função invariante do espaço de Minkowski.

- [8] J. BROS, J.-P. GAZEAU, AND U. MOSCHELLA, *Quantum field theory in the de Sitter universe*, Physical Review Letters, 73 (1994), pp. 1746–1749.

Apresenta-se um estudo do campo escalar quântico no espaço-tempo de de Sitter(dS) baseado na analiticidade da variedade riemanniana complexificada; uma nova expansão do campo linear em termos das ondas planas nas coordenadas independentes (dS) e uma forma explícita do propagador com tempo real ou imaginário são dados. O tratamento controla as propriedades térmicas e o limite de curvatura zero do campo; resulta num ambiente geral para a interação do campo, no qual alguns passos são dados: uma fórmula tipo Källen-Lehmann para o propagador completo e um tratamento de uma classe de diagramas de auto-energia e suas resultantes.

- [9] S. M. CARROLL, *Lecture on general relativity*. e-print:qr-qc/9712019, 1997.
- [10] N. A. CHERNIKOV AND E. A. TAGIROV, *Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time*, Annales de L'Institut Henri Poincaré, 9 (1968), pp. 109–141.

A teoria do campo escalar quântico é construída no universo esférico de de Sitter. A equação de campo no espaço-tempo riemanniano é tomada na forma $\square\varphi + \frac{1}{6}R\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi = 0$ devido à sua invariância conforme para $m = 0$. No universo de de Sitter as grandezas conservadas são obtidas, as quais correspondem a isometrias e transformações conformes. A representação de Fock como vetor cíclico, o qual é invariante sobre isometrias é mostrado formar uma família a um parâmetro. Estes são não equivalentes para diferentes valores do parâmetro. Entretanto, seus valores simples são obtidos requerendo-se que o movimento seja quase clássico para grandes valores do quadrado do momento. Então a base de vetores para a representação de Fock pode ser interpretada como os estados com número definido de partículas. Para $m = 0$ este resultado pode também ser obtido da condição de invariância conforme. É provado que o requerimento acima para o movimento quase clássico não pode ser totalmente satisfeito na teoria com a equação $\square\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi = 0$.

- [11] G. F. T. DEL CASTILLO, *Una introducción a los armónicos esféricos espinoriales*, Revista Mexicana de Física, 36 (1990), pp. 446–464.

Apresenta-se a definição e propriedades básicas dos harmônicos esféricos com peso de espin, os quais são uma generalização dos harmônicos esféricos usuais, baseada na representação irredutível do grupo das rotações. Como exemplo de aplicação dos harmônicos esféricos espinoriais, é dada a expressão em termos destas funções dos campos eletromagnéticos multipolares.

- [12] P. A. M. DIRAC, *The electron wave equation in de Sitter space*, Annals of Mathematics, (1935), p. 657.

- [13] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2ª ed., 1988.
- [14] B. A. DUBROVIN, A. T. FOMENKO, AND S. P. NOVIKOV, *Modern Geometry — Methods and Applications*, vol. I of Graduate texts in mathematics; 93, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [15] A. ERDELYI, *Higher Transcendental Function*, Bateman Manuscript Project, vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [16] J.-P. GAZEAU, J. RENAUD, AND M. V. TAKOOK, *Gupta-Bleuler quantization for minimally coupled scalar fields in de Sitter space*, Class. Quantum Grav., 17 (2000), pp. 1415–1434. e-print:gr-qc/9904023 v2

É apresentado neste trabalho uma quantização totalmente covariante do campo sem massa com acoplamento mínimo no espaço de de Sitter, devido a uma nova representação das relações de comutação canônicas. É obtida uma formulação livre de qualquer divergência infra-vermelho. O método é baseado no tratamento rigoroso da teoria de grupos combinada com uma adequada adaptação (espaços de Krein) da axiomática de Wightman-Gårding para o campo sem massa (esquema Gupta-Bleuler). É explicitada a correspondência entre a representação irredutível do grupo de de Sitter e a teoria de campos no espaço-tempo de de Sitter. O campo sem massa minimamente acoplado é associado com a representação na qual são os primeiros termos das séries discretas da representação do grupo de de Sitter. A despeito da presença de modos de norma negativa na teoria, nenhuma energia negativa pode ser medida: expressões como $\langle n_{k_1} n_{k_2} \dots | T_{00} | n_{k_1} n_{k_2} \dots \rangle$ são sempre positivas.

- [17] R. GILMORE, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [18] D. GOMES AND E. CAPELAS DE OLIVEIRA, *The generating function for $E_n^l(\rho)$ polynomials*, Algebra, Group and Geometries, 14 (1997), pp. 49–56.

Apresenta-se a função geradora e algumas relações de recorrência para os polinômios $E_n^l(\rho)$, os quais surgem no estudo da equação diferencial de Laplace generalizada.

- [19] —, *On a new class of polynomials*, Hadronic Journal Supplement, 13 (1998), pp. 383–392.

Apresentam-se e discutem-se os chamados polinômios $E_N^l(\rho)$ e $G_N^l(\rho)$ os quais emergem do estudo da equação diferencial de Laplace no universo de de Sitter.

- [20] —, *A equação de Klein-Gordon generalizada no universo de Robertson-Walker*, in Tema: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, vol. 2, Santos-SP, 2000, pp. 101–106.

Introduz e discute-se a equação diferencial de segunda ordem generalizada de Klein-Gordon no espaço-tempo de Robertson-Walker, usando o operador invariante de Casimir de segunda ordem escrito em coordenadas hiperesféricas. Os espaços-tempos de de Sitter e anti-de Sitter são dados por um parâmetro associado à curvatura do espaço-tempo. É discutido o caso de frequência positiva (negativa). O caso minkowskiano, isto é, o caso de curvatura nulo é também recuperado.

- [21] —, *Equações de onda generalizadas no universo de Robertson-Walker*, in Resumos do XXIV-CNMAC, Belo Horizonte-MG, 2001.
- [22] —, *On the second order field equation*, (2002). Em fase final.
- [23] —, *On the solution of the generalized Dirac wave equation*, (2002). Em fase final.
- [24] D. GOMES, E. A. NOTTE CUELLO, AND E. CAPELAS DE OLIVEIRA, *A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Robertson-Walker*, in Tema: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, vol. 1, Santos-SP, 1999, pp. 101–110.
- É obtido, usando os operadores diferenciais generalizados, o operador invariante de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappiè-de Sitter, isomorfo ao grupo das pseudo-rotações 5-dimensional, o qual é o grupo de isometrias admitido pelo espaço-tempo de Robertson-Walker sem matéria e radiação.
- [25] —, *Massless Klein-Gordon equation in the Robertson-Walker spacetime*, in IX-COMCA, Antofagasta, 1999.
- [26] —, *Wavelike equations in the Robertson-Walker spacetimes*, (2002). Em fase final.
- [27] F. GÜRSEY, *Introduction to group theory*, in Relativity, Group and Topology: the 1963 Les Houches Lectures, B. S. DeWitt and C. M. DeWitt, eds., New York, 1964, Gordon and Breach, pp. 88–161.
- [28] F. GÜRSEY AND T. D. LEE, *Spin 1/2 wave equation in de-Sitter space*, Proceedings of National Society of Science, (1963), pp. 179–186.
- [29] R. HERMANN, *Lie Groups for Physicists*, W. A. Benjamin Inc, New York, 1966.
- [30] J. G. KURIYAN, N. MUKUNDA, AND E. G. SUDARSHAN, *Master analytic representation and unified representation theory of certain orthogonal and pseudo-orthogonal groups*, Communication in Mathematical Physics, (1968), pp. 204–227.

A teoria de representação dos grupos $SO(5)$, $SO(4,1)$, $SO(6)$ e $SO(5,1)$ é estudada utilizando o método da "Master Analytic Representation" (MAR). É mostrado que uma expressão analítica simples para os elementos de matriz dos geradores de $SO(n+1)$ e $SO(n,1)$ em uma base de $SO(n)$ resulta todas as representações unitárias (para $n = 4, 5$); e que os grupos compactos e não compactos têm essencialmente a mesma representação analítica. Uma vez que o MAR do grupo é encontrado, a busca pela representação unitária irredutível é reduzida à operações puramente aritméticas. O máximo cuidado tem sido tomado em conduzir a discussão num nível elementar: conhecimento da teoria do momento angular simples é o único pré-requisito.

- [31] D. LOVELOCK AND H. RUND, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*, Dover Publications Inc, New York, 1989.
Foi tomado como referência o Apêndice.
- [32] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, AND R. P. SONI, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [33] W. MILLER JR., *Symmetry Groups and Their Applications*, Academic Press, New York, 1972.
- [34] E. MONTALDI AND A. ZECCA, *Neutrino wave equation in the Robertson-Walker geometry*, International Journal of Theoretical Physics, 33 (1994), pp. 1053–1062.

A equação de Dirac sem o termo de massa é separada na geometria de Robertson-Walker. O problema é reduzido a uma equação unidimensional tipo Schrödinger, o qual é mostrado admitir espectro discreto positivo. A existência ou não, do espectro discreto de energia do neutrino é relacionado, no caso da cosmologia estandar, com a hipótese do universo ser fechado ou não.

- [35] E. T. NEWMAN AND R. PENROSE, *An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients*, Journal of Mathematical Physics, 3 (1962), pp. 896–902. Errata 4 (1963) 998.
- [36] E. A. NOTTE CUELLO AND E. CAPELAS DE OLIVEIRA, *Klein-Gordon and Dirac equations in the de Sitter spacetime*, International Journal of Theoretical Physics, 38 (1999), pp. 585–598.

Apresentam-se e discutem-se as equações de onda de Klein-Gordon e Dirac no universo de de Sitter. Para obter a equação de Dirac usa-se a fatoração do operador de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappié-de Sitter. Ambas as equações são discutidas em termos dos harmônicos esféricos com peso de spin. Um caso particular da equação de Dirac é resolvida em termos de uma nova classe de polinômios.

- [37] E. A. NOTTE CUELLO AND E. CAPELAS DE OLIVEIRA, *Dirac equations in the de Sitter universe*, International Journal of Theoretical Physics, 36 (1997), pp. 1231–1247.

Apresenta-se e discute-se a equação de onda de Dirac no universo de de Sitter. Esta equação é obtida fatorando o operador invariante de Casimir de segunda ordem associado ao grupo de Fantappiè-de Sitter.

- [38] R. PENROSE AND W. RINDLER, *Spinors and Space-Time*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [39] I. R. PORTEOUS, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [40] I. H. REDMOUNT AND S. TAKAGI, *Hyperspherical Rindler space, dimensional reduction and de Sitter scalar field theory*, Physical Review D, 37 (1988), pp. 1443–1455.

A teoria de campos no espaço de de Sitter é relacionada à teoria do espaço-tempo chato via redução dimensional. O espaço de de Sitter pode ser mergulhado no espaço de Minkowski com uma dimensão maior como um hiperbolóide de uma folha. Este trabalho examina a teoria de campo resultante no espaço de de Sitter por um campo escalar real, livre e sem massa no espaço de mergulho. Isto corresponde a uma coleção de escalares com massa no espaço de de Sitter, com a massa acima de um limite inferior positivo: Metade dos modos normais em coordenadas hiperesféricas de Rindler reduzem-se a tais campos no espaço de de Sitter mergulhado, enquanto a outra metade se anula. Redução dimensional simplesmente elimina aqueles modos sem contribuição. A teoria de campo quantizada no espaço de Rindler hiperesférico, e por consequência, no espaço de de Sitter, é tratada aqui usando tanto a expansão em operadores canônicos quanto o formalismo funcional de Schrödinger. Transformações entre operadores de campo e funcionais de estado de ondas na teoria de Rindler-de Sitter e os da formulação no espaço de Minkowski são calculadas explicitamente. O estado de vácuo de Minkowski corresponde ao vácuo de Chernikov-Tagirov ou euclidiano dos campos do espaço de de Sitter. As "partículas" de Rindler-de Sitter contidas nestes estados, para vários modos simples escolhidos, podem depender do tempo, mesmo não monotonicamente, também exibem aspectos "thermais" lembrando aqueles da teoria do espaço de Rindler retangular ou da teoria de campo euclidiana no espaço de de Sitter.

- [41] W. RINDLER, *Essential Relativity*, Springer-Verlag, New York, USA, 1977.
- [42] E. A. TAGIROV, *Consequences of field quantization in de Sitter type cosmological models*, Annals of Physics, 76 (1973), pp. 561–579.

O presente trabalho pode ser dividido em três partes diretamente associadas. A primeira parte é uma discussão da necessidade da covariância conforme da equação relativista do campo escalar, partindo da teoria quântica de campos. A segunda parte consiste em refutar a asserção ou implicação das Refs.[3, 5] que no universo de

de Sitter (e conseqüentemente, em alguns outros modelos cosmológicos) a massa de repouso de uma partícula escalar não pode ser zero. Na terceira parte a proibição da auto-interação cúbica do campo escalar versus a de quarta ordem no modelo cosmológico em questão, é mostrada. Esta proibição se manifesta na divergência de um tipo especial (não ultra-violeta), na teoria das perturbações, da interação formada, mas não há nenhuma outra divergência para as interações anteriores. A relação dos resultados com a realidade é discutida.

- [43] M. V. TAKOOK, *Spin 1/2 field theory in the de Sitter space-time*, (2000). e-print:gr-qc/0005077

Uma quantização covariante do campo de espinores livre ($s = \frac{1}{2}$) no espaço-tempo de de Sitter 4-dimensional baseada na analiticidade da variedade pseudo-riemanniana complexificada é apresentada. É definida a função de dois pontos de Wightman $\mathcal{W}(x, y)$, satisfazendo as condições: a) positividade, b) localidade, c) covariância, e d) analiticidade normal. A estrutura de espaço de Hilbert e os operadores de campo $\psi(f)$ são definidos. Uma fórmula independente da coordenada para o operador de campo incomensurável $\psi(x)$ é também dada.

- [44] R. M. WALD, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

- [45] T. WYROZUMSKI, *On an alternative construction of the vacuum in (1 + 3)-dimensional de Sitter spacetime*, *Classical and Quantum Gravity*, 5 (1988), pp. 1607–1613.

Um novo método de construção do vácuo de Sitter-invariante para o campo escalar no espaço-tempo de de Sitter (1+3)-dimensional é proposto. O vácuo é obtido através da projeção do espaço-tempo de Minkowski (1+4)-dimensional. Esta construção se aplica a todo o espectro de massa do campo. Este tratamento reproduz exatamente o vácuo de Chernikov e Tagirov(1968) obtido por meio de um processo essencialmente diferente.

- [46] A. ZECCA, *The Dirac equation in the Robertson-Walker space-time*, *Journal of Mathematical Physics*, 37 (1996), pp. 874–879.

A equação de Dirac é considerada, via o formalismo de Newman-Penrose, no contexto da geometria de Robertson-Walker. A solução da equação, que contrariamente ao caso do neutrino não é diretamente separável, é reduzido ao estudo das equações temporal e espacial desacopladas. A equação espacial é explicitamente integrada e mostra a existência de níveis de energia discreto no caso do universo fechado. Além do neutrino a equação temporal é discutida nas situações limites da cosmologia estandar.