Aspectos Analíticos, Empíricos e Fenomenológicos do Espalhamento Elástico de Hádrons em Altas Energias

Regina Fonseca Ávila

Prof. Dr.: Márcio José Menon
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

IMECC - UNICAMP

Fevereiro de 2009

Aspectos Analíticos, Empíricos e Fenomenológicos do Espalhamento Elástico de Hádrons em Altas Energias

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Regina Fonseca Ávila e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de março de 2009

Prof. Dr.: Márcio José Menon
Orientador

Banca Examinadora

1. Prof. Dr.: Márcio José Menon
2. Prof. Dr.: Jayme Vaz Jr.
3. Prof. Dr.: Edmundo Capelas de Oliveira
4. Prof. Dr.: Erasmo Madureira Ferreira
5. Prof. Dr.: Bruto Max Pimentel Escobar

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Ávila, Regina Fonseca
Av55a Aspectos analíticos, empíricos e fenomenológicos do espalhamento elástico de hádrons em altas energias/Regina Fonseca Ávila -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientador : Márcio José Menon
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partículas. 2. Espalhamento elástico. 3. Hadrons. 4. Relações de dispersão. 5. Interações de altas energias. I. Menon, Márcio José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Analytical, empirical and phenomenological aspects of elastic hadron scattering at high energies

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Particles. 2. Elastic scaterring. 3. Hadrons. 4. Dispersion relation. 5. High-energy interaction.

Área de concentração: Física Matemática

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcio José Menon (IFGW-UNICAMP)
Prof. Dr. Jayme Vaz Jr. (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Erasmo Madureira Ferreira (IF-UFRJ)
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)

Data da defesa: 19/02/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 19 de fevereiro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MÁRCIO JOSÉ MENON

Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Erasmo Ferreira

Prof(a). Dr(a). ERASMO MADUREIRA FERREIRA

Prof(a). Dr(a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR

Aos meus pais, Francisco e Virgínia.

Agradecimentos

A minha família pelo apoio em todos os momentos.

Ao Prof. Márcio José Menon pela orientação e pela grande contribuição a minha formação.

Aos colegas de grupo Álvaro, Daniel, Emerson, Geovanna, Montanha e Sérgio.

Ao Prof. Basarab Nicolescu pela orientação durante o estágio no Grupo Teórico do Laboratoire de Physique et des Hautes Énergies (LPNHE) da Université Pierre et Marie Curie, Paris e ao Prof. Pierre Gauron pelo auxílio na orientação.

Ao Prof. Pascal Debu por ter me recebido no LPNHE.

Ao pessoal da secretaria do Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia (DRCC).

Finalmente agradeço ao CNPq (03/2003 - 05/2003) e a Fapesp (06/2003 - 02/2007) pelo suporte financeiro.

Resumo

Apresentamos um estudo amplo e abrangente do espalhamento elástico de hádrons em altas energias através de três abordagens distintas: analítica, empírica e fenomenológica. A primeira é caracterizada pelos princípios de analiticidade e cruzamento, limites polinomiais para a amplitude de espalhamento e relações de dispersão. Em especial, para classes de funções de interesse físico, introduzimos novas relações de dispersão *derivativas*, que são equivalentes às relações de dispersão integrais. Na segunda abordagem, decorrente do princípio de Unitaridade, tratamos a Representação Eiconal. Nesse contexto, a partir de uma parametrização empírica para a amplitude de espalhamento e um método analítico-numérico, determinamos a eiconal no espaço de momento transferido, de forma independente de modelo. Em especial, obtemos evidência estatística de que a parte imaginária da eiconal apresenta um zero (troca de sinal); as implicações desse zero no contexto fenomenológico são discutidas em certo detalhe. Na abordagem fenomenológica, através de um modelo baseado no formalismo de Regge, estudamos as contribuições do Odderon (amplitude ímpar) e Pomeron (amplitude par) no regime de altas energias. Em especial, descrevemos novos procedimentos que podem levar à detecção do Odderon nos experimentos a serem realizados com aceleradores de partículas, o "Relativistic Heavy Ion Collider"(RHIC) e "Large Hadron Collider"(LHC).

Abstract

We investigate high-energy elastic hadron scattering by means of three different approaches: analytical, empirical, and phenomenological. The first one is characterized by the fundamental principles of analyticity and crossing symmetry, polynomial limits for the scattering amplitude and dispersion relations. In special, for classes of functions of physical interest, we introduce novel *derivative* dispersion relations wich are equivalent to integral dispersion relations. In the second approach, based on unitarity principle, we treat the eikonal representation. In this context, by means of an empirical parametrization for the scattering amplitude and an analytical-numerical method, we extract the eikonal in the momentum transfer space, in a model independent way. In special, we obtain statistical evidence that the imaginary part of eikonal presents a zero (change of sign) in the momentum transfer space; the implication of this zero in the phenomenological context is discussed in certain detail. In the third approach, through a model based on the Regge formalism, we investigate the contributions of the Odderon (odd amplitude) and the Pomeron (even amplitude) in the high energy region. In special, we describe new procedures that can lead to the detection of the Odderon in the experiments to be performed in particle accelerators, Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) and Large Hadron Collider (LHC).

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A Física de Partículas é o ramo da Física que estuda os constituintes elementares da matéria e a forma como eles interagem. Toda matéria é composta de três tipos de partículas elementares: léptons, quarks e as mediadoras. Há quatro forças fundamentais na natureza: forte, eletromagnética, fraca e gravitacional e cada uma dessas forças é transmitida, ou mediada, pela troca de uma partícula. No caso da força forte, também denominada nuclear ou hadrônica, o mediador é o glúon que, da mesma forma que os quarks, carrega carga de cor, a carga da força forte. A Cromodinâmica Quântica (CQ) é a teoria de campos que descreve a interação entre quarks e glúons e é considerada a teoria fundamental das interações fortes [1, 2, 3]. Quarks são férmions com spin 1/2. Há seis sabores de quarks (antiquarks): u (up), d (down), c (charm), s (strange), b (botton) e t (top). Um quark (antiquark) de um sabor específico pode apresentar-se em três cores: verde, vermelho e azul. Já os glúons apresentam-se em 8 combinações de cores. Os hádrons são combinações de cor neutra de quarks, antiquarks e glúons e dividem-se em mésons (bósons) e bárions (férmions), a menos de possibilidades exóticas. Todo méson é composto de um quark e um antiquark e todo bárion é composto de três quarks [1, 2, 3].

Informações sobre a estrutura e as propriedades dos hádrons e seus constituintes podem ser obtidas através da análise de dados em colisões de partículas em aceleradores e de observações das interações dos raios cósmicos com os constituintes da atmosfera [1, 4]. Estas colisões podem ser classificadas em duras (hard) e suaves (soft). Os processos duros são caracterizados por um grande momento transferido na colisão (pequeno parâmetro de impacto). Um exemplo é o espalhamento inelástico profundo de elétrons por núcleons. Já os processos suaves são caracterizados por um momento transferido pequeno (grande parâmetro de impacto). Como exemplo temos o espalhamento elástico de dois prótons. Para descrever os processos hadrônicos com grandes valores do momento transferido, onde os constituintes dos hádrons comportam-se como partículas livres, regime de liberdade assintótica, utiliza-se a Cromodinâmica Quântica Perturbativa. Entretanto, essa abordagem é inadequada para descrever processos com pequeno momento transferido, os processos suaves, o chamado regime de confinamento, pois a constante de acoplamento efetiva das interações fortes é grande, de forma que o tratamento teórico deve ser não perturbativo [5, 6].

Em altas energias, um processo difrativo hadrônico é definido como uma reação na qual não são trocados números quânticos entre as partículas que colidem, ou seja, as partículas no final da reação tem os mesmos números quânticos das partículas antes da colisão. O termo difração foi introduzido na física nuclear de altas energias nos anos 50. O termo é utilizado em analogia ao fenômeno óptico que ocorre quando um feixe de luz encontra um obstáculo ou atravessa uma fenda de dimensão comparável ao seu comprimento de onda. Os processos difrativos são divididos em 1. *Espalhamento elástico:* as partículas no final da reação são iguais às partículas antes da colisão ($1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$); 2. *Difração simples:* uma das partículas incidentes é igual a uma das partículas no estado final e a outra dá origem a um feixe de partículas (ou a uma ressonância) com os mesmo números quânticos ($1 + 2 \rightarrow 1' + X_2$); 3. *Difração dupla:* cada uma das partículas incidentes dá origem a um feixe de partículas (ou a uma ressonância) com os mesmo números quânticos das partículas iniciais ($1 + 2 \rightarrow X_1 + X_2$) [5].

Nosso interesse neste trabalho é estudar o espalhamento elástico, que é o processo difrativo mais simples, especificamente os espalhamentos próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$). Podemos justificar a importância de se estudar esses processos com dois argumentos. O primeiro é que, atualmente, não existe um tratamento teórico dos processos difrativos suaves, baseado exclusivamente na Cromodinâmica Quântica, apesar do sucesso dessa teoria para descrever processos com grande momento transferido, no regime perturbativo. O segundo são os novos dados experimentais de colisões pp que serão obtidos nos aceleradores RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) em Brookhaven, EUA [7] e LHC (Large Hadron Collider) no CERN, Suíça [8] em energias nunca antes alcançadas, 500 GeV e 14 TeV, respectivamente.

O espalhamento elástico hadrônico é descrito por uma amplitude de espalhamento A que é função de duas variáves independentes. Geralmente, no referencial do centro de massa são utilizadas as variáveis de Maldelstam s (energia ao quadrado) e t (momento transferido ao quadrado). É em termos dessa amplitude que as principais quantidades físicas que caracterizam o espalhamento elástico são escritas [6], tais como, a seção de choque total

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\operatorname{Im} A(s, t = 0)}{s}, \tag{1.1}$$

a seção de choque diferencial,

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t} = \frac{|A(s,t)|^2}{16\pi s^2}, \tag{1.2}$$

o parâmetro ρ

$$\rho(s) = \frac{\operatorname{Re} A(s, t = 0)}{\operatorname{Im} A(s, t = 0)} \tag{1.3}$$

e a inclinação na direção frontal

$$B(s, t = 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\ln \frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t}\right]_{t=0}. \tag{1.4}$$

Devido às dificuldades teóricas, uma estratégia utilizada no estudo do espalhamento elástico é a fenomenologia, que é a pesquisa na interface entre a teoria e o experimento. Busca-se descrever os dados experimentais relacionando-os com princípios gerais da teoria, tais como Analiticidade, Unitaridade e Simetria de Cruzamento, e também busca-se contribuições ao desenvolvimento da teoria em termos de sistemas adequados de cálculos e/ou reformulações. O trabalho desta tese tem foco em três aspectos distintos.

O primeiro foco é em relações de dispersão, que conectam as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento. Trata-se de uma ferramenta matemática importante na investigação simultânea do espalhamento partícula-partícula e partícula-antipartícula, em especial a seção de choque total e o parâmetro ρ (eq. (1.1) e (1.3)), uma vez que são escritos em função das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento [6, 9, 10]. As relações de dispersão na forma *integral*, para as amplitudes hadrônicas, foram introduzidas por volta de 1960, como consequências diretas da analiticidade da amplitude e do teorema de Cauchy [11, 12]. Alguns anos mais tarde, surgiram as Relações de Dispersão Derivativas que, na região de altas energias $\sqrt{s} \gtrsim 10$ GeV, podem substituir as relações de dispersão integrais [13, 14, 15, 16, 17]. As formas derivativas possuem vantagens de simplificar os cálculos e permitir que a parte real de $A(s,t)$ seja obtida, numa determinada energia, através de uma série de derivadas da parte imaginária na mesma energia, sem a necessidade de se conhecer $\operatorname{Im} A(s,t)$ num intervalo infinito, como no caso das relações de dispersão integrais [18]. Em 2003, Cudell, Martynov e Selyugin introduziram um termo de correção às Relações de Dispersão Derivativas [19] que estendia a validade das relações derivativas a energias mais baixas, mas que ainda não as tornavam matematicamente equivalentes às relações de dispersão integrais. Neste trabalho mostramos que, para uma classe de funções de interesse físico, como a amplitude de espalhamento frontal, as relações integrais podem ser substituídas por formas derivativas sem o uso da aproximação de altas energias. Essas novas relações foram chamadas de Relações de Dispersão Derivativas Estendidas e são equivalentes, sob certas condições, às Relações de Dispersão Integrais [10, 20]. Recentemente, E. Ferreira e J. Sesma [21] expressaram as Relações de Dispersão Derivativas Estendidas em uma forma mais compacta e mais simples para verificação de convergência. Utilizando parametrizações analíticas para a seção de choque total pp e $p\bar{p}$ exemplificamos numericamente a consistência dos resultados obtidos com as Relações de Dispersão Integrais e os obtidos com as Relações de Dispersão Derivativas Estendidas, através do ajuste conjunto de dados de seção de choque total $\sigma_{\rm tot}$ e do parâmetro ρ. Também, comparamos os resultados obtidos através das Relações de Dispersão Derivativas Estendidas com as outras representações para as relações derivativas e discutimos o papel da constante de subtração. Além disso, é feita uma discussão sobre os resultados obtidos e as limitações da análise.

No segundo ponto abordado na tese utilizamos a representação eiconal. Nesta representação, a amplitude de espalhamento, como função da energia no centro de massa, $\sqrt{s}$, e do quadrimomento transferido ao quadrado, $q^2 = -t$, é escrita, sob a hipótese de simetria azimutal, da seguinte forma [5]

$$F(s,q) = \mathrm{i} \int_0^\infty b \, \mathrm{d}\, b J_0(qb)[1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(s,b)}], \tag{1.5}$$

onde b é o parâmetro de impacto, J_0 é a função de Bessel de ordem zero e $\chi(s,b)$ é a função eiconal no espaço de parâmetro de impacto. No espaço de momento transferido a eiconal é dada por

$$\tilde{\chi}(s,q) = \int_0^\infty b \, \mathrm{d}\, b J_0(qb) \chi(s,b). \tag{1.6}$$

Num contexto teórico, os modelos eiconais são caracterizados por diferentes escolhas fenomenológicas para a função eiconal no espaço de q [22]. O teste para qualquer escolha de $\tilde{\chi}(s,q)$ é a comparação com os dados experimentais. Isto requer que a partir de $\tilde{\chi}(s,q)$ (1.6) obtenhamos as quantidades físicas que caracterizam o espalhamento elástico [23]. Se tivermos algum tipo de informação empírica ou independente de modelo sobre a eiconal no espaço de q, $\tilde{\chi}(s,q)$, esta informação pode contribuir como um critério na construção ou seleção de modelos para a eiconal no espaço de q. Por esta razão, trabalhamos com o chamado *problema inverso do espalhamento* [23, 24], isto é, a determinação, ou extração, da eiconal a partir dos dados experimentais do espalhamento pp e seção de choque diferencial, seção de choque total e o parâmetro ρ [22]. Neste trabalho, utilizamos parametrizações empíricas para a seção de choque diferencial pp, no intervalo de energia

$19.4 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV, e um método analítico-numérico, introduzido em [24], e determinamos a eiconal no espaço de momento transferido. O método permite a propagação das incertezas dos parâmetros do ajuste de $\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,q^2}$ para a eiconal, levando à evidência estatística de que a parte imaginária da eiconal apresenta um zero no espaço de momento transferido, em $q^2 \approx 7 \pm 1$ GeV^2 [22]. Discutimos a importância desta mudança de sinal no contexto fenomenológico, bem como, conexões empíricas entre a eiconal extraída e os resultados de uma recente análise global de dados de fator de forma eletromagnético do próton. Além disso, apresentamos também uma revisão dos dados de seção de choque diferencial pp atualmente disponíveis em altas energias [22].

O terceiro ponto abordado na tese é o desenvolvimento de um modelo fenomenológico envolvendo a questão do Odderon, introduzido por Lukaszuk e Nicolescu em 1973 [25]. Este estudo é decorrente do estágio realizado no Laboratório de Física de Altas Energias da Universidade Pierre e Marie Curie, Paris, no período de maio a julho de 2006, sob a supervisão dos professores Basarab Nicolescu e Pierre Gauron. O Odderon e o Pomeron são objetos que tiveram origem na teoria de Regge. Nesta teoria, a interação entre as partículas colidentes é interpretada em termos da troca dos chamados pólos de Regge e cortes de Regge (Regge poles e Regge cuts) [26]. Na Cromodinâmica Quântica Perturbativa, o Pomeron pode ser entendido, de maneira simples, como um objeto formado por dois gluóns (paridade par) enquanto o Odderon como um objeto formado por três glúons (paridade ímpar) [27]. Do ponto de vista experimental, o crescimento universal de todas as seções de choque hadrônicas com a energia é uma indicação da contribuição predominante do Pomeron. Mas no caso do Odderon nenhum sinal experimental foi observado, havendo apenas uma evidência sugestiva representada pela diferença entre $\left(\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t}\right)^{pp}$ e $\left(\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t}\right)^{\bar{p}p}$ na região do mínimo $1.1 < |t| < 1.5$ GeV^2, para energia no centro de massa $\sqrt{s} = 52.8$ GeV [28, 29]. Atualmente, o Odderon tem chamado a atenção dos pesquisadores por dois motivos. O primeiro é que os dados que podem ser obtidos no RHIC e no LHC trarão novas oportunidades para se encontrar evidências experimentais do Odderon. O segundo motivo é que foi mostrado que o Odderon também pode evidenciar-se no Color Glass Condensate (CGC), uma teoria para altas energias da Cromodinâmica [30]. Nesta tese consideramos uma forma geral para as amplitudes hadrônicas, compatíveis com o máximo crescimento da amplitude das interações fortes em energias assintóticas e o comportamento de Regge em energias mais baixas [31, 32]. A estratégia utilizada é a seguinte. Consideramos dois casos: um com a presença da contribuição do Odderon e outro no qual a contribuição do Odderon está ausente. Utilizamos uma seleção de dados efetuada por Nicolescu e Gauron de σ_{tot}, ρ, $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ e $\Delta\sigma = \sigma_{\mathrm{tot}}^{\bar{p}p} - \sigma_{\mathrm{tot}}^{pp}$, na região de energia no centro de massa $4.54 \leq \sqrt{s} \leq 1800$ GeV e de momento transferido ao quadrado $0 \leq |t| \leq 2.6$ GeV^2. A partir de métodos de ajuste (redução) a forma que apresentou melhor descrição dos dados foi aquela que contém a contribuição do Odderon. Com essa parametrização, fizemos previsões para as energias do RHIC e do LHC. Finalmente concluímos que uma possível forma de se detectar o Odderon é utilizar os dados de seção de choque diferencial pp, que serão obtidos no RHIC na energia de $\sqrt{s} = 500$ GeV, junto com os dados de seção de choque diferencial $\bar{p}p$ obtidos pela colaboração UA4/2 em $\sqrt{s} = 541$ GeV. Com isso, pode-se verificar se existe uma diferença entre essas duas quantidades físicas na região do mínimo difrativo em $|t| \approx 0.9$ GeV^2. A outra forma seria utilizando uma medida de ρ^{pp} no LHC e comparar com dados de $\bar{p}p$, até 2 TeV

As três abordagens referidas, embora distintas, complementam-se no estudo dos espalhamentos elásticos pp e $\bar{p}p$. De forma global, constituem importantes aplicações de diferentes métodos matemáticos e estatísticos na busca de uma melhor compreensão das interações hadrônicas em altas energias.

A tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 são introduzidas as grandezas físicas, algumas notações e os dados experimentais utilizados. O Capítulo 3 é dedicado às relações de dispersão, enquanto no Capítulo 4 abordamos o segundo ponto tratado na tese que é a extração da eiconal no espaço de momento transferido. Já o Capítulo 5 trata das contribuições do Odderon à amplitude de espalhamento. Finalmente no Capítulo 6 são apresentados os comentários finais e as conclusões. Além disso no Apêndice A apresentamos um exemplo de aplicação das relações de dispersão para $t \neq 0$. No Apêndice B apresentamos mais um teste com as relações de dispersão derivativas estendidas. No Apêndice C fazemos uma comparação da prescrição $-is$ e das relações de dispersão derivativas. No Apêndice D apresentamos algumas fórmulas utilizadas relacionadas à Transformada de Mellin e finalmente no Apêndice E uma lista dos trabalhos completos publicados que tiveram origem nesta tese.

Capítulo 2

Definições e dados experimentais

Neste capítulo são introduzidas as quantidades físicas que caracterizam o espalhamento elástico e que são de interesse neste trabalho: seção de choque total, parâmetro ρ, seção de choque diferencial e inclinação na direção frontal B, todas para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$. Também apresentamos algumas definições e os dados que serão utilizados. Uma discussão sobre os dados de seção de choque diferencial pp também será feita no Capítulo 4.

Inicialmente, observamos que as partículas elementares, no caso o próton e o antipróton, são tão pequenas que para os nosso objetivos as unidades de medida usuais são inconvenientemente grandes. Como unidade de energia utilizamos o eletronvolt, que é a energia adquirida por um elétron quando acelerado por uma diferença de potencial de 1 volt, 1 eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ joules. Energias típicas em Física de Partículas são MeV, GeV e também o TeV. Os momentos são medidos em MeV/c (c, velocidade da luz) e as massas em MeV/c^2. O próton, por exemplo, possui massa 938 MeV/c^2. A unidade de área, com a qual medimos as seções de choque, é o barn, 1 barn $= 10^{-24}$ cm^2. Valores típicos das seções de choque total pp e $\bar{p}p$ são mb. Vamos utilizar a convenção usual em física de altas energias $\hbar = 1$ e $c = 1$ [1].

2.1 Cinemática e definições

O quadri-vetor energia momento de uma partícula é definido por [33, 34]

$$P = (E, \vec{p}), \tag{2.1}$$

onde E é a energia e $\vec{p}$ é o momento tridimensional. O produto interno de dois quadrivetores $P_1 = (E_1, \vec{p_1})$ e $P_2 = (E_2, \vec{p_2})$ é dado por

$$P_1 P_2 = E_1 E_2 - \vec{p_1}.\vec{p_2}, \tag{2.2}$$

onde $\vec{p_1}.\vec{p_2}$ é o produto interno usual do $I\!R^3$; trata-se de um invariante de Lorentz, ou seja, o mesmo valor em qualquer sistema inercial. Logo $PP = P^2$ é um invariante e seu valor é

$$P^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 \tag{2.3}$$

onde m é a massa.

2.1.1 Sistemas de Lorentz para a descrição do processo de espalhamento

O uso de um referencial pode tornar-se mais conveniente que outro se as variáveis expressas nele tomam formas mais simples. Dois destes referenciais são o sistema do laboratório e o sistema do centro de momento.

O sistema do laboratório

É o sistema onde uma das partículas do estado inicial, antes da colisão, está em repouso. Por exemplo, a partícula b. Então usamos a notação

$$\begin{aligned} P_a &= (E_a, \vec{p_a}) \\ P_b &= (m_b, 0) \\ P_c &= (E_c, \vec{p_c}) \\ P_d &= (E_d, \vec{p_d}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

As variáveis mais convenientes são as energias E_a, E_c, E_d e $\cos\theta_L$, onde θ_L é o ângulo entre a direção da partícula incidente e da partícula espalhada. Estas variáveis podem ser facilmente escritas em função de invariantes. Se $m_a = m_c$ e $m_b = m_d$

$$E_a = \frac{1}{m_b}(P_a P_b) \tag{2.5}$$

é a energia no laboratório da partícula incidente,

$$E_c = \frac{1}{m_b}(P_b P_c) \tag{2.6}$$

é a energia no laboratório da partícula espalhada e

$$E_d = \frac{1}{m_b}(P_b P_d) \tag{2.7}$$

é a energia no laboratório da partícula alvo após o espalhamento.

O ângulo de espalhamento vem do produto escalar entre P_a e P_c

$$P_a P_c = E_a E_c - |\vec{p_a}||\vec{p_c}| \cos\theta_L. \tag{2.8}$$

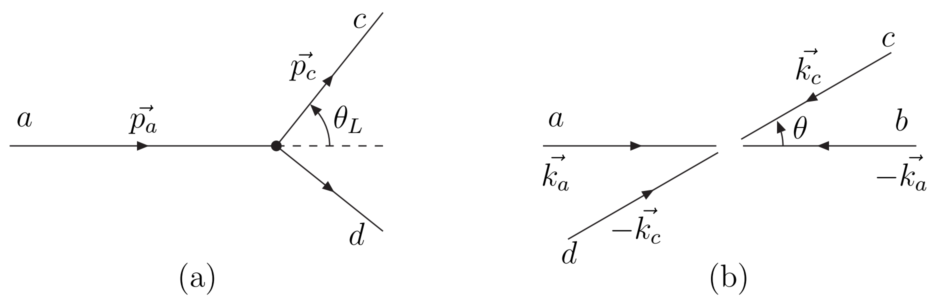

Figura 2.1: Processo de espalhamento $a + b \rightarrow c + d$ visto do (a) sistema do laboratório e (b) do centro de momento.

O sistema do centro de momento

No sistema do centro de momento (CM) escrevemos $P^* = (E^*, \vec{k})$. Esse sistema é definido por

$$\vec{k_a} + \vec{k_b} = \vec{k_c} + \vec{k_d} = 0. \tag{2.9}$$

Então

$$\vec{k_a} = -\vec{k_b}, \qquad \vec{k_c} = -\vec{k_d}. \tag{2.10}$$

Usamos a seguinte notação

$$\begin{aligned} P_a^* &= (E_a^*, \vec{k_a}) \\ P_b^* &= (E_b^*, -\vec{k_a}) \\ P_c^* &= (E_c^*, \vec{k_c}) \\ P_d^* &= (E_d^*, -\vec{k_c}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

A energia no centro de momento é dada por

$$E_{CM}^2 = (P_a^* + P_b^*)^2 = (P_c^* + P_d^*)^2. \tag{2.12}$$

Calculada neste sistema

$$E_{CM}^2 = (E_a^* + E_b^*)^2 = (E_c^* + E_d^*)^2. \tag{2.13}$$

2.1.2 As variáveis s, t e u

As variáveis s, t e u são invariantes de Lorentz introduzidas por Mandelstam em 1958 [35]. São denominadas *variáveis de Mandelstam* e definidas por

$$s = (P_a + P_b)^2 \tag{2.14}$$

$$t = (P_a - P_c)^2 \tag{2.15}$$

$$u = (P_a - P_d)^2. \tag{2.16}$$

Estas equações não são independentes, pois somando-as,

$$s + t + u = P_a^2 + P_b^2 + P_c^2 + P_d^2 + 2P_a(P_a + P_b - P_c - P_d) \tag{2.17}$$

e usando (2.3) e a conservação do quadrimomento

$$P_a + P_b = P_c + P_d \tag{2.18}$$

obtemos

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2. \tag{2.19}$$

O significado físico pode ser interpretado de duas formas. Uma é que s é o quadrado da energia no centro de momento (s é invariante) e t e u são o quadrado do quadrimomento transferido entre as partículas a e c e a e d, respectivamente. A outra forma é que s é o quadrado da energia no centro de momento se a e b ou c e d são as partículas no estado inicial, t é o quadrado da energia no centro de momento se b e d ou a e c são as partículas no estado inicial e u é o quadrado da energia no centro de momento se b e c ou a e d são as partículas no estado inicial. Nesta interpretação cada variável é descrita por um processo diferente. O processo no qual s é a energia no centro de momento é chamado canal s, o processo no qual t é a energia no centro de momento é chamado de canal t, o mesmo ocorre para u.

Vamos discutir agora o caso de nosso interesse, o espalhamento elástico de partículas com massas iguais. Denotando por m a massa, $k = |\vec{k}|$ e θ o módulo do momento e o ângulo de espalhamento no centro de massa, respectivamente as fórmulas (2.14)–(2.16) são expressas por

$$s = 4(k^2 + m^2) \tag{2.20}$$

$$t = -2k^2(1 - \cos\theta) \tag{2.21}$$

$$u = -2k^2(1 + \cos\theta). \tag{2.22}$$

E a relação (2.19) tem a forma

$$s + t + u = 4m^2. \tag{2.23}$$

Como $k \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, a região cinemática, ou física, para o espalhamento elástico de massas iguais é dada por

$$s \geq 4m^2, \qquad -4k^2 \leq t \leq 0, \qquad -4k^2 \leq u \leq 0. \tag{2.24}$$

Outra forma de se escrever s é em termos da energia E da partícula incidente no sistema do laboratório [33]

$$s = 2(m^2 + mE). \tag{2.25}$$

É possível mostrar [33] que a amplitude de espalhamento elástico de dois corpos é função de apenas duas variáveis independentes. Normalmente utilizamos s e t e escrevemos $A(s,t)$. Algumas vezes denotamos $t = -q^2$ para simplificar a notação. Também há casos, em demostrações por exemplo, em que se escreve a amplitude como $A(s,t,u)$.

2.1.3 Normalizações

Como usual na literatura, utilizaremos a amplitude de espalhamento com diferentes normalizações dependendo do contexto em que estivermos trabalhando.

No centro de momento temos a seguinte normalização [36, 37]

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,(-t)} = \frac{\pi}{k^2}|f_{\mathrm{cm}}|^2, \tag{2.26}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,f_{\mathrm{cm}}. \tag{2.27}$$

Para simplificar a notação definimos $q^2 = -t$ e

$$\frac{f_{\mathrm{cm}}}{k} \equiv F$$

obtendo

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,q^2} = \pi|F|^2 \tag{2.28}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = 4\pi\,\mathrm{Im}\,F. \tag{2.29}$$

A amplitude de espalhamento no centro de momento está relacionada à amplitude invariante de Lorentz por [37]

$$A = 8\pi\sqrt{s}f_{\mathrm{cm}}. \tag{2.30}$$

Com esta relação obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,(-t)} = \frac{1}{64\pi s k^2}|A(s,t)|^2, \tag{2.31}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \mathrm{Im}\,\frac{A(s,t)}{2k\sqrt{s}}. \tag{2.32}$$

Na região de altas energias, $s = 4(k^2 + m^2)$ pode ser aproximado por $4k^2$ e assim

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,(-t)} = \frac{1}{16\pi s^2}|A(s,t)|^2, \tag{2.33}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \mathrm{Im}\,\frac{A(s,t)}{s}. \tag{2.34}$$

Observamos que na notação de alguns autores, o sinal menos na variável t, equações (2.26), (2.31) e (2.33) é omitido. No que segue utilizaremos essa notação, notando também que não há omissão de sinal nas fórmulas expressas na variável q^2.

No capítulo sobre relações de dispersão utilizamos a seção de choque no sistema do laboratório com a seguinte normalização

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(E) = \frac{4\pi}{p}\,\mathrm{Im}\, f(E, \theta_{\mathrm{lab}} = 0), \tag{2.35}$$

onde p é dado por $\sqrt{E^2 - m^2}$.

Outra quantidade física que caracteriza o espalhamento elástico é o parâmetro ρ, definido como a razão entre as partes real e imaginária da amplitude em $t = 0$. Essa grandeza independe da normalização, sendo expressa por

$$\rho = \frac{\mathrm{Re}\, F(t=0)}{\mathrm{Im}\, F(t=0)}. \tag{2.36}$$

A inclinação (slope) frontal [36], será expressa por

$$B(s, q^2 = 0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, q^2}\left\{\ln\left(\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\, q^2}\right)\right\}_{q^2=0}. \tag{2.37}$$

2.2 Amplitude de espalhamento na presença de interação coulombiana

Até agora consideramos só a força hadrônica, mas na região de pequeno t (grandes distâncias) a força de Coulomb está presente e nesse caso a seção de choque diferencial é dada por [36]

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\, t} = \frac{1}{16\pi s^2}|A_C \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\varphi(t)} + A_N|^2, \tag{2.38}$$

onde A_C é a amplitude relativa à força de Coulomb e A_N é a amplitude relativa à força nuclear ou hadrônica. A_C é dada por

$$\frac{A_c}{s} = \mp G^2(t)\frac{8\pi\alpha}{|t|}, \tag{2.39}$$

onde $G^2(t)$ é o quadrado do fator de forma eletromagnético do próton e α a constante de estrutura fina; o sinal de menos é para o espalhamento pp e o sinal de mais para o espalhamento $\bar{p}p$.

O fator de fase $\alpha\varphi$ na equação (2.38) reflete a distorção das amplitudes puras A_C e A_N devido à presença dos espalhamentos coulombiano e hadrônico simultaneamente. O fator φ calculado por Cahn [38] é dado por

$$\varphi(t) = \mp\left[\gamma + \ln\left(\frac{B|t|}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{8}{B\Lambda^2}\right) + \frac{4|t|}{\Lambda^2}\ln\left(\frac{4|t|}{\Lambda^2}\right) + \frac{2|t|}{\Lambda^2}\right], \tag{2.40}$$

onde $\gamma = 0.577\ldots$ é a constante de Euler, B é a inclinação para frente (slope), $\Lambda^2 = 0.71$ $(\mathrm{GeV/c})^2$ e o sinal superior é para o espalhamento pp e o inferior para $\bar{p}p$. Na região de interesse $G^2(t) \approx 1$.

A referência [36] apresenta uma tabela com os valores de t em algumas energias $\sqrt{s}$ para os quais a interferência da força de Coulomb é máxima. Quando tratamos, nesta tese, da representação eiconal, capítulo 4, sempre trabalharemos fora da região de interação Coulomb-Nuclear.

2.3 Limites da amplitude de espalhamento

Nesta seção citaremos alguns teoremas fundamentais de interesse, sobre o comportamento da seção de choque total e sobre a diferença entre as seções de choque partícula-partícula e partícula-antipartícula para energias assintóticas [34]. Os limites assintóticos para a amplitude de espalhamento e seção de choque total são correlacionados pelo teorema óptico (1.1).

2.3.1 Limite polinomial

O limite polinomial foi derivado da teoria de Araki-Haag da Teoria Quântica de Campos por Epstein, Glaser e Martin em 1969 [39], e seu resultado é

$$|F(s,t)| < |s|^N, \qquad s > s_0, \qquad t_0 < t \leq 0, \tag{2.41}$$

para algum N, onde N é um número natural.

2.3.2 Limite de Froissart-Martin

O limite de Froissart-Martin foi primeiro derivado por Froissart em 1961 através da representação de Mandelstam [40] e depois provado diretamente por Martin em 1966, utilizando analiticidade e unitaridade [41]. Este teorema estabelece que assintoticamente, isto é, $s \to \infty$, a seção de choque total não pode crescer mais rápido que $\log^2 s$, mais precisamente [42]

$$\sigma_{\rm tot} \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \log^2 s. \tag{2.42}$$

2.3.3 Teorema de Pomeranchuck revisado

Em 1973, baseado na hipótese de que as seções de choque podem divergir assintoticamente e usando analiticidade e unitaridade, Grumberg e Truong mostraram que [43]

$$\frac{\sigma_{\rm tot}^{ab}}{\sigma_{\rm tot}^{\bar{a}b}} \to 1, \quad s \to \infty \tag{2.43}$$

para colisões partícula-partícula (ab) e antipartícula-partícula ($\bar{a}b$). Supondo que as seções de choque $\sigma_{\rm tot}^{ab}$ e $\sigma_{\rm tot}^{\bar{a}b}$ crescem assintoticamente com $\ln^\gamma s$ é possível mostrar que [36]

$$\Delta\sigma = |\sigma_{\rm tot}^{\bar{a}b} - \sigma_{\rm tot}^{ab}| < C \ln^{\gamma/2} s.$$

Utilizando o teorema de Froissart-Martin vemos que a diferença entre as seções de choque é limitada por

$$\Delta\sigma \leq C \ln s. \tag{2.44}$$

2.3.4 Contribuições assintóticas: Pomeron e Odderon

Considerando amplitudes de espalhamento com simetria de cruzamento (crossing) par (+) e ímpar (-), o teorema óptico (1.1) permite estabelecer a seguinte decomposição das seções de choque totais

$$\sigma_{\rm tot}^{ab} = \sigma_+ + \sigma_-, \qquad \sigma_{\rm tot}^{\bar{a}b} = \sigma_+ - \sigma_- \tag{2.45}$$

ou

$$\sigma_\pm(s) = \frac{\sigma_{\rm tot}^{ab} \pm \sigma_{\rm tot}^{\bar{a}b}}{2}. \tag{2.46}$$

Decorre que, a diferença é dada por $\Delta\sigma = \sigma_{\rm tot}^{\bar{a}b} - \sigma_{\rm tot}^{ab} = 2\sigma_-$, ou seja, para $s \to \infty$:

$$\Delta\sigma \to 0 \quad \text{se e somente se} \quad \sigma_- \to 0 \tag{2.47}$$

O “objeto de troca” no caso de contribuição assintótica par foi inicialmente denominado Pomeranchuckon, posteriormente Froissaron e por fim Pomeron e, nesse caso, $\Delta\sigma \to 0$. A possível contribuição assintótica ímpar é denominada Odderon, que implica em $\Delta\sigma \neq 0$, limitado, porém, pelo teorema de Pomeranchuck revisado (2.44)

A questão de $\Delta\sigma \to 0$ ou $\Delta\sigma \neq 0$ para $s \to \infty$ é um dos problemas fundamentais das interações hadrônicas ainda não respondidos pelos dados experimentais atualmente disponíveis (figura 2.2 a seguir)

2.4 Dados experimentais

Neste trabalho utilizamos somente dados de espalhamento próton-próton (pp) e antipróton-próton ($\bar{p}p$), uma vez que tratam-se dos espalhamentos com dados experimentais na faixa mais alta de energia investigada até o momento. Faremos uso apenas de dados obtidos em aceleradores. Atualmente as informações experimentais vão até $\sqrt{s}$ igual a 62.5 GeV e 1800 GeV para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$, respectivamente.

Os dados de seção de choque e do parâmetro ρ que utilizamos são os da base de dados do Particle Data Group (PDG) [3]. Iniciamos o trabalho com a compilação de 2002, mas foram lançadas mais duas compilações de dados por este grupo em 2004 e 2006. Em 2002 a colaboração E811 publicou [44] mais um valor para a seção de choque total σ_{tot} e para o parâmetro $\rho^{\bar{p}p}$ na energia no centro de massa de 1.8 TeV. Isso se refletiu nas análises que efetuamos e publicamos em anos sucessivos. Por esta razão deixaremos claro quais dados estamos utilizando em cada ponto da tese. As figuras 2.2 e 2.3 mostram os dados de σ_{tot} e do parâmetro ρ, respectivamente, da versão 2006 do PDG [3].

Com relação aos dados de seção de choque diferencial temos duas compilações diferentes para o caso da abordagem empírica (somente pp) e da fenomenológica (pp e $\bar{p}p$) A razão principal é que no primeiro caso a análise aplica-se à região de altas energias ($\sqrt{s} \geq 19.4$ GeV), enquanto no segundo o modelo fenomenológico estende-se a energias mais baixas, $\sqrt{s} \geq 9.8$ GeV.

Os dados utilizados na análise empírica são discutidos e especificados no capítulo 4.

Os dados de seção de choque diferencial que serão utilizados quando tratarmos do Odderon vem de uma compilação feita por P. Gauron e B. Nicolescu ao longo dos anos aos quais acrescentamos os dados para o espalhamento antipróton-próton em $\sqrt{s} = 630$ GeV [45] e 1.8 TeV [46]. Estes dados são mostrados nas figuras 2.4 e 2.5. Na energia $\sqrt{s} = 541$ GeV temos dados de $\mathrm{d}\,N/\mathrm{d}\,t$ (dados de $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ não normalizados) na região de interferência Coulomb-nuclear, figura 2.6, [47]. Também da compilação feita por Gauron

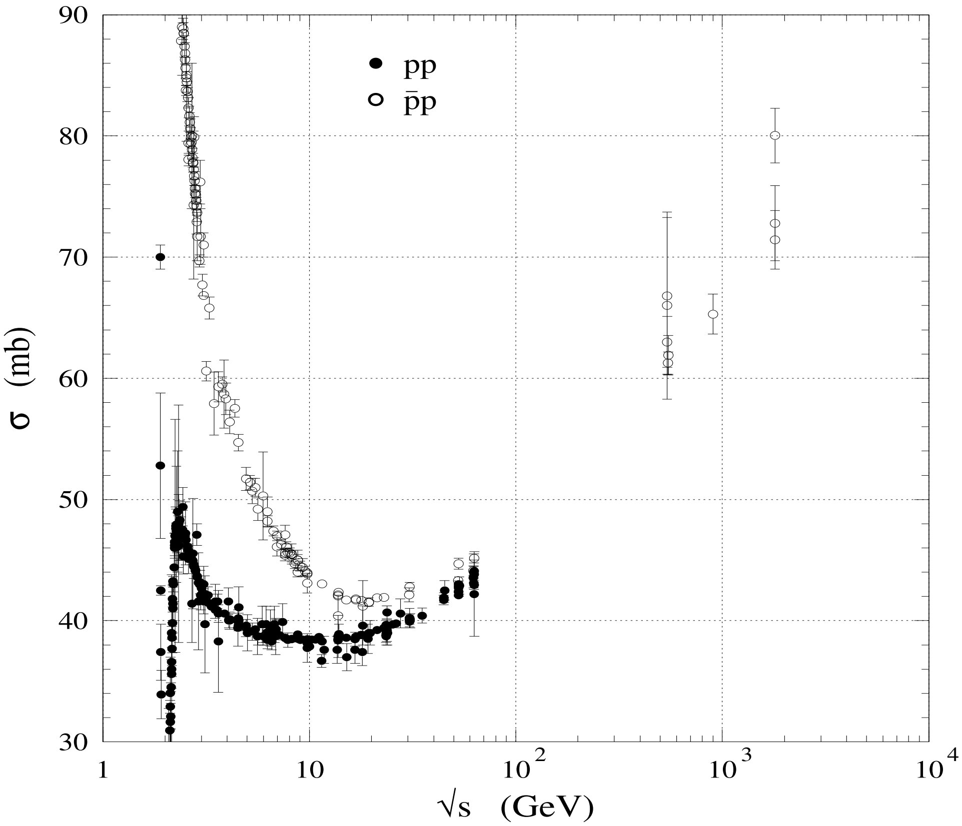

Figura 2.2: Seção de choque total próton-próton $\sigma_{\rm tot}^{pp}$ e antipróton-próton $\sigma_{\rm tot}^{\bar{p}p}$ [3].

e Nicolescu temos os dados de $\Delta\sigma = \sigma_{\bar{p}p} - \sigma_{pp}$, mostrados na figura 2.7.

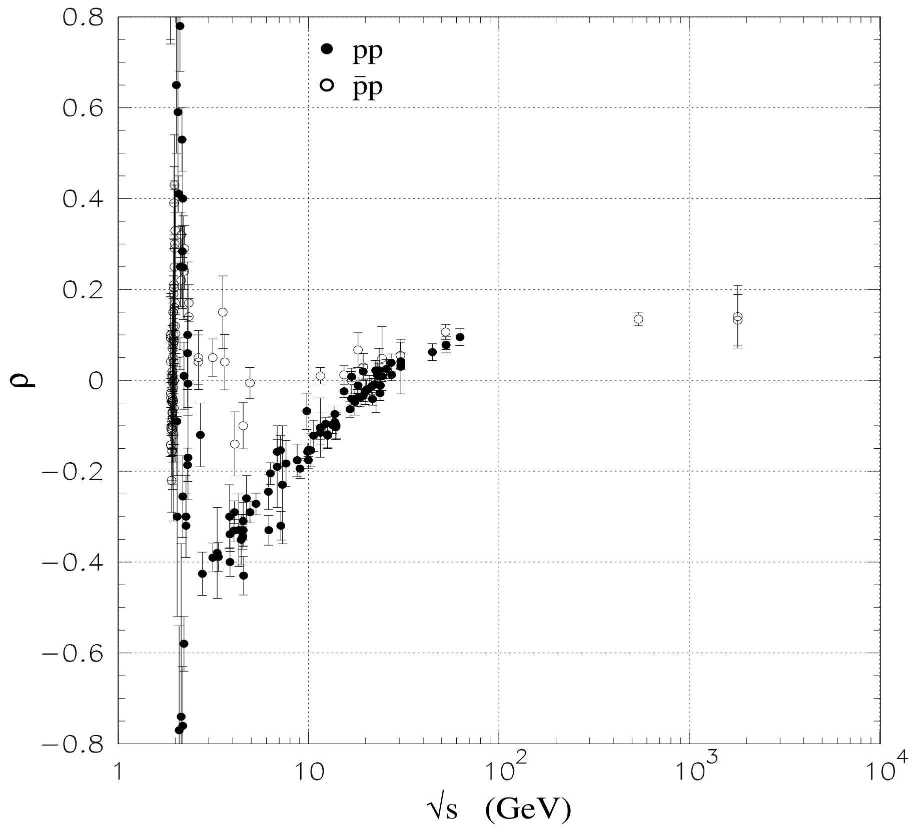

Figura 2.3: Parâmetro ρ próton-próton e antipróton-próton [3].

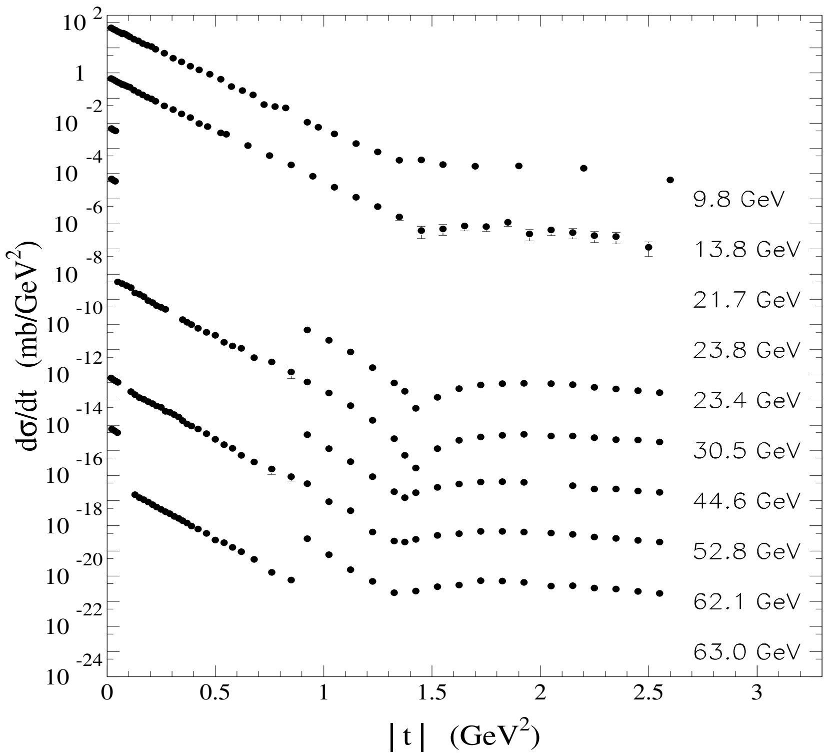

Figura 2.4: Seção de choque diferencial pp na região $|t| \leq 2.6$ GeV^2, compilados por Gauron e Nicolescu. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

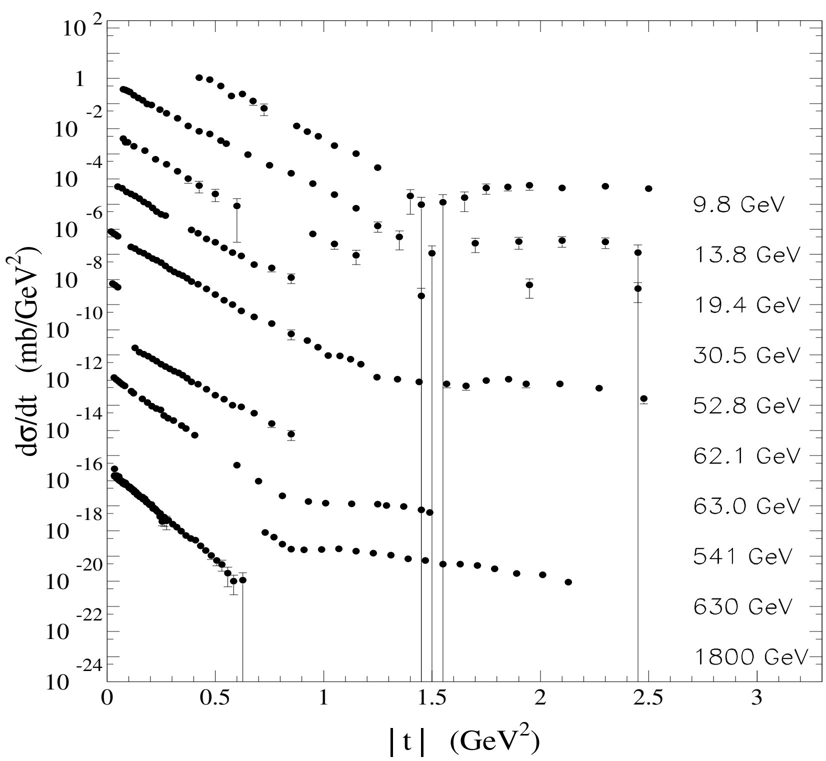

Figura 2.5: Seção de choque diferencial $\bar{p}p$ na região $|t| \leq 2.6$ GeV^2, compilados por Gauron e Nicolescu. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

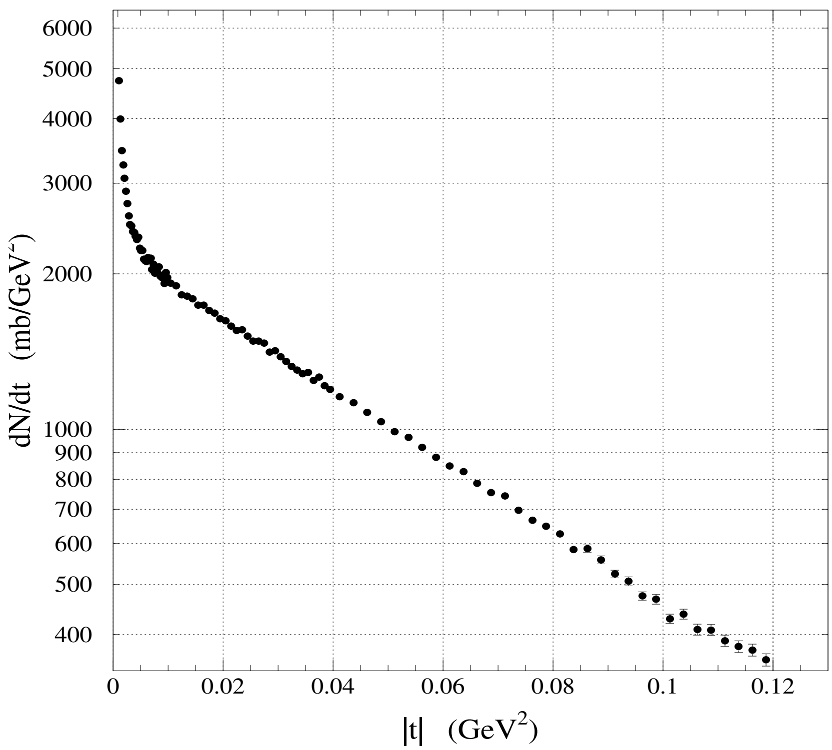

Figura 2.6: Dados $\mathrm{d}\,N/\mathrm{d}\,t$ na região de interferência Coulomb-nuclear não normalizados [47].

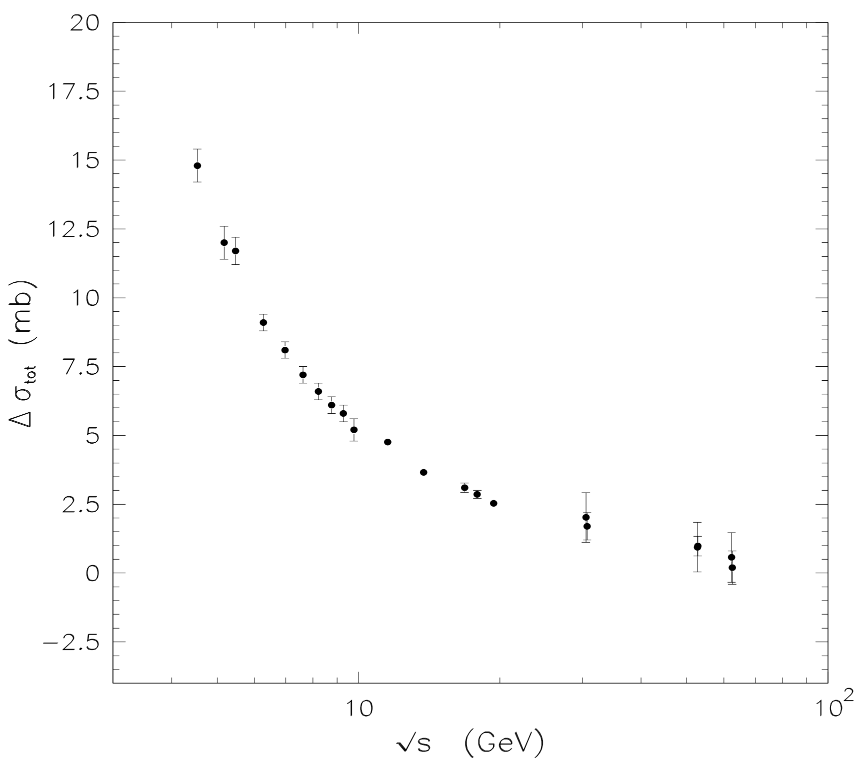

Figura 2.7: Dados $\Delta\sigma = \sigma_{\bar{p}p} - \sigma_{pp}$.

Capítulo 3

Aspectos Analíticos: Relações de Dispersão Derivativas

As relações de dispersão têm um papel importante em várias áreas da física, como uma ferramenta prática e como um resultado formal. Em especial para o espalhamento partícula-partícula e partícula-antipartícula, elas são consequências dos princípios de Analiticidade e Cruzamento [9, 36]. Entre as quantidades físicas que caracterizam o espalhamento hádron-hádron, a seção de choque total σ_{tot} (2.35) e o parâmetro ρ (2.36) são expressos em termos das partes real e imaginária da amplitude de espalhamento, de modo que, uma ferramenta útil para estudá-los são as relações de dispersão. Podemos utilizar parametrizações analíticas para σ_{tot} e ajustes de dados experimentais para calcular o parâmetro ρ ou então fazer ajustes conjuntos de σ_{tot} e ρ de modo a obter previsões para estas quantidades em energias mais altas.

Iniciamos este capítulo com uma breve descrição das propriedades analíticas da amplitude de espalhamento elástico e relembramos como as Relações de Dispersão Integrais (RDI) são deduzidas. Em seguida, apresentamos alguns resultados sobre a substituição das RDI pelas Relações de Dispersão Derivativas. Deduzimos então, as Relações de Dispersão Derivativas Estendidas (RDDE) e damos exemplos numéricos da equivalência entre estas relações e as RDI através de parametrizações para a seção de choque total. Aspectos críticos sobre as limitações da análise também são discutidos em certo detalhe. Também comparamos as RDDE com outras representações para a relações derivativas.

3.1 Analiticidade da Amplitude de Espalhamento

Consideramos novamente o espalhamento elástico

$$P_1 + P_2 \longrightarrow P_3 + P_4.$$

A amplitude para o espalhamento elástico A é definida para $s \geq 4m^2$ e $t \leq 0$. É possível mostrar que $A(s,t)$ é o limite de uma função mais geral na qual s e t tomam valores complexos [5, 36, 48]. Em particular, se fixamos $t = 0$, então $A(s, t = 0)$ é o limite de uma função analítica $\mathcal{A}$ tal que

$$A_{pp}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathcal{A}(s + \mathrm{i}\epsilon, t = 0).$$

A amplitude para o espalhamento $\bar{p}p$ é outro limite da mesma função. O princípio de cruzamento (crossing) estabelece que para obtermos a amplitude $\bar{p}p$ a partir da amplitude pp basta trocar p_2 por $-p_4$ e vice-versa. Isto é equivalente a trocar u por s (eq. (2.16) e (2.14)). A amplitude $\bar{p}p$ é obtida de $\mathcal{F}$ por

$$A_{\bar{p}p}(s, t = 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathcal{A}(-s + 4m^2 - \mathrm{i}\epsilon, t = 0).$$

A simetria é mais clara se introduzimos um nova variável [36]. Como a passagem da amplitude pp para a amplitude $\bar{p}p$ corresponde à troca $s \leftrightarrow u$, definimos

$$w = s - u. \tag{3.1}$$

A troca s por u corresponde à troca de sinal de w

$$u - s = -(s - u) = -w.$$

Como em $t = 0$, $u = -s + 4m^2$ e $s = 2m(E + m)$, temos

$$w = s - u = s - (-s + 4m^2) = 2s - 4m^2 = 4mE.$$

De forma que uma variável mais conveniente é

$$E = \frac{w}{4m} = \frac{s - u}{4m}. \tag{3.2}$$

Sendo E a energia no laboratório para a reação pp, a amplitude para a reação $\bar{p}p$ é obtida trocando-se E por $-E$. Mais precisamente, a amplitude física f em $t = 0$ é o limite de uma função analítica $\mathcal{F}$ de uma variável complexa E, com cortes no eixo real. A amplitude para o espalhamento pp, $f(E, t = 0)$, é o limite de $\mathcal{F}(E + \mathrm{i}\epsilon, t = 0)$ quando $\epsilon \to 0^+$. A amplitude $\bar{p}p$ em $t = 0$ é obtida do limite $\mathcal{F}(-E - \mathrm{i}\epsilon, t = 0)$ quando $\epsilon \to 0^+$.

De forma simplificada, a estrutura analítica no plano complexo s para o espalhamento de partículas de massas iguais, Figura 3.1, tem associado um corte que vai de $s = 4m^2$ até ∞ e um corte que vai de $u = 4m^2$ ($s = 0$ para $t = 0$) até $u = \infty$, ou seja, $s = 0$ até $s = -\infty$. Considerando o plano complexo E, temos os cortes de ramo começando em $+m$

e $-m$ e indo até $E = +\infty$ e $E = -\infty$ respectivamente. Também temos a ocorrência do pólo simples do píon em $u = m_\pi^2$ $(E = m - m_\pi^2/2m)$. Além disso temos o corte dos dois píons que ocorre em $u = 4m_\pi^2$ $(E = m - 2m_\pi^2/m)$. Entre os pontos de ramificação do lado esquerdo e do lado direito, a amplitude é real no eixo real exceto pelo pólo do píon. $\mathcal{F}$ tem um corte no eixo real, sua parte imaginária muda de sinal quando vamos de um lado a outro do corte mas a parte real é a mesma, ou seja, a descontinuidade através do corte é imaginária.

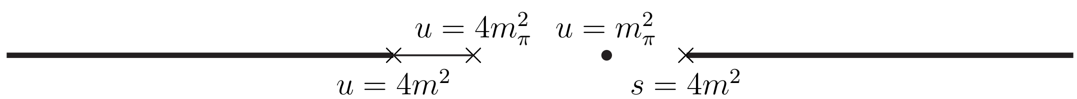

Figura 3.1: Pólos e cortes de $\mathcal{A}$ no plano complexo s para o espalhamento de partículas com massas iguais [36, 49].

Na prática, quando trabalhamos com altas energias podemos desconsiderar o pólo do píon e o corte dos dois píons [36].

3.2 Relações de Dispersão Integrais

Nesta seção mostramos resumidamente a dedução das Relações de Dispersão Integrais (RDI), que foram introduzidas por volta de 1960 [11, 12]. Uma dedução mais detalhada pode ser encontrada na referência [34].

Iniciamos com $\mathcal{F}(E)$, a continuação analítica de $f(E, t = 0)$. Vamos introduzir duas amplitudes que são combinações lineares das amplitudes pp e $\bar{p}p$

$$\mathcal{F}_\pm = \frac{\mathcal{F}_{pp} \pm \mathcal{F}_{\bar{p}p}}{2}, \tag{3.3}$$

sendo $\mathcal{F}_+$ par e $\mathcal{F}_-$ ímpar na troca $E \leftrightarrow -E$.

Como conhecemos a estrutura analítica de $\mathcal{F}$ (seção anterior) podemos deduzir as RDI usando o contorno de integração mostrado na Figura (3.2). O teorema de Cauchy [50] nos diz que para um ponto E_0 não pertencente aos cortes de $\mathcal{F}$ temos

$$\mathcal{F}(E_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathcal{F}(\bar{E})}{\bar{E} - E_0} \mathrm{d}\,\bar{E}. \tag{3.4}$$

Vamos desprezar as singularidades “não físicas”: o pólo simples do píon e o corte dos dois píons. Considerando que quando $R \to \infty$, sob a hipótese de limite polinomial, e $\epsilon \to 0$, as integrais sobre C_0, C_1 e C_2 tendem a zero podemos escrever

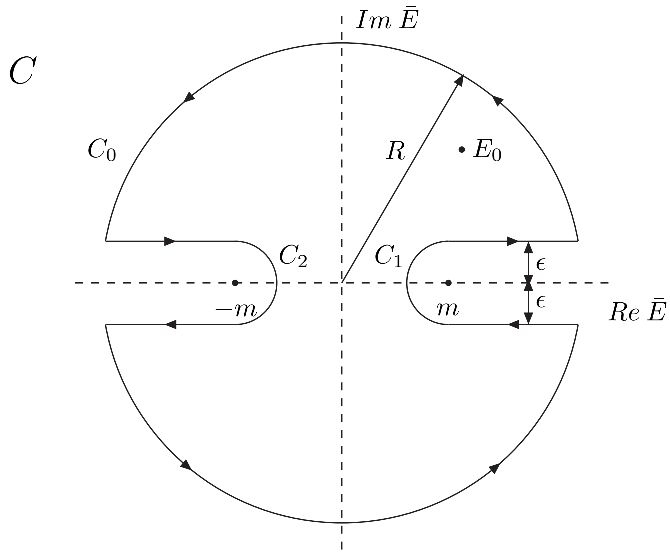

Figura 3.2: Contorno utilizado na derivação das relações de dispersão na forma integral para a amplitude de espalhamento elástica.

$$\mathcal{F}(E_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left[\int_m^\infty \frac{\mathcal{F}(E' + \mathrm{i}\epsilon) - \mathcal{F}(E' - \mathrm{i}\epsilon)}{E' - E_0} \mathrm{d}\,E' + \int_m^\infty \frac{\mathcal{F}(-E' - \mathrm{i}\epsilon) - \mathcal{F}(-E' + \mathrm{i}\epsilon)}{E' + E_0} \mathrm{d}\,E' \right]. \tag{3.5}$$

Se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+$ é par, usando o fato da descontinuidade de $\mathcal{F}$ no corte ser na parte imaginária,

$$\mathcal{F}_+(E_0) = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \mathrm{Im}\, f_+(E') \left[\frac{1}{E' - E_0} + \frac{1}{E' + E_0} \right] \mathrm{d}\,E' \tag{3.6}$$

e se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_-$ for ímpar,

$$\mathcal{F}_-(E_0) = \frac{1}{\pi} \int_m^\infty \mathrm{Im}\, f_-(E') \left[\frac{1}{E' - E_0} - \frac{1}{E' + E_0} \right] \mathrm{d}\,E', \tag{3.7}$$

onde $f_\pm(E) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{F}_\pm(E' + \mathrm{i}\epsilon)$.

Queremos as expressões acima para E_0 na região física do canal s, ou seja, E_0 real e maior que m. Escrevemos então $E_0 = E + \mathrm{i}\eta$ e fazemos E_0 tender ao eixo real por valores positivos da parte imaginária. Com mais algumas passagens chegamos a

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E' \,\mathrm{Im}\, f_+(E')}{E'^2 - E^2} \mathrm{d}\,E', \tag{3.8}$$

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E \,\mathrm{Im}\, f_-(E')}{E'^2 - E^2} \mathrm{d}\,E', \tag{3.9}$$

onde P é o valor principal da integral. As duas equações acima são as chamadas relações de dispersão integrais.

Se as integrais em (3.8) e (3.9) não convergem por causa do comportamento de f quando $E \to \infty$ ou por causa das contribuições das semicircunferências no infinito, ao invés de usarmos $\mathcal{F}$ na integral de Cauchy consideramos $\mathcal{F}/E$ e obtemos [36]

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = \mathrm{Re}\, f_+(0) + \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E^2\, \mathrm{Im}\, f_+(E)}{E'(E'^2 - E^2)} \mathrm{d}\, E', \tag{3.10}$$

e uma expressão igual a (3.9) para $\mathrm{Re}\, f_-$

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = \frac{1}{\pi} P \int_m^\infty \frac{2E\, \mathrm{Im}\, f_-(E')}{E'^2 - E^2} \mathrm{d}\, E'. \tag{3.11}$$

Este par de equações é chamado relações de dispersão integrais com uma subtração. Geralmente denotamos $\mathrm{Re}\, f_+(0)$ por K, que será chamada constante de subtração [36].

As relações de dispersão integrais podem ser obtidas para um número arbitrário de subtrações. O procedimento é análogo ao utilizado para se obter as relações com uma subtração [51].

No limite de altas energias ($E \gg m$) podemos escrever as relações de dispersão encontradas acima em função de s

$$s = 2m(E + m) \approx 2mE \qquad \text{para} \qquad E \gg m. \tag{3.12}$$

Fazendo essa mudança de variável ($s = 2mE$) nas relações de dispersão com uma subtração obtemos

$$\mathrm{Re}\, F_+(s) = K + \frac{1}{\pi} P \int_{s_0}^\infty \frac{2s^2\, \mathrm{Im}\, F_+(s)}{s'(s'^2 - s^2)} \mathrm{d}\, s', \tag{3.13}$$

$$\mathrm{Re}\, F_-(s) = \frac{1}{\pi} P \int_{s_0}^\infty \frac{2E\, \mathrm{Im}\, F_-(s')}{s'^2 - s^2} \mathrm{d}\, s', \tag{3.14}$$

onde K é a constante de subtração e $s_0 = 2m^2$.

3.3 Relações de Dispersão Derivativas

Embora resultados importantes tenham sido obtidos com as relações de dispersão integrais uma limitação da forma integral é seu carater não-local: para se conhecer a parte real da amplitude a parte imaginária deve ser conhecida em todos os valores da energia. Outra limitação é que a classe de funções que permite integrações analíticas é limitada [9]. No final dos anos 60 e início dos anos 70 foi mostrado que para o espalhamento elástico em altas energias as relações integrais podem ser substituídas por formas derivativas [13, 14, 15]. Desde então essa substituição e seu uso prático foi largamente discutido na literatura [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58], principalmente por Kolář e Fischer em [57, 58]. Na referência [9] apresentamos uma revisão ampla e crítica sobre o assunto.

As formas derivativas foram obtidas sob a condição de altas energias ($\sqrt{s} > 10 - 20$ GeV). Em 2003 Cudell, Martynov e Selyugin introduziram uma correção às RDD [19], que estendia a validade das RDD a energias mais baixas, mas que ainda não as tornavam matematicamente equivalentes às RDI. É neste ponto que introduzimos uma novidade no campo das RDD. Mostramos que para uma classe de funções de interesse físico as RDI podem ser substituídas por RDD, sem o uso da aproximação de altas energias. Estas novas relações derivativas foram por nós denominadas Relações de Dispersão Derivativas Estendidas (RDDE) e são equivalentes sob certas condições às RDI.

A seguir discutimos as relações de dispersão derivativas para altas energias, denominadas relações de dispersão derivativas padrões, a representação de Cudell, Martynov e Selyugin e as relações derivativas estendidas.

3.3.1 Relações de Dispersão Derivativas Padrões (RDDP)

A substituição das RDI pelas RDD em altas energias é feita considerando-se o limite $m \to 0$ nas equações (3.10) e (3.11) [9, 16]. Também lembramos que outra aproximação de altas energias é considerada nas RDI quando elas são escritas em função da energia no centro de massa ao quadrado $s = 2m(E + m)$ (equações (3.13) e (3.14)). Como vamos estudar as RDDE, que, a princípio, são válidas para qualquer energia acima do limiar de energia físico $E = m$, vamos considerar as relações derivativas em função da variável simétrica E. Neste caso as RDDP são dadas por [9, 10, 16, 57]

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = K + E \tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right]\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E}, \tag{3.15}$$

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = \tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right]\mathrm{Im}\, f_-(E). \tag{3.16}$$

Os detalhes da dedução são análogos aos que discutiremos nos caso das RDDE (seção 3.3.3).

Condições necessárias e suficientes para a convergência destas séries de tangentes foram estabelecidas por Kolář e Fischer [18]. Entre os resultados obtidos por esses autores, uma forma prática de verificar se a série converge é o teorema abaixo.

Teorema 1 *Seja $f : I\!R \to I\!R$. A série de tangentes*

$$\tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] f(x)$$

converge num ponto $x \in \mathbb{R}$ *se e somente se*

$$\sum_{n=o}^{\infty} f^{(2n+1)}(x)$$

converge.

Em outro trabalho de 1987, os mesmos autores [57] procuram dar um significado a série de tangentes, mesmo que ela não seja convergente no sentido de Cauchy.

3.3.2 Representação de Cudell-Martynov-Selyugin (RCMS)

Em 2003 foi introduzida por Cudell, Martynov e Selyugin [19] a seguinte representação para a relação de dispersão derivativa

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = K + E\tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right]\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{C_+(p)}{2p+1}\left(\frac{m}{E}\right)^{2p}, \tag{3.17}$$

$$C_+(p) = \frac{\mathrm{e}^{-\xi D_\xi}}{2p+1+D_\xi}\left[\mathrm{Im}\, f_+(E) - E\,\mathrm{Im}\, f'_+(E)\right].$$

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = -E\cot\left[\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right]\frac{\mathrm{Im}\, f_-(E)}{E} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{C_-(p)}{2p+1}\left(\frac{m}{E}\right)^{2p+1}, \tag{3.18}$$

$$C_-(p) = \frac{\mathrm{e}^{-\xi D_\xi}}{2p+D_\xi}\left[\mathrm{Im}\, f'_+(E)\right],$$

onde $\xi = \ln(E/m)$ e $D_\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$. Esta representação inclui uma correção às RDDP mas não as tornam equivalentes às RDI, só permitindo seu uso em energias mais baixas. Voltaremos a esse aspecto a seguir.

3.3.3 Relações de Dispersão Derivativas Estendidas (RDDE)

Nesta seção apresentamos nossa forma de substituir as RDI pelas relações derivativas sem o uso da aproximação de altas energias ($m \to 0$). Consideramos a relação de dispersão integral para a amplitude de espalhamento elástico par (3.10)

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = K + \frac{2E^2}{\pi}\int_m^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E')}{E'(E'^2 - E^2)}\mathrm{d}\,E' \tag{3.19}$$

e integramos por partes para obter

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, f_+(E) &= K - \frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\frac{\mathrm{Im}\, f_+(m)}{m} \\ &\quad -\frac{E}{\pi}\int_m^\infty \ln\left|\frac{E'-E}{E'+E}\right|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,E'}\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E')}{E'}\mathrm{d}\,E'.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Seguindo a referência [19], introduzimos a seguinte mudança de variável

$$E' = m\mathrm{e}^{\xi'} \qquad E = m\mathrm{e}^{\xi},$$

de forma que a integral acima pode ser escrita na forma

$$\frac{m\mathrm{e}^{\xi}}{\pi}\int_0^\infty \ln\coth\left(\frac{1}{2}|\xi'-\xi|\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\xi'}g(\xi')\mathrm{d}\,\xi', \tag{3.21}$$

onde $g(\xi') = \mathrm{Im}\, f(m\mathrm{e}^{\xi'})/(m\mathrm{e}^{\xi'})$. Novamente, seguindo a referência [19] expandimos o logaritmo do integrando em potências de $x = \xi' - \xi$,

$$\ln\left(\coth\frac{1}{2}|x|\right) = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-|x|}}{1-\mathrm{e}^{-|x|}}\right) = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)|x|}}{2p+1},$$

e considerando que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\xi'}g(\xi') \equiv \tilde{g}(\xi')$$

é uma função analítica de seu argumento, podemos escrever

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\xi') &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi'^n}\tilde{g}(\xi')\Big|_{\xi'=\xi}\frac{(\xi'-\xi)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{g}^{(n)}(\xi)}{n!}(\xi'-\xi)^n.\end{aligned}$$

Substituindo as fórmulas acima na equação (3.21) e integrando termo a termo sob a hipótese de convergência uniforme de $\tilde{g}(\xi')$ obtemos

$$\frac{2m\mathrm{e}^{\xi}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^{\,k}}{\mathrm{d}\,\xi^k}\tilde{g}(\xi)I_{kp},$$

onde

$$I_{kp} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(2p+1)|\xi'-\xi|}(\xi'-\xi)^k\mathrm{d}\,\xi' = \frac{1}{(2p+1)^{k+1}}[((-1)^k+1)k! - (-1)^k\Gamma(k+1,(2p+1)\xi)]$$

e Γ é a função gama incompleta $\Gamma(a,z) = \int_z^\infty t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Com este procedimento e de $\xi = \ln(E/m)$, a Eq. (3.20) pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, f_+(E) &= K - \frac{E}{\pi} \ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| \frac{\mathrm{Im}\, f_+(m)}{m} \\
&+ \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^{2k+2}} \frac{\mathrm{d}^{\,2k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{2k+1}} \frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E} \\
&+ \frac{2E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\xi)}{(2p+1)^{k+2}k!} \frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}} \frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E},
\end{aligned}$$

que pode ser colocada na forma

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = K + E \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right) \frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E} + \Delta^+(E,m), \tag{3.22}$$

com o termo de correção Δ^+ dado por

$$\begin{aligned}
\Delta^+(E,m) &= -\frac{E}{\pi} \ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| \frac{\mathrm{Im}\, f_+(m)}{m} \\
&+ \frac{2E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!} \frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}} \frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E}.
\end{aligned}$$

Com um procedimento análogo, temos, partindo da relação de dispersão integral ímpar,

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right) \mathrm{Im}\, f_-(E) + \Delta^-(E,m), \tag{3.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta^-(E,m) &= -\frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| \mathrm{Im}\, f_-(m) \\
&+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!} \frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}} \mathrm{Im}\, f_-(E).
\end{aligned}$$

As equações (3.22) e (3.23) são as novas Relações de Dispersão Derivativas Estendidas, que são válidas para qualquer energia acima do limiar físico $E = m$. Notamos que a estrutura da RCMS, equações (3.17) e (3.18), são similares aos resultados acima mas sem os termos em logaritmo. Estes termos vêm do cálculo da primitiva no limite inferior na integração por partes.

Como o teorema 1 assegura o convergência uniforme da expansão associada com a série de tangentes esta condição também é válida para a RDDE.

3.4 Aplicações e exemplos numéricos

Nesta seção mostramos exemplos numéricos da equivalência das RDI e das RDDE, utilizando a conexão da seção de choque total com o parâmetro ρ através de relações de dispersão. Primeiro gostaríamos de ressaltar que a eficiência tanto da relação integral quando da diferencial na descrição dos dados experimentais depende da teoria, ou seja, da parte imaginária (seção de choque total utilizada). Nosso objetivo aqui é testar a equivalência das RDI e RDDE, por isso na ausência de um modelo que descreva a seção de choque total em todas as energias, utilizaremos uma parametrização para a seção de choque total tipo Reggeon-Pomeron [59, 60]. Para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ este modelo possui contribuições não degeneradas para os reggeons secundários par e ímpar (a_2/f_2 e ρ/ω, respectivamente), junto com a contribuição do pólo simples do Pomeron.

$$\operatorname{Im} f(E) = XE^{\alpha_{\mathbb{P}}(0)} + Y_+E^{\alpha_+(0)} + \tau Y_- E^{\alpha_-(0)}, \tag{3.24}$$

onde $\tau = +1$ para pp and $\tau = -1$ para $\bar{p}p$. Como usual denotamos

$$\alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1 + \epsilon, \qquad \alpha_{+/-}(0) = 1 - \eta_{+/-}. \tag{3.25}$$

Lembramos aqui que este modelo foi elaborado para o limite de altas energias, mas é um modelo que serve ao nosso objetivo que é comparar as RDI com as RDDE.

A seguir fazemos ajustes conjuntos de seção de choque total e parâmetro ρ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ e comparamos os resultados com os obtidos através das RDI e RDDE. Também vamos comparar os resultados obtidos com as duas formas de relações de dispersão acima, com a relação de dispersão derivativa padrão e a representação obtida por Cudell, Martynov e Selyugin [19].

3.4.1 Dados experimentais

Para os dados experimentais de σ_{tot} e ρ utilizamos os arquivos do Particle Data Group (PDG de 2004) [61], aos quais acrescentamos os valores de σ_{tot} e ρ em 1.8 TeV, obtidos pela colaboração E811 [44]. Os erros estatísticos e sistemáticos foram somados em quadratura e os ajustes foram feitos utilizando o programa CERN-Minuit [62].

Incluímos todos os dados acima de $\sqrt{s} = 2m_p = 1.88$ GeV mas como o modelo utilizado aqui para σ_{tot} (equação 3.24) foi feito para a região de altas energias conseguimos resultados estatísticos satisfatórios apenas para $\sqrt{s}_{\text{min}} = 4$ GeV. Mas isso não é um problema pois nosso objetivo é comparar as diferentes relações de dispersão.

3.4.2 Resultados analíticos

Com a parametrização (3.24) e (3.25) determinamos $\operatorname{Im} f_{\pm}$ através de

$$f_{\pm} = \frac{f_{pp} \pm f_{\bar{p}p}}{2}, \tag{3.26}$$

ou seja,

$$\operatorname{Im} f_{+}(E) = X E^{\epsilon} + Y_{+} E^{-n_{+}} \tag{3.27}$$

e

$$\operatorname{Im} f_{-}(E) = Y_{-} E^{-n_{-}}. \tag{3.28}$$

Determinamos então $\operatorname{Re} f_{\pm}$ através das RDI ((3.10) e (3.11)) [9, 34]

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re} f_{+}}{E} &= \frac{K}{E} + X \tan\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) E^{\epsilon} - Y_{+} \tan\left(\frac{\pi\eta_{+}}{2}\right) E^{-\eta_{+}} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{X m^{\epsilon}}{2j+1+\epsilon} + \frac{Y_{+} m^{-n_{+}}}{2j+1-\eta_{+}}\right) \left(\frac{m}{E}\right)^{2j+1} \end{aligned} \tag{3.29}$$

e

$$\frac{\operatorname{Re} f_{-}}{E} = Y_{-} \cot\left(\frac{\pi\eta_{-}}{2}\right) E^{-\eta_{-}} + \frac{2}{\pi E} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Y_{-} m^{1-\eta_{-}}}{2j+2-\eta_{-}} \left(\frac{m}{E}\right)^{2j+1}, \tag{3.30}$$

e através das RDDE (3.22) e (3.23),

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re} f_{+}}{E} &= \frac{K}{E} + X \tan\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) E^{\epsilon} - Y_{+} \tan\left(\frac{\pi\eta_{+}}{2}\right) E^{-\eta_{+}} \\ &-\frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| \left(X m^{\epsilon} + Y_{+} m^{-\eta_{+}}\right) \\ &+\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2} k!} \left[X \epsilon^{k+1} E^{\epsilon} + Y_{+}(-\eta_{-})^{k+1} E^{-\eta_{+}}\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re} f_{-}}{E} &= Y_{-} \cot\left(\frac{\pi\eta_{-}}{2}\right) E^{-\eta_{-}} - \frac{1}{\pi E} \ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| Y_{-} m^{1-\eta_{-}} \\ &+\frac{2}{\pi E} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2} k!} \left[Y_{-}(1-\eta_{-})^{k+1} E^{1-\eta_{+}}\right]. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Na seção 3.5 mostraremos que as duas equações acima são iguais às expressões obtidas com as RDDI.

Retornando à equação (3.26) obtemos $\operatorname{Re} f_{pp}$ e $\operatorname{Re} f_{\bar{p}p}$ e por último utilizamos (2.35) e (2.36) para obtermos o parâmetro ρ. Da mesma forma se obtém ρ através das RDDP ((3.15) e (3.16)) e da RCMS ((3.17) e (3.18)).

Tabela 3.1: Ajuste simultâneo de $\sigma_{\rm tot}$ e ρ, para o espalhamento elástico pp and $\bar{p}p$, $\sqrt{s}_{\rm min} = 4$ GeV (270 pontos experimentais), $K = 0$ e usando Relações de Dispersão Integrais (RDI), Relações de Dispersão Derivativas Padrões (RDDP), Representação de Cudell-Martynov-Selyugin (RCMS) e as Relações de Dispersão Derivativas Estendidas (RDDE) [10].

	RDI	RDDP	RCMS	RDDE
X (mb)	1.662 ± 0.033	1.497 ± 0.032	1.563 ± 0.033	1.662 ± 0.033
Y_+ (mb)	4.089 ± 0.058	3.800 ± 0.041	3.892 ± 0.047	4.089 ± 0.058
Y_- (mb)	-2.143 ± 0.084	-1.947 ± 0.070	-2.039 ± 0.076	-2.143 ± 0.084
ϵ	0.0884 ± 0.0021	0.0975 ± 0.0021	0.0939 ± 0.0021	0.0884 ± 0.0020
η_+	0.3797 ± 0.0099	0.3209 ± 0.0076	0.3427 ± 0.0087	0.3797 ± 0.099
η_-	0.569 ± 0.011	0.5583 ± 0.0098	0.567 ± 0.010	0.569 ± 0.011
χ^2	382.1	365.4	325.9	382.1
χ^2/gdl	1.45	1.38	1.23	1.45

Tabela 3.2: Mesmo caso da Tabela 3.1, mas considerando a constante de subtração K como um parâmetro livre [10].

	RDI	RDDP	RCMS	RDDE
X (mb)	1.598 ± 0.034	1.598 ± 0.034	1.598 ± 0.034	1.598 ± 0.034
Y_+ (mb)	3.957 ± 0.053	3.957 ± 0.053	3.957 ± 0.053	3.957 ± 0.053
Y_- (mb)	-2.082 ± 0.080	-2.083 ± 0.079	-2.084 ± 0.080	-2.082 ± 0.080
ϵ	0.0919 ± 0.0021	0.0919 ± 0.0021	0.0919 ± 0.0022	0.0919 ± 0.0021
η_+	0.3554 ± 0.0098	0.3555 ± 0.0097	0.3555 ± 0.0098	0.3554 ± 0.0098
η_-	0.569 ± 0.010	0.569 ± 0.010	0.569 ± 0.010	0.569 ± 0.010
K	-2.27 ± 0.28	2.28 ± 0.33	1.00 ± 0.29	-2.27 ± 0.28
χ^2	315.4	314.6	314.2	315.4
χ^2/gdl	1.20	1.20	1.19	1.20

3.4.3 Ajustes de dados

Para cada um dos quatro casos (RDI, RDDP, RCMS e RDDE), consideramos duas variantes para o ajuste do conjunto de dados de seção de choque total e parâmetro ρ. A primeira desprezando a constante de subtração, $K = 0$, e a segunda considerando a constante de subtração como um parâmetro livre. Os resultados são mostrados na 3.1 e na Figura 3.3 para o casos com $K = 0$ e na Tabela 3.2 e na Figura 3.4 para o caso onde K é um parâmetro de ajuste.

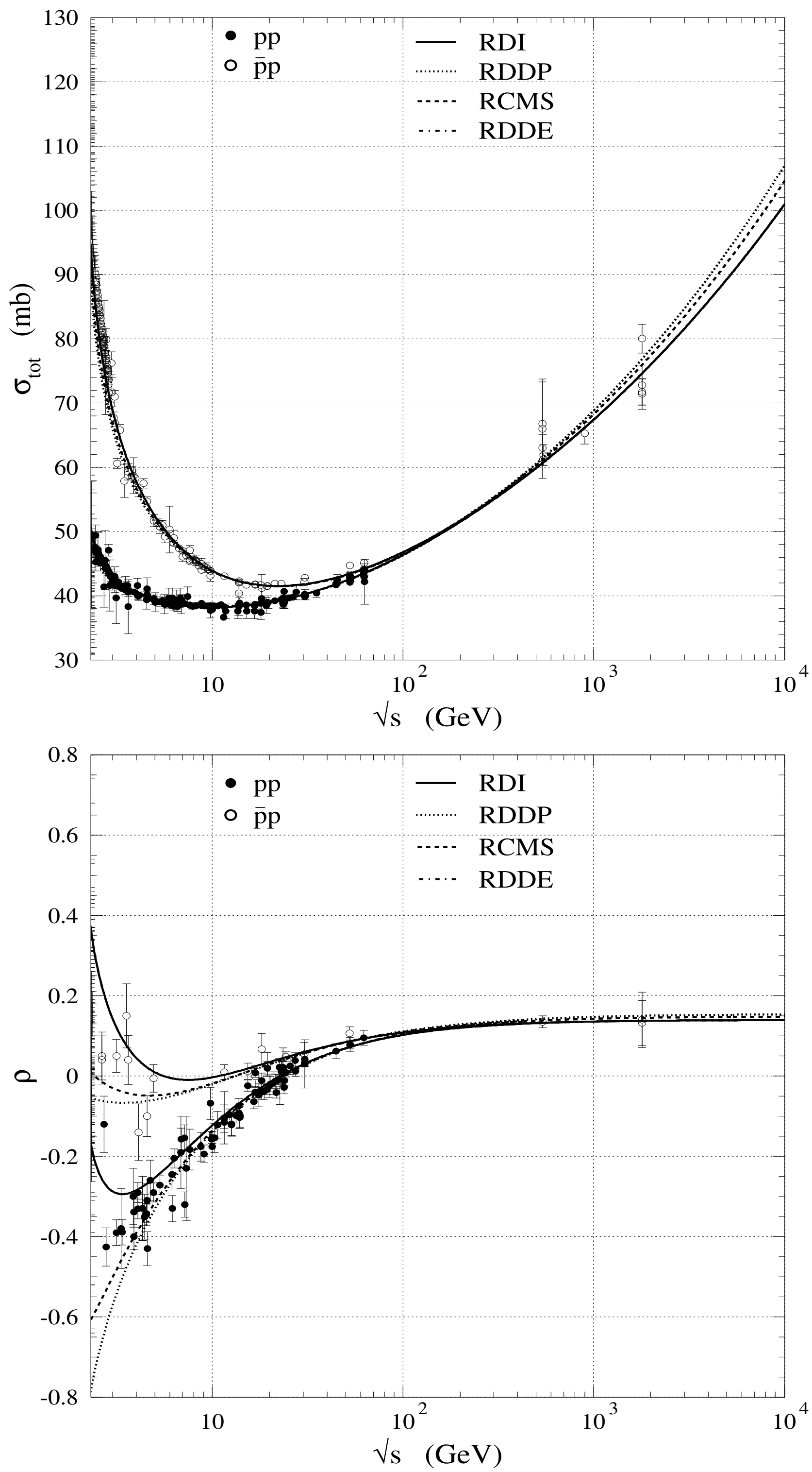

Figura 3.3: Resultados do ajuste simultâneo de σ_{tot} e ρ para o espalhamento elástico pp e $\bar{p}p$, através das Relações de Dispersão Integrais (RDI), Relações de Dispersão Derivativas Padrões (RDDP), Representação de Cudell-Martynov-Selyugin (RCMS) e as Relações de Dispersão Derivativas Estendidas (RDDE) e considerando a constante de subtração $K = 0$ (Tabela 3.1). As curvas correspondentes às IDR (sólida) e a RDDE (traço-ponto) coincidem [10].

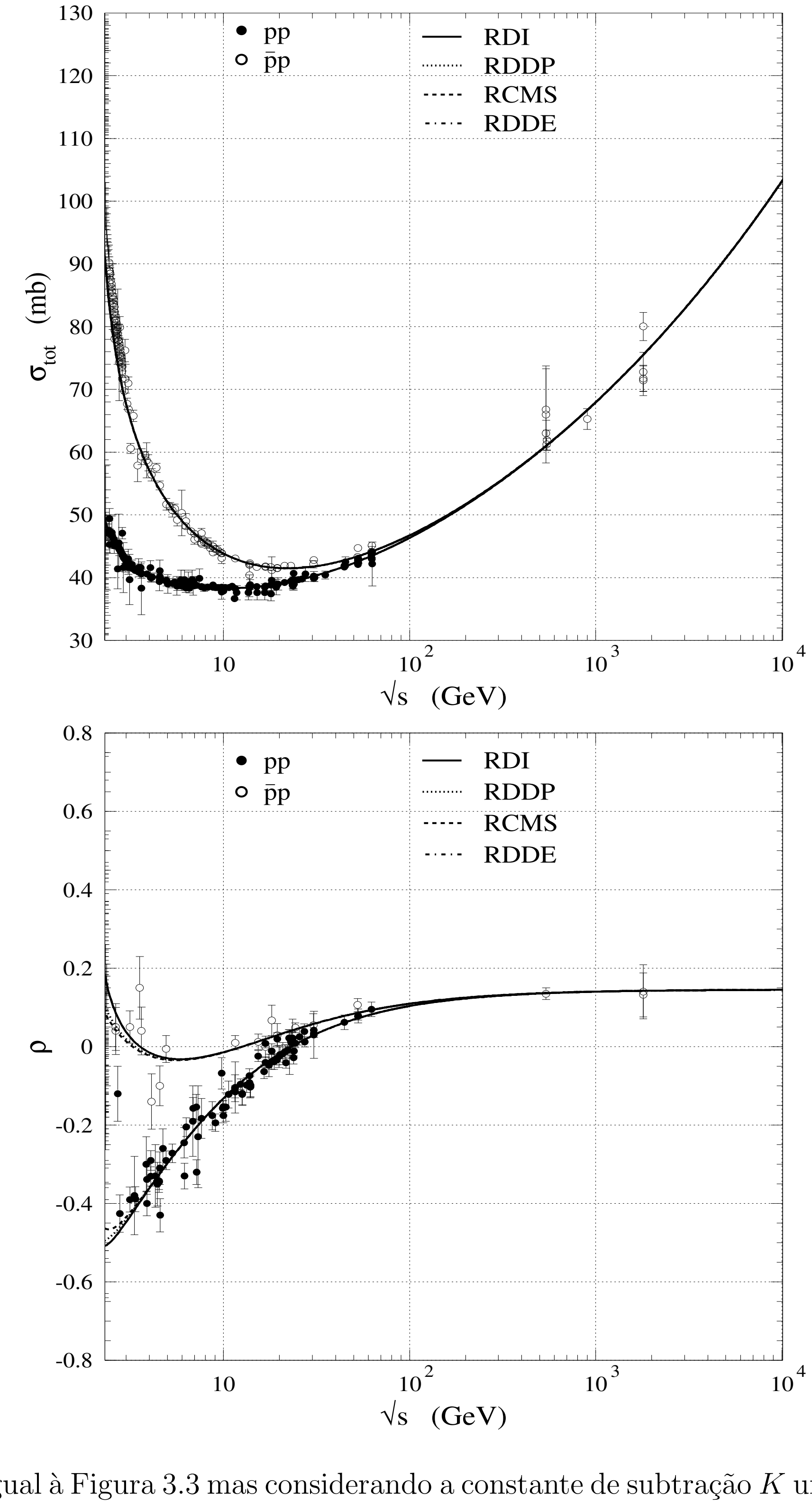

Figura 3.4: Igual à Figura 3.3 mas considerando a constante de subtração K um parâmetro livre (Tabela 3.2) [10].

3.4.4 Discussão dos resultados

O objetivo desta seção é discutir a consistência entre os resultados obtidos por meio das diferentes formas de calcular a parte real da amplitude de espalhamento. Das Tabelas 3.1 e 3.2 vemos que os melhores resultados estatísticos foram obtidos com a constante K como parâmetro livre, como já era esperado. Entretanto, tomando $K = 0$ obtemos informações não somente sobre a equivalência das RDI com as formas derivativas, mas também sobre a importância do papel da constante de subtração.

Constante de subtração $K = 0$

Da Tabela 3.1 vemos que, para $K = 0$, os resultados numéricos obtidos com as RDI e as RDDE são os mesmos quando usamos dois algarismos significativos, o que não ocorre nos casos das RDDP e da RCMS. Este resultado é importante pois mostra a acurácia dos nossos resultados analíticos para as relações derivativas estendidas.

Notamos que os altos valores de χ^2/gdl em todos os casos são consequências do modelo utilizado para fazer o ajuste (destinado à região de altas energias) e do valor mínimo de $\sqrt{s}$ que utilizamos.

Os efeitos das equivalências (RDI e RDDE) e diferenças (RDI e RDDP ou RCMS) na descrição dos dados experimentais são mostrado na Figura 3.3. As curvas correspondentes às RDI (sólida) e RDDE (tracejada-pontilhada) coincidem em todas as energias acima do limiar e vemos que, mesmo ajustando dados acima de $\sqrt{s} = 4$ GeV, a descrição dos dados é razoável em ambos os casos. Por outro lado, as diferenças entre os resultados exatos (RDI e RDDE) e as RCMS ou RDDP são notáveis para σ_{tot} na região de altas energias e para ρ na região de baixas energias ($\sqrt{s} \lesssim 10$ GeV) [9].

Constante de subtração K como parâmetro livre

Com K como parâmetro de ajuste nossos resultados demonstram um resultado já obtidos antes [9], isto é, a aproximação de altas energias ($m \to 0$) pode ser absorvida pela constante de subtração. Na Figura 3.4 vemos que a diferença entre RDI/RDDE e RDDP/RCMS praticamente desaparecem. Da Tabela 3.2 podemos identificar a constante de subtração como responsável por este efeito complementar: os valores numéricos dos parâmetros são praticamente os mesmos em todos os quatro casos, exceto pelos valores de K, isto é, na prática as diferenças são absorvidas por este parâmetro. Concluímos que a constante de subtração tem efeito sobre os ajustes até na região das mais altas energias, e este efeito é devido às correlações entre os parâmetros livres durante o processo de ajuste dos dados. Da mesma forma que no caso com $K = 0$, os valores numéricos obtidos com as RDI e as RDDE são exatamente os mesmos, incluindo o valor da constante de subtração. Fisicamente a constante de subtração deve ser independente da forma da relação de dispersão utilizada por isso é importante o uso da RDDE.

3.5 Redução dos termos de correção da RDDE a séries simples

Já vimos na seção anterior que as RDDE são equivalentes numericamente às relações de dispersão integrais e que são válidas para qualquer energia acima do limiar físico $E = m$. Mas um ponto crítico é que existe uma somatória dupla, que as tornam difíceis de manipular e de verificar a convergência e tomam um grande tempo nos cálculos computacionais. Em trabalho recente, Ferreira e Sesma [21] conseguiram reduzir o termo de correção a séries simples e é o que mostraremos aqui. Começaremos com amplitudes da forma E^λ e depois discutiremos o caso geral.

3.5.1 Redução dos termos de correção das RDDE a uma série simples para $\operatorname{Im} f(E)/E = E^\lambda$

O termo de correção Δ^+ para a amplitude de espalhamento par é dado por (3.22)

$$\begin{aligned}\Delta^+(E,m) &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\frac{\operatorname{Im} f_+(m)}{m} \\ &+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}\frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}}\frac{\operatorname{Im} f_+(E)}{E}\end{aligned} \tag{3.33}$$

e para a amplitude ímpar é dado por (3.23)

$$\begin{aligned}\Delta^-(E,m) &= -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\operatorname{Im} f_-(m) \\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}\frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}}\operatorname{Im} f_-(E).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Para $\frac{\operatorname{Im} f_\pm}{E} = E^\lambda$ temos, respectivamente, para as correções par e ímpar

$$\begin{aligned}\Delta^+(E,m) &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^\lambda \\ &+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}\lambda^{k+1}E^\lambda\end{aligned} \tag{3.35}$$

e para a amplitude ímpar é dado por (3.23)

$$\begin{aligned}\Delta^-(E,m) &= -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{1+\lambda} \\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}(\lambda+1)^{k+1}E^{\lambda+1}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

A função gama incompleta que aparece em Δ^+ e Δ^- admite a seguinte representação em termos de polinômios de Bessel generalizados [21]

$$\Gamma(k+1,z) = \mathrm{e}^{-z}\, {}_2F_0(-k,1;;-1/z). \tag{3.37}$$

Substituindo a expressão acima em Δ^+ e escrevendo $\xi = \ln(E/m)$ para simplificar a notação, temos

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda} \\ &+\frac{2E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^{k+2}k!}\left[(2p+1)\xi\right]^k\, {}_2F_0\left(-k,1;;\frac{-1}{(2p+1)\xi}\right)\lambda^{k+1}E^{\lambda},\end{aligned} \tag{3.38}$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda} \\ &-\frac{2E^{\lambda+1}\lambda}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\, {}_2F_0\left(-k,1;;\frac{-1}{(2p+1)\xi}\right)(\xi\lambda)^k.\end{aligned} \tag{3.39}$$

A regra de soma [21]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\, {}_2F_0(-n,\gamma;;w)u^n = \mathrm{e}^{-u}(1-wu)^{-\gamma}, \qquad |wu|<1, \tag{3.40}$$

pode ser utilizada para simplificar a expressão de Δ^+ acima. Com $n=k$, $\gamma=1$, $w=-1/(2p+1)\xi$ e $u=\lambda\xi$ temos

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda} - \frac{2E^{\lambda+1}\lambda}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^2}\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\left(1+\frac{\lambda}{2p+1}\right)^{-1} \\ &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda} - \frac{2E\lambda m^{\lambda}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{2p+1}\left(\frac{1}{2p+1+\lambda}\right).\end{aligned} \tag{3.41}$$

Expandindo $\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|$ em série de potências

$$\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| = -2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{2p+1} \tag{3.42}$$

obtemos facilmente

$$\Delta^+ = \frac{2Em^\lambda}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{2p+1+\lambda} \tag{3.43}$$

que é uma série que apresenta apenas uma somatória e que é fácil verificar a convergência.

Para o termo de correção ímpar o procedimento é análogo. Na equação (3.36) usamos a representação da função gama incompleta em função de polinômios de Bessel generalizados (3.37), obtendo

$$\begin{aligned} \Delta^- &= -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda+1} \qquad (3.44)\\ &+\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^{k+2}k!}\left[(2p+1)\xi\right]^k\ {}_2F_0\left(-k,1;;\frac{-1}{(2p+1)\xi}\right)(\lambda+1)^{k+1}E^{\lambda+1}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta^- &= -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda+1} \qquad (3.45)\\ &-\frac{2E^{\lambda+1}(\lambda+1)}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\ {}_2F_0\left(-k,1;;\frac{-1}{(2p+1)\xi}\right)(\xi(\lambda+1))^k. \end{aligned}$$

Novamente, utilizamos a regra de soma (3.40), mas agora com $n = k$, $\gamma = 1$, $w = -1/(2p+1)\xi$ e $u = (\lambda+1)\xi$, obtendo

$$\begin{aligned} \Delta^- &= -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda+1} - \frac{2E^{\lambda+1}(\lambda+1)}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^2}\mathrm{e}^{-(\lambda+1)\xi}\left(1+\frac{\lambda+1}{2p+1}\right)^{-1}\\ &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| m^{\lambda+1} - \frac{2(\lambda+1)m^{\lambda+1}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{2p+1}\left(\frac{1}{2p+2+\lambda}\right). \qquad (3.46) \end{aligned}$$

Finalmente, com a expansão do termo em ln em série de potências temos

$$\Delta^- = \frac{2m^{\lambda+1}}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{2p+2+\lambda}. \tag{3.47}$$

Observando as equações (3.43) e (3.47) obtidas com a RDDE vemos que elas são iguais às expressões obtidas para a parte real da amplitude f através das RDI equações (3.29) e (3.30).

Ferreira e Sesma [21] também obtiveram expressões para combinações de termos $(E/m)^\lambda(\ln^k(E/m)$.

3.5.2 Outra forma de expressão das correções das Relações de Dispersão Derivativas Estendidas

Apresentamos aqui formas alternativas para se escrever as quantidades Δ^+ e Δ^- das equações (3.22) e (3.23) propostas por Ferreira e Sesma [21]. Os autores começam definindo o operador

$$\mathcal{V}(p) \equiv \frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\xi)}{(2p+1)^{k+2}k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,\xi^k} \tag{3.48}$$

que aparece nas equações (3.22) e (3.23) e usam a representação da função gama incompleta em função dos polinômios de Bessel generalizados (3.37) para escrever $\mathcal{V}(p)$ da seguinte forma

$$\mathcal{V}(p) = -\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,{}_2F_0\left(-k,1,;;\frac{-1}{(2p+1)\xi}\right)\xi^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,\xi^k}. \tag{3.49}$$

Para simplificar, definem-se os operadores

$$D_\xi \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\xi}, \qquad \mathcal{D}_\xi \equiv \xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\xi},$$

e suas potências

$$D_\xi^n \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\xi^n}, \qquad \mathcal{D}_\xi^n \equiv \xi^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\xi^n}.$$

Com esta notação e a regra de soma (3.40) coloca-se $\mathcal{V}(p)$ na forma

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(p) &= -\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{(2p+1)^2}\mathrm{e}^{-\mathcal{D}_\xi}\left(1+\frac{D_\xi}{2p+1}\right)^{-1} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-(2p+1)\xi}}{2p+1}\mathrm{e}^{-\mathcal{D}_\xi}\frac{1}{2p+1+D_\xi}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Com as abreviações

$$\mathcal{W}_1 \equiv \exp(-\mathcal{D}_\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathcal{D}_\xi}{n!} \tag{3.51}$$

$$\mathcal{W}_2(p) \equiv \frac{1}{2p+1+D_\xi} = \frac{1}{2p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2p+1)^n}D_\xi^n \tag{3.52}$$

podemos escrever

$$\mathcal{V}(p) = -\frac{\mathrm{e}^{(2p+1)\xi}}{2p+1}\mathcal{W}_1\mathcal{W}_2(p) \tag{3.53}$$

e com mais alguns cálculos

$$\Delta^+(E) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(E/m)^{-2p}}{2p+1}\left[\operatorname{Im} f_+(m) - \mathcal{W}_1\mathcal{W}_2(p)E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,E}\left(\frac{m}{E}\operatorname{Im} f_+(E)\right)\right]. \tag{3.54}$$

De forma análoga para a parte ímpar

$$\Delta_-(E) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(E/m)^{-2p-1}}{2p+1}\left[\operatorname{Im} f_-(m) - \mathcal{W}_1\mathcal{W}_2(p)E\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,E}\left(\operatorname{Im} f_-(E)\right)\right]. \tag{3.55}$$

Os autores Ferreira e Sesma [21] afirmam que os mesmos operadores foram utilizados por Cudell, Martynov e Selyugin [19]. Entretanto os últimos autores não deixam claro em qual ordem os operadores devem ser aplicados e além disso como eles não consideram o termo em ln, as RCMS não são equivalentes às relações integrais.

3.6 Comentários sobre o capítulo

Obtivemos novas expressões analíticas para as expressões derivativas sem o uso da aproximação de altas energias, as quais foram escritas por Ferreira e Sesma [21] de uma forma mais simples evitando a soma dupla. Os resultados matemáticos são válidos para a classe de funções especificada pelo teorema 1. A princípio, sua aplicabilidade pode ser estendida para qualquer área que faça uso das técnicas de relação de dispersão, com restrições adicionais possíveis dadas pela analiticidade e condições experimentais envolvidas. Em especial, sob condições adequadas, o caráter local dos operadores derivativos pode ser uma grande vantagem.

Para amplitudes de espalhamento, pertencendo a classe de funções definida pelo teorema 1, as RDDE são válidas para qualquer energia acima do limiar físico. Como os dados experimentais de seção de choque total indicam uma variação suave com a energia (sem oscilações um pouco acima do limiar físico e crescimento suave acima de $\sqrt{s} \approx 20$ GeV) esta classe de funções inclui a maioria das funções de interesse físico. Utilizando como exemplo uma parametrização do tipo Pomeron-Reggeon para a seção de choque total, verificamos a equivalência numérica entre os resultados obtidos com as RDI e as RDDE bem como as diferenças associadas com a RDDP e as RCMS. Também verificamos isso analiticamente.

Lembramos que tanto para as RDI quanto para as RDDE a reprodução dos dados experimentais de σ_{tot} e ρ depende do modelo considerado. Aqui utilizamos uma parametrização Pomeron-Reggeon para a qual tivemos que utilizar dados apenas acima de 4 GeV. Mesmo com as limitações de nosso exemplo alguns aspectos fenomenológicos puderam ser inferidos. Em particular, como já visto em [9] chamamos atenção para o papel da constante de subtração que quando utilizada como um parâmetro livre nos ajustes conjuntos de $\sigma_{\rm tot}$ e ρ absorve as diferenças entre as diferentes relações de dispersão derivativas, como pode ser visto na Tabela 3.2.

Capítulo 4

Aspectos Empíricos: Representação Eiconal e Zeros

Como já nos referimos na introdução, a Cromodinâmica Quântica ainda não é capaz de descrever os processos difrativos suaves, em particular, o espalhamento elástico de hádrons em altas energias. Nesse estágio, análises empíricas, visando extrair informação independente de modelo dos dados experimentais (problema inverso do espalhamento) constituem uma estratégia importante, que pode contribuir com o estabelecimento de novos esquemas teóricos adequados de cálculo. Num nível intermediário entre dados experimentais e modelos fenomenológicos, estão as representações, dentre as quais, a representação eiconal destaca-se por sua relação com o princípio de unitaridade. Assim uma estratégia importante no momento é a determinação empírica da eiconal. Como veremos, essa abordagem é caracterizada pela extração da eiconal através de ajustes de dados experimentais de seção de choque diferencial, principalmente próton-próton e antipróton-próton (mais altas energias atingidas em aceleradores). Entretanto, um dos principais problemas com esse tipo de análise, pouco discutido na literatura, é o reduzido intervalo de momento transferido com dados disponíveis, em geral abaixo de 6 GeV^2. Isto significa que extrapolações das curvas têm que ser levadas em consideração, o que pode introduzir grandes incertezas nas informações extraídas.

Nas referências [23, 24] Carvalho, Martini e Menon já estudaram este assunto, através de uma análise detalhada dos dados experimentais na região de grande momento transferido, o que permitiu a extração da eiconal com a correspondente região de incerteza estatística. O principal resultado da análise, para o espalhamento pp na região $19.4 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV, foi a evidência dos zeros (troca de sinal) da eiconal no espaço de momento transferido e que a posição do zero decresce com o aumento da energia [23]. Este tipo de informação no espaço de momento é importante na construção e seleção de abordagens fenomenológicas, principalmente no caso de modelos de difração, pois espera-se que a eiconal no espaço de momento transferido esteja relacionada ao fator de forma hadrônico e seções de choque elementares.

Nesta tese, desenvolvemos e estendemos a análise de Carvalho, Martini e Menon [23, 24] em vários aspectos, em especial no que diz respeito ao conjunto de dados utilizado, à estrutura da parametrização e às implicações fenomenológicas do zero na eiconal. O ponto a destacar é que, diferente do resultado dos autores, não obtemos evidência estatística para um decréscimo do zero da eiconal com o aumento da energia. O capítulo é baseado no trabalho [22] e é organizado da seguinte forma. Primeiro relembramos as principais fórmulas que conectam os dados experimentais e a eiconal. Depois, apresentamos uma revisão crítica dos dados de espalhamento pp disponíveis no momento. Após isso, discutimos os aprimoramentos introduzidos em relação a análise anterior e apresentamos os novos resultados de ajuste. Extraímos então a eiconal, utilizando um método analítico-numérico e discutimos as implicações dos zeros da eiconal no contexto fenomenológico, bem como as conexões entre a eiconal extraída e o fator de forma elétrico do próton. Por último, apresentamos as conclusões do capítulo, explicitando os principais resultados.

4.1 Representação eiconal

Na representação eiconal a amplitude de espalhamento elástico como função da energia no centro de massa, $\sqrt{s}$, e do momento transferido ao quadrado, $q^2 \equiv -t$, é expressa por [5]

$$F(s,q) = \mathrm{i}\int_0^\infty b\,\mathrm{d}b J_0(qb)\{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(s,b)}\}, \tag{4.1}$$

onde b é o parâmetro de impacto, J_0 é a função de Bessel de ordem zero (simetria azimultal considerada) e $\chi(s,b)$ é a função eiconal no espaço de parâmetro de impacto. Embora esta fórmula possa ser deduzida da solução em ondas parciais da equação de Schroedinger, no limite de altas energias [23, 63], é importante ressaltar seu carácter como representação matemática independente de qualquer aproximação. De fato, como demonstrado por M. Islam, a amplitude de espalhamento complexa, $F(s,q)$, tem uma representação bem definida no espaço de parâmetro de impacto, válida para todas as energias e ângulos de espalhamento [64]. Esta representação é chamada função de perfil e denotada por $\Gamma(s,b)$. Como a exponencial é uma função inteira de seu argumento, sempre podemos expressar a função de perfil em termos da eiconal [23]

$$\Gamma(s,b) = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi(s,b)}. \tag{4.2}$$

No contexto teórico, modelos eiconais são caracterizados por diferentes escolhas fenomenológicas para a função eiconal no espaço de momento transferido

$$\tilde{\chi}(s,q) = \int_0^\infty b\,\mathrm{d}b J_0(qb)\chi(s,b). \tag{4.3}$$

Por outro lado, o problema inverso do espalhamento trata da determinação empírica, ou extração da eiconal a partir dos dados experimentais de seção de choque diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2} = \pi|F(s,q)|^2, \tag{4.4}$$

seção de choque total

$$\sigma_{\mathrm{tot}}(s) = 4\pi \mathrm{Im}\ F(s,q=0) \tag{4.5}$$

e parâmetro ρ

$$\rho(s) = \frac{\mathrm{Re}\ F(s,q=0)}{\mathrm{Im}\ F(s,q=0)}. \tag{4.6}$$

Formalmente, a partir de uma parametrização independente de modelo para a amplitude de espalhamento e ajustes de dados da seção de choque diferencial pode-se extrair a função de perfil

$$\Gamma(s,b) = -\mathrm{i}\int_0^\infty q\mathrm{d}q J_0(qb)F(s,q), \tag{4.7}$$

a eiconal no espaço de parâmetro de impacto

$$\chi(s,b) = -\mathrm{i}\ln\left[1-\Gamma(s,b)\right], \tag{4.8}$$

e daí, sob algumas condições que discutiremos, obtém-se a eiconal no espaço de momento transferido (4.3).

A possibilidade de extração de $\tilde{\chi}(s,q)$ é importante se pensarmos na possibilidade de conexão com a teoria quântica de campos, pois as seções de choque (partônicas) são expressas no espaço de momento transferido, assim como os fatores de forma dos núcleons.

Como comentamos, uma limitação do problema inverso do espalhamento é que os dados de seção de choque diferencial disponíveis, cobrem somente regiões limitadas de momento transferido. Isto pode ser contrastado com o fato que para extrair a eiconal, todas as transformadas de Fourier-Bessel devem ser efetuadas no intervalo $[0,\infty)$. Então, dados em valores grandes de momento transferido têm um papel central neste tipo de análise e por esta razão discutimos na próxima seção os dados disponíveis no momento. Uma análise detalhada dos dados em pequeno q^2 é feita em [65] e estendida em [66].

4.2 Discussão dos dados de seção de choque diferencial em altas energias

Na referência [23] foi mostrado que a falta de informação experimental de seção de choque diferencial $\bar{p}p$, não permite fazermos o tipo de análise que estamos interessados. Por isso, trataremos aqui somente dados de espalhamento pp nas mais altas energias, isto é, acima de 19 GeV, onde o conjunto de dados em termos de momento transferido permite uma abordagem estatística.

Os dados experimentais que utilizamos na nossa análise são dados de seção de choque diferencial, seção de choque total, parâmetro ρ e o ponto óptico

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q^2=0} = \frac{\sigma_{\mathrm{tot}}^2(1+\rho^2)}{16\pi}, \tag{4.9}$$

onde $\rho(s)$ e $\sigma_{\mathrm{tot}}(s)$ são valores experimentais em cada energia. Como estamos interessados somente na interação hadrônica, o conjunto de dados de seção de choque utilizado está na região acima da interferência Coulomb-nuclear, isto é $q^2 > 0.01$ GeV^2. A seguir discutimos os conjuntos de dados em 7 energias diferentes, divididos em 2 grupos $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV (5 conjuntos) e $\sqrt{s} = 19.4$ e 27.4 GeV.

4.2.1 Dados na região $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV

Os cinco conjuntos de dados em $\sqrt{s}$ = 23.5, 30.7, 44.7, 52.8 e 62.5 GeV, Figura 4.1, foram obtidos no acelerador CERN Intersecting Storage Ring (ISR) nos anos 70 e ainda representam os maiores conjuntos em número de pontos e com as energias mais altas disponíveis para o espalhamento pp. Os dados de σ_{tot}, ρ e $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,q^2$ foram compilados e analisados por Amaldi e Schubert. Informações detalhadas sobre esta análise podem ser encontradas em [67]. Aqui lembramos apenas os aspectos relevantes para a nossa discussão.

Ponto óptico

Os valores numéricos para a seção de choque total são a média de três experimentos calculada em cada uma das energias acima; os dados de ρ provêm de 2 experimentos um em 23.5 GeV e outro na região 30.7 - 62.5 GeV. Os valores numéricos são mostrados na T abela 4.1 junto com os valores de ρ e dos pontos ópticos e referências correspondentes.

Tabela 4.1: Dados de σ_{tot}, ρ e pontos ópticos do espalhamento pp utilizados nesta análise.

$\sqrt{s}$ (GeV)	σ_{tot} (mb)	ρ	$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}q^2\vert_{q^2=0}$ (mbGeV^{-2})
19.4	38.98 ± 0.04 [69]	0.019 ± 0.016 [70]	77.66 ± 0.02
23.5	38.94 ± 0.17 [67]	0.02 ± 0.05 [71]	77.5 ± 0.7 [67]
30.7	40.14 ± 0.17 [67]	0.042 ± 0.011 [72]	82.5 ± 0.7 [67]
44.7	41.79 ± 0.16 [67]	0.0620 ± 0.011 [72]	89.6 ± 0.7 [67]
52.8	42.67 ± 0.19 [67]	0.078 ± 0.010 [72]	93.6 ± 0.8 [67]
62.5	43.32 ± 0.23 [67]	0.095 ± 0.011 [72]	96.8 ± 1.1 [67]

Dados na direção não frontal ($q^2 > 0.01$ GeV^2)

Os dados na região de pequeno momento transferido foram normalizados pelo ponto óptico e acima desta região, diferentes conjuntos de dados foram normalizados um em relação ao outro, levando-se em conta erros estatísticos e sistemáticos (veja [67] para mais detalhes). O resultado final desta análise foi publicado na tabelas Landolt Börnstein (LB) [68], de onde extraímos nossos dados. Eles são reproduzidos na Figura 4.1, junto com os pontos ópticos, Tabela (4.1).

4.2.2 Dados em $\sqrt{s} = 19.4$ e 27.4 GeV

Estes conjuntos são os que possuem pontos experimentais com os maiores valores de q^2, $q^2_{\text{max}} = 11.9$ GeV^2 para $\sqrt{s} = 19.4$ GeV e $q^2_{\text{max}} = 14.2$ GeV^2 para $\sqrt{s} = 27.4$ GeV. Por este motivo eles têm um papel fundamental em nossa análise. Em especial, como veremos, os dados em $\sqrt{s} = 27.4$ GeV terão um papel muito importante na evidência estatística dos zeros da eiconal e os dados em $\sqrt{s} = 19.4$ serão importantes para fornecer informação sobre a dependência da posição do zero com a energia.

Estes dados foram obtidos nos anos 70 e 80 nos aceleradores Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) e no CERN Super Proton Synchroton (SPS). Alguns desses dados foram publicados na sua forma preliminar e só depois na forma final. Chamamos atenção para este fato porque podemos obter resultados diferentes quando utilizamos os dados na forma final em que foram publicados. Os dados são mostrados na Figura 4.2 e discriminados a seguir.

$\sqrt{s} = 19.4$ **GeV**

Ponto óptico. Calculamos o ponto óptico, equação (4.9), com os valores da seção de choque obtidos por Carrol et al. [69] e o parâmetro ρ obtidos por Fajardo et al. [70]

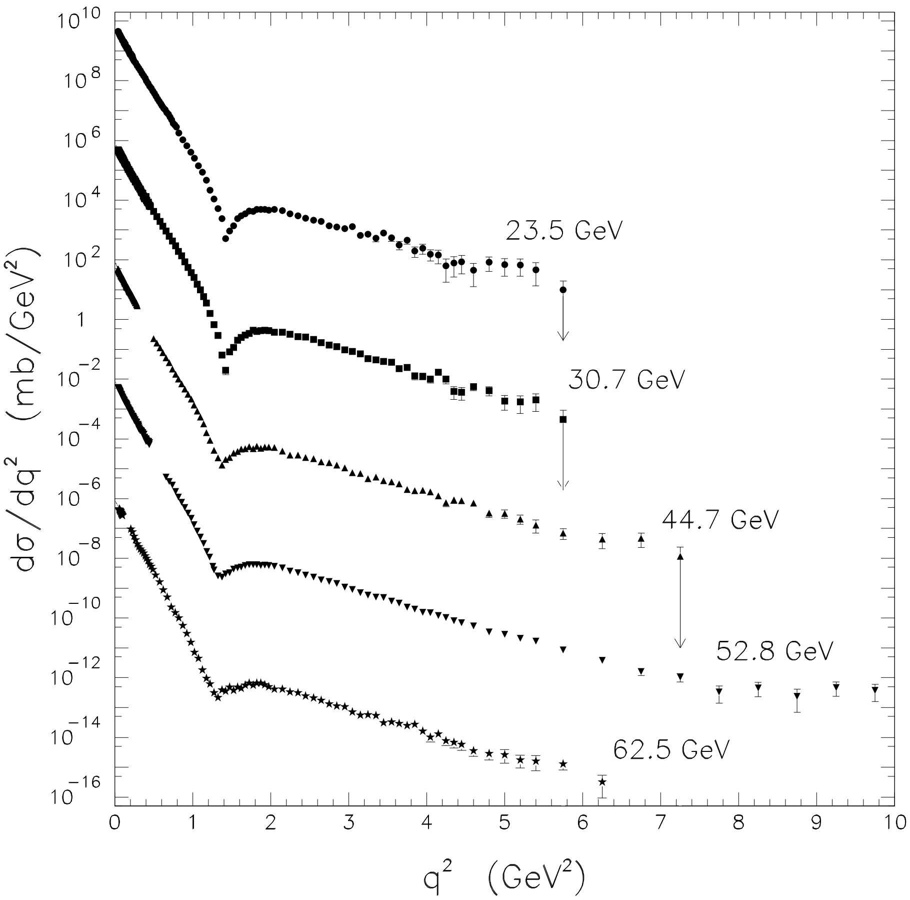

Figura 4.1: Seção de choque diferencial próton-próton nas energias do ISR compilados das tabelas Landolt Börnstein [68] e pontos ópticos da Tabela 4.1. Os dados foram multiplicados por fatores $10^{\pm 4}$.

(Tabela 4.1). Ambos os experimentos foram feitos no Fermilab com momento no feixe $p_{\mathrm{lab}=}$ 200 GeV ($\sqrt{s} = 19.42$).

Dados na direção não frontal. Utilizamos os seguintes conjuntos de dados:

$0.075 \leq q^2 \leq 3.25$ GeV^2: Dados finais publicados por Akerlof et al. [73] e obtidos no Fermilab com p_{lab} =200 GeV. Os erros são estatísticos e a incerteza na normalização é de 7%.

$5.0 \leq q^2 \leq 11.9$ GeV^2: Resultados finais publicados por Faissler et al. [74], obtidos no Fermilab com p_{lab} =201 GeV^2 ($\sqrt{s}$ = 19.47 GeV). Os erros são estatísticos e o erro de normalização global é de 15 %.

$0.6125 \leq q^2 \leq 3.90$ GeV^2: Dados obtidos por Fidecaro et al. [75] no CERN-SPS com

$p_{\rm lab}$ =200 GeV^2. Os valores de q^2 correspondem ao valor central dos intervalos [0.600 − 0.625] a [3.8 − 4.0]. Os dados são normalizados [75] e os erros são estatísticos.

$0.95 \leq q^2 \leq 8.15$ GeV^2: Resultados finais de Rubinstein et al. [76] obtidos no Fermilab com $p_{\rm lab}$ = 200 GeV^2. Os erros são estatísticos e a incerteza na normalização é de 15 %. Os pontos $q^2 = 6.55$ e 8.15 GeV^2 possuem erro estatístico de 100 %.

$\sqrt{s}$ = 27.4 GeV

Os dados cobrem a região $5.5 \leq q^2 \leq 14.2$ GeV^2 e utilizamos no trabalho os resultados finais de Faissler et al. [74], obtidos no Fermilab com $p_{\rm lab}$ = 400 GeV^2 ($\sqrt{s}$ = 27.45 GeV). Os erros são estatísticos e o erro de normalização é de 15 %.

Todos os dados em 19.4 e 27.4 GeV são mostrados na Figura 4.2. Os intervalos de momento transferido de todos os dados utilizados no trabalho, ou seja, $19.4 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV são mostrados na Tabela 4.2.

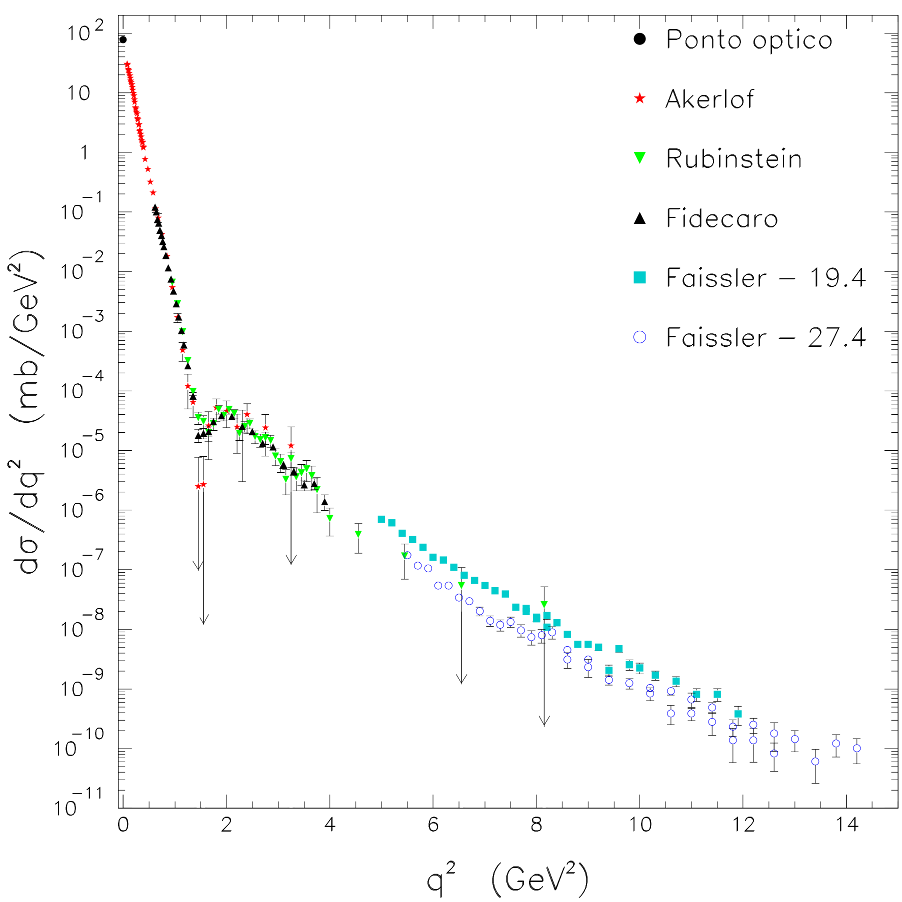

Figura 4.2: Dados de seção de choque diferencial em $\sqrt{s}$ = 19.4 GeV e 27.4 GeV utilizados nesta amálise.

Tabela 4.2: Intervalos no momento transferido para os dados de seção de choque diferencial em $q^2 > 0.01$ GeV^2 (acima da região de interferência Coulomb-nuclear), número de pontos utilizados na análise e referências.

$\sqrt{s}$ (GeV)	q^2 interval (GeV^2)	N. pontos	Referências
19.4 (Fermilab and CERN-SPS)	0.075 - 11.9	156	[73, 74, 75, 76]
23.5 (CERN-ISR)	0.042 - 5.75	172	[68]
27.4 (Fermilab)	5.5 - 14.2	39	[74]
30.7 (CERN-ISR)	0.016 - 5.75	211	[68]
44.7 (CERN-ISR)	0.01026 - 7.25	246	[68]
52.8 (CERN-ISR)	0.01058 - 9.75	244	[68]
62.5 (CERN-ISR)	0.01074 - 6.25	163	[68]

4.2.3 Discussão dos dados na região de grande momento transferido

Agora focamos a discussão nos dados a grande momento transferido. Primeiro, chamamos atenção para algumas diferenças que aparecem nas publicações dos dados experimentais e então discutimos a dependência com a energia dos dados acima de $q^2 = 3$–4 GeV^2, na região de interesse 19 – 63 GeV (Figuras 4.1 e 4.2). Para deixar mais claro alguns pontos vamos seguir uma ordem cronológica.

Referências e dados

Como vimos, os dados finais do CERN-ISR, $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV, foram compilados e normalizados por Amaldi e Schubert e foram publicados nas tabelas LB em 1980. Neste conjunto os resultados finais na região de grande momento transferido foram previamente publicados por Nagy et al. em 1979 [77] na região acima de 0.825 GeV^2 ($\sqrt{s} = 23.5$, 52.8, 62.5 GeV) e acima de 0.975 GeV^2 ($\sqrt{s} = 30.7$ e 44.7). O ponto aqui é que embora os autores afirmem que são os resultados finais, os valores numéricos que aparecem nas tabelas LB são aproximadamente 3% maiores que os publicados por Nagy et al.. Esta diferença pode ter surgido por causa do processo de normalização feito por Amaldi e Schubert, como referido na seção 4.2.1.

Os dados em 19.4 e 27.4 GeV também aparecem nas tabelas LB e neste caso algumas observações são necessárias. A primeira é que estes dados não fizeram parte da análise de Amaldi e Schubert e portanto não estão normalizados. A segunda observação é que alguns valores numéricos que aparecem nas tabelas LB são preliminares e não correspondem aos resultados finais publicados. A terceira é que outros dados em 19.4 GeV foram publicados depois de 1980 [75, 76].

Em 19.4 GeV, os dados que aparecem nas tabelas LB na região $0.075 \leq q^2 \leq 3.25$ GeV^2 são exatamente os mesmos publicados por Akerlof et al. em 1976 [73]. Entretanto dados nessa energia na região $5.5 \leq q^2 \leq 11.9$ GeV^2 e em $\sqrt{s} = 27.4$ GeV e $5.5 \leq q^2 \leq 14.2$ GeV^2 não correspondem aos valores finais publicados por Faissler et al. em 1981 [74]. As diferenças, no caso dos dados em 27.4 GeV, são ilustradas na Figura 4.3, onde vemos que o comportamento geral dos dados é similar, mas as correções são diferentes em diferentes regiões de momento. Além disso, o conjunto preliminar tem 30 pontos e o conjunto final publicado por Faissler et al. tem 39 pontos.

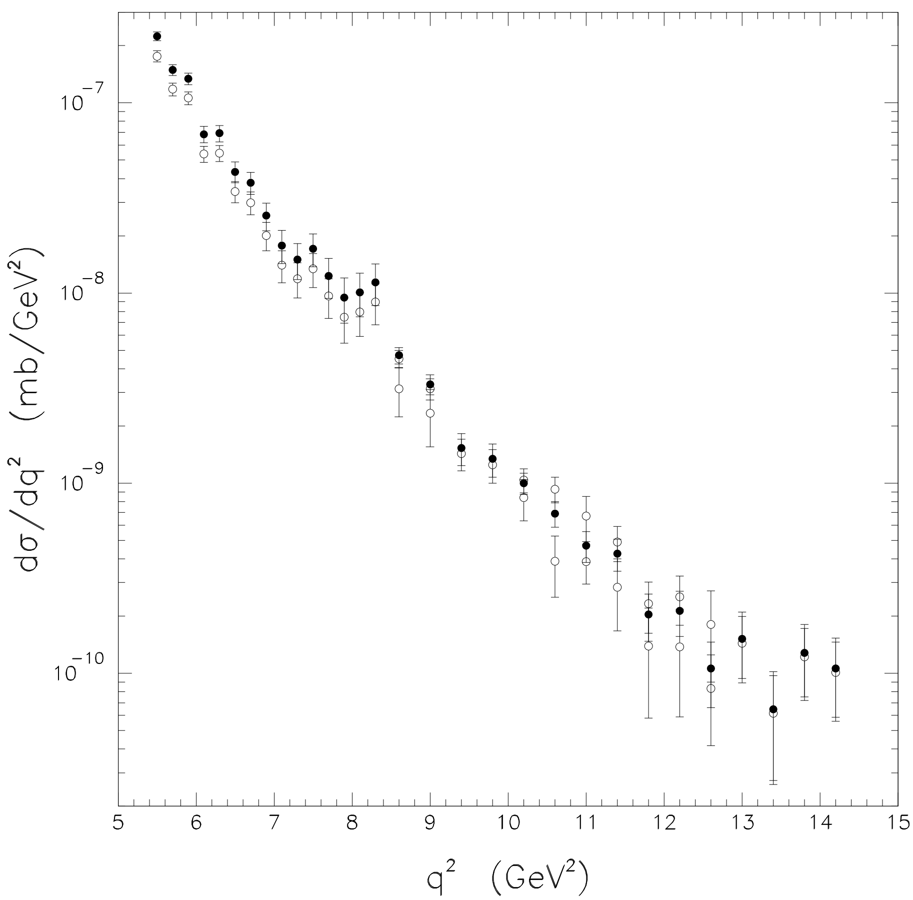

Figura 4.3: Dados de seção de choque diferencial para o espalhamento *pp* em 27.4 GeV das tabelas Landolt-Börnstein [68] (círculos pretos) e de Faissler et al. [74] (círculos brancos). As incertezas correspondem somente aos erros estatísticos.

Dependência com a energia

Há indicação experimental de que os dados de espalhamento pp na região de grande momento transferido ($q^2 > 3 - 4$ GeV^2) e energias acima de $\sqrt{s} \sim 19$ GeV tem pequena dependência com a energia. Se essa dependência puder ser desprezada, a informação experimental nos maiores valores de momento transferido (por exemplo, dados em 27.4 GeV) pode ser adicionada aos conjuntos de dados com energias próximas, levando à redução da região de incerteza nos ajustes de dados. Foi essa a estratégia utilizada por Carvalho, Martini e Menon [23, 24] que permitiu obter evidência estatística dos zeros da eiconal. Entretanto o valor exato da energia e momento transferido acima dos quais essa dependência pode ser desprezada não é claro na literatura. No que segue a fim de obtermos informação quantitativa sobre a dependência com a energia dos dados a grande momento transferido, $q^2 > 3 - 4$ GeV e na região de energia no centro de massa $19.4 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV, fizemos vários testes com os dados selecionados considerando apenas os erros estatísticos. Consideramos a seguinte parametrização tipo potência em q^2 para a seção de choque diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,q^2} = \frac{K}{(q^2/Q^2)^\lambda}, \tag{4.10}$$

com Q^2= 1 GeV^2, de forma que K é dado em mbGeV^{-2}.

O procedimento foi adicionar os dados em $\sqrt{s} = 27.4$ GeV a cada conjunto de dados nas energias de 19.4 a 62.5 e fazer ajustes com a parametrização acima. Utilizamos os dados em q^2 a partir de 3 valores diferentes $q^2_{\min} = 3.5$, 4.5 e 5.5 GeV^2 e considerando $\lambda = 8$ (como previsto por Donnachie e Landshoff [78]) ou λ como parâmetro de ajuste. Os resultados numéricos destes testes, obtidos através do programa CERN-Minuit [62] são mostrados na Tabela 4.3. A Figura 4.4 ilustra os ajustes quando utilizamos $q^2_{\min} = 3.5$ GeV^2.

Dos testes feitos podemos tirar as seguintes conclusões da Tabela 4.3

1. Os dados em 19.4 GeV não são compatíveis com a regra de potência nem com os dados em 27.4 GeV, pois em todos os casos $\chi^2/gdl \sim 20$ para 50 graus de liberdade;

2. Como esperado, os melhores resultados estatísticos foram obtidos com λ como parâmetro livre. Neste caso o valor de λ aumenta quando aumentamos o valor mínimo a partir do qual tomamos os dados;

3. Os conjuntos de dados com energia na região do ISR são compatíveis com a lei de potência e com os dados experimentais em $\sqrt{s} = 27.4$ GeV. Mesmo com os

Tabela 4.3: Testes com dados na região de grande momento transferido através da parametrização (4.10).

$q^2_{\min}$ (GeV^2)	$\sqrt{s}$ (GeV)	gdl	χ^2/gdl	K (mbGeV^{-2})	λ	média χ^2/gdl nas Energias do ISR
	19.4	82	23.4	0.2140 ± 0.0015	8	
	23.5	54	1.49	0.1183 ± 0.0030	8	
	30.7	54	2.24	0.1094 ± 0.0027	8	
	44.7	57	1.69	0.1123 ± 0.0026	8	1.83 ± 0.30
	52.8	62	2.05	0.1040 ± 0.0017	8	
	62.5	55	1.69	0.1130 ± 0.0028	8	
3.5						
	19.4	81	23.6	0.255 ± 0.016	8.087 ± 0.030	
	23.5	53	1.26	0.219 ± 0.036	8.313 ± 0.086	
	30.7	53	2.23	0.091 ± 0.011	7.900 ± 0.064	
	44.7	56	1.72	0.108 ± 0.012	7.978 ± 0.060	1.78 ± 0.36
	52.8	61	1.98	0.0862 ± 0.0070	7.883 ± 0.048	
	62.5	54	1.72	0.116 ± 0.015	8.012 ± 0.067	
	19.4	76	23.4	0.2172 ± 0.0018	8	
	23.5	44	1.73	0.1184 ± 0.0031	8	
	30.7	44	1.71	0.1177 ± 0.0031	8	
	44.7	47	1.61	0.1178 ± 0.0030	8	1.74 ± 0.11
	52.8	52	1.92	0.1117 ± 0.0025	8	
	62.5	45	1.74	0.1170 ± 0.0030	8	
4.5						
	19.4	75	22.8	0.390 ± 0.027	8.291 ± 0.034	
	23.5	43	1.33	0.289 ± 0.062	8.45 ± 0.11	
	30.7	43	1.40	0.251 ± 0.050	8.38 ± 0.10	
	44.7	46	1.32	0.248 ± 0.048	8.38 ± 0.10	1.50 ± 0.24
	52.8	51	1.90	0.146 ± 0.022	8.142 ± 0.079	
	62.5	44	1.53	0.221 ± 0.043	8.320 ± 0.099	
	19.4	71	22.6	0.2102 ± 0.0018	8	
	23.5	39	1.84	0.1183 ± 0.0031	8	
	30.7	39	1.88	0.1181 ± 0.0020	8	
	44.7	42	1.76	0.1180 ± 0.0031	8	1.75 ± 0.33
	52.8	47	2.06	0.1134 ± 0.0033	8	
	62.5	40	1.82	0.1182 ± 0.0031	8	
5.5						
	19.4	70	22.2	0.257 ± 0.022	8.097 ± 0.040	
	23.5	38	1.40	0.288 ± 0.061	8.45 ± 0.11	
	30.7	38	1.46	0.283 ± 0.060	8.44 ± 0.11	
	44.7	41	1.38	0.279 ± 0.060	8.43 ± 0.11	1.58 ± 0.22
	52.8	46	1.83	0.234 ± 0.050	8.37 ± 0.11	
	62.5	39	1.40	0.288 ± 0.061	8.44 ± 0.11	

dados em 23.5 GeV indo até 5.75 GeV^2 e os de 27.4 GeV começando em 5.5 GeV^2, os ajustes indicam compatibilidade para os cortes feitos em 3.5 e 4.5 GeV^2. Por isso consideramos que os dados em 23.5 GeV são o ponto limite para o início da independência com a energia.

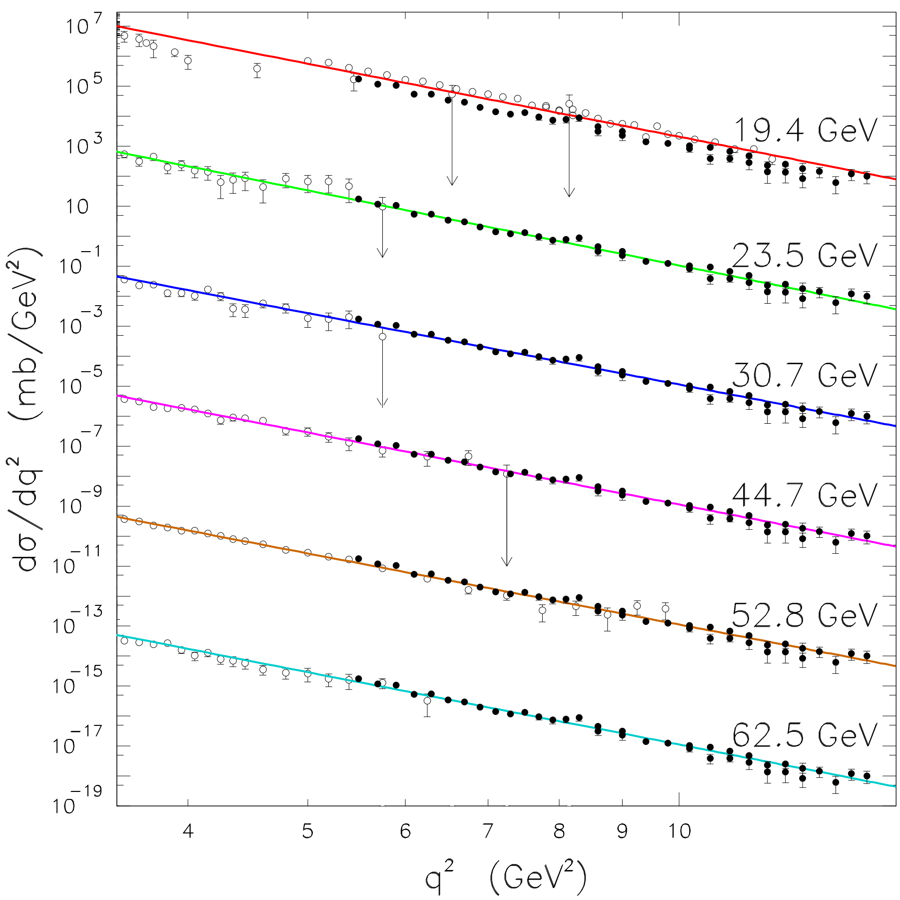

Figura 4.4: Adição dos dados em 27.4 GeV (círculos negros) e ajustes através da parametrização (4.10) em escala logarítmica, com corte em $q^2_{\rm min} = 3.5$ GeV^2. As curvas e os dados estão multiplicados por fatores de $10^{\pm 4}$.

As conclusões acima são corroboradas fazendo o mesmo teste com todos os dados do ISR juntos (usando os cortes em $q^2_{\rm min} = 3.5$, 4.5 e 5.5 GeV^2) e depois adicionando o conjunto em 27.4 GeV. Também fizemos o teste somente com os dados em $\sqrt{s} = 19.4$ GeV. Os resultados para $q^2_{\rm min} = 3.5$ GeV^2 são mostrados na Tabela 4.4, onde os conjuntos acima são denotados por ISR, ISR+27.4 e 19.4, respectivamente. A Figura 4.5 mostra o resultado do ajuste para o caso do conjunto ISR+27.4 e λ como um parâmetro livre.

A principal conclusão é que os dados em 27.4 GeV podem ser adicionados a cada um dos 5 conjuntos de dados do ISR, de forma que podemos ter mais informação experimental em cada energia e reduzir as incertezas quando extrapolamos os resultados dos ajustes. No caso do conjunto em $\sqrt{s} = 19.4$ GeV não podemos adicionar os dados em 27.4 GeV.

Tabela 4.4: Ajustes com a parametrização (4.10) para: (1) todos os dados do ISR (ISR); (2) todos os dados do ISR junto com os dados em 27.4 GeV (ISR + 27.4); (3) dados em 19.4 GeV (19.4).

Ensemble	*gdl*	χ^2/gdl	K (mbGeV^{-2})	λ
ISR	90	0.97	0.09635 ± 0.00096	8
	89	0.87	0.085 ± 0.013	7.91 ± 0.11
ISR + 27.4	129	1.46	0.1012 ± 0.0014	8
	128	1.38	0.0798 ± 0.0055	7.847 ± 0.042
19.4	43	10.0	0.2571 ± 0.0021	8
	42	11.3	0.258 ± 0.017	8.003 ± 0.032

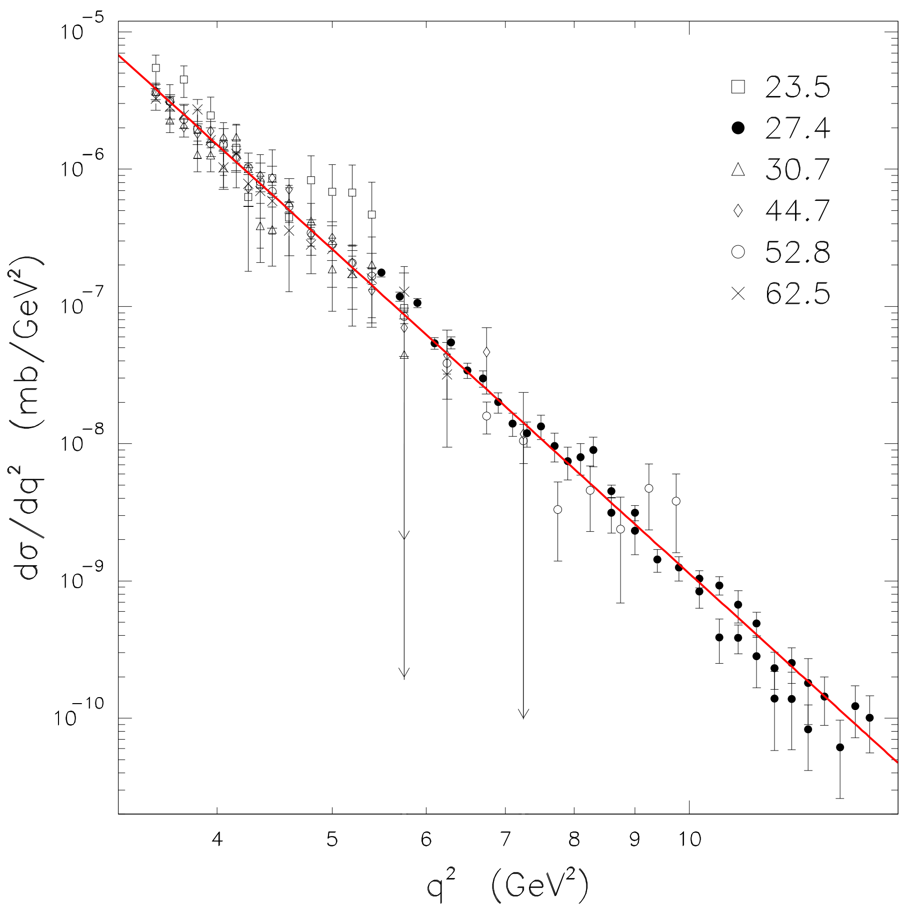

Figura 4.5: Ajuste de seção de choque diferencial pp com dados do ISR junto com dados em 27.4 GeV (ISR + 27.4) e $q^2 > 3.5$ GeV^2.

4.3 Aprimoramentos em relação às análises anteriores

Nesta seção discutimos alguns aprimoramentos introduzidos neste trabalho, em relação às análises anteriores [23, 24], os quais dizem respeito ao conjunto de dados utilizados (seção 4.3.1), à parametrização (4.3.2) e ao intervalo de confiança (4.3.3).

4.3.1 Conjuntos de dados e independência com a energia

Nas referências [23, 24] os dados em $\sqrt{s} = 27.4$ GeV foram extraídos das tabelas LB e como vimos em 4.2, os 30 pontos experimentais não correspondem ao resultado final com 39 pontos publicado por Faissler et al. Aqui utilizamos o último conjunto.

Na referência [23] os dados em $\sqrt{s} = 19.4$ GeV cobriam a região até 8.15 GeV^2, pois os dados de Faissler et al. (até 11.9 GeV^2) não foram incluídos. Aqui incluímos todos os dados nessa energia.

Finalmente no procedimento de ajuste feito em [23] os dados em $\sqrt{s} = 27.4$ GeV foram adicionados ao conjunto de dados em 19.4 GeV. Entretanto, como vimos na seção anterior, não há justificativa estatística para esta adição, pois temos dependência com a energia nesta região.

4.3.2 Parametrização

Em [23, 24], a parametrização empírica para as partes real e imaginária da amplitude foi obtida da seguinte forma. Considerou-se uma parametrização padrão para a amplitude de espalhamento como soma de exponenciais em q^2

$$F(s,q) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}^{-\beta_i q^2}. \tag{4.11}$$

A estrutura específica da parametrização foi determinada pelo seguinte procedimento independente de modelo.

Iniciou-se com o espalhamento pp em $\sqrt{s} = 52.8$ GeV, que é o conjunto que tem o maior intervalo de momento transferido, isto é, $0.01 \leq q^2 \leq 9.8$ GeV^2 e o ponto óptico (4.9). A região do pico de difração $0.01 \leq q^2 \leq 0.5$ GeV^2 é caracterizada por uma mudança de inclinação (slope) aproximadamente em $q^2 \sim 0.13$ GeV^2 [79] e a dominância da parte imaginária da amplitude, pois $\rho = 0.078$ (Tabela 4.1). Por isso, representou-se a parte imaginária da amplitude pela soma de duas exponenciais. Examinando o gráfico dos dados, foram obtidos valores iniciais para os parâmetros livres que foram determinados estatisticamente através do programa CERN-Minuit. Um procedimento similar foi feito na região de grandes momentos transferidos ($3.0 \leq q^2 \leq 9.8$ GeV^2) levando à determinação de mais dois termos exponenciais. Para gerar o mínimo difrativo foi adicionado aos resultados anteriores mais um termo exponencial com sinal negativo. Procurando a abordagem mais simples, com menor número de parâmetros possível, foi testada a possibilidade de duas exponenciais representarem a parte real da amplitude. A única restrição corresponde à definição do parâmetro ρ, equação (4.6). Usando os valores iniciais dos parâmetros livres, os valores determinados pelos procedimentos acima levaram a um resultado final de $\chi^2/gdl = 1.65$.

Com o resultado obtido em 52.8 GeV foram ajustados os dados de espalhamento pp em uma sequência de energias (62.5, 44.7, 30.7, 23.5 e 19.4) usando como valores iniciais dos parâmetros aqueles obtidos no caso anterior, ou seja, na energia mais próxima. Para o caso do espalhamento pp também foram feitos ajustes acrescentando os dados de $\sqrt{s} =$ 27.4 GeV nas energias 19.4, 23.5, 30.7, 44.7, 52.8 e 62.5, utilizando como valores iniciais dos parâmetros os valores obtidos no conjunto sem os dados de $\sqrt{s} = 27.4$ GeV.

Com esse procedimento foi obtida uma boa reprodução dos dados experimentais com a seguinte parametrização para as partes real e imaginária da amplitude

$$\mathrm{Re}\, F(s,q) = \mu \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \mathrm{e}^{-\beta_j q^2}, \tag{4.12}$$

$$\mathrm{Im}\, F(s,q) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{e}^{-\beta_j q^2}, \tag{4.13}$$

sendo

$$\mu = \frac{\rho(s)}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \tag{4.14}$$

onde α_j, β_j ($j = 1, \ldots, n$) são parâmetros livres e $\rho(s)$ é o valor experimental em cada energia.

Nesta tese também utilizamos a mesma forma básica para a amplitude, mas incluímos a seção de choque total na parametrização. A amplitude de espalhamento é expressa por

$$F(s,q) = \mu(s) \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathrm{e}^{-\beta_j q^2} + \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{e}^{-\beta_j q^2}, \tag{4.15}$$

onde

$$\mu(s) = \frac{\rho(s)\sigma_{\mathrm{tot}}(s)}{4\pi \sum_{j=1}^{m} \alpha_j}, \tag{4.16}$$

e $\rho(s)$ e $\sigma_{\text{tot}}(s)$ são os valores experimentais em cada energia, com isso a parametrização reproduz agora tanto ρ como σ_{tot} em $q = 0$, equações (4.5) e (4.6). O número de exponenciais depende do conjunto de dados analisado.

4.3.3 Intervalo de confiança

Outro aprimoramento no procedimento de ajuste está relacionado ao nível de confiança para os erros dos parâmetros de ajuste. Em [23, 24] os erros nos parâmetros correspondem a um aumento no χ^2 de uma unidade, que é controlado no programa CERN-Minuit pelo parâmetro *up*, que era definido igual a 1 (default). Entretanto, dependendo do número de parâmetros livres, este valor fixo implica em intervalos de confiança diferentes, que determinam o intervalo de incerteza em cada parâmetro livre [62]. Aqui fixamos o valor de *up* em cada ajuste para que os erros dos parâmetros correspondam a um intervalo de confiança padrão de 70 %.

4.4 Resultados dos ajustes

Analisamos 6 conjuntos de dados de seção de choque diferencial *pp*: o conjunto em 19.4 GeV e os 5 conjuntos do ISR com os dados em 27.4 GeV adicionados em cada um dos conjuntos.

Cada conjunto foi ajustado com a parametrização (4.15) e (4.16) com os valores experimentais de $\sigma_{\text{tot}}(s)$ e ρ na Tabela 4.1, através do programa CERN-Minuit. Os valores iniciais dos parâmetros foram os valores obtidos em [23].

Os melhores ajustes foram obtidos com 2 exponenciais na parte real e 4, 5 ou 6 na parte imaginária, dependendo do conjunto analisado: $m = 2$ e $n = 4$, 5 ou 6 na equação (4.15). Destacamos que os termos da exponencial com $j = 1$ e $j = 2$ aparecem nas partes real e imaginária.

Os resultados numéricos são mostrados na Tabela 4.5, junto com as informações estatísticas, incluindo o valor de *up* e os valores de χ^2/gdl obtidos neste trabalho e na análise anterior [23]. As Figuras 4.6 e 4.7 mostram os resultados do ajuste juntamente com os dados experimentais em toda a região com dados de q^2 e somente no pico de difração, respectivamente. A Figura 4.8 mostra as contribuições das partes real e imaginária para a seção de choque diferencial.

Da Tabela 4.5 vemos que os valores de χ^2/gdl que foram aqui obtidos são um pouco menores que os apresentados em [23], exceto em 23.5 GeV, para o qual, obtivemos o mesmo χ^2/gdl. A pequena melhora estatística dos resultados pode ser devido à inclusão

Tabela 4.5: Resultados do ajuste e informações estatísticas de cada conjunto: valores dos parâmetros livres, máximo valor do momento transferido em GeV^2 ($q^2_{\max}$), valores do parâmetro *up* para cada ajuste (veja texto), número de graus de liberdade (gdl) e χ^2/gdl obtidos nesta análise e no trabalho [23].

$\sqrt{s}$ (GeV):	19.4	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
α_1	0.1364	-0.260	-1.20×10^{-3}	-0.0119	-0.0281	-0.042
	± 0.0041	± 0.074	$\pm 0.87 \times 10^{-3}$	± 0.0024	± 0.0045	± 0.014
α_2	-1.655	3.4	3.70	0.631	1.26	2.20
	± 0.066	± 1.3	± 0.49	± 0.090	± 0.13	± 0.61
α_3	3.686	0.25	-0.0441	3.710	3.631	0.20
	± 0.069	± 0.13	± 0.0063	± 0.053	± 0.060	± 0.28
α_4	-1.495	-	-	-3.096	-3.116	-
	± 0.042			± 0.050	± 0.056	
α_5	7.396	-0.0014	4.51	7.425	6.996	6.46
	± 0.086	± 0.0017	± 0.51	± 0.075	± 0.012	± 0.64
α_6	-0.1093	4.6	-	-0.39×10^{-3}	-1.06×10^{-3}	-0.0013
	± 0.0040	± 1.3		$\pm 0.38 \times 10^{-3}$	$\pm 0.54 \times 10^{-3}$	± 0.0013
β_1	0.6002	1.19	0.378	0.736	0.926	0.98
	± 0.0060	± 0.29	± 0.067	± 0.049	± 0.051	± 0.14
β_2	2.762	8.4	8.18	31.6	16.5	11.6
	± 0.063	± 1.7	± 0.62	± 6.4	± 1.6	± 1.9
β_3	2.272	1.31	0.984	2.183	2.217	2.89
	± 0.017	± 0.54	± 0.079	± 0.014	± 0.015	± 0.94
β_4	1.770	-	-	2.063	2.126	-
	± 0.017			± 0.013	± 0.014	
β_5	5.864	0.39	4.21	6.092	5.646	5.18
	± 0.077	± 0.11	± 0.12	± 0.086	± 0.086	± 0.25
β_6	0.5706	4.24	-	0.292	0.368	0.382
	± 0.0046	± 0.44		± 0.081	± 0.048	± 0.092
$q^2_{\max}$ (GeV^2)	11.9	14.2	14.2	14.2	14.2	14.2
up	14.02	11.78	9.52	14.02	14.02	11.78
gdl	145	163	204	235	233	154
χ^2/gdl	2.76	1.20	1.24	2.05	1.71	1.22
χ^2/gdl em [23]	2.80	1.20	1.28	2.13	2.07	1.51

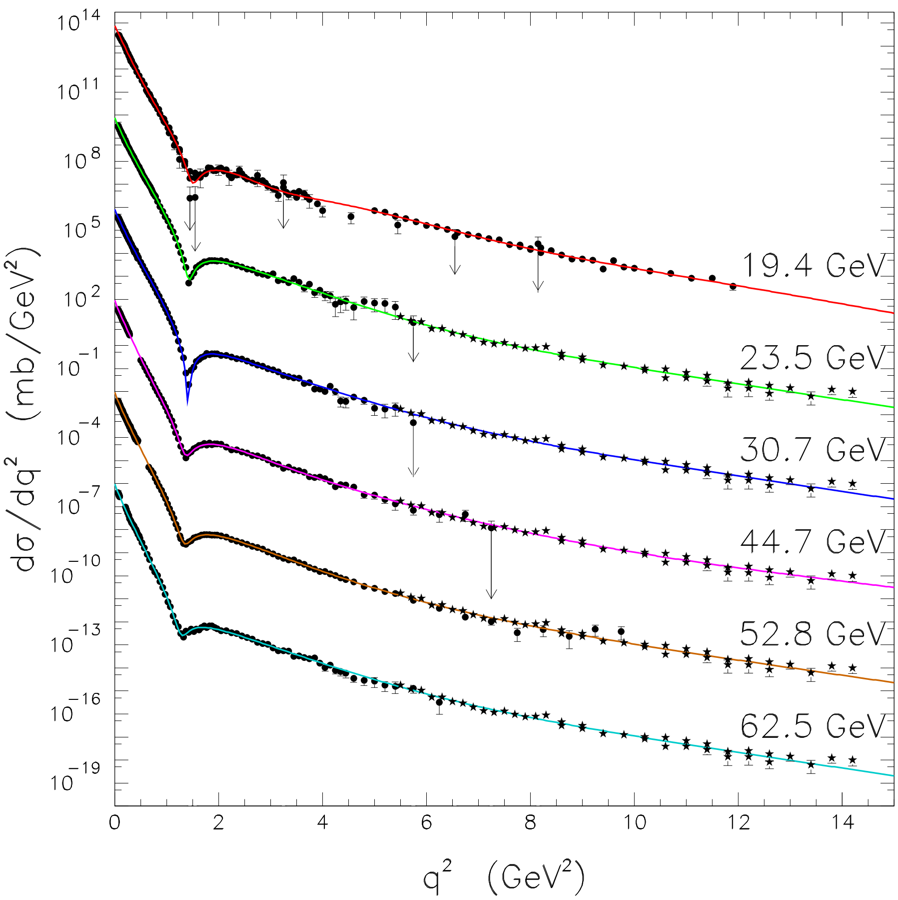

Figura 4.6: Resultados dos ajustes de dados de seção de choque diferencial pp. Curvas e dados estão multiplicados por fatores de $10^{\pm 4}$.

dos dados experimentais de σ_{tot} na parametrização. Na Figura 4.8 vemos que, em todos os casos, a parte real da amplitude apresenta um zero para pequenos valores de q^2, a parte imaginária tem um zero nas energias do ISR mas apresenta múltiplos zeros em 19.4 GeV. Isso pode ter ocorrido porque os dados não são normalizados como na análise de Amaldi e Schubert e porque temos menos pontos em valores grandes de q^2. Este efeito não apareceu em [23] pois lá foram acrescentados os dados de 27.4 GeV a este conjunto.

4.5 Eiconal no espaço de momento transferido

A partir da parametrização (4.15) e (4.16)

$$F(s,q) = \mu(s)\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \mathrm{e}^{-\beta_j q^2} + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \mathrm{e}^{-\beta_j q^2}, \tag{4.17}$$

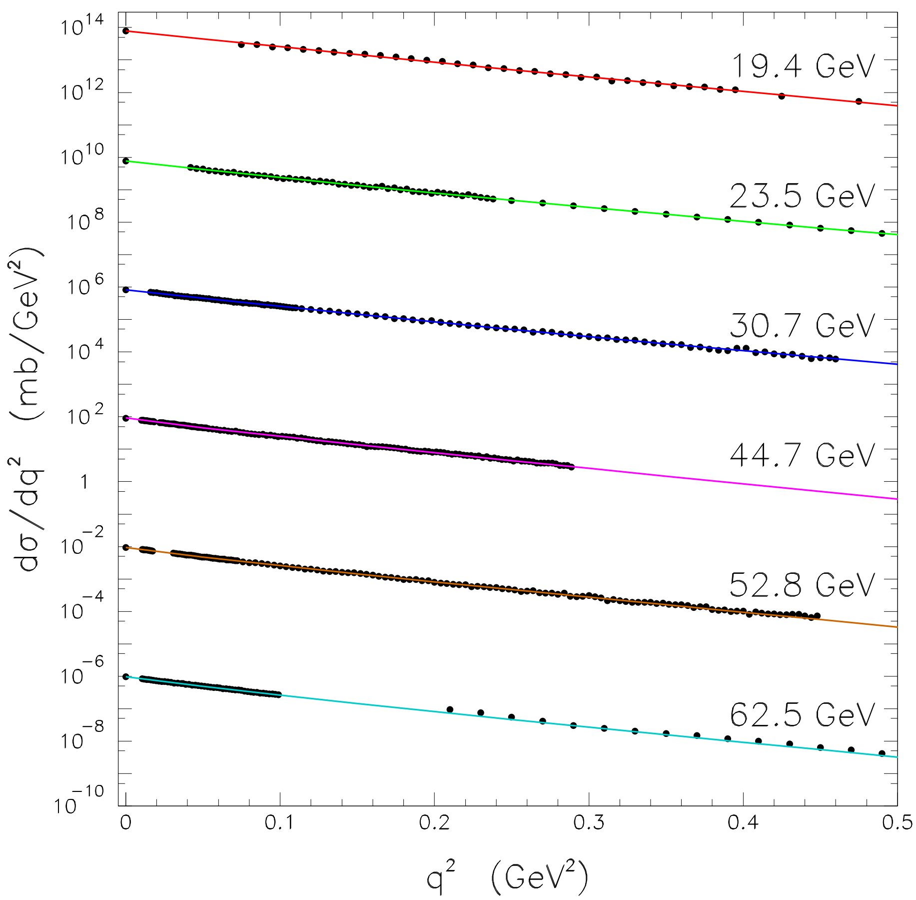

Figura 4.7: Resultados do ajuste no pico de difração. Curvas e dados estão multiplicados por fatores de $10^{\pm 4}$.

onde

$$\mu(s) = \frac{\rho(s)\sigma_{\text{tot}}(s)}{4\pi \sum_{j=1}^{m} \alpha_j}, \tag{4.18}$$

e ajustes para seção de choque diferencial $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,q^2$ podemos facilmente extrair a função de perfil (4.7) pois

$$\int_0^\infty q \mathrm{d}\, q J_0(qb) \mathrm{e}^{-\alpha q^2} = \frac{1}{2\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4\alpha}}. \tag{4.19}$$

Também é fácil obter a eiconal no espaço de parâmetro de impacto

$$\chi(s,b) = -\mathrm{i} \ln(1 - \Gamma(s,b)) \tag{4.20}$$

ou, escrevendo explicitamente as partes real e imaginária,

$$\chi_R(s,b) = \tan^{-1}\left[\frac{\Gamma_I(s,b)}{\Gamma_R(s,b)-1}\right] \tag{4.21}$$

$$\chi_I(s,b) = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{\Gamma_I^2(s,b)+[1-\Gamma_R(s,b)]^2}}\right]. \tag{4.22}$$

Utilizando as variâncias e covariâncias nos parâmetros de ajuste de $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,q^2$ podemos calcular as incertezas para todas as quantidades acima. Entretanto, com a parametrização escolhida (4.15) e (4.16) para a amplitude de espalhamento, a transformação da eiconal no espaço de parâmetro de impacto b para o espaço de momento transferido (4.3) não pode ser feita analiticamente e desse modo a propagação dos erros, como no caso de $\Gamma(s,b)$ e $\chi(s,b)$ também não pode ser feita. Para resolver este problema um método analítico-numérico foi desenvolvido em [24], o qual discutimos a seguir.

No que segue trataremos somente a parte imaginária da eiconal porque de acordo com nossa definição (equações (4.1) e (4.2)) ela corresponde à função opacidade, em analogia com a óptica. Com a notação usual representamos

$$\chi(s,b)_I \equiv \Omega(s,b). \tag{4.23}$$

Usaremos a notação $\langle\ \rangle$ para representar a transformada de Fourier-Bessel com simetria azimutal, de forma que a transformação entre os espaços de b e q é dada por

$$\Omega(s,b) =< \tilde{\Omega}(s,q) >= \int_0^\infty q\,\mathrm{d}q J_0(qb)\tilde{\Omega}(s,q), \tag{4.24}$$

$$\tilde{\Omega}(s,q) =< \Omega(s,b) >= \int_0^\infty b\,\mathrm{d}b J_0(qb)\Omega(s,b). \tag{4.25}$$

4.5.1 Método analítico-numérico

Como mostrado em [23] pelos valores extraídos, junto com as incertezas,

$$\frac{\Gamma_I(s,b)}{[1-\Gamma_R(s,b)]^2} \ll 1, \tag{4.26}$$

de modo que é possível aproximar a parte imaginária da eiconal, equação (4.22), por

$$\Omega(s,b) \approx \ln\left[\frac{1}{1-\mathrm{Re}\,\Gamma(s,b)}\right]. \tag{4.27}$$

O mesmo é válido para nossos resultados, como ilustrado nas Figuras 4.9 e 4.10.

Expandindo (4.27), podemos expresá-la na forma

$$\Omega(s,b) = \text{Re}\ \Gamma(s,b) + R(s,b), \tag{4.28}$$

onde $R(s,b)$ representa o resto da série

$$R(s,b) = \ln\left[\frac{1}{1-\text{Re}\ \Gamma(s,b)}\right] - \text{Re}\ \Gamma(s,b). \tag{4.29}$$

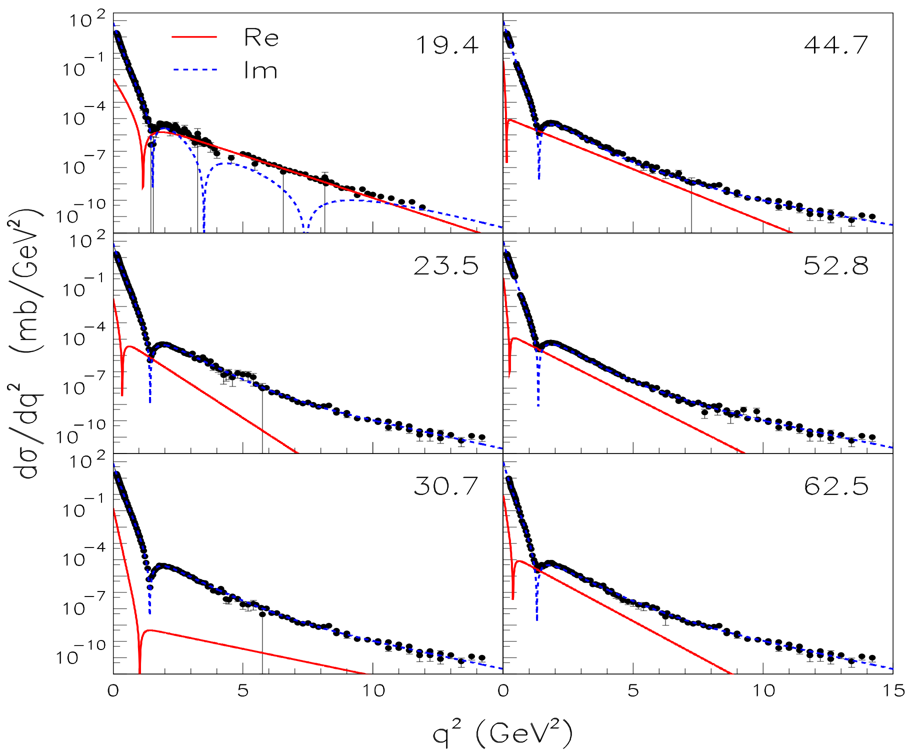

Figura 4.8: Contribuições para a seção de choque diferencial da parte real (linha cheia) e da parte imaginária (linha tracejada) da amplitude. Para clareza, não foram incluídas as regiões de incerteza

Com R escrito na forma acima é possível propagar os erros de $\text{Im}\, F$ para $\text{Re}\, \Gamma$ (4.7) e então para $R(s,b)$. O próximo passo é transformar a equação (4.28) do espaço de b para o espaço de q. Aplicando a transformada de Fourier em (4.28) obtemos

$$\tilde{\Omega}(s,q) = \text{Im}\ F(s,q) + \tilde{R}(s,q). \tag{4.30}$$

O problema aqui é que devido à estrutura da parametrização, a transformação $R(s,b)$ para $\tilde{R}(s,q)$ não pode ser efetuada analiticamente e como consequência não podemos

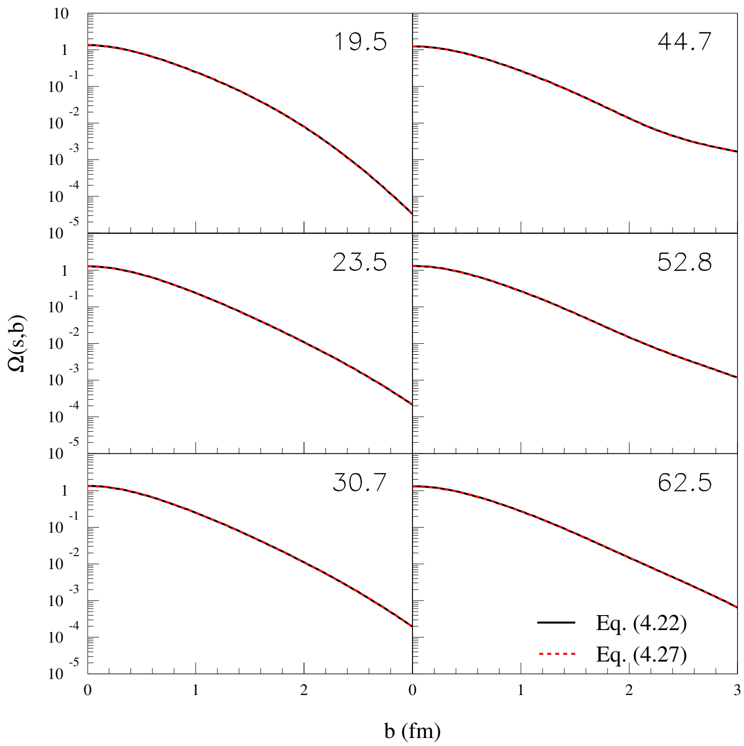

Figura 4.9: Parte imaginária da eiconal $\chi_I(s,b) \equiv \Omega(s,b)$: comparação entre os resultados exato (4.22) e aproximado (4.27).

calcular a propagação de erro, como feito até agora. O método analítico-numérico introduzido em [24] trata esta questão da seguinte forma. Primeiro geramos um conjunto numérico de pontos $R(s,b) \pm \Delta R(s,b)$ através da equação (4.29) e então ajustamos esse conjunto de dados por uma soma de exponenciais em b^2 (gaussianas em b):

$$R_{\text{ajuste}}\,(s,b) = \sum_{j=1}^{6} A_j \mathrm{e}^{-B_j b^2}. \tag{4.31}$$

Os resultados obtidos são mostrados na Figura 4.11. Desta forma, não somente $\tilde{R}(s,q)$ pode ser calculado através da transformada, mas também os erros dos parâmetros de ajuste A_j, B_j podem ser analiticamente propagados, levando às incertezas $\Delta\tilde{R}(s,q)$. Daqui em diante focalizaremos a investigação nos zeros da eiconal.

4.5.2 Zeros da eiconal

Como em [23, 24], investigamos os zeros da eiconal através de gráficos de $q^8 \times (\tilde{\Omega}(s,q) \pm \Delta\tilde{\Omega}(s,q))$ em função do momento transferido, mostrado na Figura 4.12. Consideramos

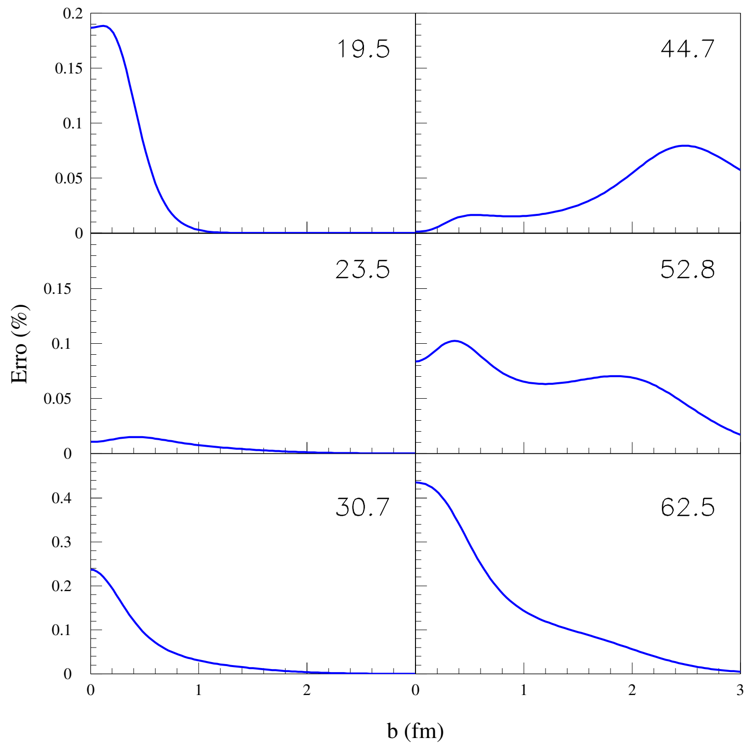

Figura 4.10: Erro cometido relativo associado aos resultados da Figura 4.9.

como evidência estatística da mudança de sinal somente os casos nos quais a região de incerteza acima do valor central está abaixo do zero. Com este critério, da Figura 4.12, temos evidência de mudança de sinal em todas as energias do ISR, mas, não em $\sqrt{s}$ = 19.4 GeV.

Este último resultado (zero a 19.4 GeV) contradiz o obtido na análise anterior [23]. Como já comentado, a razão é que em [23] os dados em $\sqrt{s}$ = 27.4 GeV foram adicionados aos dados de 19.4 GeV, o que não foi feito nesta tese. Este fato ressalta a importância dos dados na região de grande momento transferido na determinação dos zeros da eiconal. Esse efeito também é reforçado se considerarmos apenas os ajustes com os dados do ISR, sem adicionar os dados de 27.4 GeV. Os Resultados são mostrados na Figura 4.13, na qual vemos que exceto para $\sqrt{s}$ = 44.7 e 52.8 GeV, os dois conjuntos com maior intervalo no momento transferido, não há evidência de zeros em nenhum dos demais conjuntos.

Dos gráficos da Figura 4.12 e utilizando uma função da rotina NAG (C05ADF) para calcular zeros de funções, determinamos a posição dos zeros e as incertezas associadas com cada valor central. Os valores numéricos estão na Tabela 4.6 e na Figura 4.14, onde a linha tracejada conectando os valores centrais foi desenhada somente para guiar os olhos.

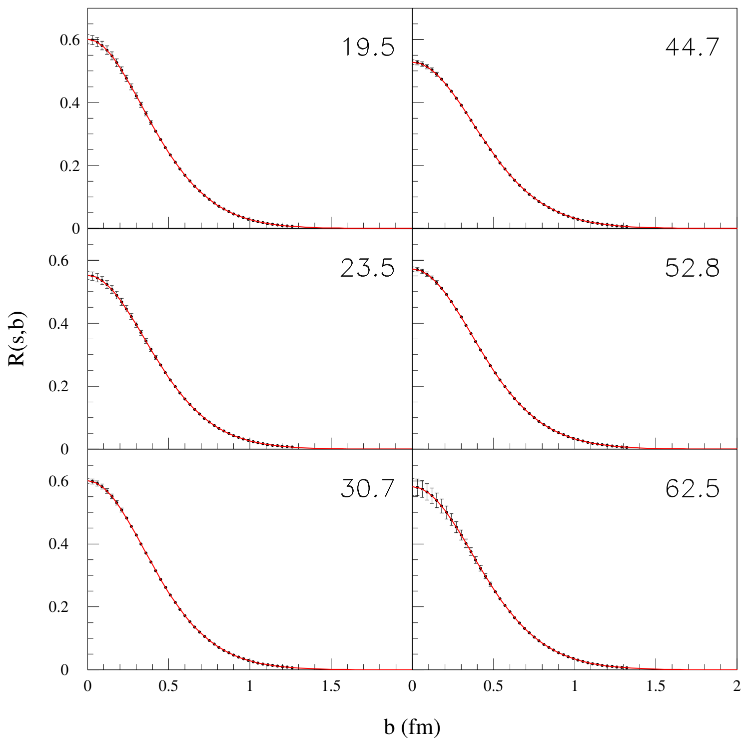

Figura 4.11: Pontos gerados da função resto da série (4.29) junto com as incertezas e ajuste por gaussianas em b (4.31).

Embora exista a evidência estatística para mudança de sinal da eiconal na região de energia do ISR, não é possível extrair uma relação quantitativa entre a posição do zero e a energia. Calculando a média dos valores centrais obtemos $q_0^2 = 7.04 \pm 1.08$ GeV^2. Podemos dizer que temos uma evidência da mudança de sinal da eiconal na região entre 6 e 8 GeV^2, que pode ser representada por

$$\bar{q}_0^2 = 7.0 \pm 1.0\,\mathrm{GeV}^2 \tag{4.32}$$

Assim podemos dizer que a conclusão de que a posição do zero decresce com a energia inferida em [23] foi baseada na posição do zero em $\sqrt{s} = 19.4$ GeV, em contradição com os resultados aqui obtidos.

4.6 Implicações fenomonelógicas dos zeros da eiconal

Estamos apresentando aqui um resultado empírico. Um dos problemas com o ajuste está associado à falta de conhecimento da contribuição da parte real e da parte imaginária da amplitude na direção frontal. No que segue faremos uma discussão somente qualitativa

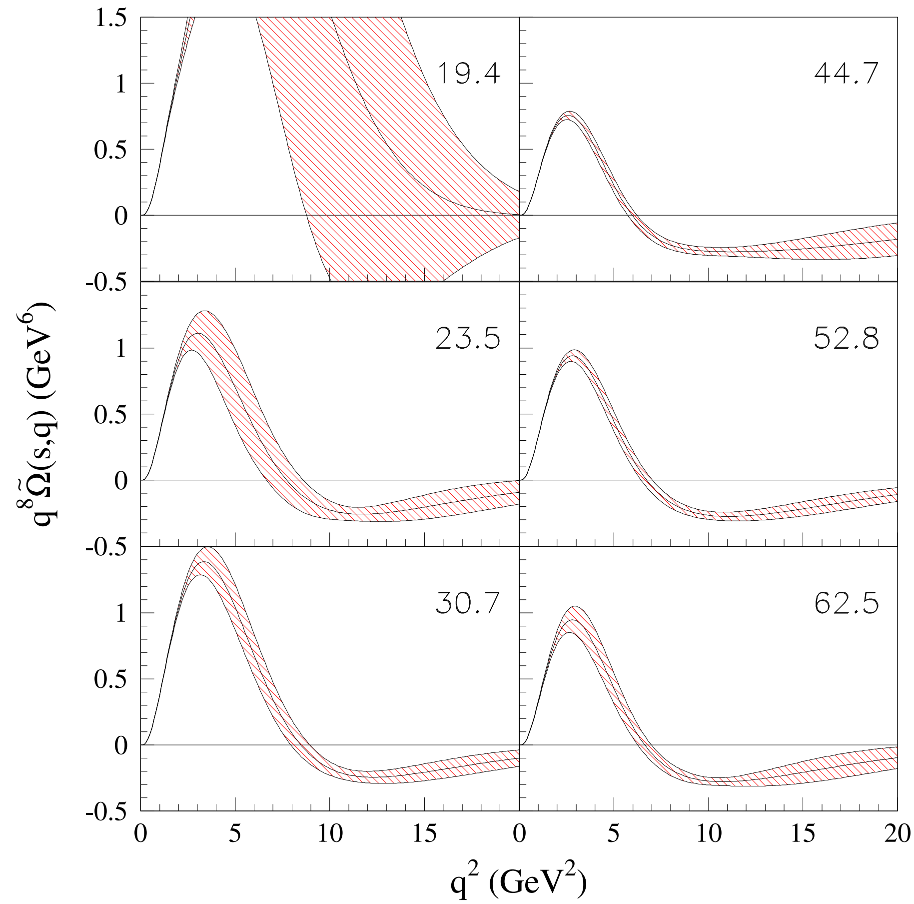

Figura 4.12: Parte imaginária da eiconal no espaço de momento transferido multiplicada por q^8 e região de incerteza calculada através de propagação de erros.

de alguns aspectos e o que for quantitativo não será muito detalhado.

Nosso resultado independente de modelo para a parte imaginária da eiconal no espaço de q indica, que na região do ISR a eiconal é positiva até aproximadamente 7 GeV^2, muda de sinal, tem um mínimo negativo e além deste mínimo, vai a zero através de valores negativos, Figura 4.12. Como discutido por Kawasaki, Maheara e Yonegawa [80] este comportamento sugere duas contribuições dinâmicas distintas, no regime difrativo: uma interação de longo alcance (eiconal positiva) e outra de curto alcance (eiconal negativa). Nesta seção discutiremos algumas implicações deste comportamento.

4.6.1 Eiconal e amplitude de espalhamento

Uma das características mais importantes do espalhamento elástico de hádrons é o padrão difrativo na seção de choque diferencial, o pico, o mínimo e o decrescimento suave em

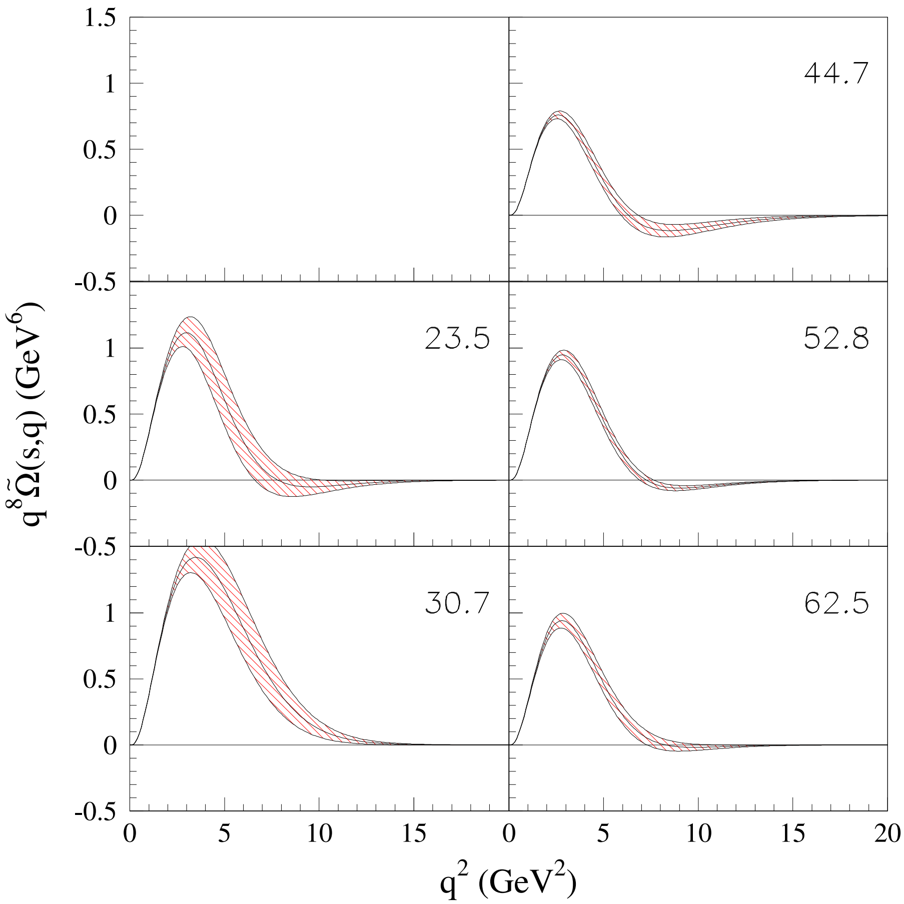

Figura 4.13: Fig. 4.12 para os ajustes aos dados do ISR sem adicionar os dados em 27.4 GeV.

grandes momentos transferidos, Figuras 4.1 e 4.2. É geralmente aceito que o mínimo em $q^2 \sim 1.5$ GeV^2 é devido à mudança de sinal na parte imaginária da amplitude e que o mínimo é preenchido pela parte real da amplitude. É isso que nossos ajustes indicam (Figura 4.8). Então pode ser importante examinar possíveis conexões entre os zeros da amplitude e os zeros da parte imaginária da eiconal. Vários aspectos a esse respeito já foram discutidos por Kawasaki, Maehara e Yonezawa [80].

Pela expansão da exponencial em (4.1) podemos obter para a parte imaginária da amplitude

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(s,q) &= \operatorname{Im} < \chi(s,b) > + \frac{1}{2!}\operatorname{Re} < \chi^2(s,b) > \\ &- \frac{1}{3!}\operatorname{Im} < \chi^3(s,b) > - \frac{1}{4!}\operatorname{Re} < \chi^4(s,b) > + ... \end{aligned} \tag{4.33}$$

Então, numa aproximação de primeira ordem, o zero em $\operatorname{Im} F(s,q)$ pode ser gerado por um zero em $\tilde{\Omega}(s,q) = \operatorname{Im} < \chi(s,b) >$, ou, se levarmos em consideração os outros termos,

Tabela 4.6: Posição do zero da eiconal (q_0^2) e incertezas assimétricas ($+\Delta q_0^2$ e $-\Delta q_0^2$) em função da energia.

$\sqrt{s}$ (GeV)	q_0^2	$-\Delta q_0^2$	$+\Delta q_0^2$ (GeV^2)
23.5	7.72	1.07	0.88
30.7	8.54	0.99	0.80
44.7	5.83	0.15	0.16
52.8	6.74	0.64	0.60
62.5	6.63	0.37	0.35

Tabela 4.7: Posição dos zeros da parte imaginária da amplitude em unidades GeV^2 (primeiro zero no caso de 19.4 GeV).

$\sqrt{s}$ (GeV)	q_0^2	$-\Delta q_0^2$	$+\Delta q_0^2$
19.4	1.528	0.014	0.015
23.5	1.4325	0.0095	0.0097
30.7	1.4147	0.0071	0.0071
44.7	1.377	0.010	0.010
52.8	1.3520	0.0094	0.0097
62.5	1.297	0.021	0.019

o zero pode ser gerado pelos termos com sinais trocados em (4.33).

Informação quantitativa a esse respeito pode ser obtida diretamente dos nossos resultados de ajuste. Para isso, consideramos, como no caso da eiconal no espaço de q, o produto $q^8 \times \operatorname{Im} F(s,q)$ para todas as energias analisadas como mostrado na Figura 4.15. Com isto, podemos determinar a posição do zero da amplitude imaginária junto com a incerteza. Os resultados são mostrados na Figura 4.16 e Tabela 4.7 (onde o valor em 19.4 GeV corresponde somente ao primeiro zero).

Desses resultados podemos concluir o seguinte:

1. A posição do zero na amplitude e na eiconal, Tabelas 4.6 e 4.7 e Figuras 4.14 e 4.16 mostram que não há correlação entre eles. De uma lado, a posição do zero na amplitude diminui quando a energia aumenta, e este efeito está relacionado ao encolhimento do pico de difração. Por outro lado, os zeros da eiconal têm uma posição praticamente constante.

2. Na energia de 19.4 GeV, Figura 4.12 da eiconal, vemos que não é possível identificar uma mudança de sinal com base estatística (região de incerteza totalmente abaixo de zero), nem em termos do valor central que vai assintoticamente a zero por valores

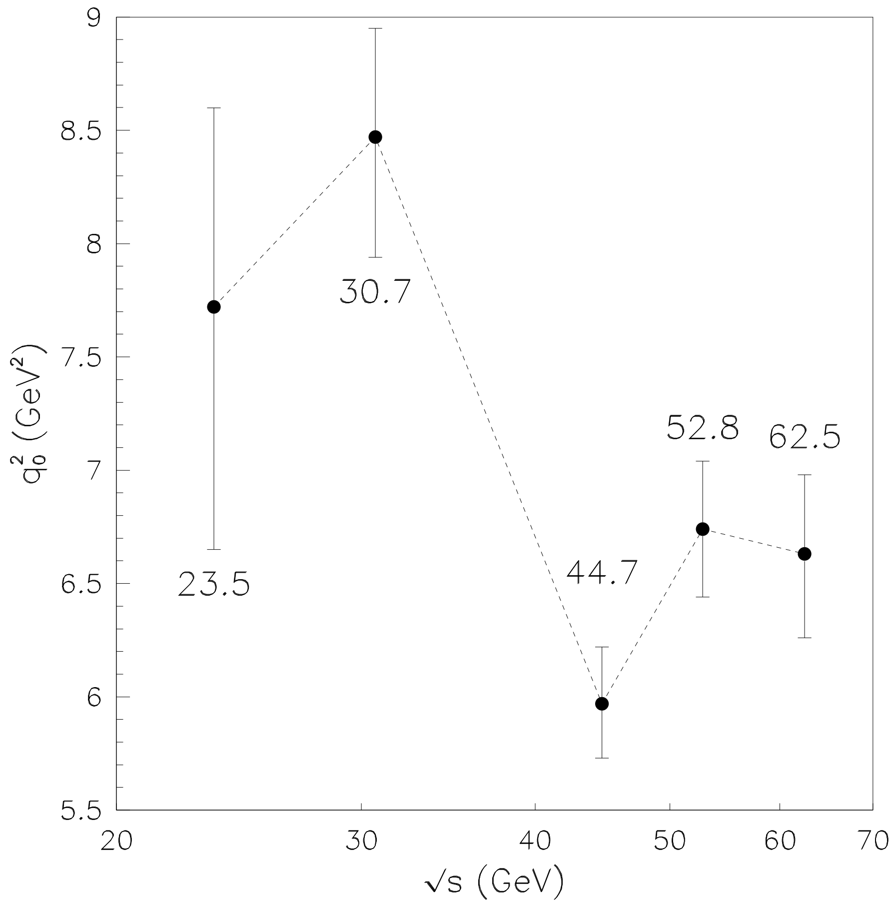

Figura 4.14: Posição dos zeros da eiconal e incertezas em função da energia (Tabela 4.6).

positivos. Por outro lado, na Figura 4.15, vemos que a parte imaginária da amplitude apresenta múltiplos zeros.

3. Nas energias do ISR, Figura 4.12, temos evidência da mudança de sinal (um zero) e a correspondente parte imaginária da amplitude, Figura 4.15, uma mudança de sinal e vai a zero por valores negativos.

Os ítens 2 e 3 acima, sugerem que uma eiconal positiva no espaço de q dá origem a vários mínimos na seção de choque diferencial correspondente (zeros da parte imaginária da amplitude); por outro lado uma eiconal com uma mudança de sinal, dá origem a apenas um mínimo e decrescimento suave com a energia.

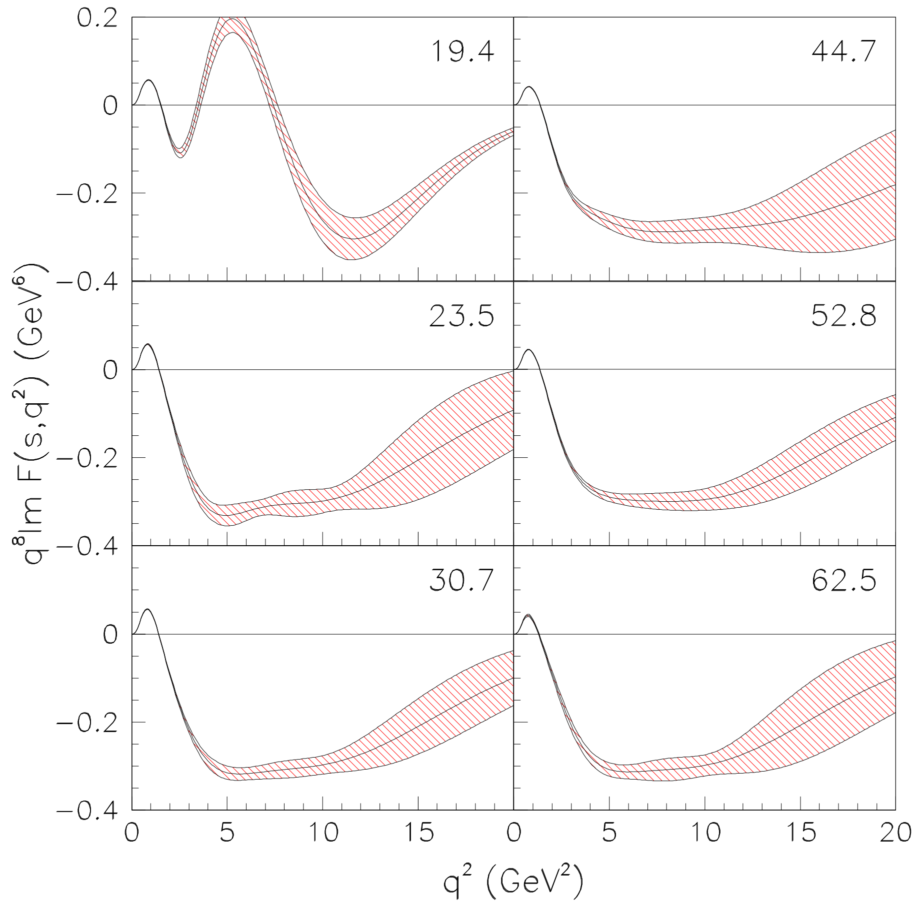

Figura 4.15: Resultados dos ajustes para a parte imaginária da amplitude, multiplicado por q^8 e regiões de incerteza calculada da propagação de erros (análoga à Figura 4.12 para a parte imaginária da eiconal).

4.6.2 Alguns modelos eiconais representativos

Para ilustrar a aplicabilidade dos resultados empíricos obtidos, escolhemos alguns modelos eiconais representativos, caracterizados por parametrizações com e sem o zero na parte imaginária da eiconal no espaço de q. Primeiro revisaremos alguns aspectos de cada modelo e então discutiremos as relações com os resultados empíricos. Os modelos eiconais serão divididos em 3 classes: sem zero, híbrido e com zero na eiconal.

- **Modelos eiconais sem zero**

Representativos dessa classe são o modelo histórico de Chou-Yang [81, 82, 83, 84, 85] e alguns modelos recentes inspirados em QCD [86, 87].

– **Modelo de Chou-Yang.** Neste modelo, a estrutura interna do hádron é descrita por uma densidade de opacidade $\rho(x, y, z)$ e em uma colisão, os efeitos relativísticos implicam na contração do objeto, de forma que cada hádron "vê"o outro como uma distribuição de matéria em duas dimensões

$$D(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y, z) \mathrm{d}z,$$

onde x e y estão no plano do parâmetro de impacto e z é a coordenada perpendicular a este plano. Em analogia com a óptica, a opacidade resultante (a parte imaginária da eiconal) na colisão dos hádrons A e B é a convolução das distribuições de matéria,

$$\begin{aligned} \Omega_{AB}(s, b) &= C_{AB} \int \mathrm{d}^2\vec{b}' D_A(|\vec{b}'|) D_B(|\vec{b}' - \vec{b}|) \\ &\equiv C_{AB}\ D_A \otimes D_B, \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde C_{AB} é independente do parâmetro de impacto (depende da energia), e D_A e D_B estão relacionados aos fatores de forma hadrônicos,

$$G_{A,B}(\vec{q}) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho_{A,B}(\vec{r}) \mathrm{d}\vec{r}, \tag{4.35}$$

através da transformada de Fourier

$$D_{A,B}(b) = < G_{A,B}(q) > . \tag{4.36}$$

Do teorema da convolução, obtemos a expressão formal da eiconal no espaço de parâmetro de impacto:

$$\Omega_{AB}(s, b) = C_{AB}(s) < G_A(q) G_B(q) > . \tag{4.37}$$

– **A conjectura de Wu-Yang.** Em 1965, baseados em argumentos heurísticos, Wu e Yang especularam que a seção de choque diferencial pp pode ser proporcional à quarta potência do fator de forma de carga do próton [81], que é o fator de forma medido no espalhamento elétron-próton. A conexão com esta potência do fator de forma é obtida no modelo acima considerando a primeira ordem da expansão da eiconal, (4.33) e (4.37), pois para o caso do próton

$$\mathrm{Im}\, F(s, q) \propto G_p^2. \tag{4.38}$$

Vários fatores de forma eletromagnéticos e problemas inversos foram discutidos nos anos seguintes [82, 83, 84] incluindo a tradicional parametrização tipo dipolo para o fator de forma elétrico de Sachas [83]

$$G_D(q) = \frac{1}{[1+q^2/\mu^2]^2}, \qquad \mu^2 = 0.71\ \mathrm{GeV}^2. \tag{4.39}$$

Neste caso, da equação (4.34), a opacidade no parâmetro de impacto para o espalhamento pp é dada por

$$\Omega(s,b) = C(s)\frac{(\mu b)^3}{8}K_3(\mu b), \tag{4.40}$$

onde K_3 é a função de Bessel modificada. Com essa forma, o fator de absorção $C_{AB}(s)$ é o único parâmetro livre, determinado através do valor da seção de choque total em cada energia. A principal realização deste modelo foi a previsão do padrão difrativo na seção de choque diferencial pp e a posição correta do mínimo, como observado experimentalmente mais tarde.

Entretanto, embora eficiente na descrição dos dados experimentais, a conjectura de Wu e Yang, relacionando o fator de forma hadrônico e o fator de forma elétrico, não pode ser provada nem certa nem errada no contexto fenomenológico. Voltaremos a esse assunto no que segue.

– **Modelos inspirados em Cromodinâmida Quântica.** Nesta classe de modelos [86, 87] a eiconal par é expressa como a soma de três contribuições das interações glúon-glúon (gg), quark-glúon (qg) e quark-quark (qq)

$$\chi^+(s,b) = \chi_{gg}(s,b) + \chi_{qg}(s,b) + \chi_{qq}(s,b),$$

as quais, fatoram individualmente em s e b

$$\chi_{ij}(s,b) = \mathrm{i}\sigma_{ij}(s)w(b,\mu_{ij}),$$

onde ij= gg, qg ou qq. A função distribuição de parâmetro de impacto para cada processo vem da convolução envolvendo fator de forma de dipolo, na mesma forma que no modelo de Chou-Yang, equações (4.34) e (4.39), mas no nível elementar

$$w_{ii}(b,\mu_{ii}) = \int \mathrm{d}^2\vec{b'} D_i(|\vec{b'}|)\ D_i(|\vec{b'}-\vec{b}|),$$

$$G_{ii}(b,\mu_{ii}) = \left\langle \frac{1}{[1+q^2/\mu_{ii}^2]^2} \right\rangle,$$

de forma que

$$w_{ii}(b, \mu_{ii}) = \frac{[\mu_{ii}b]^3}{8} K_3(\mu_{ii}b),$$

onde, para $i \neq j$:

$$\mu_{ij} \equiv \sqrt{\mu_{ii}\mu_{jj}}.$$

Então, no espaço de momento transferido, a parte imaginária da eiconal tem a mesma estrutura do modelo de Chou-Yang, com a parametrização do dipolo e fatores de escala μ_{ii}, $i = g, q$ como parâmetros livres, dependendo também do processo elementar (qq ou gg). Com muitos outros ingredientes, esta classe de modelos permite boa descrição dos dados na direção frontal e de seção de choque diferencial apenas na região de pequeno momento transferido [86, 87].

• **Modelo eiconal híbrido**

Também lembramos um modelo com parametrizações diferentes para o espalhamento pp na região do ISR e para o espalhamento $\bar{p}p$ na região do Collider, o primeiro utilizando uma eiconal com múltiplos zeros e o segundo sem zeros. O modelo, desenvolvido por Glauber e Velasco [88, 89], é baseado no formalismo de difração múltipla de Glauber que, em primeira ordem, introduz a seguinte expressão para a eiconal

$$\tilde{\chi}(s, q) = \sum_{i=1}^{N_A} \sum_{j=1}^{N_B} G_A G_B f_{ij},$$

onde G_A e G_B são fatores de forma hadrônicos, N_A e N_B o número de constituintes em cada hádron e f_{ij} as amplitudes de espalhamento elementares individuais entre os constituintes (amplitudes de espalhamento párton-párton). No caso de considerarmos as amplitudes elementares iguais, denotando por f, e $N_A N_B \equiv N$, temos para a parte imaginária da eiconal:

$$\tilde{\Omega}(s, q) = N G_A G_B \mathrm{Im} f. \tag{4.41}$$

Na versão de Glauber-Velasco [88, 89] são utilizados fatores de forma (sem zeros) de Felst e de Borkowski-Simon-Walther-Wendling, junto com a seguinte parametrização para a parte imaginária da amplitude de espalhamento elementar, no caso do espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 546$ GeV [88]:

$$f(q) = \frac{1}{[1 + q^2/a^2]^{1/2}}.$$

Então a eiconal não apresenta zeros. Para o espalhamento pp em $\sqrt{s} = 23.5$ GeV é introduzido um fator de fase levando a

$$f(q) = \frac{\exp\{\mathrm{i}[b_1 q^2 + b_2 q^4]\}}{[1 + q^2/a^2]^{1/2}}$$

e neste caso as partes real e imaginária da eiconal apresentam múltiplos zeros.

• **Modelos eiconais com zero**

É uma classe restrita de modelos eiconais. Consideraremos aqui o modelo de Bourrely, Soffer e Wu e um modelo de difração múltipla.

– **Modelo de Bourrely, Soffer e Wu (BSW).** Este modelo [90, 91] é o mais popular e pelo que sabemos, o primeiro a considerar um zero na eiconal no espaço de momento transferido. Neste modelo, a eiconal no espaço de parâmetro de impacto é expressa como a soma de dois termos

$$\chi(s, b) = R(s, b) + H(s, b),$$

onde o primeiro termo, que leva em conta as diferenças entre pp e $\bar{p}p$, é parametrizado por

$$< R(s, b) >= [c_+ + c_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha(q^2)}] s^{\alpha(q^2)},$$

$$\alpha(q^2) = \alpha_0 - \alpha' q^2, \qquad q^2 = -t.$$

O segundo termo, responsável pelo componente difrativo, é o mesmo para pp e $\bar{p}p$ e se fatora em s e b

$$H(s, b) = S(s) T(b).$$

O termo que depende da energia vem da Eletrodinâmica Quântica massiva e é parametrizado da seguinte forma

$$S(s) = \frac{s^c}{\ln^{c'} s} + \frac{u^c}{\ln^{c'} u},$$

onde u é a terceira variável de Mandelstam. Finalmente, a dependência no parâmetro de impacto, que é nosso interesse, é expressa por

$$T(b) = kD_A \otimes D_B = k < G^2(q^2) > . \tag{4.42}$$

Aqui o fator de forma é parametrizado como um produto de dois pólos simples, multiplicados por uma função com um zero no espaço de momento transferido

$$G(q^2) = \frac{1}{[1+q^2/\alpha^2]} \frac{1}{[1+q^2/\beta^2]} \sqrt{\frac{1-q^2/q_0^2}{1+q^2/q_0^2}}, \tag{4.43}$$

onde k, α^2, β^2 e q_0^2 são parâmetros livres. Segundo os autores, a função do lado direito, com um zero em $q^2 = q_0^2$ foi introduzida para dar conta de possíveis diferenças entre o fator de forma eletromagnético e o fator de forma hadrônico, bem como da posição correta do mínimo [90]. Na última análise de Bourrely, Soffer e Wu, inferiu-se que a posição do zero estava em [91]

$$q_0^2 \sim 3.45 \text{ GeV}^2. \tag{4.44}$$

– **Um modelo de difração múltipla.** Sem a base teórica como no caso do modelo BSW, um modelo de difração múltipla (contexto de Glauber) introduzido em 1988 [92, 93], utiliza a seguinte parametrização para a eiconal na equação (4.41)

$$\tilde{\Omega}(s,q) = C(s)G^2(s,q)\text{Im } f(q), \tag{4.45}$$

com

$$G(s,q) = \frac{1}{[1+q^2/\alpha^2(s)]} \frac{1}{[1+q^2/\beta^2]}, \tag{4.46}$$

$$\text{Im} f(s,q) = \frac{1-q^2/q_0^2}{1+[q^2/q_0^2]^2}, \tag{4.47}$$

onde o fator N foi incluído em $C(s)$. A estrutura matemática é similar ao modelo BSW, exceto pela dependência de α^2 com a energia e o quadrado no segundo termo do denominador em q^2/q_0^2. A razão para esse quadrado é discutida em [94] e está relacionada à existência da transformada de Fourier de $\text{Im}\, f(s,t)$. Por meio de parametrizações convenientes para $C(s)$ e $\alpha^2(s)$ e para

$$q_0^2 = 8.20 \text{ GeV}^2, \tag{4.48}$$

boas descrições dos dados experimentais de espalhamento pp e $\bar{p}p$ acima de 10 GeV foram obtidas ($\beta^2_{pp} = 1.80$ GeV^2 e $\beta^2_{\bar{p}p} = 1.55$ GeV^2); a parte real da amplitude pode ser calculada pela fórmula de Martin [92, 95, 96] ou por meio da relação de dispersão derivativa aplicada em nível elementar [97]. Extensões desse modelo são também discutidas em [98].

No contexto geométrico a dependência de α^2 com a energia significa fatores de forma dependentes da energia, uma hipótese ou procedimento que também foi utilizada em 1990 por Chou e Yang [85].

• Discussão

– **Aspectos Gerais.** Sabemos dos trabalhos originais, que todos os modelos acima discutidos que não apresentam zero na eiconal podem descrever os dados de seção de choque diferencial apenas na região de pequeno momento transferido, geralmente menor que $q^2 \sim 2$ GeV^2 (por exemplo, modelos inspirados na Cromodinâmica Quântica [86, 87]). Acima desta região as curvas apresentam múltiplos mínimos, que não aparecem nos dados experimentais (por exemplo, modelo de Chou-Yang [84, 85] e Glauber-Velasco na região do Collider [88]).

Por outro lado, modelos com um zero na eiconal são capazes de descrever a seção de choque diferencial, mesmo em valores grandes do momento transferido. Exemplos são BSW [90, 91] e as variantes do modelo de difração múltipla [95, 96, 97, 98].

Estes resultados fenomenológicos concordam com as conclusões de nossa análise empírica apresentada em 4.6.1: Eiconal com um zero dá origem a um único mínimo na seção de choque diferencial correspondente e um decrescimento suave a grandes valores do momento transferido. Neste sentido o que foi por nós extraído de forma independente de modelo, corrobora os ingredientes presentes no modelo de BSW e nas variantes do modelo de difração múltipla.

– **Aspectos quantitativos.** Neste ponto vamos investigar aspectos quantitativos da conexão entre parametrizações de modelos com zero e nossos resultados empíricos para a parte imaginária da eiconal.

A idéia é gerar um conjunto discreto de pontos para $\tilde{\Omega}(q)$, obtidos dos ajustes empíricos, com as incertezas associadas da propagação de erros e comparar com parametrizações de modelos que apresentam um zero na eiconal.

No que segue consideramos os resultados obtidos para 52.8 GeV, pois o conjunto original cobre a maior região em momento transferido (até 9.75 GeV^2), tem o maior número de pontos (adicionando os dados em 27.4 GeV) e apresentou um χ^2/gdl razoável.

Os resultados empíricos para pp em 52.8 GeV são mostrados na Figura 4.17 na forma de pontos com as incertezas.

Quanto a modelos com zero na eiconal, consideramos o modelo de BSW para a dependência no parâmetro de impacto, equações (4.42) e (4.43) e a versão original do modelo de difração múltipla, equações (4.45)-(4.47). Introduzimos a seguinte notação para a parte imaginária da eiconal numa energia fixa

$$\tilde{\Omega}(q) = \frac{C}{[1+q^2/\alpha^2]^2[1+q^2/\beta^2]^2} f(q), \tag{4.49}$$

com

$$f(q) \to f_{\mathrm{BSW}} \equiv \frac{1-q^2/q_0^2}{1+q^2/q_0^2}, \tag{4.50}$$

ou

$$f(q) \to f_{\mathrm{mBSW}} \equiv \frac{1-q^2/q_0^2}{1+[q^2/q_0^2]^2}, \tag{4.51}$$

onde mBSW significa parametrização do modelo BSW modificada (refererindo-se ao quadrado no denominador). Esta notação, introduzida em [94] é útil e permite duas interpretações físicas distintas para a eiconal acima, no contexto de Chou-Yang e no contexto de Glauber:

1. um produto de dois fatores de forma, cada um na forma introduzida por BSW

$$G_1(q) = \frac{1}{[1+q^2/\alpha^2]} \frac{1}{[1+q^2/\beta^2]} \sqrt{f(q)}, \tag{4.52}$$

2. um produto de dois fatores de forma, cada um parametrizado por pólos simples

$$G_2(q) = \frac{1}{[1+q^2/\alpha^2]} \frac{1}{[1+q^2/\beta^2]}, \tag{4.53}$$

por uma amplitude elementar

$$f_{\mathrm{BSW}}(q) \quad \text{ou} \quad f_{\mathrm{mBSW}}(q). \tag{4.54}$$

Como q_0^2 representa o zero da eiconal, no primeiro caso ele está associado ao fator de forma hadrônico e no segundo à amplitude elementar, ou seja, duas hipóteses físicas distintas.

Para comparação com nossos resultados empíricos em 52.8 GeV, fixamos q_0^2 nas fórmulas acima com o valor extraído dos nossos resultados, $q_0^2 = 6.74$ GeV^2 (este é o valor mediano mostrado na Tabela 4.6) e ajustamos as eiconais (4.49)-(4.51) com o programa CERN-Minuit aos pontos gerados. Os parâmetros livres em ambos os casos são C, α^2 e β^2. Os resultados são mostrados na Tabela 4.8 e Figura 4.17 com a seguinte notação

$$\tilde{\Omega}_{\rm BSW}(q) \quad \rightarrow \quad \text{Eqs. (4.49) e (4.50)}$$

$$\tilde{\Omega}_{\rm mBSW}(q) \quad \rightarrow \quad \text{Eqs. (4.49) e (4.51)}$$

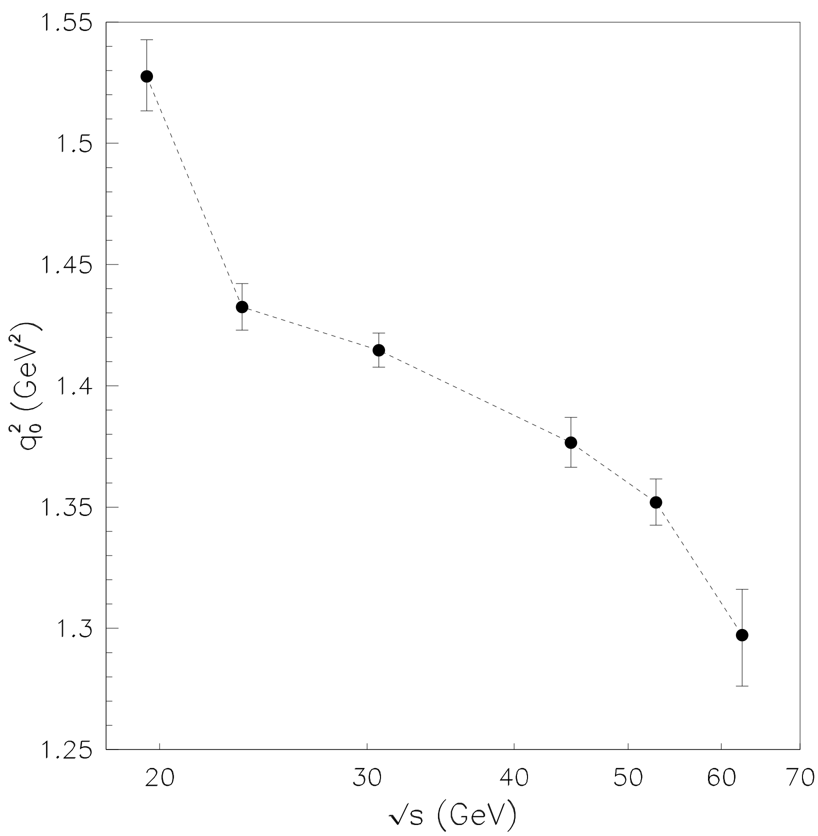

Figura 4.16: Posição do zero da parte imaginária da amplitude. Em 19.4 o valor corresponde ao primeiro zero (Tabela 4.7).

Tabela 4.8: Resultados dos ajustes dos pontos gerados na Fig. (4.17) (Espalhamento pp em 52.8 GeV) através de diferentes parametrizações para a parte imaginária da eiconal (veja o texto).

	$\tilde{\Omega}_{\rm BSW}$	$\tilde{\Omega}_{\rm mBSW}$	$\tilde{\Omega}_{\rm emp}$
	Eqs. (4.49) and (4.50)	Eqs. (4.49) and (4.51)	Eq. (4.55)
C (GeV^{-2})	11.351 ± 0.023	11.220 ± 0.039	11.155 ± 0.039
α^2 (GeV^2)	0.704 ± 0.014	0.746 ± 0.023	0.4534 ± 0.0093
β^2 (GeV^2)	0.704 ± 0.015	0.746 ± 0.023	1.497 ± 0.047
χ^2/gdl	207	42	0.50

Vemos que, em ambos os casos, o módulo da opacidade é razoavelmente reproduzido até $q^2 \sim 8$ GeV^2, mas acima desta região a descrição é ruim e como conseqüência temos χ^2/gdl muito altos, Tabela 4.8. Além disso, o gráfico de $q^8\tilde{\Omega}(q)$ (Figura 4.17) indica que ambas as parametrizações descrevem bem somente os pontos que foram gerados próximo à origem e próximo ao zero. O resultado com $\tilde{\Omega}_{\rm mBSW}$ é um pouco melhor que o resultado com $\tilde{\Omega}_{\rm BSW}$. Este efeito está diretamente relacionado ao quadrado no termo q^2/q_0^2.

Nossa análise independente de modelo indica apenas um resultado empírico o que pode explicar as diferenças com as parametrizações discutidas acima. Entretanto, pode ser útil, no contexto fenomenológico, investigar qual tipo de parametrização analítica pode reproduzir os pontos gerados na Figura 4.17.

– **Parametrização empírica para a eiconal.** Testamos várias parametrizações analíticas a fim de reproduzir os pontos mostrados na Figura 4.17. O melhor resultado foi obtido com um quadrado adicional no termo q^2/q_0^2, que aparece no denominador de f_{mBSW}, levando a uma nova parametrização empírica para a opacidade

$$\tilde{\Omega}_{\rm emp}(q) = \frac{C}{[1+q^2/\alpha^2]^2[1+q^2/\beta^2]^2}\left(\frac{1-q^2/q_0^2}{1+[q^2/q_0^2]^4}\right). \tag{4.55}$$

Os resultados do ajuste aos pontos extraídos é apresentado na Figura 4.17 e na Tabela 4.8, mostrando que a reprodução dos pontos é muito boa. Esta parametrização pode ter um papel importante no contexto fenomenológico mas, no momento, não podemos dar uma interpretação física para ela. Notamos, entretanto, que uma diferença típica entre todas as parametrizações é o comportamento assintótico, quando $q^2 \to \infty$

$$\tilde{\Omega}_{\rm BSW}(q) \sim -\frac{1}{(q^2)^4}, \quad \tilde{\Omega}_{\rm mBSW}(q) \sim -\frac{1}{(q^2)^5},$$

$$\tilde{\Omega}_{\mathrm{emp}}(q) \sim -\frac{1}{(q^2)^7}.$$

4.6.3 Fator de forma hadrônico e eletromagnético

A conjectura de Wu-Yang, associando o fator de forma hadrônico ao fator de forma eletromagnético [81], tem um papel histórico e fundamental no contexto fenomenológico. Também é importante a identificação do fator de forma hadrônico com a parametrização tipo dipolo, (4.39), para o fator de forma elétrico de Sachas [83]. Estas idéias surgiram no final dos anos 60 e, por outro lado, atualmente estão disponíveis muitos dados de fator de forma eletromagnético do núcleon. O mais importante para nossos objetivos fenomenológicos é o fato que, experimentos recentes indicam um decréscimo inesperado no fator de forma elétrico do próton, quando o momento transferido cresce, com a possibilidade de atingir um zero aproximadamente em $q_0^2 \approx 7.5$ GeV^2, como discutido a seguir.

Nesta seção, vamos explorar possíveis conexões entre estes resultados do setor eletromagnético e aqueles do zero da eiconal em $q_0^2 \approx 7$ GeV^2, apresentado na seção anterior (alguns argumentos a esse respeito já foram discutidos em [23, 99]). Primeiro, resumimos as novas informações sobre o fator de forma elétrico do próton e então discutimos a possibilidade de conexões empíricas com nossos resultados. Revisões detalhadas sobre o assunto podem ser encontradas, por exemplo, em [100, 101].

• Resultados experimentais sobre o fator de forma eletromagnético do próton

– Técnicas de Rosenbluth e de Transferência de Polarização A técnica tradicional para investigar, experimentalmente, o fator de forma eletromagnético do núcleon tem sido o método de separação de Rosenbluth [102], que é baseado na medida da seção de choque diferencial não polarizada do espalhamento elétron-núcleon. Para o caso elétron-próton os resultados indicam uma invariância de escala para a razão [103, 104]

$$R_p = \mu_p \frac{G_E(q^2)}{G_M(q^2)} \approx 1,$$

onde μ_p é o momento magnético do próton e G_E e G_M os fatores de forma elétrico e magnético de Sachas.

Em 2000–2005, experimentos com feixe de elétrons polarizados, com tranferência de polarização

$$\vec{e}p \rightarrow e\vec{p},$$

permitiram medidas simultâneas das componentes longitudinal e transversal da polarização do próton recuado. Por meio da técnica de polarização transversal, a razão G_E/G_M pode ser diretamente determinada, com grande redução das incertezas sistemáticas na região de grande momento transferido q^2 : 4–9 GeV^2. O resultado surpreendente foi a indicação de que esta razão decresce quase que linearmente com o crescimento do momento transferido [105, 106, 107], levando a uma parametrização da forma [106]

$$R_p = 1 - 0.135(q^2 - 0.24),$$

que, por extrapolação, indica um zero (mudança de sinal) em G_E em

$$q_0^2 \approx 7.6 \text{ GeV}^2.$$

Do ponto de vista teórico, correções radiativas, associadas ao processo de dois fótons, tem sido investigadas como possível fonte das diferenças observadas. Não trataremos estes aspectos aqui; detalhes podem ser encontrados em [100, 101].

- **Fator de forma elétrico do próton**

Recentemente, foi desenvolvida uma análise global dos dados de espalhamento próton-elétron, levando em conta o efeito da troca de dois fótons. A análise combina os resultados da seção de choque de Rosenbluth e resultados de transferência de polarização, fornecendo valores corrigidos de G_E e G_M sobre todo o intervalo de q^2 com dados disponíveis. Os resultados da razão G_E/G_D entre o fator de forma elétrico do próton e a parametrização do dipolo (com $\mu^2 = 0.71$ GeV^2), cobrindo a região $q^2 \approx 10^{-2} - 6$ GeV^2 são apresentados na Figura 4.18.

Estes dados mostram claramente o desvio de G_E em relação a G_D para q^2 acima de 1 GeV^2 e, de um ponto de vista empírico, que G_E pode atingir o zero aproximadamente em $q_0^2 \approx$ 7 - 8 GeV^2. Este zero pode também ser atingido em um processo assintótico como previsto, por exemplo, no modelo de Unitaridade & Analiticidade [108].

- **Conexões quantitativas com os resultados empíricos para a eiconal**

No contexto da conjectura de Wu-Yang, pode ser importante comparar as parametrizações para os fatores de forma hadrônicos dos modelos eiconais com um zero e os dados acima para o fator de forma elétrico do próton. Com este fim, retornamos às seguintes parametrizações para o fator de forma hadrônico do próton (contexto de Chou-Yang), utilizando a seguinte notação adequada

$$G_{\rm BSW} = \frac{1}{[1+q^2/\alpha^2]}\frac{1}{[1+q^2/\beta^2]}\sqrt{\frac{1-q^2/q_0^2}{1+q^2/q_0^2}}, \tag{4.56}$$

$$G_{\rm mBSW} = \frac{1}{[1+q^2/\alpha^2]}\frac{1}{[1+q^2/\beta^2]}\sqrt{\frac{1-q^2/q_0^2}{1+[q^2/q_0^2]^2}}, \tag{4.57}$$

$$G_{\rm emp} = \frac{1}{[1+q^2/\alpha^2]}\frac{1}{[1+q^2/\beta^2]}\sqrt{\frac{1-q^2/q_0^2}{1+[q^2/q_0^2]^4}}. \tag{4.58}$$

O ponto é construir a razão de cada uma das fórmulas acima com a parametrização do dipolo Eq. (4.39),

$$\frac{G_i(q)}{G_D(q)}, \quad i = \text{BSW},\ \text{mBSW},\ \text{emp} \tag{4.59}$$

e ajustar aos dados da Figura 4.18 através do programa CERN-Minuit. Consideramos duas variantes para os ajustes de dados:

1. q_0^2 fixo no nosso valor médio na região do ISR (equação (4.32)), $q_0^2 = 7.0$ GeV^2 e α^2 e β^2 como parâmetros livres.

2. q_0^2 como parâmetro livre junto com α^2 e β^2.

Os resultados são mostrados nas Figuras 4.18, para as duas variantes e os resultados numéricos na Tabela 4.9.

Embora todas as parametrizações tenham descrito visualmente bem os dados, o melhor resultado estatístico foi obtido com G_{BSW}, (4.56) e G_{mBSW}, (4.57) e q_0^2 como parâmetro livre $\chi^2/gdl = 1.11$ em ambos os casos. Além disso, ambos os ajustes indicam $q_0^2 \approx$ 6.1 GeV^2, um valor razoavelmente compatível com nossa média estimada (4.32). Os resultados com $G_{\rm emp}$ apresentam χ^2/gdl mais altos.

Estes resultados sugerem que as parametrizações (4.56)–(4.58) têm relação com a análise global recente dos dados de fator de forma elétrico do próton [109], um fato que pode trazer novas idéias teóricas no contexto fenomenológico.

Tabela 4.9: Resultados do ajuste para a razão do fator de forma elétrico do próton pela parametrização do dipolo. Todos os parâmetros estão em GeV^2.

q_0^2		BSW Eq. (4.56) e (4.59)	mBSW Eq. (4.57) e (4.59)	emp Eq. (4.58) e (4.59)
7 GeV^2	α^2	1.550 ± 0.073	1.310 ± 0.064	1.156 ± 0.055
	β^2	0.437 ± 0.010	0.446 ± 0.012	0.474 ± 0.014
	χ^2/gdl	1.36	1.34	1.79
livre	α^2	1.8068 ± 0.097	1.508 ± 0.084	1.328 ± 0.070
	β^2	0.4192 ± 0.0090	0.423 ± 0.011	0.446 ± 0.012
	q_0^2	6.06 ± 0.11	6.12 ± 0.13	6.04 ± 0.10
	χ^2/gdl	1.11	1.11	1.41

4.7 Comentários finais do capítulo

Desenvolvemos uma análise empírica para dados de seção de choque diferencial de espalhamento elástico pp na região $19.4 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV. A análise introduziu dois aprimoramentos principais, se comparada à análise anterior [23, 24]. O primeiro relacionado a estrutura da parametrização e o segundo ao conjunto de dados experimentais utilizados. Também apresentamos uma discussão dos dados experimentais disponíveis, verificando que os dados a grande momento transferido ($q^2 > 3.5$ GeV^2) não dependem da energia na região $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV. Baseados nessa informação, incluímos dados a 27.4 GeV somente nos 5 conjuntos de dados na região de energia acima e não em 19.4 GeV, como feito em [23]. Com estes aprimoramentos obtivemos resultados estatísticos um pouco melhores do que as análises anteriores [23, 24].

Um problema com os ajustes é a falta de informação sobre a contribuição das partesw real e imaginária da amplitude para $q^2 \neq 0$, o que leva a um número infinito de soluções. Até onde conhecemos, a única informação independente de modelo sobre a parte real em $q^2 > 0$ é um teorema de Martin, que indica uma mudança de sinal (zero) em pequenos valores do momento transferido [110]. A posição exata não pode ser inferida. Na nossa abordagem, incluindo na parametrização os resultados experimentais de σ_{tot} e ρ em cada energia, reproduzimos corretamente o comportamento para $q^2 = 0$ na região investigada. O zero na parte real é gerado utilizando 2 exponenciais iguais nas partes real e imaginária ($m = 2$ e $n = 4$, 5 ou 6 na equação (4.15)). O zero também pode ser gerado sem essa restrição [111].

Com o ajuste de dados e por meio de um método analítico-numérico, a parte imaginária da eiconal (parte real da função opacidade) no espaço de momento transferido foi extraída, junto com as regiões de incerteza calculadas através de propagação de erros. Isto foi feito com a aproximação (4.27), justificada pelos resultados de ajuste. Embora o método forneça informações independentes de modelo para a eiconal nos espaços de b e q, focamos nossa atenção somente no zero da eiconal no espaço de q. Em contraste com a análise anterior [23], obtivemos evidência estatística de mudança de sinal na parte imaginária da eiconal apenas na região $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV e não em 19.4 GeV. Além disso, a posição do zero nesse intervalo de energia é aproximadamente constante com valor médio estimado em $q_0^2 = 7 \pm 1$ GeV^2.

A implicação do zero da eiconal no contexto fenomenológico também foi discutida. Mostramos que modelos com duas contribuições dinâmicas para a parte imaginária da eiconal (positiva em pequeno momento transferido e negativa em grande momento transferido) permitem boa descrição dos dados de seção de choque diferencial em toda região em que temos dados disponíveis. Neste contexto o modelo de BSW tem um papel central, devido a sua base teórica e a reprodução dos dados experimentais. Também discutimos algumas parametrizações analíticas para a eiconal extraída, com modelos fenomenológicos (Ω_{BSW} e Ω_{mBSW}) e introduzindo uma nova forma (Ω_{emp}).

Conexões entre a eiconal extraída e análises globais recentes sobre o fator de forma elétrico do próton também foram discutidas. Em particular mostramos que modelos eiconais apresentando boa descrição dos dados de espalhamento elástico utilizam um fator de forma efetivo compatível com o fator de forma elétrico do próton e neste caso indicam um zero em $q_0^2 = 6.1$ GeV^2.

Entendemos que todos os resultados empíricos obtidos podem fornecer informações importantes no contexto fenomenológico, pois através da transformada de Fourier informações para a contribuição desconhecida do parâmetro de impacto podem ser obtidas.

Finalmente chamamos a atenção para o papel dos dados de seção de choque diferencial em grandes momentos transferidos. A comparação das Figuras 4.12 e 4.13 mostra claramente que a falta de dados na região de grande momento transferido torna difícil ou mesmo impossível extrair, empiricamente, informações detalhadas sobre o espalhamento elástico.

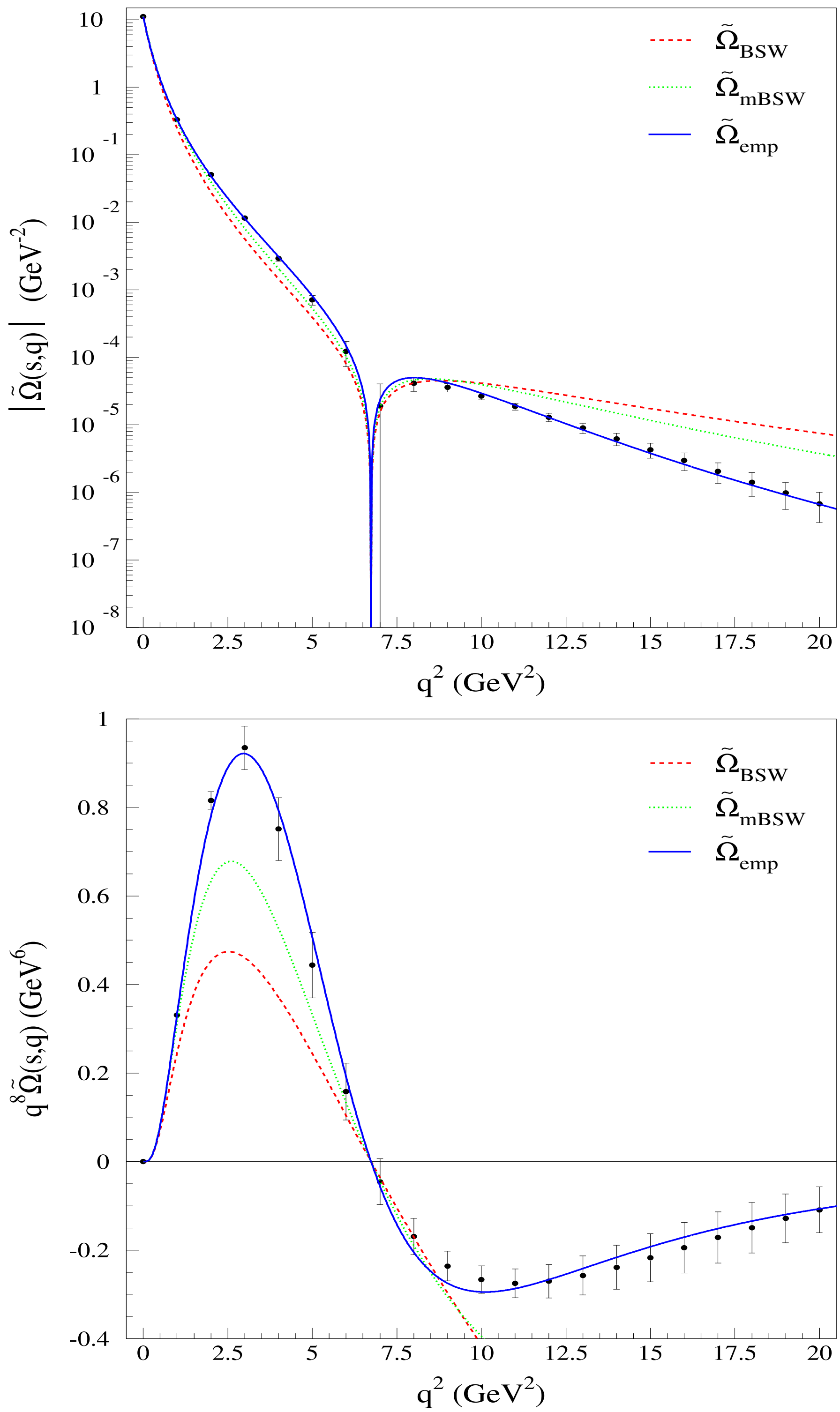

Figura 4.17: Pontos gerados e incertezas da opacidade dos ajustes empíricos para o espalhamento *pp* em 52.8 GeV. As curvas são os resultados de ajustes através de $\tilde{\Omega}_{\rm BSW}(q)$, Eqs. (4.49) e (4.50), $\tilde{\Omega}_{\rm mBSW}(q)$, Eqs. (4.49) e (4.51) e $\tilde{\Omega}_{\rm emp}(q)$, Eq. (4.55) (Tabela 4.8).

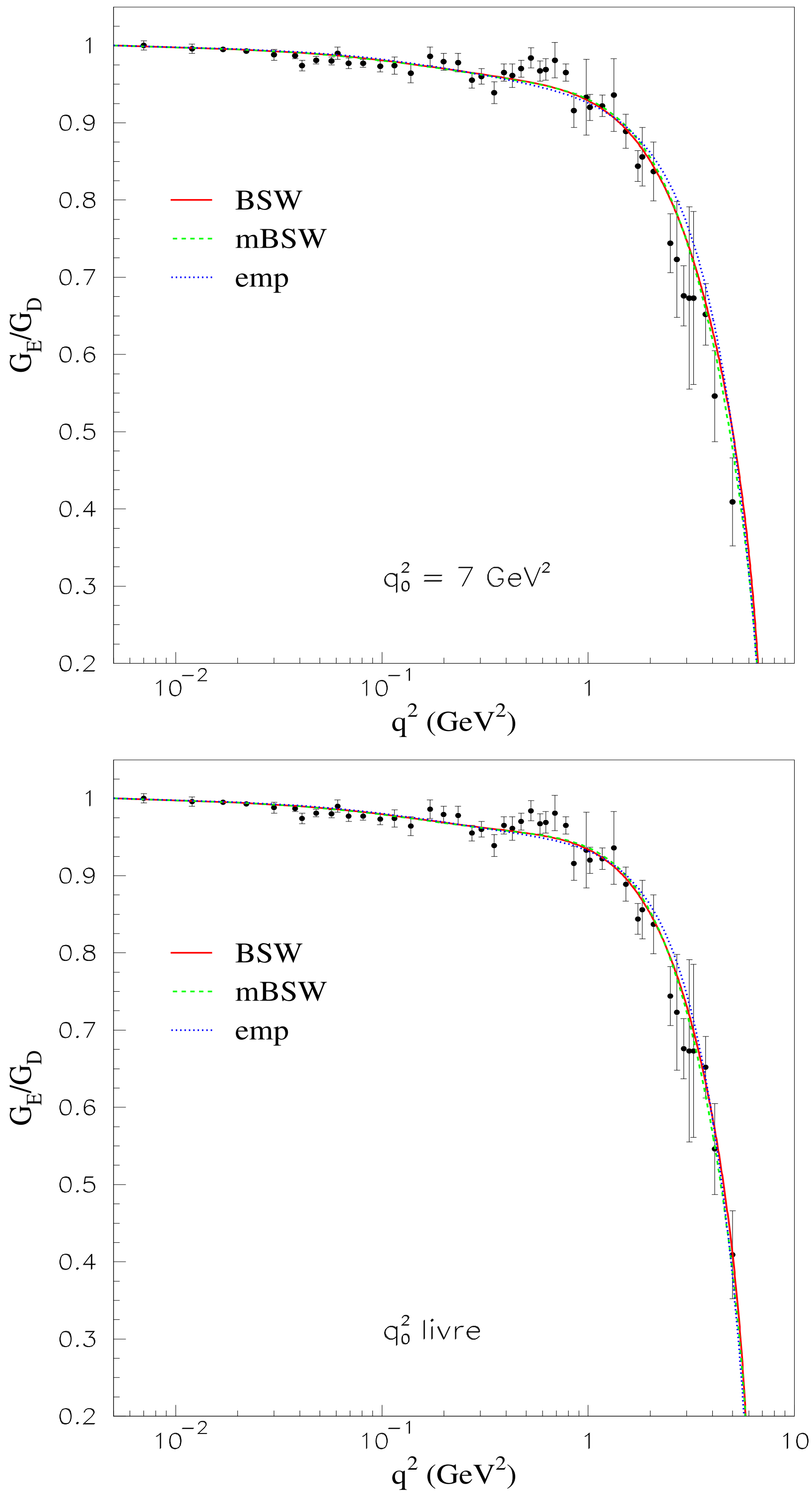

Figura 4.18: Dados experimentais de razão do fator de forma elétrico do próton pela parametrização do dipolo, G_E/G_D de [109] e resultados de ajustes feitos com BSW, mBSW e a parametrização empírica, Eqs. (4.56), (4.57) e (4.58), respectivamente e Eq. (4.59), com $q_0^2 = 7$ GeV^2 e q_0 como parâmetro livre (Tabela 4.9).

Capítulo 5

Aspectos Fenomenológicos: Odderon e Pomeron

Neste capítulo estudamos a contribuição do Odderon para a amplitude de espalhamento elástico. O Odderon, assim como, o Pomeron, são objetos que tiveram origem na teoria de Regge sendo extensões dos chamados Reggeons (trajetória mesônica). Nesta teoria a interação entre as partículas colidentes é interpretada em termos de troca de pólos e cortes de Regge [26]. O Pomeron tem os números quânticos do vácuo e daí é par sob as operações de paridade e de conjugação de carga ($P = +1$, $C = +1$). O Odderon também é um singleto de cor mas tem paridade e conjugação de carga negativa ($P = -1$, $C = -1$) e pode levar a diferenças no espalhamento partícula-partícula e partícula-antipartícula, se ele não for fortemente suprimido em altas energias [27]. O Odderon é definido como uma singularidade no plano complexo J, localizada em $J = 1$ quando $t = 0$ e que contribui portanto com a amplitude ímpar F_{-}. O conceito de Odderon foi introduzido por Lukaszuk e Nicolescu em 1973 no contexto dos teoremas assintóticos [25] e recebeu esse nome dois anos mais tarde [27]. Em 1980 foi possível associá-lo a 3 glúons na Cromodinâmica Quântica [112, 113, 114, 115] mas levou 27 anos para ele ser identificado no contexto da Cromodinâmica Quântica perturbativa [112, 116]. O Odderon também foi recentemente evidenciado nas abordagens do Color Glass Condensate [112, 117, 118] e do dipolo [112, 119]. A referência [120] apresenta uma tabela com datas e referências importantes para o Odderon.

Do ponto de vista experimental, a evidência mais forte para o Odderon não-perturbativo é a descoberta, em 1985, de uma diferença entre a seção de choque diferencial $(\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t)^{\bar{p}p}$ e $(\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t)^{pp}$ na região do mínimo difrativo $1.1 < |t| < 1.5$ GeV^2 em $\sqrt{s} \approx 53$ GeV, F igura 5.1, [121, 122]. Infelizmente, estes dados foram obtidos uma semana antes do fechamento do ISR, de modo que, mesmo sendo uma evidência forte, não é totalmente convincente [112]. Uma evidência moderada para o Odderon não pertubativo é a mudança de polarização no processo $\pi^- p \to \pi^0 n$ indo de $p_L = 5$ GeV [123, 124] para $p_L = 40$ GeV [125]. Finalmente, uma evidência fraca para o Odderon não-pertubativo vem de uma estranha estrutura vista nos dados de $\mathrm{d}\,N/\mathrm{d}\,t$ medidos pela colaboração UA4/2 para o espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 541$ GeV [47]. Esta estrutura pode corresponder a oscilações de período pequeno devido a presença do Odderon [126].

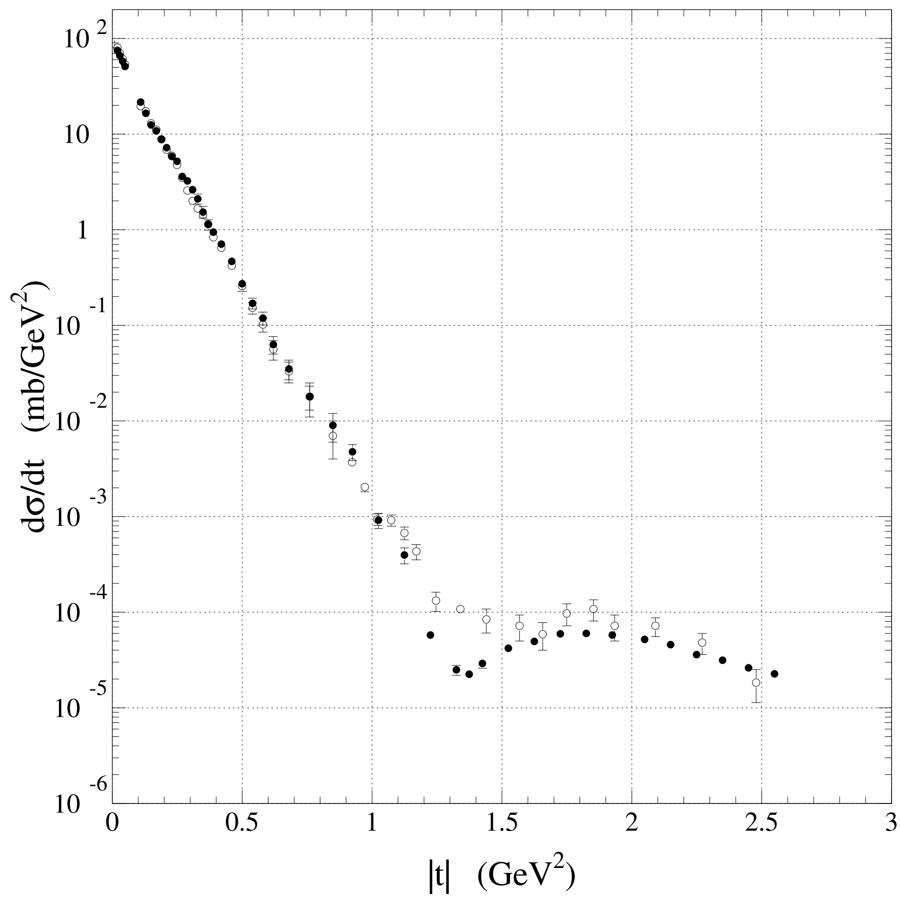

Figura 5.1: Seção de choque diferencial pp e $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 52.8$ GeV.

Todos os ressultados experimentais acima apontam para o Odderon máximo [25, 127], um caso especial correspondendo ao comportamento maximal permitido pelos princípios gerais das interações fortes, comentados no Capítulo 2

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \propto \ln^2 s, \qquad s \to \infty \tag{5.1}$$

e

$$\Delta\sigma = \sigma_{\text{tot}}^{\bar{p}p} - \sigma_{\text{tot}}^{pp} \propto \ln s, \qquad s \to \infty. \tag{5.2}$$

O comportameto maximal foi primeiro descoberto por Heisenberg em 1952 [128] e depois provado, de forma mais rigorosa, por Froissart e Martin [129, 130]. Cerca de 50 anos depois da descoberta de Heisenberg, este comportamento maximal (5.1), foi provado no contexto “AdS/CFT dual string-gravity theory”[131] e na abordagem do Color Glass Condensate [132]. Também foi mostrado que o comportamento maximal fornece a melhor descrição dos dados experimentais de seção de choque total [61, 133].

Uma observação que deve ser feita é que a indicação experimental do comportamento maximal (5.1) não é uma indicação do comportamento do Odderon máximo (5.2): a parte imaginária da amplitude par F_+ pode comportar-se como $\ln^2 s$ para $s \to \infty$ e ao mesmo tempo a parte imaginária da amplitude ímpar F_- ir a zero para $s \to \infty$. Mas trabalharemos aqui com o princípio de maximalidade das interações fortes, ou seja, interações fortes são tão fortes quanto elas podem ser [112].

Neste trabalho, consideramos uma forma geral para a amplitude hadrônica compatível com o comportamento maximal em energias assintóticas e com o comportamento de Regge em energias moderadas, isto é, energias pré ISR e energias do ISR [134, 135]. Na próxima seção damos uma idéia da origem da parametrização e em 5.2.1 apresentamos a forma da amplitude que será utilizada.

Nossa estratégia é a seguinte:

1. Consideraremos dois casos: um no qual a contribuição do Odderon está ausente e outro no qual a contribuição do Odderon está presente.

2. Usaremos as duas formas para descrever 928 pontos experimentais (ver Capítulo 2). A $\sigma_{\rm tot}$, o parâmetro ρ e a diferença $\Delta\sigma$ para $\sqrt{s} \geq 4.539$ GeV e $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ para $9.8 \leq \sqrt{s} \leq 1800$ GeV e $|t| < 2.6$ GeV^2. A melhor fórmula será escolhida.

3. Para fazer previsões para as energias do RHIC e do LHC insistiremos na melhor descrição quantitativa dos dados, pois modelos que não descrevem bem os dados existentes também não descreverão bem os dados que serão obtidos num futuro próximo.

4. Do estudo da interferência entre F_+ e F_- concluiremos quais os melhores experimentos para detectar o Odderon.

5.1 Dados Experimentiais

Os dados experimentais utilizados aqui fazem parte de uma compilação feita por Gauron e Nicolescu ao longo dos anos. São dados de seção de choque total $\sigma_{\rm tot}$, parâmetro ρ, diferença $\Delta\sigma = \sigma_{\rm tot}^{\bar{p}p} - \sigma_{\rm tot}^{pp}$ para $\sqrt{s} > 4.5$ GeV e $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ para $9.8 \leq \sqrt{s} \leq 1800$ GeV e $|t| < 2.6$ GeV^2. Estes dados são mostrados nas Figuras 5.2 — 5.6.

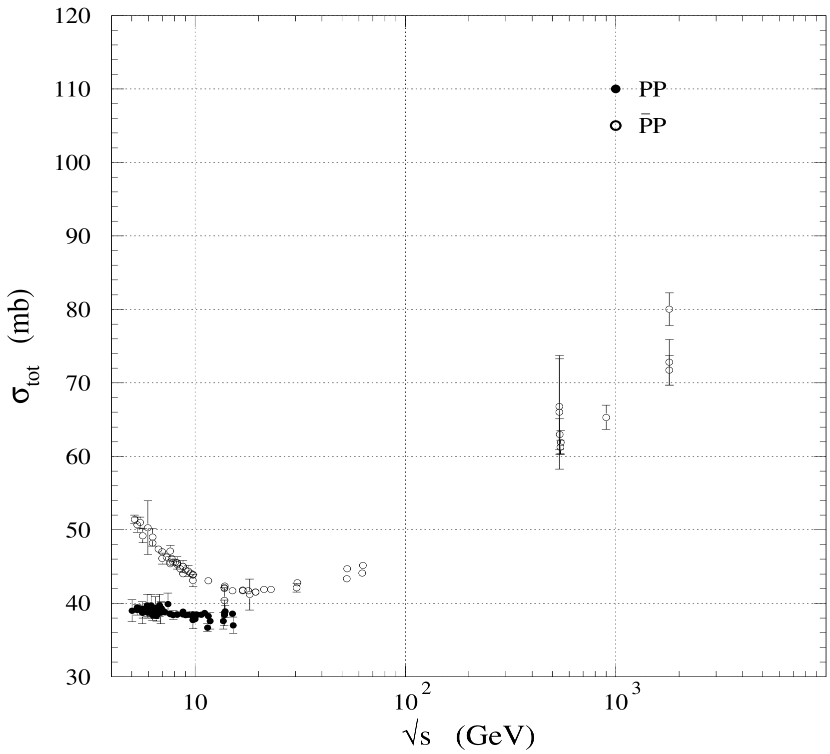

Figura 5.2: Seção de choque total pp e $\bar{p}p$, compilados por Gauron e Nicolescu.

Também temos dados $\mathrm{d}\,N/\mathrm{d}\,t$ mostrados na Figura 5.7

5.2 Parametrização

Antes de introduzirmos a parametrização que será utilizada daremos uma idéia de como ela surgiu.

Para construção da amplitude foi utilizada a transformada de Watson-Sommerfeld. A amplitude de espalhamento pode ser escrita como uma expansão em ondas parciais [5]

$$A(s,t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(t) P_l(z_t), \tag{5.3}$$

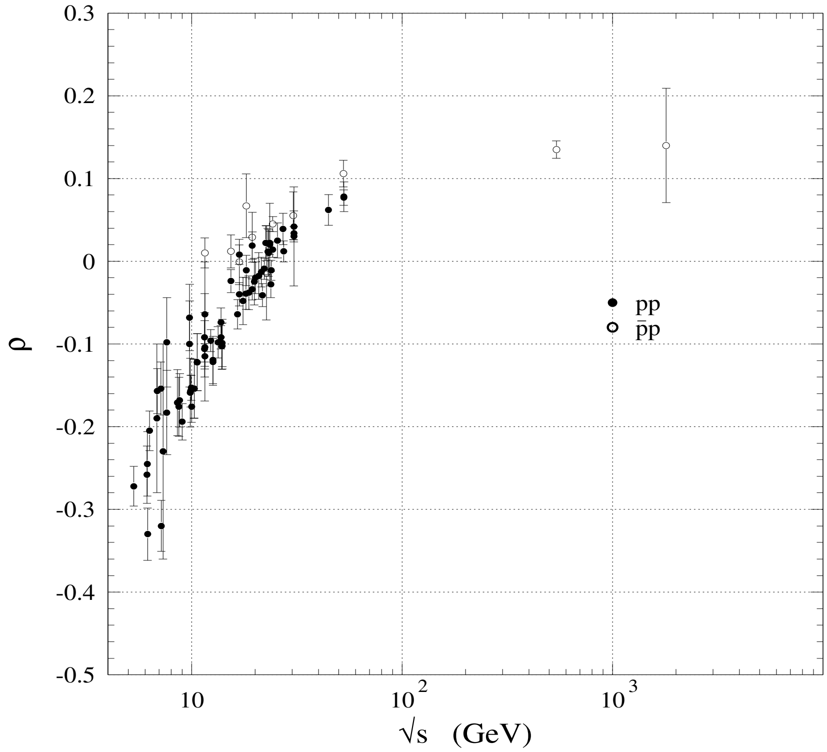

Figura 5.3: Parâmetro ρ, compilado por Gauron e Nicolescu.

onde P_l são os polinômios de Legendre,

$$z_t = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}, \tag{5.4}$$

e os $a_l(t)$ são as chamadas ondas parciais.

Utiliza-se a transformada de -Sommerfeld [37]. O ponto inicial é considerar a expansão em ondas parciais como a soma dos resíduos de uma função e então usar o teorema da integral de Cauchy para transformar a soma numa integral. Depois, deformando o contorno de integração, podemos encontrar as contribuições para a amplitude de espalhamento vindas de diferentes tipos de singularidades de $a(l,t)$, a expansão para valores de l complexos de $a_l(t)$ [37].

Se a função $a(l,t)$ tem pólos simples em

$$l = \alpha(t), \tag{5.5}$$

cada pólo contribui para a amplitude de espalhamento com um termo que se comporta assintoticamente ($s \to \infty$) como [5]

$$A(s,t) \sim s^{\alpha(t)}, \tag{5.6}$$

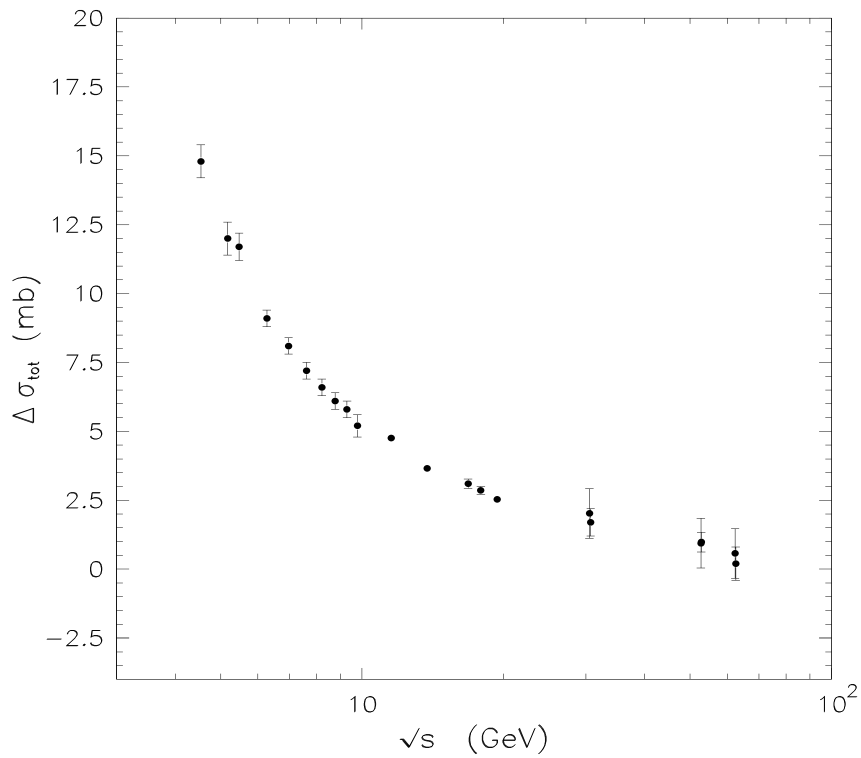

Figura 5.4: Dados $\Delta\sigma = \sigma_{\bar{p}p} - \sigma_{pp}$, compilados por Gauron e Nicolescu.

com

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(t)t. \tag{5.7}$$

Singularidades mais complicadas podem existir. Por exemplo, se tivermos pólos de ordem mais alta $(l-\alpha(t))^{-n}$ o resultado será a combinação de termos de $s^{\alpha(t)}$ multiplicados por potências de $\ln s$ [136]

$$\ln s, \ln^2 s, \ldots, \ln^n s. \tag{5.8}$$

Também, podemos ter pontos de ramificação e cortes atrelados a eles. Sua contribuição é uma integral envolvendo a descontinuidade de $a(l,t)$ através do corte no plano complexo l [136]

$$A^c(s,t) = \int^{\alpha_c(t)} \mathrm{d}\, l(2l+1)\frac{\mathrm{desc}(a(l,t))s^l}{\mathrm{sen}\,\pi l}. \tag{5.9}$$

Seu comportamento para $s \to \infty$ é da forma

$$A^c(s,t) \sim s^{\alpha_c(t)}(\ln s)^{-\gamma(t)}, \tag{5.10}$$

onde $\gamma(t)$ depende do comportamento de $\mathrm{desc}(a(l,t))$ próximo a $l = \alpha_c(t)$ [26]. O caso mais simples é quando um corte corresponde a troca de dois reggeons R_1 e R_2. Neste caso

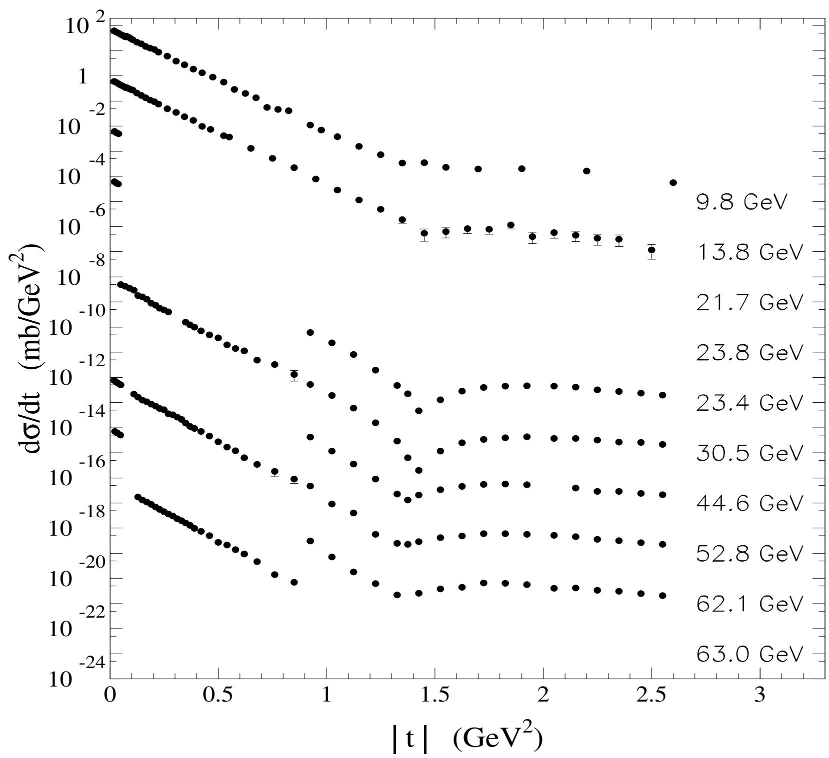

Figura 5.5: Seção de choque diferencial pp na região $|t| \leq 2.6$ GeV^2, compilados por Gauron e Nicolescu. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

$\alpha_c(t)$ é dado por

$$\alpha_c(0) = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) - 1 \tag{5.11}$$

$$\alpha_c'(0) = \frac{\alpha_1'\alpha_2'}{\alpha_1' + \alpha_2'}. \tag{5.12}$$

O momento angular complexo é algumas vezes chamado de w ou J.

A amplitude que utilizaremos está normalizada de forma que

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{16\pi s^2}|A(s,t)|^2, \tag{5.13}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{s}\,\mathrm{Im}\,A(s,0), \tag{5.14}$$

$$\Delta\sigma = \frac{1}{s}(\,\mathrm{Im}\,A_{\bar{p}p}(s,0) - \,\mathrm{Im}\,A_{pp}(s,0)). \tag{5.15}$$

As amplitudes par e ímpar sob cruzamento também estão definidas da maneira usual

$$A_{pp} = A_+ + A_- \tag{5.16}$$

$$A_{\bar{p}p} = A_+ - A_-. \tag{5.17}$$

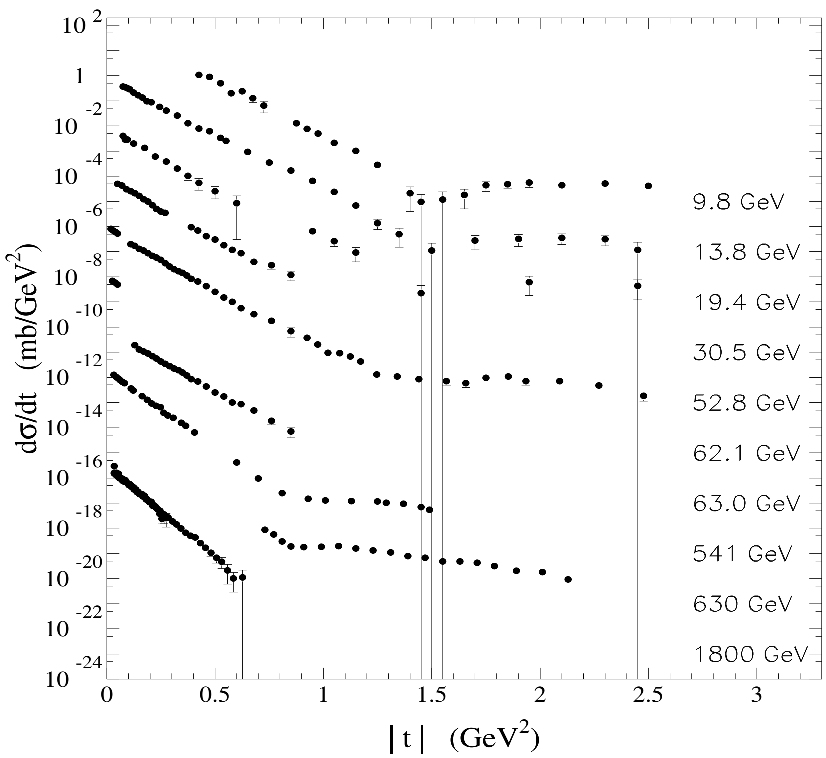

Figura 5.6: Seção de choque diferencial $\bar{p}p$ na região $|t| \leq 2.6$ GeV^2, compilados por Gauron e Nicolescu. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

As amplitudes A_+ e A_- estão separadas em uma parte "normal" A^N contendo os pólos e os cortes de Regge e uma parte assintótica $A_\pm^{As}$ com as contribuições do Pomeron e do Odderon máximo [26, 134],

$$A_\pm = A_\pm^N + A_\pm^{As}. \tag{5.18}$$

A parte real das funções $A_\pm(s,t)$ são construídas utilizando a prescrição $s \to -\mathrm{i}s$ (Apêndice C).

As amplitudes $A_\pm^{As}$ são construídas de forma que em $t = 0$ elas tenham a forma

$$A_+^{As} = \mathrm{i}s(H_1 \ln^2 \bar{s} + H_2 \ln \bar{s} + H_3) \tag{5.19}$$

e

$$A_-^{As} = s(O_1 \ln^2 \bar{s} + O_2 \ln \bar{s} + O_3), \tag{5.20}$$

onde H_i e O_i são constantes e

$$\bar{s} = \frac{s}{s_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, \tag{5.21}$$

com $s_0 = 1$ GeV.

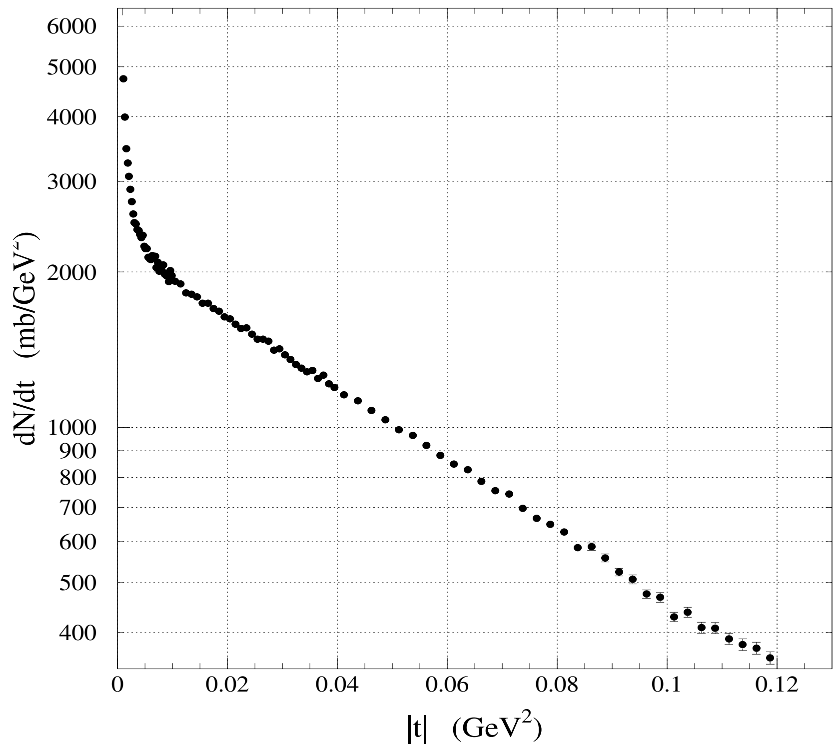

Figura 5.7: Dados dN/dt na região de interferência Coulomb-nuclear não normalizados [47].

O termo (5.19) se refere ao Pomeron, enquanto (5.20) se refere ao Odderon máximo. A dependência em $t \neq 0$ é controlada pelo teorema de Auberson-Kinoshita-Martin, (AKM) [137] de acordo com o qual, para $s \to \infty$

$$A_{\pm}(s,t) \to A_{\pm}(s,0)g_{\pm}(\tau), \tag{5.22}$$

onde $g_{\pm}$ são funções inteiras de ordem 1/2 de τ^2 e τ é a variável de escala

$$\tau = \text{constante}\sqrt{-t}\ln s. \tag{5.23}$$

Nas referências [134, 135] as amplitudes foram generalizadas para $t \neq 0$ pela escolha das singularidades mais simples no plano J dependendo de t, que colapsam ao pólo triplo e duplo em $t = 0$ e produzem via transformada de Mellin (Apêndice D) funções de s e t, que possuem, assintoticamente, um comportamento consistente com o teorema AKM.

5.2.1 Forma da amplitude

A amplitude $A_+(s,t)$ é escrita como a soma dos seguintes componentes [134, 135]

1. A_+^H representando a contribuição de um corte 3/2 colapsando em t=0 a um pólo triplo localizado em $J = 1$ e que satisfaz o teorema assintótico de Auberson-Kinoshita-Martin (AKM) [137]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{i}s}A_+^H(s,t) &= H_1 \ln^2 \bar{s}\ \frac{2J_1(K_+\bar{\tau})}{K_+\bar{\tau}}\exp(b_1^+ t) \\ &+ H_2 \ln \bar{s} J_0(K_+\bar{\tau})\exp(b_2^+ t) \\ &+ H_3[J_0(K_+\bar{\tau}) - K_+\bar{\tau}J_1(K_+\bar{\tau})]\exp(b_3^+ t)\ ,\end{aligned} \tag{5.24}$$

onde os J_n são funções de Bessel, $H_k,\ b_k^+(k = 1, 2, 3)$ e K_+ são constantes,

$$\bar{s} = \left(\frac{s}{s_0}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right),\ \text{com } s_0 = 1\ \text{GeV}^2 \tag{5.25}$$

$$\bar{\tau} = \left(-\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \ln \bar{s}, \quad \text{com } t_0 = 1\ \text{GeV}^2\ . \tag{5.26}$$

2. $A_+^P(s,t)$, a contribuição do pólo do Pomeron

$$\frac{1}{s}A_+^P(s,t) = C_P \exp(\beta_P t)\left[\mathrm{i} - \cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha_P(t)\right)\right]\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_P(t)-1}\ , \tag{5.27}$$

onde C_P e β_P são constantes e

$$\alpha_P(t) = \alpha_P(0) + \alpha'_P t\ , \tag{5.28}$$

com

$$\alpha_P(0) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha'_P = 0.25\ \text{GeV}^{-2}\ . \tag{5.29}$$

3. $A_+^{PP}(s,t)$, contribuição do corte do Pomeron-Pomeron

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}A_+^{PP}(s,t) = C_{PP}\exp(\beta_{PP}t)\left[\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\alpha_{PP}(t)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha_{PP}(t)\right)\right] \\ \times\frac{(s/s_0)^{\alpha_{PP}(t)-1}}{\ln\left[(s/s_0)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)\right]}\ ,\end{aligned} \tag{5.30}$$

onde C_{PP} e β_{PP} são constantes e

$$\alpha_{PP}(t) = \alpha_{PP}(0) + \alpha'_{PP} t\ , \tag{5.31}$$

com

$$\alpha_{PP}(0) = 1 \quad \text{e} \quad \alpha'_{PP} = \frac{1}{2}\alpha'_P \ . \tag{5.32}$$

4. $A_+^R(s,t)$, a contribuição de uma trajetória de Regge secundária, cujo coeficiente linear (intercept) está localizado próximo a $J = \frac{1}{2}$ e está associado com as partículas $f_0(980)$ e $a_0(980)$,

$$\frac{1}{s}A_+^R(s,t) = C_R^+\gamma_R^+(t)\exp(\beta_R^+ t)\left[\mathrm{i} - \cot\left(\frac{1}{2}\pi\alpha_R^+(t)\right)\right]\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_R^+(t)-1} , \tag{5.33}$$

onde

$$\alpha_R^+(t) = \alpha_R^+(0) + (\alpha'_R)^+ t \ , \tag{5.34}$$

com $(\alpha'_R)^+$ fixado no valor fenomenológico 0.88 GeV^{-2} e

$$\gamma_R^+(t) = \frac{\alpha_R^+(t)\left[\alpha_R^+(t)+1\right]\left[\alpha_R^+(t)+2\right]}{\alpha_R^+(0)\left[\alpha_R^+(0)+1\right]\left[\alpha_R^+(0)+2\right]} \ , \tag{5.35}$$

C_R^+, β_R^+ e $\alpha_R^+(0)$ constantes.

5. $A_+^{RP}(s,t)$, a contribuição do corte Reggeon-Pomeron

$$\frac{1}{s}A_+^{RP}(s,t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 C_{RP}^+\exp(\beta_{RP}^+ t)\left[\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\alpha_{RP}^+(t)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha_{RP}^+(t)\right)\right] \times\frac{(s/s_0)^{\alpha_{RP}^+(t)-1}}{\ln\left[(s/s_0)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)\right]} \ , \tag{5.36}$$

$$\alpha_{RP}^+(t) = \alpha_{RP}^+(0) + (\alpha'_{RP})^+ t \ , \tag{5.37}$$

onde C_{RP}^+, β_{RP}^+ e $\alpha_{RP}^+(0)$ são constantes, e

$$(\alpha'_{RP})^+ = \frac{(\alpha'_R)^+\alpha'_P}{(\alpha'_R)^+ + \alpha'_P} \ . \tag{5.38}$$

A amplitude par sob cruzamento $A_+(s,t)$ é então definida como a soma

$$A_+(s,t) = A_+^H(s,t) + A_+^P(s,t) + A_+^{PP}(s,t) + A_+^R(s,t) + A_+^{RP}(s,t) \ . \tag{5.39}$$

Por outro lado, a amplitude $A_-(s,t)$ é escrita como a soma dos seguintes componentes [134, 135]:

1. $A_-^{OM}(s,t)$, representando a contribuição do Odderon máximo, resultado de dois pólos complexos conjugados que colapsam em $t=0$ em um pólo duplo localizado em $J=1$ e que satisfaz o teorema AKM:

$$\frac{1}{s}A_-^{OM}(s,t) = O_1 \ln^2 \bar{s} \frac{\text{sen}\,(K_-\bar{\tau})}{K_-\bar{\tau}} \exp(b_1^- t) + O_2 \ln \bar{s} \cos(K_-\bar{\tau}) \exp(b_2^- t) + O_3 \exp(b_3^- t)\ , \tag{5.40}$$

   onde $O_k,\ b_k^-(k=1,2,3)$ e K_- são constantes.

2. $A_-^{O}(s,t)$, contribuição do pólo do Odderon

$$\frac{1}{s}A_-^{O}(s,t) = C_O \exp(\beta_O t)\left[\mathrm{i} + \tan\left(\frac{1}{2}\pi\alpha_O(t)\right)\right]\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_O(t)-1}[1+\alpha_O(t)]\,[[1-\alpha_O(t)]\ , \tag{5.41}$$

   onde C_O e β_O são constantes e

$$\alpha_O(t) = \alpha_O(0) + \alpha'_O t\ , \tag{5.42}$$

   com

$$\alpha_O(0) = 1\ . \tag{5.43}$$

3. $A_-^{OP}(s,t)$, contribuição do corte Odderon-Pomeron

$$\frac{1}{s}A_-^{OP}(s,t) = C_{OP}\exp(\beta_{OP} t)\left[\text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\alpha_{OP}(t)\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha_{OP}(t)\right)\right] \times \frac{(s/s_0)^{\alpha_{OP}(t)-1}}{\ln\left[(s/s_0)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)\right]}\ , \tag{5.44}$$

   onde C_{OP} e β_{OP} são constantes, e

$$\alpha_{OP}(t) = \alpha_{OP}(0) + \alpha'_{OP} t\ , \tag{5.45}$$

   com

$$\alpha_{OP}(0) = 1 \tag{5.46}$$

   e

$$\alpha'_{OP} = \frac{\alpha'_O \cdot \alpha'_P}{\alpha'_O + \alpha'_P}. \tag{5.47}$$

4. $A_-^R(s,t)$, a contribuição de uma trajetória de Regge localizada em torno $J = 1/2$ e associada com as partículas $\rho(770)$ e $\omega(782)$

$$\frac{1}{s}A_-^R(s,t) = -C_R^-\gamma_R^-(t)\exp(\beta_R^- t)\left[\mathrm{i} + \tan\left(\frac{1}{2}\pi\alpha_R^-(t)\right)\right]\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_R^-(t)-1} , \tag{5.48}$$

$$\alpha_R^-(t) = \alpha_R^-(0) + (\alpha_R')^- t , \tag{5.49}$$

com $(\alpha_R')^-$ fixado no valor 0.88 GeV^2 e

$$\gamma_R^-(s,t) = \frac{\alpha_R^-(t)\left[\alpha_R^-(t)+1\right]\left[\alpha_R^-(t)+2\right]}{\alpha_R^-(0)\left[\alpha_R^-(0)+1\right]\left[\alpha_R^-(0)+2\right]} , \tag{5.50}$$

com $C_R^-,\ \beta_R^-\ \alpha_R^-(0)$ sendo constantes.

5. $A_-^{RP}(s,t)$, a contribuição do corte do Reggeon-Pomeron

$$\frac{1}{s}A_-^{RP}(s,t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 C_{RP}^-\exp(\beta_{RP}^- t)\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\alpha_{RP}^-(t)\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha_{RP}^-(t)\right)\right]$$
$$\times\frac{(s/s_0)^{\alpha_{RP}^-(t)-1}}{\ln\left[(s/s_0)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)\right]} , \tag{5.51}$$

$$\alpha_{RP}^-(t) = \alpha_{RP}^-(0) + (\alpha_{RP}')^- t , \tag{5.52}$$

onde $C_{RP}^-,\ \beta_{RP}^-$ e $\alpha_{RP}^-(0)$ são constantes e

$$(\alpha_{RP}')^- = \frac{(\alpha_R')^-\alpha_P'}{(\alpha_R')^- + \alpha_P'} . \tag{5.53}$$

Finalmente, a contribuição da amplitude ímpar sob cruzamento $A_-(s,t)$ é definida como a soma

$$A_-(s,t) = A_-^{MO}(s,t) + A_-^{O}(s,t) + A_-^{OP}(s,t) + A_-^{R}(s,t) + A_-^{RP}(s,t) . \tag{5.54}$$

5.3 Resultados numéricos

5.3.1 Dados experimentais

Os dados que utilizamos aqui formam um conjunto com 928 pontos experimentais. A σ_{tot}, o parâmetro ρ e a diferença $\Delta\sigma$ para $\sqrt{s} \geq 4.539$ GeV e $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ para $9.8 \leq \sqrt{s} \leq 1800$ GeV e $|t| < 2.6$ GeV^2.

Para os dados de $\mathrm{d}\,N/\mathrm{d}\,t$ em $\sqrt{s} = 541$ GeV [47] que não estão normalizados introduzimos um fator de normalização que multiplica todos estes dados e que será um parâmetro livre. Além disso eles estão na região de interferência Coulomb-nuclear e por isso, nessa energia a seção de choque diferencial será calculda utilizando-se a equação (2.38).

5.3.2 O caso sem o Odderon

Primeiro vamos considerar o caso sem o Odderon, isto é, o caso com

$$O_k = 0\ (k = 1, 2, 3), \quad C_O = 0, \quad C_{OP} = 0. \tag{5.55}$$

Neste caso, temos 23 parâmetros livres: H_k, b_k^+ $(k = 1, 2, 3)$, K_+, C_P, β_P, C_{PP}, β_{PP}, C_R^+, β_R^+, $\alpha_R^+(0)$, C_{RP}^+, β_{RP}^+, $\alpha_{RP}^+(0)$, C_R^-, β_R^-, $\alpha_R^-(0)$, C_{RP}^-, β_{RP}^- e $\alpha_{RP}^-(0)$, mais o fator de normalização. Os melhores valores para estes parâmetros livres foram obtidos através da minimização da função χ^2 utilizando o programa CERN-Minuit [62].

Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5.1 e nas Figuras 5.8 – 5.12. Mesmo com o grande número de parâmatros o χ^2/gdl é muito alto

$$\chi^2/gdl = 14.3. \tag{5.56}$$

Tabela 5.1: Parâmetros do ajuste do caso sem o Odderon, 928 pontos, $\chi^2/gdl = 14.3$ e fator de normalização dos dados de 541 GeV igual a 0.09180 ± 0.00033.

Parâmetros de F_+^H

H_1 (mb)	b_1^+ (GeV^{-2})	H_2 (mb)	b_2^+ (GeV^{-2})	H_3 (mb)	b_3^+ (GeV^{-2})	K_+
0.4253	13.49	-4.370	9.544	4.752	4.942	0.7814
± 0.0025	± 0.13	± 0.031	± 0.066	± 0.077	± 0.019	± 0.0013

Parâmetros dos pólos de Regge e dos cortes

	P	PP	R_+	R_-	$(RP)_+$	$(RP)_-$
$\alpha(0)$	1	1	0.425	0.4623	-0.926	0.80000
	fixo	fixo	± 0.018	± 0.0075	± 0.013	± 0.00027
C	46.65	-1.0975	29.6	32.2	-10878	1317
(mb)	± 0.10	± 0.0051	± 1.7	± 1.1	± 848	± 62
β	4.000	0	0	0	0.398	5.250
(GeV^{-2})	± 0.034				± 0.027	± 0.045
α'	0.25	5.32	0.88	0.88	eq. (5.38)	eq. (5.53)
(GeV^{-2})	fixo		fixo	fixo		

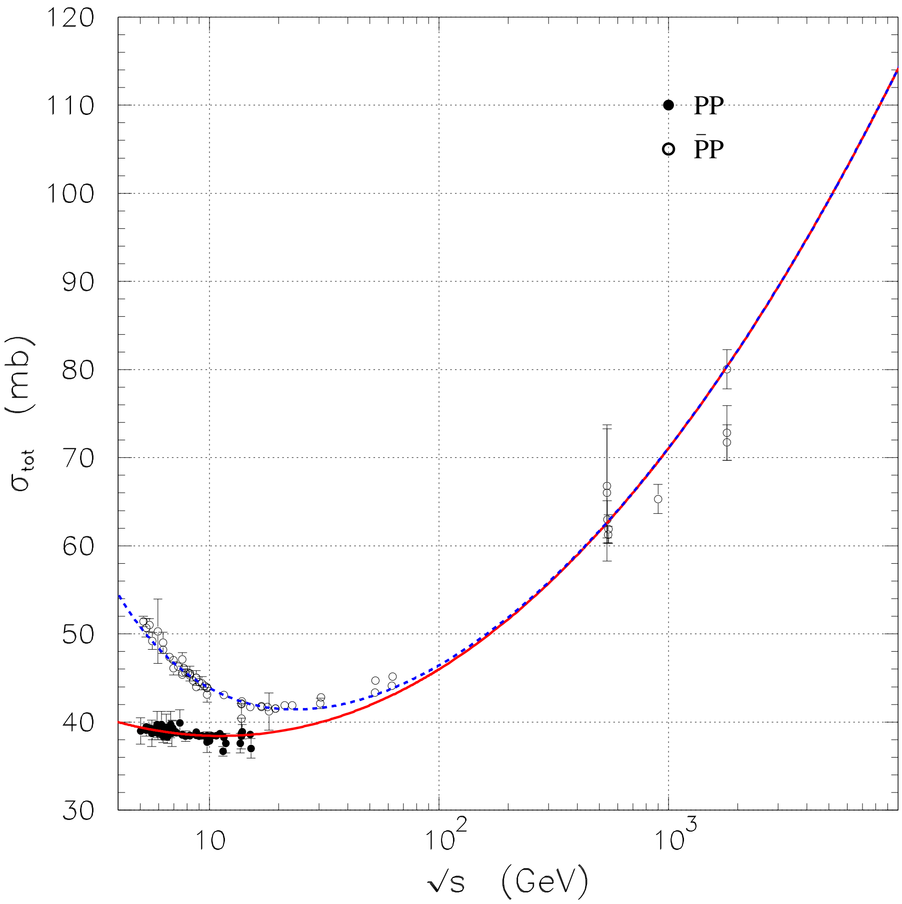

Figura 5.8: Seção de choque total pp e $\bar{p}p$ para o caso sem Odderon.

Observando as Figuras 5.8 – 5.10 vemos um fato interessante. Apesar do χ^2/gdl ruim o caso sem Odderon descreve bem as quantidades frontais, ou seja, σ_{tot}, ρ e $\Delta\sigma$. Para a seção de choque diferencial temos boa descrição apenas na região com $|t| \leq 0.4$ GeV^2. Para valores maiores de $|t|$ a parametrização sem a contribuição do Odderon falha na descrição dos dados.

O fato da parametrização sem o Odderon não descrever os dados na região de $|t|$ moderado ($|t| > 0.4$ GeV^2) não é devido a ausência da amplitude ímpar, porque mesmo sem a contribuição do Odderon ainda temos as contribuições ímpares do pólo e do corte, $F_-^R(s,t)$ e F_-^{RP}. Os coeficientes β's de t nas exponenciais em F_+^{PP}, F_+^R e F_-^R zeram no ajuste o que deve contribuir para a amplitude não descrever bem os dados na região $t \neq 0$.

A falha da amplitude em descrever os dados na região de t moderado não significa a falha do modelo de Regge que é um ingrediente básico na abordagem deste capítulo. Ela simplesmente significa a necessidade do Odderon.

5.3.3 O caso com o Odderon

Neste caso temos 12 parâmetros adicionais quando comparamos com o caso sem o Odderon: $O_k,\ b_k^-\ (k=1,2,3),\ K_-,\ C_O,\ \beta_O,\ \alpha_O',\ C_{OP}$ e β_{OP}

Os valores dos parâmetros de ajuste foram obtidos novamente utilizando o CERN-Minuit. Seus valores nunéricos são mostrados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Parâmetros do ajuste do caso com o Odderon, 928 pontos, $\chi^2/gdl = 2.3$ e fator de normalização dos dados de 541 GeV igual a 0.09009 ± 0.00033.

Parâmetros de F_+^H

H_1 (mb)	b_1^+ (GeV^{-2})	H_2 (mb)	b_2^+ (GeV^{-2})	H_3 (mb)	b_3^+ (GeV^{-2})	K_+
0.3306	3.61	-2.665	5.32	9.15	5.02	0.501
± 0.0042	± 0.15	± 0.087	± 0.14	± 0.23	± 0.16	± 0.018

Parâmetros de F_-^O

O_1 (mb)	b_1^- (GeV^{-2})	O_2 (mb)	b_2^- (GeV^{-2})	O_3 (mb)	b_3^- (GeV^{-2})	K_-
-0.05000	20.0	1.130	3.433	-0.4000	1.1307	0.12799
± 0.00047	± 1.2	± 0.025	± 0.031	± 0.0061	± 0.0085	± 0.00075

Parâmetros dos pólos de Regge e dos cortes

	P	PP	O	OP	R_+	R_-	$(RP)_+$	$(RP)_-$
$\alpha(0)$	1	1	1	1	0.479	0.3646	-0.617	0.792
	fixo	fixo	fixo	fixo	± 0.015	± 0.0075	± 0.034	± 0.018
C	35.53	-10.1	-5.63	15.4	49.4	50.00	-1934	4921
(mb)	± 0.57	± 1.9	± 0.24	± 1.4	± 1.8	± 0.85	± 620	± 306
β	4.0000	1.90	7.56	2.264	0.55	27.9	0.632	7.46
(GeV^{-2})	± 0.0049	± 0.13	± 0.70	± 0.060	± 0.21	± 5.3	± 0.089	± 0.11
α'	0.25	eq. (5.32)	0.107	eq. (5.47)	0.88	0.88	eq. (5.38)	eq. (5.53)
(GeV^{-2})	fixo		± 0.024					

O valor de χ^2 por grau de liberdade é

$$\chi^2/gdl = 2.3, \tag{5.57}$$

que é um valor baixo se considerarmos ajustes típicos deste conjunto de dados. Como no caso sem Odderon, os dados para $t = 0$ são bem descritos. Mas agora também temos boa descrição dos dados de seção de choque diferencial.

Mostramos os resultados para σ_{tot}, $\Delta\sigma$ e ρ nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15, respectivamente. Os resultados do ajuste para seção de choque diferencial estão nas Figuras 5.16–5.19. Comparando 5.16 e 5.17 com as figuras para o caso sem odderon, 5.11 e 5.12, vemos a grande melhora na descrição dos dados proporcionada pela introdução do Odderon. Na Figura 5.18 mostramos os resultados para pp e $\bar{p}p$ em 52.8 GeV que é uma das melhores descrições existentes na literatura para a diferença pp e $\bar{p}p$ nesta energia.

O ajuste na região de interferência Coulomb-nuclear é mostrado na Figura 5.19.

Também fazemos previsões para a seção de choque diferencial pp e $\bar{p}p$ no RHIC 200 e 500 GeV e energias do LHC 900 GeV, 1.96 TeV e 14 TeV, Figura 5.20.

Notamos que a estrutura do mínimo se move com o crescimento da energia de $|t| \approx 1.35$ GeV^2 em $\sqrt{s} = 52.8$ GeV para $|t| \simeq 0.4$ GeV^2 em $\sqrt{s} = 14$ TeV.

Também pode ser visto na Figura 5.20 que existe uma diferença entre as seções de choque diferenciais pp e $\bar{p}p$. A diferença pode ser melhor observada na Figura 5.21 onde mostramos, nas mesmas energias que na Figura 5.20, a quantidade

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t}\right)(s,t) \equiv \left|\left(\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t}\right)^{\bar{p}p}(s,t) - \left(\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t}\right)^{pp}(s,t)\right| . \tag{5.58}$$

Há um fenômeno interessante de oscilações presente em $\Delta(\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,t})$ devido às oscilações presentes em amplitudes do tipo $A_+^H(s,t)\ A_-^{OM}(s,t)$. Infelizmente não é possível testar diretamente a existência destas oscilações no RHIC e no LHC, simplesmente porque não teremos dados de pp e $\bar{p}p$ nas mesmas energias. Entretanto há uma chance de detectar estas oscilações no RHIC em $\sqrt{s} = 500$ GeV pois a colaboração UA4/2 já fez uma medida em uma energia próxima $\sqrt{s} = 541$ GeV. Fazendo-se medidas bem precisas no RHIC em $\sqrt{s} = 500$ GeV e combinando os dados pp correspondentes com os dados de $\bar{p}p$ de UA4/2 temos a chance de detectar uma oscilação centrada em $|t| \simeq 0.9$ GeV^2 e então a indicação do Odderon. É exatamente a oscilação centrada em $|t| \simeq 0.9$ GeV^2 que é a remanescente da oscilação vista em $|t| \simeq 1.35$ GeV^2 na energia do ISR de $\sqrt{s} = 52.8$ GeV.

Também seria importante se fossem feitas medidas no RHIC para obtermos $\Delta\sigma(s)$ no intervalo

$$50 \leq \sqrt{s} \leq 500 \text{ GeV} . \tag{5.59}$$

Uma prova conclusiva da existência do Odderon seria estabelecer que $\Delta\sigma \neq 0$ nestas energias. Em $\sqrt{s} = 500$ GeV, onde a contribuição do reggeon é negligenciável, a seção de choque total pp seria maior que a $\bar{p}p$. Infelizmente devido a $\Delta\sigma(\sqrt{s} = 500$ GeV) ser da ordem de -0.6 mb, segundo nossas previsões, é impossível estabelecer essa diferença de forma não ambígua, devido ao erro experimental na seção de choque total.

Há outras possibilidades de buscar o Odderon no RHIC, como a medida $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ num intervalo de t pequeno

$$0.003 \leq |t| \leq 0.04 \text{ GeV}^2 , \tag{5.60}$$

a fim de extrair o parâmetro ρ.

As previsões com o Odderon máximo para os observáveis em $t = 0$ são:

$$\sigma_T^{pp}(\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}) = 61.4 \text{ mb} , \tag{5.61}$$

$$\Delta\sigma(\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}) = -0.6 \text{ mb} , \tag{5.62}$$

$$\rho_{pp}(\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}) = 0.144 , \tag{5.63}$$

$$\Delta\rho(\sqrt{s} = 500 \text{ GeV},\ t = 0) = -0.002 . \tag{5.64}$$

O LHC também representa uma importante via para identificação do Odderon. Nossas previsões são

$$\sigma_T^{pp}(\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}) = 111.7 \text{ mb} , \tag{5.65}$$

$$\Delta\sigma(\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}) = -2.6 \text{ mb} , \tag{5.66}$$

$$\rho_{pp}(\sqrt{s} = 14 \text{ TeV},\ t = 0) = 0.108 , \tag{5.67}$$

e

$$\Delta\rho(\sqrt{s} = 14 \text{ TeV},\ t = 0) = 0.062 . \tag{5.68}$$

Uma medida de ρ^{pp} no LHC certamente seria um teste importante para o Odderon máximo, dado o fato que nossa previsão é mais baixa que as obtidas através de relações de dispersão sem o Odderon ($\rho \simeq 0.12 - 0.14$).

5.4 Comparação com outros modelos

A maioria dos modelos é construída de forma que a amplitude A_+ domine em altas energias para todos os valores de t [90, 138, 139, 140, 141]. As contribuições para A_- geralmente são do tipo Regge e consequentemente a medida que a energia aumenta contribuem menos para a amplitude. Daí, a previsão destes modelos é de igualdade para $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ pp e $\bar{p}p$ em contradição com os dados em $\sqrt{s} = 52.8$ GeV.

Um exemplo, Figura 6 da referência [91] e nossa Figura 5.22, é a discrepância entre o modelo de Bourrely, Soffer e Wu e os dados de $\bar{p}p$ na região centrada em $|t| = 1.35$ GeV^2 para $\sqrt{s} = 52.8$ GeV.

Há outros modelos na literatura que incluem uma amplitude ímpar A_- que permanece importante nas energias do ISR. Entre eles está o modelo de Donnachie e Landshoff [142]. Estes autores incluem uma contribuição do Odderon, descrito como a troca de 3 glúons calculada na Cromodinâmica Quântica perturbativa. Também incluem pólos e cortes de Regge como componentes importantes em sua amplitude. Na Figura 5.23, retirada da referência [26], vemos que o modelo de Donnachie e Landshoff não descreve bem os dados em 52.8 GeV na região centrada em $|t| = 1.35$ GeV. Concluímos que os dados existentes favorecem o Odderon máximo quando comparado com o Odderon de 3 glúons de Donnachie e Landshoff.

Outro modelo interessante foi formulado por Islam et al. [143, 144]. Neste modelo o núcleon é visto como um núcleo rodeado por uma nuvem de pares quark-antiquark. O "cloud-core model"envolve o Odderon mínimo, que, por si mesmo, é incapaz de dar conta dos efeitos já presentes do Odderon. Isto pode ser visto na Figura 5.24 que mostra a previsão do modelo cloud-core no RHIC e no collider-CERN $\sqrt{s} \approx 500$ GeV [145]: a diferença entre pp e $\bar{p}p$ na seção de choque diferencial está presente neste modelo mas a curva teórica não descreve bem os pontos na região $0.5 \lesssim |t| \lesssim 1.5$ GeV^2.

Ávila, Luna e Menon [146], através de ajustes da seção de choque total com a parametrização de Kang e Nicolescu [17] indicam um cruzamento, isto é, a seção de choque total pp torna-se maior que a seção de choque $\bar{p}p$. O mesmo acontece nesta tese, veja Figura 5.13.

Ávila, Campos, Menon e Montanha [148, 149] e Apêndice A desta tese, através da utilização relações de dispersão derivativas em primeira ordem para $t \neq 0$, observam o mesmo efeito de cruzamento na seção de choque total. Mas no caso do parâmetro ρ temos resultados diferentes. Em [148, 149] e Apêndice A, $\rho^{pp} > \rho^{\bar{p}p}$ para $s \to \infty$ e no modelo deste capítulo $\rho^{pp} < \rho^{\bar{p}p}$ para $s \to \infty$. As previsões para seção de choque diferencial podem ser comparadas nas Figuras 5.20 e A.3. Lembramos que o modelo deste capítulo é válido para $t \leq 2.6$ GeV^2 e no Apêndice A procurou-se uma abordagem independente de modelo.

Martynov e Nicolescu [147] generalizaram o modelo desta tese estendendo sua validade para $0 \leq |t| \leq 16$ GeV^2 e obtém um $\chi^2/gdl = 1.23$ para 2892 dados na região de energias $5 \leq \sqrt{s} \leq 1800$ GeV e para $t = 0$ e $0.1 \leq |t| \leq 16$ GeV^2. Os autores afirmam que é certamente o melhor modelo para descrever os dados.

Insistimos que para fazer previsões teóricas objetivando a detecção Odderon no RHIC e no LHC é preciso sempre descrever bem os dados já existentes, principalmente os dados de pp e $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 52.8$ GeV. De outra forma podemos chegar a conclusões erradas sobre o Odderon que aparece nos espalhamentos pp e $\bar{p}p$ como uma pequena correção a contribuição dominante do Pomeron, exceto em regiões particulares de s e t.

5.5 Conclusões do capítulo

Mais de 30 anos após sua introdução ainda não foi provado que o Odderon existe nem que ele não existe. A principal razão para isso é que a maior parte dos esforços foram concentrados no estudo do espalhamento pp e $\bar{p}p$, onde a amplitude $F_{-}(s,t)$ pode ser desprezada em relação a amplitude $F_{+}(s,t)$. O sinal mais espetacular do Odderon é prever a diferença entre o espalhamento pp e $\bar{p}p$ em s grande e t pequeno. Entretanto, depois do fechamento do ISR, que ofereceu a primeira evidência para o Odderon, não houve nenhum experimento no qual o espalhamento pp e $\bar{p}p$ foi medido na mesma energia. Esta pode ser a principal razão para a não observação do Odderon até agora.

Neste capítulo mostramos que podemos escapar desta situação fazendo uma medida precisa de $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ no RHIC, combinando estes dados futuros com os dados existentes de UA4/2 em 541 GeV.

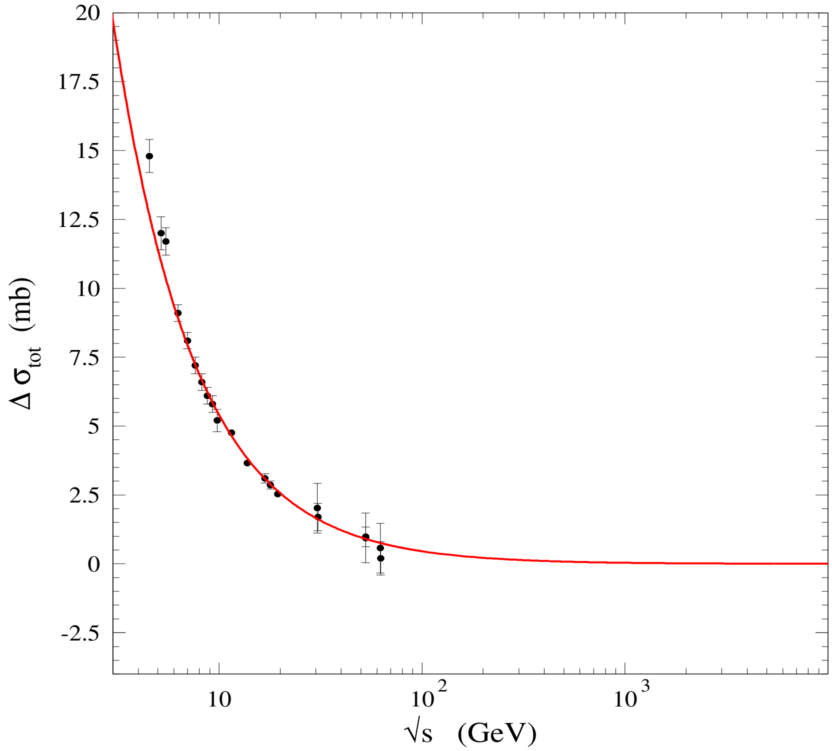

Figura 5.9: Diferença $\Delta\sigma$ para o caso sem Odderon.

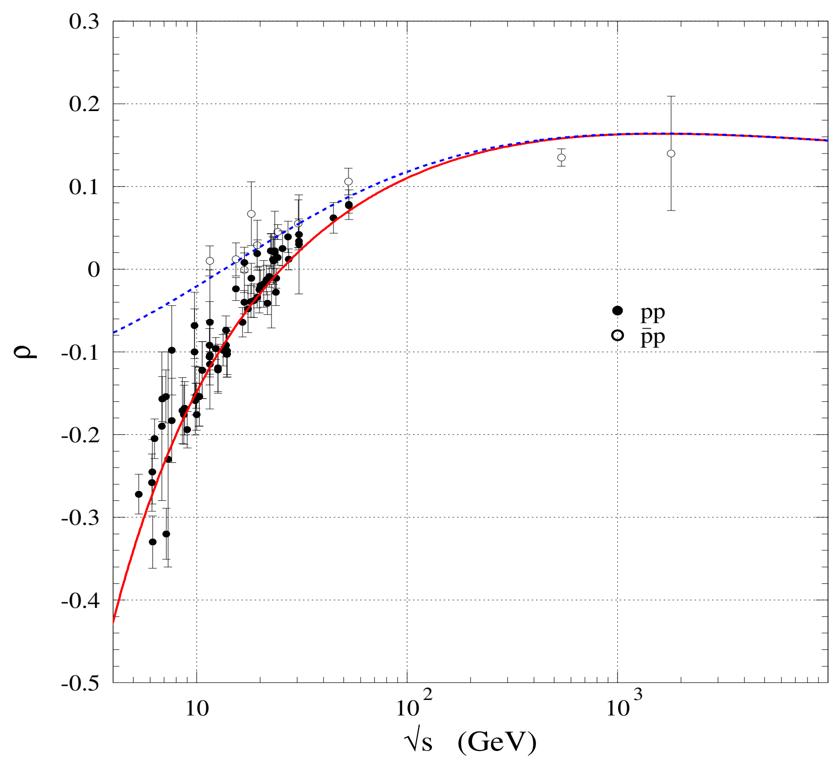

Figura 5.10: Parâmetro ρ pp e $\bar{p}p$ para o caso sem Odderon.

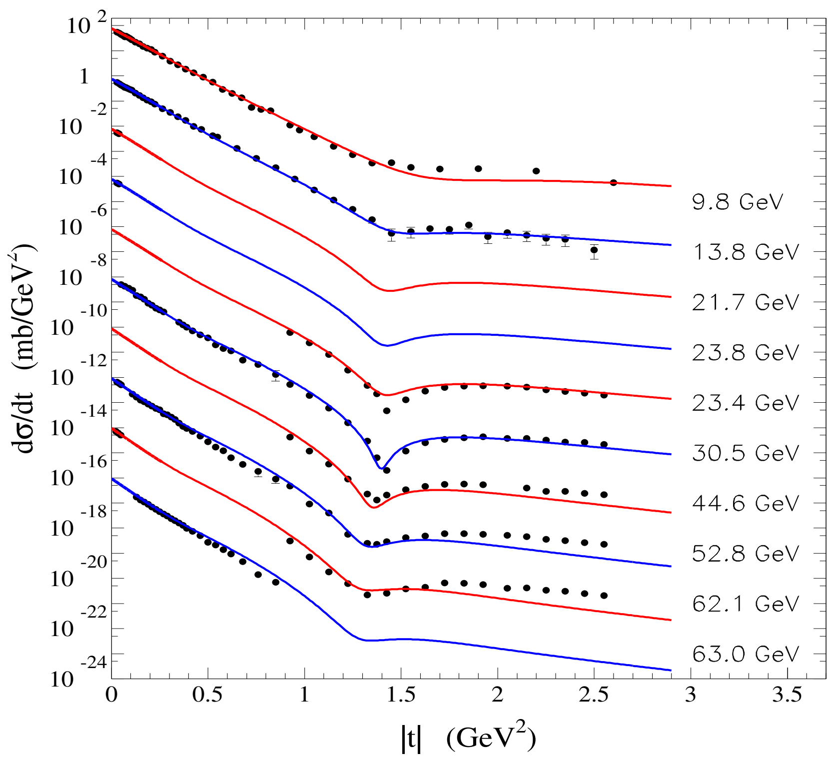

Figura 5.11: Seção de choque diferencial pp para o caso sem Odderon. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

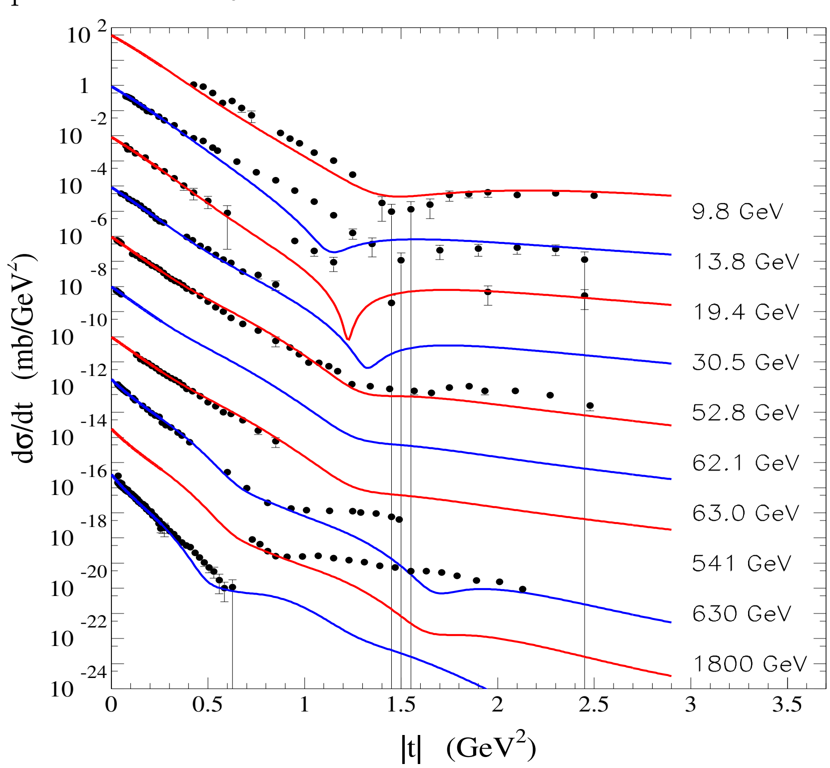

Figura 5.12: Seção de choque diferencial $\bar{p}p$ para o caso sem Odderon. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

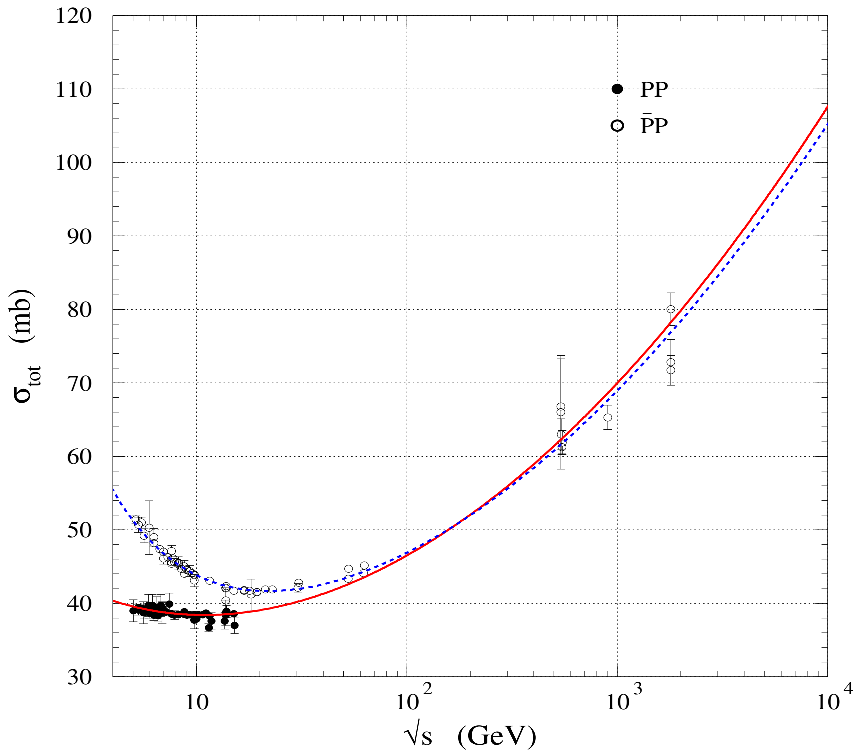

Figura 5.13: Seção de choque total para o caso com Odderon.

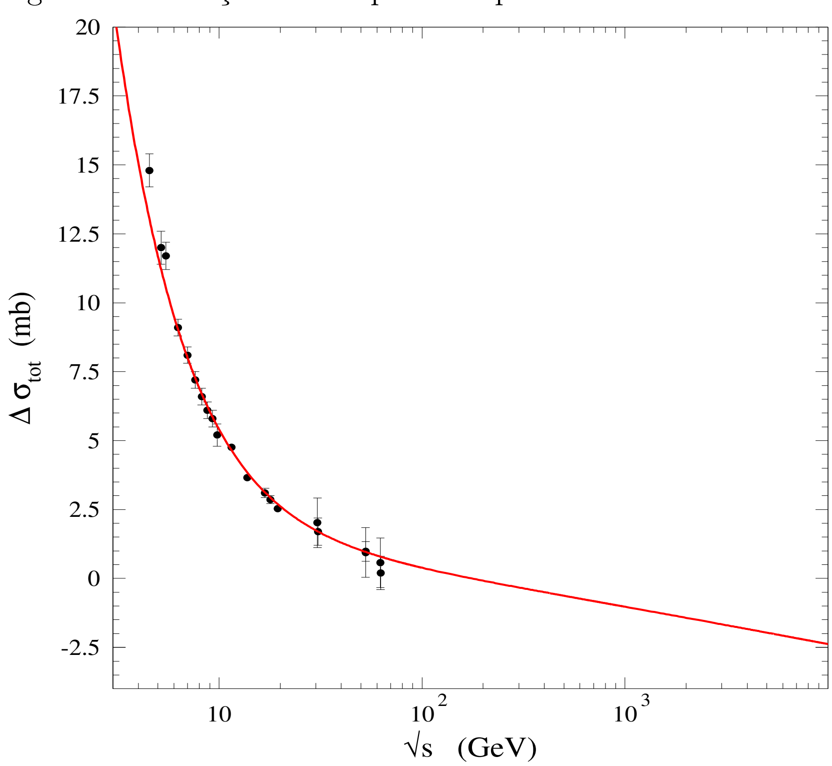

Figura 5.14: Diferença $\Delta\sigma$ para o caso com o Odderon.

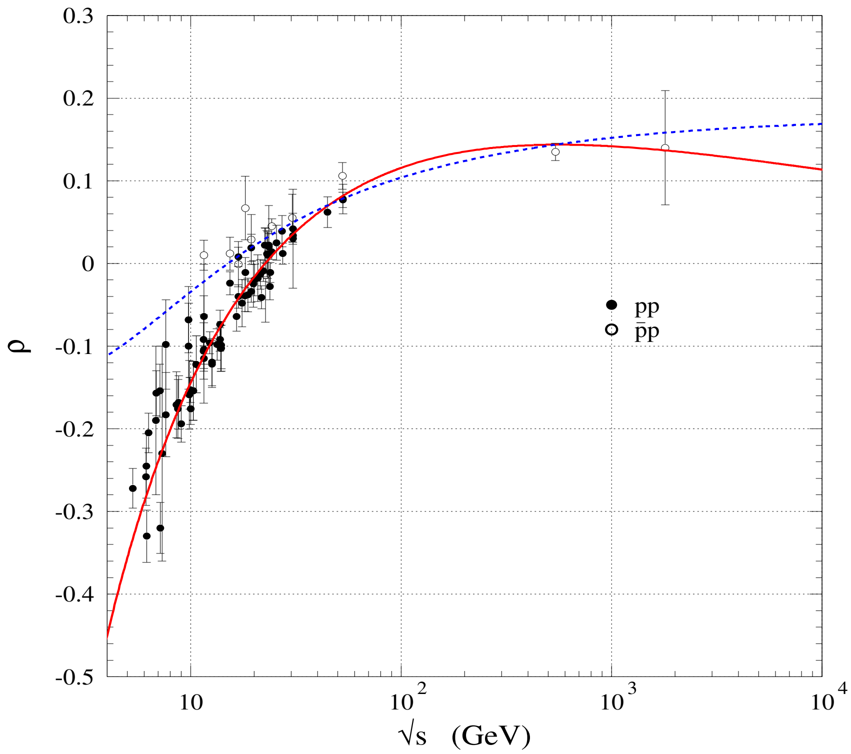

Figura 5.15: Parâmetro ρ para o caso com o Odderon.

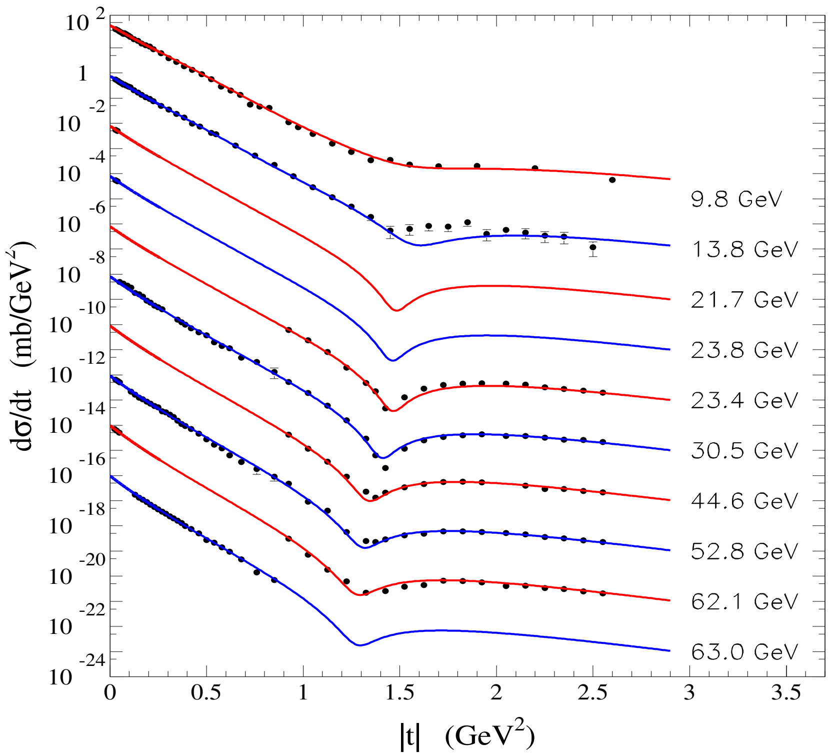

Figura 5.16: Seção de choque diferencial pp para o caso com Odderon. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

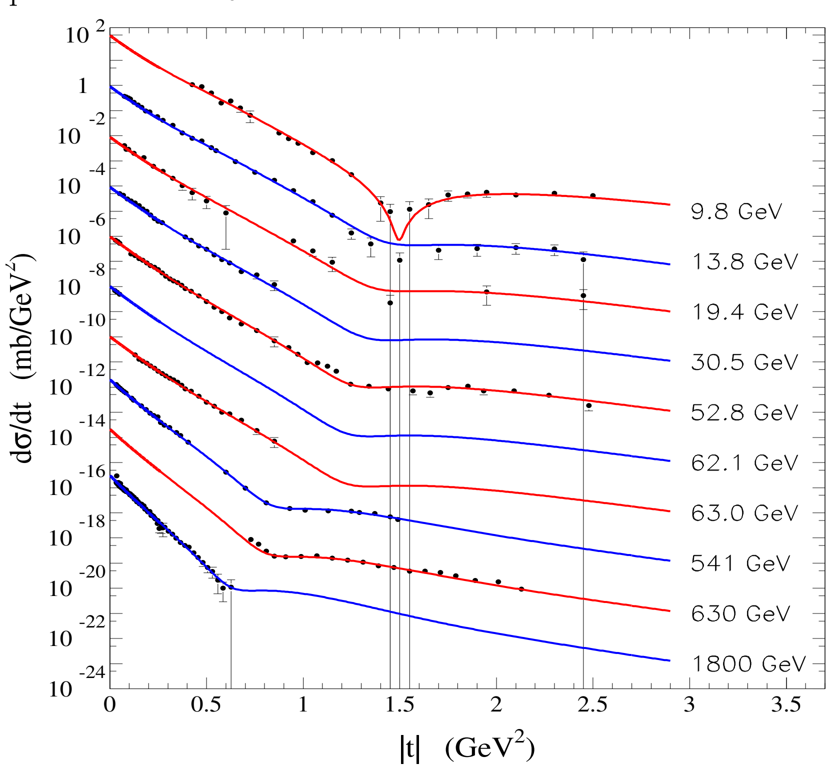

Figura 5.17: Seção de choque diferencial $\bar{p}p$ para o caso com Odderon. Os dados estão multiplicados por fatores de 10^{-2}.

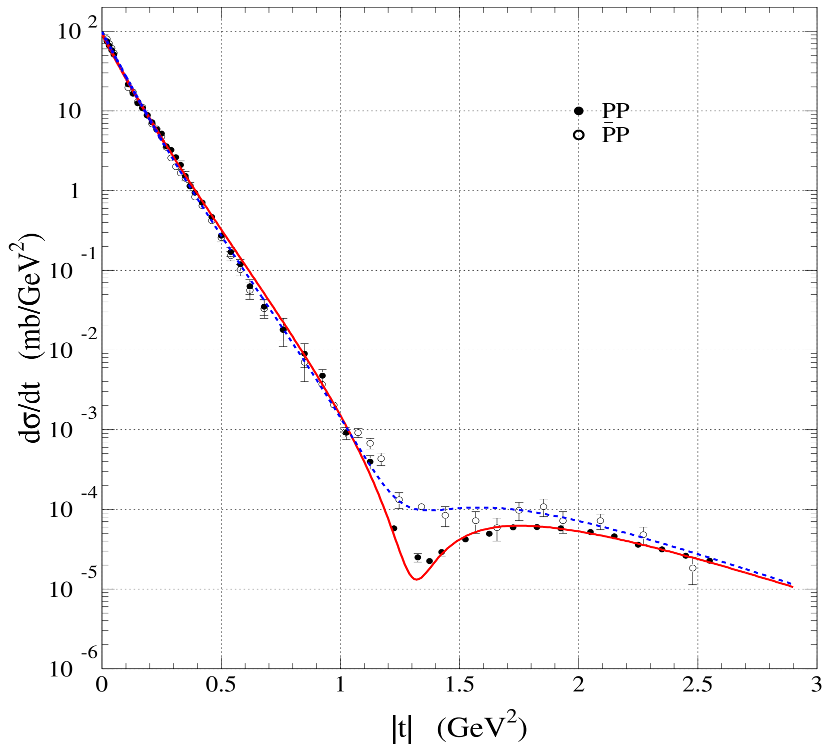

Figura 5.18: Seção de choque diferencial pp e $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 52.8$ GeV.

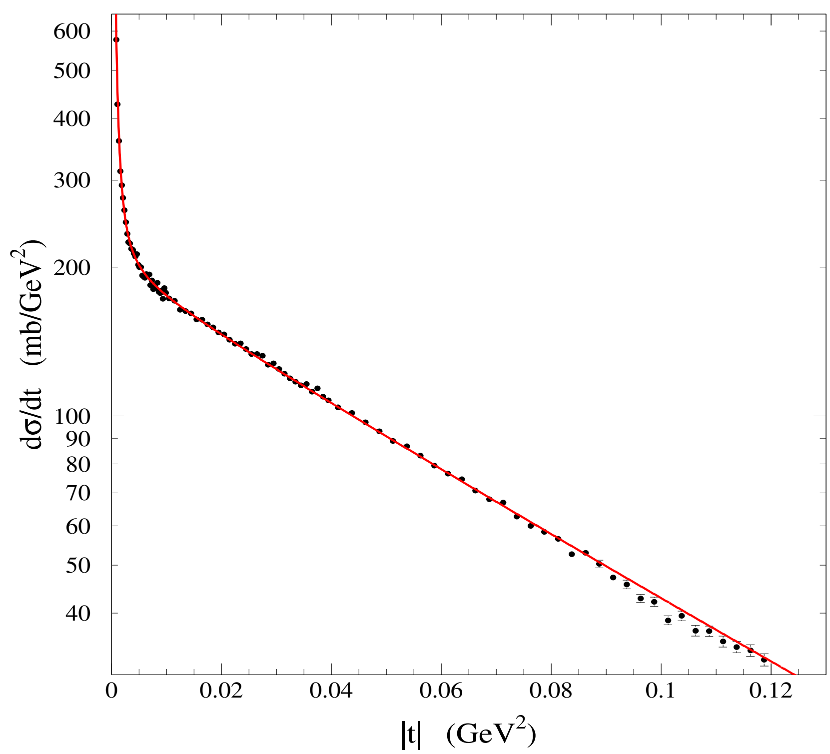

Figura 5.19: Dados d N/d t multiplicados pelo fator de normalização 0.09009 e resultados do ajuste na região Coulomb-nuclear.

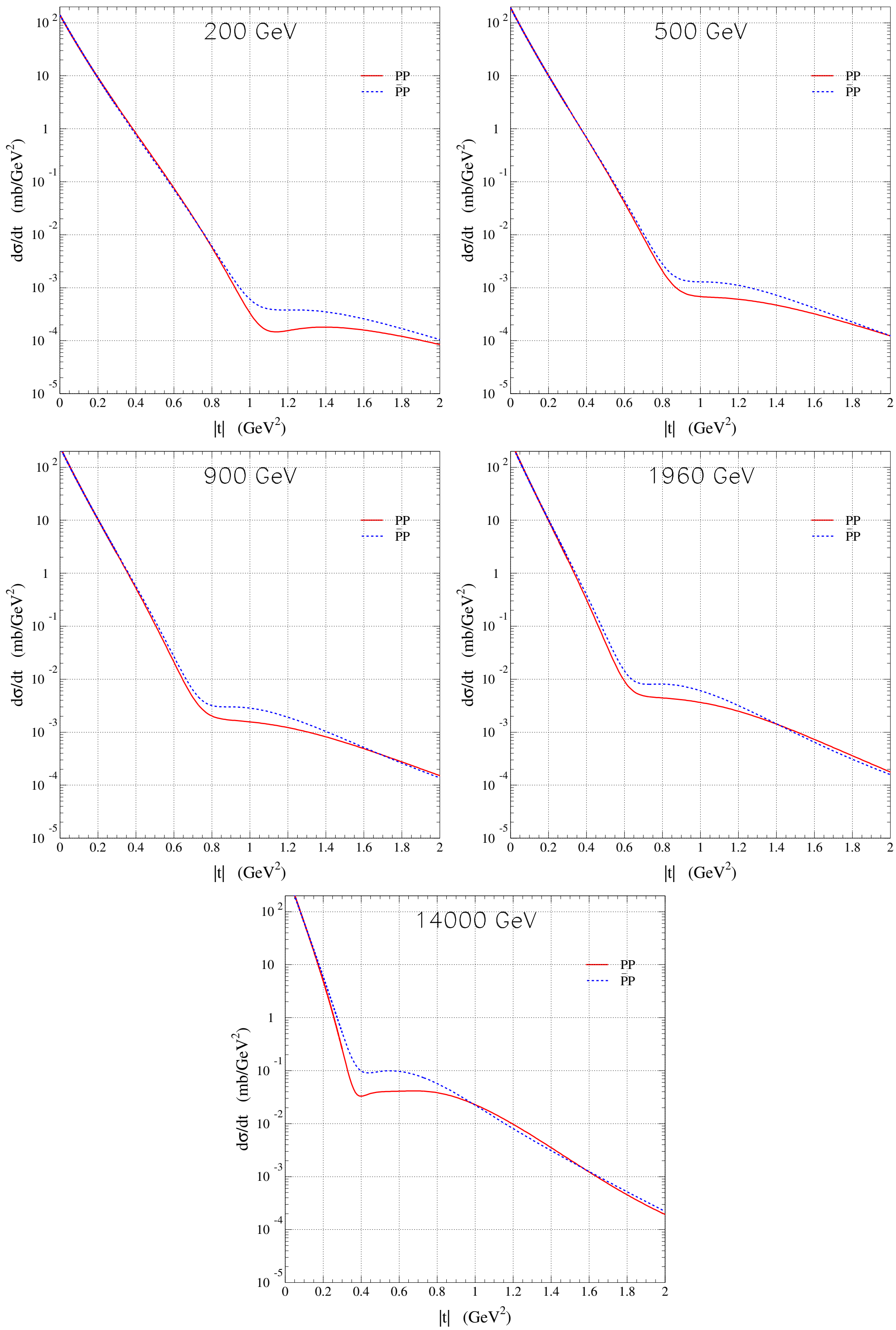

Figura 5.20: Previsões para a seção de choque diferencial pp e $\bar{p}p$ nas energias 200, 500, 900, 1960 e 14000 GeV.

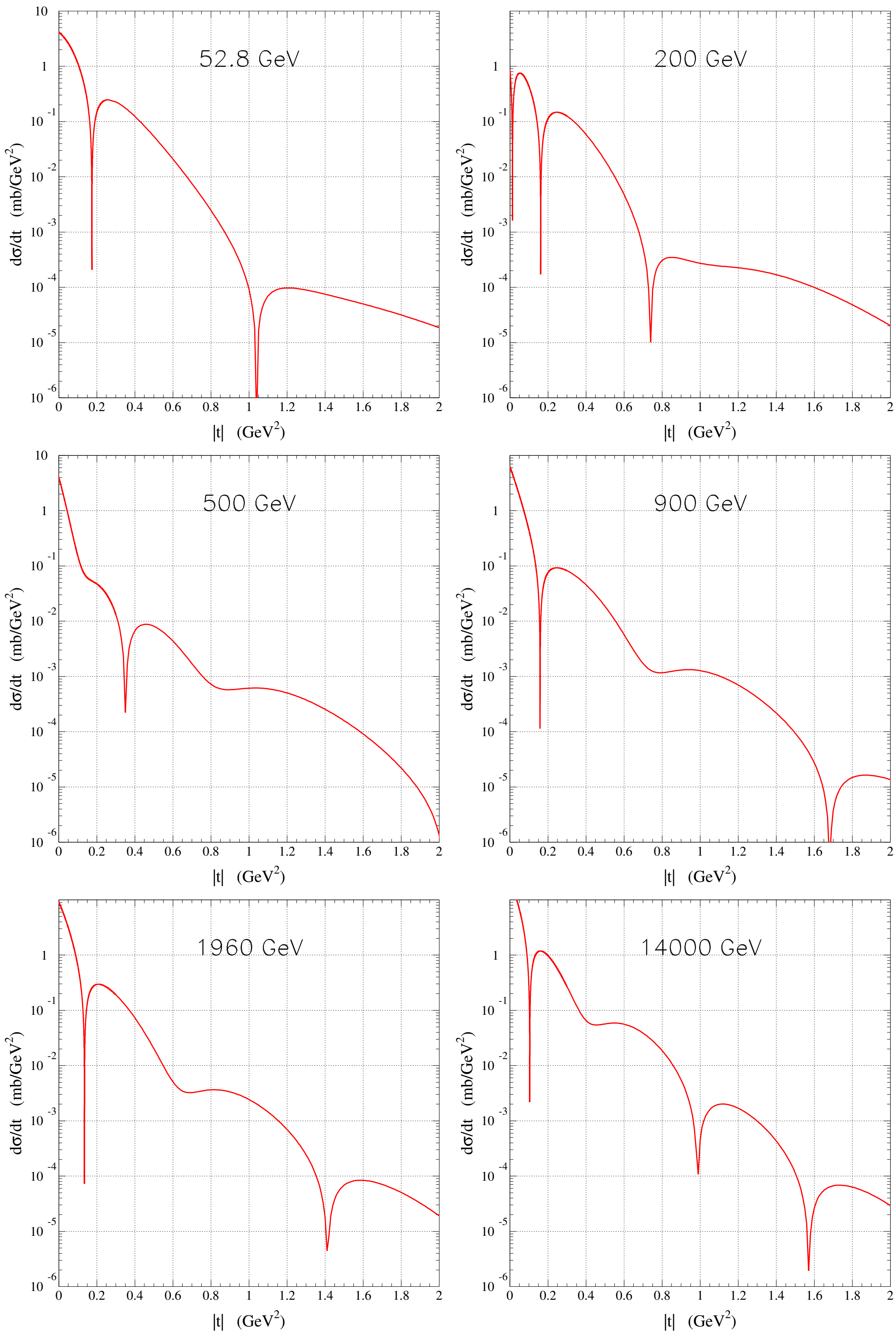

Figura 5.21: Previsões para a o módulo da diferença entre a seções de choque diferenciais pp e $\bar{p}p$ nas energias 52.8, 200, 500, 900, 1960 e 14000 GeV.

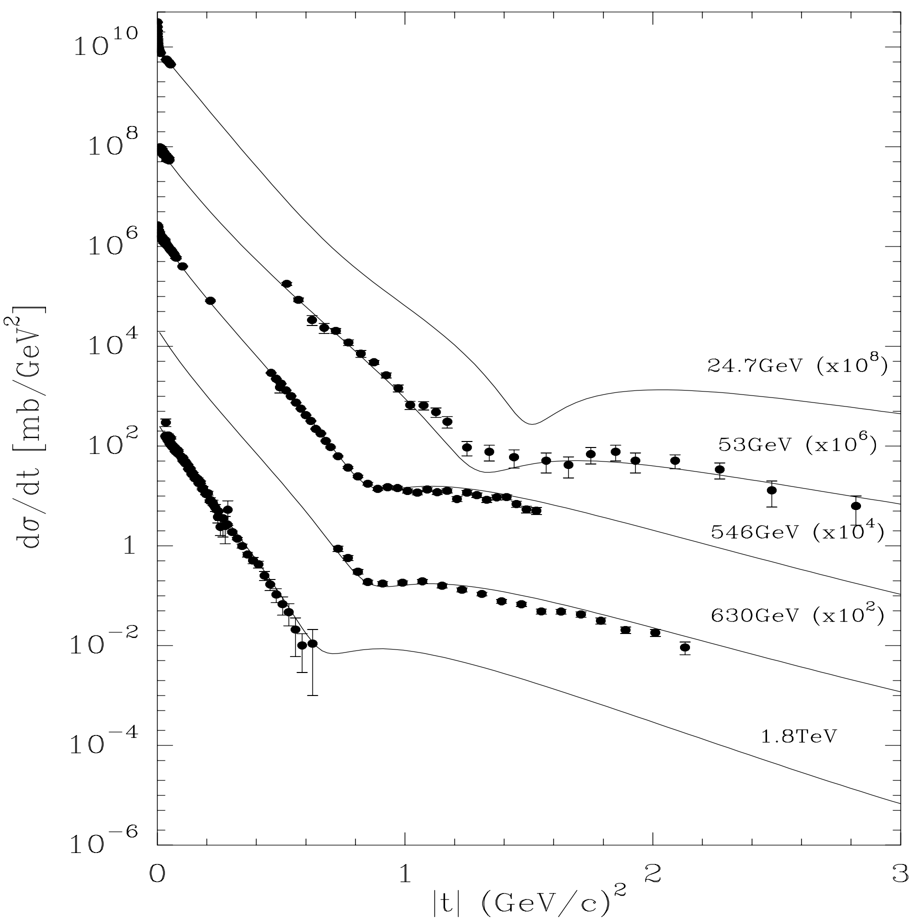

Figura 5.22: Seção de choque diferencial $\bar{p}p$ de Bourrely, Soffer e Wu retirada da referência [91].

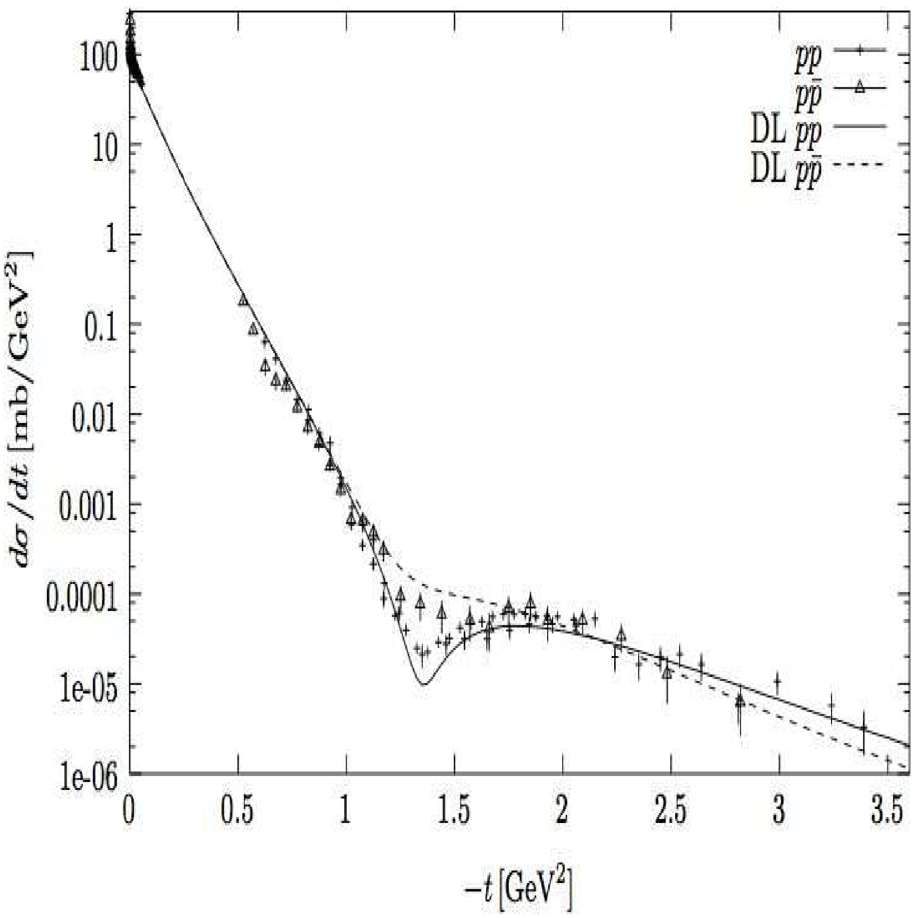

Figura 5.23: Seção de choque diferencial pp e $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 52.8$ GeV junto com o ajuste de Donnachie e Landshoff [142]. Esta figura foi retirada da referência [26].

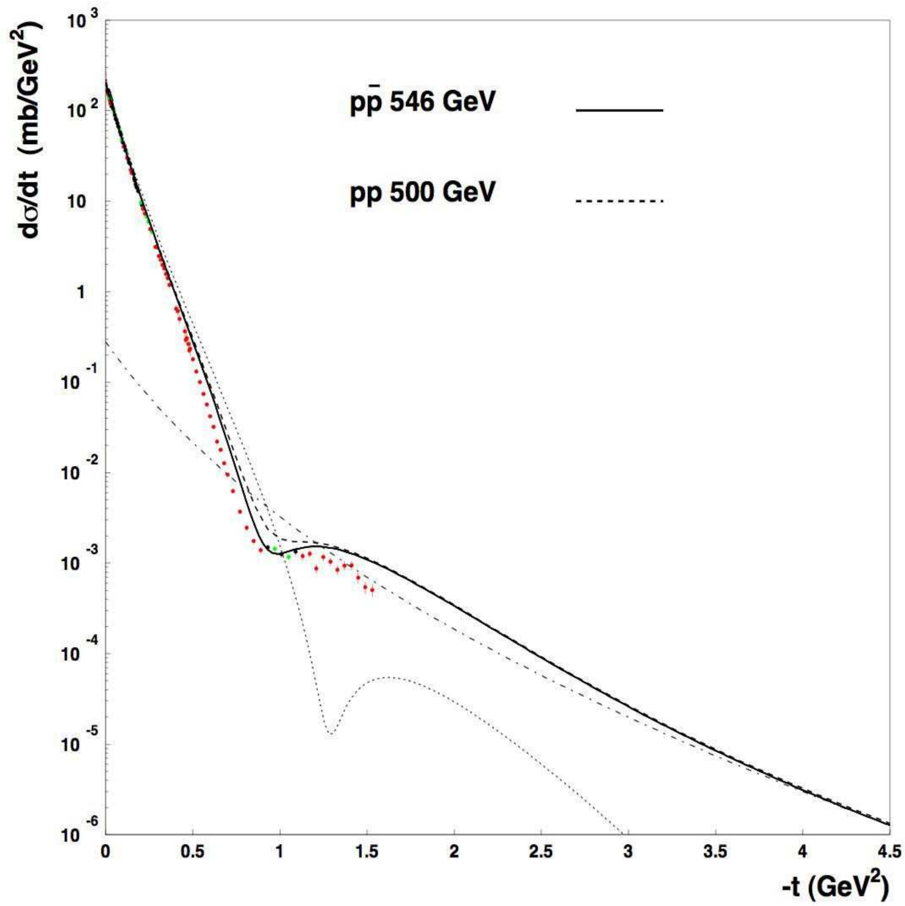

Figura 5.24: Resultado de Islam et al. (Figura 3 da referência [145]) . A curva sólida representa $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ calculado para $\bar{p}p$ em $\sqrt{s} = 546$ GeV e a curva tracejada é a previsão para pp em $\sqrt{s} = 500$ GeV.

Capítulo 6

Conclusões

Atualmente, o espalhamento elástico de hádrons em altas energias constitui um dos principais problemas não resolvidos pela Cromodinâmica Quântica: técnicas perturbativas não se aplicam e abordagens não perturbativas dependem de fortes hipóteses fenomenológicas, sem base em teorias quânticas de campos.

Nesta tese trabalhamos em três aspectos relacionados ao espalhamento elástico: as relações de dispersão, os zeros da eiconal no espaço de momento transferido e a contribuição do Odderon para a amplitude de espalhamento. Por este motivo nossa conclusão também será dividida em três partes e em seguida apresentamos nossas observações finais.

- **Abordagem Analítica**

Quando estudamos as relações de dispersão partimos das Relações de Dispersão Integrais (RDI) com uma subtração (3.10) e (3.11) e sem utilizar a aproximação de altas energias ($m \to 0$, no limite inferior das integrais) obtivemos novas relações de dispersão derivativas (3.22) e (3.23)

$$\operatorname{Re} f_+(E) = K + E \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right)\frac{\operatorname{Im} f_+(E)}{E} + \Delta^+(E,m), \tag{6.1}$$

com o termo de correção Δ^+ dado por

$$\begin{aligned}\Delta^+(E,m) &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\frac{\operatorname{Im} f_+(m)}{m}\\ &\quad+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}\frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}}\frac{\operatorname{Im} f_+(E)}{E},\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} f_-(E) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right)\operatorname{Im} f_-(E) + \Delta^-(E,m), \tag{6.2}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-}(E,m) &= -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right| \operatorname{Im} f_{-}(m) \\
&+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}\frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}}\operatorname{Im} f_{-}(E).
\end{aligned}
$$

que chamamos de Relações de Dispersão Derivativas Estendidas (RDDE). Estas novas relações são equivalentes às RDI sob certas condições, por exemplo o Teorema 1.

Uma crítica às RDDE escritas na forma acima é a soma dupla que torna difícil sua manipulação e a prova da convergência da série. No entanto, Ferreira e Sesma [21] introduziram uma forma mais simples evitando a soma dupla. Por exemplo para $\operatorname{Im} F(E)/E = E^{\alpha}$ a verificação da convergência é trivial.

A princípio a aplicabilidade das RDDE pode ser estendida para qualquer área que faça uso das técnicas de relação de dispersão, com possíveis restrições adicionais dadas pela analiticidade e condições experimentais envolvidas. Em especial, sob condições adequadas, o caráter local dos operadores derivativos pode ser uma grande vantagem.

- **Abordagem Empírica**

No capítulo em que tratamos os aspectos empíricos, ou seja, onde utilizamos a representação eiconal e extraímos os zeros da parte imaginária da eiconal no espaço de q, iniciamos discutindo os dados de seção de choque diferencial pp em altas energias e desta discussão introduzimos dois aprimoramentos em relação às análises anteriores [23, 24]. O primeiro relacionado ao conjunto de dados utilizado em 27.4 GeV e o segundo aprimoramento foi introduzido depois de verificarmos que os dados em grande momento transferido ($q^2 > 3.5$ GeV^2) não dependem da energia na região $23.5 \leq \sqrt{s} \leq 62.5$ GeV. Com base nesta informação foram incluídos dados na energia de 27.4 GeV somente nos 5 conjuntos de dados na região acima e não em 19.4 GeV, como feito em [23].

Em seguida discutimos a construção da parametrização utilizada por Menon e colaboradores [23, 24], introduzimos uma nova parametrização com a mesma forma básica porém, incluindo a seção de choque total. Com essa parametrização e os conjuntos de dados citados acima, obtivemos melhores resultados estatísticos em relação às análises anteriores.

A partir dos resultados dos ajustes de dados, calculamos a eiconal no espaço de parâmetro de impacto b e, utilizando o método analítico-numérico determinamos a parte imaginária da eiconal (parte real da função opacidade) no espaço de momento q, junto com a região de incerteza, calculada via propagação de erros. Investigamos os zeros da eiconal através de gráficos $q^8 \times (\Omega(s,q) \pm \Delta\Omega(s,q))$ em função do momento transferido. Consideramos como evidência estatística de mudança de sinal somente os casos nos quais a região de incerteza acima do valor central está abaixo do zero. Com este critério foi obtida evidência de mudança de sinal (zero) em todas as energias do ISR, nas não em 19.4 GeV. Além disso, a posição do zero nesse intervalo é praticamente constante e tem valor médio $q_0^2 = 7 \pm 1$ GeV^2.

Verificamos que os resultados dos ajustes não indicam correlações entre os zeros das partes imaginárias da eiconal e da amplitude de espalhamento.

As implicações fenomenológicas dos zeros da eiconal foram discutidas em certo detalhe. Em particular, com base em alguns modelos eiconais representativos, vimos que abordagens com um zero na eiconal são capazes de descrever a seção de choque, mesmo em valores grandes do momento transferido, sendo um exemplo o modelo BSW. Daí, a importância da determinação precisa do zero no contexto fenomenológico.

Utilizando uma análise global sobre o fator de forma elétrico do próton foram discutidas conexões entre estes dados e a eiconal extraída, mostrando que as posições dos zeros são consistentes nos 2 casos.

Gostaríamos de salientar o papel dos dados de seção de choque a grandes momentos transferidos, pois destes dados é possível extrair informações detalhadas sobre o espalhamento elástico.

- **Abordagem Fenomenológica**

No capítulo sobre o Odderon estudamos a contribuição deste objeto para a amplitude de espalhamento. Mais de 30 anos após sua introdução ainda não foi provado que o Odderon existe nem que ele não existe. A principal razão para isso é que a maior parte dos esforços foram concentrados no estudo do espalhamento pp e $\bar{p}p$, onde a amplitude $F_-(s,t)$ pode ser desprezada em relação a amplitude $F_+(s,t)$. O sinal mais evidente do Odderon é prever a diferença entre o espalhamento pp e $\bar{p}p$ em s grande e t pequeno. Entretanto, após o encerramento do ISR, que ofereceu a primeira evidência para o Odderon, nenhum outro experimento foi planejado para estudo simultâneo dos espalhamentos pp e $\bar{p}p$ na mesma energia. Acreditamos que essa possa ser a razão para a não observação do Odderon até agora.

Mostramos que podemos escapar desta situação fazendo uma medida precisa de $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,t$ no RHIC, combinando estes dados futuros com os dados existentes de UA4/2 em 541 GeV. Utilizamos uma forma geral para a amplitude hadrônica compatível com o comportamento maximal em energias assintóticas e com o comportamento de Regge em energias moderadas, isto é, energias pré-ISR e energias do ISR. A estratégia utilizada foi considerar dois casos: um sem a contribuição do Odderon e outro com a contribuição do Odderon presente. O melhor ajuste obtido foi com a parametrização com a presença do Odderon. Insistimos na melhor descrição quantitativa dos dados pois modelos que não descrevem bem os dados atuais também não descreverão bem os dados que serão obtidos num futuro próximo.

• **Comentários finais**

Dentre todos os assuntos abordados na tese, destacamos a obtenção das Relações de Dispersão Derivativas Estendidas (RDDE), pois há mais de 30 anos tem-se estudado as diferenças entre as formas derivativas e integrais e até então não haviam sido encontradas expressões derivativas que fossem equivalentes, mesmo sob certas condições, às relações integrais. O aspecto local das formas derivativas pode constituir importante ferramenta em várias áreas de análise de dados experimentais.

Entendemos que tanto os resultados analíticos, como empíricos e fenomenológicos deste trabalho, poderão fornecer subsídios importantes na análise dos novos dados experimentais sobre o espalhamento elástico próton-próton a serem obtidos a 200 GeV (RHIC) e 14 TeV (LHC). Esperamos com isto contribuir com uma melhor compreensão dos processos hadrônicos suaves em altas energias, em especial, o espalhamento elástico.

Apêndice A

Aplicação uso das relações de dispersão derivativas padrões na direção não frontal

Neste apêndice, discutimos um exemplo de aplicação das relações de dispersão derivativas *padrões* RDDP na região não frontal ($q^2 \neq 0$) e de altas energias, $\sqrt{s} > 20$ GeV (onde, como vimos no Capítulo 3 sua utilização é justificável). Trata-se de participação que tivemos em trabalhos recentes com outros autores [148, 149] e por isso apresentamos aqui apenas os resultados essenciais, indicando as referências acima para discussões e justificativas detalhadas.

Baseados no comportamento dos dados experimentais, introduzimos uma parametrização independente de modelo para a parte imaginária amplitude de espalhamento, porém com dependência com a energia e o momento transferido implícitas selecionadas por rigorosos teoremas e limites da teoria axiomática de campos. A parte real foi calculada analiticamente através das relações de dispersão derivativas padrões. Ajustes de dados da seção de choque total σ_{tot}, parâmetro ρ e seção de choque diferencial $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,q^2$ para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$, acima de 20 GeV, levam a um formalismo preditivo em ambos, energia e momento transferido.

A.1 Parametrização para a amplitude de espalhamento

Toda base empírica e forma da parametrização aqui utilizada é discutida em detalhe em [148]. Como comentado acima, sendo nosso objetivo mostrar apenas um exemplo do uso das relações de dispersão derivativas na direção não frontal apresentamos a seguir as fórmulas principais.

A parte imaginária das amplitudes para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$ são parametrizadas, respectivamente, por

$$\frac{\mathrm{Im}\,A_{pp}(s,q^2)}{s} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s)\mathrm{e}^{-\beta_i(s)q^2} \tag{A.1}$$

onde considera-se

$$\begin{aligned} \alpha_i(s) &= A_i + B_i \ln(s) + C_i \ln^2(s), \\ \beta_i(s) &= D_i + E_i \ln(s), \end{aligned} \tag{A.2}$$

e

$$\frac{\mathrm{Im}\,A_{\bar{p}p}(s,q^2)}{s} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i(s)\mathrm{e}^{-\bar{\beta}_i(s)q^2} \tag{A.3}$$

com

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i(s) &= \bar{A}_i + \bar{B}_i \ln(s) + \bar{C}_i \ln^2(s), \\ \bar{\beta}_i(s) &= \bar{D}_i + \bar{E}_i \ln(s), \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde A_i, ..., E_i, $\bar{A}_i$, ..., $\bar{E}_i$ são constantes reais (parâmetros de ajuste) e $i = 1, \ldots, n$.

Para que as parametrizações acima estejam de acordo com os teoremas da teoria de campos axiomática, unitaridade e analiticidade, a seguinte restrição aos parâmetros deve ser imposta [149]

$$\sum_{i=1}^{n} C_i - \bar{C}_i = 0. \tag{A.5}$$

A parte real das amplitudes é calculada através de relações de dispersão derivativas. Na direção frontal as relações de dispersão par (+) e ímpar (-) são expressas em termos do operador tangente e no caso de uma subtração elas são dadas por ((3.15) e (3.16)) [16]

$$\frac{\mathrm{Re}\,A_+(s)}{s} = \frac{K}{s} + \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ \ln s}\right)\frac{\mathrm{Im}\,A_+(s)}{s}, \tag{A.6}$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,A_-(s)}{s} = \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ \ln s}\right)\right)\frac{\mathrm{Im}\,A_-(s)}{s}, \tag{A.7}$$

onde K é a constante de subtração.

Conforme demonstrado por Fischer e Kolář [57] na região de altas energias, o operador tangente pode ser representado pelo primeiro termo da expansão em série. Também, como discutido em [148], formalmente espera-se que as relações de dispersão sejam aplicáveis numa região $q^2 \leq q^2_{\mathrm{max}}$. Com base nesses dois resultados, consideramos a seguinte forma para as RDDP:

$$\frac{\mathrm{Re}\,A_+(s,q^2)}{s} = \frac{K}{s} + \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ \ln s}\frac{\mathrm{Im}\,A_+(s,q^q)}{s}, \tag{A.8}$$

$$\frac{\mathrm{Re}\,A_-(s,q^2)}{s} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ \ln s}\right)\frac{\mathrm{Im}\,A_-(s,q^2)}{s}. \tag{A.9}$$

As conexões com as amplitudes hadrônicas são estabelecidas da forma usual

$$A_{pp}(s,q^2) = A_+(s,q^2) + A_-(s,q^2), \tag{A.10}$$

$$A_{\bar{p}p}(s,q^2) = A_+(s,q^2) - A_-(s,q^2). \tag{A.11}$$

Utilizando as parametrizações (A.1) a (A.4), as relações de dispersão (A.8) e (A.9) e as conexões (A.10) e (A.11) obtemos para a parte real das amplitudes hadrônicas para os espalhamentos pp e $\bar{p}p$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Re}\, A_{pp}(s,q^2)}{s} &= \frac{K}{s} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\alpha_i'(s) - \alpha_i(s)\beta_i'(s) q^2\right] \mathrm{e}^{-\beta_i(s) q^2} \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{4} \left[\alpha_i(s)\mathrm{e}^{-\beta_i(s)q^2} - \bar{\alpha}_i(s)\mathrm{e}^{-\bar{\beta}_i(s)q^2}\right] \right\}, \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Re}\, A_{\bar{p}p}(s,q^2)}{s} &= \frac{K}{s} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\bar{\alpha}_i'(s) - \bar{\alpha}_i(s)\bar{\beta}_i'(s) q^2\right] \mathrm{e}^{-\bar{\beta}_i(s) q^2} \right. \\ &\left. - \frac{\pi}{4} \left[\alpha_i(s)\mathrm{e}^{-\beta_i(s)q^2} - \bar{\alpha}_i(s)\mathrm{e}^{-\bar{\beta}_i(s)q^2}\right] \right\}, \end{aligned} \tag{A.13}$$

onde o apóstrofo denota derivada em relação a $\ln s$.

Com este formalismo obtêm-se as expressões para as principais quantidades que caracterizam o espalhamento elástico em altas energias (Capítulo 2), seção de choque diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,q^2} = \frac{1}{16\pi s^2} \left| \mathrm{Re}\, A(s,q^2) + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, A(s,q^2) \right|, \tag{A.14}$$

a seção de choque total

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\mathrm{Im}\, A(s, q^2 = 0)}{s} \tag{A.15}$$

e o parâmetro ρ

$$\rho = \frac{\mathrm{Re}\, A(s,q^2=0)}{\mathrm{Im}\, A(s,q^2=0)}. \tag{A.16}$$

A.2 Ajustes de dados e resultados

Consideramos aqui dados com $\sqrt{s} \geq 20$ GeV. Para dados de σ_{tot} e ρ usamos os arquivos do PDG. Para seção de choque diferencial temos o ponto óptico $(\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,q^2)_{q^2=0}$ e dados acima da região de interferência Coulomb-Nuclear. São 12 conjuntos de dados na região $0.01 < q^2 < 14$ GeV^2. Para o espalhamento pp utilizamos dados em $\sqrt{s} = 23.5$, 27.4, 30.7, 44.7, 52.8 e 62.5 GeV. Já para o espalhamento $\bar{p}p$ utlizamos dados para $\sqrt{s} = 31$, 53, 61, 546, 630 e 1800 GeV (A lista completa das referências pode ser encontrada em [23]).

Em [148] discute-se 3 variantes para os ajustes, em termos da região considerada de momento transferido (com dados experimentais) $q^2 = 0$, $q^2_{\mathrm{max}} = 2$ GeV^2 e $q^2_{\mathrm{max}} = 14$ GeV^2. Neste apêndice faremos referência somente ao caso com $q^2_{\mathrm{max}} = 2$ GeV^2. Efetuamos ajustes simultâneos de σ_{tot}, ρ e $\mathrm{d}\,\sigma(s,q^2)/\mathrm{d}\,q^2$ para dados do espalhamento pp e $\bar{p}p$ utilizando o programa CERN-Minuit. Para este conjunto de dados, obtivemos bons resultados com 3 exponenciais nas equações (A.1) e (A.3) resultando em χ^2/gdl=2.83 para 1277 graus de liberdade. O valor dos parâmetros livres são mostrados na Tabela A.1 e os resultados dos ajustes junto com os dados experimentais, nas Figuras A.1 e A.2.

Como a parametrização tem um carácter preditivo apresentamos previsões para 3 casos de interesse no momento: 1. espalhamento pp em $\sqrt{s} = 200$ GeV, que está sendo investigado pela colaboração pp2pp no Brookhaven RHIC; 2. espalhamento $\bar{p}p$ em $\sqrt{s}$ = 1.96 TeV, que está sendo analisado pela colaboração DZero no Fermilab (RUN2); 3. espalhamento pp em $\sqrt{s} = 14$ TeV, planejado para ser investigado pela colaboração TOTEM no CERN LHC. Os resultados numéricos para σ_{tot} e ρ são mostrados na Figura A.2 e Tabela A.2 e o comportamento da seção de choque diferencial na Figura A.3.

Destacamos que a parametrização analítica introduzida para o espalhamento pp e $\bar{p}p$ é caracterizada por quatro aspectos importantes:

1. A parametrização é quase independente de modelo e tem dependência implícita na energia e no momento transferido baseada no comportamento dos dados experimentais (caráter empírico) está de acordo com teoremas pertinentes de altas energias e limites da teoria quântica de campos axiomática;

2. As partes real e imaginária são conectadas através de relações de dispersão derivativas para $q^2 \neq 0$;

3. A parametrização tem caráter preditivo em ambos energia e momento transferido;

4. Os resultados dos ajustes dos espalhamentos pp e $\bar{p}p$, acima de $\sqrt{s} = 20$ GeV, permitem boa descrição dos dados, mesmo em diferentes regiões do momento transferido.

Tabela A.1: Resultados do ajuste simultâneo de σ_{tot}, ρ and $\mathrm{d}\,\sigma/\mathrm{d}\,q^2$ para o espalhamento pp e $\bar{p}p$, com dados de seção de choque diferencial até $q^2_{\mathrm{max}} = 14$ GeV^2, para o qual $K = -0.1053 \pm 0.0048$. Todos os parâmetros estão em GeV^{-2} e $C_1 = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C}_3 - C_2 - C_3$.

	espalhamento pp		espalhamento $\bar{p}p$
A_1	109.70 ± 0.28	$\bar{A}_1$	112.28 ± 0.44
B_1	-16.529 ± 0.039	$\bar{B}_1$	-0.468 ± 0.074
C_1	Calculado através de (A.5)	$\bar{C}_1$	-0.1673 ± 0.0039
D_1	-8.91 ± 0.32	$\bar{D}_1$	3.170 ± 0.069
E_1	3.045 ± 0.050	$\bar{E}_1$	0.4860 ± 0.0082
A_2	-4.06 ± 0.23	$\bar{A}_2$	10.23 ± 0.15
B_2	11.387 ± 0.030	$\bar{B}_2$	-6.756 ± 0.027
C_2	0.0952 ± 0.0047	$\bar{C}_2$	0.9613 ± 0.0029
D_2	1.290 ± 0.014	$\bar{D}_2$	-1.476 ± 0.013
E_2	0.5097 ± 0.0023	$\bar{E}_2$	0.5645 ± 0.0012
A_3	1.0554 ± 0.0077	$\bar{A}_3$	-8.148 ± 0.031
B_3	-0.3607 ± 0.0013	$\bar{B}_3$	1.2313 ± 0.0040
C_3	0.02372 ± 0.00012	$\bar{C}_3$	-0.05572 ± 0.00025
D_3	0.6454 ± 0.0081	$\bar{D}_3$	0.9272 ± 0.0072
E_3	0.0176 ± 0.0011	$\bar{E}_3$	0.03859 ± 0.0011

Tabela A.2: Previsões para σ_{tot} e ρ para alguns experimentos

Acelerador	Processo	σ_{tot} (mb)	ρ
CERN LHC	$pp - \sqrt{s} = 14.0$ Tev	105.4	0.1365
Fermilab Tevatron	$\bar{p}p - \sqrt{s} = 1.96$ TeV	75.24	0.1343
Brookhaven - RHIC	$pp - \sqrt{s} = 200$ GeV	51.12	0.1065

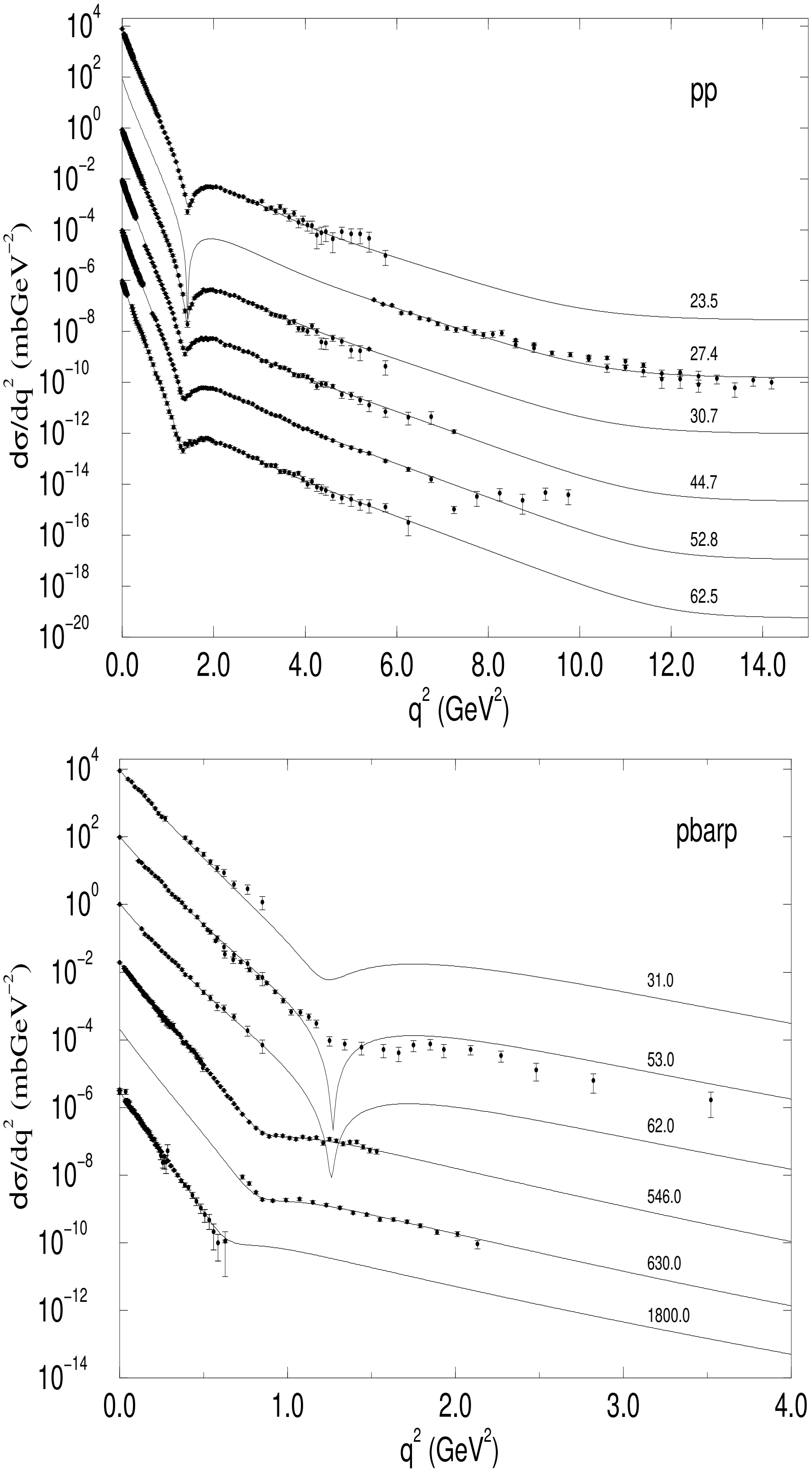

Figura A.1: Seção de choque diferencial dos ajustes de dados pp e $\bar{p}p$. Curvas e dados estão multimplicados por fatores de $10^{\pm 2}$.

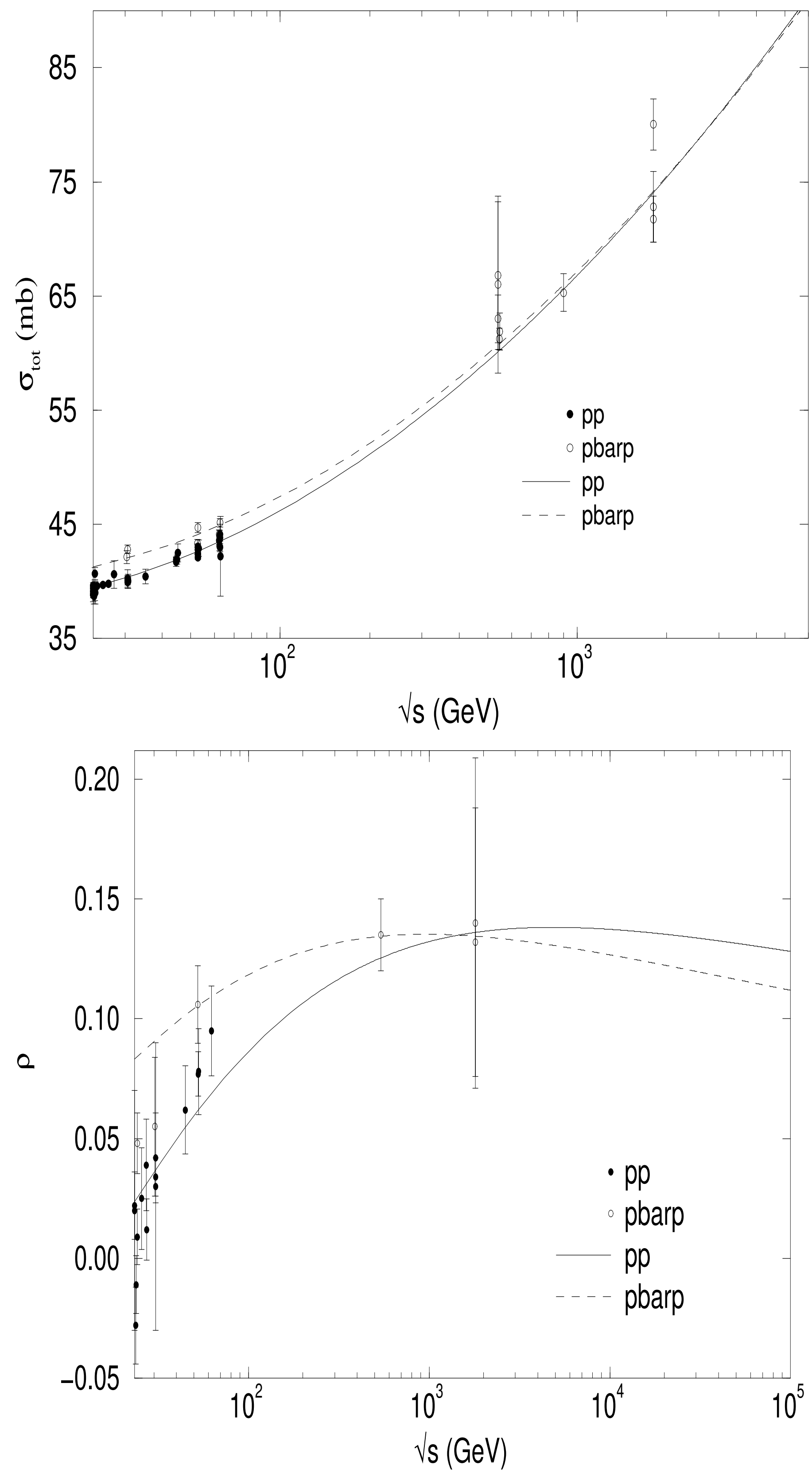

Figura A.2: Seção de choque total e parâmetro ρ obtidos de ajustes conjuntos pp e $\bar{p}p$.

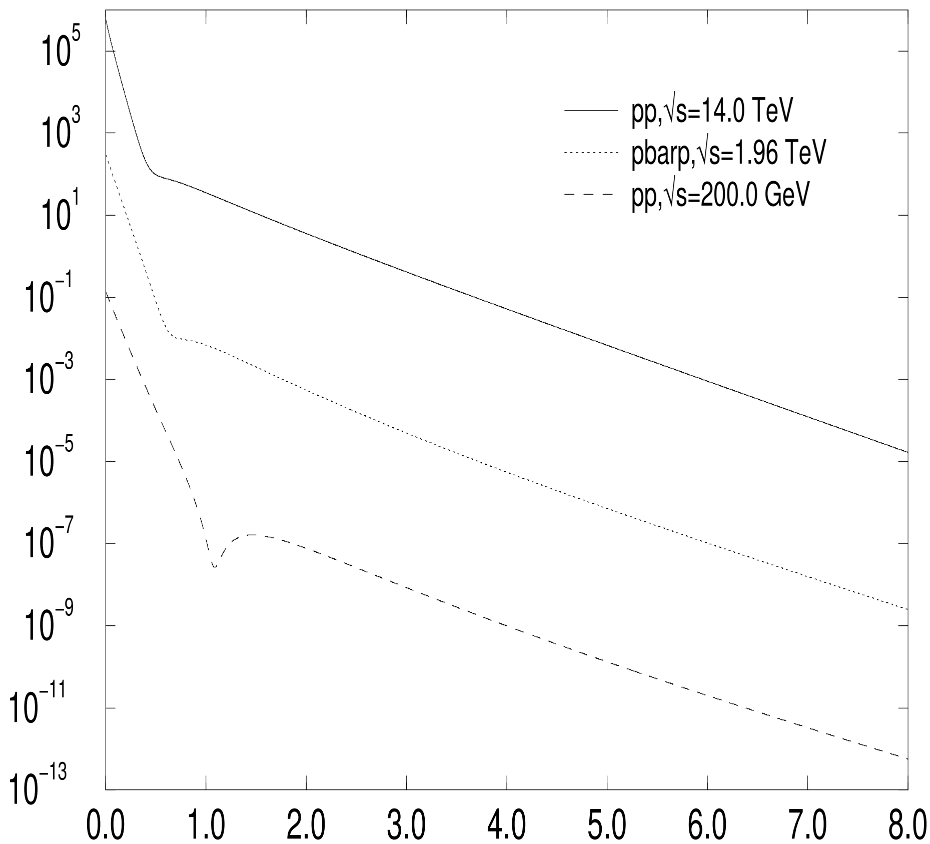

Figura A.3: Previsões para seção de choque diferencial nas energias do RHIC (tracejado), Tevatron (pontilhado) e LHC (sólido). A curva superior e a inferior foram multiplicadas por fatores 10^{+3} e 10^{-3}, respectivamente.

Apêndice B

Uma aproximação para relação de dispersão derivativa estendida

Antes de Ferreira e Sesma [21] introduzirem uma forma mais simples para as RDDE, havíamos investigado uma possível aproximação capaz de simplificar as expressões gerais das relações de dispersão estendidas (Capítulo 3) para uma amplitude par

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = K + E \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right)\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E} + \Delta^+(E,m), \tag{B.1}$$

onde Δ^+ é dado por

$$\begin{aligned}\Delta^+(E,m) &= -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\frac{\mathrm{Im}\, f_+(m)}{m} \\ &+ \frac{2E}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}\frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}}\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E},\end{aligned}$$

e para uma amplitude ímpar

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right)\mathrm{Im}\, f_-(E) + \Delta^-(E,m), \tag{B.2}$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta^-(E,m) &= -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\mathrm{Im}\, f_-(m) \\ &+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(k+1,(2p+1)\ln(E/m))}{(2p+1)^{k+2}k!}\frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}\,(\ln E)^{k+1}}\mathrm{Im}\, f_-(E).\end{aligned}$$

A relação entre f_+/f_- e $f_{pp}/f_{\bar{p}p}$ é dada por

$$f_{pp} = f_+ + f_- \qquad f_{\bar{p}p} = f_+ - f_-.$$

Como já foi discutido, as relações de dispersão estendidas levam ao mesmo resultado no cálculo do parâmetro ρ que as relações de dispersão integrais. Mas, por outro lado, introduzem dificuldades nos cálculos se comparadas às relações de dispersão derivativas padrões

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = K + E \tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right]\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E}, \tag{B.3}$$

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = \tan\left[\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right]\mathrm{Im}\, f_-(E). \tag{B.4}$$

porque possuem uma série dupla.

Uma solução aproximada para este problema é desprezar o termo que contém a série dupla no termo de correção (equações (B.1) e (B.2)), ou seja, calcular a parte real da amplitude utilizando somente

$$\mathrm{Re}\, f_+(E) = K + E \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right)\frac{\mathrm{Im}\, f_+(E)}{E} + \Delta^+(E,m), \tag{B.5}$$

onde, agora, Δ^+ é dado por

$$\Delta^+(E,m) \quad = \quad -\frac{E}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\frac{\mathrm{Im}\, f_+(m)}{m}$$

e

$$\mathrm{Re}\, f_-(E) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln E}\right)\mathrm{Im}\, f_-(E) + \Delta^-(E,m), \tag{B.6}$$

com

$$\Delta^-(E,m) \quad = \quad -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{m-E}{m+E}\right|\mathrm{Im}\, f_-(m).$$

Os resultados obtidos utilizando a parametrização para a amplitude de espalhamento discutidos no Capítulo 3 são mostrados na Figura B.1.

É possível concluir que as expressões (B.5) e (B.6), apesar de não levarem exatamente aos mesmos resultados que as relações de dispersão estendidas (B.1) e (B.2), são relações úteis pois não introduzem complicações nos cálculos e além disso constituem uma aproximação para as relações de dispersão integrais melhor que as relações de dispersão padrões e que a representação de Cudell-Martynov-Selyugin.

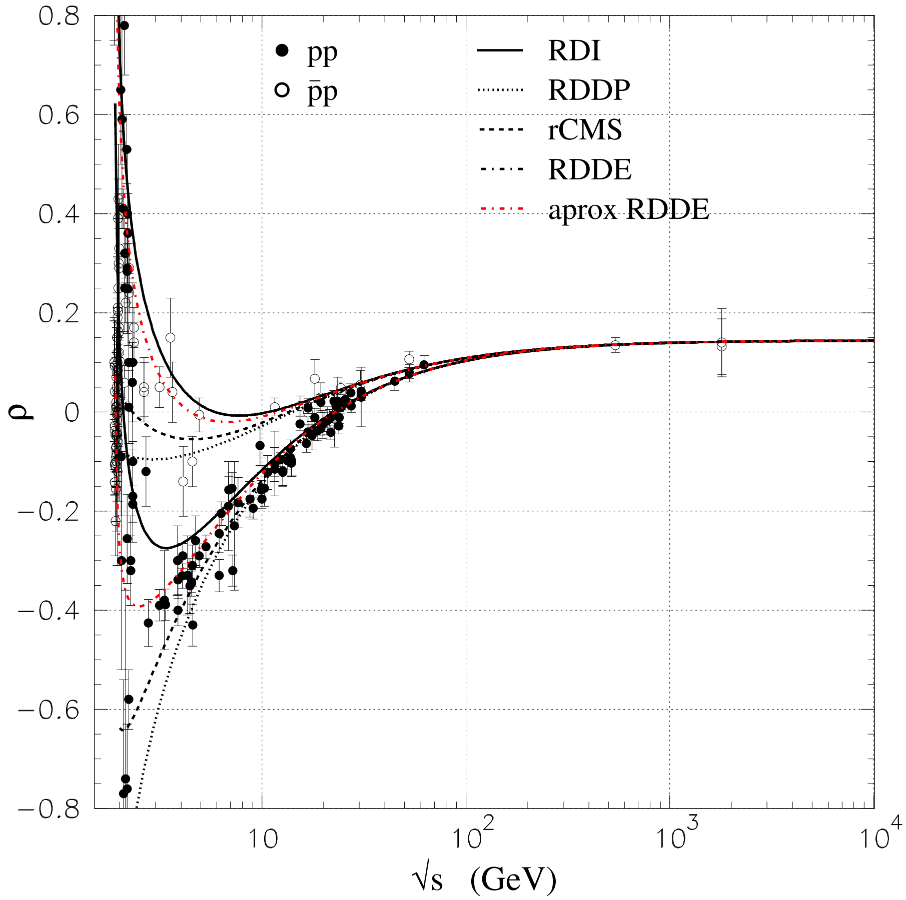

Figura B.1: Previsão para ρ, pp e $\bar{p}p$, calculada com as 5 expressões para a relações de dispersão.

Apêndice C

Relações de dispersão derivativas e a prescrição $s \to -\mathrm{i}s$

Como discutido no Capítulo 3, relações de dispersão derivativas têm sido utilizadas no estudo das quantidades que caracterizam o espalhamento elástico frontal hádron-hádron em altas energias (seção de choque total e parâmetro ρ). Neste contexto, as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento são conectadas por operadores derivativos em termos do logaritmo do quadrado da energia no centro de massa, s. Por outro lado, alguns autores, em particular, no capítulo sobre o Odderon, utilizam uma prescrição "equivalente", associada à substituição $s \to -\mathrm{i}s$, de forma a gerar as partes real e imaginária da função envolvida. Neste Apêndice, revisamos as conexões entre as duas abordagens. Damos exemplos dessa equivalência por meio de classes de funções de interesse físico [150]

C.1 Prescrição $-\mathrm{i}s$

A prescrição $-\mathrm{i}s$, é uma forma de se obter expressões para as partes real e imaginária de $A(s)$, partindo-se do princípio de reflexão de Schwarz e da expansão em série de Taylor desta função. As Relações de Dispersão Derivativas Padrões, em *primeira ordem*, fornecem o mesmo resultado [151] em alguns casos de interesse físico.

Consideraremos aqui um caso simples, onde a amplitude par comporta-se assintoticamente ($s \to \infty$) como [151]

$$A_+ = Cs(\ln s)^\alpha.$$

No limite de altas energias, o princípio de reflexão de Schwarz pode ser expresso por

$$A_\pm(-s) = \pm(A(s))^*. \tag{C.1}$$

Lembrando que $s \to -s$ implica que $\ln s \to \ln s + \mathrm{i}\pi$ temos

$$A_+(-s) = -Cs(\ln s + \mathrm{i}\pi)^\alpha. \tag{C.2}$$

Por outro lado

$$A_+^*(s) = C^* s(\ln s)^\alpha. \tag{C.3}$$

Utilizando a relação (C.1) podemos concluir, comparando os termos predominantes nas duas equações acima, que $C^* = -C$, ou seja, C é imaginário puro. Então podemos escrever

$$A_+ = \mathrm{i}|C|s(\ln s)^\alpha.$$

Entretanto a amplitude acima não satisfaz (C.1), como pode ser visto em (C.2) e (C.3). Porém, podemos considerar

$$A = \mathrm{i}|C|s(\ln s - \mathrm{i}\pi/2)^\alpha \tag{C.4}$$

que satisfaz (C.1):

$$\begin{aligned} A(-s) &= -\mathrm{i}|C|s(\ln s + \mathrm{i}\pi - \mathrm{i}\pi/2)^\alpha = -\mathrm{i}|C|s(\ln s + \mathrm{i}\pi/2)^\alpha \\ A^*(s) &= -\mathrm{i}|C|s(\ln s + \mathrm{i}\pi/2)^\alpha. \end{aligned}$$

Expandindo (C.4), encontramos

$$A(s) \simeq \mathrm{i}|C|s\left[(\ln s)^\alpha - \mathrm{i}\frac{\pi\alpha}{2}(\ln s)^{\alpha-1}\right]$$

que implica em

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, A &\simeq |C|s(\ln s)^\alpha \\ \mathrm{Re}\, A &\simeq \frac{\pi\alpha}{2}|C|(\ln s)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Daí

$$\rho = \frac{\mathrm{Re}\, A}{\mathrm{Im}\, A} = \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\ln s},$$

que é o mesmo resultado obtido quando usamos Relação de Dispersão Derivativa Padrão (RDDP) em primeira ordem:

$$\mathrm{Re}\,\frac{A_+(s)}{s} = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\ln s}\frac{\mathrm{Im}\, A_+(s)}{s} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\ln s}.$$

Agora vamos considerar uma amplitude mais geral,

$$A_+ = \mathrm{i}|C|sf(\ln s), \tag{C.5}$$

onde consideramos que f é uma função suave de $\ln s$. Nesse caso, podemos expressar

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} f(x).$$

Tomando $x = \ln s$ e $\Delta x = -\mathrm{i}\pi/2$ na equação acima e substituindo (C.5)

$$A_+ = \mathrm{i}|C|s\left(f(\ln s) - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\ln s} f(\ln s)\right),$$

e daí

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, A &\simeq |C|s\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\ln s} f(\ln s) \\ \mathrm{Im}\, A &\simeq |C|s f(\ln s) \end{aligned}$$

Este resultado também é equivalente ao obtido através de Relação de Dispersão Derivativa Padrão em primeira ordem.

C.2 Exemplos de utilização das RDDP e da Prescrição $-\mathrm{i}s$

Mostramos nesta seção alguns exemplos particulares de interesse físico.

EXEMPLO 1: $f(s) = \mathrm{i} \ln^n s$.

– Prescrição

$$f(se^{-\mathrm{i}\pi/2}) = \mathrm{i}[\ln(se^{-\mathrm{i}\pi/2})]^n.$$

Vamos analisar a expressão acima para os casos particulares $n = 1, 2$. Para $n = 1$ temos

$$f(se^{-\mathrm{i}\pi/2}) = \mathrm{i}\ln(se^{-\mathrm{i}\pi/2}) = \left(\ln s - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right).$$

Portanto

$$\rho(s) = \frac{\pi}{2\ln s}.$$

Para $n = 2$ temos no limite assintótico ($s \to \infty$) que a parte imaginária é dominada pelo termo $\ln^2 s$ e assim

$$f(se^{-\mathrm{i}\pi/2}) \simeq \mathrm{i}(\ln^2 s - \mathrm{i}\pi \ln s) = \pi \ln s + \mathrm{i}\ln^2 s,$$

$$\rho(s) = \frac{\pi}{\ln s}.$$

– RDD

$$\mathrm{Re}\, f(s) = \frac{\pi}{2}\frac{d}{d\ln s}\,\mathrm{Im}\, f(s) = \frac{\pi}{2}\frac{d}{d\ln s}\ln^n s.$$

$$\mathrm{Re}\, f(s) = \frac{n\pi}{2}\ln^{n-1} s.$$

Para os casos $n = 1, 2$ temos

$$f(s) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ln s \qquad \Rightarrow \qquad \rho(s) = \frac{\pi}{2\ln s}. \tag{C.6}$$

$$f(s) = \pi\ln s + \mathrm{i}\ln^2 s \qquad \Rightarrow \qquad \rho(s) = \frac{\pi}{\ln s}. \tag{C.7}$$

EXEMPLO 2: $f(s) = \mathrm{i}s^\eta$, $|\eta| < 1$.

– Prescrição

$$f(se^{-\mathrm{i}\pi/2}) = \mathrm{i}(se^{-\mathrm{i}\pi/2})^\eta = \mathrm{i}s^n e^{-\mathrm{i}\eta\pi/2}.$$

Portanto

$$\rho(s) = \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \approx \frac{\pi\eta}{2}.$$

– RDD

$$\mathrm{Re}\, f(s) = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ \ln s}s^\eta = \frac{\eta\pi}{2}s^\eta.$$

EXEMPLO 3: $f(s) = \mathrm{i}s^\eta \ln^n s$, $|\eta| < 1$.

– Prescrição

$$f(se^{-\mathrm{i}\pi/2}) = \mathrm{i}(se^{-\mathrm{i}\pi/2})^\eta[\ln(e^{-\mathrm{i}\pi/2})]^n = \mathrm{i}s^\eta e^{-\mathrm{i}n\pi/2}\left(\ln s - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)^n.$$

Tomando como exemplo os casos particulares onde $n = 1, 2$ temos (respectivamente)

$$\rho(s) = \frac{\ln s \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}{\ln s - \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)} \approx \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \approx \frac{\pi\eta}{2}$$

$$\rho(s) = \frac{\left(\ln^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \pi\ln s}{\left(\ln^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) - \pi\ln s\tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)} \approx \tan\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \approx \frac{\pi\eta}{2}$$

– **RDD**

$$\operatorname{Re} f(s) = \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \operatorname{Im} f(s) = \frac{\pi}{2} (\eta s^{\eta} \ln^{n} s + n s^{\eta} \ln^{n-1} s).$$

Para os casos $n = 1, 2$ temos

$$\rho(s) = \frac{\pi}{2} \frac{\eta \ln s + 1}{\ln s} \approx \frac{\pi\eta}{2}; \qquad \rho(s) = \frac{\pi}{2} \frac{\eta \ln^{2} s + 2 \ln s}{\ln^{2} s} \approx \frac{\pi\eta}{2}.$$

C.3 Resumo e conclusões

Discutimos e comparamos as RDDP para amplitudes pares em primeira ordem com a prescrição $s \to -is$ também em primeira ordem. Para se obter as RDDP parte-se das relações de dispersão integrais, que estão associadas aos princípios de analiticidade e cruzamento. Para se passar das relações integrais para as derivativas utilizamos a aproximação de altas energias no extremo inferior da integral $s_0 \to 0$ e a analiticidade da amplitude de espalhamento, ou seja, que A/s pode ser expressa numa série de potencias de $\ln s$. No caso da aplicação da prescrição também utilizamos a analiticidade de A/s, cruzamento e o limite de altas energias.

Através de exemplos particulares, envolvendo funções potência e logarítmica, mostramos que na *região assintótica* ($s \to \infty$) a prescrição $s \to -is$ produz resultados equivalentes aos fornecidos pelas relações derivativas padrões em primeira ordem. Os exemplos são importantes no estudo de processos hadrônicos suaves (soft) a altas energias, pois são típicos de contribuições de Pomerons tipo pólo simples, duplo ou triplo à amplitude de espalhamento.

Apêndice D

Transformada de Mellin

Neste apêndice resumimos as fórmulas básicas associadas à transformada de Mellin [5, 152], que foram citadas no capítulo 5.

A transformada de Mellin $\tilde{f}(\omega)$ de uma função f(s) é definida como

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^\infty \mathrm{d}\left(\frac{s}{s_0}\right)\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\omega-1} f(s), \tag{D.1}$$

onde s_0 é um fator introduzido por razões de dimensão.

A transformada de Mellin inversa é

$$f(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}\,\omega \left(\frac{s}{s_0}\right)^{-\omega} \tilde{f}(\omega). \tag{D.2}$$

Onde as singuralidades de $\tilde{f}(\omega)$ estão localizadas à esquerda do contorno de integração no plano complexo ω.

A transformada $\tilde{f}(w)$ existe se a integral

$$\int_0^\infty |f(s)|s^{k-1}$$

é limitada para algum $k > 0$, neste caso a inversa $f(s)$ existe com $c > k$.

Um exemplo de interesse nesta tese é

$$f(s) = s^\alpha \ln^p s, \qquad \tilde{f}(\omega) = s_0^\alpha \frac{\Gamma(p+1)}{(\omega-\alpha)^{p+1}}. \tag{D.3}$$

Apêndice E

Trabalhos publicados resultantes desta tese

- **Periódicos**

1. R.F. Ávila and M.J. Menon, "Critical analysis of derivative dispersion relations at high energies", Nuclear Physics A **744**, 249 (2004); hep-ph/0309028.

2. R.F. Ávila, S.D. Campos, M.J. Menon and J. Montanha, "Phenomenological analysis connecting proton-proton and antiproton-proton elastic scattering", Eur. Phys. J. C **47**; 171-186,2006, hep-ph/0603035 .

3. R.F. Ávila and M.J. Menon, "Derivative dispersion relations above the physical threshold", Braz. J. Phys. **37**, 358 (2007).

4. R.F. Ávila and M.J. Menon, "From Integral to Derivative Dispersion Relations", Braz. J. Phys. **37**, 661 (2007).

5. R.F. Ávila, S.D. Campos, M.J. Menon and J. Montanha, "On model-independent analyses of elastic hadron scattering", Braz. J. Phys. **37**, 675 (2007).

6. R.F. Ávila, P. Gauron and B. Nicolescu, "How can the Odderon be detected at RHIC and LHC", Eur. Phys. J. C **49**, 581 (2007); hep-ph/0607089.

7. R.F. Ávila and M.J. Menon, "Differential Operators for Scattering Amplitudes", Int. J. Mod. Phys. E **16**, 2910 (2007).

8. G.L.P. Silva, M.J. Menon, and R.F. Ávila, "Proton Profile Function at 52.8 GeV", Int. J. Mod. Phys. E **16**, 2923 (2007).

9. R.F. Ávila and M.J. Menon, “Eikonal Zeros in Momentun Transfer Space: An Empirical Analysis”, Eur. Phys. J. C **54**, 555 (2008).

• **Atas**

– **Internacionais**

1. R.F. Ávila, S.D. Campos, M.J. Menon and J. Montanha, “Analytical fits to hadron-hadron differential cross-section data at the diffraction peak”, in: M.E. Bracco, M. Chiapparini, E. Ferreira and T. Kodama, IX Hadron Physics and VII Relativistic Aspects of Nuclear Physics: A Joint Meeting on QCD and QGP, AIP Conference Proceedings 739, New York, 2004, pp. 529-531.

2. R.F. Ávila and M.J. Menon, “Derivative Dispersion Relations”, in: Forth International Winter Conference on Mathematical Methods in Physics, 2004, http://pos.sissa.it/archive/conferences/013/043/wc04-avila.pdf, hep-ph/0411401.

3. R.F. Ávila and M.J. Menon, “Extended Derivative Dispersion Relations”, in “Sense of Beauty in Physics – A volume in honour of Adriano Di Giacomo”, edited by M. D'Elia, K. Konishi, E. Meggiolaro and P. Rossi (Edizioni Plus, Pisa University Press, Pisa, 2006), pp. 153-158.

– **Nacionais**

1. R.F. Ávila, S.D. Campos, J. Montanha Neto and M. J. Menon, “ Derivative Dispersion Relations and Hadron-Hadron Differential Cross Sections”in: XXV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2004, http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/enfpc/xxv/sys/resumos/T0031-1.pdf

2. R.F. Ávila, S.D. Campos e M.J. Menon, “Relações de Dispersão Derivativas e a Prescrição $s \to -is$, in: XXV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2004, http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/enfpc/xxv/sys/resumos/T0128-1.pdf

3. R.F. Ávila, A.F. Martini and M.J. Menon, “Eikonal Zeros in the Momentum-Transfer Space”, Relatório da 17ª Reunião de Trabalho Sobre Interações Hadrônicas”, editado por F.S. Navarra, F.O. Durães and Y. Hama p. 52 (Gráfica do Instituto de Física, São Paulo, 2005)

4. R.F. Ávila, S.D. Campos, M.J. Menon and J. Montanha "Energy-dependent fits connecting pp and $\bar{p}p$ differential cross section data", Relatório da 17ª Reunião de Trabalho Sobre Interações Hadrônicas", editado por F.S. Navarra, F.O. Durães e Y. Hama p. 57 (Gráfica do Instituto de Física, São Paulo, 2005)

5. R.F. Ávila and M.J. Menon, "Forward elastic scattering above the physical threshold", apresentado no XXVII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos (2006), http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/enfpc/xxvii/sys/resumos/T0269-1.pdf.

6. R.F. Ávila, E. Ferreira, M.J. Menon and J. Sesma, "Local Forms for Integral Dispersion Relations of Scattering Theory", Relatório da 19ª Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas, 19 e 20 de novembro, 2007, CBPF, RJ, editado por F.S. Navarra, F.O. Durães e Y. Hama (Gráfica do IFUSP, São Paulo, 2008) p 87-91.

Bibliografia

[1] D.J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (John Wiley, New York, 1987).

[2] F. Halzen e A.D. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, (John Wiley, New York, 1984).

[3] W-M. Yao *et al.*, J. Phys. G **33**, 1 (2006).

[4] P.D.B. Collins e A.D. Martin, *Hadron Interactions* (Adam Hilger Ltd, Bristol, 1984).

[5] V. Barone e E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction* (Spring-Verlag, Berlin, 2002).

[6] G. Matthiae, Rep. Prog. Phys. **57**, 743 (1994).

[7] pp2pp Collaboration, http://www.rhic.bnl.gov/pp2pp/

[8] TOTEM Collaboration, http://totem.web.cern.ch/Totem/

[9] R.F. Ávila e M.J. Menon, Nucl. Phys. A **744**, 249 (2004).

[10] R.F. Ávila e M.J. Menon, Braz. J. Phys. **37**, 358 (2007).

[11] M.L. Goldberger, Y. Nambu e R. Oehme, Ann. Phys. **2**, 226 (1957); P. Söding, Phys. Lett. **8**, 285 (1964).

[12] A. Martin, Nuovo Cimento **42**, 930 (1966); **44**, 1219 (1966); H. Epstein, V. Glaser e A. Martin, Comm. Math. Phys. **13**, 257 (1969).

[13] N.V. Gribov e A.A. Migdal, Yad. Fiz. **8**, 1002 (1968) [Sov. J. Nucl. Phys. **8**, 583 (1969)].

[14] J.B. Bronzan, in: Argonne Symposium on the Pomeron, ANL/HEP-7327 (1973) p. 33.

[15] J.D. Jackson, in: 1973, Scottish Summer School. LBL-2079 (1973) p. 39.

[16] J.B. Bronzan, G.L. Kane e U.P. Sukhatme, Phys. Lett. B **49**, 272 (1974).

[17] K. Kang e B. Nicolescu, Phys. Rev. D **11**, 2461 (1975).

[18] P. Kolář e J. Fischer, J. Math. Phys. **25**, 2538 (1984).

[19] J.R. Cudell, E. Martynov e O. Selyugin, hep-ph/0307254; E. Martynov J.R. Cudell, O. Selyugin, Eur. Phys. J. C **33**, 533 (2004); hep-ph/0311019.

[20] R.F. Ávila e M.J. Menon, "Extended Derivative Dispersion Relations", in "Sense of Beauty in Physics – A volume in honour of Adriano Di Giacomo", editado por M. D'Elia, K. Konishi, E. Meggiolaro and P. Rossi (Edizioni Plus, Pisa University Press, Pisa, 2006), pp. 153-158.

[21] E. Ferreira e J. Sesma, J. Math. Phys. **49**, 033504 (2008); hep-ph/0707.4266.

[22] R.F. Avila e M.J. Menon, Eur. Phys. J. C **54**, 555 (2008); hep-ph/0712.3398.

[23] P.A.S. Carvalho, A.F. Martini e M.J. Menon, Eur. Phys. J. C **39**, 359 (2005); hep-ph/0312243.

[24] P.A.S. Carvalho e M.J. Menon, Phys. Rev. D **56**. 7321 (1997)

[25] L. Lukaszuk e B. Nicolescu, Nuovo Cim. Lett. **8**, 405 (1973).

[26] C. Ewerz, hep-ph/0306137.

[27] C. Ewerz, hep-ph/0511196.

[28] A. Breakstone et al., Phys. Rev. Lett. **54** 2180 (1985).

[29] S. Erhan et al., Phys. Lett. B **152**, 131 (1985).

[30] Proceedings of Riken BNL Research Center Workshop "Odderon Searches at RHIC", BNL-75092-2005, editado por W. Guryn, Y. Kovchegov, L. Trueman,W. Vogelsang.

[31] P. Gauron, B. Nicolescu e E. Leader, Nucl. Phys B **299**, 640 (1988).

[32] P. Gauron, B. Nicolescu e E. Leader, Phys. Letter B **238**, 406 (1990).

[33] R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics* (Benjamin, New York,1963).

[34] R.F. Ávila, Dissertação de Mestrado "Princípios, Teoremas e Limites Assintóticos no Estudo de Interações Hadrônicas a Altas Energias", IMECC, UNICAMP (2003).

[35] S. Mandelstam, Phys. Rev. **112**, 1344 (1958).

[36] M.M. Block e R.N. Cahn, Rev. Mod. Phys., **57**, 563 (1985).

[37] B.E.Y. Svensson, Proceedings of 1967 CERN School of Physics Volume II - High Energy Phenomenology am Regge Polles, Rättvik, May 21 - June 3, (1967).

[38] R.N. Cahn, Z. Phys C **15**, 253 (1982).

[39] H. Epstein, V. Glaser e A. Martin, Commun. Math. Phys. **13**, 257 (1969).

[40] M. Froissart, Phys. Rev. **123**, 1053 (1961).

[41] A. Martin, Il Nuovo Cimento A **42**, 930 (1966).

[42] L. Lukaszuk e A. Martin, Il Nuovo Cimento A **47** 265 (1967).

[43] G. Grumberg e T.N. Truong, Phys. Lett. **31**, 63 (1973).

[44] E811 Collaboration, C. Avila et al., Phys. Lett. B **537**, 42 (2002).

[45] D. Bernard et al., Phys. Lett. B **171**, 142 (1986).

[46] N.A. Amos et al., Phys. Lett. B **247**, 127 (1990).

[47] C. Augier et al., Phys. Lett. B **316**, 448 (1993).

[48] R.J. Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles* (Cambridge University, Cambridge, 1967).

[49] A. Donnachie, H.G. Dosch, P.V. Landshoff e O. Nachtamnn, *Pomeron Physics and QCD*, (Universit Press, Cambridge, 2002).

[50] R.V. Churchill, *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, (McGraw-Hill, São Paulo, 1975).

[51] M.J. Menon, A.E. Motter e B.M. Pimentel, Phys. Lett. B **451**, 207 (1999).

[52] G.K. Eichmann e J. Dronkers, Phys. Lett. B **52**, 428 (1974).

[53] J. Heidrich e E. Kazes, Lett. Nuovo Cimento **12**, 365 (1975).

[54] G. Höhler, H.P. Jakob e F. Kaiser, Phys. Lett. B **58**, 348 (1975).

[55] A. Bujak e O. Dumbrajs, J. Phys. G: Nucl. Phys. **2**, L129 (1976).

[56] I. Vrkoč, Czech. Math. J. **35**, 59 (1985); M.J. Menon, A.E. Motter e B.M. Pimentel, Phys. Lett. B **451** 207 (1999); Yu. S. Vernov e M.N. Mnatsakanova, Physics of Particles and Nuclei **32**, 589 (2001).

[57] J. Fischer e P. Kolář, Phys. Lett. B **64**, 45 (1976); Phys. Rev. D **17**, 2168 (1978); J. Fischer e P. Kolář, Czech. J. Phys. B **37**, 297 (1987).

[58] P. Kolář e J. Fischer, in *Proc. Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering, Prague, 2002*, editado por V. Kundrat, P. Zavada (IOP, Prague, 2002), p. 305; hep-th 0110233.

[59] R.J.M. Covolan, J. Montanha e K. Goulianos, Phys. Lett. B **389**, 176 (1996).

[60] J.R. Cudell, K. Kang e S.K. Kim, Phys. Lett. B **395**, 311 (1997).

[61] S. Eidelman et al., Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).

[62] F. James, MINUIT - Function Minimization and Error Analysis (CERN, 2002).

[63] R.J. Glauber, in Lectures in Theoretical Physics, editado por W.E. Brittin et al. (Interscience, New York, 1959) Vol. I, p 315; W. Czyz e L.C. Maximon, Ann. Phys. (New York) **52**, 59; V. Franco e G.K. Varma, Phys. Rev. C **18**, 349 (1978).

[64] M.M. Islam, Nucl. Phys. B. **104**, 511 (1976).

[65] J. R. Cudell, E. Martynov, O. Selyugin e A. Lengyel, Phys. Lett. B **587**, 78 (2004).

[66] J.R. Cudell, A. Lengyel e E. Martynov, Phys. Rev. D **73**, 034008 (2006).

[67] U. Amaldi e K. R. Schubert, Nucl. Phys. B **166**, 301 (1980).

[68] K.R. Schubert, Landolt-Börnstein, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Vol. I/9a (Springer-Verlag, Berlin, 1979).

[69] A. S. Carrol et al. Phys. Lett. B **80**, 423 (1979).

[70] L. A. Fajardo et al., Phys. Rev. D **24**, 46 (1981).

[71] U. Amaldi et al., Phys. Lett. B **43**, 231 (1973).

[72] U. Amaldi et al., Phys. Lett. B **66**, 390 (1977).

[73] C.W. Akerlof et al., Phys. Rev. D **14**, 2864 (1976).

[74] W. Faissler et al. Phys. Rev. D **23**, 33 (1981).

[75] G. Fidecaro et al., Phys. Lett. B **105**, 309 (1981).

[76] R. Rubinstein et al., Phys. Rev. D **30**, 1413 (1984).

[77] E. Nagy et al. Nucl. Phys. B **150**, 221 (1979).

[78] A. Donnachie e P.V. Landshoff, Z. Phys. C **2**, 55 (1979); Phys. Lett. B **123**, 345 (1983); Phys. Lett. B **387**, 637 (1996).

[79] R. Castaldi e G. Sanguinetti, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **35**, 351 (1985).

[80] M. Kawasaki, T. Maehara e M. Yonezawa, Phys. Rev. D **67**, 014013 (2003).

[81] T.T. Wu e C.N. Yang, Phys. Rev. B **137**, 708 (1965).

[82] N. Byers e C.N. Yang, Phys. Rev. **142**, 976 (1966).

[83] L. Durand e R. Lipes, Phys. Rev. Lett. **20**, 637 (1968).

[84] T.T. Chou e C.N. Yang, em *High Energy Physics and Nuclear Structure*, editado por G. Alexander (North-Holland, Amsterdam, 1967) p. 348; Phys. Rev. **170**, 1951 (1968); Phys. Rev. Lett. **20**, 1213 (1968); Phys. Rev. **175**, 1832 (1968).

[85] T.T. Chou e C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. B **244** 113 (1990).

[86] M.M. Block, E.M. Gregores, F. Halzen e G. Pancheri, Phys. Rev. D **58**, 017503 (1998); **60**, 054024 (1999).

[87] E.G.S. Luna, A.F. Martini, M.J. Menon, A. Mihara e A.A. Natale, Phys. Rev. D **72**, 034019 (2005).

[88] R.J. Glauber e J. Velasco, Phys. Lett. B **147**, 380 (1984).

[89] R.J. Glauber e J. Velasco, em Proceedings of the Second International Conference on Elastic and Diffractive Scattering, editado por K. Goulianos (Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette Cedex, France, 1988) p. 219.

[90] C. Bourrely, J. Soffer e T.T. Wu, Phys. Rev. D **19**, 3249 (1979); Nucl. Phys. **B247**, 15 (1984); Phys. Rev. Lett. **54**, 757 (1985).

[91] C. Bourrely, J. Soffer e T. T. Wu, Eur. Phys. J. C **28**, 97 (2003), hep-ph/0210264.

[92] M.J. Menon, Tese de Doutorado, Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, 1988.

[93] J. Bellandi, R.J.M. Covolan, M.J. Menon e B.M. Pimentel, Hadronic J. **11**, 17 (1988).

[94] M.J. Menon, Phys. Rev. D **48**, 2007 (1993); A.F. Martini, M.J. Menon e D.S. Thober, Phys. Rev. D **54**, 2385 (1996).

[95] M.J. Menon, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **25**, 94 (1992).

[96] M.J. Menon, Canadian J. Phys. **74**, 594 (1996).

[97] A.F. Martini e M.J. Menon, Phys. Rev. D **56**, 4338 (1997).

[98] R.J.M. Covolan, L.L. Jenkovszky e E. Predazzi, Z. Phys. C, **51**, 459 (1991); R.J.M. Covolan, P. Desgrolard, M. Giffon, L.L. Jenkovszky e E. Predazzi, Z. Phys. C **58**, 109 (1993).

[99] A.F. Martini, M.J. Menon e J. Montanha, em IX Hadron Physics and VII Relativistic Aspects of Nuclear Physics, editado por M.E. Bracco et al., AIP Conference Proceedings V. 739 (American Institute of Physics, New York, 2004) p. 578.

[100] C.F. Perdrisat, V. Punjabi e M. Vanderhaeghen, hep-ph/0612014.

[101] C.E. Carlson e M. Vanderhaeghen, hep-ph/0701272.

[102] M.N. Rosenbluth, Phys. Rev. **79**, 615 (1950).

[103] R.C. Walker et al. Phys. Rev. D **49**, 5671 (1994); L. Andivahis et al., Phys. Rev. D **50**, 5491 (1994).

[104] J. Arrington, Phys. Rev. C **68**, 034325 (2003); M.E. Christy et al., Phys. Rev. C **70**, 015206 (2004); I.A. Qattan et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 142301 (2005), nucl-ex/0410010.

[105] M. K. Jones et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 0398 (2000); O. Gayou et al. Phys. Rev. C **64**, 138202 (2001).

[106] O. Gayou et al. Phys. Rev. Lett **88**, 092301 (2002).

[107] V. Punjabi et al., Phys. Rev. C **71**, 055202 (2005) [Erratum-ibid C **71**, 069902 (2005)].

[108] A.Z. Dubničková e S. Dubnička, 0708.0162 [hep-ph].

[109] J. Arrington, W. Melnitchouk e J.A. Tjon, 0707.1861 [nucl-ex].

[110] A. Martin, Phys. Lett. B **404**, 137 (1997).

[111] G.L.P. Silva, M.J. Menon e R.F. Ávila, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2923 (2007).

[112] R. Avila, P. Gauron e B. Nicolescu, Eur. Phys. J. C **49**, 581 (2007) [arXiv:hep-ph/0607089].

[113] J. Bartels, Nucl. Phys. **B175**, 365 (1980).

[114] T. Jaroszewicz, Acta Phys. Polon. **B11**, 965 (1980).

[115] J. Kwiecinski e M. Praszalowicz, Phys. Lett. **B94**, 413 (1980).

[116] J. Bartels, L. N. Lipatov e G. P. Vacca, Phys. Lett. **B477**, 178 (2000), hep-ph/9912423.

[117] Y. Hatta, E. Iancu, K. Itakura e L. McLerran, Nucl. Phys. **A760**, 172 (2005), hep-ph/0501171.

[118] S. Jeon e R. Venugopalan, Phys. Rev. **D71**, 125003 (2005), hep-ph/0503219.

[119] Y. V. Kovchegov, L. Szymanowski e S. Wallon, Phys. Lett. **B586**, 267 (2004), hep-ph/0309281.

[120] B. Nicolescu, Nucl. Phys B (Proc. Suppl) **25**, 142 (1992).

[121] A. Breakstone *et al.*, Phys. Rev. Lett. **54**, 2180 (1985).

[122] S. Erhan *et al.*, Phys. Lett. **B152**, 131 (1985).

[123] D. Hill *et al.*, Phys. Rev. Lett. **30**, 239 (1973).

[124] P. Bonamy *et al.*, Nucl. Phys. **B52**, 392 (1973).

[125] V. D. Apokin *et al.*, Zeit. Phys. **C15**, 293 (1982).

[126] P. Gauron, B. Nicolescu e O. V. Selyugin, Phys. Lett. **B397**, 305 (1997).

[127] B. Nicolescu, 'The present Situation of the Odderon Intercept - Experiment, Theory and Phenomenology', in Proceedings of RIKEN BNL Research Center Workshop 'Odderon Searches at RHIC', BNL-75092-2005 Report, editado por Wlodek Guryn, Yuri Kovchegov, Werner Vogelsang e Larry Trueman, p.1-6.

[128] W. Heisenberg, Z. Phys. **133**, 65 (1952).

[129] M. Froissart, Phys. Rev. **123**, 1053 (1961).

[130] A. Martin, Nuovo Cim. A **42**, 930 (1965).

[131] S. B. Giddings, Phys. Rev. **D67**, 126001 (2003), hep-th/0203004.

[132] E. Ferreiro, E. Iancu, K. Itakura e L. McLerran, Nucl. Phys. **A710**, 373 (2002), hep-ph/0206241.

[133] J. R. Cudell *et al.*, Phys. Rev. **D65**, 074024 (2002), hep-ph/0107219.

[134] P. Gauron, B. Nicolescu e E. Leader, Nucl. Phys. **B299**, 640 (1988).

[135] P. Gauron, B. Nicolescu e E. Leader, Phys. Lett. **B238**, 406 (1990).

[136] S. Donnachie, G. Dosch, P. Landshoff e O. Nachtmann, *Pomeron Physics and QCD* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).

[137] G. Auberson, T. Kinoshita e A. Martin, Phys. Rev. **D3**, 3185 (1971).

[138] H. Cheng e T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **24**, 1456 (1970).

[139] H. Cheng, J. K. Walker e T. T. Wu, Phys. Lett. **B44**, 97 (1973).

[140] T. T. Chou e C. N. Yang, Phys. Rev. **D19**, 3268 (1979).

[141] T. T. Chou e C. N. Yang, Phys. Lett. **B128**, 457 (1983).

[142] A. Donnachie e P. V. Landshoff, Nucl. Phys. B **244**, 322 (1984).

[143] M. M. Islam, T. Fearnley e J. P. Guillaud, Nuovo Cim. A **81**, 737 (1984).

[144] M. M. Islam, V. Innocente, T. Fearnley e G. Sanguinetti, Europhys. Lett. **4**, 189 (1987).

[145] M. M. Islam, R. J. Luddy e A. V. Prokudin, Mod. Phys. Lett. A **18**, 743 (2003), hep-ph/0210437.

[146] R.F. Ávila, E.G.S. Luna e M.J. Menon, Phys. Rev. D **67**, 054020 (2003).

[147] B. Nicolescu e E. Martynov, Eur. Phys. J. C **56**, 57 (2008).

[148] R.F. Ávila, S.D. Campos, M.J. Menon e J. Montanha, Eur. Phys. J. C **47**, 171 (2006) [arXiv:hep-ph/0603035].

[149] R.F. Avila, S.D. Campos, M.J. Menon e J. Montanha, Braz. J. Phys. **37**, 675 (2007).

[150] R.F. Ávila, S. D. Campos, M. J. Menon, "Relações de Dispersão Derivativas e a Prescrição $s \rightarrow -\mathrm{i}s$", em: XXV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2004,
http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/enfpc/xxv/sys/resumos/T0128-1.pdf

[151] A. Martin e G. Matthiae, *Proton-Antiproton Collider Physics*, (World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd., Singapura, 1989).

[152] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, (Oxford University Press, New York, 1948).