UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

TESE DE DOUTORAMENTO

Estabilidade e caos ao redor de centros de atração deformados em gravitação.

Autor: EDUARDO GUÉRON

Orientador: PROF. DR. PATRICIO A. LETELIER SOTOMAYOR

Título: Estabilidade e caos ao redor de centros de atração deformados em gravitação.

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Eduardo Guéron** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de junho de 2001

Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Patricio A. Letelier Sotomayor
2. Prof. Dr. George E.A. Matsas
3. Profa. Dra. Kyoko Furuya
4. Prof. Dr. Alberto Saa
5. Prof. Dr. Samuel R. de Oliveira

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Gueron, Eduardo

G937e Estabilidade e caos ao redor de centros de atração deformados em gravitação / Eduardo Guéron -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Caos. 2. Relatividade geral (Fisica). 3. Gravitação. 4. Sistemas dinâmicos. I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 25 de junho de 2001

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). PATRÍCIO ANÍBAL LETELIER SOTOMAYOR

Kyoko Furuya

Prof (a). Dr (a). KYOKO FURUYA

Prof (a). Dr (a). GEORGE EMANUEL AVRAAM MATSAS

Samuel R. Oliveira

Prof (a). Dr (a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

Prof (a). Dr (a). ALBERTO VAZQUEZ SAA

Dedico esta tese à Carla e à Trotskina.

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, ao Prof. Dr. Patricio A. Letelier a orientação séria e de qualidade inquestionável; aos professores Werner Vieira, Samuel Oliveira, Filipe Bonjour e Andre Ribeiro as discussões, programas e colaborações em geral no desenvolvimento do trabalho e aos membros que compuseram a banca examinadora as sugestões.

Agradeço, também, às colaborações dos meus companheiros de sala: Adilson, Rafael, Max e Akiles. Aos meus amigos Tácio, Mariana, Pedro. Ao Denilson, o pão nosso de cada dia. À Suzana e ao Edgar a companhia.

Gostaria de agradecer a todos os funcionários do IMECC, em especial a Fátima, Tânia, Cidinha e Ednaldo. Também agradeço aos funcionários das bibliotecas do IMECC e do IFGW.

Agradeço a Cordélia, Helena, Isabel, Rodrigo e Sérgio; D. Carmen e D. Elza; Mariana do Carmo, Leda e Everardo.

Finalmente, agradeço à FAPESP o apoio financeiro sem o qual a realização desta tese seria impossível.

Sumário

Resumo

Estudamos o comportamento de órbitas limitadas de partículas-teste em torno de um centro de atração deformado por expansão multipolar. Obtemos que o movimento de partículas sob ação de um potencial modelado por um termo monopolar e uma deformação quadrupolar prolata possui comportamento caótico para determinados valores de energia e momento angular dentro do formalismo newtoniano. Estudamos o caso análogo relativístico via equação da geodésica para uma métrica que representa uma fonte monopolar (Schwarzschild e Kerr) deformada por um quadrupolo decrescente. Observamos que, em um estreito intervalo de parâmetros, as geodésicas apresentam comportamento irregular para a deformação prolata. Finalmente, estudamos a estabilidade de partículas-teste em torno de um buraco negro com um halo dipolar. O buraco negro foi modelado via pseudo potencial de Paczyńsky-Witta. Analisamos órbitas obtidas através da segunda lei de Newton e dentro do formalismo de relatividade especial. Comparamos os resultados com órbitas em torno da expansão multipolar usual (solução da equação de Laplace) e com a solução exata em relatividade geral. Para tanto, aplicamos o método de seção de Poincaré e calculamos os expoentes de Lyapunov.

Abstract

The behavior of test particles around a multipole deformed attraction center is studied. We find chaotic motions of particles in the field modeled by a monopolar plus a prolate quadrupole term for certain values of parameters. The general relativistic analogous is also studied by using the geodesic formalism in a geometry that represents a monopole (Schwarzchild and Kerr) plus a quadrupole term. We noticed chaotic geodesics for a small range of parameters in the prolate case. Finally, we examine the stability of test particles around a black-hole + dipolar halo system. The black hole was modeled via Paczyńsky-Witta pseudo potential and the orbits were obtained in the Newtonian and special relativistic dynamics. We compare them with orbits around the usual monopole+dipole potential (that solves the Laplace equation) and with the full general relativistic case. We have used for this aim the Poincaré sections method and Lyapunov exponents.

Introdução

O estudo de sistemas caóticos tem despertado crescente interesse em diversas áreas do conhecimento. Em física, podemos destacar os trabalhos desenvolvidos por Henri Poincaré em 1892 no estudo de três corpos [1] e aplicações outras como o estudo do movimento browniano [2]. Mais recentemente, o advento de computadores fez crescer o espectro de aplicações dos fundamentos matemáticos da teoria do caos, como exemplos podemos enumerar o estudo de dinâmica populacional, estruturas protéicas, flutuações de aplicações financeiras e meteorologia [3]. Nosso trabalho, entretanto, se limitou ao estudo do caos determinísticos em sistemas hamiltonianos.

A apresentação da tese pode ser dividida em duas partes. Na primeira, constituída pelos capítulos 1 a 3, apresentamos a base teórica em que se contextualizam os trabalhos de pesquisa. Nos apêndices A, B e C reproduzimos *ipsis literis* dois artigos publicados em periódicos internacionais (A e B) e um terceiro (C) recém enviado para a apreciação de assessores.

No capítulo 1, apresentamos conceitos básicos de sistemas hamiltonianos enfatizando a questão da integrabilidade. Partimos das propriedades da geometria simplética do espaço de fase e deduzimos as equações básicas do formalismo hamiltoniano e, posteriormente, mostramos algumas propriedades de sistemas integráveis. Derivamos a técnica de seções de Poincaré a fim de caracterizar graficamente órbitas caóticas no espaço de fase. Discutimos, ainda, os resultados propostos pelo teorema de KAM (Kolmogorov, Arnold e Moser). As seções finais deste primeiro capítulo foram destinadas a estudos de características de sistemas caóticos a partir de resultados associados a mapas unitários como o teorema de Birkhoff-Poincaré. Terminamos com uma breve exposição sobre os expoentes de Lyapunov, ver referências [4, 5].

No segundo capítulo, discutimos resultados de relatividade geral essenciais para o desenvolvimento do artigo apresentado no apêndice C. Iniciamos com a métrica de Weyl em coordenadas esferoidais prolatas e trabalhamos com soluções multipolares [17]. Posteriormente, apresentamos o método do espalhamento inverso e obtemos a solução de Kerr superposta a multipolos [25]. Para finalizar, citamos alguns resultados de caos em relatividade geral.

Propomos no terceiro capítulo os caminhos possíveis para dar prosseguimento aos resultados obtidos ao longo do doutoramento. Incluímos técnicas que podem auxiliar no estudo do problema de partículas auto-gravitantes em relatividade geral, um dos objetivos futuros da nossa pesquisa.

No apêndice A, apresentamos o artigo "Chaotic Motion Around Prolate Deformed Bodies" em que são estudadas órbitas de partículas-teste sob ação de um potencial que representa um monopolo + quadrupolo interno (decrescente).

Observamos, por meio de técnicas de seção de Poincaré, que as órbitas apresentam um comportamento caótico - para determinados valores das constantes de movimento energia e momento angular - quando a forma de deformação quadrupolar é prolata (tal forma pode ser observada em galáxias anãs, aglomerados ou mesmo asteróides). O potencial em questão se escreve como

$$U(r,z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{q(2z^2-r^2)}{2(r^2+z^2)^{5/2}},$$

a forma prolata é obtida quando $q < 0$. Para o caso oblato (q positivo) o comportamento das órbitas é típico de um sistema integrável, entretanto, não podemos garantir a integrabilidade já que nos restringimos a métodos numéricos.

No apêndice B, apresentamos o artigo "Chaos in Pseudo-Newtonian Black Holes with Halos". Neste trabalho fazemos um estudo comparativo de aproximações que representam uma massa esfericamente simétrica cercada por um halo dipolar. Além da reprodução de resultados conhecidos usando um formalismo newtoniano usual e equações da geodésica, foi estudado o pseudo potencial proposto por Paczýnski e Witta (PW) [18] que simula o efeito do horizonte na forma

$$U(r,z) = -\frac{GM}{R - R_g},$$

onde $R_g = 2GM/c^2$. Encontramos, via seção de Poincaré e coeficientes de Lyapunov, os resultados: Órbitas sob ação de um potencial newtoniano que representa um monopolo cercado por um dipolo externo são regulares (a integrabilidade de tais órbitas é um resultado bem conhecido na literatura). Usando o mesmo potencial no formalismo de relatividade especial (através da definição de uma quadri-força) o comportamento se mantém regular. Quando atribuímos ao monopolo o pseudo-potencial PW, as órbitas das partículas-teste apresentam um comportamento caótico tanto no formalismo newtoniano (2ª lei) quanto na relatividade especial sendo que o comportamento no segundo caso é aparentemente mais irregular e ambos são menos estáveis do que as geodésicas na geometria que caracteriza um buraco-negro cercado por um halo dipolar (comportamento caótico também é observado nesse caso).

Finalmente, no apêndice C, reproduzimos o artigo "Stability and Chaos around Multipolar Deformed Bodies: A General Relativistic Approach" no qual foi feito um estudo sobre geodésicas em uma geometria definida por uma massa esférica deformada via quadrupolo interno. Obtemos, via seção de Poincaré, órbitas caóticas para um intervalo muito pequeno de valores de momento angular e energia quando a deformação é prolata. No caso oblato, as geodésicas têm uma trajetória regular típica de um sistema integrável.

Acrescentamos, no citado sistema, rotação à massa central, para tanto estudamos órbitas na solução exata das equações de Einstein que representa um buraco negro de Kerr adicionado a um quadrupolo interno (superposição feita usando técnicas solitônicas). O comportamento das geodésicas não sofre muita alteração no que concerne à estabilidade entretanto o sistema se mostra extremamente sensível a variações na velocidade de rotação da fonte. A apresentação mais detalhada do formalismo usado em tal sistema é feita no capítulo 2.

1

Caos e sistemas hamiltonianos

Usualmente, denominamos sistemas hamiltonianos àqueles que podem ser estudados através de uma função que dependa de coordenadas $\boldsymbol{q}$ e momentos generalizados $\boldsymbol{p}$. O espaço formado pelos pares de coordenada-momento generalizados é o espaço de fase que possui uma estrutura de variedade simplética. O estudo da mecânica hamiltoniana se confunde, portanto, com o da geometria do espaço de fase.

A partir desta estrutura, podemos entender profundamente diversos problemas de mecânica e, com auxílio das propriedades do espaço de fase, inferir conceitos e teoremas relacionados à integrabilidade de órbitas.

1.1 Equações de Hamilton

Todos os sistemas que estudamos ao longo da tese podem ser qualificados como sistemas hamiltonianos conservativos. Neste contexto, podemos caracterizar totalmente a dinâmica do problema por uma função hamiltoniana que dependa exclusivamente das coordenadas generalizadas, ou seja, um sistema autônomo. Nesses casos, a função em questão é uma constante de movimento comumente associada à energia, i.e.,

$$H(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = E. \tag{1.1}$$

Note que não necessariamente a hamiltoniana é associada à energia mecânica do sistema, em relatividade geral, por exemplo, a energia de uma partícula é o momento canonicamente conjugado ao tempo e a hamiltoniana é associada a uma constante (massa inercial no caso de geodésicas temporais) obtida através do produto escalar do quadri-momento.

Usando a função hamiltoniana, constroem-se formas invariantes a partir das coordenadas e momentos generalizados. Essas formas caracterizam a geometria do espaço de fase e por extensão nos permitem o estudo de órbitas de partículas-teste em sistemas mecânicos [6]. Comecemos, portanto, com a 1-forma diferencial (ω^1) invariante no espaço de fase estendido de dimensão $2n+1$

$$\omega^1 = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt. \tag{1.2}$$

Dizer que ω^1 é uma forma diferencial fechada implica em que sua derivada externa $d\omega^1$ se anule, i.e.,

$$0 = d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} d\boldsymbol{p} \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} d\boldsymbol{q} \wedge dt.$$

Sabendo que podemos projetar as coordenadas $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ no eixo temporal, a anulação de $d\omega^1$ implica nas equações abaixo

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \\ \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

estas são as equações de Hamilton (ou equações canônicas). Também representam a trajetória do fluxo no espaço de fase. Esta propriedade fica evidente quando construímos o espaço de fase de dimensão $2n$ escrevendo $\boldsymbol{z} = (q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n)$ e, portanto, a hamiltoniana como uma função de $\boldsymbol{z}$, i.e., $H(\boldsymbol{z})$. As equações canônicas (1.3) podem ser reescritas como o fluxo hamiltoniano

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{\nabla} H(\boldsymbol{z}), \tag{1.4}$$

onde $\boldsymbol{\nabla} = (\partial z_1, \ldots, \partial z_{2n})$, e a matriz simplética tem a forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

A caracterização da geometria do espaço de fase é dada pela 2-forma invariante

$$\omega^2 = d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q}. \tag{1.6}$$

que define uma estrutura simplética. Podemos, partindo da 2-forma acima, construir sucessivamente ω^{2k} formas através do produto $\omega^2_{(1)} \wedge \omega^2_{(2)} \wedge \omega^2_{(3)} \wedge \ldots$ que são invariantes (pode-se mostrar sem muitas dificuldades que $d\omega^{2k} = 0$). Afirmar que a estrutura simplética (1.6) é conservada via fluxo hamiltoniano (1.4) equivale a dizer que a soma da diferencial da área projetada nos planos definidos pelo conjunto de pares de coordenadas (p_i, q_i) deve ser preservada assim como as áreas dos hiperplanos definidos em grupos de k pares de variáveis canônicas. A última forma diferencial a ser definida via produto externo sucessivo é ω^{2n}, que corresponde à diferencial do volume do espaço de fase e pode ser escrita como

$$\omega^{2n} = \prod_{i=1}^{n} dp_i dq_i. \tag{1.7}$$

Pensando em uma hipersuperfície fechada construída no espaço de fase em $t = t_0$ como S_0, quando evoluímos o conjunto denso de pontos que a forma através de (1.4) teremos a cada t uma nova hipersuperfície fechada S_t com exatamente o mesmo volume de S_0.

1.2 Equações de Lagrange

Na mecânica lagrangiana, estudamos as trajetórias das partículas teste via formalismo desenvolvido para o espaço de configuração [7, 6]. O espaço de fase, cuja estrutura geométrica define o formalismo hamiltoniano, pode ser entendido como um fibrado cotangente do espaço de configurações. Neste formalismo, partimos de

$$\mathcal{L}(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, q_n),$$

que definie a ação

$$I = \int \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})dt,$$

funcional a ser minimizado. As equações de movimento derivam da condição

$$\delta I = 0.$$

Podemos escrever a condição acima como

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \int [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i]dt,$$

com auxílio de integração por partes e considerando que os extremos na variação são fixos (variação de Weierstrass) chegamos a

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \int [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}]\delta q_i dt,$$

que resulta nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

A função de Hamilton é obtida da Lagrangiana através da transformação de Legendre abaixo

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),$$

onde $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$. As equações canônicas (1.3) podem ser facilmente resgatadas usando a definição anterior e as equações de Euler. A obtenção das equações de movimento via formalismo de Lagrange é, geralmente, mais direta, no entanto, a estrutura característica do espaço de fase - necessária para o estudo de propriedades de sistemas integráveis - é omitida tornando tal formalismo mais limitado.

1.3 Transformações canônicas de coordenadas

Por transformações canônicas de coordenadas entendem-se aquelas em que as características do espaço de fase (como as mostradas no início deste capítulo) gerado pelos pares de coordenadas conjugados $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$, são conservadas [7, 4]. Seja uma transformação canônica de coordenadas

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n), \\ Q_i &= Q_i(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n). \end{aligned} \tag{1.8}$$

As equações de Hamilton para o novo par $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ devem ser escritas de maneira análoga às equações canônicas para as coordenadas $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{Q}}, \\ \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial \boldsymbol{P}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Além disso, as formas anteriormente definidas devem ser invariantes por estas transformações, consequentemente o volume de uma hipersuperfície fechada assim como a área de suas projeções devem ser preservados quando aplicamos (1.8). A equação que relaciona a integral do volume de uma hiper-superfície fechada escrita em dois sistemas de coordenadas $(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n)$ e $(Q_1, \ldots, Q_n; P_1, \ldots, P_n)$ é

$$\int \prod_{i=1}^{n} dP_i dQ_i = \int \frac{\partial(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})}{\partial(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})} \prod_{i=1}^{n} dp_i dq_i,$$

onde $\frac{\partial(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})}{\partial(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}$ é o Jacobiano da transformação que pode ser escrito como o determinante da matriz cujo elemento se escreve como $j_{ij} = \frac{\partial Z_i}{\partial z_j}$, onde $\boldsymbol{z} = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ e $\boldsymbol{Z} = (Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n)$. Portanto, o jacobiano de uma transformação canônica de coordenadas deve ser unitário.

O próximo passo é a definição da função de Hamilton para o novo sistema. Devemos poder definir uma 1-forma para o novo sistema de coordenadas de maneira análoga à Eq.(1.2). Para que esta seja invariante por mapas, pode diferir da definida para as coordenadas antigas apenas por uma diferencial exata, i.e.,

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt = \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} - H'dt + dF. \tag{1.10}$$

A função F é chamada geratriz e a nova hamiltoniana H' e pode ser escrita como

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1.11}$$

A construção de F pode ser feita de quatro maneiras diferentes: $F(Q, q, t)$, $F(P, q, t)$, $F(Q, p, t)$ e $F(P, p, t)$. A sua caracterização é extremamente útil no estudo de sistemas integráveis.

1.4 Sistemas Integráveis

Quando dizemos que um sistema hamiltoniano com n graus de liberdade é integrável, estamos afirmando que é possível encontrar n funções de $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ independentes (e.g. $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$) que são constantes via fluxo hamiltoniano, i.e., $d\boldsymbol{\alpha}/dt = 0$. Pensando em termos de coordenadas, a resolução de sistemas hamiltonianos integráveis passa essencialmente pela busca de transformações canônicas que gerem momentos que sejam também constantes de movimento, i.e., pela busca de variáveis cíclicas [6, 4, 5]. Deste modo procuramos escrever a hamiltoniana (para sistemas autônomos) como:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \rightarrow H(\boldsymbol{\alpha}), \tag{1.12}$$

onde $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ é o par original de momento e coordenada generalizada e $\boldsymbol{\alpha}$ é o novo momento canônico que agora também é um conjunto de n constantes de movimento para o sistema com n graus de liberdade. A nova coordenada generalizada associada ao momento $\boldsymbol{\alpha}$ será denominada $\boldsymbol{\beta}$.

Denominamos S a função geratriz - definida como F na Eq.(1.11) - dependente de $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{q}$. Usando a Eq.(1.10) em um sistema independente do tempo, temos

$$\int\!\!\int d\boldsymbol{p} \wedge d\,\boldsymbol{q} - d\boldsymbol{\alpha} \wedge d\boldsymbol{\beta} = 0,$$

que, com o auxílio do teorema de Stokes, pode ser escrito como

$$-\oint \boldsymbol{p} d\boldsymbol{q} - \oint \beta d\boldsymbol{\alpha} = \oint dS = \oint \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}} d\boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}} d\boldsymbol{q},$$

que se anula já que dS é uma diferencial exata. Comparando as duas equações chega-se às equações de Hamilton-Jacobi

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \\ p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

A função hamiltoniana pode ser escrita usando a função geratriz S de modo que, para o caso independente do tempo, teríamos

$$H(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}) \rightarrow H'(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.14}$$

Fixando-se um conjunto de constantes de movimento α_i, a função geratriz S pode ser obtida via

$$S = \int_{q_0}^{q_t} \boldsymbol{p} d\boldsymbol{q}, \tag{1.15}$$

que depende, naturalmente, do conhecimento da trajetória $\boldsymbol{q}(t)$.

Sistemas Confinados

Como vimos anteriormente, a integrabilidade de um sistema hamiltoniano com n graus de liberdade é garantida quando se encontra um conjunto com n variáveis cíclicas independentes. A exigência de que as variáveis sejam independentes está implícita na dedução via transformações canônicas (por exemplo, a exigência de unitariedade do jacobiano). Em termos da estrutura do espaço de fase, podemos obter algumas propriedades de sistemas integráveis com o fato de que a definição de n integrais de movimento independentes α_i implica em órbitas do espaço de fase confinadas a uma variedade n-dimensional. Além disso, podemos definir um campo de velocidades ξ_i, no espaço tangente TpM de maneira análoga ao fluxo hamiltoniano escrito em (1.4), i.e.,

$$\xi_i = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\nabla}\alpha_i,$$

onde foi considerado $(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n) = (z_1,\ldots,z_n,z_{n+1},\ldots,z_{2n})$, $\boldsymbol{\nabla} = (\partial z_1,\ldots,\partial z_{2n})$ e $\boldsymbol{J}$ é a matriz simplética definida na Eq.(1.6).

A possibilidade de se obter n campos vetoriais independentes no espaço tangente à variedade fechada M nos permite evocar o teorema de Hopf-Poincaré e concluir que M é topologicamente equivalente a um toro n-dimensional. Em resumo, mostramos que em um sistema integrável as órbitas no espaço de fase estarão confinadas em um n-toro [4, 9].

Em um n-toro podemos sempre definir n caminhos fechados $\mathcal{C}_k$ topologicamente independentes. Podemos escrever, inspirado em (1.15), as ações fechadas

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_k} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{q}, \tag{1.16}$$

onde o índice k varia de 1 a n. Das equações de Hamilton-Jacobi, temos as coordenadas associadas, ângulo,

$$\theta_k = \frac{\partial S}{\partial I_k}, \tag{1.17}$$

as equações de movimento com esse novo conjunto de variáveis são escritas como

$$\begin{aligned} \dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \theta_k} &= 0, \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_k} &= \omega_k, \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde ω_k é a freqüência associada à k-ésima curva fechada $\mathcal{C}$.

1.5 Seções de Poincaré

Tal resultado pode ser usado em métodos para descrever caos em sistemas hamiltonianos, descreveremos a seguir a técnica conhecida como seção de Poincaré. Apesar de existir na literatura generalizações desta técnica no estudo de sistemas tridimensionais, nos restringimos à análise de sistemas que podem ser reduzidos a duas dimensões no espaço de configuração (ou 4 no espaço de fase). Se tal sistema for integrável, a órbita estará confinada a um bi-toro.

Considera-se inicialmente um problema confinado, i.e., podemos, a partir de uma primeira integral de movimento (usualmente H), encontrar uma superfície que define uma região fechada tal que órbitas internas a esta jamais ultrapassem a fronteira estabelecida. Portanto as órbitas estarão restritas a uma região tridimensional dada pela equação

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) - E = 0. \tag{1.19}$$

A seção é feita a partir da definição de um plano qualquer no espaço de fase. Quando a órbita no espaço de fase fura o plano de seção definido, marca-se um ponto[1, 4, 5] . O esquema está mostrado na Fig.1.1.

A escolha de um plano, por exemplo $q_2 = y_0 = c^{\underline{te}}$, confina os pontos plotados na figura à região

$$H(p_1, p_2, q_1, y_0) - E = 0.$$

Como, por construção, escolhemos E tal que a superfície definida em (1.19) seja fechada, a região dada pela equação acima é bidimensional e limitada logo pode ser mapeada em um plano. O resultado é uma ferramenta muito poderosa para se encontrar comportamentos caóticos em trajetórias de um sistema com dois graus de liberdade. A limitação reside no fato de que o método descrito é numérico e portanto não podemos determinar se um sistema é integrável ou se as órbitas estão confinadas em uma região mais estreita do que permite ser observada pela resolução do computador.

Se o sistema for integrável teremos duas configurações possíveis dependendo da razão ω_1/ω_2, frequências associadas ao bitoro como definida em (1.18). Se a razão entre as duas for um número racional, a órbita será portanto fechada e cortará o plano em um número finito de pontos (exatamente o mínimo múltiplo comum entre ω_1 e ω_2). Quando a divisão entre as frequências

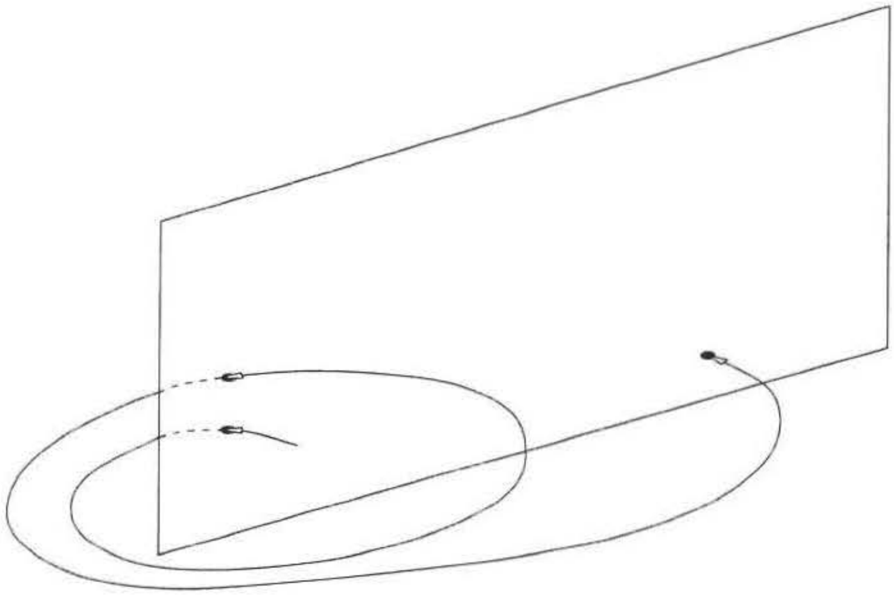

Figura 1.1: Exemplo esquemático de construção de uma seção de Poincaré

for um número irracional, a trajetória da partícula-teste no espaço de fase preencherá o bi-toro ergodicamente consequentemente os pontos que furam o corte definido pela seção de Poincaré preencherão ergodicamente uma (ou mais no caso da existência de nós) curva fechada. Os dois casos estão exemplificados nas figuras 1.2 e 1.3 respectivamente.

Se o sistema for caótico, as trajetórias não estarão confinadas em um bi-toro. Estarão em uma região fechada definida por uma casca de energia constante podendo, ainda, ficar contida entre dois toros não destruídos (mais detalhes na próxima seção). A seção de Poincaré, portanto, nos mostrará uma série de pontos que preencherão uma região no plano. Um exemplo está mostrado na Fig.1.4.

A ferramenta acima descrita foi bastante aplicada no estudo de comportamentos caóticos em trajetórias descritas pelas partículas-teste nos artigos apresentados nos apêndices A, B e C. Como todos os sistemas possuem simetria axial e não dependem explicitamente do tempo, pudemos sempre reduzir a dois graus de liberdade as equações de movimento que os descrevem.

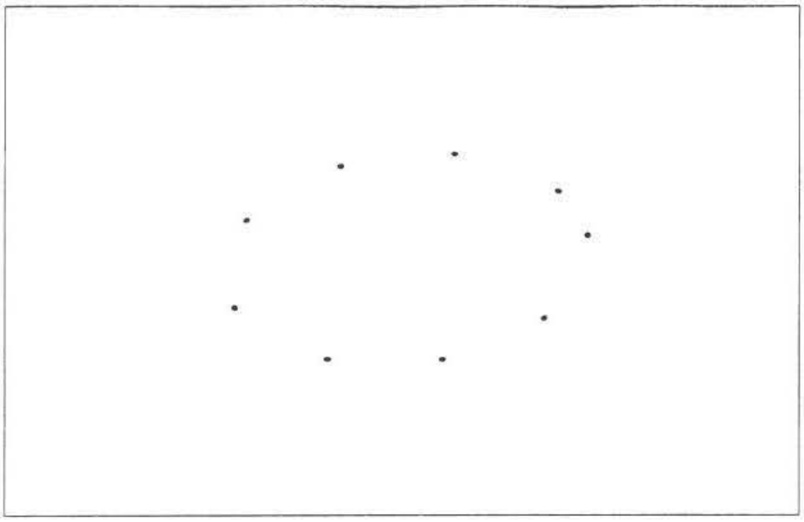

Figura 1.2: Exemplo de seção de Poincaré de um sistema integrável com razão entre as frequências racional, o mínimo múltiplo comum entre ω_1 e ω_2 é igual a 9.

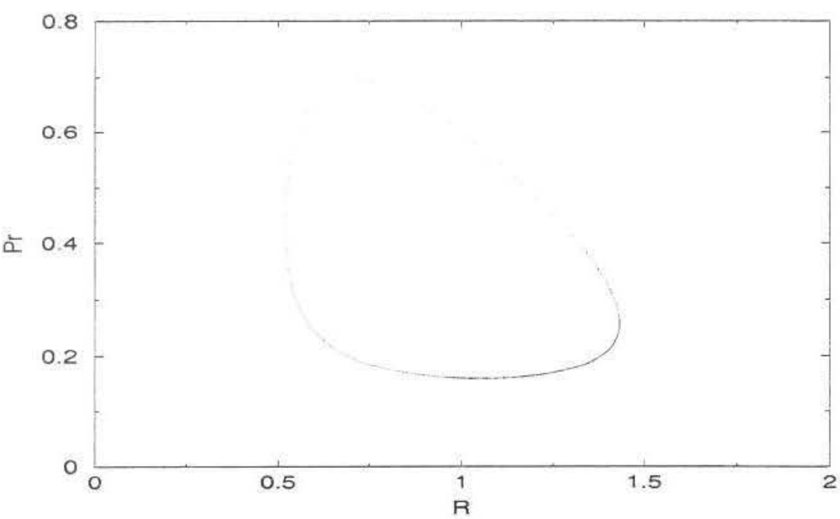

Figura 1.3: Exemplo de seção de Poincaré de um sistema integrável com razão entre as frequências irracional. O caso apresentado corresponde à trajetória de uma partícula sujeita à ação do potencial $\Phi = -1/(r^2 + z^2) + Dz$.

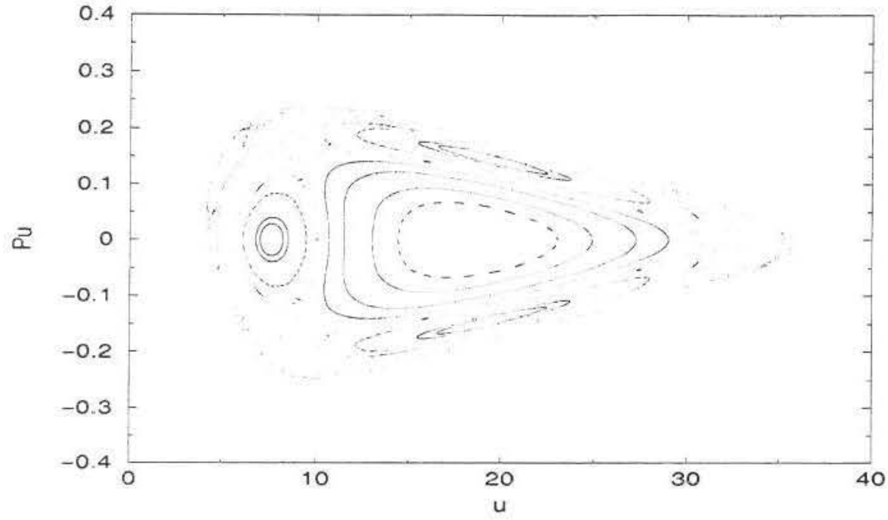

Figura 1.4: Exemplo de seção de Poincaré cm regiões um caóticas. O caso apresentado corresponde a geodésicas na métrica que representa uma fonte deformada por um quadrupolo interno e cercado por uma casca quadrupolar (formalismo de relatividade geral). As órbitas caóticas podem ser notadas na parte periférica da figura

1.6 Teorema de KAM

Através do formalismo de variáveis de ângulo e ação, uma hamiltoniana integrável independente do tempo sempre pode ser escrita como

$$H_0 = H_0(I), \tag{1.20}$$

se a esta for adicionada uma pequena perturbação, obtemos uma nova hamiltoniana (que assumiremos não integrável) na forma

$$H = H_0(I) + \epsilon H(I, \theta), \tag{1.21}$$

onde $\epsilon \ll 1$. A questão que motiva o desenvolvimento do teorema de KAM é o que acontece com os toros previstos para o sistema integrável. Pela teoria apresentada nas seções anteriores, não há nada que obrigue que as órbitas no espaço de fase provenientes de um sistema hamiltoniano não integrável fiquem confinadas a um toro, no entanto, podemos pensar numericamente que o sistema descrito em (1.21) difere muito pouco do (1.20) o que nos leva a crer que as órbitas provenientes das equações de movimento do sistema perturbado não sejam muito diferentes das descritas no sistema original, supondo ϵ pequeno. Um exemplo físico de tal situação está na estabilidade das órbitas dos planetas que formam o sistema solar [10]. Em física estatística, todavia, observamos em sistemas hamiltonianos com vários graus de liberdade que uma região espaço de fase é indistinguível sobre uma hipersuperfície de energia constante de acordo com a "Hipótese Ergódica" proposta por Boltzmann a menos de um conjunto com medida de Lebesgue nula [11]. Os dois exemplos contraditórios são igualmente contemplados no desenvolvimento do teorema de KAM.

Como a conjectura proposta originalmente por Kolmogorov e as posteriores provas obtidas por Arnold e Moser fogem ao objetivo da tese, citaremos apenas algumas de suas conseqüências [9, 4, 5].

A idéia geral parte da perturbação como a descrita em Eq(1.21). Se os toros se preservam no espaço de fase relacionado à hamiltoniana modificada, sempre podemos determinar um novo par de coordenadas ângulo-ação $(\bar{\theta}, \bar{I})$ tal que $H \rightarrow H'(\bar{I})$. Esta possibilidade concordaria com o que é observado para planetas no sistema solar. Entretanto, o teorema de KAM mostra que os toros são gradativamente destruídos (de acordo com a intensidade da perturbação ϵ).

Exemplificando para o problema bidimensional, o teorema de KAM diz que nos toros preservados é válida a relação:

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{2.5}}, \tag{1.22}$$

ou seja os toros cuja razão entre as frequências é suficientemente incomensurável são preservados (r e s são números inteiros e primos entre si). O número $K(\epsilon)$ tende a zero quando ϵ se anula. Este número é obtido por aproximações de números irracionais por frações irredutíveis mas a sua definição exata depende de outros fatores característicos do sistema.

É necessário ressaltar que o teorema de KAM só é válido quando é satisfeita a condição de não singularidade

$$\det \left| \frac{\partial^2 S}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0, \tag{1.23}$$

onde S é a função geratriz.

É importante destacar que para qualquer $\epsilon \neq 0$ (supondo sempre que H_1 não é globalmente integrável) os toros destruídos formam um conjunto com medida de Lebesgue não nula - que pode ser imperceptível numérica ou observacionalmente quando a perturbação for pequena. Uma aplicação direta pode ser feita construindo um sistema com muitos graus de liberdade como uma sequência de hamiltonianas perturbadas, ou seja, a n-ésima partícula adicionaria uma perturbação à hamiltoniana com $n-1$ graus de liberdade. Para n muito grande, os toros destruídos formam um conjunto com a medida da hipersuperfície de energia constante onde se confinam as partículas portanto o conjunto de toros preservados teria medida nula. Neste limite, chegamos a situação completamente ergódica como a prevista para a física estatística.

1.7 Teorema de Poincaré-Birkhoff

As propriedades de sistemas hamiltonianos caóticos podem ser conceitualmente obtidas via estudo de mapas unitários [5, 9]. Por mapas unitários n-dimensionais se entendem aplicações $T : M_n \to M_n$ que podem ser escritas de maneira geral como

$$T : x_{i+1}^k = f_k(x_i^1, \ldots, x_i^n), \tag{1.24}$$

a condição exigida de unitariedade equivale a,

$$\frac{\partial(x_{i+1}^1, \ldots, x_{i+1}^n)}{\partial(x_i^1, \ldots, x_i^n)} = 1. \tag{1.25}$$

A princíipio, todos os sistemas hamiltonianos podem ser escritos como mapas unitários já que a unitariedade destes garante a preservação da estrutura simplética do espaço de fase quando identificamos, organizadamente, x com p e q.

Pontos Fixos

O estudo de sistemas não integráveis passa pela definição de pontos fixos. Pontos fixos são pontos pertencentes ao domínio da aplicação invariantes pela transformação T, ou seja, se X é um ponto fixo para a aplicação T então $TX = X$.

Um bom exemplo de mapa no qual podem ser estudadas as propriedades de pontos fixos em sistemas caóticos é o mapa *twist*. Originalmente, para o sistema integrável, ele é escrito como

$$T: \begin{array}{l} \varphi' = \varphi + 2\pi\alpha(I) \\ I' = I, \end{array} \tag{1.26}$$

onde I e φ são as coordenadas de ação original e ângulo modificada (no sistema integrável $\varphi = \theta$). A linha denota a variável transformada e α é a razão entre as frequências ω_1/ω_2. Definindo o mapa perturbado T_ϵ temos

$$T_\epsilon: \begin{array}{l} \varphi' = \varphi + 2\pi\alpha(I) + \epsilon f(I, \varphi) \\ I' = I + \epsilon g(I, \varphi). \end{array} \tag{1.27}$$

Quando $\alpha = r/s$, racional, a curva fechada C definida para este determinado α é invariante para o mapa T^s, mapa T aplicado s vezes. Portanto podemos fazer uma análise em torno de C escolhendo duas curvas suficientemente próximas de C, C_+ externa e C_- interna. Como o mapa T^s leva C nela mesmo, o mesmo dará à C_+ um pequeno desvio angular (giro anti-horário) e C_- experimenterá uma rotação no sentido oposto, horário, vide parte A da Figura 1.5.

Associando curvas fechadas a cortes transversais de toros de KAM, podemos afirmar, usando o teorema de KAM, que, na transformação perturbada T_ϵ^s, as curvas C_- e C_+ serão mantidas se ϵ for suficientemente pequeno já que associamos às duas uma razão entre as frequências α irracional. Entretanto a curva C será destruída. Pode-se construir um esquema tal que R seja a curva de pontos cuja posição angular não varia por T_ϵ^s consequentemente, os pontos de intersecção de R e $T_\epsilon^s R$ formam o conjunto discreto de pontos fixos para este mapa, ver parte B da Figura 1.5. A trajetória dos pontos à vizinhança dos pontos fixos possuem uma tendência que pode ser inferida pelo mapeamente de C_+, C_- e R. O comportamento em torno dos pontos fixos nos dão uma ilustração intuitiva do resultado previsto pelo teorema de Poincaré-Birkhoff que pode, resumidamente, ser enunciado como

- Há um número discreto e par de pontos fixos contidos em C que são preservados pelo mapa perturbado, estes pontos são múltiplos pares de s, i.e., $2ks$ com k inteiro. Os pontos fixos são alternadamente hiperbólicos (instáveis) e elípticos (estáveis) vide Fig.(1.5) parte B

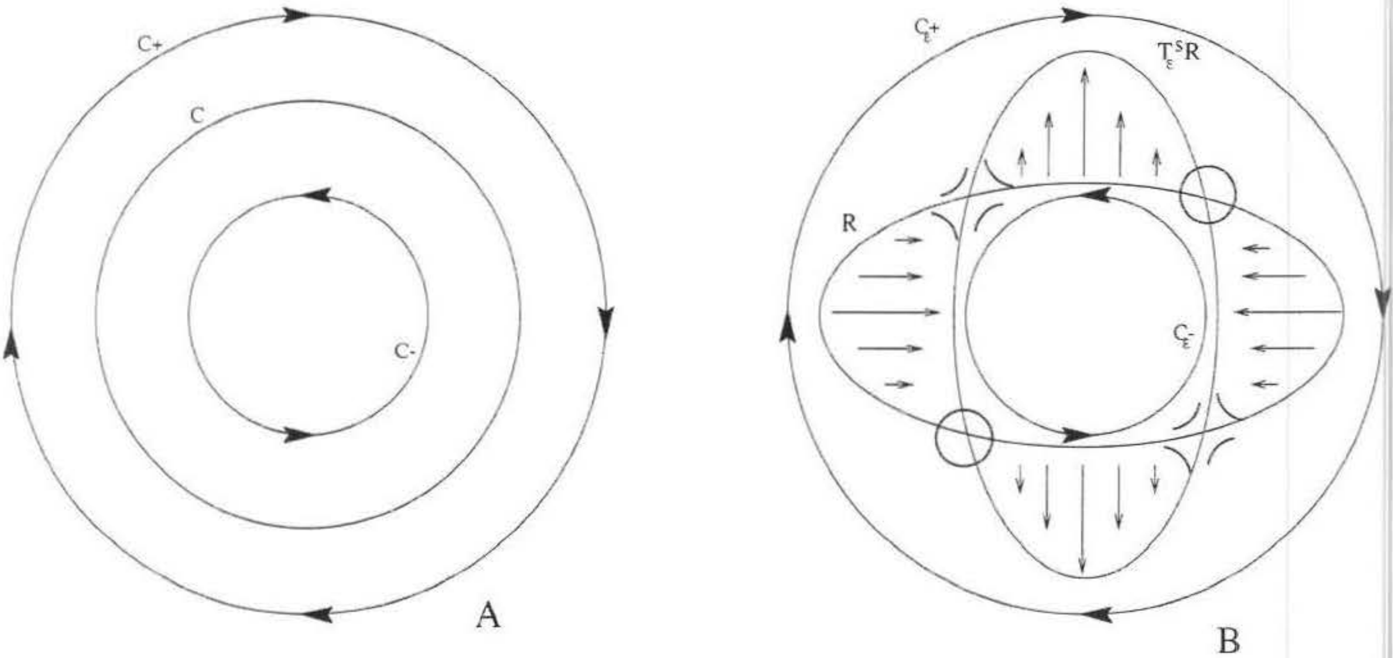

Figura 1.5: Esquema do teorema do ponto fixo de Poincaré-Birkhoff

Em torno dos pontos elípticos, podemos aplicar sucessivamente o teorema de Birkhoff-Poincaré de modo a se obter uma estrutura semelhante á apresentada, ou seja, a ampliação em torno dos pontos fixos elípticos nos remete a uma configuração auto-similar.

Pontos Homoclínicos

Centradas no ponto fixo hiperbólico H podemos definir duas variedades, uma estável H^+e outra instável H^- de modo que, se $X^\pm \in H^\pm$

$$\lim_{s\to\infty} T^{\pm s} X^\pm \to H^\pm. \tag{1.28}$$

A intersecção da variedade instável H^- com a estável H^+ nos dá um ponto denominado ponto homoclínico se as duas variedades são proveniente de pontos fixos hiperbólicos da mesma família, pensando no sistema anterior eles pertenceriam à mesma curva original C. Se as variedades são obtidas de pontos fixos pertencentes a famílias diferentes a interseção é chamada de ponto heteroclínico. O estudo deste segundo não pode ser feito com teoria de perturbação pela própria distância entre os pontos hiperbólicos. No caso de pontos homoclínicos, podemos deduzir algumas configurações interessantes com uma simples análise geométrica.

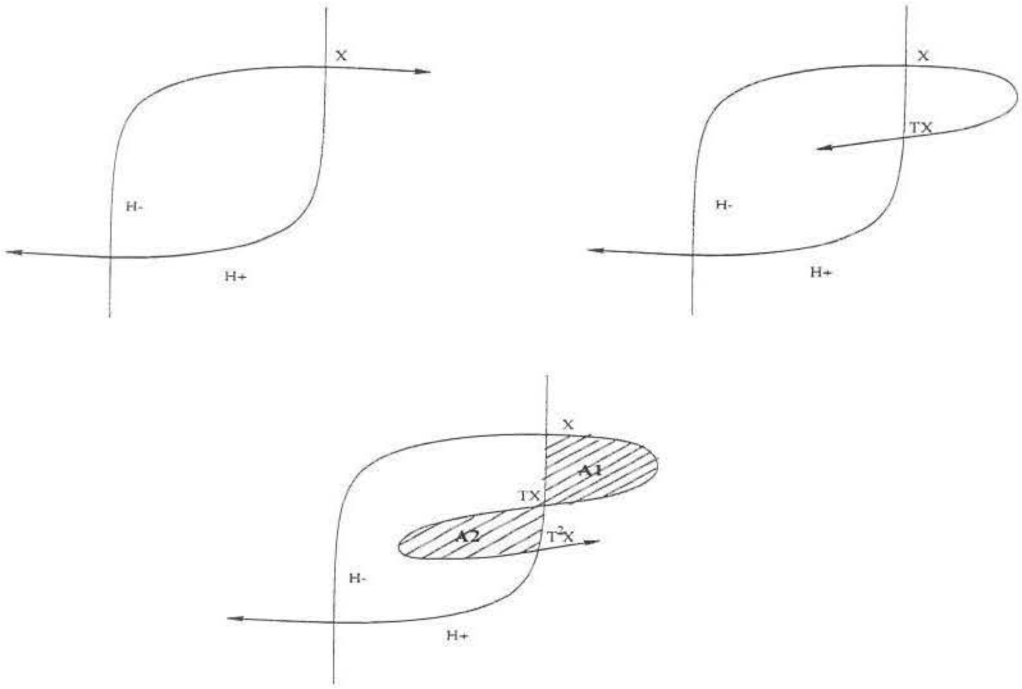

Figura 1.6: Formação do Emaranhado Homoclínico. Por conservação da área, $A1 = A2$.

Se um ponto X é homoclínico ele pertence à curva estável bem como a instável. Por continuidade o ponto TX também pertencerá às duas curvas. Como o mapa é contínuo a princípio, os pontos da vizinhança de X serão mapeados mantendo a vizinhança. A conclusão que se chega é que para cada novo ponto homoclínico obtido pelo mapeamento, as variedades se cruzam nele v. Fig 1.6. No entanto, se deve ressaltar que os pontos na variedade estável estarão cada vez mais próximo já que ela tende a um ponto fixo hiperbólico específico portanto as curvas H^+ e H^- se cruzarão cada vez com mais frequência, no entanto como o sistema é hamiltoniano o volume do espaço de fase é preservado por mapas como este, como H^+ é estável e os cortes serão cada vez mais próximos, o que podemos inferir é que a curva H^- oscila muito quando nos aproximamos de H formando uma rede extremamente complexa de pontos homoclínicos em torno de H, conhecido como emaranhado homoclínico.

Em sistemas integráveis as variedades estável e instável coincidem e, portanto, não ocorre a formação da estrutura acima explicada. A coincidência é explicada porque em tais sistemas a região de confinamento de uma família de órbitas é univocamente determinada pelas integrais de movimento.

1.8 Expoentes de Lyapunov

A obtenção dos expoentes de Lyapunov é, às vezes imprecisa do ponto de vista numérico além de constituir um método não analítico limitado para a determinação de caos em órbitas. Todavia, tal método tem extrema utilidade do ponto de vista observacional já que quantifica o grau de afastamento de órbitas vizinhas e portanto a dispersão em sistemas não integráveis [5, 4].

Partindo de um sistemas dinâmico autônomo n-dimensional governado pela equação:

$$\frac{dx^i}{dt} = F(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.29}$$

definimos a distância entre duas órbitas vizinhas $\boldsymbol{x}(t)$ e $\boldsymbol{y}(t)$ como

$$\delta(t) = \sqrt{\sum_i^n (x_i(t) - y_i(t))^2},$$

a evolução desta norma pode ser calculada localmente através da linearização de (1.29) em torno da órbita de referência $\boldsymbol{x}(t)$. Os expoentes de Lyapunov σ são definidos pelo limite

$$\sigma = \lim_{\substack{\delta_0 \to 0 \\ t \to \infty}} \left[\frac{\log(\delta(t)/\delta(0))}{t} \right]. \tag{1.30}$$

Em movimentos regulares, a distância entre órbitas cresce , em média, linearmente com o tempo (considerando sistemas conservativos) consequentemente $\sigma \to 0$. Em movimentos caóticos, entretanto, a distância cresce exponencialmente de modo que σ tende a um valor positivo finito.

O expoente de Lyapunov, na realidade, pode atingir valores diferentes dependendo da direção do vetor tangente às órbitas a serem comparadas. Usualmente, nos interessa chegar a um valor máximo de tal coeficiente para que tenhamos uma caracterização da regularidade do sistema independente de condições iniciais. Para tanto, se usa a técnica estudada por Benetin, Gargani e Giorgilli [12]. A idéia consiste em deixar o sistema evoluir um número finito k de passos pré-determinado ($t \to kt$). Neste momento, teremos o ponto $\boldsymbol{x}(kt)$ na órbita de referência e o ponto $\boldsymbol{y}(kt)$ pertencente à curva de comparação a distância entre os dois será $\delta(kt)$. A partir de então o processo recomeça de um novo ponto $\bar{\boldsymbol{y}}_1(0)$ distante $\delta(0)$ de $\boldsymbol{x}(kt)$ e contido no segmento que liga $\boldsymbol{x}(kt)$ a $\boldsymbol{y}(kt)$. O processo é repetido várias vezes e a cada período $\tau = kt$ é computada uma nova distância δ_N (vide esquema desenhado na Fig.1.7) consequentemente o máximo coeficiente de Lyapunov é dado pela expressão:

$$\mathcal{N} = \lim_{N \to \infty} \log(\frac{\delta_N}{\delta_0}). \tag{1.31}$$

A técnica descrita além de nos levar diretamente ao valor máximo do expoente de Lyapunov, é extremamente útil em sistemas confinados uma vez que a distância entre as órbitas é limitada pela própria hipersuperfície fechada de energia.

Nos artigos apresentados nos apêndices calculamos o coeficiente de Lyapunov para efeito de comparação de estabilidade entre mais de um sistema caótico. Medimos, com isso, uma das características marcantes de sistemas caóticos que é a extrema sensibilidade às condições iniciais.

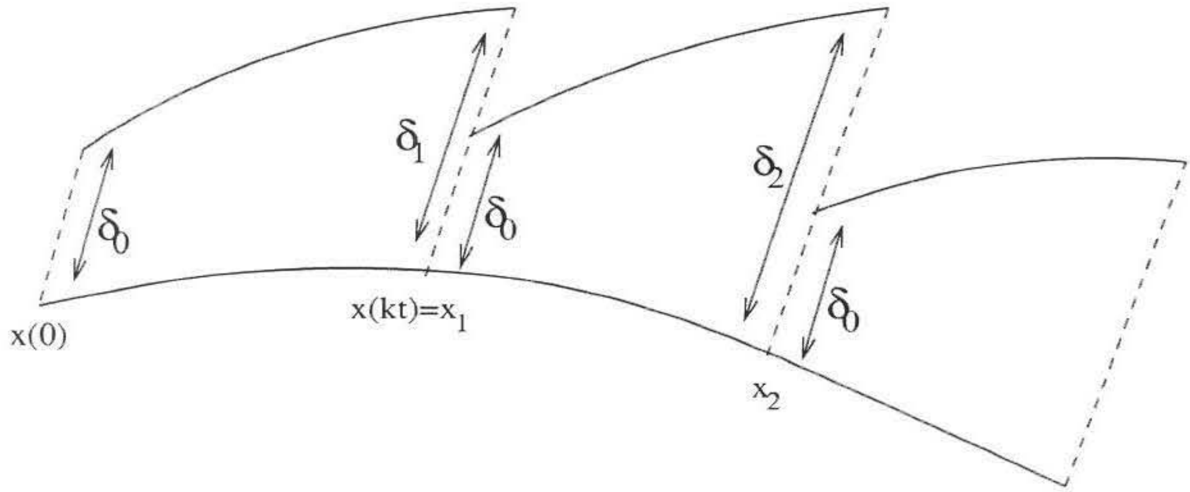

Figura 1.7: Esquema de obtenção do máximo coeficiente de Lyapunov. São computadas as distâncias δ_n a cada período $\tau = kt$.

2

Relatividade Geral

2.1 Soluções Estáticas Axialmente Simétricas

As métricas estáticas axialmente simétricas se caracterizam pela existência de dois vetores de Killing, a saber ∂_φ, ∂_t, se usamos coordenadas cilíndricas usuais. Em tais coordenadas a métrica para uma solução estática axialmente simétrica tem a forma de Weyl [14]

$$ds^2 = e^{2\lambda}dt^2 - e^{2(\nu-\lambda)}(dr^2 + dz^2) - e^{-2\lambda}r^2 d\varphi^2, \tag{2.1}$$

onde λ e ν são funções que dependem exclusivamente de r e z. A determinação destas funções é feita através das equações de Einstein no vácuo[1]

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.2}$$

Para a métrica de Weyl definida acima, tal equação se reduz a

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r} = 0, \tag{2.3}$$

[1] Ao longo deste capítulo está sendo usada a convenção, índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos de 1 a 3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial r} &= r\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2, \\ \frac{\partial \nu}{\partial z} &= 2r\frac{\partial \lambda}{\partial r}\frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

A primeira equação (2.3) é, exatamente, a equação de Laplace para sistemas axialmente simétricos, tal fato nos leva a associar λ a uma imagem do potencial gravitacional newtoniano. Essa associação, entretanto, deve ser feita com bastante cuidado visto que a correspondência, às vezes, é falsa (ver por exemplo Letelier & Oliveira [15] e Bonnor & Martins [16]). A integrabilidade da segunda equação (2.4) é garantida pela equação anterior (a verificação se faz diretamente na obtenção derivadas mistas da função ν). O problema físico, portanto, se resume à solução da equação de Laplace como em gravitação newtoniana.

2.2 Multipolos Relativísticos

Dentre os problemas de se fazer analogia de potenciais gravitacionais tipicamente newtonianos e com interpretação física clara e soluções das equações de Einstein destacamos as soluções multipolares visto que foi partindo de métricas com esta interpretação que estudaremos o comportamento caótico de geodésicas.

Por razões de simplicidade, usamos coordenadas esferoidais prolatas que se relacionam com as coordenadas axiais cilíndricas via

$$\begin{aligned} u &= (R_+ + R_-)/2m, \\ v &= (R_+ - R_-)/2m, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde

$$R_\pm = \sqrt{r^2 + (z \pm m)^2}.$$

Notem que as coordenadas u e v são adimensionais e m é uma constante arbitrária que identificamos com a massa da fonte em unidades relativísticas, i.e., $m = GM/c^2$, sendo M a massa da fonte, G a constante universal de gravitação e c a velocidade da luz no vácuo. As coordenadas t e φ permanecem inalteradas.

A partir da definição (2.5), a métrica escrita em (2.1) equivale a

$$ds^2 = e^{2\lambda}dt^2 - m^2e^{2(\nu-\lambda)}(u^2-v^2)(\frac{du^2}{u^2-1} + \frac{dv^2}{1-v^2}) - m^2e^{-2\lambda}(u^2-1)(1-v^2)d\varphi^2. \quad (2.6)$$

As equações de Einstein para a função λ passam a ter a forma.

$$[(u^2-1)\lambda_{,u}]_{,u} + [(1-v^2)\lambda_{,v}]_{,v} = 0, \quad (2.7)$$

cujas soluções podem ser escritas via funções de Legendre como

$$\lambda(u,v) = \sum_n \sum_m (a_n P_n(v)Q_n(u) + b_m P_m(u)P_m(v)).$$

A principal solução, pelo que nos propomos, deve ter simetria esférica, ou seja, deve representar a solução de Schwarzschild em coordenadas prolatas. Para tanto, devemos igualar a $1/2$ o termo a_0 e anular todos os outros coeficientes da expansão acima. Desta forma teremos a solução

$$\lambda(u,v) = \frac{1}{2}\log(\frac{u-1}{u+1}).$$

A função $\nu(u,v)$ é calculada com as equações de Einstein restantes

$$\begin{aligned}
\nu_{,u} &= \frac{(u\lambda_{,u} - 2v\lambda_{,v})(u^2-1)(1-v^2)\lambda_{,u} - u(1-v^2)^2{\lambda_{,v}}^2}{(u^2-v^2)}, \\
\nu_{,v} &= \frac{(2u\lambda_{,u} - v\lambda_{,v})(u^2-1)(1-v^2)\lambda_{,v} + v(u^2-1)^2{\lambda_{,u}}^2}{(u^2-v^2)}.
\end{aligned}$$

Assim chegamos a uma métrica com simetria esférica que representa a solução externa a um buraco negro estático e neutro. As coordenadas esféricas usuais (coordenadas de Schwarzschild) são recuperadas quando feitas as transformações:

$$\begin{aligned}
r &= m(u+1), \\
\vartheta &= \arccos(v).
\end{aligned}$$

Os termos de ordem superior representam, portanto, uma perturbação multipolar na simetria esférica da solução inicial [17]. Como $P_n(v)Q_n(u)$ se anula para $u \to \infty$ e $P_n(u)P_n(v)$ diverge nesse limite (note que a coordenada v é limitada) o coeficiente a_n nos dá o grau de distorção da fonte de acordo com o multipolo interno de ordem n enquanto que b_n representa a contribuição do multipolo externo (associado tipicamente a cascas ou halos) de grau n. Há, na literatura, discordâncias sobre qual expansão multipolar usar, pode-se, por exemplo, partir diretamente da solução com coordenadas esféricas ou usar a expansão para as coordenadas de Weyl usuais (denotadas r e z). Como o nosso estudo ficou restrito a dipolos ou quadrupolos, não há grande problema a ser considerado, ademais, Boisseau e Letelier [30] mostraram que as diferentes expansões prevêem resultados bastante semelhantes relacionados à precessão do perihélio. No Apêndice C trazemos os resultados do estudo de caos em geodésicas em torno de um sistema perturbado via quadrupolos internos.

2.3 Método do Espalhamento Inverso

Em gravitação newtoniana, podemos, a partir de um potencial, definir toda a dinâmica e a cinemática do problema. O potencial gravitacional externo a uma fonte é obtido através da equação de Laplace que é linear e suas soluções obedecem ao princípio da superposição, i.e., $\nabla^2\phi_1 = 0$ e $\nabla^2\phi_2 = 0 \Rightarrow \nabla^2(\phi_1 + \phi_2) = 0$. O estudo do campo gravitacional correspondente a duas distribuições de massa, portanto, pode ser feito com a simples soma de cada um dos potenciais isolados.

Na relatividade geral, todavia, tal superposição simples é impossível devido a não linearidade das equações de Einstein. Em alguns casos particulares, técnicas como transformações de Bäcklund [23] e o Método de Espalhamento Inverso [24] nos permitem a obtenção de soluções em cadeia, ou seja, via superposições não lineares de outras soluções. Belinskii e Zakharov mostraram que as equações de Einstein obtidas para componentes do tensor métrico dependente somente de duas variáveis podem ser integradas via espalhamento inverso. Em um artigo posterior os mesmos autores aplicaram tal método em soluções estacionárias com simetria axial, particularmente soluções multi-solitônicas superpostas à métrica de Minkowski [25]. Posteriormente, Letelier [20] introduziu algumas modificações na técnica possibilitando a sua aplicação em soluções multi-solitônicas em um contexto geral, i.e., superpostas a uma solução axissimétrica conhecida.

As soluções estacionárias axialmente simétricas podem ser escritas na forma geral

$$ds^2 = e^\sigma(dr^2 + dz^2) + \gamma_{ab}dx^a dx^b, \tag{2.8}$$

sendo σ, γ_{ab} funções das coordenadas z e r. Os índices a e b assumem os valores 3 e 4 associado às coordenadas $x^3 = \varphi$ e $x^4 = t$.

Assumindo que

$$\det\gamma = \varepsilon r^2, \tag{2.9}$$

com $\gamma = (\gamma_{ab})$, $\varepsilon = \pm 1$ para a signatura da forma $(+++\mp)$, as equações de Einstein se reduzem a

$$(r\gamma_{,r}\gamma^{-1})_{,r} + (r\gamma_{,z}\gamma^{-1})_{,z} = 0, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{,r} &= -r^{-1} + \frac{\mathrm{tr}(U^2 - V^2)}{4r}, \\ \sigma_{,z} &= \frac{\mathrm{tr}(UV)}{2r}, \\ U &\equiv r\gamma_{,r}\gamma^{-1}, \quad V \equiv r\gamma_{,z}\gamma^{-1}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

a vírgula denota derivada parcial. A equação (2.10) é justamente a condição de integrabilidade da equação (2.11) o que garante que, conhecida a função γ, a função σ pode ser calculada por simples quadratura.

As soluções solitônicas são obtidas a partir do sistema de equações sobredeterminado

$$D_r\psi = [(rU + \lambda V)/(\lambda^2 + r^2)]\psi, \tag{2.12}$$

$$D_z\psi = [(rV - \lambda U)/(\lambda^2 + r^2)]\psi, \tag{2.13}$$

$$D_r \equiv \partial_r + [2\lambda r/(\lambda^2 + r^2)]\partial_\lambda, \tag{2.14}$$

$$D_z \equiv \partial_z - [2\lambda^2/(\lambda^2 + r^2)]\partial_\lambda, \tag{2.15}$$

onde λ é um parâmetro espectral. A condição de compatibilidade do sistemas de equações (2.12)-(2.15) é exatamente a Eq.(2.10). Note que

$$\psi|_{\lambda=0} = \gamma. \tag{2.16}$$

Uma solução é obtida supondo que

$$\psi = \chi\psi_0, \tag{2.17}$$

em que ψ_0 é previamente obtida a partir da métrica original, solução semente. A matriz χ é escolhida com N pólos simples e pode ser escrita, sem perda de generalidades, como

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k}, \tag{2.18}$$

onde a matriz R_k e as funções μ_k dependem apenas das variáveis r e z. Substituindo (2.17) em (2.12 - 2.15) e usando (2.18) chegamos, com auxílio de condições suplementares (veja ref.[25]), às soluções

$$\gamma_{ab} = (\gamma_0)_{ab} - \sum_{(k,l)=1}^{N} \frac{N_a^{(l)}(\Gamma^{-1})_{lk}N_b^{(k)}}{\mu_k\mu_l}, \tag{2.19}$$

em que são usadas as definições:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{kl} &= \frac{m_a^{(k)}(\gamma_0)_{ab}m_b^{(l)}}{r^2 + \mu_k\mu_l}, \\
N_a^{(k)} &= m_b^{(k)}(\gamma_0)_{ab}, \\
m_a^{(k)} &= m_{0b}^{(k)}M_{ba}^{(k)}, \\
M^{(k)} &= \psi_0^{-1}|_{\lambda=\mu_k}, \\
\mu_k &= (\alpha_k - z) \pm \sqrt{(\alpha_k - z)^2 + r^2}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

A solução fica completamente definida a menos das constantes arbitrárias $m_{0b}^{(k)}$ e α_k que são determinadas por condições físicas associadas ao problema em questão. O índice 0 se refere a quantidades calculadas com a métrica semente. Os índices k, l variam sempre de 1 a N para uma solução N-soliton. Foi adotada a convenção de soma de Einstein para os índices a, b. As componentes da métrica obtidas através das equações acima, não satisfazem a condição dada por (2.9). Para que esta seja satisfeita, redefinimos $\bar{\gamma}$ como

$$\bar{\gamma} = \frac{r\gamma}{\sqrt{-\det\gamma}}. \tag{2.21}$$

A função σ pode ser obtida substituindo (2.19) na equação (2.11) resultando em

$$\sigma = \sigma_0 + \log\left[r^{N^2/2}\left(\prod_{k=1}^{N}\mu_k\right)^{N+1} \times \prod_{k=1}^{N}(\mu_k - \mu_l)^{-2}\det\Gamma\right] + \log C_N. \tag{2.22}$$

Pelas relações em (2.19) vemos que a maior dificuldade se tornou a definição da matriz auxiliar ψ_0. O sistema que estudamos parte de uma semente diagonal (particularmente, um termo que representa um multipolo puro). Partimos, portanto, de

$$(\gamma_0)_{ab} = \mathrm{diag}(r^2 e^{-\phi}, -\epsilon e^{\phi}), \tag{2.23}$$

É natural assumir ψ_0 também diagonal e usando as equações (2.12 - 2.15) chega-se a

$$\det(\psi_0) = \epsilon(-r^2 + \lambda^2 + 2\lambda z). \tag{2.24}$$

Como a matriz ψ_0 é diagonal, podemos parametrizá-la da forma

$$(\psi_0)_{33} = (r^2 - \lambda^2 - 2\lambda z)\exp(-F), \tag{2.25}$$

$$(\psi_0)_{44} = -\epsilon\exp(F). \tag{2.26}$$

A função F depende de λ, r e z, entretanto, vemos em (2.19) e (2.20) que ψ_0 é calculada sempre ao longo da trajetória dos polos, i.e., $\lambda = \mu_k$. Desta maneira e definindo $F_k \equiv F_{\lambda=\mu_k}$ obtêm-se, a partir de (2.12 - 2.20, 2.23), as equações abaixo

$$\begin{aligned} r\partial_r F_k - \mu_k \partial_z F_k &= r\phi_{,r}, \\ r\partial_z F_k + \mu_k \partial_r F_k &= r\phi_{,z}, \end{aligned}$$

que podem ser resolvidas por simples quadratura. A integrabilidade das equações acima é garantida pela definição de μ_k e pelas equações (2.10), i.e., a princípio a toda solução de Weyl pode ser associada uma solução N-soliton estacionária.

As equações que resultam na solução de ψ_0 a partir de (2.23) se aplicam quando partimos de uma métrica diagonal axialmente simétrica. Para soluções solitônicas obtidas a partir de uma semente não diagonal podemos usar a técnica descrita em [26].

2.4 Métrica de Kerr com termos multipolares

Uma aplicação útil do método de espalhamento inverso é a obtenção da métrica de Kerr (que representa um buraco negro girando). Tal resultado foi mostrado por Belinskii e Zakharov [25]. A técnica consiste apenas em escrever uma solução 2-sólitons partindo da métrica de Minkowski para, depois, definindo as constantes corretas chegar-se à métrica que corresponde à Kerr.

A solução 2-soliton é construída substituindo em (2.19, 2.20) os valores:

$$\begin{aligned} m_{00}^{(1)} &= q_1, \\ m_{01}^{(1)} &= -2p_1\alpha_1, \\ m_{00}^{(2)} &= q_2, \\ m_{01}^{(2)} &= -2p_2\alpha_2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

A coordenada z pode ser escrita em função de α_1, α_2 e μ_1, μ_2. Com essas definições obtemos γ_{ab}. As componentes físicas da métrica (2.21) têm a forma:

$$\bar{\gamma}_{ab} = \frac{\mu_1\mu_2}{r^2}\gamma_{ab}. \tag{2.28}$$

Escolhendo inicialmente como semente a métrica de Minkowski, as funções auxiliares F_k se anulam. A métrica de Kerr é obtida com as definições $q_1/p_2 = p_1/q_2$ e, posteriormente,

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_2^2 - q_2^2}{p_2^2 + q_2^2}, \\ q &= \frac{-2p_2q_2}{p_2^2 + q_2^2}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Após a computação algébrica das soluções 2-solitons ser feita em coordenadas de Weyl, escrevemos a solução explícita em coordenadas prolatas usando as relações:

$$\begin{aligned} r^2 &= m_0^2(1-v^2)(u^2-1), \\ \mu_1 &= m_0(u+1)(1-v), \\ \mu_2 &= m_0(u-1)(1-v). \end{aligned}$$

Para finalizar, é necessária uma mudança de coordenadas a fim de se evitar a existência de singularidades cônicas ao longo do eixo de simetria, i.e., estamos exigindo que

$$\lim_{r\to 0} r^2 g_{rr}/g_{\varphi\varphi} = 1, \tag{2.30}$$

para tanto, a coordenada φ é redefinida de modo que as componentes da métrica se escrevem como:

$$\begin{aligned} g_{\varphi t} &= -2qm_0\gamma_{00} + p\gamma_{01}, . \\ g_{\varphi\varphi} &= p^2\gamma_{11} + (2qm_0)^2\gamma_{00} - 4pqm_0\gamma_{01} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Para recuperar a métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist [27] deve-se usar

$$\begin{aligned} p &= \sigma/m, \\ q &= a/m, \end{aligned}$$

e as coordenadas esféricas R e ϑ são obtidas por

$$\begin{aligned} u &= (R-m)/\sigma \\ v &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

A função σ é determinada diretamente da Eq.(2.22)

Todos os valores atribuídos às constantes p_i e q_i bem como as definições de μ_k e rotação das componentes associadas a t e φ do tensor métrico devem ser repetidos quando queremos calcular uma métrica que representa a superposição de Kerr em uma semente diagonal qualquer via

Belinski-Zakharov. A única dificuldade é a determinação da função auxiliar F. Exemplificamos, a seguir, com a métrica que representa um buraco negro de Kerr cercado por um halo dipolar. A solução-semente por nós utilizada não contem o termo multipolar de ordem zero que representa um buraco negro. Em uma solução que representa um dipolo externo puro, partimos, portanto, de

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{Duv}dt^2 + e^{-Duv}[(u^2-1)(1-v^2)d\varphi^2 + e^{-\frac{D^2}{4}(u^2v^2-u^2-v^2)} \\ &\times (u^2-v^2)[\frac{du^2}{u^2-1} + \frac{dv^2}{1-v^2}]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Usando como semente a métrica acima, uma superposição dois sólitons seguindo os moldes explicados nessa seção representa um buraco negro de Kerr cercado de um dipolo externo. Nesse caso, a função auxiliar F_k se escreve como

$$F_k = \frac{Dr^2}{\mu_k} \tag{2.33}$$

No artigo apresentado no apêndice C estudamos o caso que representa a solução exterior a uma fonte girante deformada via quadrupolo interno. (notem que não podemos falar em buraco negro estacionário deformado uma vez que após o colapso de uma estrela sobram apenas a carga, a massa e o seu momento angular, vide Chandrasekhar [28]).

2.5 Caos em Relatividade Geral

A comparação de estruturas formadas no contexto da teoria newtoniana e no da relatividade geral pode ser feita qualitativamente quando atribuímos um potencial médio a estruturas como galáxias ou aglomerados a fim de se estudar o comportamento de órbitas de partículas-teste sujeitas a esse campo [19].

Partindo dessa linha de raciocínio, Vieira e Letelier obtiveram alguns resultados importantes como o que mostra o comportamento caótico de geodésicas da métrica que representa um buraco negro cercado por um halo dipolar [31]. O análogo newtoniano é totalmente integrável [32].

A grande diferença entre os dois casos pode ser analisada com um simples estudo qualitativo do potencial efetivo em ambos os casos. Partamos, portanto, da métrica de Schwarzchild em coordenadas esféricas

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{2.34}$$

das equações da geodésica determinam-se as constantes de movimento

$$L = r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{d\tau}^2, \tag{2.35}$$
$$E = (1 - \frac{2M}{r})\frac{dt}{d\tau}^2.$$

O potencial efetivo é construído através de

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1, \tag{2.36}$$

que, usando, Eq.(2.34), se reescreve (assumindo o plano $\vartheta = 0$) como

$$(E^2 - \dot{r}^2)\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{L^2}{r^2} = 1. \tag{2.37}$$

De onde se conclui que o movimento somente é possível na região

$$E^2 - (1 + \frac{L^2}{r^2})(1 - \frac{2M}{r}) \geq 0. \tag{2.38}$$

A dedução feita em mecânica newtoniana parte da conservação da energia mecânica e chega à condição

$$\frac{2E_N}{m} - \frac{L_N^2}{m^2 r^2} + \frac{2GM}{r} \geq 0. \tag{2.39}$$

Para efeito de comparação com relatividade geral, redefinem-se as grandezas adimensionais (considerando unitária a velocidade da luz no vácuo e a constante de gravitação de Newton, i.e., $c = 1$ e $G = 1$) $L = L_N/m$ e $E = \sqrt{1 + 2E_N/m}$ de modo que o movimento exista para

$$E^2 - 1 - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2M}{r} \geq 0. \tag{2.40}$$

Na Fig.2.1 se observa um ponto de máximo na curva que representa o potencial efetivo. Pensando em termos de coordenadas cilíndricas, o que estamos vendo é um corte do potencial efetivo no plano $z = 0$. Em todo o espaço, o ponto de máximo neste corte representa um ponto de sela. Na Fig.2.2, tal ponto não existe. Perturbações (por exemplo periódicas) facilitariam o caos em sistemas como esse graças a existência de uma região no espaço de fase com curvatura negativa. Resultados numéricos mostram que é necessária a existência de curvatura negativa na variedade a que estarão confinadas as órbitas no espaço de fase (pensando em um sistema hamiltoniano) para que tais órbitas tenham comportamento caótico [33]. Podemos pensar em tal resultado à luz do formalismo do emaranhado homoclínico para mapas unitários associando o ponto de sela a um ponto fixo hiperbólico ou órbitas periódicas instáveis. Um estudo dos potenciais quadrupolares perturbados via método de Melnikov está feito na ref. [21].

Na expansão multipolar, os termos de ordem superiores podem agir de maneira semelhante a uma perturbação periódica. Na expansão do potencial gravitacional em harmônicos esféricos em um sistema com simetria axial (o potencial não depende do ângulo φ) podemos escrever o potencial que representa um monopolo + um dipolo externo como

$$\Phi(r, \vartheta) = \alpha/r + Dr\cos\vartheta, \tag{2.41}$$

trocando a coordenada ϑ por ωt teremos exatamente um potencial que representa um monopolo periodicamente perturbado

$$\Phi(r, \vartheta) = \alpha/r + Dr\cos(\omega t). \tag{2.42}$$

Desta maneira, se pode associar aos termos multipolares uma perturbação periódica (de um modo geral não tão diretamente como na equação acima). O comportamento caótico de geodésicas sob ação do campo que representa o sistema Buraco Negro + Casca Externa (simulada por termos multipolares crescentes) está detalhado em Vieira e Letelier [22]. Apresentamos no apêndice C resultados sobre o comportamento das órbitas de partículas teste na geometria que representa uma fonte deformada por um termo quadrupolar que decai. O comportamento irregular das geodésicas é limitado a um pequeno intervalo de valores de momento angular e energia o que é previsível porque a perturbação (no caso o termo quadrupolar) decresce rapidamente com a distância.

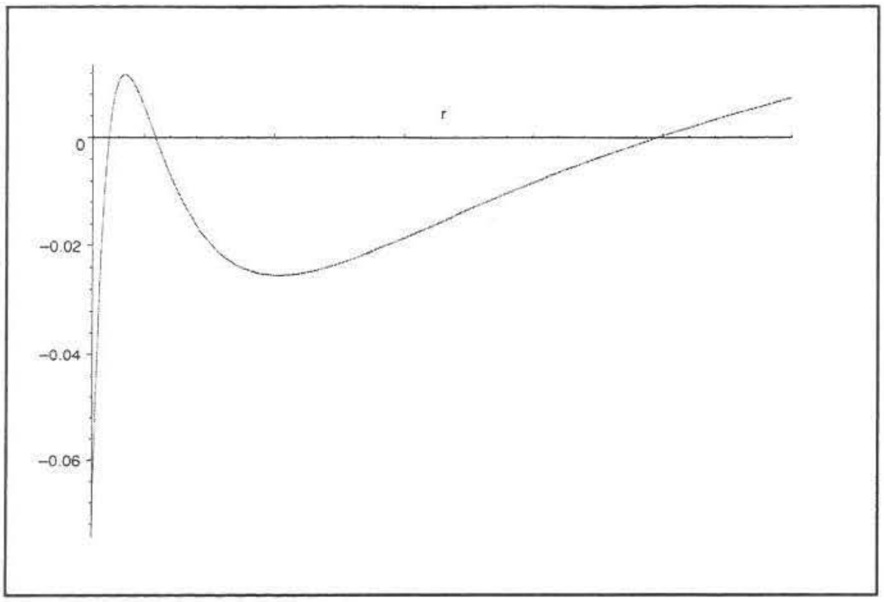

Figura 2.1: Corte do potencial efetivo para buraco negro de Schwarzschild. Foi usado $m = 1$, $L = 3.7$ e $E = 0.97$

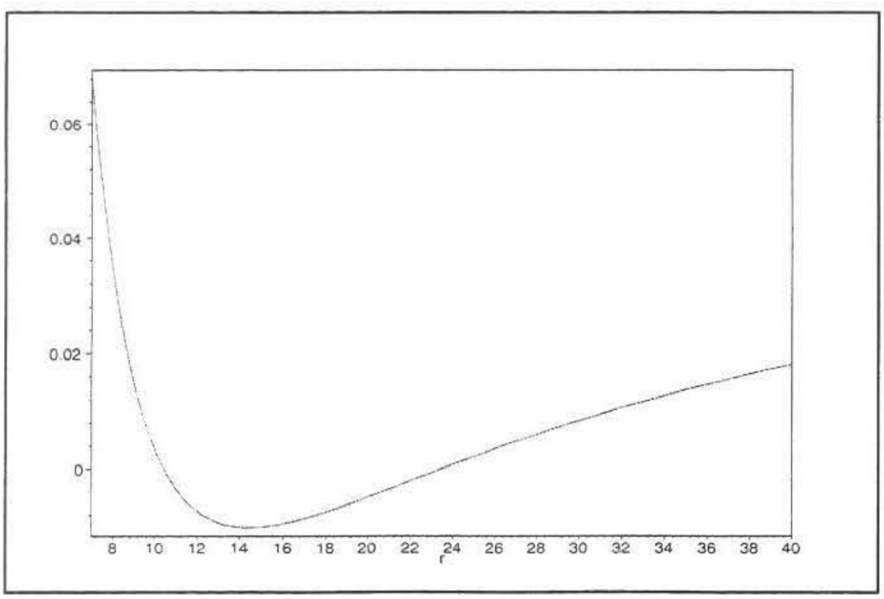

Figura 2.2: Corte do potencial efetivo newtoniano gerado por uma massa pontual. Foram usadas as mesmas constantes do caso anterior

O estudo de caos em relatividade geral se extende para outros sistemas. Além dos citados ao longo da tese, destacamos o estudo de geodésicas temporais abertas em sistemas tipo núcleo-halo realizado por Moura e Letelier [34]. Podemos citar, ainda, o trabalho de Letelier e Vieira [35] onde um sistema tipo núcleo-halo com carga de NUT (Newman-Unti-Tamburino) foi considerado. Ainda na linha de buracos negros perturbados, devemos considerar o trabalho de Moeckel [36] que usa o método de Melnikov. Saa [37] analisou movimentos geodésicos em torno de discos. Levin [38] estudou geodésicas nulas em torno buracos negros carregados, Kokubum [39] analisou regimes caóticos de emissão de ondas gravitacionais enquanto que Podolský e Vaselý [40] obtiveram geodésicas caóticas em soluções de ondas gravitacionais. Outra frente de pesquisa é o estudo de aspectos caóticos em modelos cosmológicos [41, 42].

3

Conclusão e Perspectivas de Trabalho

Grande parte do trabalho desenvolvido ao longo da tese e culminando nos artigos apresentados nos apêndices foi apenas um estudo de casos. Destacamos o primeiro trabalho (apêndice A) como aquele que apresenta caos em sistemas com deformação que decai com a distância já que usualmente, na literatura, o estudo de caos é feito em sistemas com cascas ou halos. No artigo apresentado no apêndice C estendemos para o análogo relativístico.

O objetivo que temos é usar os resultados obtidos como base para um estudo de formação de estrutura em tais sistemas porque, em última instância, seria onde observaríamos tais efeitos. Nas considerações finais do apêndice C mostramos que, em termos de tempo de relaxação, os efeitos da instabilidade das geodésicas poderiam ser importantes justamente no tempo que leva para uma galáxia média se formar.

A maneira mais apropriada para que obtenhamos resultados mais realistas é o cálculo de auto-interação de massas que compõem modelos de galáxias. Uma frente de trabalho consiste na aplicação do pseudo potencial de Paczynski Witta (PW) no estudo de sistemas galácticos realísticos. Alguns estudos preliminares estão sendo feitos associados ao Prof Dr Andre B. Ribeiro. A idéia é atribuir a um buraco negro central o potencial PW e considerar que as partículas interagem entre si segundo a gravitação newtoniana. Para isso podemos usar um código tipo árvore usualmente aplicado em sistemas gravitantes.

Uma outra proposta que estamos desenvolvendo é considerar a auto interação usual entre as partículas de prova em um contexto definido por uma geometria, por exemplo a de Schwarzchild. A idéia é adicionar, na equação da geodésica um termo de força. Desta maneira teríamos:

$$\frac{d^2x^{\mu(a)}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha(a)}}{d\tau}\frac{dx^{\beta(a)}}{d\tau} = \frac{1}{M}\sum_{b\neq a}^{n} F^{\mu(ba)}, \tag{3.1}$$

onde F^{μ} teria a seguinte forma:

$$F^{i(ba)} = -g^{ij(a)}u^{0(a)}(-\nabla_j^{(a)}\Phi^{(ba)}), \tag{3.2}$$

$$F^{t(ba)} = g^{tt(a)}u^{j(a)}(-\nabla_j^{(a)}\Phi^{(ba)}), \tag{3.3}$$

$i = 1, 2, 3$

O potencial $\Phi^{(ba)}$ representa o potencial gravitacional newtoniano devido a partícula b que age sobre a partícula a. A sua forma é

$$\Phi^{(ba)} = \frac{-m_b}{|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|}, \tag{3.4}$$

as constantes são: M = massa do buraco negro, m_b = massa da partícula b. Adotamos unidades tais que a constante de gravitação $G = 1$. Essa técnica só pode ser usada quando $M \gg \max(m_b)$ e as velocidades de cada partícula têm que ser bem menores do que a da luz porque não estamos considerando o retardamento do potencial.

Aplicando para a métrica de Weyl como a mostrada em (2.1), podemos provar que a soma dos momentos angulares e a soma das energias de todas as partículas se conservam, i.e.,

$$D_\tau\left(\sum_a^n m_a(r^{(a)})^2 e^{-2\lambda^{(a)}}\frac{d\varphi^{(a)}}{d\tau}\right) = 0, \tag{3.5}$$

$$D_\tau\left(\sum_a^n m_a e^{2\lambda^{(a)}}\frac{dt^{(a)}}{d\tau}\right) = 0. \tag{3.6}$$

Numericamente, tal resultado é importante para se testar os erros computacionais. O interessante desta metodologia é que nos permite ver diretamente os efeitos da geometria em um sistema auto-interagente e a sua limitação computacional pode ser minimizada com o auxílio de técnicas já estabelecidas na análise de sistemas de muitos corpos.

Referências Bibliográficas

[1] Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mechanique Celeste,* (Gauthier-Villars, Paris, 1892)

[2] Mori, H. "Transport, Collective Motion and Brownian Motion" *Prog. Theor. Phys.* **33** (1965) 423

[3] Kauffman, S.A. *The Origins of Order* (Oxoford University Press, New York 1993)

[4] Tabor, M. *Chaos And Integrability In Nonlinear Dynamics.* (Wiley & Sons 1989)

[5] Ott, E. *Chaos in dynamical systems.* (Cambridge University Press 1994)

[6] Arnold, V.I. *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica* (Mir, Moscou 1987)

[7] Goldstein, H. *Classical Mechanics* (Adison-Wesley 1980)

[8] Arnold, V.I and Avez, A. *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (W.A. Benjamin Inc., New York 1968)

[9] Berry, MV "Regular and Irregular motion", *Topics in Nonlinear Dynamics, Am. Inst. Phys Conf. Proc.* **46** (1978) 16

[10] Moser, JK "Is The Solar System Stable", *Math. Intelligencer* **1** (1978) 65

[11] Wightman, AS "The Mechanisms of Stochacity in Classical Dynamical Systems" in Perspectives In Statistical Physics (Noth Holland 1981)

[12] G. Benettin, L. Galgani and A. Giorgilli, "Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments". *P*hys. Rev. A**14** (1976) 2338

[13] B. Doubrovine, S. Novikov and A. Fomenko, *Géométrie Contemporaine-Méthode et Aplication.* (Mir, Moscou 1985)

[14] Kramer, D, Stephani, H. and Herlt, E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, 1980)

[15] Letelier, P.S. & Oliveira S.R. " Exact Self-Gravitating Disks and Rings - A solitonic approach" *J. Math. Phys* **28** (1987) 165

[16] Bonnor, W.B. & Martins, M.A.P. "The interpretation of some static vacuum metrics", *Class. Quantum Grav.* **8** (1991) 727

[17] Quevedo, H. "General static axisymmetric solution of Einstein vacuum field-equations in prolate spheroidal coordinates" *Phys Rev. D* **39**, (1989) 2904

[18] Paczyński, B. & Witta, P.J. "Thick accretion disks and supercritical luminosities" *Astron. Astroph.* **88** (1980) 23

[19] Binney, J. and Tremaine, S. " Galactic Dynamics" (Princeton University Press, New Jersey 1987)

[20] Letelier, P.S. "Static and stationary multiple soliton solutions to the Einstein equations ", *J. Math. Phys.* **26** (1985) 467

[21] Letelier, P.S. & Vieira, W.M. "Chaos in periodically perturbed monopole + quadrupole-like potentials", *Phys. Lett. A* **242** (1998) 7

[22] Vieira, W.M. & Letelier, P.S. "Relativistic and Newtonian Core-Shell Models: Analytical and Numerical Results" *Astroph. J.* **513** (1999) 383

[23] Neugebauer G, "Bäcklund transformations of axially symmetric stationary gravitational fields", *J. Phys. A - Math. Gen.* **12** (1979) L67

[24] Belinskii, V. A. & Zakharov,"Integration of the Einstein equation by means of the inverse scattering problem technique and construction of exact soliton solutions", *Sov. Phys. JETP* **48** (1978) 985

[25] Belinskii, V. A. & Zakharov, V. E. "Stationary gravitational solitons with axial symmetry", *Sov. Phys. JETP* **50** (1979) 1

[26] Letelier, P.S. "Soliton Solution to the vacuum Einstein equations obtained from a nondiagonal seed solution ", *J. Math. Phys.* **27** (1985) 564

[27] Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R. "The Large Scale Structure of Space-Time" (Cambridge Universuty Press, 1973)

[28] Chandrasekhar, S. "The Mathematical Theory of Black Holes", (Oxford University Press, New York 1983)

[29] E. Gueron and P.S. Letelier, - Weyl Solutions: Solitons,Strings and Struts, in "Gravitation: The Spacetime Structure", P.S. Letelier and W.A. Rodrigues, Eds. (World Scientific, Singapore 1994) pp 339-345

[30] Boisseau, B and Letelier, PS "Relativistic Multipoles and the Advance of the Perihelia". (Versão preliminar, 2001)

[31] Vieira, W.M. & Letelier, P.S. "On the integrability of halo dipoles in gravity", *Phys. Lett. A* **228** (1997) 22

[32] Grammaticos, B., Dorizzi, B. and Ramani, A, "Extending Hamiltonian Systems from 2 to N Dimensions", *Phys. Lett. A* **109** (1985) 81

[33] Balazs, N.L. and Voros, A. "Chaos on the Pseudosphere" *Phys. Rep.* **143** (1986) 109

[34] Moura, A.P.S. & Letelier, P.S. "Chaos and fractals in geodesic motions around a nonrotating black hole with halos", *Phys. Rev. E* **61** (2000) 6506

[35] P.S. Letelier, P.S. & Vieira, W.M. "Chaos and Taub-NUT related spacetimes" *Phys. Lett. A* **244** (1998) 324

[36] Moeckel, R. "A Nonintegrable Model in General-Relativity" *Comm. Math. Phys.* **150** (1992) 415

[37] Saa, A. "Chaos around the superposition of a monopole and a thick disk" *Phys Lett A* **269** (1999) 204

[38] Levin, J "Chaos may make black holes bright", *Phys. Rev. D* **60** (1999) 064015.

[39] Kokubum, F. "Gravitational Waves from the Newtonian plus Hénon-Heiles system", *Phys. Lett. A* **245** (1998) 358

[40] Podolský, J. & Vaselý, K. "Chaos in *pp*-wave spacetimes", *Phys. Rev. D* **58** (1998) 081501

[41] Francisco, G. & Matsas, G.E.A. "Qualitative and Numerical Study of Bianchi IX Models", *Gen. Rel. Grav.* **20** (1988) 1047

[42] Hobill, D. Burd, A. & Coley A. *Deterministic Chaos in General Relativity* (Plenum Press, 1994)

Chaotic Motion Around Prolate Deformed Bodies

A

ref.: *Phys. Rev. E* **63** 035201(R) (2001)

Chaotic Motion Around Prolate Deformed Bodies

Eduardo Guéron[1] and Patricio S. Letelier[2]

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil

The motion of particles in the field of forces associated to an axially symmetric attraction center modeled by a monopolar term plus a prolate quadrupole deformation are studied using Poincaré surface of sections and Lyapunov characteristic numbers. We find chaotic motion for certain values of the parameters, and that the instability of the orbits increases when the quadrupole parameter increases. A general relativistic analogue is briefly discussed.

PACS numbers: 05.45.+b, 95.10.Fh, 95.10.Ce, 04.20.Jb, 03.20.+i

Attraction forces represented by a monopolar plus a prolate quadrupolar distribution of masses (charges) are a good approximation for elongated massive (charged) bodies. Examples range from astrophysics to nuclear physics. There are many observed galaxy clusters with a cigar like shape [1]. Also, the nuclear charge of light gold atoms has been reported as having

[1]e-mail: gueron@ime.unicamp.br

[2]e-mail: letelier@ime.unicamp.br

a large prolate deformation [2]. Most of the Dwarf Galaxies in the Virgo Cluster may obey the "prolate hypothesis", i.e., they probably have a prolate spheroidal shape[3]. Asteroids also have a prolate shape, but usually they are not axisymmetric. Merrit[4] found, from detailed modeling of triaxial galaxies, that most of the galaxies must be nearly axisymmetric, either prolate or oblate.

Classical, as well as quantum chaos have been studied in a variety of axially symmetric fields of forces. In particular, attraction centers described by potentials that are the sum of two terms: a monopolar term and a quadrupolar deformation. Furthermore this center is "perturbed" by an external distribution of masses (charges) represented by its external multipolar moments, i.e.,

$$V = -\alpha/R - qP_2(\cos\vartheta)/R^2 + V_P, \tag{A.1}$$

$$V_P = Q_1 R P_1(\cos\vartheta) + Q_2 R^2 P_2(\cos\vartheta) + \ldots . \tag{A.2}$$

Sometimes the monopolar term is changed by the potential of a spring [5]. In general, in all these cases the terms that originate the chaos are the external multipolar moments.

We shall consider the simplest, albeit, important case of a particle moving in the field of a monopole plus a quadrupole deformation. This deformation is usually considered to be the major deviation from spherical symmetry. In cylindrical coordinates, (r, φ, z), the field takes the generic form,

$$U(r,z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{q(2z^2 - r^2)}{2(r^2+z^2)^{5/2}}, \tag{A.3}$$

where α is a constant that may be associated with the central body mass (charge). It is instructive to have a special model in mind, consider two equal masses located on the z-axis symmetrically, at $z = -a$ and $z = +a$. The gravitational potential of the above mass configuration up to the order a^3 is (A.3) with $q = 2\alpha a^2$. We shall use $\alpha = 1$ without loss of generality. Note that we are not considering external multipolar moments ($V_P = 0$), i.e., only deformed cores will be studied.

We can distinguish two cases depending on the sign of q. The first is the oblate deformation case, $q < 0$. This is the common case for bodies deformed by rotation and has been analyzed in astronomy for more than 200 years. The integrability of the Newton equations for a particle moving in the gravitational field of an axially symmetric oblate body is an unsolved problem. It is known as the classical problem of the existence of the third isolating integral of motion [6]. There are numerical evidences that orbits of particles moving around a monopole plus an oblate quadrupole are not chaotic. The second case is the prolate deformation case, $q > 0$; that is the one that we shall discuss in this Rapid Communication. In this case we have a monopolar field (the usual Kepler problem) "perturbed" by a quadrupolar term, in other words, we have a typical situation wherein the KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) theory applies [7].

First we study the contours of the effective potential $U_{eff} = U + h_z^2/(2r^2)$, where $h_z = r^2\dot{\varphi}$ is the axial specific angular momentum that due to the axial symmetry is conserved. We also have the conservation of the total specific energy, $E = (\dot{r}^2 + \dot{z}^2)/2 + U_{eff}$. Thus we have that the motion is completely determined by the functions $r = r(t)$ and $z = z(t)$. Then, we have a four-dimensional phase space. But, due to energy conservation the motion actually takes place in a three dimensional space. An adequate tool to investigate the trajectories in this phase space is the Poincaré surface of section method. Now let us comeback to the effective potential contours. In Figure A.1 we plot the level contours of U_{eff} for $L_z = 0.83$ and $E = 0.464$ and different values of the quadrupole moment parameter: (a) $q = 0.3$, (b) $q = 0.5$, (c) $q = 0.85$, and (d) $q = 0.95$. Thus, for these values of the parameters the motion of the particle is confined to toroidal regions that do not contain the symmetry axis. Note that for the last case we have two nonconnected regions.

The particles move in the reduced phase space $(p_r = \dot{r}, r, z)$. Note that $p_z = \dot{z}$ is determined by the energy conservation. In Figure A.2, for case (a), we present the intersection points of some particle trajectories with the plane $z = 0$. The picture is the one for regular orbits. The case (b) is analyzed in Figure A.3, using the same surface section. We find regions of nondestroyed tori together with chaotic regions in concordance with the KAM theory. In

Figure A.4 we show again the case (b) but, now with a different section, $z = 0.4$. We see that the integrable and chaotic regions are deformed depending on the chosen section. We also studied the case (c) that is quite similar to the former, so we shall not present it here. We find that increasing the quadrupole moment the size of the chaotic regions also increases. And finally, in Figure A.5 we study orbits in one of the nonconnected regions of the case (d). In this last case the surface section is taken as $z = 0.4$, again we find large regions of chaotic behavior and some nondestroyed tori. In summary, we find chaotic behavior of orbits for several values of prolate quadrupole moment.

To quantify the degree of instability of the orbits we shall study their associated Lyapunov characteristic numbers ($\mathcal{N}$) that are defined as the double limit

$$\mathcal{N} = \lim_{\substack{\delta_0 \to 0 \\ t \to \infty}} \left[\frac{\log(\delta/\delta_0)}{t} \right], \tag{A.4}$$

where δ_0 and δ are the deviation of two nearby orbits at times 0 and t respectively. We get the largest $\mathcal{N}$ by using the technique suggested by Benettin et al. [8]

We fix the value of the constants of motion as $L_z = 0.83$ and $E = 0.464$, and choose the same values of quadrupole parameters used to plot the Poincaré sections. For the value $q = 0.3$ it was chosen the reference orbit with initial conditions: $z = 0$, $p_r = 0$, and $r = 0.85$, and $\delta_0 \simeq 10^{-9}$, we found $\mathcal{N} \lesssim 10^{-4}$ that characterizes a stable system. With $q = 0.5$ and initial conditions: $z = 0$, $p_r = 0.2$, and $r = 1.25$, we have $\mathcal{N} \simeq 0.045$ (± 0.005). Finally, for $q = 0.95$, and $z = 0.4$, $p_r = 0.05$, and $r = 0.95$, we obtain $\mathcal{N} \simeq 0.09$ (± 0.015). We see that the degree of instability increases when the quadrupole parameter increases for fixed constants of motion.

As we said before, there are numerical evidences that orbits of particles moving around a monopole plus an oblate quadrupole are not chaotic. The difference between the oblate and the prolate case can be understood analyzing the critical points of the effective potential U_{eff}. In particular, the existence of the saddle points that is one of the main ingredients to have instable motion. We find that the critical point, $r = \sqrt{(3q + 2L_z^2)/2\alpha}$, $z = 0$, is a saddle point if the parameters obey the two conditions, $L_z^2 < 3q$ and $3L_z^2 > \sqrt{2\alpha/3}$. therefore when $q < 0$, the oblate case, no real L_z can obey the first of these condition.

The Newtonian motion of a particle moving in the potential (3) has a general relativistic analogue. The potential is replaced by a metric solution to the vacuum Einstein equation and the particle motion equation by the geodesic equation. The instability of geodesics in metrics associated to a black hole surrounded by a shell of matter was studied in some detail in [9].

A solution to the Einstein equations that has as a Newtonian limit a potential like (A.3) is the Erez-Rosen-Quevedo (ERQ) solution [10]. We did not found chaos in the oblate case, the prolate case is also chaotic. The confinement region for the relativistic motion constants, $E = 0.937$, and $L_z = 3.322$, and the quadrupole parameter $q = 5.02$ is presented in Fig. 6. The coordinates used in this case are spheroidal coordinates, that are the ones appropriate for the ERQ solution, they are related to the usual cylindrical coordinates by $u = (R_+ + R_-)/(2m)$, and $v = (R_+ - R_-)/(2m)$, with $R_\pm = (r^2 + (z \pm m)^2)^{1/2}$. We have two regions of confinements that we have labeled II and III. In Fig. 7 we present a Poincaré section for particles moving in the region II, the section is taken as $v = 0$, i.e., $z = 0$; u, p_u are canonical conjugate variables. We see a phase space with a large region of chaotic motion. We shall present a complete study of geodesic in ERQ spacetimes elsewhere.

Some dense cores in dark clouds have been found to have prolate spheroidal shape[12]. Then a prolate geometry has to be considered as initial condition in the star formation process. We think that the strong instability presented here may play a crucial effect in the formation of structures in starts [11].

We want to finish this short communication by reminding that in nonlinear systems of equations chaos is the rule rather than the exception. Thus simple systems with a minimum of structure play an important role in the physical, as well as, mathematical understanding of chaos. A good example is the paradigmatic Henón-Heiles system wherein the "simple" addition of a x^2y term in the potential of two uncoupled oscillators (integrable motion) has dramatic consequences that are the physical manifestation of the creation of a saddle point together with a perturbation. In the case presented here, we have a similar situation, the prolate-quadrupole potential also adds a saddle and a perturbation.

The authors thank CNPq and FAPESP for financial support and M.A.M. Aguiar (IFGW-UNICAMP) for several discussions concerning chaos.

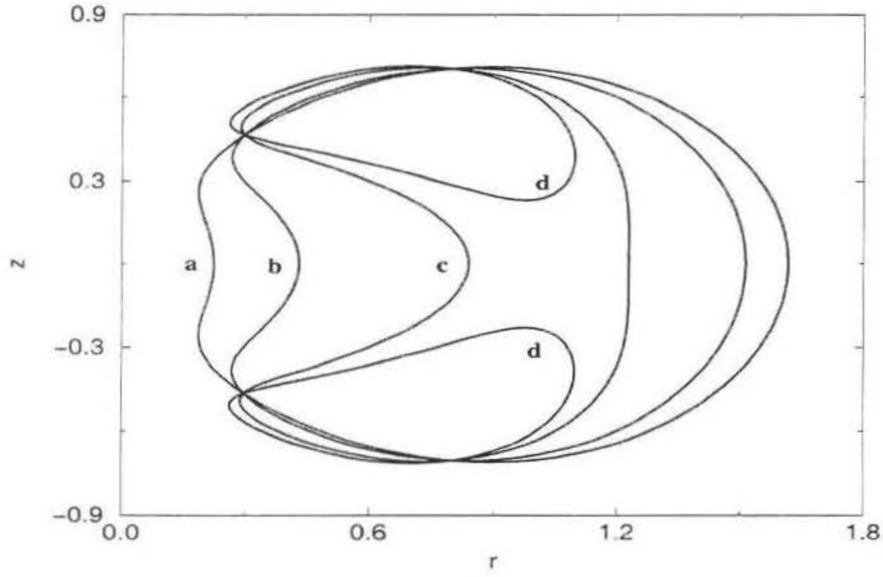

Figure A.1: We plot the level contours of U_{eff} for $L_z = 0.83$ and $E = 0.464$ and different values of the quadrupole moment parameter: a) $q = 0.3$, b) $q = 0.5$, c) $q = 0.85$, and d) q=0.95.

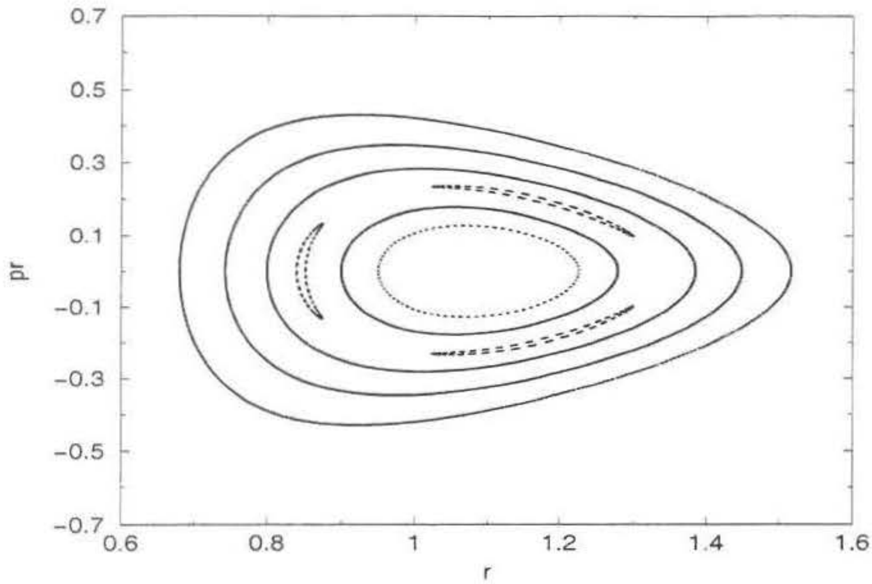

Figure A.2: Surface of section for $L_z = 0.83$ and $E = 0.464$ and $q = 0.3$. The section corresponds to the plane $z = 0$. For these values of the parameters we have the section of regular motion.

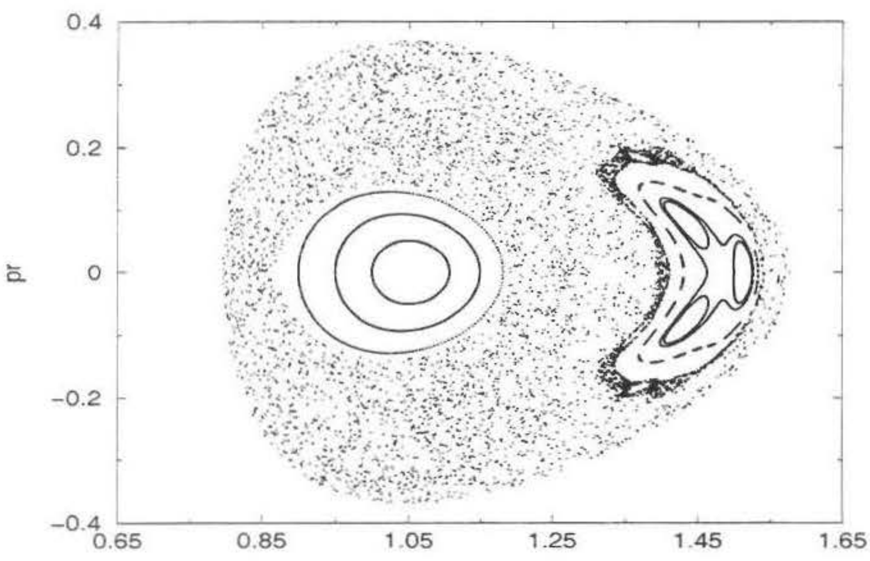

Figure A.3: Surface of section for $L_z = 0.83$ and $E = 0.464$ and $q = 0.5$. The section corresponds to the plane $z = 0$. For these values of the parameters we have the typical section indicating chaotic motion.

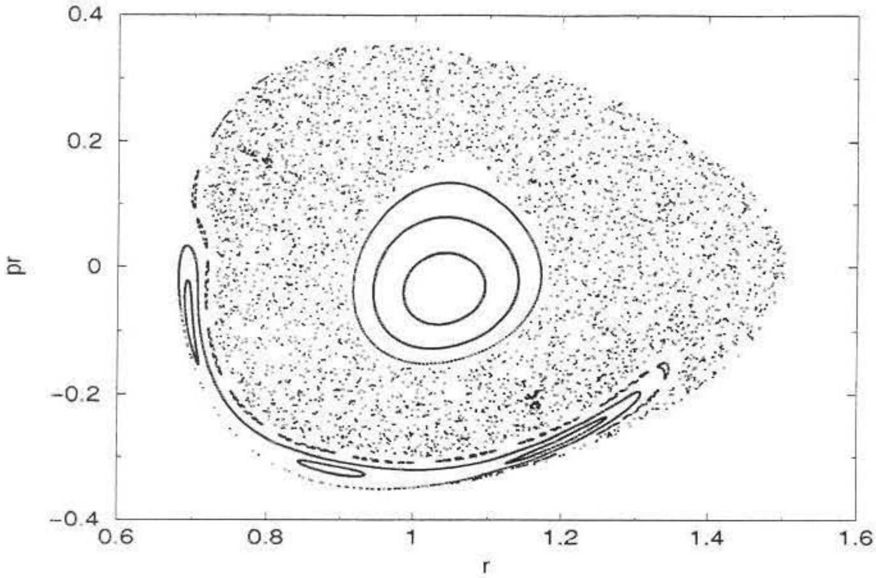

Figure A.4: Surface of section for the same values of the parameters that in the precedent figure, but a different section, $z = 0.4$. We see a different cut of the regular and chaotic regions.

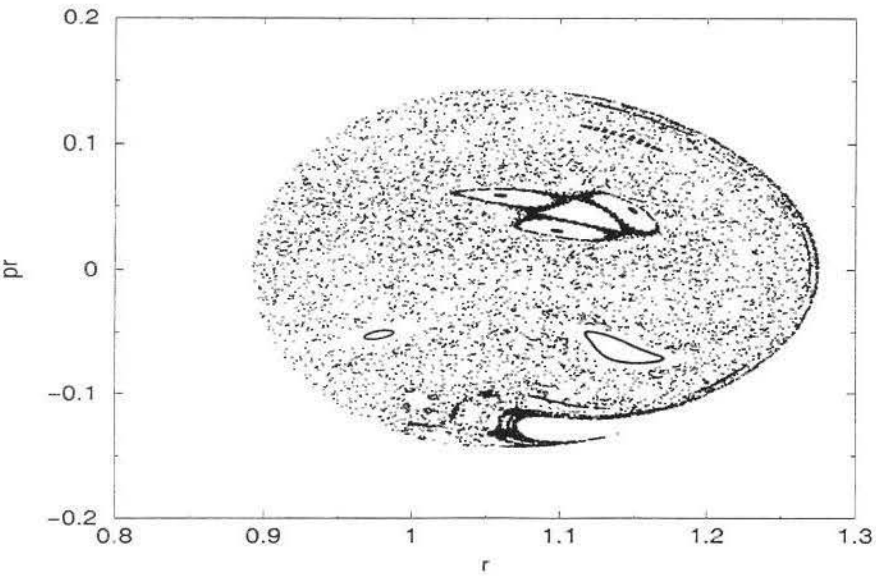

Figure A.5: Surface of section for $L_z = 0.83$ and $E = 0.464$ and $q = 0.95$. The section corresponds to the plane $z = 0.4$. Again we have irregular motion.

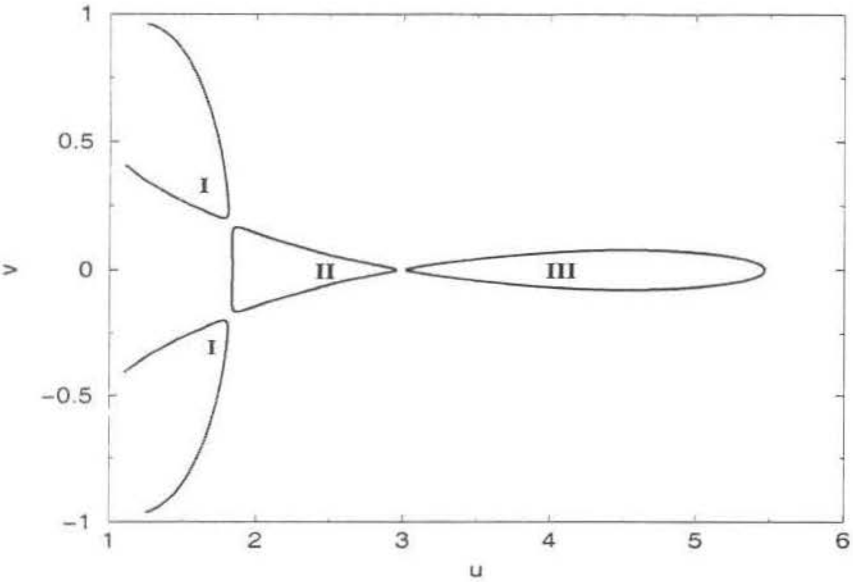

Figure A.6: Level contour for the general relativistic quadrupole + monopole system (ERQ solution). The relativistic constants are $L_z = 3.32$ and $E = 0.937$ and $q = 5.02$. The labels u and v denote spheroidal coordinates.

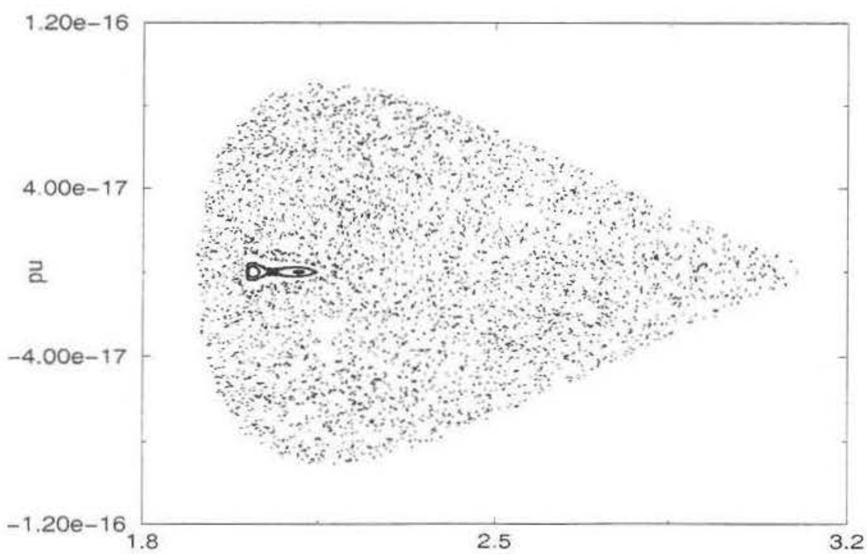

Figure A.7: Surface of section for the region II shown in previous figure. We have a large region of chaotic motion. The section corresponds to the plane $v = 0$ i.e., $z = 0$.

Bibliography

[1] A. R. Cooray, Month. Not. R. Astron. Soc.,**313**, 783 (2000)

[2] B. Hinfurtner, et al., Phy. Rev. Lett.,**67**, 812 (1991).

[3] B. S. Ryden, Astroph. J.**461**, 146 (1996)

[4] D. Merrit, Science**271**, 337 (1996)

[5] See for instance, W.D. Heiss, R. G. Nazmitdinov and S. Radu, Phys. Rev. Lett.**72**, 2351 (1995); Phys. Rev. C 52, 3032 (1995).

[6] See for instance, D. Baccaletti and G. Pucacco " Theory of Orbits" (Springer, Berlin, 1998).

[7] See for instance, J. Guckenheimer and P. Holmes "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields" (Springer, New York, 1983).

[8] G. Benettin, L. Galgani and A. Giorgilli, Phys. Rev. A**14**, 2338 (1976).

[9] W.M. Vieira and P.S. Letelier, Astroph. J.**513**, 383 (1999).

[10] H. Quevedo, Phys Rev. D **39**, 2904 (1989), and references therein.

[11] Work along this line will be soon reported.

[12] P. C. Myers et al., Astroph. J **376**, 561 (1991).

Chaos in pseudo-Newtonian black holes with halos B

ref.: *Astron. Astroph.* **368** 716-720 (2001)

Chaos in Pseudo-Newtonian Black Holes with Halos.

Eduardo Guéron[1] and Patricio S. Letelier[2]

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil

Newtonian as well as special relativistic dynamics are used to study the stability of orbits of a test particle moving around a black hole plus a dipolar halo. The black hole is modeled by either the usual monopole potential or the Paczyńki-Wiita pseudo-Newtonian potential. The full general relativistic similar case is also considered. The Poincaré section method and the Lyapunov characteristic exponents show that the orbits for the pseudo-Newtonian potential models are more unstable than the corresponding general relativistic geodesics.

Introduction.

Analysis of relativistic effects in many-body simulations is not simple, due to the fact that the metric representing their gravitational interaction is far from being known. For the simplest case of two gravitating bodies the metric is known numerically only for few initial conditions

[1]e-mail: gueron@ime.unicamp.br

[2]e-mail: letelier@ime.unicamp.br

and for a limited amount of time (see for example, Marronetti et al. [7]). Assuming that the metric is known, the use of the geodesic equations to determine the trajectory of the bodies is not a trivial problem.

In general, we have three main ways to consider complex systems: a) A full numeric approach with its inherent limitations due to the use of floating point arithmetics and arbitrariness of discretizations of fundamentally continuous functions and variables. Also, we use rather unphysical ad hoc assumptions like the introduction of numerical viscosity. b) The use of perturbative methods that are usually employed together with drastic approximations like the mean field approximation for the potentials in many-body simulations. These approximations introduce irreversibility in an intrinsic reversible situation. c) The modeling of the problem with simpler equations in which one takes into account a few essential features of the problem. In general, this model can be solved in a more exact form of the two preceding case. However, we have changed the initial problem for a simpler one that may alter the results. In other words, there is not a perfect method to solve a complex problem. We believe that all of them are valid when adequate cautions are taken. Furthermore, they are complementary and the mathematical or internal consistence of the methods can be independently checked (at least for some particular cases).

Due to the weakness of the gravitational field, far from the particles' horizon, Newtonian gravity is a reliable descriptor of the gravitational interaction. One can simulate relativistic effects within the Newtonian theory changing the usual potentials to take into account the existence of the horizon. In other words, we can model relativistic effects via a pseudo-Newtonian potential. These models are simple enough to describe complex systems that are far beyond our current knowledge of the full general relativity, e.g., the n-body simulation of the collision of two galaxies to any degree of resolution.

One of the simplest pseudo-Newtonian potentials used to describe the behavior of test particles moving close to a black hole is the Paczyński and Wiita ([8]) pseudo-potential,

$$\Phi = -\frac{GM}{R - R_g}. \tag{B.1}$$

The addition of the term $R_g = 2GM/c^2$ critically changes the particles' trajectory near the source. Some results, such as the last stable circular orbit, are predicted in this model. Other pseudo-Newtonian models can be found in literature, e.g., Semerák and Karas [9], used to describe rotating black holes, i.e., to approximate the Kerr solution.

We believe that the study of the Paczyński and Wiita (PW) potential in simple, albeit nontrivial, situations may shed some light into the correctness of the pseudo-potential approach. In particular, in this article, we study integrability and chaos in a system that represents a spherically symmetric source (monopole) surrounded by a dipolar halo (external dipole), wich is the simplest mean potential used to describe astrophysical systems restricted to a core and halo (see for instance Binney and Tremaine [3]). Different theoretical approaches are used to study this configuration. First we use Newton's second law to find the motion equations for test particles ($\mathbf{a} = -\nabla\Phi$) for two different potentials that describe a core plus a dipolar halo system: a) The standard monopole plus external dipole expansion that solves the usual Laplace equation that is totally integrable, see for instance Grammaticos et al.[5], and b) We replace in the former case the monopole term by the PW potential (B.1). In this case the trajectories are chaotic like in the equivalent full general relativistic system, Vieira and Letelier ([13]).

We also analyze the equivalent cases using the special relativistic dynamics. We solve the equation $a^\mu = F^\mu$ with $a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{dx^\mu}{dt}\right)$ and $F^\mu = \gamma(-\nabla\Phi\cdot\mathbf{v}/c, -\nabla\Phi)$, where $\gamma = (1-\mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$, and Φ is taken as in the Newtonian cases. We first use the monopole plus dipole potential that solves the Laplace equation. A phase space analysis shows that the system is stable. Replacing the monopole term by the PW potential we obtain a very unstable system. We also review the equivalent system in general relativity. The geodesic equations for Schwarzschild monopole plus dipolar halo give us chaotic trajectories in the phase space as shown in Vieira and Letelier ([13]).

In each one of the studied cases we have an integrable Hamiltonian system of equations for the motion of a test particle moving in a spherically symmetric attraction center (standard monopole, PW potential or Schwarzschild metric) that is perturbed by an external dipole term.

In all these situations we can apply the KAM (Kolmogorov, Arnold and Moser) theory, see for instance Tabor ([11]). Since our mass distribution has axial symmetry we are restricted to an effective two-dimensional problem. In the integrable case, in phase space, the orbits of test particles will be confined to a 2-torus. For a constant value of one of the coordinates we obtain a planar section of the phase space. In the integrable case we shall see closed curves for each initial condition, intersections of invariant tori. While in the non-integrable case some tori will be destroyed and the region will be ergodically fulfilled. In order to evaluate the degree of instability of the orbits in each system we also compute the Lyapunov exponents that indicate us how initially close trajectories separate.

Newtonian dynamics.

The standard monopole plus external dipole potential in the usual cylindrical coordinates (r, z, ϕ) is

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2+z^2}} + D\, z, \tag{B.2}$$

where D is the dipolar strength, G the Newton constant, and M the mass of the attraction center. We use units such that $GM = 1$, furthermore we shall take $c = 1$. From the angular momentum and energy conservation we find that the motion is restricted to the region defined by

$$E^2 - 1 - \frac{L^2}{r^2} - 2\Phi \geq 0. \tag{B.3}$$

L is the specific angular momentum of the test particle and $E = \sqrt{1+2E_{mech}}$, where

$$E_{mech} = \frac{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}{2} + \Phi(r, z) + \frac{L^2}{2r^2}$$

is the specific energy. Note that E become imaginary for $E_{mech} < -0.5$ that is the energy of a particle standing on the black hole horizon. The phase space orbits are studied using the Poincaré section method. In Fig. B1 we present the surface of section $z = 0$ for the constants:

$L = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2 \times 10^{-4}$. This surface section characterizes an integrable system as expected.

Now we shall replace the monopolar term by the PW pseudo-Newtonian potential, i.e.,

$$\Phi = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2} - 2} + D\, z. \tag{B.4}$$

Again, the motion of test particles will be restricted to the region that solves (B.3) with Φ given by (B.4). In Fig. B2 we present the surface of section $z = 0$. We take the values for the constants as in the preceding case: $L = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2 \times 10^{-4}$. Contrary to the previous case we observe chaotic orbits in this Poincaré section.

Special relativistic dynamics.

In principle, the use of the special relativistic dynamics should improve the modeling of general relativity with pseudo-Newtonian potentials, see Abramowicz et al. ([1]). Although, these authors found that the predicted spectra often differ rather substantially from those obtained in the full general relativity context. ¿From the relativistic motion equation we get

$$\frac{d}{dt}(\gamma + \Phi) = 0 \Rightarrow \gamma + \Phi = E, \tag{B.5}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\gamma\, r^2}. \tag{B.6}$$

By using the above equations and $u^\mu u_\mu = 1$ we obtain

$$(E - \Phi)^2 (1 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2 - \frac{L^2}{[(E - \Phi) r]^2}) = 1$$

which is used to calculate the region in which the motion is confined. Finally, the motion equations for the variables r and z are,

$$(\Phi - E)\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}(1 - \frac{dr}{dt}^2) - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\frac{dr}{dt} - \frac{L^2}{(E - \Phi) r^3}, \tag{B.7}$$

$$(\Phi - E)\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(1 - \frac{dz}{dt}^2) - \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{dz}{dt}\frac{dr}{dt}. \tag{B.8}$$

As in the previous section, we start with the usual monopole plus external dipole potential field, i.e., we identify Φ with (B.2). In Fig. 3 we draw the Poincaré section defined by the plane $z = 0$. The constants are the same of the preceding section, $L = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2 \times 10^{-4}$. We notice that the tori were preserved in this case, we have stability of orbits. This is and indication of integrability of the system.

Now we start the study of the PW potential plus dipolar halo, i.e., we identify Φ with (B.4). Unfortunately we cannot confine the orbits by using the constants attributed to all the preceding cases. We put, $L = 4.2$, $E = 0.972$, and $D = 4.2 \times 10^{-4}$. Now the Poincaré section is taken as $z = -5$. The figure in this case, Fig. B4, represents a very chaotic system. We used the same constants to draw another Poincaré section for PW potential plus dipolar halo using Newtonian dynamics. The results are presented in Fig. B5. We see some stable islands in the negative p_r region that cannot be observed Fig. B4. We conclude then that the orbits obtained in the special relativistic context are less stable than the ones obtained with Newton law. The conjugated variables used were dr/dt and r. We made some tests using $dr/d\tau$ and r. The results were qualitatively the same.

General relativistic dynamics.

We start from the axisymmetric line element

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\psi(u,v)}dt^2 - e^{-2\psi(u,v)}(u^2-1)(1-v^2)d\phi^2 \\ &\quad -e^{2(\gamma(u,v)-\psi(u,v))}(u^2-v^2)\left(\frac{du^2}{u^2-1}+\frac{dv^2}{1-v^2}\right), \end{aligned} \tag{B.9}$$

in prolate coordinates (t, u, v, ϕ). The coordinates u and v are related to the usual cylindrical coordinated by $u = (R_+ + R_-)/(2m)$ and $v = (R_+ - R_-)/(2m)$, where $R_\pm = [r^2 + (z \pm m)^2]^{1/2}$ and m$= GM/c^2$. The Schwarzschild monopole plus a dipolar halo is represented by

$$\psi(u,v) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + D\,uv. \tag{B.10}$$

Note that taken the limit, $\lim_{c^{-2}=0} \psi/c^{-2}$, with aid of l'Hôpital rule, we recover (B.2). To have the right units to take the limit we need to add a c^{-2} factor to D.

The Einstein equations for these class of solutions as well as the corresponding geodesic equations are studied in great detail in Vieira and Letelier ([14]). Due to the axial symmetry of the metric again the effective geodesic dynamics of the test particles is restricted to a three dimensional "phase space".

The Poincaré section is draw for $v = 0$ (that is equivalent to $z = 0$). In Fig. B6 we present the section for the values of the constants $L = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2\times 10^{-4}$. Chaotic orbits may be observed for instance in the region indicated with a rectangle. A zoom of this region is presented in Fig. B7. We can compare Fig. B6 with Fig. B2 and conclude that the orbits obtained via geodesic equation in general relativity are more stable than the ones obtained from the PW potential plus dipolar halo in Newtonian and special relativistic dynamics.

Lyapunov Exponent

We shall study the Lyapunov exponents for the systems above described to better analyze the orbits stability. We shall use the Lyapunov characteristic number (LCN) that is defined as the double limit

$$LCN = \lim_{\substack{\delta_0 \to 0 \\ t \to \infty}} \left[\frac{\log(\delta/\delta_0)}{t}\right], \tag{B.11}$$

where δ_0 and δ are the deviation of two nearby orbits at times 0 and t respectively. We get the largest LCN using the technique suggested by Benettin et al. ([2])

We start comparing the LCN for orbits in a PW+Dipole system in special relativity and the LCN for orbits in a PW+Dipole in Newtonian theory. The Constants are $L = 4.1$, $E = 0.972$, and $D = 4.1\times 10^{-4}$. The maximum LCN was obtained around $r = 20$, $z = -5$, and $p_r = -0.04$. Note that the value of p_z is determined by the constants of motion and the value of r, z and p_r. For the relativistic case we get $LCN = (3.2 \pm 0.4) \times 10^{-4}$ while for the Newtonian approach we obtain $LCN = (1.8 \pm 0.4) \times 10^{-4}$. We did some tests for the usual integrable Newtonian monopole plus dipole system and we always obtain for the LCN at least one order of magnitude lower that the preceding cases.

For orbits of test particles in the the full general relativistic monopole plus dipole system and in the Newtonian PW+Dipole system we chose $L = 3.902$, $E = 0.9756$ and $D = 2.0\times 10^{-4}$. We obtain for orbits in the PW+Dipole system $LCN = (2.0 \pm 0.5) \times 10^{-4}$. This value was obtained for orbits around $r = 7.5$, $z = 0$, and $p_r = 0$. For the general relativistic system the proper time and the coordinate time were tested in the equation (B.11) and no significant difference was found. The largest LCN was computed around $u = 9.75$, $v = 0$, and $p_u = -0.038$. As before, p_v is fixed by the value of the other variables and the motion constants. We found always $LCN < 5 \times 10^{-5}$. The Lyapunov like coefficients used in general relativistic systems may have different forms as the one suggested by Burd and Tavakol ([4]) in the study of Bianchi IX systems. However, we have studied a simple system with no singularities besides the black hole where we have a well defined evolution parameter. Hence, in this case no significant difference should be found by using other definition of the Lyapunov coefficients. Furthermore, in the general relativistic system studied we have several natural ways to choose the space variables e.g., the spheroidal (u, v, ψ) and the cylindrical (r, z, ϕ). We found no significant differences when either system of coordinates are used to describe the orbits of particles moving a few Schwarzschild radii apart from the central black hole.

In summary, the study of Lyapunov coefficients confirms the qualitative analysis of the Poincaré section method, we have that the general relativistic orbits are more stable than the Newtonian and special relativistic ones. The special relativistic orbits are the most unstable.

Discussion

In the Paczyński-Witta potential, the term $-2GM/c^2$ in the denominator of the equation (B.4) creates a saddle point in the effective potential in Newtonian as well as in special relativistic dynamics. The addition of the dipole term separates the stable and unstable manifold emanating from the hyperbolic fix point as discussed by Letelier and Vieira ([6]). In this case, as consequence of the Poincaré-Birkhoff theorem, there is an homoclinic web that gives rise to chaotic motion for bounded orbits in phase space, see for instance Tabor ([11]).

The chaotic orbits encountered in the pseudo-Newtonian plus dipole system agrees with the general relativistic equivalent situation. However, those effects might be distorted in the

PW approach because the Poincaré sections as well as the Lyapunov exponents show more unstable orbits. This instability is magnified when the special relativistic dynamics is used. Vokrouhlický and Karas [12] studied the stability of orbits for particles gravitating around a $1/R$ Newtonian potential with an axisymmetric perturbation. Sridhar and Touma ([10]) found for the same class of potentials that the instability decreases in orbits closer to the black hole. This result may not be verified when pseudo Newtonian or full general relativistic model are considered. The main difference being the presence of a saddle point in the effective potential near the black hole. Therefore orbits near the core may be more unstable because of this critical point in the effective potential that is a source of instability.

Acknowledgements: The authors thank to FAPESP for financial support. EG thanks A.E. Motter for discussions about Poincaré-Birkhoff theorem.

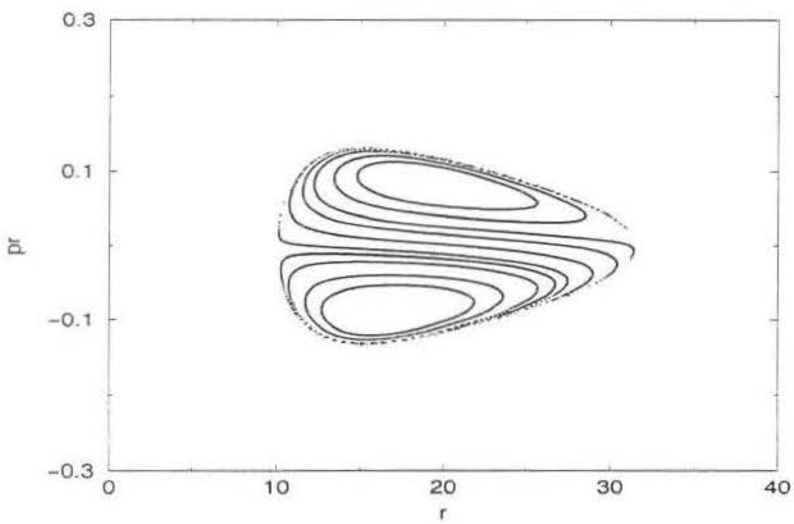

Figure B.1: Surface of section for the Newtonian motion of a test particle in a standard monopole plus external dipole potential for $L_z = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2 \times 10^{-4}$. The section corresponds to the plane $z = 0$. For these values of the parameters we have the section of an integrable motion.

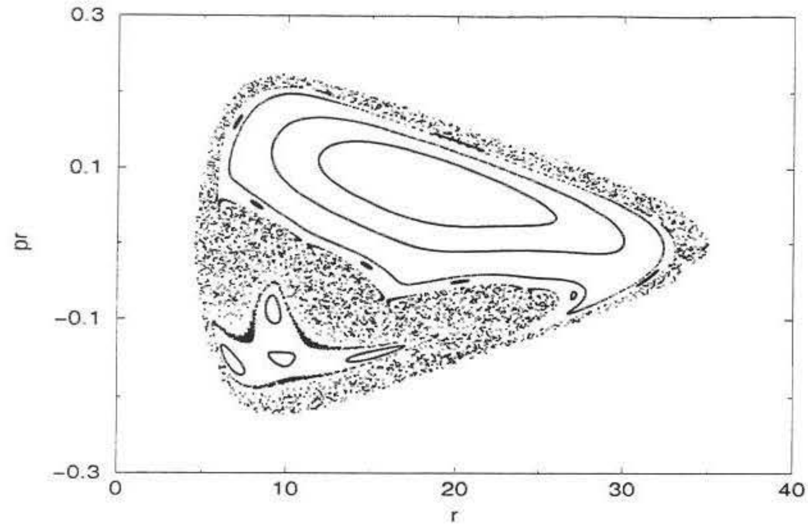

Figure B.2: Surface of section for the Newtonian motion of a test particle in a Paczyński-Wiita potential plus a dipolar halo for $L_z = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2 \times 10^{-4}$. The section corresponds to the plane $z = 0$. We see chaotic motion.

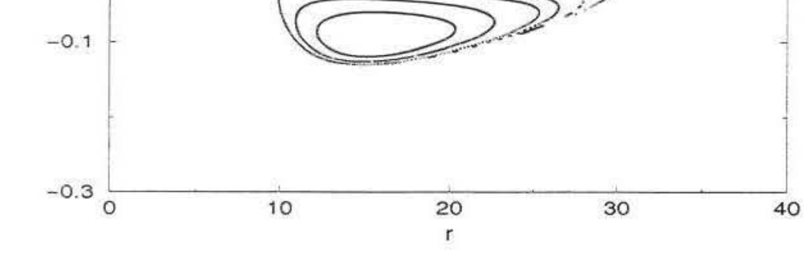

Figure B.3: Surface of section for the special relativistic motion of a test particle in a usual monopole potential plus a dipolar halo for $L_z = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2 \times 10^{-4}$. The section corresponds to the plane $z = 0$. For these values of the parameters we have the section of a regular motion

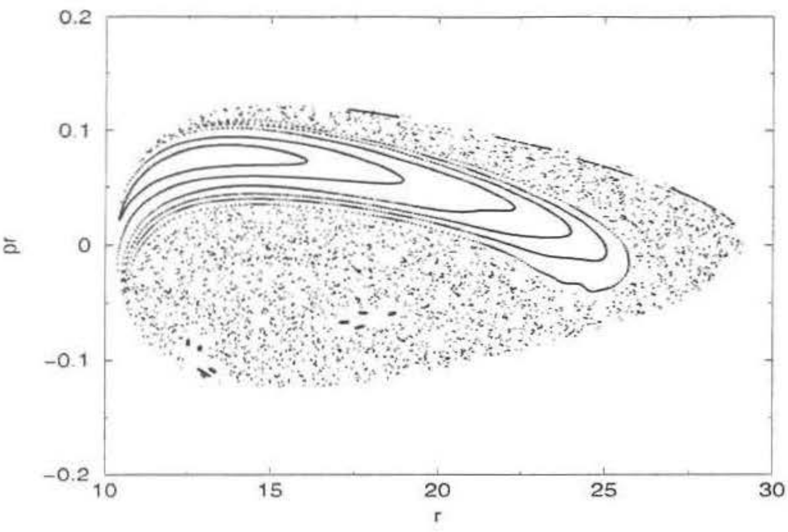

Figure B.4: Surface of section for the special relativistic motion of a test particle in a Paczyński-Wiita potential plus a dipolar halo for $L_z = 4.2$, $E = 0.972$, and $D = 4.2 \times 10^{-4}$. The section corresponds to the plane $z = -5$. We have a very irregular motion.

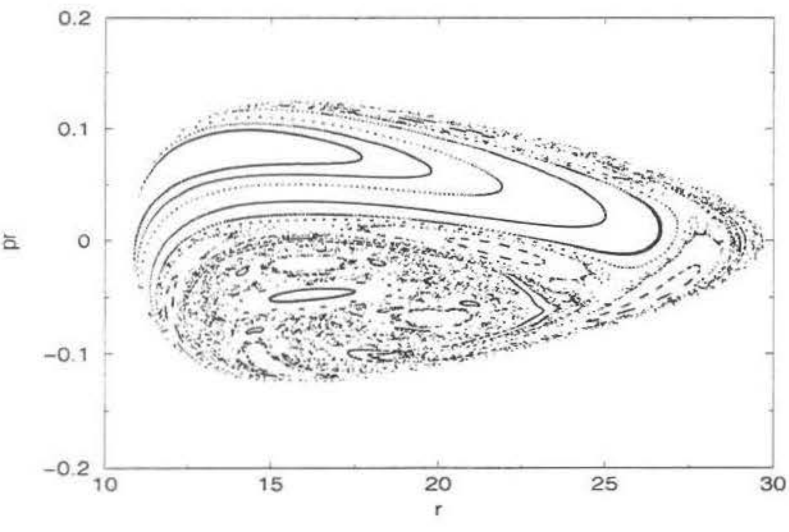

Figure B.5: Surface of section of the Newtonian motion of a test particle in a Paczyński Wiita potential plus a dipolar halo for $L_z = 4.2$, $E = 0.972$, and $D = 4.2 \times 10^{-4}$. The section corresponds to the plane $z = -5$. We have an irregular motion but it is more stable than the one shown in the preceding figure.

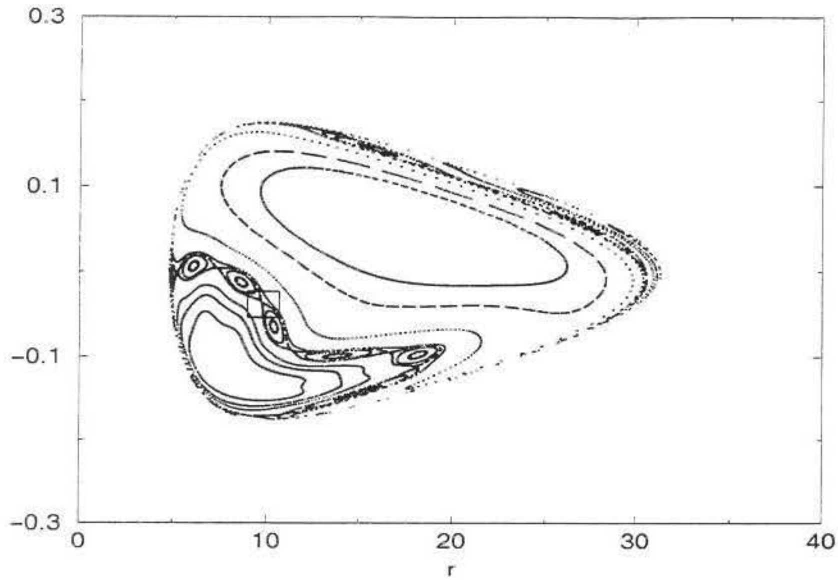

Figure B.6: Surface of section for the geodesic motion of a test particle in a Schwarzschild monopole with a dipolar halo for $L_z = 3.9$, $E = 0.976$, and $D = 2 \times 10^{-4}$. The section corresponds to the plane $v = 0$. For these parameters we have small regions of instability.

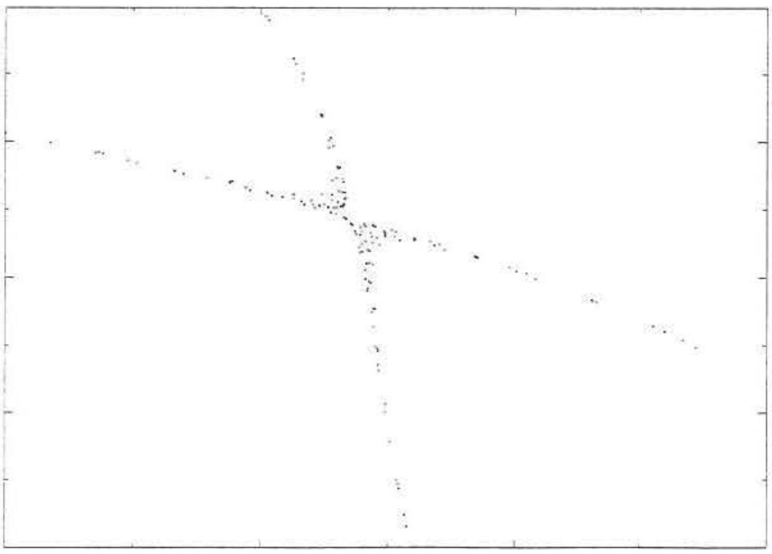

Figure B.7: A zoom of the small boxed region of the previous figure.

Bibliography

[1] Abramowicz M.A., Beloborodov A.M. , Chen X.M., Igumenshchev I.V., 1996, A&A 313, 334.

[2] Benettin G., Galgani L. and Giorgilli A. , 1976, Phys. Rev. A14, 2338.

[3] Binney J., Tremaine S., 1987, Galactic Dynamics, Princeton University Press.

[4] Burd A and Tavakol R, 1993 Phys Rev. D 47, 5336.

[5] Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A., Hietarinta J., 1985, Phys. Lett. A 109, 81.

[6] Letelier P.S., Vieira W.M., 1998, Phys. Lett. A 242, 7.

[7] Marronetti P., Huq M., Laguna P., Matzner R.A., Shoemaker D., 2000, Phys. Rev. D 62, 401.

[8] Paczyński B., Wiita P.J.,1980, A&A 88 ,23.

[9] Semerák O., Karas V. , 1999 , A&A 343 , 325.

[10] Sridha S. and Touma J., 1999, MNRAS 303, 483.

[11] Tabor, M., 1989, Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, John Wiley&Sons , New York.

[12] Vokrouhlicky D. and Karas V., 1998, MNRAS 298, 53.

[13] Vieira W.M., Letelier, P.S., 1997, Phys. Lett. A 228, 22.

[14] Vieira W.M., Letelier, P.S., 1999, ApJ., 513, 383.

C

Stability and chaos around multipolar deformed bodies: A general relativistic approach

submetido à *Phys. Rev. D*

Stability and chaos around multipolar deformed bodies: A general relativistic approach

Eduardo Guéron[1] and Patricio S. Letelier[2]

Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil

The exact solution to the Einstein equations that represents a static axially symmetric source deformed by an internal quadrupole is considered. By using the Poincaré section method we numerically study the geodesic motion of test particles. For the prolate quadrupolar deformations we found chaotic motions contrary to the oblate case where only regular motion is found. We also study the metric that represents a rotating black hole deformed by a quadrupolar term. This metric is obtained as a two soliton solution in the context of Belinsky–Zakharov inverse scattering method. The stability of geodesics depends strongly on the relative direction of the spin of the center of attraction and the test particle angular momentum. The

[1]e-mail: gueron@ime.unicamp.br

[2]e-mail: letelier@ime.unicamp.br

rotation does not alter the regularity of geodesic motions in the oblate case, i.e., the orbits in this case remain regular. We also employ the method of Lyapounov characteristic numbers to examine the stability of orbits evolving around deformed nonrotating centers of attraction. The typical time to observe instability of orbits is analyzed.

Introduction

After the visionary work of Poincaré [1] and the KAM (Kolmogorov, Arnol'd, and Moser [2]) theory it became well established that non-integrability and hence chaos is a general rather than exceptional manifestation in the context of dynamical systems, see for instance [3]. Given this ubiquitous fact, an important issue in astronomical modeling is the study in which extent in phase space chaoticity rises in models that are relevant to describe real systems and what are its consequences.

The adequate description of the gravitation field of an astrophysical object has been an important subject in both relativistic and Newtonian gravity since their origin. The particular case of the gravity associated to an axially symmetric body has played a central role in this discussion. Recently, Merrit [4] found, from detailed modeling of triaxial galaxies, that most of the galaxies must be nearly axisymmetric, either prolate or oblate. In Newtonian theory the gravitational potential of an axially symmetric body can be always represented by its usual expansion in terms of Legendre polynomials (zonal harmonics). The underlying theory in this case is the usual Newtonian Gravitation that for large masses and velocities is known to be less appropriate than Einsteinian General Relativity. In the late case the Newtonian potential is replaced by the spacetime metric and Newton motion equations by geodesics. In General Relativity we have that the solution of the vacuum Einstein equations associated to a static axially symmetric body has a simple form with only two metric functions [5] and one of them admits an expansion in zonal harmonics. For rotating axially symmetric bodies we have a metric with three functions and two of them obey a sigma-model type of partial differential equations for which there are known methods of solution [6].

The change of the particle motion equation and gravitational theory can produce dramatic effects, for instance, test particles moving in the presence of systems of masses that are integrable in Newtonian theory are chaotic in General Relativity, examples are: the fixed two body problem [7, 8], and particles moving in a monopolar center of attraction surrounded by a dipolar halo [9]. Also gravitational waves, a non existing phenomenon in the Newtonian realm, can produce irregular motion of test particles orbiting around a static black hole [10, 11]. Another distinctive feature of general relativity is the dragging of inertial frames due to mass rotation. This fact is observed, for instance, in the impressive differences of the geodesic motion in Schwarzschild and Kerr geometries [28].

Along this article we shall study the geodesic equations for particles evolving in the space time associated to a center of attraction with a quadrupolar deformation. The solution of the Einstein equations representing this center of attraction – in the static case – can be found in [13] wherein the rather misleading terminology "distorted black hole" was used to refer to such an object. Examples of static centers of attractions with multipolar deformations are: a) A true static black hole (or a dense object) surrounded by a distribution of matter like a ring or a small disk formed by counter-rotating matter, i.e., built by approximately the same number of particles moving clockwise as counterclockwise. Even though, this interpretation can be seen as a device to have a static stable configuration there is observational evidence of disks made of streams of rotating and counter-rotating matter [14]. b) An axially symmetric static dense object with either polar deformations or polar jets. In the case a) we have oblate deformations. Also the polar deformations of the Sun and the inner planets in the solar system are oblate. We have prolate deformations in stars with jets and in some galaxy clusters [15]. In the precedent cases, by adding rotation to the central black hole and removing the counter-rotating hypothesis we can have stationary centers of attraction with multipolar deformations.

Geodesic motions for axially symmetric spacetimes representing core-halos system were studied in [16] for bounded motion and in [17] for unbounded motions. The case of a slowly rotating center of attraction with a dipolar halo was considered in [18] . The geodesic chaos for a disk with a central center of attraction was considered in [19]. A core-halo system with NUT (Newman-Unti-Tamburino) charge was also considered [20]. Newtonian [21] and pseudo-Newtonian [22] counter parts of some of this systems has been also studied. In a recent paper – within the Newtonian realm – we studied chaotic motions of test-particles orbiting around a deformed body modeled by a monopolar and an internal quadrupolar term [23].

In this article we dwell in study of geodesic chaos, but now related to internal quadrupole deformations of the attraction center. Note that halos are external multipolar contributions, their strength increases with the distance contrary to the internal ones that decreases with the distance. The quadrupolar contribution usually represents the major deviation to the spherical symmetry. Thus, as a good first approximation, it can model most of the deformed sources.

We shall analyze only bounded motions for specific choices of energy and angular momentum and certain values of quadrupolar strength that we believe will cover all the different typical situations. Due to the symmetry of the problem, one can reduce the geodesic motion to a dynamical system with two degrees of freedom. For such cases, the Poincaré section method is the most appropriated tool to study the geodesics general behavior.

The paper consists of two main parts. In the first one, Sec. II, the exact solution to the Einstein equations that represents a static axially symmetric source deformed by an internal quadrupole is considered. By using the Poincaré section method we numerically study the geodesic motion of test particles. For the prolate quadrupolar case we found chaotic motions contrary to the oblate case where only regular motion was found.

In the second part, Sec. III, the rotation of the attraction center is considered. We first study the metric that represents a rotating black hole deformed by a quadrupolar term. This metric is obtained as a two soliton solution in the context of Belinsky–Zakharov inverse scattering method [24] that generates new solutions from a known one (seed solution). As in the precedent section, geodesics were numerically studied using surfaces of section. The consideration of different cases leads us to conclude that the black hole rotation considerably alters the stability of the system.

We obtain that the stability depends strongly on the relative direction of the spin of the center of attraction and the test particle angular momentum. We also found that the rotation does not alter the regularity of geodesic motions in the oblate case, i.e., the orbits in this case remain regular. We conclude, in Sec. IV, with further considerations on the stability of orbits. But, now we employ the method of Lyapunov characteristic numbers following Benettin et al. [25]. We also discuss the typical time to observe instability of orbits and make some final remarks.

Schwarzschild solution with quadrupole deformations

The metric of the spacetime related to the gravitational field of a static axially symmetric source is the one associated with the Weyl line element,

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - e^{2(\gamma-\psi)}(dz^2 + dr^2) - r^2e^{-2\psi}d\varphi^2, \tag{C.1}$$

where ϕ and γ are functions of r and z only. The range of the coordinates r, z, φ are the usual ones for cylindrical coordinates. It is more convenient to use prolate spheroidal coordinates, u and v, that are related to Weyl coordinates by

$$\begin{aligned} r^2 &= m^2(u^2-1)(1-v^2), \\ z &= muv, \end{aligned} \tag{C.2}$$

where m is a constant, that will be associated with the mass of the center of attraction. The coordinate v takes values in the interval $[-1, 1]$ (it is essentially a cosine) and u runs from 1 to infinity (it is essentially a radial coordinate). We shall use units such that $c = G = 1$. With no lose of generality we shall also choose $m = 1$. In this new system of coordinates, the metric (C.1) takes the form ,

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\psi(u,v)}dt^2 - e^{-2\psi(u,v)}(u^2-1)(1-v^2)d\phi^2 \\ &\quad -e^{2(\gamma(u,v)-\psi(u,v))}(u^2-v^2)\left(\frac{du^2}{u^2-1} + \frac{dv^2}{1-v^2}\right). \end{aligned} \tag{C.3}$$

For this line element the vacuum Einstein equations reduce to,

$$[(u^2-1)\psi_{,u}]_{,u} - [(1-v^2)\psi_{,v}]_{,u} = 0, \tag{C.4}$$

$$\gamma_{,u} = \frac{(u\psi_{,u} - 2v\psi_{,v})(u^2-1)(1-v^2)\psi_{,u} - u(1-v^2)^2{\psi_{,v}}^2}{(u^2-v^2)},$$
$$\gamma_{,v} = \frac{(2u\psi_{,u} - v\psi_{,v})(u^2-1)(1-v^2)\psi_{,v} + v(u^2-1)^2{\psi_{,u}}^2}{(u^2-v^2)}. \qquad (C.5)$$

Equation (C.4) is the usual Laplace equation in prolate coordinates for the metric potential ψ and Eqs. (C.5) yield the function γ as a quadrature. The ingrability of γ ($\gamma_{,uv} = \gamma_{,vu}$) is guaranteed by Eq. (C.4). The potential ψ for the Schwarzschild solution in prolate coordinates is [5] ,

$$\psi_S = \frac{1}{2}\log\frac{1-u}{1+u}. \qquad (C.6)$$

In this article we shall consider the solution,

$$\psi = \frac{1}{2}\log\frac{1-u}{1+u} + k_2P_2(v)Q_2(u), \qquad (C.7)$$

where P_2 and Q_2 are the second Legendre polynomial and function,

$$P_2(x) = (3x^2-1)/2, \;\; Q_2(x) = [P_2(x)\log\frac{x+1}{x-1} - 3x]/2, \qquad (C.8)$$

and k_2 is a constant that is positive (negative) for oblate (prolate) deformations. Note that the Newtonian limit of the potential (C.7) is [26], $\phi = -m/R + (2m^3k_2/15)P_2(\cos\vartheta)R^{-3}$.

From (C.5) we find the other metric function,

$$\begin{aligned}\gamma = \; & \{4[2((7k_2^2 - 20k_2 + 4)\log(u-1) + (k_2+2)^2\log(u+1) - 4\log(u^2-v^2)(k_2-1)^2) \\ & -3((27u^2v^2 - 30u^2 - 21v^2 + 26)k_2 - 8)\log((u+1)/(u-1))k_2uv^2 + \\ & 3((27u^2v^4 - 30u^2v^2 + 3u^2 - 12v^4 + 16v^2)k_2 - 16v^2)k_2] - \\ & 3[4((3u^2 - 3u - 2)k_2 + 8) - 3(9u^2v^2 - u^2 - v^2 + 1)(u-1)(v^2-1) \\ & \log((u+1)/(u-1))k_2](u+1)\log((u+1)/(u-1))k_2\}/64. \end{aligned} \qquad (C.9)$$

The exact solution to Einstein equations given by (C.7)-(C.9) was first study by Erez and Rosen [27], we will comeback to this point latter. The general case (Schwarzschild with the whole series of multipoles) was considered by Quevedo [28] and a simple interpretation in terms of bars was presented by Letelier [29]. This solution has been interpreted as a "distorted" black hole in [13]. The study of the associated Newtonian multipoles as well as the relativistic multipoles for this solution and other multipolar expansion can be found in [30]. The geodesic equations for the metric (C.3) take the form,

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = \frac{(u^2-1)\left[\partial_u e^{2\psi} + \partial_u[(u^2-1)(1-v^2)e^{-2\psi}]\right]}{2e^{2(\gamma-\psi)}(u^2-v^2)} - \dot{u}^2\left[[\partial_u(\gamma-\psi)] + \frac{(v^2-1)u}{(u^2-v^2)(u^2-1)}\right]$$

$$-2\dot{u}\dot{v}\left[[\partial_v(\gamma-\psi)] - \frac{v}{(u^2-v^2)}\right] - \dot{v}^2\left[\frac{(u^2-1)[\partial_u(\gamma-\psi)]}{(v^2-1)} + \frac{(u^2-1)u}{(u^2-v^2)(v^2-1)}\right], \quad (C.10)$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = \frac{(1-v^2)\left[\partial_v e^{2\psi} + \partial_v[(u^2-1)(1-v^2)e^{-2\psi}]\right]}{2e^{2(\gamma-\psi)}(u^2-v^2)} - \dot{v}^2\left[[\partial_v(\gamma-\psi)] - \frac{(u^2-1)v}{(u^2-v^2)(v^2-1)}\right]$$

$$-2\dot{u}\dot{v}\left[[\partial_u(\gamma-\psi)] + \frac{u}{(u^2-v^2)}\right] - \dot{u}^2\left[\frac{(v^2-1)[\partial_v(\gamma-\psi)]}{(u^2-1)} - \frac{(v^2-1)v}{(u^2-v^2)(u^2-1)}\right], \quad (C.11)$$

$$E = e^{2\psi(u,v)}\dot{t}, \quad L = e^{-2\psi(u,v))}(u^2-1)(1-v^2)\dot{\varphi}, \quad (C.12)$$

where $\tau = s/c = s$ and the overdots indicate derivative with respect τ. E and L are constants of integrations related to the test particle energy and the angular momentum, respectively. The metric (B.9) gives a third constant of motion,

$$1 = e^{2\psi(u,v)}\dot{t}^2 - e^{-2\psi(u,v)}(u^2-1)(1-v^2)\dot{\varphi}^2 - e^{2(\gamma(u,v)-\psi(u,v))}(u^2-v^2)\left[\frac{\dot{u}^2}{u^2-1} + \frac{\dot{v}^2}{1-v^2}\right]. \quad (C.13)$$

The motion of the test particle is completely determined by the solution of the two second order differential equations (C.10) and (C.11). They define a four dimensional phase space, but the motion constants (C.13) and (C.12) tell us that the motion is effectively realized in a three dimensional surface. Moreover, these constants allow us to define an effective potential like function,

$$\Phi(u,v) = \frac{e^{2(\psi(u,v)-v(u,v))}}{(u^2-v^2)}\left(e^{-2\psi(u,v)}E^2 - \frac{e^{2(\psi(u,v)-v(u,v))}}{(u^2-1)(1-v^2)}L^2 - 1\right). \quad (C.14)$$

Thus the motion must be restricted to the region defined by the inequality $\Phi(u, v) \leq 0$.

Since the geodesic motion of the test particles is performed in a three dimensional effective phase space an adequate tool to study this motion is the Poincaré section method. As we mentioned before the sign of the quadrupole parameter k_2 specifies if the source is deformed in a prolate or in an oblate shape. First we shall study the prolate case, $k_2 < 0$.

From relation (C.14) we can find the appropriated constants to have a confined motion. We find that only three combinations of the constants: E (energy), L (angular momentum) and k_2 (quadrupole strength), characterize all the possibilities of confinement. In Fig.C.1 we present the curve $\Phi(u, v) = 0$ for $L = 3.32$, $E = 0.937$ and $k_2 = -5.02$. We have two bounded regions and two unbounded ones. With the same values to L and E and a small change in the quadrupolar constant, $k_2 = -5.0$, we obtain the curve plotted in Fig.C.2. The two bounded regions merge in a single one. The two escape zones remain unbounded. Finally, in figure 3, we present the curve $\Phi(u, v) = 0$ for $L = 3.8$, $E = 0.9731$ and $k_2 = -1$. Now the two zones of unbounded motion merge in a single one and the region of bounded motions increases.

We construct Poincaré surface sections for the the three sets of constants indicated above. In Fig.C.4 we present a Poincaré section for the two bounded regions of Fig. C.1. In the middle bounded region we have a typical picture of chaotic motion. However the orbits confined in the right hand side bounded region present regular motion. In Fig.C.5 we show the Poincaré section obtained for orbits restricted to the closed surface presented in Fig.C.2. It is interesting to observe that we have a region of irregular motion in the left hand side of the graphic very similar to the one showed in the previous figure and in the right hand side a region of regular motion surrounded by a chaotic one.

In Fig. C.6 we show that the motion in the bounded region of Fig. C.3 is regular as in the case of a pure Schwarzschild black hole [16]. These results can be understood by studying the effective potential critical points. We recall that a pure black hole ($k_2 = 0$) with adequate values of the constants E and L has an effective potential with a single saddle point. When we add the prolate quadrupolar field $k_2 < 0$ we have a second saddle point for the value of the constants of Figs. C.1 and C.2. In the third case (Fig. C.3) the second saddle point disappears and we end up with the same dynamical behavior of the test particles as in the pure Schwarzschild black hole case.

For the case of oblate quadrupole deformation, i.e., $k_2 > 0$, we found regions of bounded motion very similar to the one presented in Fig. C.3. But, we did not find a second as in Figs. C.1 and C.2. This indicates the absence of a second saddle point. We studied surface sections for many different values for E, L and $k_2 > 0$. We always found regular motion.

Kerr solution with Quadrupole deformations

Since the Kerr solution represents a rotating black hole, the addition of an internal multipole term can be used to model a rotating star or the core of a galaxy. The black hole rotation produces the pure relativistic effect of dragging of inertial frames. Then our main goal, in this section, is to study the influence of the black hole rotation on the stability of geodesic motions. Letelier and Vieira [18] studied the motion of test particles moving around a slowly rotating black hole with a dipolar halo. Now we shall study the case of a central body with arbitrary rotation deformed by an internal quadrupole term.

The metric for a stationary axially symmetric spacetime has the general form,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 - e^{\Gamma}\left(u^2 - v^2\right)\left[\frac{du^2}{u^2-1} + \frac{dv^2}{1-v^2}\right], \tag{C.15}$$

where g_{tt}, $g_{t\phi}$, $g_{\phi\phi}$ and Γ are function of the coordinates u, v.

Belinsky and Zakharov presented a solution generating algorithm for metrics with two independent Killing vectors [24]. They obtained the Kerr solution by applying the method to the Minkowski spacetime (seed solution). The application of this solution generating method to more general seeds was studied in [31]. Using the techniques presented in this last article we can easily obtain the metric functions $g_{tt}(u,v)$, $g_{t\phi}(u,v)$, $g_{\phi\phi}(u,v)$ and $f(u,v)$ that represent a Kerr black hole deformed by multipolar terms. We choose as the seed a metric representing a pure quadrupole. Then the the two-soliton solutions give us the nonlinear superposition of a Kerr solution with a quadrupolar field. We find,

$$
\begin{aligned}
g_{tt} &= (e^{H}(e^{2H}((2e^{2F_1+2F_2}(u^2-v^2)-e^{2H}(v^2-1))(p+1)^2-e^{4F_1}(u+1)(u-1)q^2)q^2 \\
&\quad -e^{4F_2}(e^{2H}(p+1)^2(u+1)(u-1)+e^{4F_1}(v^2-1)q^2)(p+1)^2))/ \\
&\quad (e^{2H}((2e^{2F_1+2F_2}(u+v)(u-v)-e^{2H}(v-1)^2)(p+1)^2e^{4F_1}(u-1)^2q^2)q^2-e^{4F_2} \\
&\quad (e^{2H}(p+1)^2(u+1)^2+e^{4F_1}(v+1)^2q^2)(p+1)^2), \qquad \text{(C.16)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{t\phi} &= (-2e^{H}(e^{2H}((2e^{2F_1+2F_2}(u^2-v^2) \\
&\quad -e^{2H}(v^2-1))(p+1)^2-e^{4F_1}(u+1)(u-1)q^2)q^2- \\
&\quad e^{4F_2}(e^{2H}(p+1)^2(u+1)(u-1)+e^{4F_1}(v^2-1)q^2)(p+1)^2+ \\
&\quad (e^{2F_1}(e^{4F_2}(p+1)^2(u+1)(v+1)+e^{2H}(u-1)(v-1)q^2)(u-v)- \\
&\quad e^{2F_2}(e^{2H}(p+1)^2(u+1)(v-1)+e^{4F_1}(u-1)(v+1)q^2)(u+v))(p+1)p)q)/ \\
&\quad (e^{2H}((2e^{2F_1+2F_2}(u^2-v^2)-e^{2H}(v-1)^2)(p+1)^2-e^{4F_1}(u-1)^2q^2)q^2- \\
&\quad e^{4F_2}(e^{2H}(p+1)^2(u+1)^2+e^{4F_1}(v+1)^2q^2)(p+1)^2), \qquad \text{(C.17)}
\end{aligned}
$$

$$
g_{\phi\phi} = \frac{g_{t\phi}^2-p^2(1-v^2)(u^2-1)}{g_{tt},} \qquad \text{(C.18)}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{\Gamma} &= -(\exp[((((4(2\log(u+1)+81u^2v^4-90u^2v^2+9u^2-36v^4+48v^2-8\log(u+v)+ \\
&\quad 14\log(u-1)-8\log(u-v))+9(9u^2v^2-u^2-v^2+1)(u^2-1)(v^2-1)\log(\frac{u+1}{u-1})^2 \\
&\quad -12(27u^3v^4-30u^3v^2+3u^3-2-(21v^2-5)(v^2-1)u)\log(\frac{u+1}{u-1})k_2- \\
&\quad 16((3u^2-1)\log((u+1)/(u-1))-6u)(3v^2-1))k_2)/128)](e^{2H}((2e^{2F_1+2F_2}(u^2-v^2)- \\
&\quad e^{2H}(v-1)^2)(p+1)+e^{4F_1}(p-1)(u-1)^2)(p-1)+e^{4F_2}(e^{2H}(p+1)(u+1)^2-e^{4F_1} \\
&\quad (p-1)(v+1)^2)(p+1)))/(4e^{2F_1+2F_2+2H}(u^2-v^2)p^2), \qquad \text{(C.19)}
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (-(2(2(\log(u+1) - 3v^2 - 3\log(u-1) + 2\log(u-v)) + 3(3v-1)(v+1)u) + \\
&\quad 3((v+3+2(v+1)u)(v-1) - (3v-1)(v+1)u^2)\log(\frac{u+1}{u-1}))k_2)/16,
\end{aligned}
\tag{C.20}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2 &= (-(2(3((3v-1)(v+1)u + 2v^2) - 4\log(u+v) + 4\log(u-1)) - \\
&\quad 3((3v-1)u - (v+1))(u+1)(v+1)\log((u+1)/(u-1)))k_2)/16
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

$$
H = (((3u^2-1)\log((u+1)/(u-1)) - 6u)(3v^2-1)k_2)/8k_2)/8. \tag{C.22}
$$

The quadrupole strength is k_2, q is the source angular momentum per the square of the mass and p is defined by the relation $p^2 + q^2 = 1$. The metric presented above is a particular case of the general solution that represent a Kerr metric embedded in a field of multipoles, see for instance [32] and [29], we will back to this point latter.

When one performs the limit $k_2 \to 0$ in the solution presented above one obtains the Kerr metric in Boyer Lindquist coordinates, r and ϑ that are related to the prolate spheroidal coordinates, u and v by $u = (r-m)/\sigma$ and $v = \cos\theta$. The constant p and q are related to the Boyer Lindquist constants by $p = \sigma/m$, $\quad q = a/m$, and $m^2 = \sigma^2 + a^2$. m is the monopole mass, σ is only an auxiliary constant and a is interpreted as the black hole angular momentum per unit of mass measured by a very distant observer.

As in the precedent case, the geodesic equations have two constants of motion, L and E, that obey the relation.

$$
g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} = E, \quad g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{t\phi}\dot{t} = L. \tag{C.23}
$$

The evolution equations for u and v are

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = \frac{u^2-1}{2\Gamma(u^2-v^2)}\left[\partial_u g_{tt}\dot{t}^2 + 2\partial_u g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + \partial_u g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2\right] - \dot{u}^2\left[\frac{\partial_u\Gamma}{2\Gamma} + \frac{(v^2-1)u}{(u^2-v^2)(u^2-1)}\right]$$
$$-2\dot{u}\dot{v}\left[\frac{\partial_v\Gamma}{2\Gamma} - \frac{v}{(u^2-v^2)}\right] - \dot{v}^2\left[\frac{\partial_u\Gamma(u^2-1)}{2\Gamma(v^2-1)} + \frac{(u^2-1)u}{(u^2-v^2)(v^2-1)}\right], \tag{C.24}$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = \frac{1-v^2}{2\Gamma(u^2-v^2)}\left[\partial_v g_{tt}\dot{t}^2 + 2\partial_v g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + \partial_v g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2\right] - \dot{v}^2\left[\frac{\partial_v\Gamma}{2\Gamma} - \frac{(u^2-1)v}{(u^2-v^2)(v^2-1)}\right]$$
$$-2\dot{u}\dot{v}\left[\frac{\partial_u\Gamma}{2\Gamma} + \frac{u}{(u^2-v^2)}\right] - \dot{u}^2\left[\frac{\partial_v\Gamma(v^2-1)}{2\Gamma(u^2-1)} - \frac{(v^2-1)v}{(u^2-v^2)(u^2-1)}\right]. \tag{C.25}$$

As in the precedent case we have two second order evolution equations (C.24) and (C.25) for the variables u and v, the metric and the constants (C.23) give a new constant relating these two variables,

$$1 = g^{tt}E^2 + 2g^{t\phi}EL + g^{\phi\phi}E^2 - e^{\Gamma}\left(u^2-v^2\right)\left[\frac{\dot{u}^2}{u^2-1} + \frac{\dot{v}^2}{1-v^2}\right]. \tag{C.26}$$

In other words, despite algebraic complications, we have exactly the same dynamical situation as before. The particles move in an effective three dimensional space. Thus we shall analyze the motion of test particles moving in the gravitational field of a rotating prolate deformed body using Poincaré sections as in the non-rotating case.

Since the main new ingredient in the new system is the rotation of the source we shall keep the angular momentum L, the energy E and the quadrupole strength k_2 fixed and we shall consider test particles moving with angular momentum parallel to the spin source (co-rotation) and with angular momentum anti-parallel to the spin source (counter-rotation).

In Fig.C.7 we present the region of bounded motions for counter-rotating orbits, $qL < 0$. We take $E = 0.93715$, $|L| = 3.322$, and $k_2 = -5.08$, and for the rotation parameter, $q = 0.002$. We notice a situation similar to the one presented in Fig.C.2. The bounded regions for the co-rotation case, $qL > 0$ is shown in Fig.C.8. We see two relatively small and distant closed surfaces. The Poincaré section for the counter-rotating case is presented in Fig.C.9. Chaotic motion can be perceived in the left hand side of the graphic and in the external part of the right hand side as in Fig.C.5. In Fig.C.10 we present the surface section for the same parameters as above, but $qL > 0$ (co-rotation). We do not find chaotic motion in this case.

We were not able to obtain bounded motion for both large quadrupole strength and large rotation parameter. We studied bounded systems with large rotation speed (of the order of 0.1) but with quadrupole strength always less than unit. In these cases the study of Poincaré sections leads to regular geodesic motion for co-rotation, as well as, counter-rotation. We also found that the confinement region may suffer an appreciable change in size and shape.

Discussion

As we said before, the exact solution to Einstein equations presented in the two precedent sections are not new and different versions of them have already appear in the literature. We have presented them in this work for two reasons: a) For easy reference, and b) Mainly, because for numerical analysis we need a faultless solution. The one presented here were derived using algebraic computation and checked using the full vacuum Einstein equations in each case.

Besides the Poincaré section, we have another technique to quantify geodesic instability: the Lyapunov characteristic number, $\mathcal{N}$, defined as,

$$\mathcal{N} = \lim_{\substack{\delta_0 \to 0 \\ \tau \to \infty}} \left[\frac{\log(\delta/\delta_0)}{\tau}\right], \tag{C.27}$$

where δ_0 and δ are the deviation of two nearby orbits at times 0 and t respectively. Using the technique suggested by Benettin et al. [25] - who studied numerical problems in the computation of Lyapunov exponents and Kolmogorov entropy - one can get the largest $\mathcal{N}$.

Using the constants that define the bound region presented in Fig. C.1 we obtain $\mathcal{N} = (9.0 \pm 1.0) \times 10^{-17}$, where the maximum $\mathcal{N}$ was obtained for $u = 2.6$, $v = 0$ and $p_v = 0$. In the right region plotted in Fig. C.4 we get always $\mathcal{N} < 5 \times 10^{-18}$. This shows, as expected, that the Lyapunov coefficient in the regions with chaotic motion does not vanish while in the region with irregular motion it could vanish. Nevertheless, the value of the coefficient for chaotic motions is very small, it means that the dispersion of the orbits is slow if compared with local fluctuations in the mean potential.

We found chaotic geodesic motions for the system black hole plus internal quadrupole for a very small range of parameters, specifically when there is a second bounded region. When one considers a rotating source one just re-obtained the same behavior studied in [18] for rotating centers of attraction with halos. The orbits of counter-rotating particles are more unstable that the orbits for corotating particles. In reference [18] the case of slow rotation was considered.

We also studied some bounded chaotic motion for large rotation speed ($q > 0.1$) in a Kerr halo system from an exact solution that represents an external dipole plus a Kerr black hole. Using the techniques presented in this paper we conclude that the irregularity introduced by external multipole terms are much larger than the ones introduced by internal multipole terms. We found also that chaotic motions for large rotation speed are more frequently, i.e., we have irregular motion for a larger range of the constants E and L.

It is not easy to predict the role that chaos could have in measurable characteristics of galaxies. Let us choose a parameter $\mathcal{T}$ as the time to characterize the dynamics of the system e.g., to draw the sections of an invariant torus in a regular motion or a chaotic region in the Poincaré section for irregular motion. We shall consider that this is the minimum time to have observable effects.

Rearranging the units to observable parameters, we obtain $\mathcal{T}$ in years from the expression

$$\mathcal{T} = N \times M \times 1.6 \times 10^{-13} yr,$$

where N is the number of steps in the simulations and M is the mass of the central black hole (in solar masses). The step N varies for different systems. It is about 10^4 for a black hole plus halo system and about 10^{16} for a black hole plus internal quadrupole system. For a typical galactic bulge we have $M = 10^{12} M_\odot$. Then for black hole plus halo system we have $\mathcal{T} = 1000 yr$ which is a very small value when compared with galactic ages and for the black hole plus internal quadrupole system, $\mathcal{T} = 10^{15} yr$ which is a very large value compared with the Universe age ($10^{10} yr$). Consequently, chaotic relativistic effect may show up in the formation of structures in a black hole plus external halo system, work along this line will soon be reported. The relativistic effect due to the rotation of the source may be important. The internal deformations do not have a significant contribution in this case. Another possible observational manifestation of chaos was studied in [33]

Acknowledgements. The authors thank FAPESP for financial support. PSL also thanks CNPq.

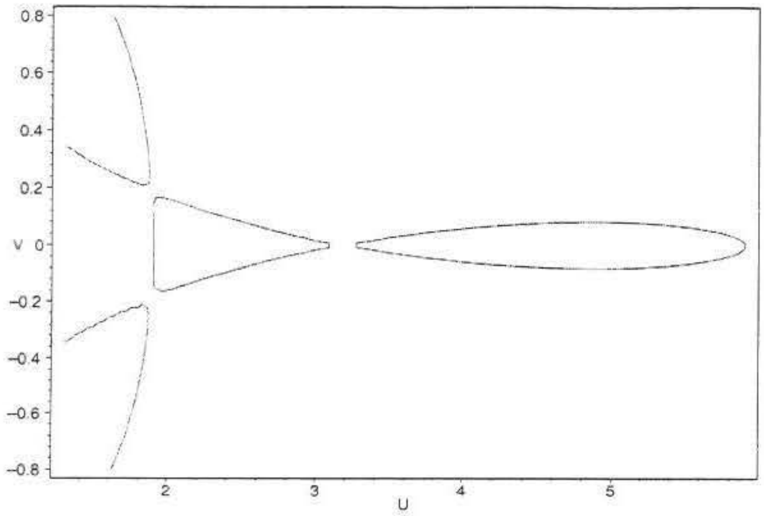

Figure C.1: Boundary contour ($\Phi = 0$) for a static black hole + quadrupole system $L = 3.32$, $E = 0.937$ and $k_2 = -5.02$. There are two escape zones in the left hand side of the picture that corresponds to small values of u and a couple of closed zones of bounded motion.

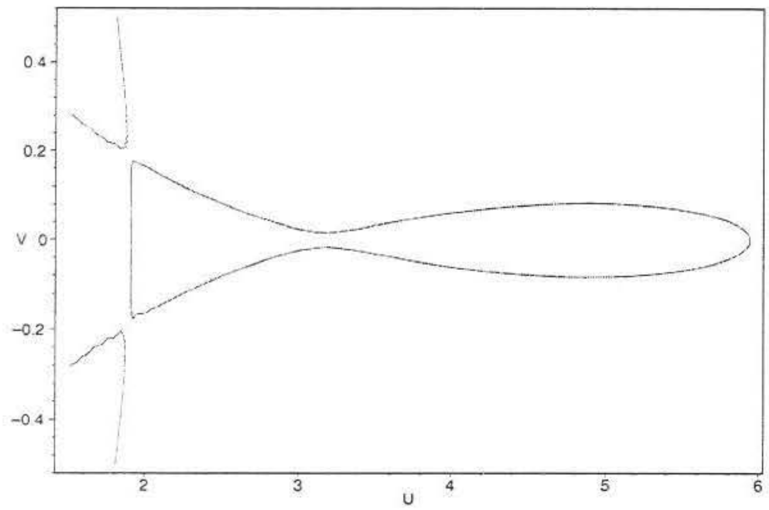

Figure C.2: Boundary of contour for the same values for L and E but $k_2 = -5.0$. The two escape zones remain. However, the two closed zones merge in only one.

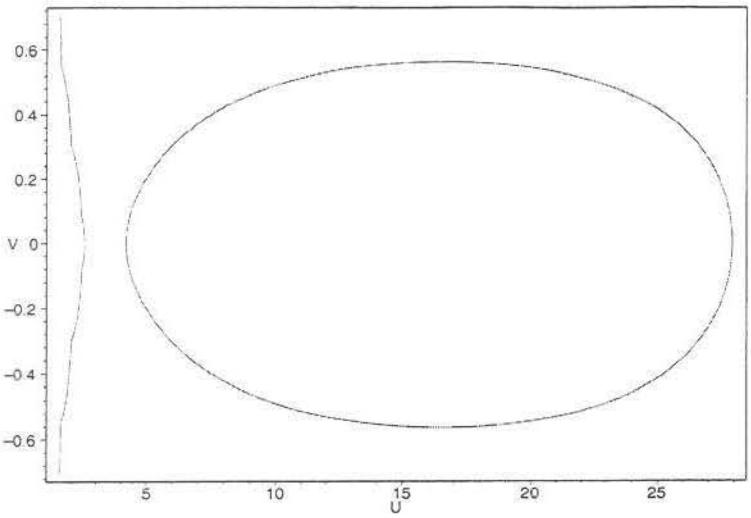

Figure C.3: Boundary contour for $L = 3.8$ and $E = 0.973$ but $k_2 = -1.0$. No vestige of the second bounded region is left.

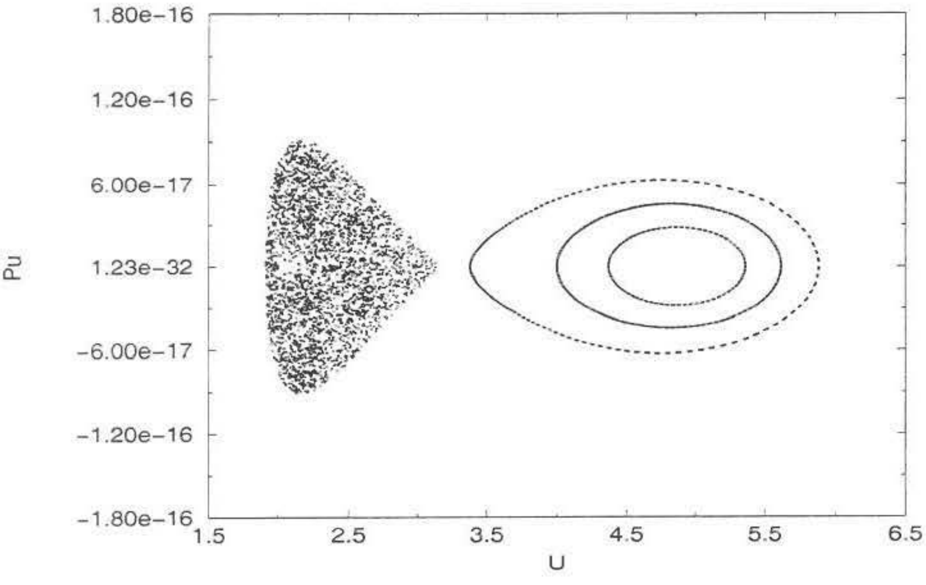

Figure C.4: Poincaré Section for the values defined in Fig.C.1. We see chaotic behavior in orbits confined in the first zone of bounded motions. But, the motion in the second zone is regular

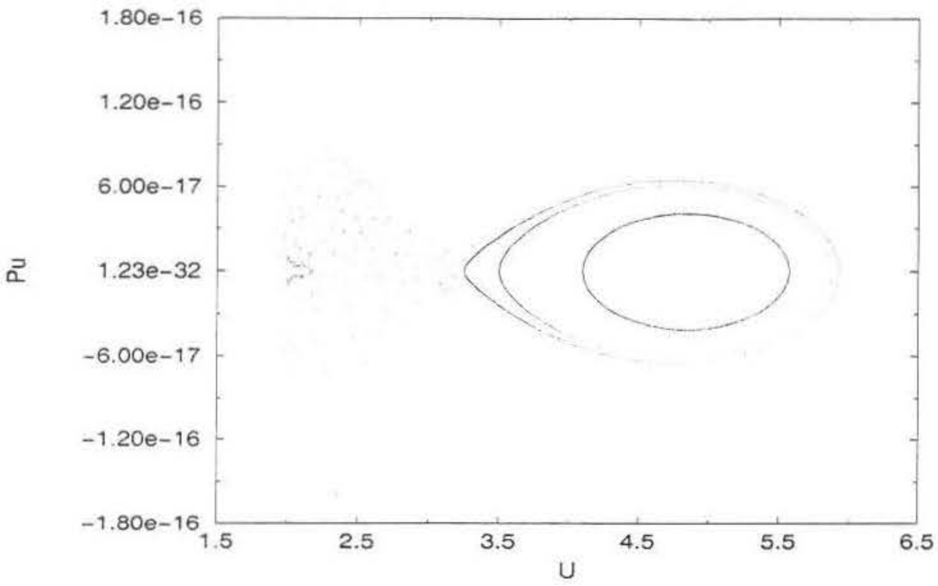

Figure C.5: Poincaré Section for the values defined in Fig.C.2. We see chaotic motion in the left hand side of the figure and in a small external region of the right hand side.

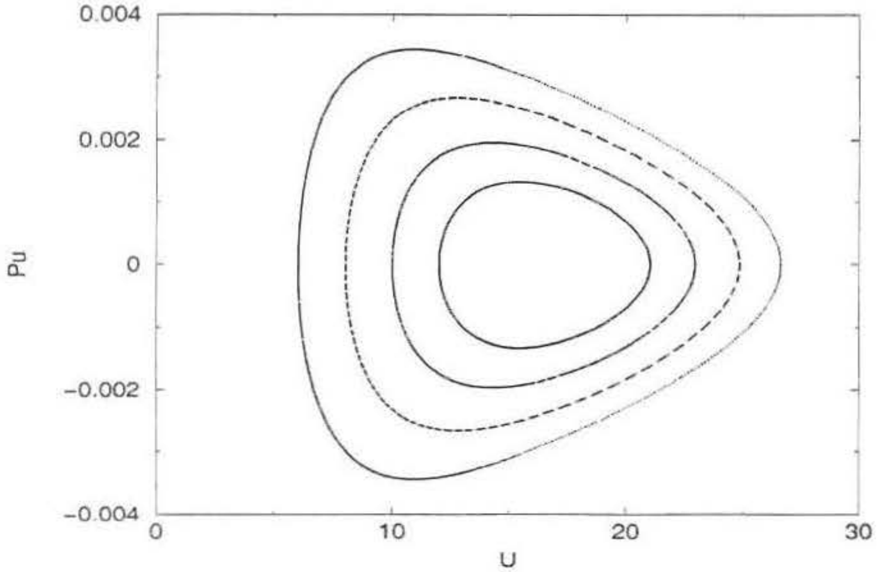

Figure C.6: Poincaré Section for the values defined in Fig.C.3. We have regular motion.

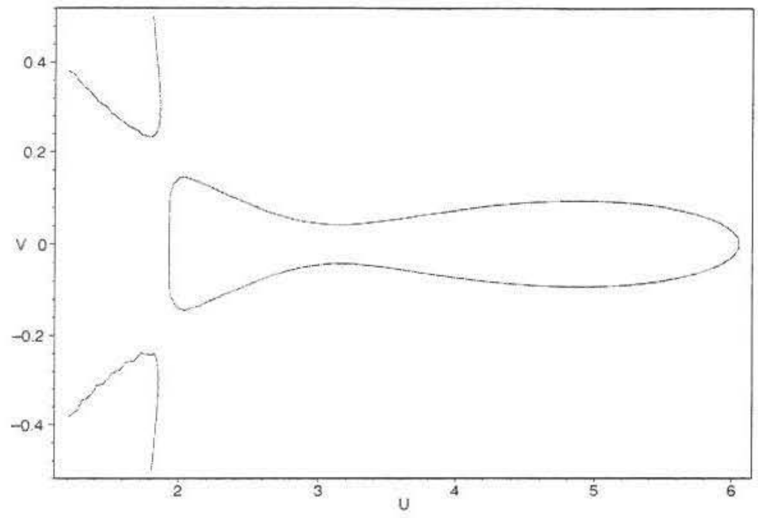

Figure C.7: Boundary contour of the Kerr+Quadrupole system for $L = -3.322$, $E = 0.93715$, $k_2 = -5.08$ and $q = 0.002$.

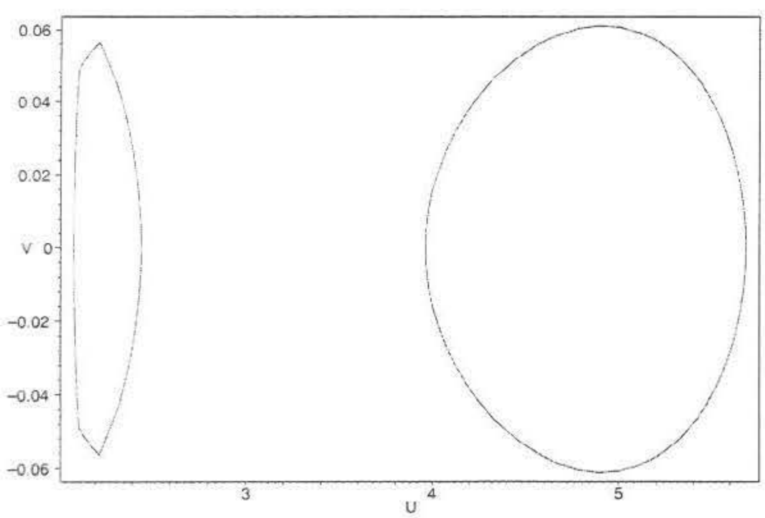

Figure C.8: Boundary contour of the Kerr+Quadrupole system for $L = 3.322$, $E = 0.93715$, $k_2 = -5.08$ and $q = 0.002$. The confinement region is separated in two. They are much smaller than in the precedent figure

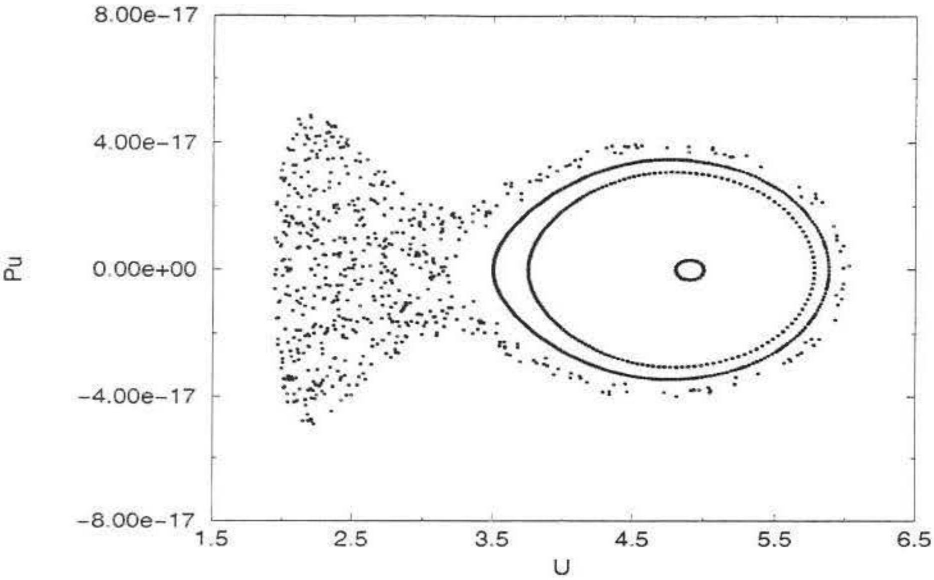

Figure C.9: Poincaré Section for the same value of the parameters of Fig. C.7. We have chaotic motion mainly in the left hand side of the picture

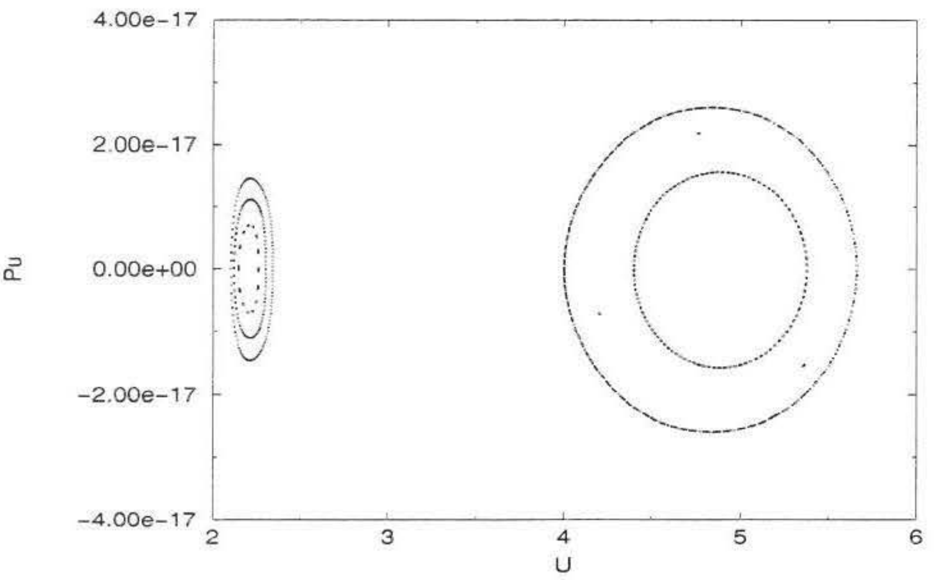

Figure C.10: Poincaré Section for the same value of the parameters of Fig. C.8. We do not see irregular motion in both regions

Bibliography

[1] H. Poincaré *Les Méthodes Nouvelles de la Mechanique Celeste*, (Gauthier-Villars, Paris, 1892)

[2] A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 98, 527 (1954) V.I. Arnol'd., Russ. Math. Surv. 18, 9 (1963); ibid 18, 85 (1963) J. Moser,Math. Ann., 169, 136 (1967)

[3] M.V. Berry, Am. Inst. Phys. Conf. Proc. 46, 16 (1978)

[4] D. Merrit, Science 271, 337 (1996)

[5] See for instance, H. Robertson and T. Noonan, "Relativity and Cosmology"(Saunders, London 1968) pp 272-278

[6] See for instance, C.M. Cosgrove, J. Math. Phys. 23, 615 (1982) and references therein

[7] G. Contopoulos, Proc. R. Soc. Lond. A 431, 183 (1990); A 435, 551 (1991)

[8] Y. Sota, S. Suzuki and K. Maeda, Class. Quantum Grav. 13, 1241 (1996). See also, W.M. Vieira and P.S. Letelier, Class. Quantum Grav. 13, 3115 (1996)

[9] W.M. Vieira and P.S. Letelier, Phys. Lett. A, 288, 22 (1997).

[10] L. Bombelli and E. Calzetta, Class. Quantum Grav. 9, 2573 (1992)

[11] P.S. Letelier and W.M. Vieira, Class. and Quantum Grav., 14, 1249 (1997)

[12] S. Chandrasekhar, "The mathematical theory of black holes", (Clarendon Press, Oxford, 1983)

[13] See for instance, Ya. B. Zeldovich and I.D. Novikov, "Relativistic Astrophysics"(University of Chicago Press, Chicago 1971) pp 130-134; M. Carmeli, "Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory"(John Wiley, New York 1982) pp 177-182

[14] F. Bertola *et al.*, Ap. J. 458, L67 (1996)

[15] A. R. Cooray, Mon Not. R. Astron. Soc. **313**, 783 (2000)

[16] W. M. Vieira and P. S. Letelier, Ap. J 513, 383 (1999); Phys. Rev. Lett. 76, 1409 (1996)

[17] A.P.S. Moura and P.S. Letelier, Phys. Rev. E, 61, 6506 (2000)

[18] P.S. Letelier and W.M. Vieira, Phys. Rev. D 56,8098 (1997)

[19] A. Saa and R. Venegeroles, Phys Lett A 259, 201 (1999); see also, A. Saa, Phys Lett A **269**, 204 (1999).

[20] P.S. Letelier and W.M. Vieira, Phys. Lett. A, 244, 324 (1998)

[21] A.P.S. Moura and P.S. Letelier, Physics Letters A, 266, 309 (2000); P.S. Letelier and W.M. Vieira, Phys. Lett. A, 242, 7 (1998). P.S. Letelier and A.E. Motter, Phys. Rev. E 60, 3920 (1999)

[22] E. Gueron and P.S. Letelier Astron. Astrophys. 368, 716 (2001); H. Varvoglis and D. Papadopoulos, Astron. Astrophys. 261, 664 (1992); V. Karas and D. Vokrouhlicky, Gen. Rel. Gravit. 24, 729 (1992)

[23] E. Gueron and P.S. Letelier, Phys. Rev. E 63 , 035201(R) (2001)

[24] V. A. Belinsky and V. Zakharov, Sov Phys. JETP **50**, 1 (1979)

[25] G. Benettin, L. Galgani and JM. Streclyn, Phys. Rev. A **14** 2338 (1976)

[26] J. Ehlers, in "Grundlagenprobleme der Modernen Physik", A. Erdélyi, J.Pfarr, and E.-W. Stachov, Eds. (BI-Verlag, Mannheim, 1981) pp 65-84

[27] G. Erez and N. Rosen, Bull. Res. Counc. Isr. 8F, 47 (1959)

[28] H. Quevedo, Phys Rev. D **39** 2904 (1989)

[29] P.S. Letelier, Class. Q. Grav., 16, 1207 (1999)

[30] B. Boisseau and P.S. Letelier " Relativistic Multipoles and the Advance of the Perihelia", preprint Université de Tours (2001)

[31] P. S. Letelier, J. Math Phys. 26, 467 (1984)

[32] H. Quevedo and B. Mashhoon, Phys Rev. D 43, 3902 (1991)

[33] J. Levin, Phys. Rev. D **60**, 4015 (1999)