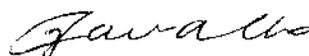


TESTE DE NÃO-ADITIVIDADE PARA
EXPERIMENTOS A DOIS FATORES
NÃO REPLICADOS: APLICAÇÃO DE
UM MODELO MULTIPLICATIVO GERAL

Este exemplar corresponde a redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida pela Sra. MARTA AFONSO
FREITAS e aprovada pela Comissão
Julgadora.

Campinas, 30 de julho de 1986.



Prof. Dr. JOSÉ FERREIRA DE CARVALHO
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação, UNICAMP, como requisi-
to parcial para obtenção do Título
de Mestre em ESTATÍSTICA.

"Que nossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos que as grandes proezas da história
foram conquistas do que parecia impossível ... "

C. Chaplin

a meus pais,
Heládio e Maria Luisa
e meu filho,
Paulo

AGRADECIMENTOS...

- ... ao Prof. Dr. José Ferreira de Carvalho, pela confiança em mim depositada, pela orientação paciente e sobretudo, pela amizade

- ... ao Enrico pelas sugestões durante a fase de redação, pela ajuda na revisão do texto e principalmente, pelo incentivo e compreensão durante todo este tempo

- ... ao pessoal do C.P.D do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares - IPEN, em S. Paulo, em especial, Antonio Gouvea, Cida, Emília, Maria do Carmo, Vanda e Tadeu, cuja colaboração gentilmente prestada foi fundamental para a realização deste trabalho

- ... às amigas Inês e Regina, pelo estímulo nas horas difíceis

- ... ao CNPq e Fapesp que financiaram meu programa de Pós-Graduação

INDICE

Introdução.....	1
Capítulo I - Experimentos Aleatorizados	
1.1 - Introdução	3
1.2 - Experimento Completamente Aleatorizado	3
1.3 - Experimento Aleatorizado em Blocos Completos	10
1.4 - Experimento Aleatorizado em Blocos Completos (sem a suposição de aditividade).....	17
1.5 - Teste de Aleatorização	21
1.5.1 - Aproximação Normal para o Teste de Aleatorização	21
Capítulo II - Modelos Multiplicativos	
2.1 - Introdução	26
2.2 - A Interação entre Dois Fatores	26
2.3 - Um Modelo para Interação de Dois Fatores	28
2.4 - A Aproximação de Mínimos Quadrados	30
2.5 - Análise para a Interação de Dois Fatores	34
2.6 - Os "Pseudo Graus de Liberdade".....	39
2.7 - Teste da Razão de Verossimilhança para a Hipótese de Não-Aditividade	39
2.7.1 - Teste da Razão de Verossimilhança para $H_0: \theta = 0$ vs $H: \theta \neq 0$	41
2.7.2 - Distribuição de Λ quando $\theta = 0$	43
2.7.3 - Aproximação para a Distribuição de U_1	46
Capítulo III - Teste de Tukey (Um Grau de Liberdade para Não-Aditividade).	
3.1 - Introdução	49
3.2 - O Modelo Proposto por Tukey	49

Capítulo IV - Comparação dos Testes de Tukey e Mandel.

4.1 - Introdução	54
4.2 - Critérios Utilizados para o Teste de Mandel	54
4.3 - Simulação com Populações Infinitas	56
4.4 - Simulação com Populações Finitas	59
4.4.1 - Simulação com População Aditiva	60
4.4.2 - Simulação com Populações com Efeitos Multi- plicativos	62
4.4.2.1 - 1º Caso: ângulos de zero graus	63
4.4.2.2 - 2º Caso: ângulos quaisquer	65
4.5 - Conclusão	67
Apêndice A	68
Apêndice B	73
Apêndice C	76
Apêndice D	79
Apêndice E	80
Apêndice F	83
Referências	87

INTRODUÇÃO

Esta tese tem por objetivo o estudo de um teste para a hipótese de aditividade em dados de experimentos com dois fatores e não replicados.

Um motivo para o estudo de um tal teste vem de experimentos aleatorizados em blocos completos. A análise usual, através de modelos com efeitos aditivos de blocos e tratamentos, depende da aditividade somente.

Explicamos: se houver aditividade entre blocos e tratamentos, o modelo linear empregado decorre da aleatorização; a validade do método de mínimos quadrados, com a estrutura de Gauss-Markoff (erros não correlacionados) está garantida, apesar de, por decorrência da aleatorização, esses erros serem correlacionados.

O estudo de planos fatoriais a dois fatores - sem replicação ou com replicação - beneficia-se do modelo implícito no teste objetivo desta tese.

Mandel (1969) discute plenamente o assunto. O tópico relativo à estimação e análise dos parâmetros estruturais não será abordado aqui.

O teste para interação é baseado em um caso particular do modelo proposto por Mandel, com apenas um componente multiplicativo.

O problema do ajuste pode ser resolvido por mínimos quadrados (Mandel (1969), ver também Gabriel (1978) para um desenvolvimento mais formal) ou máxima verossimilhança (Johnson e Graybill (1972)).

O modelo multiplicativo para a interação, com um componente só, é da forma

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta u_i v_j + e_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix} \quad (1)$$

onde os e_{ij} são erros com estrutura de Gauss-Markoff.

Já o modelo implícito no teste de Tukey (1949) é da forma:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta \alpha_i \beta_j + e_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix} \quad (2)$$

com erros com distribuição Gaussiana.

Em qualquer dos dois casos, testa-se aditividade através de:

$$H_0 : \theta = 0 \text{ vs.}$$

$$H_1 : \theta \neq 0 .$$

Como o modelo (2) sob H_1 é caso particular de (1), aventa-se a possibilidade de que o poder do teste baseado no modelo multiplicativo seja, em geral, maior que o de Tukey.

Fizemos uma verificação dessa possibilidade por simulação em computador. Os resultados comprovam a hipótese.

Vimos, ainda, que o poder do teste de Tukey, como esperado, depende do ângulo entre os vetores \underline{u} e \underline{v} e do ângulo entre $\underline{\beta}$ e $\underline{\gamma}$.

O poder é bom quando esses ângulos são próximos de zero graus e cai muito à medida que um desses ângulos vai para 90 graus.

Já o poder do teste baseado no modelo multiplicativo não sofre tanta influência desses ângulos.

Temos evidência algébrica e numérica de que, supondo aditividade entre blocos e tratamentos, o teste F para tratamentos dá um nível de significância que aproxima bem aquele dado pelo teste de aleatorização (permutação, teste exato de Fisher). Realizamos uma simulação com população finita para verificar os comportamentos dos testes de Tukey e Mandel.

CAPITULO I

EXPERIMENTOS ALEATORIZADOS

1.1- INTRODUÇÃO

Experimentos em diversos ramos da ciência são, sempre que possível, aleatorizados, isto é, os tratamentos são atribuídos às unidades experimentais de modo aleatório.

As idéias de aleatorização foram introduzidas por Fisher (1926, 1935) e posteriormente estudadas sob vários aspectos por vários autores. Entre eles estão, sobretudo, Neyman (1935) - que introduziu o conceito de população conceitual de respostas e examinou algumas consequências da aleatorização com relação a testes de significância - e Kempthorne (1952, 1955).

Utilizando os conceitos de população conceitual propostos por Neyman e as variáveis aleatórias de seleção de Cornfield (1944), Kempthorne pode examinar com o detalhe possível, consequências da aleatorização em vários planos experimentais, como por exemplo o experimento aleatorizado em blocos completos.

Estudaremos aqui experimentos comparativos no qual o experimentador deseja fazer afirmações à respeito de diferenças em respostas produzidas por um conjunto fixo de tratamentos.

Verificaremos que a aleatorização proporciona uma distribuição de referência para a inferência estatística e permite que utilizemos os testes da teoria normal como aproximações para os testes exatos de aleatorização sem que para isso fiquemos presos à suposição de independência e exata normalidade.

A análise será apresentada para o experimento completamente aleatorizado e aleatorizado em blocos completos

Para um caso em particular - experimento aleatorizado em blocos completos - analisaremos as consequências da existência de interação bloco x tratamento no teste para efeitos de tratamentos e a importância da pressuposição de aditividade entre estes dois fatores.

1.2- EXPERIMENTO COMPLETAMENTE ALEATORIZADO.

Suponhamos que temos $N=rs$ unidades experimentais e s tratamentos que serão aplicados às unidades, aleatoriamente com a restrição que cada tratamento seja aplicado em r unidades experimentais.

Denotaremos a j -ésima replicação do i -ésimo tratamento pelo par (i, j) , $i=1, 2, \dots, s$; $j=1, 2, \dots, r$.

Cada par (i, j) será aplicado aleatoriamente às unidades experimentais. Isso pode ser feito, por exemplo, sorteando-se sequencialmente os pares (i, j) e aplicando-os sucessivamente às unidades experimentais, as quais deverão estar previamente ordenadas.

A cada possível combinação tratamento-unidade experimental temos uma "resposta conceitual" Y_{ik} , $i=1, 2, \dots, s$; $k=1, 2, \dots, rs$, onde Y_{ik} é a resposta da k -ésima unidade experimental ao tratamento i .

Na realidade, não dispomos dos valores Y_{ik} uma vez que, ao aplicarmos o tratamento i à unidade experimental k , alteramos sua capacidade de resposta a outro tratamento distinto, quando não destruímos a unidade.

Denotaremos y_{ij} , a resposta observada, ou seja, a observação resultante da j -ésima replicação do i -ésimo tratamento.

Os resultados experimentais y_{ij} são associados às respostas conceituais Y_{ik} através das variáveis aleatórias de seleção δ_{ij}^k , onde

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se a } j\text{-ésima replicação do } i\text{-ésimo tratamento} \\ & \text{está aplicada na } k\text{-ésima unidade experimental} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k Y_{ik} \quad \text{onde}$$

$$P(\delta_{ij}^k = 1) = \frac{1}{rs}$$

Outras probabilidades da distribuição de δ são imediatas como por exemplo:

$$P(\delta_{ij}^k = 1 / \delta_{i'j'}^{k'} = 1) = 0 \quad j \neq j', \forall i, i'$$

$$P(\delta_{ij}^k = 1 / \delta_{i'j'}^{k'} = 1) = \frac{1}{rs-1} \quad i \neq i' \text{ e } k \neq k', \forall j, j'$$

Podemos escrever Y_{ik} como :

$$Y_{ik} = Y_{..} + (Y_{i.} - Y_{..}) + (Y_{.k} - Y_{..}) + (Y_{ik} - Y_{i.} - Y_{.k} + Y_{..}) \quad (1.2.1)$$

$$Y_{..} = \frac{1}{rs \times s} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{rs} Y_{ik}$$

$$Y_{i.} = \frac{1}{rs} \sum_{k=1}^{rs} Y_{ik}$$

$$Y_{.k} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y_{ik}$$

Vamos supor agora que exista aditividade entre os efeitos de unidade experimental e tratamento, ou seja:

$$Y_{ik} = x_k + t_i$$

onde x_k é a resposta da k -ésima unidade experimental sob alguma condição básica.

Substituindo Y_{ik} em (1.2.1) teremos :

$$Y_{ik} = (x_k + t_i) + (t_i - t_i) + (x_k - x_k)$$

$$Y_{ik} = \mu + \tau_i + (x_k - x_k)$$

As respostas observadas são, portanto, dadas por :

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij} Y_{ik} = \mu + \tau_i + \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij} (x_k - x_k) \quad \text{ou ainda}$$

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij} \quad i=1,2,\dots,s; j=1,\dots,r \quad (1.2.2)$$

$$\text{onde } e_{ij} = \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij} (x_k - x_k) \quad (1.2.3)$$

A expressão (1.2.2) é o modelo linear deduzido da aleatorização.

Desta forma, as observações são expressas como a soma da média geral mais o efeito do tratamento i , mais um erro (dado por (1.2.3)). Este erro é uma função linear das variáveis do experimento, os δ_{ij}^k 's, com coeficientes $(x_{ij} - x_{..})$. Tais coeficientes não são considerados variáveis aleatórias mas sim, quantidades fixas e desconhecidas.

Colocando o modelo (1.2.2) na forma matricial, temos

$$\tilde{y} = X \tilde{\beta} + \tilde{e}, \text{ onde}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1r} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2r} \\ \vdots \\ y_{s1} \\ y_{s2} \\ \vdots \\ y_{sr} \end{bmatrix} \quad \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_s \end{bmatrix} \quad \tilde{e} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1r} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{2r} \\ \vdots \\ e_{s1} \\ e_{s2} \\ \vdots \\ e_{sr} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned}
 E(e_{ij}) &= E \left[\sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_k - \bar{x}_k) \right] = \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \bar{x}_k) P(\delta_{ij}^k = 1) = 0 \\
 \text{Var}(e_{ij}) &= E(e_{ij}^2) = E \left(\sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_k - \bar{x}_k) \right)^2 = \\
 &= E \left[\sum_{k=1}^{rs} (\delta_{ij}^k)^2 (x_k - \bar{x}_k)^2 + \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} \delta_{ij}^k \delta_{ij}^{k'} (x_k - \bar{x}_k) (x_{k'} - \bar{x}_{k'}) \right] \\
 &= \frac{1}{rs} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \bar{x}_k)^2 + \\
 &\quad + \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} P(\delta_{ij}^k = 1 / \delta_{ij}^{k'} = 1) P(\delta_{ij}^{k'} = 1) (x_k - \bar{x}_k) (x_{k'} - \bar{x}_{k'}) \\
 &= \frac{1}{rs} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \bar{x}_k)^2 = \\
 &= \frac{rs-1}{rs} S^2 = \frac{N-1}{N} S^2
 \end{aligned}$$

onde $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2$.

Da mesma forma podemos encontrar a covariância dos erros (ver apêndice A), dada por:

$$\text{cov}(e_{ij}, e_{i'j'}) = E(e_{ij} e_{i'j'}) = -\frac{S^2}{N}$$

A matriz de covariâncias dos erros é, portanto, da forma

$$V_{(rs \times rs)} = E'(ee') = \frac{S^2}{N} \begin{bmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & \dots & N-1 \end{bmatrix}$$

Definindo $y_{i.}$ como a média observada do tratamento i , temos:

$$E(y_{i.}) = \mu + \tau_i$$

$$\text{Var}(y_{i.}) = r^{-2} \sum_{j=1}^r \text{Var}(y_{ij}) + r^{-2} \sum_{j \neq j'} \sum_{j'} \text{cov}(y_{ij}, y_{ij'}) = \frac{s-1}{s} \frac{S}{r}$$

Se A e B são dois contrastes, ou seja, $A = \underline{l}'y$ e $B = \underline{v}'y$

$$\text{com } \underline{l}'_{(1 \times rs)} = \frac{1}{r} (1 \dots 1 \dots 1 \dots 1 \dots 1 \dots 1 \dots 1)$$

$$\underline{v}'_{(1 \times rs)} = \frac{1}{r} (v_1 \dots v_1 \dots v_2 \dots v_2 \dots v_s \dots v_s)$$

$$\sum_{i=1}^s 1_i = 0, \quad \sum_{i=1}^s v_i = 0 \quad \text{e}$$

$\underline{y}_{(1 \times rs)}$, o vetor de observações, podemos chegar aos resultados já conhecidos para a variância e covariância de contrastes:

$$\text{Var}(A) = \underline{l}'V\underline{l} = \left(\sum_{i=1}^s 1_i^2 \right) \frac{S}{r} \quad \text{Var}(B) = \left(\sum_{i=1}^s v_i^2 \right) \frac{S}{r}$$

$$\text{cov}(A,B) = \underline{l}'V\underline{v} = \left(\sum_{i=1}^s 1_i v_i \right) \frac{S}{r}$$

A covariância de duas médias de tratamentos é $\frac{S}{rs}$ como deveríamos esperar, pois é a covariância comumente obtida quando tratamos de amostras de populações finitas.

Podemos também construir a tabela de análise de variância, através da subdivisão da soma de quadrados total, ou seja:

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r (y_{ij} - y_{i.})^2 = r \sum_{i=1}^s (y_{i.} - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r (y_{ij} - y_{i.})^2$$

O cálculo das esperanças das somas de quadrados (apêndice A), nos leva às seguintes expressões:

$$E(\text{SQtrat}) = (s-1) S^2 + r \sum_{i=1}^s \tau_i^2$$

$$E(SQ_{total}) = (rs-1) S^2 + r \sum_{i=1}^s \tau_i^2$$

$$E(SQ_{resíduo}) = s(r-1) S^2$$

Dividindo as somas de quadrados de tratamento e resíduo por $(s-1)$ e $s(r-1)$ respectivamente, obtemos a seguinte tabela de análise de variância:

Fonte de variação	gl	SQ	QM	E (QM)
tratamento	$s-1$	SQ_{trat}	$SQ_{trat}/(s-1)$	$S^2 + r \sum_{i=1}^s \tau_i^2$
resíduo	$s(r-1)$	SQ_{res}	$SQ_{res}/s(r-1)$	S^2
total	$rs - 1$	SQ_{tot}		

Se os tratamentos não tiverem "efeito", as esperanças dos quadrados médios serão ambas iguais a S^2 .

A análise de variância acima poderia ter sido obtida pelo uso do modelo linear

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (1.2.4)$$

onde y_{ij} é a j -ésima replicação do tratamento i , com μ e τ_i constantes e e_{ij} , erros não correlacionados com média zero e variância suposta constante.

No entanto, podemos notar que:

i) com base na aleatorização e juntamente com a suposição de aditividade, deduzimos um modelo linear que tem a mesma forma de (1.2.4), com a diferença que no primeiro, cada observação está automaticamente sujeita à mesma variância, enquanto que isto deve ser **suposto** na utilização de (1.2.4);

ii) a variância da média observada de um tratamento é $\frac{s-1}{s} \frac{S^2}{r}$. No

entanto $\text{Var}(y_{1.} - y_{1'}) = 2 \frac{S}{r}$ que é a mesma expressão que obteríamos considerando $y_{1.}$ e $y_{1'}$ independentes com variância $\frac{S}{r}$.

1.3 - EXPERIMENTO ALEATORIZADO EM BLOCOS COMPLETOS.

No experimento aleatorizado em blocos completos, temos $N=rs$ unidades experimentais, as quais são agrupadas em r blocos com s unidades cada um; os s tratamentos são aplicados aleatoriamente dentro de cada bloco e a aleatorização é feita independentemente entre os blocos.

Denotaremos a resposta conceitual do "plot" j ($j=1,2,\dots,s$) no bloco i ($i=1,2,\dots,r$), ao tratamento k ($k=1,2,\dots,s$), por Y_{ijk} . Temos então a seguinte identidade:

$$Y_{ijk} = Y_{...} + (Y_{i..} - Y_{...}) + (Y_{.jk} - Y_{.j.}) + (Y_{.ij.} - Y_{.i.}) \quad (1.3.1)$$

$$\text{onde } Y_{...} = \frac{-2}{r} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s Y_{ijk}$$

$$Y_{i..} = \frac{-2}{s} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s Y_{ijk}$$

$$Y_{.jk} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s Y_{ijk}$$

Supondo aditividade entre tratamento e unidade experimental:

$$Y_{ijk} = x_{ij} + t_k$$

Podemos então reescrever a identidade (1.3.1) como

$$Y_{ijk} = (x_{ij} + t_k) + (x_{i.} - x_{.j.}) + (t_k - t_{.j.}) + (x_{.ij.} - x_{.i.})$$

$$Y_{ijk} = \mu + \beta_i + \tau_k + (x_{ij} - x_{i.})$$

É importante notar que sob a hipótese de aditividade entre unidade experimental e tratamento, o valor conceitual é decomposto em efeitos aditivos de blocos e tratamentos.

Na realidade, o que observamos, é a resposta devido ao tratamento k , num "plot" aleatório j de cada bloco i . Denotaremos esta observação por y_{ik} , e podemos escrever:

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k Y_{ijk} \quad \text{onde}$$

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se o tratamento } k \text{ é aplicado} \\ & \text{no "plot" } j \text{ do bloco } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Neste caso, da mesma forma como no plano completamente aleatorizado, conhecemos a distribuição conjunta das variáveis δ_{ij}^k , determinada pelo processo de aleatorização que foi utilizado na obtenção do plano experimental em questão.

As propriedades das variáveis δ_{ij}^k que nos interessam são:

$$P(\delta_{ij}^k = 1) = \frac{1}{s}$$

$$P(\delta_{ij}^k = 1 / \delta_{ij'}^{k'} = 1) = \frac{1}{s-1} \quad j \neq j', k \neq k'$$

$$P(\delta_{ij}^k = 1 / \delta_{ij'}^k = 1) = 0 \quad j \neq j'$$

$$P(\delta_{ij}^k = 1 / \delta_{ij'}^{k'} = 1) = P(\delta_{ij}^k = 1) = \frac{1}{s} \quad i \neq i' \text{ e } \forall k, k', j, j'$$

ou seja, δ_{ij}^k e $\delta_{ij'}^{k'}$ são independentes se $i \neq i' \forall k, k', j, j'$.

As respostas observadas são, portanto, dadas por:

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k [\mu + \beta_i + \tau_k + (x_{ij} - x_i)]$$

$$y_{ik} = \mu + \beta_i + \tau_k + e_{ik} \quad i = 1, \dots, r; k = 1, \dots, s \quad (1.3.2)$$

$$\text{onde } e_{ik} = \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (x_{ij} - \bar{x}_i).$$

A expressão (1.3.2) é o modelo linear deduzido para o experimento aleatorizado em blocos completos, com

$$\sum_{i=1}^r \beta_i = \sum_{k=1}^s \tau_k = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s \epsilon_{ik} = 0$$

O erro aleatório associado a cada observação é e_{ik} , onde:

$$\begin{aligned} E(e_{ik}) &= E \left[\sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (x_{ij} - \bar{x}_i) \right] = \sum_{j=1}^s P(\delta_{ij}^k = 1) (x_{ij} - \bar{x}_i) = \\ &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_{ij} - \bar{x}_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(e_{ik}) &= E(e_{ik}^2) = E \left[\left(\sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (x_{ij} - \bar{x}_i) \right)^2 \right] = \\ &= E \left[\sum_{j=1}^s (\delta_{ij}^k)^2 (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{j \neq j'}^s \delta_{ij}^k \delta_{ij'}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{ij'} - \bar{x}_i) \right] = \\ &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{j \neq j'}^s P(\delta_{ij}^k = 1, \delta_{ij'}^k = 1) (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{ij'} - \bar{x}_i) = \\ &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s e_{ij}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Fazendo } S_i^2 = \frac{1}{s-1} \sum_{j=1}^s e_{ij}^2, \text{ temos:}$$

$$\text{Var}(e_{ik}) = \frac{s-1}{s} S_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Como, dentro de um bloco i a situação é análoga à de um experimento completamente aleatorizado

$$\text{cov}(e_{ik}, e_{ik'}) = -\frac{S_i^2}{s} \quad k \neq k'$$

e , uma vez que a aplicação de tratamentos é independente entre os blocos

$$\text{cov}(e_{ik}, e_{i'k'}) = 0 \quad i \neq i' \quad \forall k, k'$$

Podemos então escrever o modelo (1.3.2) na forma matricial $\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{e}$, onde

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1s} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2s} \\ \vdots \\ y_{r1} \\ y_{r2} \\ \vdots \\ y_{rs} \end{bmatrix} \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_s \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \vdots \\ e_{1s} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{2s} \\ \vdots \\ e_{r1} \\ e_{r2} \\ \vdots \\ e_{rs} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de covariâncias dos erros tem então a seguinte forma:

$$V = \text{cov}(\underline{e}) = \begin{bmatrix} V_1 & \phi & \phi & \dots & \phi \\ \phi & V_2 & \phi & \dots & \phi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi & \phi & \phi & \dots & V_r \end{bmatrix}$$

onde V_i é uma matriz $s \times s$ dada por

$$V_i = \frac{2}{s} \begin{bmatrix} s-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & s-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & s-1 \end{bmatrix}$$

e ϕ é a matriz nula. ($s \times s$)

Vamos examinar os estimadores de efeito de tratamento e contrastes.

Seja $y_{.k}$, a média observada para o tratamento k . Ou seja

$$y_{.k} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_{ik} \quad e$$

$$E(y_{.k}) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r E \left[\left(\mu + \beta_i + \tau_k + \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (x_{ij} - x_{.j}) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left(\mu + \beta_i + \tau_k + \sum_{j=1}^s P(\delta_{ij}^k = 1) (x_{ij} - x_{.j}) \right)$$

$$= \mu + \tau_k$$

$$\text{Var}(y_{.k}) = r^{-2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^r y_{ik} \right) = r^{-2} \sum_{i=1}^r \text{Var}(y_{ik}) = r^{-2} \sum_{i=1}^r \frac{s-1}{s} S^2$$

$$= \frac{r^{-2}}{s} r(s-1) S^2 = \frac{s-1}{s} \frac{S^2}{r}$$

$$y_{.k} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_{ik}$$

$$y_{..} = \frac{1}{rs} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s y_{ik}$$

por: A esperança das somas de quadrados (apêndice A), são dadas

$$E(SQ_{trat}) = (s-1) S^2 + r \sum_{k=1}^s \tau_k^2$$

$$E(SQ_{blocos}) = s \sum_{i=1}^r \beta_i^2$$

$$E(SQ_{res}) = (r-1)(s-1) S^2$$

$$E(SQ_{tot}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij}^2 + r \sum_{k=1}^s \tau_k^2 + s \sum_{i=1}^r \beta_i^2$$

Se dividirmos as somas de quadrados de blocos, tratamentos e resíduos por $(r-1)$, $(s-1)$, $(r-1)(s-1)$ respectivamente, ficaremos com a seguinte tabela de análise de variância:

Fonte de variação	gl	SQ	QM	E(QM)
bloco	$r-1$	SQ_{bloco}	$\frac{SQ_{bloco}}{(r-1)}$	$\frac{s}{r-1} \sum_{i=1}^r \beta_i^2$
tratamento	$s-1$	SQ_{trat}	$\frac{SQ_{trat}}{(s-1)}$	$S^2 + \frac{r}{s-1} \sum_{k=1}^s \tau_k^2$
resíduo	$(r-1)(s-1)$	SQ_{res}	$\frac{SQ_{res}}{(r-1)(s-1)}$	S^2
total	$rs - 1$	SQ_{tot}		

Devemos notar mais uma vez que, se não há efeito de tratamento, a esperança do quadrado médio de tratamento é igual à esperança do quadrado médio do resíduo.

Também neste tipo de experimento, os resultados com relação a estimadores de comparações de tratamentos e suas variâncias são, a menos de uma exceção, os resultados obtidos com a teoria normal.

A exceção diz respeito à correlação entre totais ou médias de tratamentos, que neste contexto, é negativa (o que ocorre usualmente em amostras de população finitas).

No entanto, a observação mais importante que deve ser feita é que não existe teste para diferenças entre blocos.

Finalizando, mesmo não assumindo homocedasticidade para os blocos ($Var(e_{ik}) = \frac{s-1}{s} S^2$), observamos que tal fato não altera nossas inferências, como podemos notar, por exemplo, no caso da variância de um contraste, dada por: $(\sum_{k=1}^s l_k)^2 \frac{S^2}{r}$.

**1.4 - EXPERIMENTO ALEATORIZADO EM BLOCOS COMPLETOS.
(SEM A SUPOSIÇÃO DE ADITIVIDADE)**

Vamos formular agora um modelo no qual não temos aditividade entre unidade experimental e tratamento.

Seja Y_{ijk} a resposta conceitual do j-ésimo "plot" do bloco i ao tratamento k; $i=1, \dots, r$; $j=1, \dots, s$; $k=1, \dots, s$.

Podemos escrever:

$$Y_{ijk} = \mu + (\alpha_i - \alpha_{i..}) + (\beta_j - \beta_{j..}) + (\gamma_k - \gamma_{..k}) + (\alpha\beta_{ij} - \alpha_{i..} - \beta_{j..}) + (\alpha\gamma_{ijk} - \alpha_{i..} - \gamma_{..k} - \alpha\beta_{ij}) \quad (1.4.1)$$

Se a hipótese de aditividade fosse válida, ou seja, se

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k$$

teríamos

$$Y_{i..} = x_{i..} + t_{i..}$$

$$Y_{i..} - Y_{i..} = x_{i..} - x_{i..}$$

$$Y_{ij.} - Y_{i..} = x_{ij.} - x_{i..}$$

$$Y_{..k} - Y_{i..} = t_{..k} - t_{i..}$$

$$Y_{i.k} - Y_{i..} - Y_{..k} + Y_{i..} = 0$$

$$Y_{ijk} - Y_{ij.} - Y_{i.k} + Y_{i..} = 0$$

Portanto, se existisse aditividade, a identidade (1.4.1) se reduziria a

$$Y_{ijk} = (x_{ij.} + t_{i..}) + (x_{i.k} - x_{i..}) + (t_{..k} - t_{i..}) + (x_{ijk} - x_{ij.}) \quad (1.4.2)$$

que é o modelo já deduzido anteriormente.

Consideremos então o caso em que a hipótese de aditividade não é válida.

Denotando y_{ik} como a resposta observada do tratamento k num "plot" aleatório j do bloco i , temos:

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k Y_{ijk} \quad \text{onde } Y_{ijk} \text{ é dado por (1.4.1) e}$$

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se o tratamento } k \text{ ocorre no } j\text{-ésimo "plot" do bloco } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ik} = Y_{i..} + (Y_{i..} - Y_{i..}) + \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (Y_{ij.} - Y_{i..}) + (Y_{..k} - Y_{i..}) + (Y_{i.k} - Y_{i..} - Y_{..k} + Y_{i..}) + \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (Y_{ijk} - Y_{ij.} - Y_{i.k} + Y_{i..})$$

$$y_{ik} = \mu + \beta_i + \tau_k + (\beta\tau)_{ik} + \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (Y_{ij.} - Y_{i..}) + \\ + \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k (Y_{ijk} - Y_{ij.} - Y_{i.k} + Y_{i..})$$

$$y_{ik} = \mu + \beta_i + \tau_k + (\beta\tau)_{ik} + \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k \epsilon_{ij} + \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k \eta_{ijk}$$

Chegamos portanto ao modelo

$$y_{ik} = \mu + \beta_i + \tau_k + \epsilon_{ik} + (\beta\tau)_{ik} + \eta_{ijk} \quad (1.4.3)$$

Notamos que a diferença entre este modelo e o modelo (1.4.2) é que este contém dois termos adicionais.

O primeiro, $(\beta\tau)_{ik}$, mede a diferença de efeitos de bloco para bloco e não é uma variável aleatória a menos que suponhamos ter uma amostra aleatória de alguma população de blocos.

O segundo, η_{ijk} , mede até que ponto o efeito do k-ésimo tratamento no "plot" (ij) é diferente do efeito do k-ésimo tratamento medido nos "plots" do i-ésimo bloco, e é uma variável aleatória.

É interessante examinar o que de fato os estimadores usuais estão estimando, se (1.4.3) é o modelo verdadeiro.

Uma vez que

$$E(\delta_{ij}^k) = \frac{1}{s}$$

$$\sum_{i=1}^r (\beta\tau)_{ik} = \sum_{k=1}^s (\beta\tau)_{ik} = \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} = \sum_{j=1}^s \eta_{ijk} = \sum_{k=1}^s \eta_{ijk} = 0$$

o total do tratamento k, $\sum_{i=1}^r y_{ik}$, tem esperança $r\mu + r\beta_i + r\tau_k$

Isto é, a média de tratamento observada, estima a média que teria sido obtida se todas as unidades experimentais tivessem sido submetidas ao tratamento k.

Vamos examinar a tabela de análise de variância usual:

Fonte de variação	gl	Soma de quadrados
blocos	r-1	$s \sum_{i=1}^r (y_{i.} - \bar{y})^2$
tratamentos	s-1	$r \sum_{k=1}^s (y_{.k} - \bar{y})^2$
resíduo	(r-1)(s-1)	$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (y_{ik} - y_{i.} - y_{.k} + \bar{y})^2$
total	rs - 1	$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (y_{ik} - \bar{y})^2$

O cálculo das esperanças dos quadrados médios é muito trabalhoso e não será apresentado aqui.

Fazendo $\xi_{ijk} = e_{ij} + \eta_{ijk}$ obtemos para as esperanças de quadrados médios, as seguintes expressões:

$$E(QM_{\text{blocos}}) = \frac{1}{rs(s-1)} \sum_i \sum_j \sum_k \eta_{ijk}^2 + \frac{s}{r-1} \sum_{i=1}^r \beta_i^2$$

$$E(QM_{\text{trat}}) = \frac{1}{rs(s-1)} \sum_i \sum_j \sum_k \xi_{ijk}^2 - \frac{(s-1)}{rs} \sum_i \sum_j \sum_k \eta_{ijk}^2 + \frac{r}{s-1} \sum_{k=1}^s \tau_k^2$$

$$E(QM_{\text{res}}) = \frac{1}{rs(s-1)} \sum_i \sum_j \sum_k \xi_{ijk}^2 - \frac{(s-1)}{rs} \sum_i \sum_j \sum_k \eta_{ijk}^2 + \frac{1}{(r-1)(s-1)} \sum_i \sum_k (\beta\tau)_{ik}^2$$

Portanto, na realidade, quando a hipótese de aditividade não é válida, não existe teste para efeito de tratamentos, uma vez que a expressão para a $E(QM_{\text{res}})$ depende de um termo, $(\beta\tau)_{ik}$, que reflete a interação entre bloco e tratamento.

1.5 - TESTE DE ALEATORIZAÇÃO.

Um procedimento comum em diversas análises é supor que os dados constituem uma amostra aleatória de uma distribuição normal.

Em particular, em situações experimentais simples supomos um modelo onde as observações são explicadas por sua esperança mais um erro, o qual é distribuído normalmente, independentemente com variância constante e aplicamos os testes já conhecidos, baseados na teoria normal.

Este procedimento é questionável uma vez que a quantidade de dados necessária para a verificação dessa suposição não está disponível na maioria dos casos.

No entanto quando se trata de experimentos aleatorizados, é possível conduzir testes de significância sem fazer nenhuma suposição a respeito da distribuição.

Estes testes são baseados na distribuição de aleatorização.

O uso de testes de significância baseados na aleatorização das observações foi dado por Fisher (1935). O problema particular consistia na comparação de duas amostras pareadas de 15 observações, onde a diferença encontrada para os totais foi 314.

A distribuição de referência foi construída baseando-se no fato de que se não houvesse diferença entre as populações, as respostas obtidas para as unidades experimentais teriam sido as mesmas qualquer que fosse a população à qual elas pertencessem.

O resultado obtido por Fisher foi que o valor inicial 314, foi excedido por 1726 dos $\binom{2}{15}$ possíveis valores para a diferença entre os totais. Portanto um nível de significância de 5.267% foi atribuído à hipótese nula.

Fisher pode observar também que o mesmo teste baseado na teoria normal atribuiu um nível de significância bem próximo ao atribuído pela teste de aleatorização.

Existem evidências algébricas e numéricas de que a aproximação normal para os testes exatos de aleatorização é válida. Na seção seguinte analisaremos este tipo de aproximação para um experimento em particular: o experimento aleatorizado em blocos completos.

1.5.1 - APROXIMAÇÃO NORMAL PARA O TESTE DE ALEATORIZAÇÃO.

Suponhamos que foi realizado um experimento aleatorizado em blocos completos, com s tratamentos e r blocos de tamanho s , ou seja, os tratamentos foram atribuídos aleatoriamente às unidades dentro de cada bloco, e estamos interessados em testar a hipótese de igualdade de efeitos de tratamentos.

Se os tratamentos não diferem em seus efeitos, a resposta de cada unidade experimental teria sido exatamente aquela obtida, independentemente de qual tratamento em particular lhe tivesse sido aplicado.

Podemos dizer então que, na realidade, o que fizemos foi um agrupamento de rs "plots" em r grupos de s "plots", o qual é apenas um dos $\binom{rs}{r}$ possíveis agrupamentos que poderíamos ter obtido.

Uma função das observações é escolhida e avaliada para o grupo particular, e para todos os outros possíveis. O nível de significância é dado pela proporção de casos cujo valor da função excede ou é igual ao valor obtido para o grupo particular.

Já sabemos que se as suposições de normalidade e aditividade são válidas, podemos testar a hipótese de igualdade de efeitos de tratamentos através do critério QM_{trat}/QM_{res} . Parece natural, portanto, examinar a distribuição dessa razão sob as possíveis $\binom{rs}{r}$ aleatorizações, na ausência de efeito de tratamento. A análise que será apresentada é devida a Kempthorne (1952, pág. 141).

Primeiramente notemos que, se denotarmos $\sum_{ij} e_{ij}^2$ por S , a soma, da soma de quadrados de tratamentos (St) e da soma de quadrados do resíduo, é igual a S . Já deduzimos anteriormente que a esperança da soma de quadrados de tratamentos, St é S/r . A variância de St sob a população de aleatorizações, é dada por

$$\frac{-2r}{(s-1)} (S - K)$$

onde $K = \sum_i \left(\sum_j e_{ij} \right)^2$

Se os erros dos blocos são homogêneos, então $\sum_{j=1}^s e_{ij}^2 = S/r$ para cada i , $K = S/r$, e a variância de St é

$$\frac{-2(r-1)r}{(s-1)} S$$

Se os e_{ij} 's fossem normalmente e independentemente distribuídos, a razão $\frac{St}{s-1} / \frac{S - St}{(r-1)(s-1)}$ seria distribuída segundo

uma F, e St/S , como uma Beta $(\frac{1}{2}(s-1), \frac{1}{2}(s-1)(r-1))$,

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{m+n}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{m}{2}\right]\Gamma\left[\frac{n}{2}\right]} x^{m/2-1} (1-x)^{n/2-1}$$

onde $m = (s-1)$ e $n = (r-1)(s-1)$, os graus de liberdade, respectivamente para St e $S - St$.

A média desta distribuição é $m/(m+n)$ e a variância

$$\frac{2mn}{(m+n)^2(m+n+2)}$$

Para que a distribuição de St/S seja representável pela distribuição Beta, é necessário que ambas tenham no mínimo, mesma média e variância. A média da distribuição de St/S é $1/r$, e a média da Beta é $\frac{(s-1)}{(r-1)(s-1) + (s-1)}$, ou $1/r$. A variância da distribuição de St/S é

$\frac{2(r-1)}{(s-1)r^3}$, sob algumas condições específicas.

A variância da distribuição Beta é aproximadamente

$$\frac{2(r-1)(s-1)}{3[r(s-1)]^2} \quad \text{ou} \quad \frac{2(r-1)r}{(s-1)^3}$$

se $r(s-1)$ for bem maior do que 2.

A concordância é notável, e podemos concluir que se a variância do erro é a mesma para todos os blocos, a distribuição de St/S pode ser representada pela distribuição Beta.

Segue-se portanto, que a distribuição de $\frac{St}{s-1} / \frac{(S-St)}{(r-1)(s-1)}$ ou, em outras palavras do critério (QM_{trat} / QM_{res}) , é bem representada pela distribuição F.

Este resultado foi provado por Welch(1937) e Pitman(1937), o último analisando também o terceiro e quarto momentos de St/S .

Eden e Yates(1933), já haviam estudado empiricamente a distribuição de St/S . Por um processo de amostragem, estes autores mostraram haver uma boa concordância entre a distribuição Beta e a distribuição real de St/S , no caso por eles investigado.

A análise consistiu em tomar uma amostra de 1000 valores de $\frac{St}{S}$, calculados a partir do seguinte conjunto de dados:

100	92	0	108
71	0	119	170
197	0	149	161
0	334	140	90
75	43	0	6
0	12	269	337
0	184	71	195
104	100	0	116

Os resultados mostraram que a distribuição de St/S era razoavelmente aproximada por uma Beta ($\frac{1}{2}(s-1), \frac{1}{2}(s-1)(r-1)$), neste caso, uma Beta ($1 \frac{1}{2}, 10 \frac{1}{2}$).

Os momentos das duas distribuições foram calculados e, comparados, apresentaram diferenças muito pequenas, o que pode ser facilmente verificado pela seguinte tabela:

	B(1 1/2, 10 1/2)	St/S
valor médio	0.125	0.125
variância	0.008413	0.007893
3º momento central	0.000901	0.000733
4º momento central	0.000319	0.000246

De posse destas evidências, podemos concluir sem sombra de dúvidas que a aproximação normal para os testes exatos de aleatorização é válida.

Vimos neste capítulo que a aleatorização é a base do método de análise e nos proporciona uma distribuição de referência para a inferência estatística. Mais ainda, nos foi possível verificar também que uma vez que aleatorizamos um experimento, podemos utilizar os testes baseados na teoria normal sem que para isso fiquemos presos à hipótese

de independência e normalidade dos dados.

Essas são razões suficientemente fortes para que a aleatorização seja utilizada como regra em experimentação.

No entanto, convém lembrar que toda a análise pressupõe a existência de aditividade entre alguns fatores. Essa pressuposição do modelo deve ser, sempre que possível, verificada ao analisarmos um experimento aleatorizado.

Em particular, na situação do experimento aleatorizado em blocos completos, vimos que a presença de interação bloco x tratamento impossibilita a realização do teste para efeitos de tratamentos.

Uma maneira de verificar esta hipótese é através de testes que possam detectar a presença desse tipo de interação.

Nos capítulos seguintes apresentaremos dois testes que podem ser utilizados para esse tipo de verificação.

CAPITULO 11

MODELOS MULTIPLICATIVOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Profissionais de estatística sabem que a análise de planos fatoriais, na presença de interação, apresenta problemas de interpretação.

Quando não há interações, isto é, a resposta depende aditivamente dos fatores, a interpretação dos resultados é fácil e frequentemente útil.

Neste capítulo, apresentaremos um método apropriado para analisar planos fatoriais na presença de interações.

O método nos permite:

(i) modelar termos das interações, através de expressões facilmente interpretáveis ;

(ii) obter estimativas da variância do erro experimental, mesmo quando o plano não é replicado.

Embora a técnica possa ser estendida para qualquer número de fatores (Carvalho(1977)), aqui estudaremos apenas o caso de 2 fatores.

O modelo adotado é uma soma de termos multiplicativos. Em cada termo multiplicativo, teremos componentes para cada fator presente na interação.

Estimativas de mínimos quadrados com estes modelos, são desenvolvidas para dois fatores, bem como são apresentadas tabelas apropriadas a testes, para algumas combinações dos níveis dos fatores.

2.2 - A INTERAÇÃO ENTRE DOIS FATORES.

Considere um experimento fatorial com 2 fatores, A e B com m e n níveis respectivamente. Seja y_{ij} , a resposta referente ao i -ésimo nível do fator A e j -ésimo nível do fator B. Temos portanto um conjunto de mn observações.

O modelo mais simples para representar esse conjunto de dados, é o de completa aditividade.

Para essa estrutura, o modelo é

$$y_{ij} = g_i + h_j + \text{um erro aleatório} \quad i=1, \dots, m; j=1, \dots, n \quad (2.2.1)$$

Portanto, y_{ij} é independentemente do erro aleatório, particionável em duas partes aditivas. A conveniência do modelo (2.2.1) está na partição de uma função de duas variáveis, y_{ij} , em duas funções de uma variável cada, g_i e h_j .

Utilizando a notação comum de análise de variância, temos para o modelo aditivo

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij} \quad i=1, \dots, m; j=1, \dots, n \quad (2.2.2)$$

onde:

- μ representa a verdadeira média de todas as observações (média geral);
- α_i representa a verdadeira média de todas as observações em que o i -ésimo nível do fator A está presente, medida a partir da média geral (efeito de A);
- β_j representa a verdadeira média de todas as observações em que o j -ésimo nível do fator B está presente, medida a partir da média geral (efeito de B);
- e_{ij} é um erro aleatório não observável com média zero e variância constante.

Poucos conjuntos de dados seguem estritamente o modelo aditivo. Uma representação para a situação mais geral, a não aditiva, costuma ser

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ij} \quad i=1, \dots, m; j=1, \dots, n \quad (2.2.3)$$

onde γ_{ij} refere-se à interação entre A e B.

O modelo aditivo apenas formula uma aproximação para os dados y_{ij} , que dependem de i e de j , através da soma de duas funções, uma dependendo só de i e outra dependendo só de j . O mérito desse modelo é a simplicidade de interpretação.

No caso de experimentos realizados sem replicação, o problema da presença de interação torna-se crítico, por várias razões:

- (i) os métodos usuais não se prestam à verificação da validade do modelo aditivo, isto é, não determinam a presença de interação ;
- (ii) a não aditividade faz com que modelos da forma (2.2.3) não representem redução alguma dos dados, ou seja, as mn observações são representadas por m parâmetros ;
- (iii) os dados não fornecem um estimador para a variância σ^2 .

Existem alguns procedimentos que se prestam a testar a não aditividade, no caso de dois fatores, tal como "um grau de liberdade para não aditividade" de Tukey (1949).

O que queremos porém, é um procedimento que além de testar a não aditividade, possa nos dar também alguma informação sobre o comportamento da interação, através de um modelo que não seja de difícil interpretação.

Neste capítulo exporemos um modelo que se presta a modelar a interação e, conseqüentemente, determinar sua presença, mesmo em experimentos sem replicação.

A idéia é particionar a função de duas variáveis Y_{ij} , em funções de uma variável cada. Obviamente, uma partição aditiva de Y_{ij} é impossível, uma vez que todas as partes aditivas já foram extraídas do modelo. A proposta é então particionar Y_{ij} em funções **multiplicativas** de i e j .

2.3 - UM MODELO PARA A INTERAÇÃO DE DOIS FATORES.

Considere um experimento fatorial $m \times n$, sem replicação, onde a variável resposta y_{ij} , pode ser representada pelo modelo

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ij} \quad i=1, \dots, m ; j=1, \dots, n \quad (2.3.1)$$

Se considerarmos agora que $\gamma_{ij} = 0$, o ajuste do modelo (2.3.1) por mínimos quadrados, deverá produzir um resíduo que será apenas um erro aleatório. Pode ocorrer, entretanto, que a interação esteja presente no experimento e o resíduo deverá então, apresentar, além do erro aleatório, um componente sistemático indicando a presença da interação.

Baseados nisso, vamos procurar uma representação para o resíduo de tal forma que o componente sistemático possa ser isolado do componente aleatório e a representação obtida seja informativa à análise.

Estudaremos, então, a aproximação de γ_{ij} por um certo número p de componentes multiplicativos, da forma

$$\gamma_{ij} = g_{i1}^{(1)} h_{j1}^{(1)} + g_{i2}^{(2)} h_{j2}^{(2)} + \dots + g_{ip}^{(p)} h_{jp}^{(p)}$$

onde p é um inteiro a ser determinado.

A técnica geral para analisar esse tipo de aproximação, no caso de dois fatores, foi desenvolvida por Mandel (1969). A técnica de Mandel consiste em aproximar o resíduo, obtido pelo ajuste da parte aditiva de (2.3.1), que denotaremos por r_{ij} , através do modelo de componentes multiplicativos,

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^p \theta_k u_{ik} v_{jk} + e_{ij} \quad (2.3.3)$$

onde p é um inteiro a ser determinado.

Sem perda de generalidade, podemos considerar

$$\sum_{i=1}^m (u_{i1}^{(k)})^2 = \sum_{j=1}^n (v_{j1}^{(k)})^2 = 1 \quad e$$

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_p > 0$$

O modelo (2.3.3) representa uma aproximação de mn valores com $(m-1)(n-1)$ graus de liberdade, por $p(m+n-1)$ parâmetros, e portanto, ainda representa uma redução nos dados para um número p pequeno.

A vantagem principal desse procedimento é que, além da possibilidade de se conseguir uma representação para o comportamento da interação, que pode resultar num modelo final simples e de fácil interpretação,

podemos sempre obter uma estimativa para a variância σ^2 , mesmo no caso em que não há replicação.

O teste de aditividade proporcionado por este modelo é mais geral do que o de Tukey (1949) (os detalhes serão vistos no próximo capítulo).

Johnson e Graybill (1972) determinaram o teste da razão de verossimilhança para resíduos Gaussianos, com $p=1$.

2.4 - A APROXIMAÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS.

Considere o modelo (2.3.1)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ij} \quad i=1, \dots, m; j=1, \dots, n.$$

Uma solução de mínimos quadrados para os parâmetros desse modelo é

$$\hat{\mu} = y_{..}$$

$$\hat{\alpha}_i = y_{i.} - y_{..}$$

$$\hat{\beta}_j = y_{.j} - y_{..}$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..} = r_{ij} \quad (2.4.1)$$

onde o símbolo " ^ " representa a solução.

A expressão (2.4.1) é também o resíduo após o ajuste da parte aditiva de (2.3.1). Deve conter, portanto, um componente sistemático quando a interação estiver presente no experimento. Isso poderá ser detectado através de uma aproximação de mínimos quadrados de r_{ij} , pelo modelo (2.3.3).

Seja $R = (r_{ij})$ uma matriz $m \times n$ de resíduos e \underline{u} e \underline{y} vetores coluna com m e n elementos, respectivamente. (Tem-se $1 R = \phi^t$ e $R 1 = \phi$).

O modelo (2.3.3) pode então ser reescrito em forma matricial,

$$R = \sum_{i=1}^p \theta_i \underline{u}_i \underline{y}_i^t + E \quad (2.4.2)$$

onde

$p \leq \text{posto}(R)$ é um inteiro fixado;

E é uma matriz $m \times n$ de erros aleatórios,

com

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3 \geq \dots \geq \theta_p > 0$$

$$\|\underline{u}_i\|^2 = \|\underline{y}_i\|^2 = 1, \quad i=1, 2, \dots, p.$$

O símbolo $\| \cdot \|$ denota a norma euclidiana de vetor,

$$\| \underline{u} \| = \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right)^{1/2}.$$

Note que $\begin{matrix} \underline{u} & \underline{v} \\ \sim & \sim \\ 1 & 1 \end{matrix}$ forma uma matriz de posto menor ou igual a 1 e como o posto da soma de duas matrizes não podem exceder a soma dos postos dos somandos, temos que

$$\text{posto} \left(\begin{matrix} \theta & \underline{u} & \underline{v} \\ \sim & \sim & \sim \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right) \leq p \quad (2.4.3)$$

Para auxiliar na obtenção dos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros de (2.4.2), vamos enunciar o teorema de Eckart e Young (1936), que é demonstrado no apêndice B.

TEOREMA 2.1

Seja R uma matriz $m \times n$ de posto $p \leq \min(m,n)$. Existem números $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p > 0$ e dois conjuntos de vetores ortonormais,

$$\underline{u}_i \in E^m; \quad i=1,2,\dots,p$$

$$\underline{v}_i \in E^n; \quad i=1,2,\dots,p$$

tais que:

$$(i) \quad R = \sum_{i=1}^p s_i \begin{matrix} \underline{u} & \underline{v} \\ \sim & \sim \\ i & i \end{matrix} \quad (2.4.4)$$

$$(ii) \quad \text{Se } U = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p)$$

$$\text{e } V = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p)$$

Então para $k \leq p$, a melhor aproximação de posto k da matriz R é dada por:

$$Z = \sum_{i=1}^k s_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i^t$$

A aproximação é única, se $s_k > s_{k+1}$.

A melhor aproximação dada pelo Teorema 2.2, é no sentido de mínimos quadrados, e resolve portanto, o nosso problema de estimação.

As soluções de mínimos quadrados dos parâmetros de

$$R = \sum_{i=1}^p \theta_i \tilde{u}_i \tilde{v}_i^t + E$$

são dados, então para $p \leq \text{posto}(R)$, por

$$\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2 \geq \dots \geq \hat{\theta}_p \quad \text{com } \hat{\theta}_i = s_i, \text{ ou seja, os } p \text{ primeiros valores sin-}$$

gulares de R ;

$$\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_p \quad \text{os auto vetores ortonormalizados de } RR^t, \text{ corres-}$$

pondentes aos auto valores $\hat{\theta}_1^2, \hat{\theta}_2^2, \dots, \hat{\theta}_p^2$;

$$\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_p \quad \text{os auto vetores ortonormalizados de } R^t R, \text{ correspon-}$$

dentes aos auto valores $\hat{\theta}_1^2, \hat{\theta}_2^2, \dots, \hat{\theta}_p^2$;

A aproximação de R , vista dessa maneira, é bastante simples e necessita apenas de um algoritmo com boa estabilidade numérica, que calcule os auto valores e os respectivos auto vetores de uma matriz simétrica.

O cálculo de U, S e V pode ser feito através de algoritmos específicos para o cálculo da decomposição em valores singulares.

Devemos agora, procurar algum meio de determinar o número p de componentes multiplicativos, que devem permanecer no modelo, de tal forma que representem a interação e que o modelo nos forneça um estimador para a variância σ^2 .

2.5 - ANÁLISE PARA A INTERAÇÃO DE DOIS FATORES.

Seja $R = (r_{ij})$ uma matriz $m \times n$, onde $r_{ij} = y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..}$ é o resíduo do modelo (2.3.1) após o ajuste dos termos aditivos.

Seja

$$R \approx \sum_{i=1}^p \hat{\theta}_i \hat{u}_i \hat{v}_i^t, \text{ para } p \leq \text{posto}(R) \quad (2.5.1)$$

A soma de quadrados dos resíduos do modelo aditivo é dada por

$$\|R\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (r_{ij})^2$$

e nos interessa estudar a forma com que ela se decompõe, quando os resíduos são aproximados por (2.5.1).

Denotaremos então, por R_i ($i=1, \dots, p$), os resíduos de (2.4.2), obtidos após o ajuste de i componentes θ_{uv}^t , ou seja:

$$R_1 = R - \hat{\theta}_1 \hat{u}_1 \hat{v}_1^t$$

$$R_2 = R_1 - \hat{\theta}_2 \hat{u}_2 \hat{v}_2^t = R - (\hat{\theta}_1 \hat{u}_1 \hat{v}_1^t + \hat{\theta}_2 \hat{u}_2 \hat{v}_2^t)$$

⋮

$$R_k = R_{k-1} - \hat{\theta}_k \hat{u}_k \hat{v}_k^t = R - (\hat{\theta}_1 \hat{u}_1 \hat{v}_1^t + \dots + \hat{\theta}_k \hat{u}_k \hat{v}_k^t)$$

onde k é um inteiro tal que $1 \leq k \leq p$.

Temos então, que

$$R_k = R - \sum_{i=1}^k \hat{\theta}_i \hat{u}_i \hat{v}_i^t = \sum_{i=k+1}^p \hat{\theta}_i \hat{u}_i \hat{v}_i^t$$

e

$$\|R_k\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (r_{ij}^{(k)})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\sum_{l=k+1}^p \hat{\theta}_l \hat{u}_l \hat{v}_l^t \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=k+1}^p \sum_{l'=k+1}^p \hat{\theta}_l \hat{\theta}_{l'} \hat{u}_l^{(1)} \hat{u}_{l'}^{(1')} \hat{v}_j^{(1)} \hat{v}_j^{(1')}$$

$$= \sum_{l=k}^p \sum_{l'=k+1}^p \hat{\theta}_l \hat{\theta}_{l'} \sum_{i=1}^m \hat{u}_i^{(1)} \hat{u}_i^{(1')} \sum_{j=1}^n \hat{v}_j^{(1)} \hat{v}_j^{(1')} \quad (2.5.2)$$

Como os conjuntos $(\hat{u}_i^{(1)}; i=1, \dots, p)$ e $(\hat{v}_j^{(1)}; j=1, \dots, p)$ são dois conjuntos ortonormais de vetores,

$$\begin{aligned} \sum_i \hat{u}_i^{(1)} \hat{u}_i^{(1')} &= \sum_j \hat{v}_j^{(1)} \hat{v}_j^{(1')} = 0 \quad \text{para } l \neq l' \\ &= 1 \quad \text{para } l = l' \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

logo, de (2.5.2) e (2.5.3) resulta que

$$\|R\|^2 = \sum_{l=k+1}^p \hat{\theta}_l^2, \quad 1 \leq k \leq p \quad (2.5.4)$$

De (2.5.4) podemos verificar que

$$\|R\|_k^2 - \|R\|_{k+1}^2 = \hat{\theta}_{k+1}^2$$

o que representa a redução na soma de quadrados obtida pela inclusão do componente θ_{k+1} no modelo.

Conseguimos, assim, uma fórmula geral para a soma de quadrados dos resíduos, dada por

$$\|R\|^2 = \sum_{l=1}^p \sum_j (r_{lj})^2 = \sum_{l=1}^p \hat{\theta}_l^2,$$

e o quanto cada componente multiplicativo contribui para essa soma de quadrados.

Esse particionamento da soma de quadrados dos resíduos, em p componentes $\hat{\theta}_l^2$, nos induz a pensar numa análise do tipo análise de variância, para decidir se um componente é significativo ou não.

Surge, no entanto, a questão sobre a distribuição dos $\hat{\theta}_{ij}^2$, que não são formas quadráticas das variáveis originais y_{ij} . Se supusermos que os erros e_{ij} são normalmente distribuídos, então os $\hat{\theta}_{ij}^2$ são distribuídos como os auto valores de uma matriz com distribuição de Wishart. Isso pode ser verificado em Carvalho (1977, pág 69). A distribuição dos auto valores é de tratamento difícil e não está extensivamente tabelada.

Uma maneira de resolver o problema, é considerar algumas suposições feitas por Mandel (1969), que nos permitirão realizar uma análise de forma análoga à análise de variância usual.

Suponha que os r_{ij} são elementos de uma amostra aleatória, proveniente de uma população normalmente distribuída, com média zero e variância unitária.

Sejam as quantidades

$$M_1 = E [\hat{\theta}_1^2] , \quad M_2 = E [\hat{\theta}_2^2] , \quad M_3 = E [\hat{\theta}_3^2] , \quad \dots$$

os valores esperados dos resultados $\hat{\theta}_1^2, \hat{\theta}_2^2, \hat{\theta}_3^2, \dots$, obtidos dos valores r_{ij} .

Se a variância da população for σ^2 , temos

$$E [\hat{\theta}_1^2] = \sigma^2 \times M_1, \quad E [\hat{\theta}_2^2] = \sigma^2 \times M_2, \quad \dots$$

e as razões $\hat{\theta}_i^2 / M_i$ serão, todas, estimadores não tendenciosos de σ^2 .

Agora se uma matriz $Y = (y_{ij})$ é dada, e se os elementos $r_{ij} = y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..}$ são apenas erros aleatórios normais, então as

razões $\hat{\theta}_i^2 / M_i$ serão simplesmente estimativas de σ^2 , onde os valores $\hat{\theta}_i^2$ são obtidos de $R=(r_{ij})$ e as quantidades M_i de uma matriz de elementos $N(0,1)$ de mesmas dimensões.

As quantidades M_i obtidas dessa maneira, cumprem em certo sentido, um papel análogo ao dos graus de liberdade na análise de variância usual e são chamadas de "Pseudo Graus de Liberdade".

Uma tabela do tipo daquelas das análises de variância, pode então ser montada, para decidir se um componente deve ou não ser mantido no modelo (tabela 2.1).

Se as razões $\hat{\theta}_i^2 / M_i$ forem todas aproximadamente iguais, não teremos argumentos para rejeitar a suposição de que os elementos da interação são erros aleatórios normais. A análise poderá, então ser levada a cabo, utilizando-se a interação como resíduo.

Por outro lado, se $\hat{\theta}_1^2 / M_1 \gg \hat{\theta}_2^2 / M_2 \approx \hat{\theta}_3^2 / M_3 \approx \dots$, podemos supor que existe um termo multiplicativo que representa a interação e que

$\|R\| - \hat{\theta}_1^2$ só estima a variância σ^2 .

De maneira análoga, podemos supor que existem dois termos multiplicativos que representam a interação, se

$\hat{\theta}_1^2 / M_1 \approx \hat{\theta}_2^2 / M_2 \gg \hat{\theta}_3^2 / M_3 \approx \hat{\theta}_4^2 / M_4 \approx \dots$,

e assim por diante.

Esse é o caso, em que, além de obtermos um estimador para a variância σ^2 , podemos interpretar o comportamento da interação.

A variável resposta y_{ij} do experimento poderá, nesses casos, ser representada por

$$y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \sum_{l=1}^k \hat{\theta}_l \hat{u}_{il}^{(1)} \hat{v}_{jl}^{(1)}$$

onde k é o número de termos multiplicativos selecionados para representar a interação.

TABELA 2.1 - ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Fonte de variação	Graus de liberdade	Soma de Quadrados	Razão
A	$m-1$	$n \sum_{i=1}^m (y_{i.} - y_{..})^2$	
B	$n-1$	$m \sum_{j=1}^n (y_{.j} - y_{..})^2$	
(AB)	$(m-1)(n-1)$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..})^2$	
θ_{111}^t	M1	$\hat{\theta}_1^2$	$\frac{\hat{\theta}_1^2}{M1}$
θ_{222}^t	M2	$\hat{\theta}_2^2$	$\frac{\hat{\theta}_2^2}{M2}$
θ_{333}^t	M3	$\hat{\theta}_3^2$	$\frac{\hat{\theta}_3^2}{M3}$
.	.	.	.
.	.	.	.
total corr.	$mn-1$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij} - y_{..})^2$	

Pode ocorrer também, que a interação esteja presente no experimento mas não presente, nem ao menos aproximadamente, um comportamento diferente dos mencionados acima, e a representação da interação através do modelo multiplicativo não será útil.

2.6 - OS "PSEUDO GRAUS DE LIBERDADE".

As quantidades M podem ser encontradas tabeladas, no apêndice do artigo de Mandel (1969), para $i \leq 3$ e alguns valores específicos de $4 \leq m \leq 100$ e $4 \leq n \leq 20$.

Além das quantidades M , ele nos fornece também, seus desvios padrões e os valores M expressos como porcentagem do total de graus de liberdade da interação. Essas porcentagens prestam-se a uma interpolação mais precisa que os valores M .

Os valores M_1, M_2 , e M_3 , foram obtidos através de 625 experimentos de Monte Carlo, para cada combinação de m e n . Representam os valores esperados dos três primeiros auto valores de uma matriz de Wishart.

Aqui, as tabelas encontram-se no apêndice C.

2.7 - TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA A HIPÓTESE DE NÃO-ADITIVIDADE.

Johnson e Graybill (1972) estudaram o modelo:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta_{ij} u_i v_j + e_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

com e_{ij} i.i.d. $N(0, \sigma^2)$;

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n v_j = 0 \quad e$$

$$\sum_{i=1}^m u_i^2 = \sum_{j=1}^n v_j^2 = 1.$$

Para efeito de notação, sem perda de generalidade, admita que $n \leq m$. Note-se que estas restrições não constituem perda de generalidade, como já é sabido, na parte aditiva. Na parte multiplicativa, as restrições já são atendidas ($\sum_{i=1}^m u_i = 0$, $\sum_{j=1}^n v_j = 0$).

O parâmetro θ incorpora o fator escalar de y e y , de sorte que $\sum_{i=1}^m u_i^2 = \sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$ tampouco é restritivo.

Com este modelo puderam os autores obter testes da razão de verossimilhança para a hipótese:

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{vs.}$$

$$H_1 : \theta \neq 0$$

Adicionalmente são obtidos estimadores de máxima-verossimilhança para os parâmetros do modelo. Estes são iguais aos de mínimos quadrados, dados, na parte multiplicativa, pelos estimadores de Mandel, nas seções anteriores.

Seja $R = (r_{ij})$ a matriz de resíduos do modelo aditivo. Temos

$$\hat{\mu} = y_{..}$$

$$\hat{\alpha} = y_{i.} - y_{..}$$

$$\hat{\beta} = y_{.j} - y_{..}$$

$$\hat{\theta} = s_1$$

(1)

$$\hat{u} = u_{i.}$$

(1)

$$\hat{v} = v_{.j}$$

onde $R = USV^t$ é a decomposição em valores singulares de R ,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}{mn}$$

A novidade aqui é o estimador de σ^2 que apareceu naturalmente.

A demonstração é direta. A função de verossimilhança pode ser escrita:

$$L(\mu, \alpha, \beta, \theta, \underline{u}, \underline{v}) = \left[\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right]^{mn/2} \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{ij} r_{ij}^2 + mn(\mu - \bar{y})^2 + n \sum_i (\alpha_i - \bar{y}_i + \bar{y})^2 + m \sum_j (\beta_j - \bar{y}_j + \bar{y})^2 + (\theta - \sum_{ij} u_{ij} v_{ij} r_{ij})^2 - (\sum_{ij} u_{ij} v_{ij} r_{ij})^2 \right] \right)$$

Pode-se mostrar que:

$$L(\mu, \alpha, \beta, \theta, \underline{u}, \underline{v}) \leq \left[\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right]^{\frac{mn}{2}} \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{ij} r_{ij}^2 - (\sum_{ij} u_{ij} v_{ij} r_{ij})^2 \right] \right)$$

Como $\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} v_{ij} r_{ij} \right)^2 \leq \frac{2}{1}$, segue-se que:

$$L(\mu, \alpha, \beta, \theta, \underline{u}, \underline{v}) \leq \left[\frac{mn}{2\pi(\sum_{ij} r_{ij}^2 - s^2)} \right]^{\frac{mn}{2}} \exp \left(- \frac{mn}{2} \right)$$

Substituindo-se os parâmetros pelos estimadores de máxima-verossimilhança, obtemos L igual ao membro direito da desigualdade acima.

2.7.1 - TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA PARA $H_0: \theta = 0$ vs. $H_1: \theta \neq 0$

Podemos prosseguir agora buscando encontrar o teste da razão de verossimilhança para a hipótese de aditividade ($\theta = 0$).

Sob o modelo aditivo

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

o máximo da função de verossimilhança é dado por :

$$\sup L(\mu, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \left[\frac{mn}{2\pi \sum_{i,j} r_{ij}} \right]^{mn/2} \exp \left(- \frac{mn}{2} \right)$$

O teste da razão de verossimilhança é dado por:

$$\text{rejeita-se } H_0 \text{ se } \Lambda^* = \frac{\left[\frac{m \sum_{i=1}^m n \sum_{j=1}^n r_{ij}^2 - s^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij}} \right]^{mn/2}}{\left[\frac{m \sum_{i=1}^m n \sum_{j=1}^n r_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij}} \right]^{mn/2}} < K^*$$

$$\text{onde } P_{H_0} [\Lambda^* < K^*] = \alpha.$$

Este teste é equivalente a rejeitar H_0 se:

$$\Lambda = \frac{s^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_{n-1}^2} > K, \text{ onde}$$

$$P_{H_0} \left\{ \frac{s^2}{s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2} > K \right\} = \alpha.$$

Uma vantagem de se empregar o teste da razão de verossimilhança é que, em muitos casos, pelo menos a distribuição assintótica de $-2 \log \Lambda$ é conhecida. Neste caso, Johnson e Graybill conseguiram estudar a distribuição de Λ .

A distribuição conjunta de $s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n-1}^2$ tem a distribuição das raízes não-nulas da matriz W , distribuída como uma Wishart $W_{n-1}(m-1, \sigma^2 I, K \Gamma \Gamma K)$, onde

$$K K' = I - \frac{1}{n} J \quad (\text{note-se que temos } R = K K' Y Y' K K')$$

e Γ é uma matriz genérica representando a interação (isto é, com $1' \Gamma = \phi$ e $\Gamma 1 = \phi$).

A distribuição de Λ , para $\theta = 0$, pode ser estudada com o resultado acima, de maneira direta, através de transformações.

2.7.2 - DISTRIBUIÇÃO DE Λ QUANDO $\theta = 0$.

Para simplificar a notação faremos $p = n-1$ e $q = m-1$.

Seja $l_i = s_i^2 \quad i=1, \dots, p$.

A distribuição das raízes é :

$$f(l_1, l_2, \dots, l_p) = C \prod_{i=1}^p l_i^{(q-p-1)/2} \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m l_i \right) \prod_{i < j} (l_i - l_j)$$

para $0 < l_p < l_{p-1} < \dots < l_2 < l_1 < \infty$ onde

$$C = \frac{\pi^{p/2}}{(2\sigma^2)^{pq/2} \prod_{i=1}^p \left[\Gamma \left(\frac{q-i+1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{p-i+1}{2} \right) \right]}$$

Seja agora

$$U_i = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}} \quad i = 1, \dots, p-1$$

$$U_p = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}}$$

Portanto,

$$1 = U_i + U_p \quad e$$

$$1 = \left(1 - U_1 - \dots - U_{p-1} \right) U_p$$

O Jacobiano da transformação é U_p^{p-1} , como é fácil de verificar.

Os u_i 's variam em

$$a < u_i < b \quad i=2,3,\dots,p-1 \quad e \quad \frac{1}{p} < u_1 < 1, \text{ com} \quad (2.7.1)$$

$$a = \frac{1 - u_1 - \dots - u_{i-1}}{p + 1 - i} \quad i=2,3,\dots,p-1$$

$$b = \min \left(u_{i-1}, \frac{1 - u_1 - u_2 - \dots - u_{i-1}}{i-1} \right) \quad i=2,3,\dots,p-1$$

Portanto, a densidade conjunta de U_1, U_2, \dots, U_p é dada por:

$$\begin{aligned}
 g(u_1, u_2, \dots, u_p) &= \pi^{p/2} \left[(1 - u_1 - \dots - u_{p-1}) \prod_{i=1}^{p-1} u_i \right]^{(q-p-1)/2} * \\
 &* \frac{\prod_{i < j}^{p-1} (u_i - u_j) \prod_{i=1}^{p-1} (u_i - 1 + u_1 + \dots + u_{p-1})}{\prod_{i=1}^p \left[\Gamma\left(\frac{q-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-i+1}{2}\right) \right]} * \\
 &* \frac{1}{(2\sigma)^{2pq/2}} \frac{u_p^{(pq/2) - 1}}{\exp(-u_p / 2\sigma^2)}
 \end{aligned}$$

para os valores de u_i dados em (2.7.1).

Vemos que U_1 é independente de $(U_i)_{i=1, \dots, p-1}$ e que, portanto, a densidade conjunta de $(U_i)_{i=1, \dots, p-1}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 h(u_1, \dots, u_{p-1}) &= C * \left[u_1 u_2 \dots u_{p-1} (1 - u_1 - \dots - u_{p-1}) \right]^{(q-p-1)/2} * \\
 &* \frac{\prod_{i < j}^{p-1} (u_i - u_j) \prod_{i=1}^{p-1} (u_i - 1 + u_1 + \dots + u_{p-1})}{\prod_{i=1}^p \left[\Gamma\left(\frac{q-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-i+1}{2}\right) \right]}
 \end{aligned}$$

para os valores de u_i dados em (2.7.1) onde

$$C = \frac{\pi^{p/2} \Gamma(pq/2)}{\prod_{i=1}^p \left[\Gamma\left(\frac{q-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-i+1}{2}\right) \right]}$$

A densidade de U_1 pode ser obtida, então, por integração:

$$g_1(u) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b h(u_1, \dots, u_{p-1}) du_1 \dots du_{p-1} du$$

para $\frac{1}{p} < u < 1$.

O cálculo desta integral é trabalhoso quando p não é pequeno. Uma aproximação da distribuição de U_1 pode ser dada pela distribuição beta como veremos na próxima seção.

2.7.3 - APROXIMAÇÃO PARA A DISTRIBUIÇÃO DE U_1

Esta aproximação depende dos momentos de s_1 . Esses momentos não são conhecidos explicitamente mas Mandel (1969) calculou a média μ_1 e a variância σ_1^2 de s_1 / σ por Monte Carlo, para vários valores de p e q .

A aproximação da distribuição de U_1 pode ser feita utilizando-se a seguinte transformação:

$$V = \frac{p U_1 - 1}{p - 1} \quad (\text{para levar } U_1 \text{ de } (\frac{1}{p}, 1) \text{ a } (0, 1)).$$

Aproximamos V por uma beta $B(k, r)$.

Se $\mu_1 = E(V)$ e $\mu_2 = \text{Var}(V)$ são conhecidos, podemos aproximar os momentos de beta por:

$$\mu_1 = \frac{k}{k+r} \quad \mu_2 = \frac{kr}{(k+r)^2 (k+r+1)}$$

Resolvendo para k e r resulta

$$k = \frac{\mu_1 (\mu_1 - \mu_2 - \mu_1^2)}{\mu_2} \quad e \quad r = \frac{(1 - \mu_1) (\mu_1 - \mu_2 - \mu_1^2)}{\mu_2}$$

Temos, ainda:

$$E \left(\frac{s}{\sigma} \right)^2 = E \left[\left(\frac{U}{\sigma} \right)^2 U \right] = E \left(\frac{U}{\sigma} \right)^2 E(U) = pq E(U)$$

$$\text{Daqui } E(U) = \frac{v_1}{pq}, \quad \text{onde } v_1 = E \left(\frac{s}{\sigma} \right)^2.$$

Mais ainda

$$\begin{aligned} E \left(\frac{s}{\sigma} \right)^4 &= E \left[\left(\frac{U}{\sigma} \right)^4 U \right] = E \left(\frac{U}{\sigma} \right)^4 E(U) = \\ &= (p^2 q^2 + 2pq) E(U)^2 \end{aligned}$$

Então

$$\text{Var}(U) = \frac{\frac{v_1 + v_1^2}{2} - \frac{v_1^2}{1}}{p^2 q^2 + 2pq} - \frac{\frac{v_1^2}{1}}{p^2 q^2},$$

donde

$$\mu_2 = \text{Var}(V) = \text{Var} \left[\left(\frac{pU}{1} - 1 \right) / (p-1) \right] = \left[\frac{p}{p-1} \right]^2 / \text{Var}(U)$$

$$= \frac{pq v_1 - 2 v_1^2}{2(pq+2)(p-1)}, \quad \text{onde } v_2 = \text{Var} \left(\frac{s}{\sigma} \right).$$

Podemos usar os resultados obtidos por Mandel(1969) para v_1 e

v_2 e calcular valores críticos para Λ .

Johnson e Graybill(1972) fizeram este trabalho, que resultou na tabela que está no apêndice D.

Vemos, assim, que a estatística recomendada para testar a hipótese de aditividade com o caso particular do modelo de Mandel, com só um termo multiplicativo como alternativa, é

$$\frac{\sum_{i=1}^m s_i^2}{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_m^2}$$

É sugestivo o fato de que este resultado, como outros pertinentes à estimação, sejam iguais quando se emprega máxima-verossimilhança sob erros normais ou mínimos quadrados com as condições de Gauss-Markoff

CAPITULO III

TESTE DE TUKEY (UM GRAU DE LIBERDADE PARA NÃO-ADITIVIDADE)

3.1 - INTRODUÇÃO.

Tukey (1949) apresentou um teste para não-aditividade que tem sido frequentemente utilizado em aplicações. O teste veio ajudar a resolver o problema, já antes sentido, de verificar aditividade em um experimento aleatorizado em blocos.

Neste capítulo apresentaremos o modelo proposto por Tukey e veremos que este é um caso particular do modelo multiplicativo proposto por Mandel.

3.2 - O MODELO PROPOSTO POR TUKEY

O modelo proposto implicitamente no artigo original é

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \theta(\alpha_i - \bar{\alpha})(\beta_j - \bar{\beta}) + e_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, a \\ j=1, \dots, b \end{matrix} \quad (3.2.1)$$

com e_{ij} i.i.d $N(0, \sigma^2)$

A idéia aqui é ajustar o modelo aditivo e, depois, ajustar o modelo em

$$r_{ij} = \theta(y_{i.} - y_{..})(y_{.j} - y_{..}) + e'_{ij}$$

$$\text{onde } r_{ij} = y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y_{..}$$

O resultado é:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{i.} - y_{..})(y_{.j} - y_{..}) y_{ij}}{\sum_{i=1}^a (y_{i.} - y_{..}) \sum_{j=1}^b (y_{.j} - y_{..})} \quad (3.2.2)$$

$\hat{\theta}$ é também o valor dado diretamente de (3.2.1), como se pode verificar.

A soma de quadrados atribuível a $\hat{\theta}$ é

$$SQ(\hat{\theta}) = \frac{\left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{i.} - y_{..})(y_{.j} - y_{..}) \right]^2}{\sum_{i=1}^a (y_{i.} - y_{..})^2 + \sum_{j=1}^b (y_{.j} - y_{..})^2} \quad (3.2.3)$$

que tem, sob $H_0: \theta = 0$, distribuição χ^2_1 e é independente de

$$SQ(\text{interação}) - SQ(\hat{\theta}),$$

a qual, ainda sob H_0 , tem distribuição $\chi^2_{(a-1)(b-1)}$.

A expressão (3.2.3) é de fácil cálculo, é o chamado "um grau de liberdade para não-aditividade".

Para demonstrar as afirmações feitas nesta seção, consideraremos um modelo um pouco mais geral, segundo Milliken e Graybill (1970).

Seja o modelo linear

$$y_{ni} = X_{ni} \beta + F_{ni} \delta + e_{ni},$$

com F uma matriz cujos elementos f_{ij} são funções não-aditivas conhecidas das funções estimáveis de β , isto é

$$f_{ij} = f_{ij}(X\beta).$$

Queremos obter um teste para $\delta = 0$.

No caso do modelo de Tukey F é tal que $f_{ij} = (\alpha - \bar{\alpha})(\beta - \bar{\beta})$.

O argumento que segue é o mesmo de Scheffé (1959).

Suponha por enquanto, que F é conhecida.

Seguindo passos conhecidos, temos de trabalhar com o modelo completo

$$y = X\beta + F\delta + e$$

e com o modelo reduzido por H_0

$$y = X\beta + e.$$

O modelo completo nos dá, para a soma de quadrados do resíduo

$$SQR_c = y'(I - P_{X|F})y, \text{ onde } P_{X|F} \text{ é o projetor ortogonal em } C(X|F).$$

As equações normais reduzidas de δ , eliminando β , são:

$$F'(I - P_X)F\delta = (I - P_X)F'y.$$

Daqui segue-se que a soma de quadrados de resíduos é

$$SQR_c = y'(I - P_X - [(I - P_X)F]A^+[(I - P_X)F])y, \text{ onde } A^+ \text{ indica a inversa de Moore-Penrose de } A.$$

versa de Moore-Penrose de A .

O modelo reduzido fornece

$$SQR_r = y'(I - P_X)y.$$

Sabemos (sempre supondo F conhecida) que

$$SQR_r - SQR_c \sim \chi^2_{(r-k)} \quad (\text{sob } H_0)$$

$$\text{e é independente de } SQR_c \sim \chi^2_{(n-r)}.$$

Temos:

$$W = \frac{SQR_r - SQR_c}{SQR_c} \times \frac{n-r}{r-k} \sim F_{(r-k), (n-r)} \quad (\text{sob } H_0)$$

Agora

$$W = \frac{y'[(I - P_X)F]A^+[(I - P_X)F]y}{y'(I - P_X - [(I - P_X)F]A^+[(I - P_X)F])y} \times \frac{n-r}{r-k}$$

A forma funcional de F é conhecida, mas, como β é desconhecido, F é, de fato, desconhecida. Veremos agora que isto não é problema.

Seja $X\hat{\beta}$ o estimador UMVU de $X\beta$ dado pelas equações normais. Então escrevemos $\hat{F} = F(X\hat{\beta})$. Podemos substituir F (não-observável) por \hat{F} em W , que representaremos por \hat{W} , e reescrevemos, por conveniência:

$$\hat{W} = \frac{\left((I-P)_X y \right)' \hat{F} \left(\left[(I-P)_X \hat{F} \right]' \left[(I-P)_X \hat{F} \right] \right)^{-1} \hat{F}' (I-P)_X y}{\left((I-P)_X y \right)' \left[I - \hat{F} \left(\left[(I-P)_X \hat{F} \right]' \left[(I-P)_X \hat{F} \right] \right)^{-1} \hat{F}' \right] (I-P)_X y} \quad *$$

$$* \frac{n-r}{r-k} =$$

$$= \frac{z' \hat{A} z}{z' (I - \hat{A}) z} \quad * \frac{n-r}{r-k}, \quad (3.2.4)$$

com

$$\hat{A} = (I-P)_X \hat{F} \left(\left[(I-P)_X \hat{F} \right]' \left[(I-P)_X \hat{F} \right] \right)^{-1} \hat{F}' (I-P)_X \quad e$$

$$z = (I-P)_X y.$$

A expressão (3.2.4) escreve W como uma forma quadrática só em termos dos resíduos do modelo reduzido.

é patente que $z \sim N(0, \sigma^2 (I-P)_X)$.

Seja agora uma matriz arbitrária F fixada, de sorte que exista $(\hat{W} | F = F)$.

Os elementos de $\hat{F} = F(X\hat{\beta})$ são independentes de $(I-P)_X y$; logo, são independentes de z .

Assim

$$z | F = F \sim N(0, \sigma^2 (I-P)_X).$$

Logo z e z tem a mesma distribuição.

A distribuição de $(\hat{W} | F = F)$ é $F_{(r-k), (n-r)}$ sob H , como se pode ver.

Esta também é a distribuição marginal de \hat{W} , posto que $(\hat{W}|F=F)$ independe de F .

O poder do teste de Tukey foi estudado por Ghosh e Sharma (1963), com o modelo específico do artigo original, e depois por Milliken e Graybill (1971).

A conclusão é que o poder é bom, desde que se saiba corretamente a forma funcional dos elementos da matriz F .

O problema na aplicação é justamente conhecer a forma da matriz F . Raramente será o caso. Note-se no entanto, que ao ajustar um modelo a dados de um experimento fatorial, começando pela parte aditiva, α e β são funções inespecificadas de i e de j , respectivamente.

α e β são, como funções, geradas pelos dados. Em outras palavras o modelo aditivo é

$$y = \text{função}_1(i) + \text{função}_2(j) .$$

Apenas a forma do modelo é especificada.

O modelo com interação específica, no caso presente é

$y = \text{função}_1(i) + \text{função}_2(j) + \text{função}_3(\text{função}_1(i), \text{função}_2(j))$, onde a forma de função (...) é conhecida. É aqui onde reside a falta de generalidade, superada por Mandel (1969), com o modelo a interação multiplicativa.

CAPITULO IV

COMPARAÇÃO DOS TESTES DE TUKEY E MANDEL

4.1 - INTRODUÇÃO.

O problema que serviu de motivação para este estudo, como já foi dito, trata-se da análise de um experimento aleatorizado em blocos.

Já nos foi possível verificar anteriormente, que neste tipo de experimento a validade do teste para efeitos de tratamentos está ligada a validade da hipótese de aditividade entre os efeitos de blocos e tratamentos.

Muitos pesquisadores seguem sua análise para este tipo de experimento, construindo o teste para efeito de tratamentos ignorando que suas conclusões não têm validade alguma na presença de interação bloco-tratamento.

Portanto é evidente que para o seguimento normal da análise é imprescindível a realização de testes que consigam detectar a presença de interação.

Os dois testes apresentados até aqui se prestam a esse tipo de análise e o que pretendemos neste capítulo é avaliar e comparar o desempenho de ambos.

A comparação será feita acerca do poder dos testes, utilizando-se para isso simulações com tabelas de duas entradas, com uma observação por casela.

Algumas comparações serão feitas também no contexto de populações finitas.

Nosso objetivo não é esgotar a discussão em torno do assunto mas sim apresentar aspectos importantes que forneçam subsídios para estudos posteriores dentro do mesmo tema.

4.2 - CRITÉRIOS UTILIZADOS PARA O TESTE DE MANDEL.

Um problema encontrado para a viabilização da análise foi a escolha de um critério adequado para o teste de Mandel, visto que no caso do teste de Tukey, a estatística teste é comparada com o valor crítico da distribuição F .

Embora o modelo proposto por Mandel incluía vários termos multiplicativos para a interação, nos restringiremos à escolha de um critério visando a identificação de somente um componente multiplicativo.

Neste caso utilizamos o teste da razão de verossimilhança desenvolvido por Johnson e Graybill(1972), descrito no capítulo 11.

Pareceu-nos também razoável para este caso utilizar a estatística θ^2 / θ .

Nesse sentido foi necessário um estudo empírico da distribuição dessa estatística.

O estudo consistiu em construir uma distribuição empírica baseada em 1000 amostras de tabelas 4x4, onde as observações das caselas tinham distribuição Gaussiana com média zero e variância 1.

De posse da distribuição empírica de θ^2 / θ sob a hipótese nula (ausência de interação), escolhemos como valor crítico o quantil 95% desta distribuição, ou seja 17.4997.

A figura abaixo apresenta a distribuição empírica bem como várias estatísticas calculadas pelo S.A.S. (Statistical Analysis System).

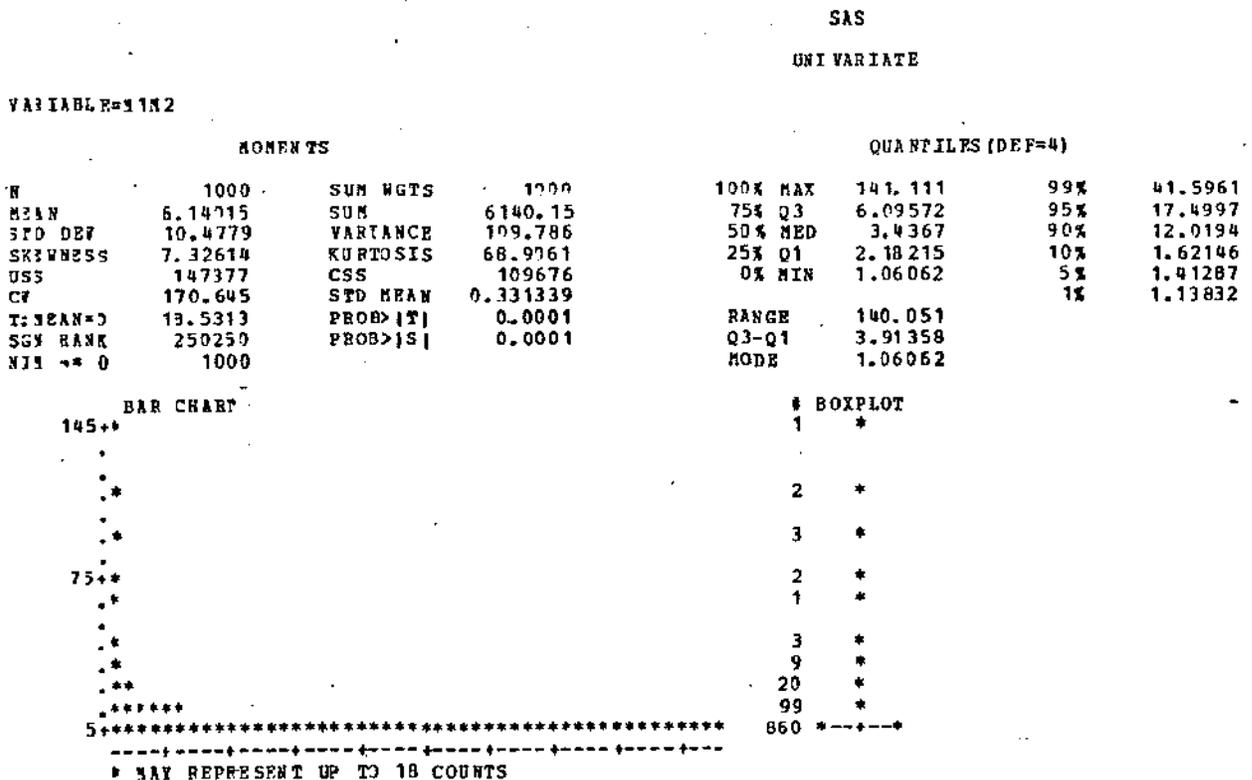


figura 4.1 - Distribuição empírica da estatística θ^2 / θ .

Levando em conta o fato que estaremos confrontando resultados de dois testes, torna-se necessário verificar se ambos estão comparáveis ou seja, uma vez aplicados a populações sob a hipótese nula, ambos devem apresentar aproximadamente o mesmo índice de rejeição.

Para efeito de verificação resolvemos aplicar o teste de Tukey e Mandel baseado na estatística mencionada numa nova simulação de 1000 amostras de tabelas 4x4, sob a hipótese nula.

Verificamos que a rejeição de ambos os testes ficou em torno dos 5% dos casos.

Nas seções seguintes avaliaremos o poder dos testes de Tukey e Mandel, utilizando para este último o critério da razão de verossimi-

lhança e a estatística $\frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}$.

4.3 - SIMULAÇÃO COM POPULAÇÕES INFINITAS.

Nesta análise trabalhamos com 1000 amostras de tabelas 4x4, onde a observação da casela (i,j) segue o modelo:

$$y_{ij} = 0.25 + b \beta_i + t \tau_j + \theta u_i v_j + e_{ij} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, 4 \\ j=1, \dots, 4 \end{matrix}$$

- onde :
- β
 $\sim (4 \times 1)$ é o vetor com os efeitos de blocos;
 - τ
 $\sim (4 \times 1)$ é o vetor com os efeitos de tratamentos;
 - u
 $\sim (4 \times 1)$ é o vetor com os efeitos multiplicativos associados à linha (bloco);
 - v
 $\sim (4 \times 1)$ é o vetor com os efeitos multiplicativos associados à coluna (tratamento) e
 - e_{ij} são variáveis aleatórias independentes com distribuição Gaussiana de média zero e variância 1
 - b, t, θ parâmetros que incorporam o fator escalar dos vetores β, τ, u e v respectivamente, de sorte que $\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 = \sum_{j=1}^4 \tau_j^2 = \sum_{i=1}^4 u_i^2 = \sum_{j=1}^4 v_j^2 = 1$.

Utilizamos para esta simulação um programa em S.A.S - Statistical Analysis System - implantado no IPEN - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, em S.Paulo (apêndice E).

Este programa está dividido em duas partes. Na primeira é feita a geração dos componentes do modelo e na segunda o cálculo dos testes propriamente ditos. Esta última parte foi também utilizada nas simulações com populações finitas como discutiremos na próxima seção.

Os testes de Tukey e Mandel foram aplicados a cada uma das 1000 amostras e os resultados estão na tabela 4.1.

A idéia foi atribuir valores a b , t e θ e variar os ângulos entre β e γ e entre τ e ν .

tabela 4.1 - Teste de Tukey x Teste de Mandel (população infinita)

constantes b t θ	ângulo(x) entre β e γ	ângulo entre τ e ν	estimativa do poder(**) dos testes		
			TUKEY c/	MANDEL c/ RVM	MANDEL θ_1^2/θ_2^2 c/
1 1 0	79	79	4.1	18.2	3.9
1 1 0	31	118	6.2	20.3	4.4
1 1 1	131	143	5.5	19.9	4.0
1 1 1	49	92	4.5	20.4	4.1
1 1 10	128	69	82.5	95.7	60.4
1 1 10	83	85	31.6	84.0	38.4
1 1 20	85	117	99.9	92.5	56.1
1 1 20	136	108	88.0	100.0	99.9
1 10 1	41	112	4.5	20.1	5.6
1 10 1	78	153	6.2	21.1	5.3
1 10 10	97	42	12.6	99.6	80.6
1 10 10	94	96	61.0	97.0	62.5
1 10 20	61	101	99.4	95.3	59.3
1 10 20	37	70	7.3	100.0	100.0
1 20 1	115	49	6.4	22.4	5.4
1 20 1	71	39	4.3	18.7	3.8
1 20 10	82	134	80.6	94.3	55.9
1 20 10	95	101	zero	98.9	72.2
1 20 20	91	113	zero	100.0	98.7
1 20 20	26	100	zero	80.6	36.6
10 10 0	104	132	4.6	21.8	4.8
10 10 0	114	24	4.2	21.1	4.9
10 10 1	138	89	3.9	20.7	4.3
10 10 1	168	98	4.5	22.6	4.7
10 10 10	80	120	2.9	21.9	5.2
10 10 10	48	115	zero	99.5	78.3
10 10 20	34	104	zero	100.0	92.4
10 10 20	49	94	zero	99.8	93.2
10 20 1	136	130	7.6	21.8	5.1
10 20 1	120	116	5.1	19.0	4.7
10 20 10	121	82	0.2	85.6	40.7
10 20 10	53	86	zero	83.2	36.2
10 20 20	44	82	0.7	100.0	99.8
10 20 20	50	60	13.2	99.8	92.8
20 20 1	103	107	4.1	20.5	3.2
20 20 1	106	62	4.7	20.4	4.4
20 20 10	101	26	45.6	91.2	53.5
20 20 10	119	128	zero	91.0	54.2
20 20 20	96	94	zero	100.0	99.9
20 20 20	101	109	zero	100.0	100.0

(*) valores aproximados em graus

(**) medida em porcentagem

A estimativa do poder dos testes foi obtida pelo percentual de rejeições do total de 1000 amostras.

Pela análise da tabela 4.1 podemos tirar algumas conclusões. Para valores de θ pequenos ou próximos de zero, o teste de Tukey se comporta bem, apresentando um índice de rejeição de 5% dos casos.

O teste de Mandel com a estatística θ^2 / θ também apresenta uma performance razoável visto que o índice de rejeição fica em torno de 3 e 5% dos casos. Isto já era esperado uma vez que estes testes já haviam sido "calibrados" anteriormente.

Também por esta tabela nos foi possível perceber que o teste da razão de verossimilhança apresenta uma rejeição maior do que a desejada quando estamos sob a hipótese nula (em torno de 20%). Isto indica que este teste de ser "calibrado" antes de ser utilizado.

Para valores grandes de θ (≥ 10), a performance do teste de Mandel é melhor na maioria dos casos, independentemente das direções dos vetores $\beta, \underline{u}, \underline{v}$ e \underline{y} .

Na tabela 4.2 apresentamos separadamente os resultados obtidos para dois casos particularmente importantes, ou seja, onde os ângulos entre β e \underline{u} e \underline{v} e \underline{y} são zero e 90 graus.

tabela 4.2 - Teste de Tukey x Teste de Mandel (população infinita) - ângulos de 90 e 0 graus entre β e \underline{u} e entre \underline{v} e \underline{y} .

constantes			ângulo(x) entre β e \underline{u}	ângulo entre \underline{v} e \underline{y}	estimativa do poder(**) dos testes		
b	t	θ			TUKEY	MANDEL c/ RVM	MANDEL θ_1^2 / θ_2^2
1	1	0	90	90	4.7	19.9	4.7
1	1	1	90	90	3.9	21.0	4.7
1	1	10	90	90	1.0	99.7	82.5
1	10	1	90	90	4.0	20.3	3.7
1	10	10	90	90	zero	99.5	84.4
10	10	1	90	90	4.9	20.6	5.0
10	10	10	90	90	zero	99.7	82.3
1	1	0	0	0	5.3	19.2	3.6
1	1	1	0	0	7.8	22.6	4.7
1	1	10	0	0	52.6	99.6	84.4
1	10	1	0	0	10.6	20.5	4.4
1	10	10	0	0	78.2	99.6	85.5
10	10	1	0	0	14.8	20.8	4.3
10	10	10	0	0	zero	99.8	83.7

(x) valores em graus

(**) medida em porcentagem

A situação onde o ângulo entre β e γ e τ e γ é de zero graus, corresponde exatamente à hipótese alternativa onde, segundo Ghosh e Sharma (1963), o teste de Tukey é poderoso. Os resultados da tabela 4.2 nos levam a concluir que nesta situação o teste de Tukey é poderoso mas ainda assim em alguns casos seu poder é menor que o poder do teste de Mandel, seja com o teste da razão de verossimilhança seja

com a estatística θ / θ .

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Já na presença de ortogonalidade, o poder do teste de Tukey cai muito.

Veja por exemplo, a situação em que $b=1, t=10$ e $\theta=10$. Quando o ângulo entre β e γ e τ e γ é zero graus, o poder do teste de Tukey é 78.2% contra 99.6% e 85.5% para Mandel sob os dois critérios.

Este poder cai a zero, no caso do teste de Tukey quando os referidos ângulos passam a 90 graus. Já o poder dos testes baseados no modelo de Mandel não sofreu praticamente alteração alguma.

Johnson e Graybill (1972, pág 864) ao analisarem a relação entre o teste de Tukey para não aditividade e o teste da razão de verossimilhança proposto, chegaram a conclusões semelhantes quanto à performance do teste de Tukey.

4.4 - SIMULAÇÃO COM POPULAÇÕES FINITAS.

Até o momento estivemos comparando o desempenho dos testes de Tukey e Mandel utilizando amostras de populações com distribuição Gaussiana.

Nesta seção estamos interessados em verificar o comportamento destes testes com populações finitas e fora da suposição de normalidade dos dados.

O enfoque dado a este estudo será o mesmo apresentado no capítulo I ou seja, trabalharemos com algumas populações conceituais de respostas, constituídas de 4 blocos e 4 tratamentos.

Analizaremos três tipos de populações; uma aditiva - onde o objetivo é estudar o comportamento dos testes sob a hipótese nula (aditividade entre bloco e tratamento) - e duas onde a interação será do tipo multiplicativo.

As populações conceituais de respostas serão geradas da seguinte forma:

$$Y_{ijk} = 10 + \beta_i + \tau_j + 10\alpha_{ij} + u_{ijk} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, 4 \\ j=1, \dots, 4 \\ k=1, \dots, 4 \end{matrix} \quad (4.4.1)$$

onde Y_{ijk} é a resposta conceitual do j -ésimo "plot" do bloco i ao k -ésimo tratamento

β (4x1) é o vetor com os efeitos de blocos

τ (4x1) é o vetor com os efeitos de tratamentos

α (4x1) é o vetor com os efeitos multiplicativos correspondentes a blocos

γ (4x1) é o vetor com os efeitos multiplicativos correspondentes a tratamentos

U (4x4) é a matriz com as constantes associadas aos efeitos das unidades experimentais

As comparações foram baseadas em 700 amostras utilizando-se na amostragem um programa construído na linguagem Basic (apêndice F).

O programa foi executado no micro computador ITAUTEC 1 - 7000 do Laboratório de Estatística da Unicamp.

No cálculo dos testes de Tukey e Mandel utilizamos a segunda parte do programa em S.A.S que se encontra no apêndice E.

4.4.1 - SIMULAÇÃO COM POPULAÇÃO ADITIVA.

Para esta simulação foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros do modelo (4.4.1):

$$\beta = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -25 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} 100 \\ -50 \\ 150 \\ -200 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \gamma = \phi$$

A população é apresentada na tabela 4.3.

tabela 4.3 - população aditiva

bloco	unidade experimental			
	I	II	III	IV
I	125	120	117	118
	-25	-30	-33	-32
	175	170	167	168
	-175	-180	-183	-182
II	104	106	103	107
	-46	-44	-47	-43
	154	156	153	157
	-196	-194	-197	-193
III	85	86	84	85
	-65	-64	-66	-65
	135	136	134	135
	-215	-214	-216	-215
IV	126	128	136	130
	-24	-22	-14	-20
	176	178	186	180
	-174	-172	-164	-170

Os resultados encontram-se nas tabelas 4.4 e 4.5.

tabela 4.4 - Teste de Tukey x Teste Mandel com critério da razão de verossimilhança

MANDEL	TUKEY		total
	aceita Ho	rejeita Ho	
aceita	472 (*)	29	501
Ho	67.43(**)	4.14	71.57
rejeita	181	18	199
Ho	25.86	2.57	28.43
total	653	46	700
	93.29	6.71	100.00

(*) frequência

(**) percentual

tabela 4.5 - Teste de Tukey x Teste Mandel com o critério θ_1^2 / θ_2^2

MANDEL	TUKEY		total
	aceita Ho	rejeita Ho	
aceita Ho	624 (*) 89.14(**)	41 5.86	665 95.00
rejeita Ho	29 4.14	6 0.86	35 5.00
total	653 93.29	47 6.71	700 100.00

(*) frequência

(**) percentual

Podemos perceber pela análise das tabelas anteriores que os resultados aqui obtidos foram similares aos obtidos com populações infinitas.

Tanto o teste de Mandel com o critério da estatística θ / θ como o teste de Tukey apresentaram um índice de rejeição em torno de 5% dos casos.

Também aqui verificamos que o teste da razão de verossimilhança não está devidamente "calibrado", apresentando um índice de rejeição alto sob a hipótese nula.

4.4.2 - SIMULAÇÃO COM POPULAÇÕES COM EFEITOS MULTIPLICATIVOS.

Trabalharemos aqui com dois tipos de populações multiplicativas.

O 1º caso trata-se de uma população multiplicativa onde os ângulos entre β e α e \underline{I} e \underline{Y} são de zero graus.

No 2º caso tratamos de uma população multiplicativa onde as direções não foram pré escolhidas.

4.4.2.1 - 1º Caso: ângulos de zero graus.

Os parâmetros para o modelo 4.4.1 são:

$$\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

A tabela 4.6 apresenta a população conceitual.

tabela 4.6 - população multiplicativa

bloco	unidade experimental			
	I	II	III	IV
I	18.5	13.5	10.5	11.5
	18.5	13.5	10.5	11.5
	12.5	7.5	4.5	5.5
	12.5	7.5	4.5	5.5
II	12.5	14.5	11.5	15.5
	12.5	14.5	11.5	15.5
	6.5	8.5	5.5	9.5
	6.5	8.5	5.5	9.5
III	7.5	8.5	6.5	7.5
	7.5	8.5	6.5	7.5
	11.5	12.5	10.5	11.5
	11.5	12.5	10.5	11.5
IV	3.5	5.5	13.5	7.5
	3.5	5.5	13.5	7.5
	7.5	9.5	17.5	11.5
	7.5	9.5	17.5	11.5

As tabelas 4.7 e 4.8 apresentam os resultados da simulação.

tabela 4.7 - Teste de Tukey x Teste de Mandel com critério da razão de verossimilhança

MANDEL	TUKEY		total
	aceita Ho	rejeita Ho	
aceita Ho	397 (*) 56.71(**)	67 9.57	464 66.29
rejeita Ho	188 26.86	48 6.86	236 33.71
total	585 83.57	115 16.43	700 100.00

(*) frequência

(**) percentual

tabela 4.8 - Teste de Tukey x Teste de Mandel com o critério θ_1^2 / θ_2^2

MANDEL	TUKEY		total
	aceita Ho	rejeita Ho	
aceita Ho	546 (*) 78.00(**)	112 16.00	658 94.00
rejeita Ho	39 5.57	3 0.43	42 6.00
total	585 83.57	115 16.43	700 100.00

(*) frequência

(**) percentual

A situação que estamos tratando é a situação típica da hipótese alternativa do modelo de Tukey. Esperávamos que o seu poder neste caso foi alto. No entanto, o poder foi de apenas 16% e bem verdade que seu poder é maior do que o de Mandel (tabela 4.8) mas ainda assim o desempenho de ambos é muito ruim.

Na tabela 4.7 encontramos para o teste de Mandel com o critério da razão de verossimilhança um poder de aproximadamente 34%, que ainda é baixo. Mas este resultado não pode ser muito considerado uma vez que este teste está com um índice de rejeição um pouco mais alto do que o desejável.

4.4.2.2 - 2º Caso : ângulos quaisquer.

A população a ser amostrada aqui, também apresenta interação entre bloco e tratamento. Esta interação é do tipo multiplicativo:

$$\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -25 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} 100 \\ -50 \\ 150 \\ -200 \end{bmatrix} \quad \tilde{\gamma} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Na tabela 4.9 é apresentada a população conceitual para este caso.

tabela 4.9 - população multiplicativa

bloco	unidade experimental			
	I	II	III	IV
I	155	150	147	148
	-45	-50	-53	-52
	175	170	167	168
	-185	-190	-193	-193
II	74	76	73	77
	-26	-24	-27	-23
	154	156	153	157
	-186	-184	-187	-183
III	115	116	114	115
	-85	-84	-86	-85
	135	136	134	135
	-225	-224	-226	-225
IV	96	98	106	100
	-4	-2	6	0
	176	178	186	180
	-164	-162	-154	-160

As tabelas 4.10 e 4.11 apresentam os resultados da simulação.

tabela 4.10- Teste de Tukey x Teste de Mandel com critério da razão de verossimilhança

MANDEL	TUKEY		total
	aceita Ho	rejeita Ho	
aceita Ho	0 (*) 0.00(**)	0 0.00	0 0.00
rejeita Ho	700 100.00	0 0.00	700 100.00
total	700 100.00	0 0.00	700 100.00

(*) frequência

(**) percentual

tabela 4.11 - Teste de Tukey x Teste de Mandel com o critério θ_1/θ_2

MANDEL	TUKEY		total
	aceita Ho	rejeita Ho	
aceita Ho	0 (*) 0.00(**)	0 0.00	0 0.00
rejeita Ho	700 100.00	0 0.00	700 100.00
total	700 100.00	0 0.00	700 100.00

(*) frequência

(**) percentual

Para esta população o resultado foi alarmante, ou seja, o poder do teste de Tukey foi estimado em zero enquanto que o poder para o teste de Mandel foi de 100%.

4.5 - CONCLUSÃO.

Antes de apresentarmos nossas conclusões gostaríamos de tecer alguns comentários à respeito de alguns procedimentos aqui utilizados.

Através dos resultados obtidos, nos foi possível perceber que existem problemas com o teste da razão de verossimilhança proposto por Johnson e Graybill. Provavelmente erros no que concerne à aproximação utilizada para o cálculo dos valores críticos.

Para contornar este problema, deveríamos ter realizado uma simulação semelhante àquela utilizada para a estatística θ_1 / θ_2 e buscar o valor crítico adequado.

Infelizmente, por limitações de tempo, não nos foi possível realizar tal simulação, o que será feito num prosseguimento deste trabalho.

Por outro lado, a estatística θ_1 / θ_2 apresentou resultados satisfatórios quando utilizada em testes sob H_0 . No entanto, esta não utiliza toda a informação contida na amostra como é o caso da estatística utilizada no teste da razão de verossimilhança, tampouco possui suas propriedades assintóticas.

Mesmo assim, os testes baseados no modelo multiplicativo de Mandel apresentaram performances melhores do que o de Tukey, inclusive com populações finitas.

Portanto, as conclusões principais que podem ser tiradas deste estudo, são:

- (i) em situações onde a interação é uma função dos dois conjuntos de tratamentos, a performance do teste de Tukey é boa embora ainda assim em alguns casos, o poder do teste de Mandel seja maior;
- (ii) quando a interação não é função dos dois conjuntos de tratamentos o teste de Mandel é mais poderoso.

Ou seja, o poder do teste de Tukey depende do ângulo entre os vetores $\underline{\beta}$ e \underline{u} e $\underline{1}$ e \underline{v} , enquanto que o poder do teste baseado no modelo de Mandel não sofre tanta influência desses ângulos.

Estes aspectos aliados ao fato de que o modelo multiplicativo de Mandel além de testar não aditividade fornece também informações a respeito do comportamento da interação, nos levam a sugerir fortemente seu uso em análises onde o estudo da não aditividade se faça necessário.

APÊNDICE A

A.1) Cálculo da covariância dos erros no experimento completamente aleatorizado.

#

$$\begin{aligned}
\text{cov}(e_{1j}, e_{1'j'}) &= E(e_{1j} e_{1'j'}) = \\
&= E \left(\left[\sum_{k=1}^{rs} \delta_{1j}^k (x_k - \bar{x}) \right] \left[\sum_{k=1}^{rs} \delta_{1'j'}^k (x_k - \bar{x}) \right] \right) \\
&= E \left[\sum_{k=1}^{rs} \delta_{1j}^k \delta_{1'j'}^k (x_k - \bar{x})^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} \delta_{1j}^k \delta_{1'j'}^{k'} (x_k - \bar{x}) (x_{k'} - \bar{x}) \right] = \\
&= \sum_{k=1}^{rs} P(\delta_{1j}^k = 1, \delta_{1'j'}^k = 1) (x_k - \bar{x})^2 + \\
&\quad + \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} P(\delta_{1j}^k = 1, \delta_{1'j'}^{k'} = 1) (x_k - \bar{x}) (x_{k'} - \bar{x}) = \\
&= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} (x_k - \bar{x}) (x_{k'} - \bar{x})
\end{aligned}$$

$$\text{Mas } \left[\sum_k (x_k - \bar{x}) \right]^2 = \sum_k (x_k - \bar{x})^2 + \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} (x_k - \bar{x}) (x_{k'} - \bar{x}) = 0$$

$$\text{Portanto } \text{cov}(e_{1j}, e_{1'j'}) = \frac{-1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \bar{x})^2 = \frac{-S}{N}$$

A.2) Cálculo da esperança das somas de quadrados no experimento completamente aleatorizado.

#

$$E(\text{SQtrat}) = E \left[r \sum_{i=1}^s (y_i - \bar{y})^2 \right] = E \left[\frac{1}{r} \sum_{i=1}^s T_i^2 - \frac{1}{rs} \left(\sum_{i=1}^s T_i \right)^2 \right]$$

onde $T_i = r(\mu + \tau_i) + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_{ij} - x_k)$ é o total do tratamento i .

$$\begin{aligned} T_i^2 &= r^2 (\mu + \tau_i)^2 + 2r(\mu + \tau_i) \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_{ij} - x_k) + \\ &+ \sum_{j,k} \sum_{j',k'} (\delta_{ij}^k)^2 (x_{ij} - x_k)^2 + \sum_{\substack{k,k' \\ k \neq k'}} \sum_{j,j'} \delta_{ij}^k \delta_{ij'}^{k'} (x_{ij} - x_k)(x_{ij'} - x_{k'}) + \\ &+ \sum_{\substack{j,j' \\ j \neq j'}} \sum_{k,k'} \delta_{ij}^k \delta_{ij'}^{k'} (x_{ij} - x_k)^2 + \sum_{\substack{k,k',j,j' \\ k \neq k', j \neq j'}} \delta_{ij}^k \delta_{ij'}^{k'} (x_{ij} - x_k)(x_{ij'} - x_{k'}). \end{aligned}$$

$$E(T_i^2) = r^2 (\mu + \tau_i)^2 + \frac{r(rs-1)}{(rs-1)s} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \mu)^2$$

$$E\left(\sum_{i=1}^s T_i^2\right) = E\left[\sum_{i=1}^s r(\mu + \tau_i) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_{ij} - x_k)\right]^2 = E[(rs\mu)^2]$$

pois $\sum_{i=1}^s \tau_i = 0$ e

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_{ij} - x_k) = \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \mu) \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \delta_{ij}^k = \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \mu) = 0$$

$$E(\text{SQtrat}) = r \sum_{i=1}^s (\mu + \tau_i + 2\mu\tau_i)^2 + \frac{(s-1)}{(rs-1)} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \mu)^2 - \frac{1}{rs} r s \mu^2$$

$$= rs\mu^2 + r \sum_{i=1}^s \tau_i^2 + 2r\mu \sum_{i=1}^s \tau_i + \frac{(s-1)}{(rs-1)} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \mu)^2 - rs\mu^2$$

$$\text{=====> } E(\text{SQtrat}) = (s-1) S^2 + r \sum_{i=1}^s \tau_i^2$$

$$E(\text{SQtot}) = E\left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r (y_{ij} - y_{..})^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r y_{ij}^2 - rs y_{..}^2\right]$$

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_k - \mu)$$

$$E(y_{ij}^2) = \mu^2 + \tau^2 + E \left[\sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_{ij} - x_k)^2 \right] = \mu^2 + \tau^2 + \frac{1}{rs} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \mu)^2$$

$$\text{pois } E \left[\sum_{k=1}^{rs} \delta_{ij}^k (x_{ij} - x_k)^2 \right] = E \left[\sum_{k=1}^{rs} (\delta_{ij}^k)^2 (x_{ij} - x_k)^2 + \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} \delta_{ij}^k \delta_{ij}^{k'} (x_{ij} - x_k) (x_{ij} - x_{k'}) \right] = \frac{1}{rs} \sum_{k=1}^{rs} (x_k - \mu)^2$$

$$\text{=====>} \quad E(\text{SQ}_{\text{tot}}) = (rs-1) S^2 + r \sum_{i=1}^s \tau_i^2$$

$$E(\text{SQ}_{\text{res}}) = (rs-1) S^2 - (s-1) S^2$$

$$\text{=====>} \quad E(\text{SQ}_{\text{res}}) = s(r-1) S^2$$

#

$$\text{com } S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \mu)^2$$

A.3) Cálculo da esperança das somas de quadrados no experimento aleatorizado em blocos completos.

#

$$\begin{aligned} E(\text{SQ}_{\text{trat}}) &= E \left[r \sum_{k=1}^s (y_{.k} - \bar{y}_{..})^2 \right] = E \left[r \left(\sum_{k=1}^s y_{.k}^2 - s \bar{y}_{..}^2 \right) \right] = \\ &= E \left[\frac{1}{r} \sum_{k=1}^s T_k^2 - \frac{1}{rs} \left(\sum_{k=1}^s T_k \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{onde } T_k = r\mu + r\tau + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^k e_{ij}$$

$$E(T_k^2) = \text{Var}(T_k) + E(T_k)^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s e_{ij}^2 + r\mu^2 + r\tau^2 + r \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s e_{ij}^2$$

$$E\left(\sum_{k=1}^s T_k\right)^2 = E\left(r s \mu + r \sum_{k=1}^s \tau_k + \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^{(k)} \epsilon_{ij}\right)^2 = E(r s \mu)^2$$

$$\text{pois} \sum_{k=1}^s \tau_k = 0 \quad \epsilon \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^{(k)} \epsilon_{ij} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} \sum_{k=1}^s \delta_{ij}^{(k)} = 0$$

$$\epsilon \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} = 0$$

$$E(\text{SQtrat}) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij}^2 + r \mu^2 + r \mu \sum_{k=1}^s \tau_k + r \sum_{k=1}^s \tau_k^2 - \frac{1}{r s} E(r s \mu)^2$$

$$\text{=====>} \quad E(\text{SQtrat}) = (s-1) S^2 + r \sum_{k=1}^s \tau_k^2$$

$$E(\text{SQblocos}) = E\left[s \sum_{i=1}^r (y_i - \bar{y})^2\right] = E\left[s \left(\sum_{i=1}^r y_i^2 - r \bar{y}^2\right)\right]$$

$$y_i = \mu + \beta + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^{(k)} \epsilon_{ij}$$

$$E(y_i^2) = \mu^2 + 2\mu\beta + \beta^2 + s^{-2} E\left(\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^{(k)} \epsilon_{ij}\right)^2 = \mu^2 + 2\mu\beta + \beta^2$$

$$\text{pois} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \delta_{ij}^{(k)} \epsilon_{ij} = \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} \sum_{k=1}^s \delta_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij} = 0$$

$$\begin{aligned} E(\text{SQblocos}) &= s \left[\sum_{i=1}^r E(y_i^2) - r E(\bar{y})^2 \right] = \\ &= s \left[r \mu^2 + 2\mu \sum_{i=1}^r \beta + \sum_{i=1}^r \beta^2 - r \mu^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{=====>} \quad E(\text{SQblocos}) = s \sum_{i=1}^r \beta^2$$

$$E(SQ_{tot}) = E \left[\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (y_{ik} - \bar{y}_{i..})^2 \right] = E \left[\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s y_{ik}^2 - r s \bar{y}_{i..}^2 \right]$$

$$y_{ik} = \mu + \beta_i + \tau_k + \sum_{j=1}^s \delta_{ij} \epsilon_{ij}$$

$$E(y_{ik}^2) = \mu^2 + 2\mu\beta_i + 2\mu\tau_k + \beta_i^2 + 2\beta_i\tau_k + E \left(\sum_{j=1}^s \delta_{ij} \epsilon_{ij} \right)^2 + \tau_k^2 =$$

$$= \mu^2 + 2\mu\beta_i + 2\mu\tau_k + \beta_i^2 + 2\beta_i\tau_k + \tau_k^2 + \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij}^2$$

$$\text{pois } E \left(\sum_{j=1}^s \delta_{ij} \epsilon_{ij} \right)^2 = E \left[\sum_{j=1}^s (\delta_{ij}^2 \epsilon_{ij}^2) + \sum_{\substack{j, j' \\ j \neq j'}} \delta_{ij} \delta_{ij'} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij'} \right]$$

$$E(SQ_{tot}) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s \left(\mu^2 + 2\mu\beta_i + 2\mu\tau_k + \beta_i^2 + 2\beta_i\tau_k + \tau_k^2 + \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij}^2 \right)$$

$$\text{=====> } E(SQ_{tot}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \epsilon_{ij}^2 + r \sum_{k=1}^s \tau_k^2 + s \sum_{i=1}^r \beta_i^2$$

$$E(SQ_{res}) = E(SQ_{tot}) - E(SQ_{trat}) - E(SQ_{bloco})$$

$$\text{=====> } E(SQ_{res}) = (r-1)(s-1) S^2 \quad \text{com } S^2 = \frac{1}{r(s-1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$$

APÊNDICE B

Demonstração do teorema 2.1

A matriz RR^t é simétrica, positiva semi-definida, e de posto p . Ela tem então, p auto valores positivos,

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq s_3^2 \geq \dots \geq s_p^2 > 0.$$

Seja \underline{u}_i , $i=1,2,\dots,p$ um correspondente conjunto ortonormal de auto vetores de RR^t . Isto é,

$$RR^t \underline{u}_i = s_i^2 \underline{u}_i, \quad i=1,2,\dots,p \quad (B.1)$$

Definiremos,

$$\underline{v}_i = \frac{1}{s_i} R^t \underline{u}_i \quad i=1,2,\dots,p. \quad (B.2)$$

Então \underline{v}_i , $i=1,2,\dots,p$, é um conjunto ortonormal de auto vetores de RR^t .

Para provar essa afirmação, considere $RR^t \underline{v}_i$. Por (B.2),

$$RR^t \underline{v}_i = \frac{1}{s_i} R R R^t \underline{u}_i$$

Utilizando (B.1), resulta que

$$RR^t \underline{v}_i = \frac{1}{s_i} R^t \underline{u}_i = s_i R^t \underline{u}_i \quad (B.3)$$

Mas, por (B.2) novamente, temos que

$$R^t \underline{u}_i = s_i \underline{v}_i$$

que substituindo em (B.2) , produz

$$R^t R \underline{v}_i = s_i^2 \underline{v}_i$$

e \underline{v}_i , $i = 1, 2, \dots, p$ são auto vetores de $R^t R$.

Vamos mostrar agora, que os \underline{v}_i 's formam um conjunto ortonormal.

Considere o produto interno de \underline{v}_i e \underline{v}_j :

$$\begin{aligned} \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle &= \left\langle \frac{1}{s_i} R^t \underline{u}_i, \frac{1}{s_j} R^t \underline{u}_j \right\rangle = \\ &= \frac{1}{s_i s_j} \langle \underline{u}_i, R R^t \underline{u}_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle \underline{u}_i, s_j^2 \underline{u}_j \rangle = \\ &= \frac{s_j}{s_i} \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = 0 \quad \text{se } i \neq j \\ &= 1 \quad \text{se } i = j \end{aligned}$$

O conjunto $(\underline{u}_i ; i = 1, \dots, p)$ é uma base ortonormal para $C(R)$ o espaço coluna de R . Tome uma base $(\underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_m)$ do ortocomplemento de $C(R)$. Então o conjunto de vetores $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p, \underline{u}_{p+1}, \dots, \underline{u}_m)$ é uma base ortonormal de E e

$$R^t \underline{u}_i = \phi \quad i = p+1, \dots, m .$$

As matrizes

$$U = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_p) \text{ e } V = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_p)$$

são, por construção, ortogonais.

APENDICE C

TABELA C1

VALORES ESPERADOS DE AUTO VALORES, PARA DESVIOS
ALEATÓRIOS NORMAIS (VALORES M)

$m \backslash n$	4	5	6	7	8	10	12	16	20
1-4	6.45	8.47	9.86	11.61	12.88	15.08	17.96	23.33	28.20
1-5	8.47	10.37	11.82	13.59	14.75	18.11	21.01	26.29	31.87
1-6	9.86	11.82	13.35	15.44	16.92	20.42	22.85	28.87	36.78
1-7	11.61	13.59	15.44	17.18	18.91	22.89	25.59	31.83	37.46
1-8	12.88	14.75	16.92	18.91	20.72	24.15	27.67	34.52	40.70
1-10	15.08	18.11	20.42	22.89	24.15	27.81	31.88	38.81	45.11
1-12	17.96	21.01	22.85	25.59	27.67	31.88	35.39	42.76	50.00
1-16	23.33	26.29	28.87	31.83	34.52	38.81	42.76	51.08	58.11
1-20	28.20	31.87	36.78	37.46	40.70	45.11	50.00	58.11	66.34
1-32	42.86	46.77	50.83	53.77	57.50	63.21	68.60	78.62	88.71
1-50	63.85	68.93	73.74	77.62	81.68	88.66	95.11	107.41	117.36
1-100	120.90	126.58	132.94	138.45	143.64	153.00	161.58	176.32	192.08
2-4	1.97	3.04	4.01	5.06	6.06	7.81	9.98	14.08	17.90
2-5	3.04	4.25	5.45	6.72	7.78	10.10	12.50	16.80	21.27
2-6	4.01	5.45	6.96	8.21	9.68	12.15	14.60	19.51	25.54
2-7	5.06	6.72	8.21	9.77	11.21	14.26	16.77	22.18	27.02
2-8	6.06	7.78	9.68	11.21	12.73	15.70	18.72	24.26	29.77
2-10	7.81	10.10	12.15	14.26	15.70	19.21	22.12	28.60	33.86
2-12	9.98	12.50	14.60	16.77	18.72	22.12	25.28	32.43	38.32
2-16	14.08	16.80	19.51	22.18	24.26	28.60	32.43	39.68	46.05
2-20	17.90	21.27	25.54	27.02	29.77	33.86	38.32	46.05	53.76
2-32	29.99	34.01	38.38	41.15	44.63	50.22	55.54	65.32	74.28
2-50	48.10	53.54	58.35	62.61	66.57	73.16	80.12	91.31	101.51
2-100	98.31	105.69	112.21	118.49	123.48	133.58	142.62	156.95	171.26
3-4	0.27	0.67	1.15	1.72	2.26	3.39	4.87	7.74	10.66
3-5	.67	1.38	2.22	3.08	3.72	5.42	7.11	10.65	14.34
3-6	1.15	2.22	3.17	4.15	5.23	7.28	9.15	13.18	18.06
3-7	1.72	3.08	4.15	5.44	6.48	8.95	11.05	15.55	19.69
3-8	2.26	3.72	5.23	6.48	7.76	10.39	12.80	17.61	22.35
3-10	3.39	5.42	7.28	8.95	10.39	13.38	16.03	21.33	26.30
3-12	4.87	7.11	9.15	11.05	12.80	16.03	18.85	25.03	30.50
3-16	7.74	10.65	13.18	15.55	17.61	21.33	25.03	31.79	37.73
3-20	10.66	14.34	18.06	19.69	22.35	26.30	30.50	37.73	45.04
3-32	20.14	25.11	29.34	32.34	35.65	41.24	46.31	55.84	64.41
3-50	35.12	41.62	47.57	51.70	55.72	62.49	68.76	80.16	90.24
3-100	79.50	89.40	97.12	103.02	109.26	119.49	127.74	143.20	156.38

TABELA C2

DESVIOS PADRÕES DE AUTO VALORES, PARA DESVIOS
ALEATÓRIOS NORMAIS

$m \backslash n$	4	5	6	7	8	10	12	16	20
1-4	3.24	3.83	4.05	4.36	4.52	4.72	5.26	5.71	6.25
1-5	3.83	4.18	4.12	4.28	4.71	5.12	5.45	5.84	6.40
1-6	4.05	4.12	4.30	4.88	4.71	5.64	5.51	6.09	6.92
1-7	4.36	4.28	4.88	4.80	5.16	5.28	5.64	6.03	6.51
1-8	4.52	4.71	4.71	5.16	5.26	5.30	6.02	6.49	6.88
1-10	4.72	5.12	5.64	5.28	5.30	5.50	6.41	6.25	6.89
1-12	5.26	5.45	5.51	5.64	6.02	6.41	6.65	6.57	7.53
1-16	5.71	5.84	6.09	6.03	6.49	6.25	6.57	7.10	7.60
1-20	6.25	6.40	6.92	6.51	6.88	6.89	7.53	7.60	7.87
1-32	7.38	7.59	7.96	7.89	7.98	8.02	8.26	8.37	8.77
1-50	9.55	9.55	9.44	8.88	9.04	9.36	9.77	9.86	10.16
1-100	12.96	12.22	12.50	11.84	11.96	11.67	11.59	11.95	12.19
2-4	1.39	1.77	2.08	2.25	2.62	2.77	3.17	3.56	4.11
2-5	1.77	2.04	2.29	2.48	2.70	3.11	3.43	3.95	4.32
2-6	2.08	2.29	2.61	2.83	2.94	3.36	3.68	4.00	4.46
2-7	2.25	2.48	2.83	3.04	3.04	3.36	3.77	4.20	4.72
2-8	2.62	2.70	2.94	3.04	3.17	3.43	3.82	4.26	4.75
2-10	2.77	3.11	3.36	3.36	3.43	3.99	4.09	4.66	5.00
2-12	3.17	3.43	3.68	3.77	3.82	4.09	4.10	4.85	4.93
2-16	3.56	3.95	4.00	4.20	4.26	4.66	4.85	5.30	5.55
2-20	4.11	4.32	4.46	4.72	4.75	5.00	4.93	5.55	5.83
2-32	5.46	5.24	5.60	5.44	5.52	5.82	5.88	6.27	6.20
2-50	6.93	7.09	6.79	6.96	6.61	6.92	7.08	7.36	7.20
2-100	10.15	9.59	9.08	9.56	9.04	9.23	8.90	9.27	9.41
3-4	0.37	0.69	0.92	1.20	1.35	1.72	2.13	2.80	3.14
3-5	.69	.97	1.23	1.56	1.66	1.86	2.30	2.90	3.36
3-6	.92	1.23	1.53	1.75	2.00	2.21	2.46	3.08	3.44
3-7	1.20	1.56	1.75	2.00	2.07	2.43	2.66	3.32	3.62
3-8	1.35	1.66	2.00	2.07	2.31	2.62	2.80	3.19	3.56
3-10	1.72	1.86	2.21	2.43	2.62	2.95	3.11	3.53	3.68
3-12	2.13	2.30	2.46	2.66	2.80	3.11	3.34	3.60	3.87
3-16	2.80	2.90	3.08	3.32	3.19	3.53	3.60	4.17	4.45
3-20	3.14	3.36	3.44	3.62	3.56	3.68	3.87	4.45	4.76
3-32	4.59	4.29	4.53	4.55	4.60	4.52	4.98	5.09	5.38
3-50	6.54	5.64	5.68	5.67	5.84	5.78	5.77	5.87	6.01
3-100	9.21	8.27	8.12	7.77	7.98	7.83	7.36	8.11	8.05

TABELA C3

VALORES H EXPRESSOS COMO PERCENTAGEM DO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE DA INTERAÇÃO

$m \backslash n$	4	5	6	7	8	10	12	16	20
1-4	74.54	69.42	65.66	62.91	60.68	57.64	54.80	51.63	49.72
1-5	69.42	63.83	59.06	55.83	53.67	50.46	47.74	44.18	41.89
1-6	65.66	59.06	54.05	51.57	48.48	44.96	42.26	38.85	36.74
1-7	62.91	55.83	51.57	47.70	45.50	41.47	38.84	35.07	32.96
1-8	60.68	53.67	48.48	45.50	42.79	38.66	36.07	32.61	30.30
1-10	57.64	50.46	44.96	41.47	38.66	34.55	32.36	28.73	26.54
1-12	54.80	47.74	42.26	38.84	36.07	32.36	29.96	25.90	24.08
1-16	51.63	44.18	38.85	35.07	32.61	28.73	25.90	22.59	20.62
1-20	49.72	41.89	36.74	32.96	30.30	26.54	24.08	20.62	18.27
1-32	46.09	38.12	32.71	29.41	26.42	22.77	20.13	16.96	14.97
1-50	43.39	35.36	29.98	26.36	23.73	20.14	17.69	14.53	12.66
1-100	40.44	32.14	26.96	23.40	20.82	17.15	14.83	11.90	10.21
2-4	22.39	25.06	26.69	27.67	28.61	29.56	30.38	31.21	31.51
2-5	25.06	26.34	27.25	27.75	28.13	28.13	28.40	28.17	27.96
2-6	26.69	27.25	28.09	27.41	27.72	26.85	26.86	26.17	25.55
2-7	27.67	27.75	27.41	27.13	26.86	26.04	25.14	24.50	23.77
2-8	28.61	28.13	27.72	26.86	26.17	25.05	24.36	22.99	22.24
2-10	29.56	28.13	26.85	26.04	25.05	23.83	22.41	21.18	19.88
2-12	30.38	28.41	26.86	25.44	24.36	22.41	21.16	19.65	18.40
2-16	31.21	28.17	26.17	24.50	22.99	21.18	19.65	17.58	16.28
2-20	31.51	27.96	25.55	23.77	22.24	19.88	18.40	16.28	14.83
2-32	32.25	27.62	24.73	22.37	20.53	18.06	16.30	14.08	12.56
2-50	32.72	27.44	23.76	21.28	19.36	16.61	14.89	12.38	10.93
2-100	32.93	26.80	22.72	20.01	17.87	14.98	13.09	10.59	9.10
3-4	3.07	5.52	7.65	9.42	10.71	12.80	14.82	17.16	18.77
3-5	5.52	8.56	11.08	12.75	13.41	15.09	16.15	17.83	18.86
3-6	7.65	11.08	12.76	13.86	14.96	16.10	16.77	17.66	18.08
3-7	9.42	12.75	13.86	15.12	15.50	16.38	16.76	17.19	17.30
3-8	10.71	13.41	14.96	15.50	15.94	16.57	16.65	16.71	16.72
3-10	12.80	15.09	16.10	16.38	16.57	16.58	16.23	15.79	15.42
3-12	14.82	16.15	16.77	16.76	16.65	16.23	15.76	15.16	14.63
3-16	17.16	17.83	17.66	17.19	16.71	15.79	15.16	14.09	13.32
3-20	18.77	18.86	18.08	17.30	16.72	15.42	14.63	13.32	12.44
3-32	21.66	20.38	18.90	17.56	16.41	14.82	13.59	12.03	10.90
3-50	23.89	21.31	19.37	17.57	16.21	14.18	12.77	10.88	9.71
3-100	26.63	22.65	19.66	17.38	15.81	13.40	11.73	9.66	8.31

APENDICE D

VALORES CRÍTICOS PARA $s / \sum_{i=1}^2 s$ $n-1$ 2

t	b									
	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20
<u>Upper 10%</u>										
3	.9975a									
4	.9743a	.8349								
5	.9429a	.8458a	.8021							
6	.9135a	.8130	.6975	.6398						
7	.8879a	.7631a	.6548	.6358	.5687					
8	.8660a	.7435	.6487	.5725	.5462	.5098				
10	.8308a	.6798	.6057	.5570	.4972	.4489	.3982			
12	.8037a	.6594	.5695	.5001	.4563	.4289	.3830	.3506		
15	.7647a	.6022	.5133	.4550	.4137	.3815	.3268	.2952	.2562	
20	.7376a	.5737	.4843	.4329	.3778	.3502	.3023	.2765	.2326	.2049
32	.6886a	.5161	.4306	.3740	.3329	.2992	.2556	.2257	.1881	.1654
50	.6512a	.4887	.3978	.3362	.2913	.2624	.2226	.1960	.1598	.1386
100	.6071a	.4421	.3490	.2942	.2533	.2255	.1850	.1595	.1279	.1001
<u>Upper 5%</u>										
3	.9994a									
4	.9873a	.8567								
5	.9648a	.8811a	.8407							
6	.9406a	.8505	.7294	.6681						
7	.9168a	.8003a	.6823	.6703	.5957					
8	.8974a	.7811	.6815	.5985	.5733	.5345				
10	.8630a	.7043	.6361	.5901	.5096	.4680	.4143			
12	.8357a	.6936	.5979	.5242	.4774	.4501	.4016	.3665		
15	.7950a	.6295	.5356	.4760	.4227	.3991	.3590	.3064	.2656	
20	.7661a	.6290	.5094	.4542	.3932	.3652	.3139	.2876	.2408	.2117
32	.7127a	.5349	.4469	.3894	.3454	.3105	.2644	.2335	.1938	.1702
50	.6713a	.5078	.4127	.3482	.3002	.2706	.2296	.2020	.1643	.1423
100	.6218a	.4610	.3588	.3024	.2595	.2311	.1892	.1629	.1306	.1116
<u>Upper 1%</u>										
3	.99997a									
4	.9975a	.8930								
5	.9883a	.9303a	.9004							
6	.9743a	.9082	.7825	.7194						
7	.9587a	.8619a	.7325	.7325	.6457					
8	.9429a	.8446	.7407	.6470	.6243	.5809				
10	.9135a	.7575	.6924	.6516	.5523	.5044	.4452			
12	.8879a	.7411	.6514	.5702	.5170	.4911	.4372	.3969		
15	.8472a	.6256	.5788	.5167	.4560	.4331	.3628	.3372	.2837	
20	.8164a	.5966	.5462	.4955	.4229	.3945	.3354	.3095	.2567	.2249
32	.7571a	.5367	.4788	.4198	.3700	.3326	.2818	.2485	.2049	.1796
50	.7089a	.5043	.4423	.3722	.3178	.2864	.2430	.2139	.1731	.1495
100	.6498a	.4463	.3771	.3189	.2720	.2421	.1977	.1698	.1359	.1159

* Indicates exact critical point.

APENDICE E

PROGRAMA S.A.S UTILIZADO NAS SIMULAÇÕES

1ª PARTE: GERAÇÃO DOS COMPONENTES DO MODELO
PARA POPULAÇÕES INFINITAS.

```

MACRO ANALISA
TITULO;
DATA DADOS;
PARAMTS;
ARRAY U(I)    U1-U4;
ARRAY V(J)    V1-V4;
ARRAY BLOCO(I) B1-B4;
ARRAY TRAT(J) T1-T4;
SSQ1=0; SSQ2=0; SSQ3=0; SSQ4=0;
DO I=1 TO 4;
  J=I;
  BLOCO=NORMAL(0); SSQ1=SSQ1+BLOCO*BLOCO;
  TRAT=NORMAL(0); SSQ2=SSQ2+TRAT*TRAT;
  U=NORMAL(0); SSQ3=SSQ3+U*U;
  V=NORMAL(0); SSQ4=SSQ4+V*V;
END;
SSQ1=SQRT(SSQ1); SSQ2=SQRT(SSQ2);
SSQ3=SQRT(SSQ3); SSQ4=SQRT(SSQ4);
DO I=1 TO 4;
  J=I;
  BLOCO=BLOCO/SSQ1;
  TRAT=TRAT/SSQ2;
  U=U/SSQ3;
  V=V/SSQ4;
END;
FILE PRINT;
PHIBU=0;
DO I=1 TO 4;
  PHIBU=PHIBU + BLOCO*U;
END;
PHIBU=ARCCOS(PHIBU);
PHITV=0;
DO J=1 TO 4;
  PHITV= PHITV+TRAT*V;
END;
PHITV=ARCCOS(PHITV);
PUT PHIBU=          PHITV=          ;
DO AMOSTRA=1 TO 1000;
  DO OVER BLOCO;
    B=I;
    DO OVER TRAT;
      T=J;
      Y=0.25+NB*BLOCO+NT*TRAT+TETA*U*V+NORMAL(0);
      OUTPUT ;
    END;
  END;
END;
KEEP AMOSTRA B T Y;

```

2ª PARTE: CALCULO DOS TESTES DE TUKEY E MANDEL.

```

PROC MATRIX;
FFTCB ENT DATA = DADOS(KEEP=Y);
T=4;
B=4;
MANDEL=6.45/1.97/0.27/1.00;
TRAT1=J(1,T,0); BLOC01=J(B,1,0);

DSVTR=J(B,T,0); DSVBL=J(B,T,0);
CONST=T*B-1;
DO AMOSTRA = 1 TO 1000;
  IND1=(AMOSTRA-1) * T*B +1;
  IND2= IND1+CONST;
  Z=ENT(IND1:IND2,);
  Y=SHAPE(Z,T);
  DO COL=1 TO T;
    TRAT1(,COL)= SUM(Y(,COL))#/B;
  END;
  TRAT=J(B,1,1) @ TRAT1;
  DO LIN=1 TO B;
    BLOC01(LIN,)=SUM(Y(LIN,))#/T;
  END;
  BLOC0=BLOC01 @ J(1,T,1);
  MEDIA = SUM(Y)#/(B*T) * J(B,T,1);
  DO COL=1 TO T;
    DSVTR(,COL)=TRAT(,COL) - MEDIA(,COL);
  END;
  DO LIN=1 TO B;
    DSVBL(LIN,)= BLOC0(LIN,) - MEDIA(LIN,);
  END;
  RESD = Y-TRAT-BLOC0+MEDIA;
  MSBL= SSQ(DSVBL)#/(B-1);
  MSTR=SSQ(DSVTR)#/(T-1);
  MSRESO=SSQ(RESD)#/((B-1)*(T-1));
  SQTOT=SSQ(Y) - SSQ(MEDIA);
  VDSVTR=DSVTR(1,);
  VDSVBL=DSVBL(1,);
  SOMA=VDSVBL * Y * VDSVTR';
  SOMA2=SOMA##2;
  VDSVBL2=SSQ(VDSVBL);
  VDSVTR2=SSQ(VDSVTR);
  SQTUK=SOMA2#/(VDSVBL2# VDSVTR2);
  SQRESTO=SSQ(RESD) - SQTUK;
  MSTUKEY=(B * T - B - T) * SQTUK#/SQRESTO;
  DFD=B*T-B-T;
  DFN=1;
  SVD U Q V RESD; -
  R= RANK(-Q);
  TEMP=U;
  U(,R)=TEMP;

```

(CONTINUAÇÃO).

```

TEMP=0;
Q(R,J)=TEMP;
TEMP=V;
V(R,J)=TEMP;
M=Q##2;
M1M2=M(1,1)#/M(2,1);
MSMAND=M#/MANDEL;
SQRESO=SSQ(RESO);
RVM=M(1,1)#/SQRESO;
IF MSTUKEY>5.3 THEN DO;
    DECTUK=1;
    SIGMATUK=SQRESO#/DFD;
END;
ELSE DO;
    DECTUK=0;
    SIGMATUK=MSRESO;
END;
IF RVM>0.8567 THEN DO;

    DECRVM=1;
    SIGMAMAN=(SQRESO-M(1,1))#/(IB-1)*(T-1)-6.45);
    SIGMARVM=(SQRESO-M(1,1))#/(B*T);
END;
ELSE DO ;
    DECRVM=0;
    SIGMAMAN=MSRESO;
    SIGMARVM=0;
END;
IF M1M2>17.4997 THEN DECM1M2=1;ELSE DECM1M2=0;
SAIDA=SQRESO || SQTUK || M(1,1) || M(2,1) || M1M2 || MSTUKEY ||
    RVM ||
    DECRVM || SIGMAMAN || SIGMATUK || DECTUK || SIGMARVM ||DECM1M2;
OUTPUT SAIDA OUT = STAT1;
END;
DATA STAT1(RFNAME=(COL1=SQRESO COL2=SQTUK COL3=MANDEL1 COL4=MANDEL2
COL5=M1M2 COL6=QMTUKEY COL7=RAZAQVM COL8=DECRVM COL9=VARMAND
COL10=VARTUKFY COL11=DECTUK COL12=VARRVM COL13=DECM1M2));
SET STAT1;
PROC UNIVARIATE PLOT;
PROC FREQ;
    TABLES DECRVM*DECTUK ;
PROC FREQ;
    TABLES DECM1M2*DECTUK;
PROC FREQ;
    TABLES DECM1M2*DECRVM;
PROC DELETE DATA = OADDS STAT1 ;
%
MACRO PARAMTS
    RETAIN NB 1
           NT 1
           TETA 0;
%
MACRO TITULO
    TITLE NB=1 NT=1 TETA=0 REP=1;
%

```

APÊNDICE F

PROGRAMA UTILIZADO NA AMOSTRAGEM EM POPULAÇÕES FINITAS (BASIC)

```

50  AT=""
60  INDIMP=0
70  COUNT=0
80  BUFFERS=""
90  IP=0
1000 INPUT "NUMERO DE BLOCOS "; IB
1010 INPUT "NUMERO DE COLUMNS "; IC
1020 INPUT "NUMERO DE AMOSTRAS"; NAM
1030 DIM Y(IB,IC,IC),S(1B),I(1B),P(1B,IC),AMOST(1B,IC),T1(1B)
1040 OPEN "I",#1,"POPUL.DAT"
1050 FOR I=1 TO 1B
1060 FOR K=1 TO IC
1070 FOR J=1 TO IC
1080 INPUT#1,Y(I,J,K)
1090 NEXT J
1100 NEXT K
1110 NEXT I
1120 IF EOF(1) GOTO 1115
1140 GOTO 1070
1150 CLOSE#1
1160 OPEN "O",#2,"MULT1.DAT"
1170 OPEN "O",#3,"MULT2.DAT"
1180 REM *****
1190 REM      CALCULO DO FATORIAL DE IC
1200 REM *****
1210 IFAT=1
1220 FOR I=1 TO IC
1230 IFAT = IFAT*I
1240 NEXT I
1250 REM *****CALCULO DO NUMERO DE AMOSTRAS POSSIVEIS*****
1260 N = IFAT / IB
1270 REM ***** APRESENTACAO DOS DADOS ORIGINAIS *****
1280 PRINT "DADOS ORIGINAIS"
1290 FOR I= 1 TO 1B
1300 FOR K= 1 TO IC
1310 FOR J= 1 TO IC
1320 PRINT USING "#####";Y(I,J,K);
1330 NEXT J
1340 PRINT
1350 NEXT K
1360 NEXT I
1370 PRINT "APERTE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR"
1380 SACS= INPUT$(1)
1390 PRINT ATAT
1400 PRINT N
1410 DIM PERMUT(IFAT,IC)
1420 IF IFAT= 2 THEN GOSUB 3070
1430 IF ATAT=1 THEN GOSUB 1000

```

(CONTINUAÇÃO).

```

3940 IF IFAT= 24 THEN GOSUB 11000
3945 IF IFAT= 1100 THEN GOSUB 14000
4080 DIM RB(NAM)
4070 RH(1) = INT((RND*RN)+1)
5000 FOR I= 2 TO NAM
5010 RH(I) = INT((RND*RN)+1)
5020 FOR J=1 TO I-1
5030 IF RH(I)=RH(J) THEN GOTO 5010
5040 NEXT J
5050 NEXT I
5080 FOR I= 1 TO NAM
5090 GOSUB 6000
5093 NEXT I
5094 CLOSE#2
5095 CLOSE#3
5096 END
6000 REM *****SUBROTINA PARA RETIRAR AMOSTRAS *****
6005 RR=RH(I)
6010 SH(1) = RR-1#
6020 FOR J= 1 TO IR-1
6030 UR=SH(J)/IFAT
6040 SH(J+1) = INT(UR)
6050 TW(J) = SH(J)-SH(J+1)*IFAT+1
6060 IF J< IR-1 THEN GOTO 6080
6070 TW(J+1)=SH(J+1)+1#
6080 NEXT J
6090 FOR J=1 TO IR
7000 TW(IR+1-J)=TW(J)
7010 NEXT J
7020 FOR K=1 TO IR
7030 ZH = INT(RN)
7040 FOR J = 1 TO IC
7050 P(K,J)=PERMUT(ZH,J)
7060 NEXT J
7060 NEXT K
7070 FOR K=1 TO IR
8000 FOR J=1 TO IC
8010 Z1=P(K,J)
8020 AMOST(K,J) = Y(K,J,Z1)
8030 Y1=AMOST(K,J)
8040 IP=IP+1
8044 BUFFER5=BUFFER5 + @A +STR5(I) + @B +STR5(K)+ @C+STR5(Z1)+@D+STR5(Y1)
8046 COUNT=COUNT+1
8048 IF IP=4 THEN GOSUB 16090
8050 IF COUNT>500 THEN INDIMP=1
8060 NEXT J
8070 NEXT K
8080 RETURN
8090 REM ***** SUBROTINA P/ MONTAR A MATRIZ DE PERMUTAÇÕES P/ 2 TRAT *****
9000 IP=0
9010 FOR I=1 TO 2
9020 FOR J=1 TO 2
9030 IF J=1 THEN GOTO 9070

```

<CONTINUAÇÃO>.

```

9040   IN = IN + 1
9050   PERMUT(IN,1) = I
9060   PERMUT(IN,2) = J
9070   NEXT J
9080   NEXT I
9090   RETURN
10000  REM *** SUBROTINA P/ MONTAR A MATRIZ DE PERMUTAÇÕES P/ 3 TRAT ***
10010  IN = 0
10020  FOR I=1 TO 3
10030  FOR J=1 TO 3
10040  IF J=I THEN GOTO 10130
10050  FOR K=1 TO 3
10060  IF K=I THEN GOTO 10120
10070  IF K=J THEN GOTO 10120
10080  IN=IN+1
10090  PERMUT(IN,1) = I
10100  PERMUT(IN,2) = J
10110  PERMUT(IN,3) = K
10120  NEXT K
10130  NEXT J
10140  NEXT I
10150  RETURN
11000  REM *** SUBROTINA P/ MONTAR A MATRIZ DE PERMUTAÇÕES P/ 4 TRAT ***
11010  IN = 0
11020  FOR I= 1 TO 4
11030  FOR J= 1 TO 4
11040  IF J=I THEN GOTO 12000
11050  FOR K= 1 TO 4
11060  IF K=I THEN GOTO 12000
11070  IF K=J THEN GOTO 12000
11080  FOR L=1 TO 4
11090  IF L=I THEN GOTO 12070
12000  IF L=J THEN GOTO 12070
12010  IF L=K THEN GOTO 12070
12020  IN=IN+1
12030  PERMUT(IN,1)= I
12040  PERMUT(IN,2)= J
12050  PERMUT(IN,3)= K
12060  PERMUT(IN,4)=L
12070  NEXT L
12080  NEXT K
12090  NEXT J
12095  NEXT I
12099  RETURN
14000  REM *** SUBROTINA P/ MONTAR A MATRIZ DE PERMUTAÇÕES P/ 5 TRAT ***
14010  IN=0
14020  FOR I=1 TO 5
14030  FOR J=1 TO 5
14040  IF J=I THEN GOTO 14060
14050  FOR K=1 TO 5
14060  IF K=I THEN GOTO 14090
14070  IF K=J THEN GOTO 14090

```

(CONTINUAÇÃO).

```

15000 FOR L=1 TO 5
15010 IF L=I THEN GOTO 16040
15020 IF L=J THEN GOTO 16040
15030 IF L=K THEN GOTO 16040
15040 FOR N=1 TO 5
15050 IF N=I THEN GOTO 16030
15060 IF N=J THEN GOTO 16030
15070 IF N=K THEN GOTO 16030
15080 IF N=L THEN GOTO 16030
15090 IM=IN+1
15100 PERMUT(IN,1)=I
15110 PERMUT(IN,2)=J
15120 PERMUT(IN,3)=K
15130 PERMUT(IN,4)=L
15140 PERMUT(IN,5)=M
15150 NEXT M
15160 NEXT L
15170 NEXT K
15180 NEXT J
15190 NEXT I
15200 RETURN
16000 REM ***** SUBROTINA *****
17000 IF INDIR=0 THEN PRINT#2, BUFFERS ELSE PRINT#3, BUFFERS
17010 BUFFERS=""
17020 IP=0
17030 RETURN

```

REFERENCIAS

- CARVALHO, J. F.(1977) - "Data Analysis of Multiway Tables". Tese de Doutoramento, Ames, Iowa.
- CORNFIELD, J.(1944) - "On Samples from Finite Populations". Journal of the American Statistical Association 39: 236-239.
- ECKART, C. and YOUNG, G.(1936) - "The Aproximation of One Matrix by Another of Lower Rank". Psychometrika 1: 211-218.
- EDEN, T. and YATES, F.(1933) - "On the Validity of Fisher's Z-test when Applied to An Actual Sample of Non-Normal Data". Journal of Agricultural Science 23: 6-16.
- FISHER, R.A.(1926) - "The Arrangement of Field Experiments". Journal of Ministry of Agriculture 33: 503-513 .
- FISHER, R.A.(1935) - "The Design of Experiments". Oliver & Boyd : Edinburgh.
- GABRIEL, K.R.(1978) - "Least Squares Aproximation of Matrices by Additive and Multiplicative Models". Journal of the American Statistical Society, série B, 40, nº 2: 186-196.
- GHOSH, M.N. and SHARMA, D.(1963) - "Power of Tukey's Teste for Non-Additivity". Journal of the Royal Statistical Society, série B, 25, nº1 : 213-219.
- JOHNSON, D. and GRAYBILL, F.A. (1972) - "Analysis of a Two-Way Model With Interaction and No Replication". Journal of the American Statistical Association 67: 862-868.
- KEMPTHORNE, O.(1952) - "The Design and Analysis of Experiments. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- KEMPTHORNE, O.(1955) - "The Randomization Theory of Experimental Inference". Journal of the American Statistical Association 50:872-888.

- MANDEL, J. (1969) - "The Partitioning of Interaction in Analysis of Variance". Journal of Research of the National Bureau of Standards, série B, 73: 309-328.
- MILLIKEN, G.A. and GRAYBILL, F.A. (1970) - "Extensions of the General Linear Hypothesis Model". Journal of the American Statistical Association 65: 797-807.
- MILLIKEN, G.A. and GRAYBILL, F.A. (1971) - "Tests for Interaction in Two Way Model with Missing Data". Biometrics, volume 27, n° 4: 1079-1083.
- NEYMAN, J., IWASZKIEWICZ, K., KOŁODZIEJCZYK, S. (1935) - "Statistical Problems in Agricultural Experimentation". Journal of the Royal Statistical Society, suppl. 2: 107-154.
- SCHEFFÉ, H. (1959) - "The Analysis of Variance". John Wiley & Sons, New York.
- TUKEY, J.W. (1949) - "One Degree of Freedom for Non-Additivity". Biometrics 5: 232-242.