

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – IMECC
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O Produto Triplo de Jacobi
Aspectos Analítico e Combinatório

Dissertação de Mestrado

SANDRA REGINA DE OLIVEIRA

Orientador: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

CAMPINAS

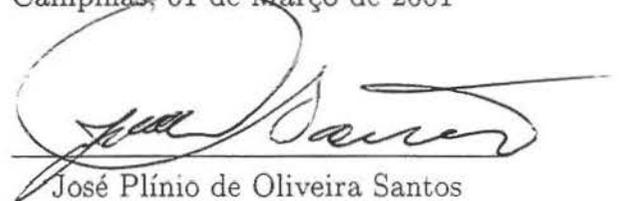
01 de Março de 2001



**O Produto Triplo de Jacobi
Aspectos Analítico e Combinatório**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Sandra Regina de Oliveira e aprovada pela comissão julgadora

Campinas, 01 de Março de 2001



José Plínio de Oliveira Santos
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 José Plínio de Oliveira Santos
- 2 Chaim Samuel Hönig
- 3 Caio José Coletti Negreiros

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 01 de março de 2001 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof (a). Dr (a). CHAIM SAMUEL HÖNIG



Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLETTI NEGREIROS

Senhor, fazei-me instrumento de vossa paz.

*Onde houver ódio, que eu leve o amor,
onde houver ofensa, que eu leve o perdão,
onde houver discórdia, que eu leve a união,
onde houver erro, que eu leve a verdade,
onde houver desespero, que eu leve a esperança,
onde houver tristeza, que eu leve alegria,
onde houver trevas, que eu leve a luz.*

*Ó mestre, fazei que eu procure mais,
consolar que ser consolado,
compreender que ser compreendido,
amar que ser amado.*

*Pois é dando que se recebe,
é perdoando que se é perdoado,
e é morrendo que se vive
para a vida eterna...*

(São Francisco de Assis)

Dedico este trabalho as pessoas mais importantes da
minha vida:
Aos meus pais, Luiz e Maria e ao meu noivo José Carlos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de eterna sabedoria, e à Nossa Senhora, mãe amada, que intercedeu por mim em todos os momentos.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Prof. Dr. José Plínio, pela paciência, amizade e incentivo.

Agradeço a CAPES, pelo suporte financeiro, que possibilitou a minha dedicação exclusiva aos estudos.

Agradeço aos professores e amigos da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, instituição na qual me graduei, agradeço em especial ao Prof. Dr. Paulo Mondek, pelas suas valiosas sugestões.

Agradeço também aos professores e funcionários do IMECC, em especial à Prof^a Dr^a Claudina Izepe, e aos funcionários Ednaldo e Flávio.

Aos amigos que ganhei em Campinas, em especial aos amigos do GOU (Grupo de Oração Universitário), aos amigos do predinho do IMECC, em especial as amigas: Irene, Roseli, Lucelina e Lúcia, que sempre estiveram comigo, principalmente nos momentos mais difíceis que aqui passei.

Agradeço a todas as pessoas que de um modo ou outro me apoiaram e acreditaram em mim, agradeço as orações da amiga Édita e de um modo especial as orações de meus pais.

Enfim agradeço ao meu noivo, José Carlos, que sofreu junto comigo a distância, que soube falar as palavras certas na hora certa, que me incentivou e acreditou nesse amor.

Conteúdo

Abstract	x
Resumo	xi
1 Introdução	1
2 Notação e resultados básicos	5
2.1 Introdução	5
2.2 Conceitos e Notações	5
2.3 Teorema de Tannery.	7
3 Prova mista da Identidade do Produto Triplo de Jacobi	10
3.1 Introdução	10
3.2 Demonstração	10
4 Prova combinatória de J. Zolnowsky	17
4.1 Introdução	17
4.2 Teorema dos Números Pentagonais de Euler	18
4.3 Prova combinatória	23
5 Prova combinatória de E.M. Wright	33
5.1 Introdução	33
5.2 Prova combinatória	33
6 Polinômio de Gauss e a Identidade de Jacobi	39
6.1 Introdução	39
6.2 Caminhos reticulados	39
6.3 Polinômio de Gauss	42
6.4 Teorema q -binomial	46
6.5 Aplicação do Teorema q -binomial na prova da Identidade de Jacobi	48

Abstract.

We present many proofs, specially the ones of combinatorial nature, for an important identity of Jacobi, given below, and a few applications

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n, \quad \text{for } |q| < 1 \text{ and } x \neq 0.$$

Resumo:

São apresentadas várias provas, principalmente de natureza combinatória, de uma importante Identidade de Jacobi, dada abaixo, e várias aplicações

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n, \quad \text{for } |q| < 1 \quad \text{and } x \neq 0.$$

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho iremos apresentar uma identidade que originou-se do estudo da Teoria de Funções Elípticas, a qual em suas ramificações tem sido objeto de estudo há pelo menos dois séculos. Os matemáticos que mais contribuíram para seu desenvolvimento foram: Euler, Gauss, Abel e Jacobi. Neste século esta teoria foi incorporada dentro da Teoria de Curvas Elípticas a qual foi recentemente usada por Andrew Wiles para provar o “Último Teorema de Fermat”.

Estudando a teoria de funções elípticas Jacobi descobriu uma importante identidade, que expressa uma soma infinita em termos de produto infinito,

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n, \quad \text{para } |q| < 1 \text{ e } x \neq 0.$$

a qual é conhecida como “Identidade do Produto Triplo de Jacobi”. Este resultado foi publicado por Jacobi em 1829 em seu famoso livro “Fundamenta Nova Theoriae et Functionum Ellipticarum”.

Um fato histórico interessante sobre a “Identidade do Produto Triplo” é que ela foi descoberta independentemente por três matemáticos: Jacobi, Abel e Gauss. Não se sabe ao certo quem a descobriu primeiramente, já que em 1829, ano da morte de

Abel, Jacobi publicou o seu livro o qual continha esta identidade e o trabalho de Abel foi publicado entre os anos de 1827 a 1829. Gauss ao que parece descobriu esta identidade e a deixou repousando sobre seus papéis por um quarto de século antes que Jacobi e Abel também se deparassem com ela.

A Identidade do Produto Triplo de Jacobi é uma identidade analítica que expressa uma soma infinita como um produto infinito e que tem sido muito importante em teoria dos números.

Uma das aplicações da Identidade de Jacobi vista neste trabalho é uma das demonstrações mais simples do “Teorema dos Números Pentagonais de Euler”; uma outra importante aplicação, é que ela permite expressar as seguintes funções theta

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \text{sen}(2n+1)z \\ \theta_2(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z \\ \theta_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz \\ \theta_4(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz \end{array} \right.$$

em termos de produtos infinitos, simplesmente efetuando-se uma troca de variáveis na Identidade de Jacobi. Desta maneira obtém-se

$$\theta_1(z, q) = 2q^{1/4} \text{sen} z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n})$$

$$\theta_2(z, q) = 2q^{1/4} \cos z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n})$$

$$\theta_3(z, q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n-1} \cos 2z + q^{4n-2})$$

$$\theta_4(z, q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n-1} \cos 2z + q^{4n-2})$$

Também fará parte do conteúdo desse trabalho diversas aplicações da Identidade do Produto Triplo além de várias demonstrações da mesma.

Fornecemos, a seguir, uma breve descrição de cada capítulo.

No capítulo 2, introduzimos, notação e conceitos básicos, incluindo um resultado conhecido como Teorema de Tannery.

Uma prova mista da Identidade do Produto Triplo de Jacobi é apresentada no capítulo 3.

Fornecemos, no capítulo 4, uma demonstração combinatória para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler, dada originalmente por Franklin. A prova combinatória de J. Zolnowsky que é apresentada neste capítulo é análoga a aquela dada por Franklin para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler.

No capítulo 5, apresentamos a prova combinatória da Identidade de Jacobi dada por E.M. Wright.

Os importantes polinômios de Gauss são apresentados no capítulo 6, através de uma interpretação combinatória utilizando caminhos reticulados. Encontramos também neste capítulo, uma das provas mais simples para a Identidade de Jacobi.

No capítulo 7, fornecemos duas provas combinatórias da Identidade do Produto triplo de Jacobi, a prova de R.P. Lewis e a prova de R. Chapman.

A única demonstração da Identidade de Jacobi puramente analítica neste trabalho é apresentada no capítulo 8.

No capítulo 9, reunimos algumas das várias aplicações da Identidade de Jacobi,

destacando dentre elas, uma das provas mais simples dada ao Teorema dos Números Pentagonais de Euler, e a obtenção das funções theta em termos de produtos infinitos.

Capítulo 2

Notação e resultados básicos

2.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos, notação e conceitos básicos, de análise e Teoria dos Números, que são utilizados nos capítulos seguintes.

2.2 Conceitos e Notações

Definição 2.1: Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$, tal que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$. Os λ_i são chamados partes da partição. Às vezes denotamos por $(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ uma partição de $n = \sum_{i=1}^r \lambda_i$

Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n . Tem-se por exemplo, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$. As 5 partições de 4 são

$$4, 3+1, 2+2, 2+1+1 \text{ e } 1+1+1+1.$$

Completamos a definição de $p(n)$ para todo inteiro n pondo $p(n) = 0$ para $n < 0$, e definimos como $p(0) = 1$ pelo fato de que $\lambda_i = 0$ forma a única partição de $n = 0$.

É claro (da definição) que, numa partição de n , nenhuma parte supera n , e que a ordem das partes não está sendo considerada.

Pode-se representar uma partição de n por um conjunto de n pontos no plano dispostos em linhas correspondentes às partes e ajustadas às esquerda. Cada linha tem o número de pontos igual à parte a ela associada e que não supera ao número de cada linha superior. Esta representação é conhecida como *Gráfico de Ferrers*.

Por exemplo, o gráfico de Ferrers da partição $4 + 3 + 1 + 1$ de 9 é

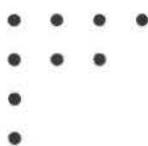
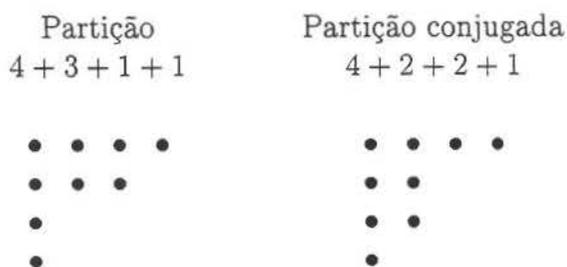


Figura 1

Se na representação gráfica de uma partição de n trocarmos as linhas pelas colunas, obtemos uma outra partição de n chamada de *conjugada* da partição considerada.

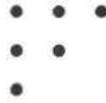
Por exemplo, a partição conjugada para a partição $4 + 3 + 1 + 1$ de 9 é a partição $4 + 2 + 2 + 1$. Elas possuem as seguintes representações gráficas.



Definição 2.2: Dizemos que uma partição é *autoconjugada* se ela for igual à sua conjugada.

Por exemplo, $3 + 2 + 1$ é uma partição autoconjugada, como se pode observar pela sua representação gráfica:

Partição
3 + 2 + 1



Euler foi o primeiro a observar que a função geradora para $p(n)$, o número de partições irrestrita de n , é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \quad \text{onde } p(0) = 1. \quad (2.1)$$

Encontramos uma demonstração combinatória dessa identidade em Santos [14].

Definição 2.3: Definimos para $a, q \in \mathbb{C}$ e $|q| < 1$ os seguintes elementos.

- (i) $(a)_n = (a; q)_n = (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})$
- (ii) $(a)_\infty = (a; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n$
- (iii) $(a)_0 = 1$

2.3 Teorema de Tannery.

Apresentamos a demonstração do teorema de Tannery pelo fato de não ser encontrada na maioria dos livros de análise real ou complexa. Esta demonstração se encontra em [13].

É importante mencionar que este resultado é uma versão discreta do Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Teorema de Tannery: Se $F(n) = \sum_{r=0}^N u_r(n)$ onde N é infinito ou uma função de n que tende para infinito com n , e se

(i) $u_r(n)$ tende para v_r quando n tende para infinito para todo valor de r ,

(ii) $|u_r(n)| \leq M_r$ onde M_r é um número positivo independente de n para todo r ,

(iii) a série $\sum_{r=0}^{\infty} M_r$ é convergente,

então $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \sum_{r=0}^{\infty} v_r$.

Prova. Como $|u_r(n)| \leq M_r$ e $u_r(n)$ tende para v_r , quando n tende para infinito segue-se que $|v_r| \leq M_r$ para todo r , e portanto $\sum_{r=0}^{\infty} v_r$ é absolutamente convergente.

Agora dado $\varepsilon > 0$, escolha m , um inteiro positivo, tal que

$$\sum_{r=m+1}^{\infty} M_r < \varepsilon/2$$

e seja n tomado de tal forma que $N > m$.

Escreva

$$F(n) - \sum_{r=0}^{\infty} v_r = \alpha + \beta + \gamma,$$

onde

$$\alpha = \sum_{r=0}^m (u_r(n) - v_r), \quad \beta = \sum_{r=m+1}^N u_r(n), \quad \gamma = - \sum_{r=m+1}^{\infty} v_r$$

Então

$$|\beta| \leq \left| \sum_{r=m+1}^N u_r(n) \right| \leq \sum_{r=m+1}^N |u_r(n)| \leq \sum_{r=m+1}^N M_r \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} M_r < \varepsilon/2$$

e

$$|\gamma| = \left| - \sum_{r=m+1}^{\infty} v_r \right| \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} |v_r| \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} M_r < \varepsilon/2$$

Observe que o valor de m depende unicamente da série $\sum_{r=0}^{\infty} M_r$ que é também independente de n . Havendo escolhido m como acima, e tendo o fixado, e fazendo n tender para o infinito temos que α tende a zero. Então

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) - \sum_{r=0}^{\infty} v_r \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e como ε pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, segue o resultado.

Capítulo 3

Prova mista da Identidade do Produto Triplo de Jacobi

3.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo uma prova do Produto Triplo de Jacobi na qual utilizamos argumentos de natureza algébrica e combinatória.

Esta prova ilustra dois pontos:

O primeiro é o poder do argumento simétrico como por exemplo mostrado pela simetria entre $f(x)$ e $f(xq)$, o que nos conduz a equação (3.4).

O segundo é que “boas provas” são frequentemente híbridas. Neste caso uma junção de um argumento puramente algébrico, que nos leva a equação (3.4), e um argumento combinatório utilizado na prova do Lema 3.2.

3.2 Demonstração

Teorema 3.1: (Identidade Produto Triplo de Jacobi).

Para $|q| < 1$ e $x \neq 0$, temos que

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n$$

Prova:

Consideramos $f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}) = (1 + xq)(1 + xq^2) \dots (1 + x^{-1})(1 + x^{-1}q)(1 + x^{-1}q^2) \dots$. Como $|q| < 1$ este produto infinito é convergente para todo $x \neq 0$.

Como f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ poderá ser expandida como uma série de Laurent em x .

O coeficiente de cada potência de x será uma função de q , isto é,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n = a_n(q) \quad (3.1)$$

A simetria dessa função nos fornece muitos detalhes sobre estes coeficientes. Em particular temos:

$$\begin{aligned} f(xq) &= (1 + xq^2)(1 + xq^3)(1 + xq^4) \dots (1 + x^{-1}q^{-1})(1 + x^{-1})(1 + x^{-1}q) \dots \\ &= \left[\frac{1 + x^{-1}q^{-1}}{1 + xq} \right] (1 + xq)(1 + xq^2)(1 + xq^3) \dots (1 + x^{-1})(1 + x^{-1}q)(1 + x^{-1}q^2) \dots \\ &= \left[\frac{(xq + 1)}{xq} \frac{1}{(1 + xq)} \right] f(x) \\ &= x^{-1}q^{-1}f(x) \end{aligned}$$

Assim

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n q^n = f(xq) = x^{-1}q^{-1}f(x) = x^{-1}q^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{n-1} q^{-1}$$

Portanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n q^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{n-1} q^{-1} \quad (3.2)$$

Comparando os coeficientes de x^n em ambos os lados da equação (3.2) temos

$$a_n q^{n+1} = a_{n+1} \quad (3.3)$$

Se conhecessemos a_0 , poderíamos obter a_n para n positivo da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_1 &= qa_0, & a_2 &= q^2 a_1 = q^2 q^1 a_0 = q^{1+2} a_0 = q^3 a_0, \\ a_3 &= q^3 a_2 = q^3 (q^{1+2} a_0) = q^{1+2+3} a_0 = q^6 a_0, \dots, \\ a_n &= q^n a_{n-1} = q^{1+2+\dots+n} a_0 = q^{n(n+1)/2} a_0 \end{aligned}$$

Podemos também obter a_n para n negativo. Reescrevendo a equação (3.3) como

$$a_{n-1} = q^{-n} a_n, \quad \text{temos}$$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= q^0 a_0 = a_0, & a_{-2} &= q^1 a_{-1} = qa_0, & a_{-3} &= q^2 a_{-2} = q^{1+2} a_0 = q^3 a_0, \\ \dots, & a_{-n} &= q^{n-1} a_{-n+1} = q^{1+2+\dots+(n-1)} a_0 = q^{(-n)(-n+1)/2} a_0 \end{aligned}$$

Logo para n positivo

$$a_n = q^{n(n+1)/2} a_0$$

e para n negativo

$$a_{-n} = q^{(-n)(-n+1)/2} a_0$$

Dessa forma temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^{n(n+1)/2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{-n(-n+1)/2} x^{-n} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} q^{-n(-n+1)/2} x^{-n} \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variável $-n = n$ temos

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n + a_0 \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n(n+1)/2} x^n \\
 &= a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n(n+1)/2} x^n \right) \\
 &= a_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Obtenção de a_0

Sabemos que a_0 é o coeficiente de x^0 na expansão do produto infinito $(1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)\dots(1+x^{-1})(1+x^{-1}q)\dots$, isto é, a_0 consiste daqueles termos em que as potências de x se cancelam. Observamos que para que isto ocorra devemos tomar o mesmo número de termos xq^i do primeiro produto infinito e de $x^{-1}q^j$ do segundo produto infinito.

Assim a_0 é uma série de potências em q , onde o coeficiente de q^m é o número de maneiras de obtermos q^m tomando termos distintos xq^i do primeiro produto infinito e um igual número de termos distintos $x^{-1}q^j$ do segundo produto infinito, de tal forma que as somas das potências de q seja igual a m .

Por exemplo: o coeficiente de q^3 em a_0 é 3 que resulta dos 3 seguintes produtos

$$xq^3 \times x^{-1} = q^3, \quad xq^2 \times x^{-1}q = q^3, \quad xq \times x^{-1}q^2 = q^3.$$

O coeficiente de q^4 em a_0 é 5 pois:

Existem 4 maneiras de obtermos q^4 tomando um termo do primeiro produto infinito e um termo do segundo produto infinito

$$xq^4 \times x^{-1} = q^4, \quad xq^3 \times x^{-1}q = q^4, \quad xq \times x^{-1}q^3 = q^4, \quad xq^2 \times x^{-1}q^2 = q^4.$$

Existe uma maneira de obtermos q^4 tomando dois termos de cada produto infinito

$$xq \times xq^2 \times x^{-1} \times x^{-1}q = q^4.$$

Portanto o coeficiente de q^4 é igual a 5 que é o total de maneiras de escrevermos 4 como soma de elementos distintos tomados do conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ mais um igual número de elementos distintos tomados do conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$.

No Lema abaixo explicitamos esta técnica para o cálculo dos coeficientes de q em a_0 .

Lema 3.1: O coeficiente $a_0(q)$ é uma série de potências em q

$$a_0 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m$$

onde b_m é o número de maneiras de representarmos m como uma soma de elementos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$ mais um igual número de elementos distintos do conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Calculando os primeiros termos dessa série temos que

$$a_0 = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots$$

A sequência dos coeficientes nesta expansão nos sugere o seguinte resultado.

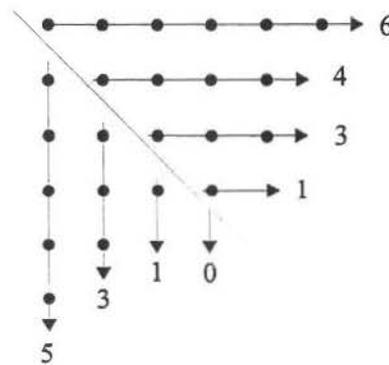
Lema 3.2. O coeficiente de q^m em $a_0(q)$ é o número de partição de m .

Prova: Teremos que provar que o número de partições de m é igual ao número de maneiras de representarmos m como soma de inteiros distintos positivos mais um igual número de inteiros distintos não negativos.

Provamos isto construindo uma correspondência 1 – 1 entre as partições de m e as representações de m como soma de inteiros distintos positivos mais um igual número de inteiros distintos não negativos.

Dada uma partição de m considere seu gráfico de Ferrers. Traçamos uma linha diagonal exatamente abaixo dos pontos da diagonal principal. Agora associamos ao número de pontos contidos em cada linha vertical abaixo desta linha diagonal, aos inteiros não negativos e aos pontos em cada linha horizontal acima desta linha diagonal, aos inteiros positivos.

Para clarearmos o procedimento descrito acima, consideremos a partição $6 + 5 + 5 + 4 + 2 + 1$ de 23 e seu gráfico de Ferrers.



Representamos 23 como $6 + 4 + 3 + 1$ (soma de inteiros distintos positivos) mais $5 + 3 + 1 + 0$ (o mesmo número de termos de inteiros distintos não negativos). É fácil ver que este processo é reversível nos fornecendo dessa maneira a bijeção desejada.

□

Assim usando o Lema 3.2 temos que $a_0(q)$ é a função geradora para partições, isto é,

$$a_0 = \sum_{m=0}^{\infty} p(m)q^m = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j}$$

Substituindo a_0 em (3.4) temos

$$f(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n$$

ou seja,

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n$$

o que conclui a demonstração do Teorema 3.1.

Capítulo 4

Prova combinatória de J. Zolnowsky

4.1 Introdução

Uma possível interpretação da Identidade de Jacobi é equivalente a afirmação de que o número de partições de um inteiro Gaussiano $r + si$ em um número ímpar de inteiros Gaussianos $p + qi$ distintos e não nulos tais que $|p - q| \leq 1, p \geq 0, q \geq 0$, é igual ao número de partições em um número par de tais inteiros Gaussianos, exceto quando r e s são números triangulares consecutivos.

A prova dessa equivalência é análoga a prova combinatória do Teorema dos Números Pentagonais de Euler, dada originalmente por Franklin. Por essa razão apresentamos neste capítulo esta prova dada por Franklin, para os Números Pentagonais de Euler.

Mencionamos que o Teorema dos Números Pentagonais de Euler, pode ser provado como uma simples aplicação da Identidade do Produto Triplo de Jacobi, que é feito no capítulo 9.

4.2 Teorema dos Números Pentagonais de Euler

Teorema 4.1: (Teorema dos Números Pentagonais de Euler):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j (X^{j(3j+1)/2} + X^{j(3j-1)/2}) \quad (4.1)$$

Daremos, uma interpretação combinatória para o produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n)$$

para que possamos, então, fornecer a demonstração dada por Franklin para (4.1), a qual usa somente argumentos combinatórios. Legendre observou que (4.1) é equivalente à seguinte igualdade

$$q^e(n) - q^o(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } n = j(3j \pm 1)/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $q^e(n)$ é o número de partições de n em um número par de partes distintas e $q^o(n)$ o número de partições de n em um número ímpar de partes distintas.

Sabemos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + X^n)$$

é função geradora para partições em partes distintas. Isto nos diz, por exemplo, que o coeficiente de X^6 nesta expansão sendo igual a 4 existem exatamente 4 partições de 6 em partes distintas, a saber, 6, 5 + 1, 4 + 2, 3 + 2 + 1. Já na expansão de

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n)$$

o coeficiente de X^6 é nulo. É fácil verificar isto pois na expansão de

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n)$$

o produto de um número par de potências distintas de X terá sempre sinal positivo enquanto que o produto de um número ímpar de potências de X terá sempre sinal negativo. Como as partições com um número par de partes distintas resultam do produto de um número par de potências distintas e, analogamente, as partições com um número ímpar de partes distintas resultam do produto de um número ímpar de potências distintas, o coeficiente de X^n será igual a $q^e(n) - q^\theta(n)$. No exemplo que tomamos, temos duas partições com um número par de partes distintas $5 + 1$ e $4 + 2$ e duas em número ímpar de partes distintas 6 e $1 + 2 + 3$. Por isto o coeficiente de X^6 é zero na expansão de

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n).$$

Com estas considerações fica claro que, como observou Legendre, a expressão (4.1) nos diz que

$$q^e(n) - q^\theta(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } n = j(3j \pm 1)/2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o que equivale dizer que os número $q^e(n)$ e $q^\theta(n)$ são iguais exceto quando n é da forma $j(3j \pm 1)/2$ caso em que $q^e(n)$ irá superar $q^\theta(n)$ por uma unidade para j par, ou $q^\theta(n)$ irá superar $q^e(n)$ por uma unidade para j ímpar.

Apresentamos, agora, a demonstração dada por Franklin em 1881. A idéia é a de construir uma correspondência 1 – 1 entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas.

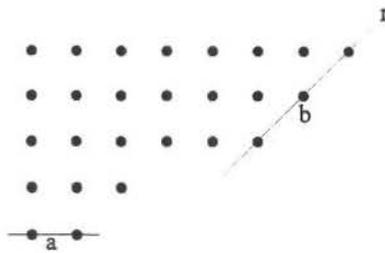


Figura 1

Utilizamos a representação gráfica para estas partições em que todas as partes são distintas. Nesta representação as partes estão em ordem decrescente. Vamos chamar de a a menor parte desta partição e de b , o número de pontos sobre a linha r mostrada na Figura 1

No caso $a \leq b$ como na Figura 1, podemos remover os “ a ” pontos da menor parte e colocá-los ao lado dos primeiros “ a ” pontos da linha r , como mostra a Figura 2

Com esta mudança temos agora uma nova partição de n (observe que temos ainda diferentes partes e elas estão dispostas em ordem decrescente) com diferente paridade, isto é, se o número de partes era par, após a operação torna-se ímpar, e vice-versa. Chamamos a atenção para o fato de que se o número “ a ” fosse igual a “ b ” a mudança acima ainda teria sido possível.

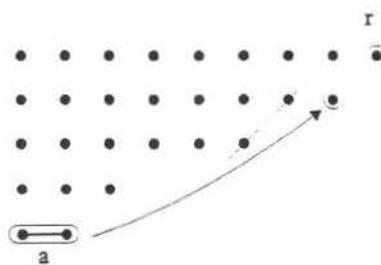


Figura 2

Examinemos, agora, o caso em que $a > b$. Vejamos um exemplo gráfico como o mostrado na Figura 3.

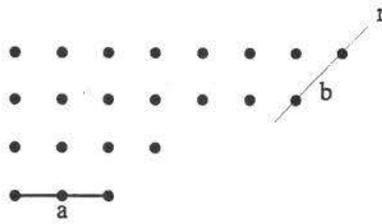


Figura 3

Num caso como este podemos tomar os “ b ” pontos da linha r e colocá-los abaixo dos “ a ” pontos obtendo uma nova partição com diferente paridade quanto ao número de partes. Nesta nova partição continuamos com partes distintas e colocadas em ordem decrescente como podemos ver na Figura 4.

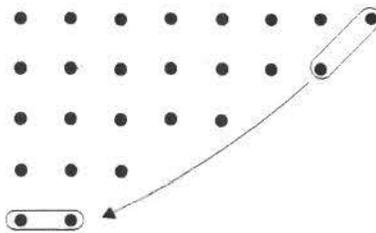


Figura 4

É claro que quando uma das duas transformações descritas acima puder ser executada teremos uma correspondência entre um elemento enumerado por $q^e(n)$ e outro enumerado por $q^o(n)$.

Na realidade estas duas transformações não podem ser sempre executadas.

Existem exatamente dois casos, ilustrados nas Figuras 5 e 6, em que a linha r contém um ponto da menor parte. Isto ocorre quando $a = b$ ou $a = b + 1$.

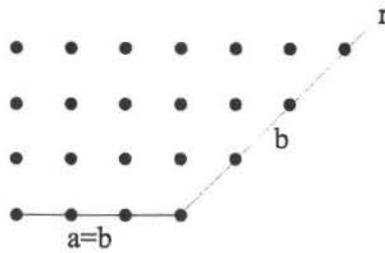


Figura 5

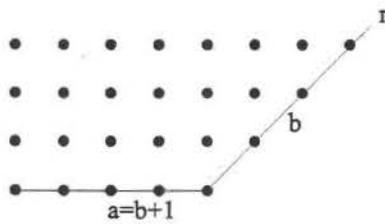


Figura 6

É fácil ver que nos exemplos das Figuras 5 e 6 não podemos executar nenhuma das duas transformações descritas. Lembre-se que executada uma destas transformações devemos ter “diferentes partes” e dispostas em “ordem decrescente”.

Nas figuras 5 e 6 temos

$$n = a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + (b - 1)) = \frac{b(2a + b - 1)}{2}$$

Logo, caso tenhamos uma situação semelhante à da Figura 6, isto é, $a = b + 1$ teremos,

$$n = \frac{b(3b + 1)}{2}$$

Neste caso se b , o número de partes, for par, teremos $q^e(n) - q^0(n) = 1$ e se b for ímpar, teremos $q^e(n) - q^0(n) = (-1)$, isto é, teremos exatamente uma partição com

um número par (ímpar) de partes excedendo aquelas com um número ímpar (par) de partes.

No caso da Figura 5, sendo $a = b$ teremos

$$n = \frac{b(3b - 1)}{2}$$

e a mesma análise feita acima será válida, ou seja, $q^e(n) - q^o(n) = (-1)^b$, o que conclui a demonstração. \square

4.3 Prova combinatória

Na prova que daremos a seguir obtida originalmente por Zolnowsky [22], serão utilizados, como já mencionamos, argumentos semelhantes aos da prova que acabamos de apresentar dos Números Pentagonais de Euler. Se na Identidade de Jacobi dada no Teorema 3.1 fizermos a substituição q por q^2 e após x por $-zq^{-1}$ vemos que podemos reescrevê-la como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}z)(1 - q^{2n-1}z^{-1})(1 - q^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^n \quad (4.2)$$

Agora a partir de (4.2) fizermos as substituições $q^2 = uv$, $z^2 = u/v$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^{\infty} [1 - (uv)^{(n-1/2)}(uv^{-1})^{1/2}][1 - (uv)^{(n-1/2)}(uv^{-1})^{-1/2}][1 - (uv)^n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (uv)^{n^2/2} (uv^{-1})^{n/2} \end{aligned}$$

isto é,

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 - u^{n-1/2+1/2}v^{n-1/2-1/2}][1 - u^{n-1/2-1/2}v^{n-1/2+1/2}][1 - u^n v^n]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Simplificando a igualdade acima temos

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 - u^n v^{n-1}] [1 - u^{n-1} v^n] [1 - u^n v^n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{n(n-1)/2} \quad (4.3)$$

Considerando a série infinita $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{n(n-1)/2}$ como somas de duas séries infinitas, e trocando a variável n por $-n$ obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{n(n-1)/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^{n(n+1)/2} v^{n(n-1)/2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u^{n(n-1)/2} v^{n(n+1)/2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[u^{\binom{n+1}{2}} v^{\binom{n}{2}} + u^{\binom{n}{2}} v^{\binom{n+1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Assim temos

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 - u^n v^{n-1}] [1 - u^{n-1} v^n] [1 - u^n v^n] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[u^{\binom{n+1}{2}} v^{\binom{n}{2}} + u^{\binom{n}{2}} v^{\binom{n+1}{2}} \right] \quad (4.4)$$

A expressão (4.4) pode ser interpretada da seguinte maneira:

Teorema 4.2: O número de partições de um inteiro Gaussiano $r + si$ em um número ímpar de partes distintas de inteiros Gaussianos não nulos $p + qi$ tais que $|p - q| \leq 1, p \geq 0, q \geq 0$ é igual ao número de partições em um número par de tais inteiros Gaussianos, exceto quando r e s são números triangulares consecutivos.

A prova do Teorema 4.2 que fornecemos a seguir, como já mencionamos, apresenta grande analogia com a demonstração dada no início do capítulo por Franklin para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler.

A idéia principal consiste na utilização de algumas transformações que são definidas na representação gráfica que serão definidas a seguir.

Sudler [18], Sylvester [21] e Wright [23] usaram este método para provar outras identidades as quais combinadas algebricamente produz a identidade acima.

Cheema [7], enunciou o Teorema 4.2 em termos de partições de vetores, e sugeriu para uma prova usar estas transformações.

Iremos definir alguns conceitos que serão usados na demonstração desse Teorema.

Dizemos que um inteiro Gaussiano é real-dominante (balanceado, imaginário-dominante) se sua componente real for maior do que (igual a, menor do que) sua componente imaginária.

No que segue estaremos lidando com partições de um inteiro Gaussiano qualquer o qual é um real-dominante ou balanceado, já que pela troca das componentes qualquer partição de um imaginário-dominante, corresponde unicamente para uma partição com o mesmo número de partes de um real-dominante.

Dizemos que uma partição de um inteiro gaussiano tem paridade ímpar (par) se ela tiver um número ímpar (par) de partes.

Definiremos uma representação gráfica de uma partição (de partições como especificadas no teorema) de um inteiro gaussiano $r+si$ da seguinte maneira: Cada parte $p+qi$ da partição será representada por uma coluna de “ p ” pontos acima de uma linha horizontal e de “ q ” pontos abaixo dessa linha. Usaremos duas linhas verticais para separar as partes da partição em três classes. A real-dominante à esquerda, a balanceada no centro e a imaginária-dominante à direita. Dentro de cada classe as partes serão ordenadas da esquerda para direita por componentes decrescentes.

Por exemplo: A partição $13+11i = (3+2i) + (2+i) + 1 + (3+3i) + (1+i) + (3+4i)$

a representação gráfica dessa partição é dada na figura 1.

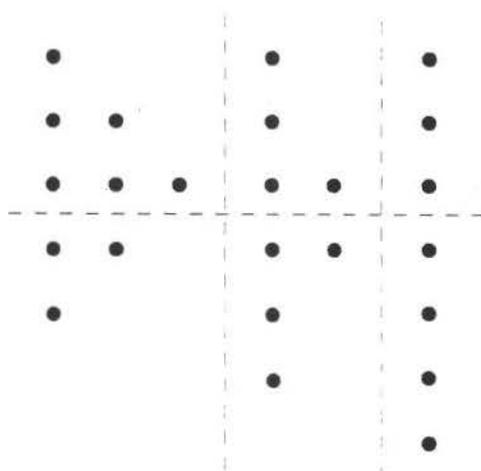


Figura 1

Definimos como sendo a altura de uma parte a sua componente real, isto é, o número de pontos acima da linha horizontal.

Definimos como sendo a inclinação do gráfico a parcela do lado esquerdo sobre uma linha que passa junto a diagonal rumo ao lado direito e para o centro de uma parte a outra, partindo do ponto mais alto ou do ponto mais baixo, como mostra o exemplo da figura 2.

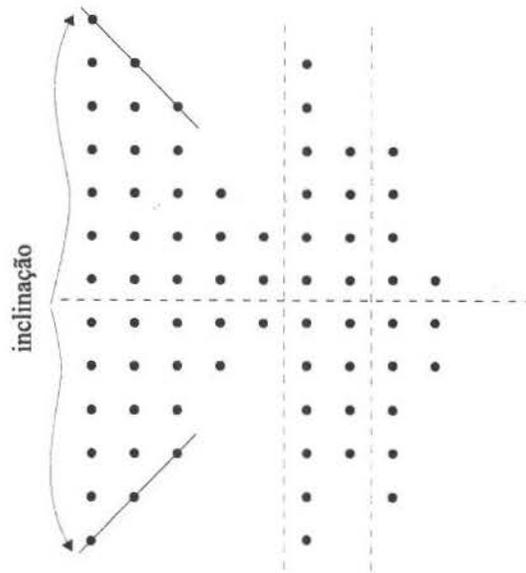


Figura 2

Observe que as partes que encontram a inclinação são todas adjacentes. Em geral cada parte que encontra a inclinação a encontra em dois pontos como visto no exemplo da figura 2, existe uma exceção no caso em que todas as partes colocadas à esquerda encontram a inclinação, e a menor parte encontra a inclinação em apenas um ponto, isto é, a menor parte tem um ponto acima e nenhum ponto abaixo da linha horizontal, como mostra o exemplo da figura 3.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SECÃO CIRCULANTE

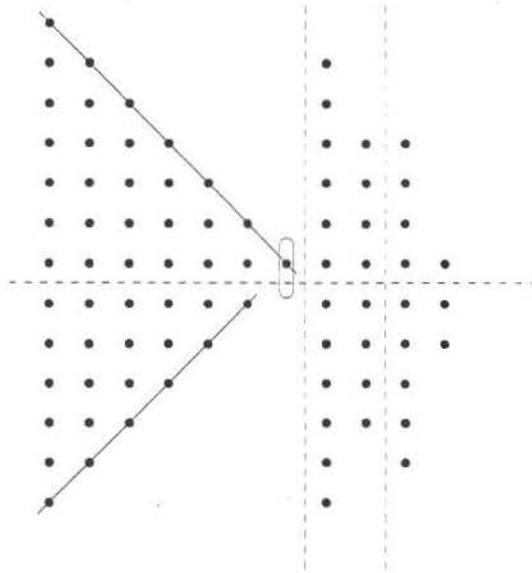


Figura 3

Diferenciamos estes dois casos dizendo que no primeiro caso a inclinação é destacável, e no segundo caso a inclinação é não destacável. Uma inclinação vazia definiremos como sendo não destacável. Observe que se a inclinação é não destacável, saberemos que altura da maior parte a esquerda é a mesma que o número de partes a esquerda.

Definiremos como sendo o comprimento da inclinação, o número de pontos na inclinação que estão acima da linha horizontal, isto é, o número de partes que encontra a inclinação.

Por exemplo na figura 2 o comprimento da inclinação é três já na figura 3 o comprimento da inclinação é sete.

Por conveniência usaremos as seguintes notações:

LS para denotar o comprimento da inclinação

HL para denotar a altura da maior parte a esquerda (zero se a classe esquerda for vazia).

HM para denotar a altura da menor parte do centro (infinito se a classe central for vazia).

HR para denotar a altura da menor parte a direita (infinito se a classe a direita for vazia).

Agora daremos quatro regras para manipulações feitas nas representações gráficas que em geral transforma uma representação gráfica em outra de paridade oposta.

Regra 1: condição: $LS \geq HM$ (observe que esta condição ocorre somente quando a classe central é não vazia).

Modificação: transfere a menor parte do centro e a coloca fora da antiga inclinação para criar uma nova inclinação (figura 4).

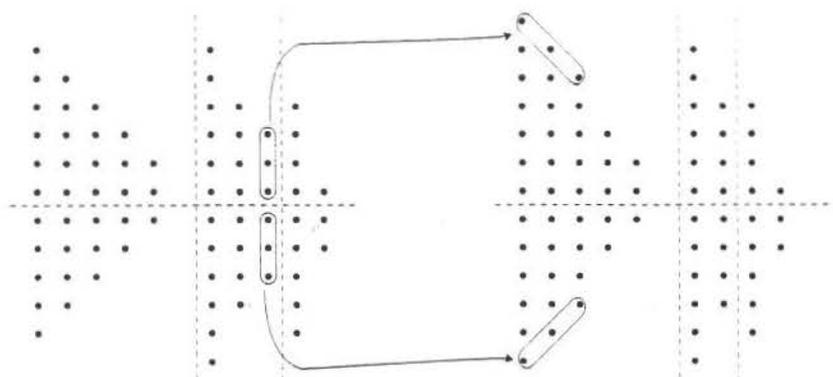


Figura 4

Regra 2: Condições: $LS < HM$ e a inclinação destacável.

Modificação: transfere a inclinação e cria uma nova parte no centro com altura LS que agora será a menor parte do centro (figura 5).

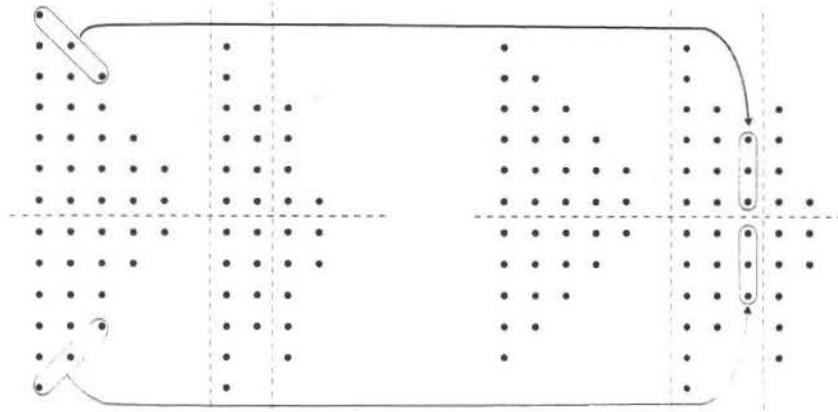


Figura 5

Regra 3: Condições: $LS < HM$, inclinação é não destacável e $HM \leq HL + HR$ com classe central não vazia.

Modificação: Remova a menor parte do centro e crie uma nova parte à esquerda e uma nova parte à direita.

A nova parte à esquerda terá altura 1 mais do que a antiga HL .

A nova parte à direita é formada da “sobra” e terá uma altura menor do que a antiga HR , logo será a menor parte à direita (figura 6).

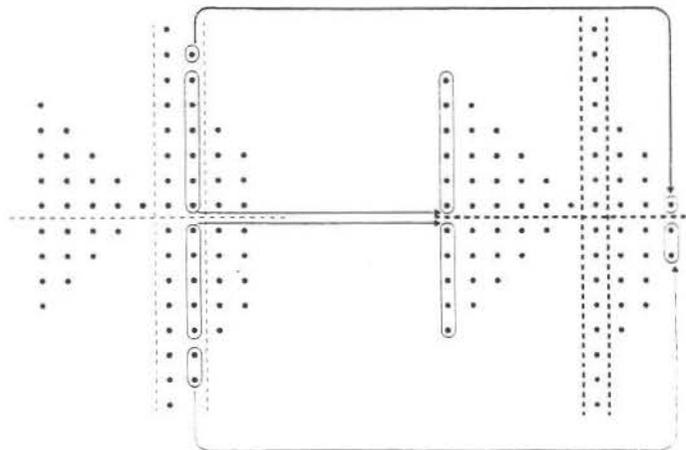


Figura 6

Regra 4: Condições: $LS < HM$ a inclinação é não destacável e $HM > HL + HR$, com a classe direita não vazia.

Modificação: Unir a maior parte da esquerda e a menor parte da direita para formar uma nova parte menor no centro (figura 7).

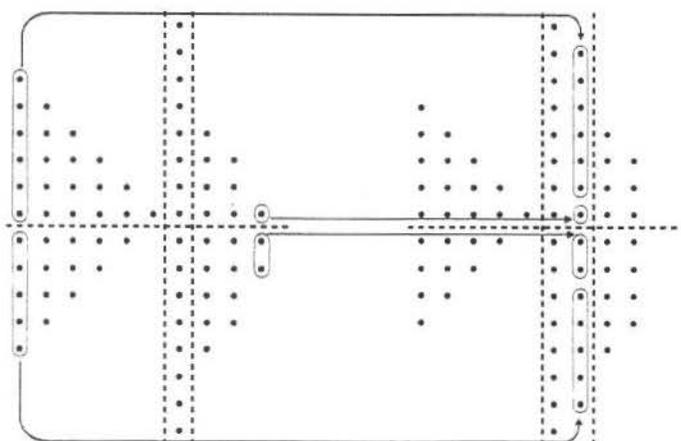


Figura 7

É claro que as regras acima são mutuamente exclusiva, isto é, uma representação gráfica poderá satisfazer as condições de no máximo uma das regras.

Há também uma correspondência entre as regras 1 e 2, e 3 e 4, isto é, tomando uma representação gráfica e modificando-a por uma das regras encontraremos as condições da outra regra correspondente, e sendo aplicada esta regra correspondente retornaremos a representação gráfica original.

Por exemplo, na figura 4 a representação gráfica sobre o lado esquerdo é modificada pela regra 1, resultando na representação gráfica dada pela figura 5, esta segunda representação gráfica satisfaz as condições da regra 2, então aplicando a regra 2 retornaremos ao gráfico original.

As representações gráficas que não satisfazem nenhuma das condições das regras 1-4 são caracterizadas por possuírem centro e classe direita vazias, e inclinação não destacável. Pois supondo que uma representação não satisfaz nenhuma das condições das regras 1-4, teremos que a não aplicabilidade das regras 1 e 2 significa que a representação gráfica deve ter $LS < HM$ e inclinação não destacável, agora a não aplicabilidade das regras 3 e 4 significa que nem HM e nem HR podem ser finita, portanto o centro e a classe direita devem ser vazias.

Assim qualquer representação com centro e classe direita vazia, e inclinação não destacável representa uma partição de um inteiro Gaussiano $r + si$ onde r e s são números triangulares consecutivos.

Com isso concluí-se a demonstração. □

Capítulo 5

Prova combinatória de E.M. Wright

5.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar mais uma prova combinatória da Identidade de Jacobi na qual não faremos uso de análise e de funções geradoras.

Estabelecemos uma correspondência 1 – 1 a fim de provar que o número de partições do número bi-partido (n, m) em partes distintas das formas $(a, a - 1), (b - 1, b)$ para $a, b = 1, 2, \dots$, é igual ao número de partições do número $k = n - \frac{1}{2}(n - m)(n - m + 1)$.

5.2 Prova combinatória

A Identidade de Jacobi dada na equação (4.2) pode ser reescrita como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - Q^{2n})(1 + Q^{2n-1}T)(1 + Q^{2n-1}T^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} Q^{r^2} T^r \quad (5.1)$$

válido para $|Q| < 1$ e $T \neq 0$, bastando substituir z por $-T$ e q por Q .

Utilizaremos (5.1) na seguinte forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + Q^{2n-1}T)(1 + Q^{2n-1}T^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} Q^{r^2}T^r \prod_{n=1}^{\infty} (1 - Q^{2n})^{-1} \quad (5.2)$$

Tomando $X = QT$ e $Y = QT^{-1}$ temos:

$$X^n Y^{n-1} = Q^n T^n Q^{n-1} T^{-n+1} = Q^{2n-1} T \quad (5.3)$$

$$X^{n-1} Y^n = Q^{n-1} T^{n-1} Q^n T^{-n} = Q^{2n-1} T^{-1} \quad (5.4)$$

e

$$\begin{aligned} X^{\frac{r(r+1)}{2}} Y^{\frac{r(r-1)}{2}} &= Q^{\frac{r^2+r}{2}} T^{\frac{r^2+r}{2}} Q^{\frac{r^2-r}{2}} T^{-\frac{r^2-r}{2}} \\ &= Q^{\frac{r^2+r+r^2-r}{2}} T^{\frac{r^2+r-r^2+r}{2}} \\ &= Q^{r^2} T^r \end{aligned} \quad (5.5)$$

Substituído (5.3), (5.4) e (5.5) em (5.2) obtemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + X^n Y^{n-1})(1 + X^{n-1} Y^n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X^{r(r+1)/2} Y^{r(r-1)/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n Y^n)^{-1}, \quad (5.6)$$

O lado esquerdo de (5.6) é a função geradora de $\alpha(n, m)$, o número de partições do número bi-partido (n, m) em partes distintas

$$(a, a-1), (b-1, b) \quad \text{onde } a, b = 1, 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

Igualando o coeficiente de $X^n Y^m$ em cada lado de (5.6) obtemos que:

No lado esquerdo o coeficiente é o número $\alpha(n, m)$ e no lado direito é $p(N)$, lembrando que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - X^n Y^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) X^n Y^n$, onde $p(n)$ é o número de partições de n .

Temos desta forma

$$\begin{aligned} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X^{r(r+1)/2} Y^{r(r-1)/2} \prod_{N=1}^{\infty} (1 - X^N Y^N)^{-1} &= \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} X^{r(r+1)/2} Y^{r(r-1)/2} \right) \\ &= \left(\sum_{N=0}^{\infty} p(N) X^N Y^N \right) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} p(N) X^{N+r(r+1)/2} Y^{N+r(r-1)/2} \end{aligned}$$

Teremos o coeficiente de $X^n Y^m$ quando:

$$\begin{aligned} n &= N + \frac{1}{2}r(r+1) \\ m &= N + \frac{1}{2}r(r-1) \end{aligned}$$

Subtraíndo membro a membro temos que $n - m = \frac{1}{2}r(r+1) - \frac{1}{2}r(r-1)$, isto é, $n - m = r$, logo, $N = n - \frac{1}{2}(n - m)(n - m + 1)$.

Portanto $p(n - \frac{1}{2}(n - m)(n - m + 1))$ é o coeficiente de $X^n Y^m$ no lado direito de (5.6).

Igualando o coeficiente em cada lado de (5.6) temos:

$$\alpha(n, m) = p(n - \frac{1}{2}(n - m)(n - m + 1)), \quad (5.8)$$

onde $p(k) = 0$ se $k < 0$.

A equação (5.8) por ser uma igualdade de natureza combinatória deverá admitir uma prova direta independente de análise e função geradora preferencialmente através de correspondência 1-1 entre as partições enumeradas por $\alpha(n, m)$, e aquelas enumeradas pelo lado direito de (5.8); Fornecemos tal prova a seguir.

Sem perda de generalidade devido a simetria podemos supor que $n \geq m$.

A cada partição de $(n, n - r)$ em partes distintas $(a, a - 1), (b - 1, b)$ onde $a, b = 1, 2, 3, \dots$ corresponde de maneira única uma expressão de n da forma

$$n = \sum_{t=1}^{v+r} a_t + \sum_{t=1}^v (b_t - 1) \quad \begin{array}{l} 1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \dots \\ 1 \leq b_1 < b_2 < b_3 \dots \\ \text{para algum } v \geq 0 \end{array} \quad (5.9)$$

Pois precisamos tomar r partes a mais do tipo $(a, a - 1)$ do que do tipo $(b - 1, b)$ para se formar partições de números da forma $(n, n - r)$. Assim para provarmos a expressão (5.8) basta exibirmos uma correspondência 1-1 entre as partições de $k = n - \frac{1}{2}(n - m)(n - m + 1)$ e uma expressão de n da forma (5.9).

Escrevendo $r = n - m$ temos $k = n - \frac{1}{2}r(r + 1)$ e o lado direito de (5.8) é $p(k)$.

Se $k < 0$ isto é $n < \frac{r(r + 1)}{2}$ então $p(k) = 0$ e não existem soluções de (5.9), já que $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$, então

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_r \geq 1 + 2 + 3 + \dots + r = \frac{r(r + 1)}{2}$$

Se $k = 0$, isto é, $n = \frac{r(r + 1)}{2}$, então $p(k) = p(0) = 1$ e existe exatamente uma solução de (5.9), a saber, quando $v = 0$ e $a_t = t$.

Supondo então $k > 0$ considere uma partição qualquer de k e a representação gráfica usual, onde cada linha do diagrama representa uma parte e as partes estão em ordens não crescente (por exemplo como na figura 1)

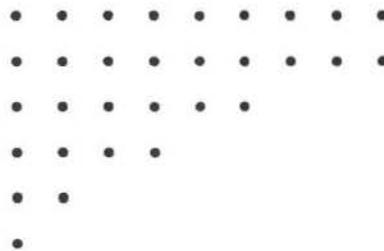


Figura 1

Fazemos a seguinte modificação:

Numa linha acima do diagrama colocamos um triângulo retângulo constituído de r linhas de pontos, na qual a mais baixa é formada de r pontos.

Por exemplo se $r = 2$ (utilizando a figura 1) nossa figura se torna contendo $k + \frac{1}{2}r(r + 1) = n$ pontos no total, como visto na figura 2

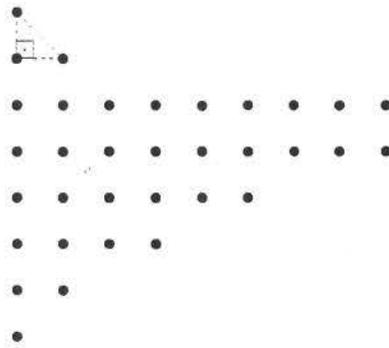


Figura 2

Apartir de uma meia unidade acima do ponto mais alto traça-se uma linha diagonal como mostrada na figura 3, separando os pontos em 2 conjuntos

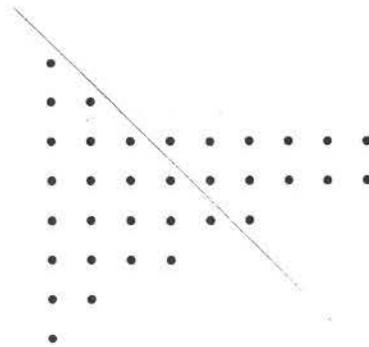


Figura 3

O conjunto abaixo da linha diagonal constitui de $r + v$ colunas para algum $v \geq 0$ (em nosso diagrama $v = 3$) onde cada uma contendo números diferentes positivos de pontos (porque por construção a inclinação esta na extremidade mais alta).

Os números em cada uma dessas colunas serão os valores de $a_{v+r}, a_{v+r-1}, \dots, a_2, a_1$ em (5.9).

À direita da diagonal existem v linhas em que cada uma contém números não-negativos distintos de pontos (a menor linha pode ser vazia). Os números em cada uma dessas linhas serão os valores de $b_v - 1, b_{v-1} - 1, \dots, b_1 - 1$.

Obtemos então dessa forma a expressão

$$n = \sum_{t=1}^{v+r} a_t + \sum_{t=1}^v b_t - 1 \quad \begin{array}{l} 1 \leq a_1 < a_2 < \dots \\ 1 \leq b_1 < b_2 < \dots \end{array}$$

O processo acima pode ser desfeito da seguinte maneira, partindo de uma solução de (5.9), construímos um diagrama como o do diagrama da Figura 3, e retiramos os $\frac{r(r+1)}{2}$ pontos que formam no topo do diagrama um triângulo retângulo.

Obtemos assim uma representação gráfica usual de uma partição de k .

Esta correspondência é claramente 1-1, o que conclui a demonstração. \square

Esta prova direta de (5.8) é claramente mais longa do que a dedução de (5.8) a partir de (5.2), mas os passos da prova que apresentamos podem ser revertidos e (5.2) pode ser deduzida a partir de (5.8). Dessa forma teremos uma prova combinatória da Identidade de Jacobi.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Capítulo 6

Polinômio de Gauss e a Identidade de Jacobi

6.1 Introdução

Introduzimos neste capítulo, os importantes polinômios de Gauss através de uma interpretação combinatória utilizando caminhos reticulados.

O polinômio de Gauss é conhecido como coeficiente q -binomial por causa de seu importante papel em uma generalização do Teorema binomial.

Apresentamos neste capítulo uma das provas mais simples da Identidade de Jacobi que é uma aplicação direta do Teorema q -binomial, e que já era conhecida por Gauss (1866) e por Cauchy (1843).

6.2 Caminhos reticulados

Sabemos que uma das maneiras de interpretarmos o coeficiente binomial $\binom{m+n}{m}$ é como o número total de maneiras de selecionarmos m objetos de um conjunto de $m+n$ objetos. Mas também existem outras maneiras equivalentes de interpretarmos este coeficiente binomial.

Vamos nos restringir no que segue, a caminhos reticulados (usualmente no reticulado \mathbb{Z}^2).

De quantas maneiras podemos passar da origem $(0, 0)$ para o ponto (n, m) , onde m e n são inteiros não negativos, se cada passo é uma unidade para norte ou para direita (leste)?

Tomamos um total de $m + n$ passos, exatamente m desses passos devem ir para o norte, sendo tomados em qualquer posição.

Assim do conjunto de $m + n$ passos, podemos selecionar qualquer m deles para serem os passos para o norte.

Logo teremos $\binom{m+n}{m}$ caminhos diferentes que partem da origem até o ponto (n, m) com as restrições dadas. Na figura 1 tomamos o caminho reticulado de $(0, 0)$ para $(6, 5)$ onde o 1º, 4º, 6º, 9º e 10º passos são para norte.

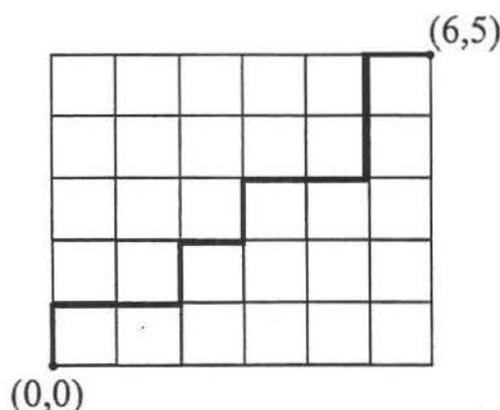


Figura 1

Também podemos representar nossos passos como uma sequência de 0s e 1s, onde 0 representa passos para o norte, e 1 passos para o leste.

O caminho reticulado que tomamos corresponde a seguinte sequência 01101011001.

Existem 30 quadrados no retângulo que delimitam possíveis caminhos reticulados de $(0,0)$ para $(6,5)$. Cada caminho reticulado exceto os dois correspondentes às sequências 00000111111 e 11111100000, separa este diagrama em 2 regiões: uma acima e outra abaixo do caminho. Se colocarmos pontos dentro de cada quadrado que esta acima do caminho reticulado, obtemos uma representação gráfica de uma partição.

Ao caminho reticulado da figura 1 temos a representação gráfica da partição $5 + 5 + 3 + 2$ de 15 (figura 2).

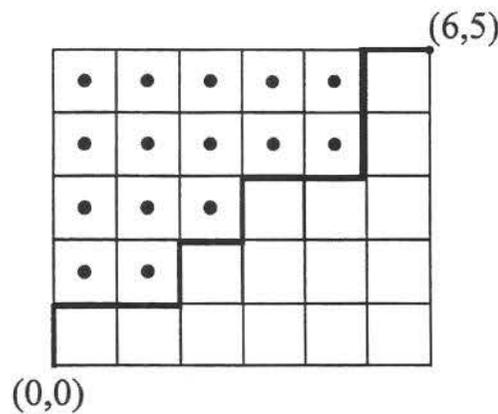


Figura 2

Observamos que:

Os caminhos reticulados de $(0,0)$ para $(6,5)$ representam partições com, no máximo, 5 partes e cada parte menor do que ou igual a 6.

A correspondência é 1 – 1, pois cada partição em no máximo 5 partes com cada parte menor do que ou igual a 6 define um único caminho reticulado de $(0,0)$ para $(6,5)$.

A proposição seguinte nos mostra que este resultado vale em geral.

6.3 Polinômio de Gauss

Proposição 6.1: O número total de partições em, no máximo, m partes com cada parte menor do que ou igual a n é igual a $\binom{m+n}{m}$.

Esta proposição sugere uma generalização para o coeficiente binomial.

Em vez de contarmos o número total de partições em, no máximo, m partes com cada parte menor do que ou igual a n , consideramos a função geradora dessas partições.

Como não podemos ter mais do que $m \cdot n$ pontos no diagrama, o coeficiente será zero quando a potência de q for maior do que $m \cdot n$. O coeficiente de $q^{m \cdot n}$ é 1, pois existe exatamente uma partição de $m \cdot n$ que se ajusta dentro desse retângulo.

Isto nos diz que a função geradora é um polinômio mônico de grau $m \cdot n$.

Por exemplo para $m = 5$ e $n = 6$ o polinômio é

$$\begin{aligned} f_{6,5}(q) = & 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 10q^6 + 12q^7 + 16q^8 + 19q^9 + 23q^{10} + \\ & 25q^{11} + 29q^{12} + 30q^{13} + 32q^{14} + 32q^{15} + 32q^{16} + 30q^{17} + 29q^{18} + \\ & 25q^{19} + 23q^{20} + 19q^{21} + 16q^{22} + 12q^{23} + 10q^{24} + 7q^{25} + 5q^{26} \\ & + 3q^{27} + 2q^{28} + q^{29} + q^{30}. \end{aligned}$$

Temos duas observações a serem feitas sobre estes polinômios:

A primeira é que eles são *palindromicos*, isto é, os coeficientes são os mesmos não importando a ordem em que lemos.

A segunda é que eles são *unimodais*, isto é, os coeficientes são não decrescente até a ordem menor do que $\frac{m \cdot n}{2}$ e não crescente após esta ordem (esta propriedade foi provada por Sylvestre [20] (1878)).

Ao tomarmos $q = 1$ na função geradora $f_{m,n}(q)$ estaremos somando todos os coeficientes encontrados, tendo assim o número total de partições que se ajustam

dentro do retângulo $m \times n$, isto é, o número total de partições em no máximo m partes com cada parte menor do que ou igual a n , e pelo que já vimos na proposição 6.1, este número é igual a $\binom{m+n}{m}$.

Assim $f_{m,n}(1) = \binom{m+n}{m}$.

Isto quer dizer que nossa função geradora é uma generalização do coeficiente binomial, e por essa razão usaremos uma notação semelhante ao do coeficiente binomial que é:

$$\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]_q \quad \text{em vez de} \quad f_{m,n}(q).$$

É comum também usarmos esta notação sem o subíndice q , isto é, $\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]$.

A função geradora polinomial $\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]_q$ é chamada de *polinômio de Gauss*, por ela ter sido introduzida por Gauss. Gauss descobriu que estes polinômios podem ser escritos como uma razão de produtos, de maneira semelhante aos coeficientes binomiais que são expressos como quocientes de fatoriais.

Proposição 6.2: Se m e n são inteiros positivos então

$$\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{m+n})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{i=1}^m \frac{1-q^{n+i}}{1-q^i} \quad (6.1)$$

Antes de apresentarmos a prova observamos que a expressão (6.1) pode ser escrita como

$$\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]_q = \frac{(q; q)_{m+n}}{(q; q)_m (q; q)_n} = \prod_{i=1}^m \frac{1-q^{n+i}}{1-q^i}$$

e isto implicará imediatamente que $\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]_q = \left[\begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix} \right]_q$. Observamos a semelhança entre esta notação e a do coeficiente binomial como $\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$.

Prova. Esta prova ilustra uma técnica geral de argumentos combinatórios, um procedimento que generaliza prova por indução. A técnica é a seguinte:

Verificaremos que cada lado da equação a ser provada (equação (6.1)) satisfaz a mesma fórmula recursiva e as mesmas condições de fronteira.

Desde que cada lado é unicamente determinado pelos valores de fronteira e pela fórmula recursiva os dois lados devem ser iguais.

Para o nosso problema os valores de fronteiras são para $m = 0$ e para $n = 0$. Em qualquer caso existe exatamente um caminho reticulado de $(0, 0)$ para (n, m) . Todos os passos são para o norte se $n = 0$. Todos os passos são para o leste se $m = 0$. A única partição possível é a partição vazia.

Logo

$$\left[\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right] = 1 \quad (6.2)$$

O coeficiente binomial é completamente determinado pelas condições de fronteira $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$, juntamente com a fórmula recursiva $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m} + \binom{m+n-1}{m-1}$ onde $m, n > 0$.

Existe também uma fórmula recursiva semelhante para os polinômios de Gauss.

Dada uma partição em, no máximo, m partes, cada parte menor do que ou igual a n , existem duas possibilidades mutuamente exclusivas.

1) Todas as partes são estritamente menores do que n , a função geradora para estas partições é:

$$\left[\begin{matrix} m+n-1 \\ m \end{matrix} \right]$$

2) A maior parte é exatamente n , registramos esta parte como q^n , e então observamos que o que resta é uma partição em, no máximo, $m-1$ partes, cada parte menor do que ou igual a n . A função geradora para estas partições é:

$$q^n \left[\begin{matrix} m-1+n \\ m-1 \end{matrix} \right]$$

Isto estabelece a fórmula recursiva

$$\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} m+n-1 \\ m \end{matrix} \right] + q^n \left[\begin{matrix} m+n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right] \quad (6.3)$$

Os polinômios de Gauss são definidos de maneira única pelas condições de fronteira (eq. (6.2)) e a fórmula recursiva (eq. (6.3)).

Verificamos a seguir que o produto,

$$\frac{(q; q)_{m+n}}{(q; q)_m (q; q)_n} \quad (6.4)$$

também satisfaz as mesmas condições de fronteira e a mesma fórmula recursiva (eq. (6.2) e (eq. (6.3))).

Definimos que a expressão (6.4) como sendo igual a 1 quando $m = 0$. Este produto também é igual a 1 quando $n = 0$. Logo satisfaz as mesmas condições de fronteira (eq. (6.2)).

Se o produto satisfaz a mesma fórmula recursiva (eq. (6.3)), então deve ser igual ao polinômio de Gauss.

De fato este produto satisfaz a mesma fórmula recursiva (eq (6.3)). Como

$$\frac{(q; q)_{m+n}}{(q; q)_m (q; q)_n} = \prod_{i=1}^m \frac{(1 - q^{n+i})}{(1 - q^i)}$$

devemos provar que $\prod_{i=1}^m \frac{(1 - q^{n+i})}{(1 - q^i)} = \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_m (q; q)_{n-1}} + q^n \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_{m-1} (q; q)_n}$.

Usando a definição de $(q; q)_m$ temos

$$\begin{aligned}
& \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_m (q; q)_{n-1}} + q^n \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_{m-1} (q; q)_n} = \\
&= \frac{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^{n-1})(1 - q^n) \dots (1 - q^{m+n-1})}{(1 - q) \dots (1 - q^m)(1 - q) \dots (1 - q^{n-1})} + \\
&+ q^n \frac{(1 - q) \dots (1 - q^n)(1 - q^{n+1}) \dots (1 - q^{m+n-1})}{(1 - q) \dots (1 - q^{m-1})(1 - q) \dots (1 - q^n)} \\
&= \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n+1}) \dots (1 - q^{m+n-1})}{(1 - q) \dots (1 - q^m)} + q^n \frac{(1 - q^{n+1}) \dots (1 - q^{m+n-1})(1 - q^m)}{(1 - q) \dots (1 - q^{m-1})(1 - q^m)} \\
&= \frac{(1 - q^{n+1}) \dots (1 - q^{m+n-1})}{(1 - q) \dots (1 - q^m)} [(1 - q^n) + q^n(1 - q^m)] \\
&= \frac{(1 - q^{n+1}) \dots (1 - q^{m+n-1})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^m)} (1 - q^{n+m}) \\
&= \prod_{i=1}^m \frac{(1 - q^{n+i})}{(1 - q^i)}
\end{aligned}$$

Logo o produto satisfaz a mesma fórmula recursiva (eq. (6.3)), o que conclui a demonstração. \square

O polinômio de Gauss é também conhecido como o coeficiente q -binomial por causa de seu papel em uma generalização do teorema binomial $(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$.

6.4 Teorema q -binomial

Teorema 6.1: (O Teorema q -binomial)

Para qualquer inteiro positivo n

$$(1 + xq)(1 + xq^2) \dots (1 + xq^n) = \sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} q^{i(i+1)/2} x^i \quad (6.5)$$

Prova. Ao expandirmos o produto $(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^n)$, obtemos um polinômio em x em que o coeficiente de x^i é um polinômio em q , isto é:

$$(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^n) = \sum_{i=0}^n a_i(q)x^i$$

Por exemplo

$$\begin{aligned} (1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)(1+xq^4) &= 1 + (q + q^2 + q^3 + q^4)x + \\ &+ (q^3 + q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7)x^2 + (q^6 + q^7 + q^8 + q^9)x^3 + q^{10}x^4 \\ &= 1 + (1 + q + q^2 + q^3)qx + (1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4)q^3x^2 + \\ &+ (1 + q + q^2 + q^3)q^6x^3 + q^{10}x^4 \\ &= 1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} qx + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} q^3x^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} q^6x^3 + q^{10}x^4 \end{aligned}$$

O polinômio $a_i(q)$ é a função geradora para partições em exatamente i partes distintas, onde cada parte é menor do que ou igual a n .

Dada uma partição em exatamente i partes distintas, sendo cada parte menor do que ou igual a n , podemos subtrair 1 da menor parte, 2 da segunda menor parte e assim por diante até subtraímos i da maior parte.

Através desse processo obtemos uma partição arbitrária em no máximo i partes, cada parte é menor do que ou igual a $n - i$. Sabemos que a função geradora para estas partições é

$$\begin{bmatrix} i + n - i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}.$$

Como subtraímos $1 + 2 + \dots + i = i(i+1)/2$ de cada partição, então a função geradora para partições em exatamente i partes distintas onde cada parte é menor do que ou igual a n é:

$$a_i(q) = q^{i(i+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix},$$

o que prova o teorema. □

6.5 Aplicação do Teorema q -binomial na prova da Identidade de Jacobi

Apresentamos a seguir uma das demonstrações mais simples para o Produto Triplo de Jacobi, onde faremos uso do Teorema q -binomial.

Se na equação (6.5) tomarmos $n = 2m$ temos:

$$(1 + xq)(1 + xq^2) \dots (1 + xq^{2m}) = \sum_{i=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ i \end{bmatrix} q^{i(i+1)/2} x^i$$

Se substituirmos x por xq^{-m} obtemos:

$$(1 + xq^{1-m})(1 + xq^{2-m}) \dots (1 + xq^0)(1 + xq) \dots (1 + xq^m) = \sum_{i=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i+1)}{2} - mi} x^i$$

Para $0 \leq j \leq m - i$ reescrevemos $(1 + xq^{-j})$ como $xq^{-j}(1 + x^{-1}q^j)$, assim temos:

$$\begin{aligned} & xq^{-m+1}(1 + x^{-1}q^{m-1})xq^{-m+2}(1 + x^{-1}q^{m-2}) \dots x(1 + x^{-1})(1 + xq) \dots (1 + xq^m) = \\ & = \sum_{i=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i+1)}{2} - mi} x^i \end{aligned}$$

Efetuada inicialmente os fatores xq^j no lado esquerdo da igualdade obtemos:

$$\begin{aligned} & x^m q^{-(0+1+\dots+m-2+m-1)}(1 + x^{-1}q^{m-1})(1 + x^{-1}q^{m-2}) \dots (1 + x^{-1})(1 + xq) \dots (1 + xq^m) = \\ & = \sum_{i=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i+1)}{2} - mi} x^i \end{aligned}$$

Como $(0 + 1 + \dots + m - 2 + m - 1) = \frac{m(m-1)}{2}$ temos:

$$\begin{aligned} & x^m q^{-m(m-1)/2} (1 + x^{-1} q^{m-1})(1 + x^{-1} q^{m-2}) \dots (1 + x^{-1})(1 + xq) \dots (1 + xq^m) = \\ & = \sum_{i=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i+1)}{2} - mi} x^i \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $x^{-m} q^{m(m-1)/2}$ obtemos:

$$\begin{aligned} & (1 + x^{-1} q^{m-1})(1 + x^{-1} q^{m-2}) \dots (1 + x^{-1})(1 + xq) \dots (1 + xq^m) = \\ & = \sum_{i=0}^{2m} \begin{bmatrix} 2m \\ i \end{bmatrix} q^{\frac{i(i+1)}{2} - mi + \frac{m(m-1)}{2}} x^{i-m} \end{aligned}$$

Introduzindo uma nova variável para o somatório $j = i - m$ e observando que

$$\begin{aligned} \frac{j(j+1)}{2} &= \frac{(i-m)(i-m+1)}{2} = \frac{i[i-m+1] - m[i-m+1]}{2} = \\ &= \frac{i[(i+1) - m] - m[i - (m-1)]}{2} = \frac{i(i+1) - im - mi + m(m-1)}{2} = \\ &= \frac{i(i+1)}{2} - mi + \frac{m(m-1)}{2} \end{aligned}$$

temos:

$$(1 + x^{-1} q^{m-1})(1 + x^{-1} q^{m-2}) \dots (1 + x^{-1})(1 + xq) \dots (1 + xq^m) = \sum_{j=-m}^m \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j+1)}{2}} x^j$$

ou seja,

$$\prod_{k=1}^m (1 + xq^k)(1 + x^{-1} q^{k-1}) = \sum_{j=-m}^m \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j+1)}{2}} x^j \quad (6.6)$$

(6.6) é uma versão finita do Produto triplo de Jacobi.

Como $\begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{m+j} \frac{1 - q^{m-j+i}}{1 - q^i}$ e $|q| < 1$ temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{m+j} \frac{1 - q^{m-j+i}}{1 - q^i} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i}$$

Assim teremos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m}^m \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j+1)}{2}} x^j$$

então

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i} q^{\frac{j(j+1)}{2}} x^j,$$

onde o processo de limite é justificado pelo Teorema de Tannery.

Capítulo 7

Provas combinatórias de R.P. Lewis e R. Chapman

7.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo duas provas combinatórias da Identidade de Jacobi.

A primeira foi estudada por Sylvester [19], mas Lewis [11] a reescreveu de uma maneira mais clara. Apresentamos a versão de Lewis.

A segunda prova, dada por R. Chapman [16], é relacionada com a de Lewis [11] e Wright [23] apresentada no capítulo 5, mas talvez seja a mais direta delas.

7.2 Prova de R.P. Lewis

A prova combinatória da Identidade de Jacobi que apresentamos aqui é tirada do artigo de Lewis [11]. Mas também é dada por Sylvester [[19], pp. 34-36], a qual Lewis comenta que a descrição feita por Sylvester está um pouco obscura. Também encontraremos uma prova semelhante em MacMahon [[12], §323].

A identidade de Jacobi

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} t^r \quad (7.1)$$

onde q e t são números complexos com $|q| < 1$ e $t \neq 0$, pode ser reescrita como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1}) = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n}} \right) \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} t^r \right) \quad (7.2)$$

Como sabemos, Euler foi o primeiro a observar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot q^n,$$

Assim podemos reescrever (7.2) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1}) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^{2n} \right) \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} t^r \right) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^{2n+r^2} t^r \end{aligned} \quad (7.3)$$

Comparando os coeficientes de $q^N t^k$ em ambos os lados de (7.3), vemos que (7.1) pode ser interpretada da seguinte forma:

Teorema 7.1: Para os inteiros K e N com $N \geq 0$, o número de solução da equação

$$N = (a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (b_1 + \cdots + b_{k_2}) \quad (7.4)$$

em inteiros positivos ímpares a_i, b_j com $a_i > \cdots > a_{k_1}$, $b_1 > \cdots > b_{k_2}$, e com $K_1 - K_2 = K$ é $p(\frac{1}{2}(N - K^2))$.

Assumimos que (7.4) tem exatamente uma solução se $N = K = 0$, e nenhuma solução quando $N = 0$ e $K \neq 0$. Então o teorema é verdadeiro quando $N = K = 0$ (já que $p(0) = 1$), e também é verdadeiro quando $\frac{(N - K^2)}{2} < 0$, isto é quando

$K^2 > N$ (já que $p(n) = 0$ para $n < 0$ e visto que (7.4) não tem solução já que teríamos a soma pelo menos igual a soma dos primeiros $|k|$ inteiros positivos ímpares, a saber K^2 e N não poderia ser menor do que K^2).

Note que, se (7.4) tem uma solução, $N - K^2$ é par.

Antes de provarmos o teorema, faremos algumas observações.

Considere uma representação gráfica de uma partição como por exemplo da partição $9 + 7 + 3 + 1$ de 20

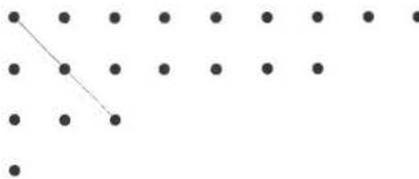


Figura 1

Chamamos de diagonal do diagrama a linha de pontos como a indicada na figura 1.

Utilizaremos também o fato de que partições em partes ímpares distintas possuem uma representação gráfica da forma dada na figura 2. Esta simples representação consiste em uma prova de um resultado conhecido que afirma que o “número de partições em partes ímpares é igual ao número de partições autoconjugadas”.

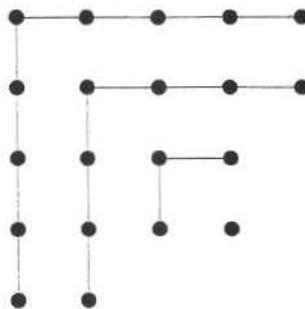


Figura 2

No diagrama da figura 2 estamos representando as partes da partição $9+7+3+1$ pelos pontos conectados pelos segmentos de reta que formam ângulo reto.

Chamamos o diagrama da figura 2 por diagrama *auto-conjugado* da partição (em partes ímpares distintas).

Prova do teorema 7.1:

A prova descreve uma bijeção entre soluções de (7.4) e as partições de $\frac{1}{2}(N - K^2)$.

Assumimos que $K \geq 0$ e $N > 0$.

Dada uma solução de (7.4), traçamos o diagrama auto-conjugado A , da partição $a_1 + \dots + a_{k_1}$, e traçamos o diagrama auto-conjugado B , da partição $b_1 + \dots + b_{k_2}$, onde representamos as partes de B por círculos.

Em seguida sobrepomos em A o diagrama B , da seguinte maneira:

O canto superior esquerdo de B colocamos sobre o ponto $K + 1$ situado na diagonal de A .

Obtemos um diagrama composto de pontos e círculos o qual chamamos de C . Por exemplo, para $N = 38$, $K = 2$ e a solução de (7.4) dada por $38 = (11 + 9 + 5 + 1) + (9 + 3)$, o diagrama C fica:

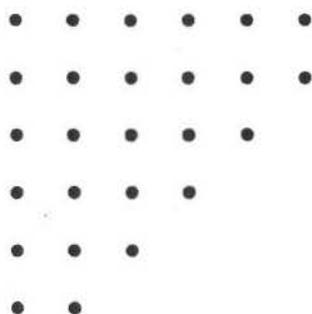


Figura 3: diagrama auto-conjugado A

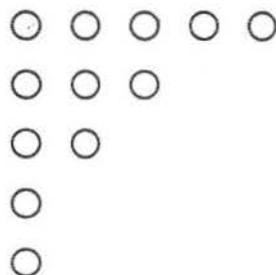


Figura 4: diagrama auto-conjugado B

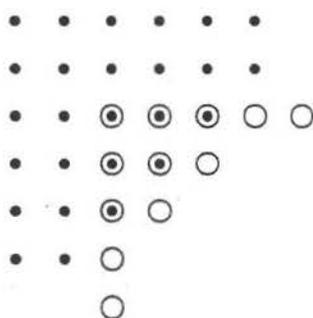


Figura 5: diagrama C

A partir do diagrama C obtemos um novo diagrama D , da seguinte maneira:

Removemos do lado superior esquerdo um quadrado contendo $K \times K$ pontos, e em seguida trocamos \bullet por \circ e \circ por \bullet na diagonal e abaixo da diagonal de C .

Note que após o primeiro passo (a remoção do quadrado) os símbolos restantes na diagonal de C são todos \odot , enquanto no segundo passo \odot permanece \odot .

Para nosso exemplo o diagrama D é dado na figura 6.

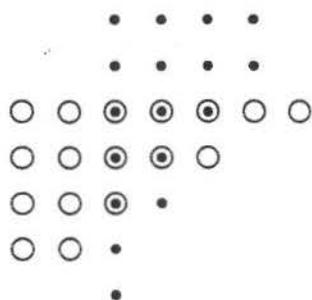


Figura 6: diagrama D

Observamos que o diagrama D é formado pela superposição da representação gráfica de uma partição de $\frac{1}{2}(N - K^2)$ com o diagrama de sua conjugada representada com \circ .

É esta partição que associamos à solução de (7.4) com a qual começamos.

Pelo diagrama D estão associadas a partição $4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ de 17 com a solução de (7.4) dada por $38 = (11 + 9 + 5 + 1) + (9 + 3)$.

A fim de mostrar que temos uma bijeção precisamos provar que esta operação pode ser revertida.

Dada uma partição de $\frac{1}{2}(N - K^2)$, traçamos sua representação gráfica usando \bullet , e sobrepomos sua conjugada usando \circ , deixando vazio um quadrado $K \times K$ no topo esquerdo como mostrado na figura 6. Em seguida trocamos \bullet por \circ e \circ por \bullet na diagonal e abaixo dela, e completamos o quadrado $K \times K$ com \bullet , a figura 5 reaparece, o que nos leva em uma solução de (7.4).

Tomando o mesmo exemplo, isto é, quando $N = 38, k = 2$ e a partição $4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ de $17 = \frac{1}{2}(N - K^2)$ temos:



Figura 7: partição de $\frac{1}{2}(N - K^2)$

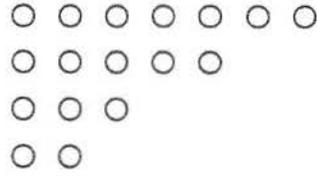


Figura 8: partição conjugada de $\frac{1}{2}(N - K^2)$

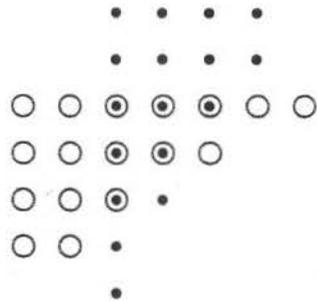


Figura 9: diagrama sobreposto

Fazendo a troca de \bullet por \circ e \circ por \bullet na diagonal e abaixo da diagonal da figura 9 e completando o quadrado $K \times K$ por \bullet obtemos a figura 10 a qual nos dá uma solução de (7.4), dada por $38 = (11 + 9 + 5 + 1) + (9 + 3)$

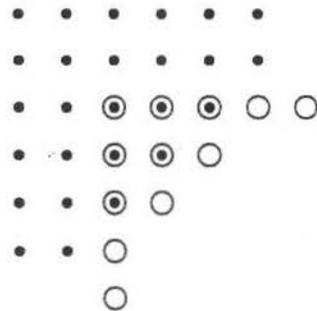


Figura 10

A transformação pode ser também efetuada quando $K < 0$. Aqui colocamos a ilustração do caso $N = 38, k = -2$ e a solução de (7.4) dada por $38 = (9 + 3) + (11 + 9 + 5 + 1)$

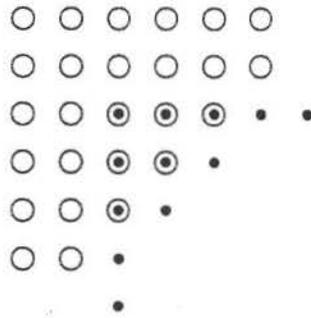


Figura 11: $38 = (9 + 3) + (11 + 9 + 5 + 1)$

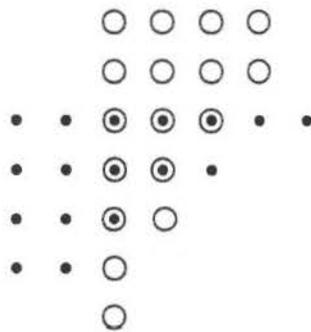


Figura 12: $17 = 7 + 5 + 3 + 2$

Observamos que a imagem de $(b_1 + \dots + b_{k_2}) + (a_1 + \dots + a_{k_1})$ será a conjugada da imagem de $(a_1 + \dots + a_{k_1}) + (b_1 + \dots + b_{k_2})$. A bijeção requerida foi descrita em todos os casos, então o teorema está provado. \square

7.3 Prova de R. Chapman

A Identidade do Produto Triplo de Jacobi

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^{2n-1})(1 + x^{-1}q^{2n-1})(1 - q^{2n}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^m q^{m^2} \quad (7.5)$$

tem sido provada de muitas maneiras diferentes. Em particular diversos autores tem feito provas “bijetivas” ou “combinatórias”.

A prova que daremos a seguir é relacionada com aquelas de Lewis [11] e Wright [23] mas talvez seja a mais direta delas. Esta prova também estabelece a mesma bijeção encontrada na prova de Borcherds “mecânica quântica” (esboçado por Cameron em §13.3 de [6]).

Podemos reescrever (7.5) como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^{2n-1})(1 + x^{-1}q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2n}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^m \cdot q^{m^2} \quad (7.6)$$

o lado direito de (7.6) é igual a

$$\sum_{r=0}^{\infty} p(r)q^{2r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^m q^{m^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(r)x^m q^{m^2+2r} \quad (7.7)$$

onde $p(r)$ denota o número de partições do número r . Seja $A(m, t)$ o coeficiente de $x^m q^t$ no lado esquerdo de (7.6). Então $A(m, t) = |\mathcal{A}(m, t)|$, onde $\mathcal{A}(m, t)$ é o conjunto dos pares ordenados (B, C) dos conjuntos de inteiros positivos ímpares com $|B| - |C| = m$ e $\sum(B) + \sum(C) = t$, onde $\sum(X)$ denota a soma dos elementos de X .

Se B e C são conjuntos finitos de inteiros positivos ímpares, então $|B| - |C|$ tem a mesma paridade que $\sum(B) + \sum(C)$. Também se $|B| - |C| = m$ então um dos conjuntos B e C tem pelo menos $|m|$ elementos e então a soma de seus elementos é pelo menos igual a soma dos primeiros $|m|$ inteiros positivos ímpares, isto é, m^2 .

Então $A(m, t)$ se anula, exceto quando m e t têm a mesma paridade e $t \geq m^2$. Isso segue que (7.6) é equivalente a identidade

$$A(m, m^2 + 2r) = p(r) \tag{7.8}$$

válida para todo inteiro m e todo inteiro $r \geq 0$.

Para estabelecer (7.8) daremos uma bijeção entre $P(r)$, o conjunto das partições de r e $\mathcal{A}(m, m^2 + 2r)$.

Dividiremos em três casos, quando $m = 0$, $m > 0$ e $m < 0$.

Primeiramente consideremos o caso em que $m = 0$.

Representamos um elemento de $P(r)$ por seu diagrama de Ferrers, o qual este diagrama é composto de quadrados de lado unitário.

Dado um diagrama de Ferrers D com r quadrados, traçamos neste diagrama uma diagonal que parte do ponto mais alto à esquerda. Esta diagonal divide o diagrama em duas regiões. A região à direita da diagonal é uma união de K faixas horizontais de altura um, cada uma tendo a forma de um trapézio. Chamaremos as áreas dessas faixas de $\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \dots, \frac{b_k}{2}$, movendo de cima para baixo. Os números b_j formam uma sequência estritamente decrescente de inteiros positivos ímpares. Seja $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$.

Similarmente a região abaixo da diagonal é uma união de k faixas verticais de largura um. Se suas áreas são (movendo da esquerda para direita), $\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}, \dots, \frac{c_k}{2}$, então os c_j formam uma sequência estritamente decrescente de inteiros positivos ímpares. Seja $C = \{c_1, \dots, c_k\}$. Então $|B| - |C| = 0$ e $\sum(B) + \sum(C)$ é duas vezes a área de D , isto é $2r$. Aplicamos $P(r)$ a $\mathcal{A}(0, 2r)$ enviando D a (B, C) .

Evidentemente esta construção pode ser desfeita de forma única, o que nos fornece a bijeção procurada.

Ilustramos isto com a partição (76432) de $r = 22$ (figura 1)

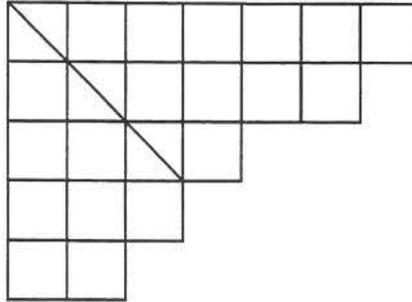


Figura 1

onde $K = 3, b_1 = 13, b_2 = 9, b_3 = 3, c_1 = 9, c_2 = 7$ e $c_3 = 3$ então $B = \{3, 9, 13\}$ e $C = \{3, 7, 9\}$.

Para $m > 0$ mudamos levemente esta construção. Seja D um diagrama de Ferrers com área r . Ajuntamos ao lado esquerdo de D , um triângulo retângulo equilátero com suporte de comprimento m , e com o ângulo reto encontrando o topo esquerdo do vértice de D . Prolongamos a hipotenusa do triângulo sobre o diagrama.

Chamamos a modificação do diagrama D' . Novamente esta linha diagonal divide D' em duas regiões. A região ao seu lado direito é uma união de $m + k$ faixas horizontais e a região abaixo é uma união de k faixas verticais.

Seja B o conjunto de duas vezes as áreas das faixas horizontais e seja C o conjunto de duas vezes as áreas das faixas verticais. Então $|B| - |C| = m$ e $\sum(B) + \sum(C)$ é duas vezes a área de D' , isto é $m^2 + 2r$. Aplicando D a (B, C) obtemos uma bijeção entre $P(r)$ e $\mathcal{A}(m, m^2 + 2r)$.

Ilustramos esta construção para $m = 3$ e novamente para a partição (76432) de $r = 22$ (figura 2).

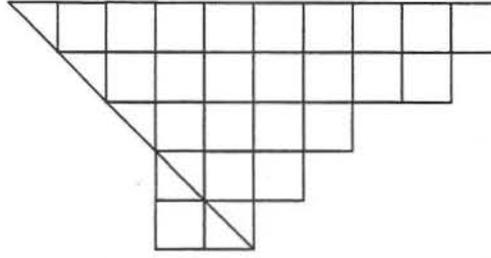


Figura 2

onde $K = 2, b_1 = 19, b_2 = 15, b_3 = 9, b_4 = 5, b_5 = 1, c_1 = 3$ e $c_2 = 1$, então temos $B = \{1, 5, 9, 15, 19\}$ e $C = \{1, 3\}$.

A argumentação para $m < 0$ é similar. Novamente ajuntamos um triângulo retângulo equilátero ao diagrama de Ferrers D .

Neste caso o triângulo tem suporte de comprimento $|m|$, e é ajustado na parte de cima de D , com ângulo reto encontrando o topo do vértice esquerdo de D . Então procedemos como no caso $m > 0$. Alternativamente podemos reduzir no caso $m > 0$ pela observação que o conjunto $\mathcal{A}(m, m^2 + 2r)$ e $\mathcal{A}(-m, m^2 + 2r)$ estão em bijeção via $(B, C) \mapsto (C, B)$.

Ilustramos esta construção para $m = -3$ e a partição (76432) de $r = 22$ (figura 3).

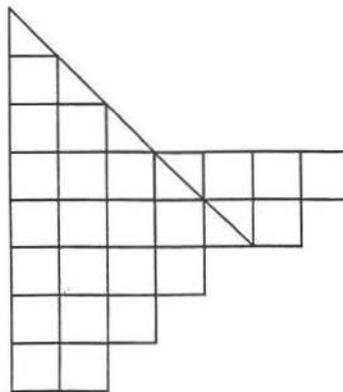


Figura 3

onde $k = 2, b_1 = 7, b_2 = 3, c_1 = 15, c_2 = 13, c_3 = 9, c_4 = 5, c_5 = 1$ então $B = \{3, 7\}$ e $C = \{1, 5, 9, 13, 15\}$.

A bijeção entre $P(r)$ e $\mathcal{A}(m, m^2 + 2r)$ determina (7.8) é assim também a identidade (7.5).

Capítulo 8

Prova analítica da Identidade do Produto Triplo de Jacobi

8.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a única demonstração puramente analítica neste trabalho.

Inicialmente demonstramos duas importantes identidades, que são utilizadas nesta prova analítica.

8.2 Duas importantes identidades

Apresentamos duas identidades que relacionam séries infinita com produto infinito, que serão utilizados para uma demonstração analítica da Identidade do Produto Triplo de Jacobi.

Teorema 8.1: Se $|q| < 1$, então

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} z^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n) \quad (8.1)$$

e

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-zq^n} \quad \text{onde } |z| < 1 \quad (8.2)$$

Prova:

Seja

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n) \quad (8.3)$$

Considerando a expansão de f em série de Maclaurin temos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad \text{onde } A_n = A_n(q) \quad (8.4)$$

e

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n) = (1+z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + zq^n) = (1+z) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{n+1}) = \\ &= (1+z) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zqq^n) = (1+z)f(zq) \end{aligned}$$

Portanto

$$f(z) = (1+z)f(zq) \quad (8.5)$$

Substituindo (8.4) em (8.5) obtemos a seguinte relação

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = (1+z) \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n q^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+1} q^n$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n q^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{n+1} q^n \quad (8.6)$$

Como A_0 é o termo independente da série de Maclaurin, temos $A_0 = f(0) = 1$

Para $N > 0$, comparando o coeficiente do termo geral z^N em ambos os lados de (8.6), temos que no lado esquerdo, o coeficiente de z^N é A_N , e no lado direito é $A_N q^N + A_{N-1} q^{N-1}$ portanto:

$$A_N = A_N q^N + A_{N-1} q^{N-1}$$

logo

$$A_N = \frac{q^{N-1}}{(1 - q^N)} A_{N-1}. \quad (8.7)$$

Usando a equação (8.7) repetidas vezes podemos expressar A_N em termos de q , isto é:

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{q^{N-1}}{(1 - q^N)} A_{N-1} = \frac{q^{N-1}}{(1 - q^N)} \frac{q^{N-2}}{(1 - q^{N-1})} A_{N-2} \\ &= \frac{q^{N-1}}{(1 - q^N)} \frac{q^{N-2}}{(1 - q^{N-1})} \frac{q^{N-3}}{(1 - q^{N-2})} A_{N-3} = \dots \\ \dots &= \frac{q^{N-1}}{(1 - q^N)} \frac{q^{N-2}}{(1 - q^{N-1})} \frac{q^{N-3}}{(1 - q^{N-2})} \dots \frac{q^0}{(1 - q)} A_0 \\ &= \frac{q^{(N-1)+(N-2)+\dots+1+0}}{(1 - q^N)(1 - q^{N-1}) \dots (1 - q)} A_0 \end{aligned}$$

Como a soma dos primeiros $N - 1$ inteiros positivos é $\frac{(N^2 - N)}{2}$ e $A_0 = 1$ temos

$$A_N = \frac{q^{(N^2 - N)/2}}{(1 - q^N)(1 - q^{N-1}) \dots (1 - q)}$$

Assim

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{(n^2 - n)/2} z^n}{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \dots (1 - q)}$$

e portanto

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2} z^n}{(1-q) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n), \quad \text{o que prova (8.1).}$$

Procedemos da mesma maneira para provarmos (8.2). Seja

$$g(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - zq^n)}.$$

Considerando a expansão de g em séries de Maclaurin temos:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \quad \text{onde } B_n = B_n(q).$$

Logo

$$\begin{aligned} g(z) &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - zq^n)} = \frac{1}{(1 - z)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - zq^n)} = \frac{1}{(1 - z)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - zq^{n+1})} = \\ &= \frac{1}{(1 - z)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - zq q^n)} = \frac{1}{(1 - z)} g(zq) \end{aligned}$$

e portanto

$$(1 - z)g(z) = g(zq)$$

isto é:

$$\begin{aligned} (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n q^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n q^n \end{aligned} \quad (8.8)$$

Consequentemente $B_0 = 1$.

Para $N > 0$ comparando o coeficiente do termo geral z^N em ambos os lados de (8.8) temos:

$$B_N - B_{N-1} = B_N q^N, \quad \text{isto é,} \quad B_N = \frac{B_{N-1}}{(1 - q^N)} \quad (8.9)$$

Por iteração de (8.9), expressamos B_N em termos de q

$$\begin{aligned} B_N &= \frac{B_{N-1}}{(1 - q^N)} = \frac{B_{N-2}}{(1 - q^N)(1 - q^{N-1})} = \frac{B_{N-3}}{(1 - q^N)(1 - q^{N-1})(1 - q^{N-2})} = \dots = \\ &= \frac{B_0}{(1 - q^N)(1 - q^{N-1}) \dots (1 - q)} = \frac{1}{(1 - q^N) \dots (1 - q)} \end{aligned}$$

Dai

$$B_n = \frac{1}{(1 - q) \dots (1 - q^n)} \quad \text{para } n \geq 1$$

Portanto

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - zq^n)} = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q) \dots (1 - q^n)} z^n$$

□

8.3 Prova analítica

Daremos agora uma prova analítica da Identidade de Jacobi.

Teorema 8.2: Se $z \neq 0$ e $|q| < 1$, então

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + zq^{2n+1})(1 + z^{-1}q^{2n+1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \quad (8.10)$$

Observamos que a identidade enunciada acima é equivalente a identidade dada no

Teorema 3.1,

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + xq^i)(1 + x^{-1}q^{i-1})(1 - q^i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n+1)/2} x^n, \quad \text{quando iniciamos o produto em } i = 0 \text{ e substituímos } x \text{ por } zq^{-1} \text{ e } q \text{ por } q^2.$$

Prova:

Inicialmente consideramos o caso em que $|z| > |q|$. Se em (8.1) que é $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(1-q)\dots(1-q^n)} z^n = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^n)$ substituimos q por q^2 e z por zq , obtemos:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2} z^n}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})}$$

Como $\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2n})} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-q^{2m+2n+2})}{(1-q^{2m+2})}$ temos:

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty} \frac{(1-q^{2m+2n+2})}{(1-q^{2m+2})} \\ &= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2m+2})} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty} (1-q^{2m+2n+2}) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Observando que para n , inteiro negativo

$$\prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{2m+2n+2}) = 0,$$

já que quando $m = -n - 1$ tem-se

$$(1 - q^{-2n-2+2n+2}) = (1 - q^0) = 1 - 1 = 0$$

Desta forma podemos estender a série em (8.11) de $0 \leq n < \infty$ para $-\infty < n < \infty$ já que não alteramos o seu valor, pois estamos introduzindo somente termos cujos valores são nulos.

Portanto

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2m+2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{2m+2n+2})$$

Se agora substituirmos em (8.1) n por m , q por q^2 e $z = -q^{2n+2}$ temos:

$$\prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{2m+2n+2}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+2nm+m}}{(1-q^2)\dots(1-q^{2m})}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) &= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2m+2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+2nm+m}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2m})} \right) \\
&= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2m+2})} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2m})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+m)^2} z^n \right) \\
&= \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2m+2})} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m z^{-m}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2m})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+m)^2} z^{n+m} \right)
\end{aligned}$$

Observando que para cada inteiro m

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+m)^2} z^{n+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n$$

já que $n + m$ e n assumem cada valor inteiro uma única vez. Assim:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2m+2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m z^{-m}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2m})} \right] \quad (8.12)$$

Se em (8.2) substituirmos n por m , q por q^2 e $z = -qz^{-1}$ obtemos:

$$\prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + z^{-1}q^{2m+1})} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m q^m z^{-m}}{(1 - q^2) \dots (1 - q^{2m})} \quad (8.13)$$

uma vez que estamos assumindo que $|z| > |q|$.

Assim substituindo (8.13) em (8.12) obtemos:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2m+2})(1 + z^{-1}q^{2m+1})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n \quad (8.14)$$

Se multiplicarmos ambos os lados da equação (8.14) por $\prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{2m+2})$ $(1 + z^{-1}q^{2m+1})$, obtemos (8.10) para $|z| > |q|$ e $|q| < 1$.

Pode-se repetir todo o argumento feito acima com z^{-1} substituindo z . Como a equação (8.10) é simétrica em z e z^{-1} nosso resultado final continuará válido, sendo que consideramos agora $|z^{-1}| > |q|$ e $z \neq 0$.

Como $|q| < 1$, pelo menos uma das condições ocorre, ou seja, $|z| > |q|$ ou $|z^{-1}| > |q|$.

Portanto (8.10) se verifica assumindo somente que $z \neq 0$ e $|q| < 1$.

Capítulo 9

Aplicações

9.1 Introdução

Neste capítulo reunimos algumas das várias aplicações da Identidade de Jacobi, destacando dentre elas, uma das provas mais simples dada ao Teorema dos Números Pentagonais de Euler, e a expressão das funções theta em termos de produtos infinitos.

9.2 Aplicações da Identidade de Jacobi

Nesta seção iremos apresentar algumas identidades importantes, que são simples consequência da Identidade de Jacobi, onde daremos uma das provas mais simples para o Teorema dos Números Pentagonais de Euler (eq. 9.3)

Corolário 9.1:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2, \quad (\text{Gauss}) \quad (9.1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1})^2, \quad (\text{Gauss}) \quad (9.2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad (\text{Euler}) \quad (9.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - q^{2n}) / (1 - q^{2n-1})], \quad (\text{Gauss}) \quad (9.4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)/2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^3, \quad (\text{Jacobi}) \quad (9.5)$$

Prova. Consideramos a Identidade do Produto Triplo de Jacobi na seguinte forma:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^{2n-1})(1 + x^{-1}q^{2n-1})(1 - q^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^n \quad (9.6)$$

Se substituirmos em (9.6), $x = 1, x = -1$ obtemos (9.1) e (9.2) respectivamente, podemos também obter (9.2) como uma consequência de (9.1) trocando q por $-q$.

Para obtermos (9.3) substituímos q por $q^{3/2}$ e x por $-q^{1/2}$ em (9.6):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{1/2}(q^{3/2})^{2n-1})(1 - q^{-1/2}(q^{3/2})^{2n-1})(1 - (q^{3/2})^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{3/2})^{n^2} (-q^{1/2})^n$$

isto é,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{3n-2})(1 - q^{3n-1})(1 - q^{3n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} \quad (9.7)$$

Uma vez que $3n, 3n-1, 3n-2$, percorrem todos os inteiros positivos temos

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{3n-2})(1 - q^{3n-1})(1 - q^{3n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

Então podemos reescrever (9.7) como:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2}$$

Para obtermos (9.4) e (9.5) substituímos, em (9.6), x por $xq^{1/2}$ e q por $q^{1/2}$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^{1/2}q^{n-1/2})(1 + x^{-1}q^{-1/2}q^{n-1/2})(1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2/2} x^n q^{n/2}$$

isto é,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^n)(1 + x^{-1}q^{n-1})(1 - q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} x^n \quad (9.8)$$

Como

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{-1}q^{n-1}) = (1 + 1/x) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{-1}q^n)$$

podemos reescrever (9.8) como

$$\begin{aligned} (1 + 1/x) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + xq^n)(1 + x^{-1}q^n)(1 - q^n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n^2-n)/2} x^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} x^{-n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} (x^n + x^{-n-1}) \quad (9.9) \end{aligned}$$

Fazendo $x = 1$ em (9.9) temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)(1 + q^n)(1 - q^n) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)(1 - q^{2n}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^n)(1 - q^n)(1 - q^{2n})}{(1 - q^n)} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})^2}{(1 - q^n)} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n})}{(1 - q^{2n-1})} \end{aligned}$$

Portanto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) / (1 - q^{2n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}$ o que prova (9.4).

Agora dividimos ambos os lados da igualdade (9.9) por $x + 1$ e após tomamos $x \rightarrow -1$. Assim obtemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) q^{(n^2+n)/2}$$

o que prova (9.5)

□

9.3 Funções theta

Daremos agora uma outra aplicação da Identidade de Jacobi que expressa as funções theta de Jacobi em termos de produtos infinitos, através de uma simples troca de variáveis.

Consideramos as quatro funções theta de Jacobi

$$\theta_1(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \operatorname{sen}(2n + 1)z$$

$$\theta_2(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n + 1)z$$

$$\theta_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz$$

$$\theta_4(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz$$

Notemos primeiramente, que as funções theta podem ser expressas da seguinte forma

$$\theta_1(z, q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz} \quad (9.10)$$

$$\theta_2(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz} \quad (9.11)$$

$$\theta_3(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} \quad (9.12)$$

$$\theta_4(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz} \quad (9.13)$$

De fato:

$$\begin{aligned} & -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz} \\ &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} (\cos(2n+1)z + i \operatorname{sen}(2n+1)z) \\ &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \operatorname{sen}(2n+1)z \\ &= -i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \operatorname{sen}(2n+1)z \\ & -i \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \operatorname{sen}(2n+1)z \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \operatorname{sen}(2n+1)z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n-1/2)^2} \operatorname{sen}(2n-1)z \right] \\ & -i \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2} \cos(2n-1)z \right] \end{aligned}$$

Observamos que a parte imaginária se anula, pois para $n = k$ na primeira série e $n = k + 1$ na segunda série da parte imaginária, para $k = 0, 1, \dots$, a soma desses termos é zero. De fato:

$$\begin{aligned} & (-1)^k q^{(k+1/2)^2} \cos(2k+1)z + (-1)^{k+1} q^{(k+1-1/2)^2} \cos(2k+2-1)z = \\ &= (-1)^k q^{(k+1/2)^2} \cos(2k+1)z - (-1)^k q^{(k+1/2)^2} \cos(2k+1)z = 0 \end{aligned}$$

Considerando ainda $n = k$ na primeira série e $n = k + 1$ na segunda série da parte real, para $k = 0, 1, \dots$, a soma desses termos é igual a:

$$(-1)^k q^{(k+1/2)^2} \operatorname{sen}(2k+1)z + (-1)^{k+2} q^{(k+1-1/2)^2} \operatorname{sen}(2k+2-1)z =$$

$$\begin{aligned} & (-1)^k q^{(k+1/2)^2} \text{sen}(2k+1)z + (-1)^k q^{(k+1/2)^2} \text{sen}(2k+1)z = \\ & 2(-1)^k q^{(k+1/2)^2} \text{sen}(2k+1)z \end{aligned}$$

Portanto temos

$$-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \text{sen}(2n+1)z = \theta_1(z, q)$$

o que prova (9.10).

A prova de (9.11) é análoga.

Considerando o lado direito de (9.12) temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} (\cos 2nz + i \text{sen} 2nz) \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \text{sen} 2nz \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz + i \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \text{sen} 2nz + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n^2} \cos 2nz + i \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{n^2} \text{sen} 2nz \\ & = \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos -2nz \right] + i \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \text{sen} 2nz + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \text{sen} -2nz \right] \\ & = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz \right] + i \left[0 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \text{sen} 2nz - \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \text{sen} 2nz \right] \\ & = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz \\ & = \theta_3(z, q) \quad \text{o que prova (9.12).} \end{aligned}$$

Analogamente prova-se (9.13).

9.4 Funções theta em termos de produtos infinitos

Se na Identidade de Jacobi

$$(zq^{1/2}; q)_{\infty}(z^{-1}q^{1/2}; q)_{\infty}(q; q)_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2} z^n \quad (9.14)$$

substituímos q por q^2 e colocamos $z = qe^{2iz}$, $z = -qe^{2iz}$, $z = -e^{2iz}$ e $z = e^{2iz}$ obtemos respectivamente

$$\theta_1(z, q) = 2q^{1/4} \operatorname{sen} z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n}) \quad (9.15)$$

$$\theta_2(z, q) = 2q^{1/4} \cos z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n}) \quad (9.16)$$

$$\theta_3(z, q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n-1} \cos 2z + q^{4n-2}) \quad (9.17)$$

$$\theta_4(z, q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n-1} \cos 2z + q^{4n-2}) \quad (9.18)$$

De fato: Substituindo q por q^2 e tomando $z = qe^{2iz}$ em (9.14) obtemos

$$\begin{aligned} (q^2 e^{2iz}; q^2)_{\infty} (e^{-2iz}; q^2)_{\infty} (q^2; q^2)_{\infty} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^2 e^{2iz} q^{2n-2})(1 - e^{-2iz} q^{2n-2})(1 - q^2 q^{2n-2}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n} e^{2iz})(1 - q^{2n-2} e^{-2iz})(1 - q^{2n}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n} e^{2iz})(1 - e^{-2iz})(1 - q^{2n} e^{-2iz}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n} e^{2iz})(1 - q^{2n} e^{-2iz}) &= \frac{1}{(1 - e^{-2iz})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}e^{2iz} - q^{2n}e^{-2iz} + q^{4n}) &= \frac{1}{(1 - e^{-2iz})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}(e^{2iz} + e^{-2iz}) + q^{4n}) &= \frac{1}{(1 - e^{-2iz})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}(2 \cos 2z) + q^{4n}) &= \frac{1}{(1 - e^{-2iz})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} e^{2niz} \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por $2q^{1/4}\text{senz}$ obtemos:

$$\begin{aligned} &2q^{1/4}\text{senz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n} \cos 2z + q^{4n}) \\ &= \frac{2\text{senz}}{(1 - e^{-2iz})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n+1/4} e^{2niz} \\ &= \frac{-i(e^{iz} - e^{-iz})}{(1 - e^{-2iz})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{2niz} \\ &= \frac{-ie^{iz}(1 - e^{-2iz})}{(1 - e^{-2iz})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{2niz} \\ &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz} \\ &= \theta_1(z, q) \quad \text{o que prova (9.15)} \end{aligned}$$

A prova de (9.16) é análoga.

Substituindo q por q^2 e tomando $z = -e^{2iz}$ em (9.14) obtemos:

$$\begin{aligned} (-qe^{2iz}; q^2)_{\infty} (-qe^{-2iz}; q^2)_{\infty} (q^2; q^2)_{\infty} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (-1)^n e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + qe^{2iz}q^{2n-2})(1 + qe^{-2iz}q^{2n-2})(1 - q^2q^{2n-2}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz} \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}e^{2iz})(1 + q^{2n-1}e^{-2iz})(1 - q^{2n}) &= \theta_3(z, q) \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}e^{2iz} + q^{2n-1}e^{-2iz} + q^{4n-2}) &= \theta_3(z, q) \end{aligned}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}(e^{2iz} + e^{-2iz}) + q^{4n-2}) = \theta_3(z, q)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n-1} \cos 2z + q^{4n-2}) = \theta_3(z, q)$$

o que prova (9.17).

Analogamente prova-se (9.18).

Referências

- [1] Andrews, G.E., *Number Theory*. Philadelphia, Saunders, 1971, p.167-172.
- [2] Andrews, G.E., Askey, R.; Roy, R. *Special Functions*. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
- [3] Bressoud, D.M., *Proofs an Confirmation: The Story of the Sign Matrix Conjecture*. Cambridge, Cambridge University Press, 1999, p. 46-51, p. 73-80.
- [4] Bak, J'; Newman, D.J., *Complex Analysis*, 2^a ed. New York, 1997, Springer-Verlag.
- [5] Boyer, C.B., *A History of Mathematics*, USA, 1968, John Wiley & Sons.
- [6] Cameron, P. J. *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*. (1994), Cambridge University Press.
- [7] Cheema, M.S. *Vector partitions and combinatorial identities*. Math. Comp. 18 (1964), p. 414-420.
- [8] Gasper, G; Rahman, M, *Basic Hypergeometric Series* (1990), Cambridge University Press.
- [9] Grosswald, E., *Topics from the Theory of Numbers*, 2 ed., Boston, 1984, Birkhäuser.

- [10] Hardy, G.H.; Wright, E.M. *An introduction to the Theory of Numbers*. Clarendon Press, Oxford, 4th ed., 1960.
- [11] Lewis, R.P., *A combinatorial proof of the triple product identity*. American Mathematical Monthly 91 (1984), p. 420-423.
- [12] MacMahon, P.A., *Combinatory Analysis*. New York, Chelsea Publishing, 1960, 2v.
- [13] MacRobert, T.M., *Functions of a complex variable*. 5^a ed., 1966, London Macmillan, N.Y.
- [14] Santos, J.P.O., *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção matemática universitária, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1^a ed., 1998, p. 172-176.
- [15] Rademacher, H., *Topics in Analytic Number Theory*. Springer-verlag, New York, 1973.
- [16] Robin, C., *A simple proof of Jacobi's triple product identity*. School of Mathematical Sciences University of Exeter EX4 4QE UK, 6 July 1999, p. 1-4.
- [17] Struik, D.J., *A Concise History of Mathematics*, 4th Ed. (1987) Dover, N.Y.
- [18] Sudler, C., *Two enumerative proofs of an identity of Jacobi*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 15 (1966), p. 67-71.
- [19] Sylvester, J.J., *A constructive theory of partitions, etc*. Collected Papers of J.J. Sylvester, vol. 4, Chelsea, New York, 1974.

- [20] Sylvester, J.J., *Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants*. Collected Mathematical Papers of, J.J. Sylvester, vol. 3, 1978.
- [21] Sylvester, J.J. With insertions by F. Franklin, *A Constructive Theory of Partitions*. Arranged in three acts, an interact, and an exodian, Am. J. Math. 5 (1882), p. 251-330.
- [22] Zolnowsky, J., *A direct combinatorial proof of the Jacobi identity*. North-Holland Publishing Company. Discrete Mathematics 9 (1974), p. 293-298.
- [23] Wright, E.M., *An enumerative proof of an identity of Jacobi*. Journal of the London Mathematical Society 40 (1965), p. 55-57.